TP n°1 : Traitement numerique de données

Emeric David
Luc Rastello

1.1) Objectif

L'objectif de ce TP, va etre de créer un filtre numerique défini sur un signal echantilloné, dans le but de comparer ces derniers, pour voir leurs avantages et inconveniants.

1.2) Etude théorique

1.2.1) Filtre numérique LP du 1er ordre

1) La fonction de transfert d'un filtre analogique LP de 1er ordre est :

$$Han1(s) := \frac{K}{1+\tau \cdot s}$$

Avec,

$$fc := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \tau}$$

2) Avec l'aide de la methode d'Euler, on pose $s := fe\left(1 - z^{-1}\right)$, ce qui nous donne :

$$Hn1(z) := \frac{K}{1+\tau \cdot fe\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$Hn1(z) := \frac{1}{1+\tau \cdot fe} \cdot \frac{K}{1 - \frac{\tau \cdot fe}{1+\tau \cdot fe} \cdot z^{-1}}$$

Rappel : $\frac{b0}{1+a1 \cdot z^{-1}}$

$$b0 := \frac{1}{1+\tau \cdot fe} \qquad a1 := -\frac{\tau \cdot fe}{1+\tau \cdot fe}$$

On a $fe := 10000$ Hz et $fc := 300$ Hz, donc $\tau := 5.3 \cdot 10^{-4}$ seconde.

Donc $b0 := \frac{1}{1+5.3 \cdot 10^{-4} \cdot 10000} = 0.159$ et $a1 := -\frac{5.3 \cdot 10^{-4} \cdot 10000}{1+5.3 \cdot 10^{-4} \cdot 10000} = -0.841$

1.2.2) Filtre numérique LP du 2eme ordre

1) On nous donne sa frequence propre $f0 := 300$ Hz et le facteur de surtension $Q := 1$. On peut en deduire que $\omega 0 := 2 \cdot \pi \cdot f0 = 1.885 \cdot 10^{3}$

$$Han2(s) := \frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \cdot \frac{s}{\omega 0} + \left(\frac{s}{\omega 0}\right)^{2}}$$

2) Avec l'aide de la méthode d'Euler, on a :

$$Hn2(z) := \frac{1}{1 + \frac{1}{Q \cdot \omega 0} \cdot fe\left(1 - z^{-1}\right) + \frac{1}{\omega 0^{2}} \cdot \left(fe\left(1 - z^{-1}\right)\right)^{2}}$$

$$Hn2(z) := \frac{1}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{2 \cdot fe^{2}}{\omega 0^{2}}}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} \cdot z^{-1} + \frac{\frac{fe^{2}}{\omega 0^{2}}}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} \cdot z^{-2}}$$

Rappel : $\frac{b0}{1 + a1 \cdot z^{-1} + a2 \cdot z^{-2}}$

On a donc : $b0 := \frac{1}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} = 0.159$

$$a1 := -\frac{\frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{2 \cdot fe^{2}}{\omega 0^{2}}}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} = -9.765$$

$$a2 := \frac{\frac{fe^{2}}{\omega 0^{2}}}{1 + \frac{fe}{Q \cdot \omega 0} + \frac{fe}{\omega 0^{2}}} = 4.462$$

1.3 Etude pratique

Analyse frequentielle du filtre

1) $Fc := 300$
$Fe := 10000$

$$\tau := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot Fc} = 5.305 \cdot 10^{-4} \qquad Te := \frac{1}{Fe} = 1 \cdot 10^{-4}$$

$$a1 := \frac{-\tau}{\tau + Te} = -0.841 \qquad b0 := \frac{Te}{\tau + Te} = 0.159$$

On retrouve les mêmes coefficients que dans la préparation.

2)

Fonction analogique : $Han1(f) := \dfrac{1}{1 + 1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \tau \cdot f}$

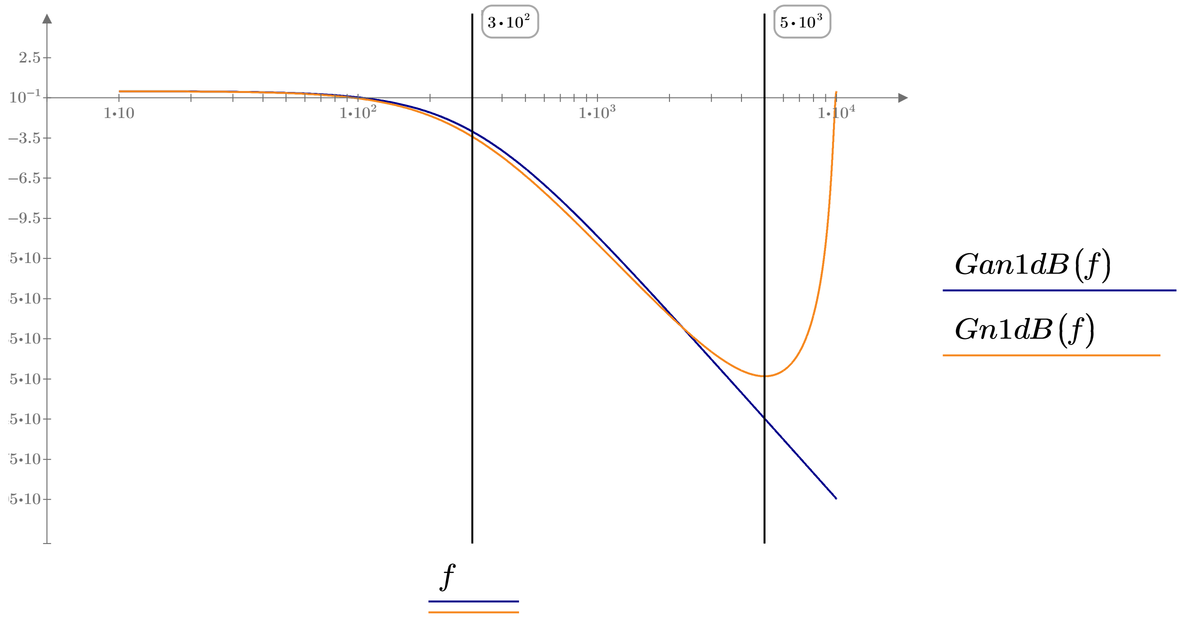
Fonction numérique : $Hn1(f) := \dfrac{b0}{1 + a1 \cdot \exp(-1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)}$

3)

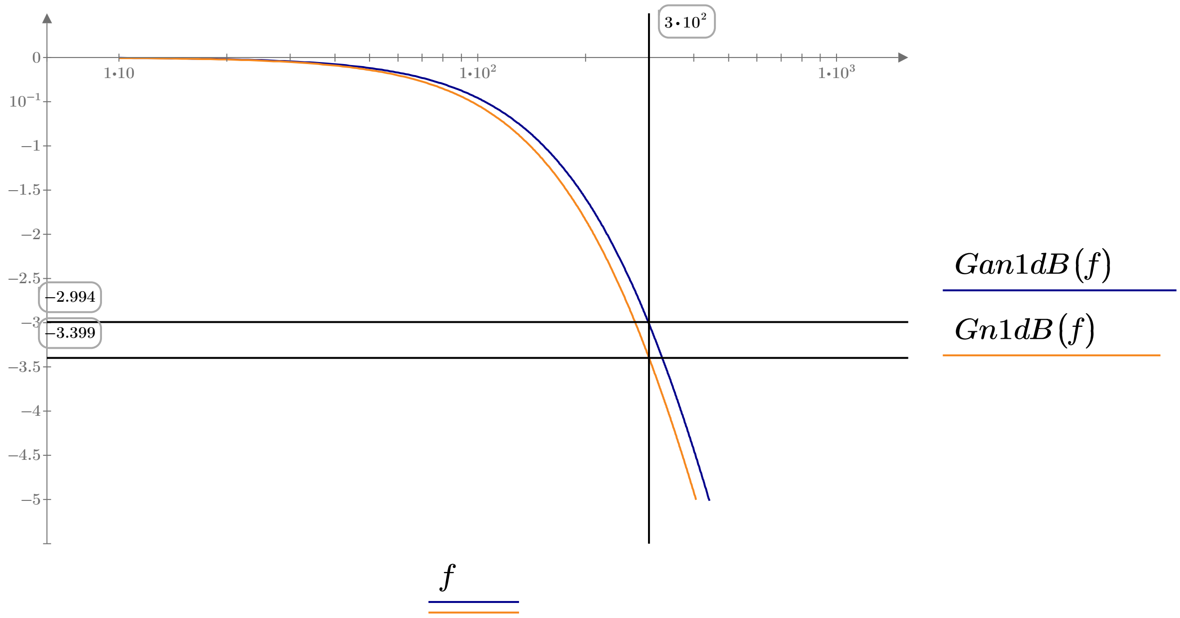
$Gan1dB(f) := 20 \cdot \log(|Han1(f)|) \qquad Gn1dB(f) := 20 \cdot \log(|Hn1(f)|)$

$\Phi an1(f) := \arg(Han1(f)) \qquad \Phi n1(f) := \arg(Hn1(f))$

$f := 10 .. 10000$



On peut voir le repliment du filtre numérique qui se trouve à Fe/2=5000 Hz.
On va maintenant comparer leur gain à la fréquence de coupure.



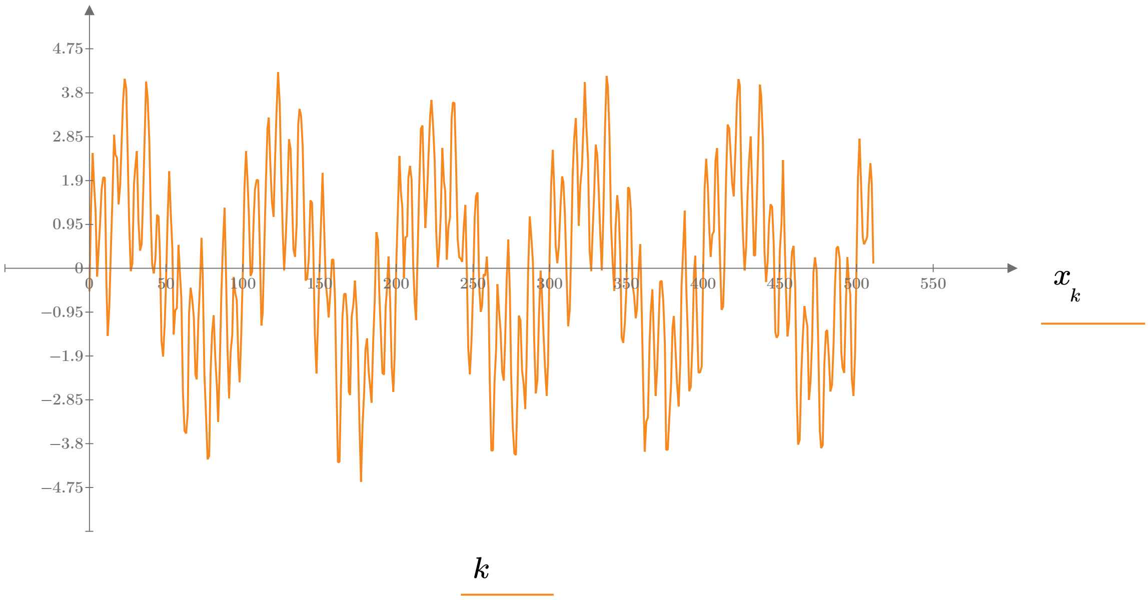
On trouve le gain du filtre analogique equivalent a -2.994 dB, et le gain du filtre numerique a -3.399 dB. On peut d'ailleur le calculer directement avec :

$Gan1dB(Fc) = -3.01$ $\qquad$ $Gn1dB(Fc) = -3.394$

Traitement des données

1) $N := 512$ $\qquad$ $k := 0 .. N-1$ $\qquad$ $x_k := 0$ $\qquad$ $y_k := 0$

2)
$x := \text{READPRN}(\text{“E:\textbackslash TNS 3\textbackslash Fichier\_Données\_Filtre\_PB2.prn”})$



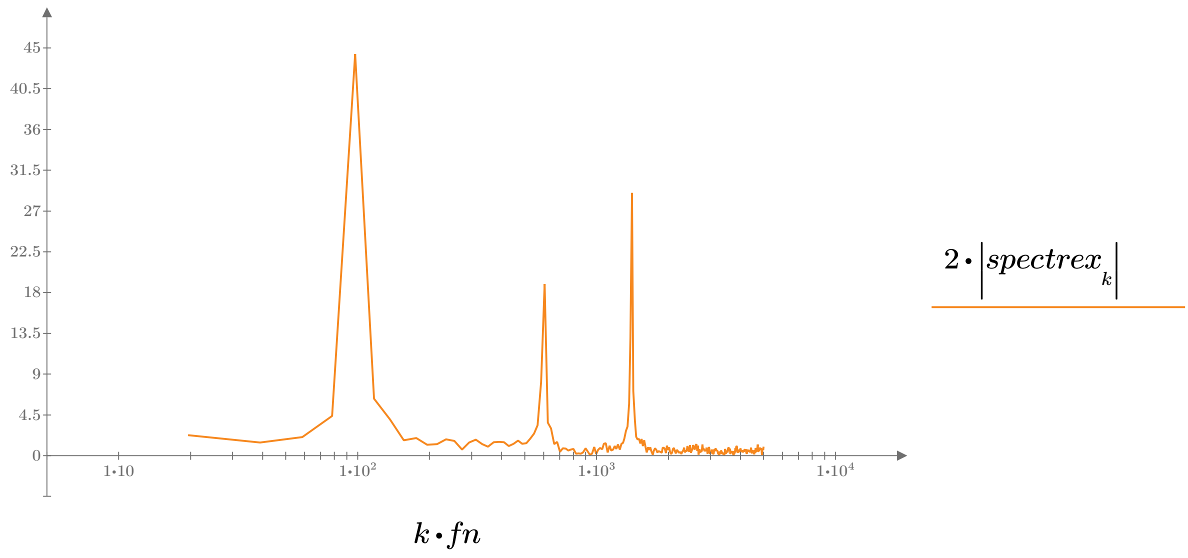
3)

Nombre de ligne : $\mathrm{length}(x) = 512$
Nombre de colonne : $\mathrm{cols}(x) = 1$
Valeur maximum : $\max(x) = 4.247$
Valeur minimum : $min(x) = -4.628$

4)

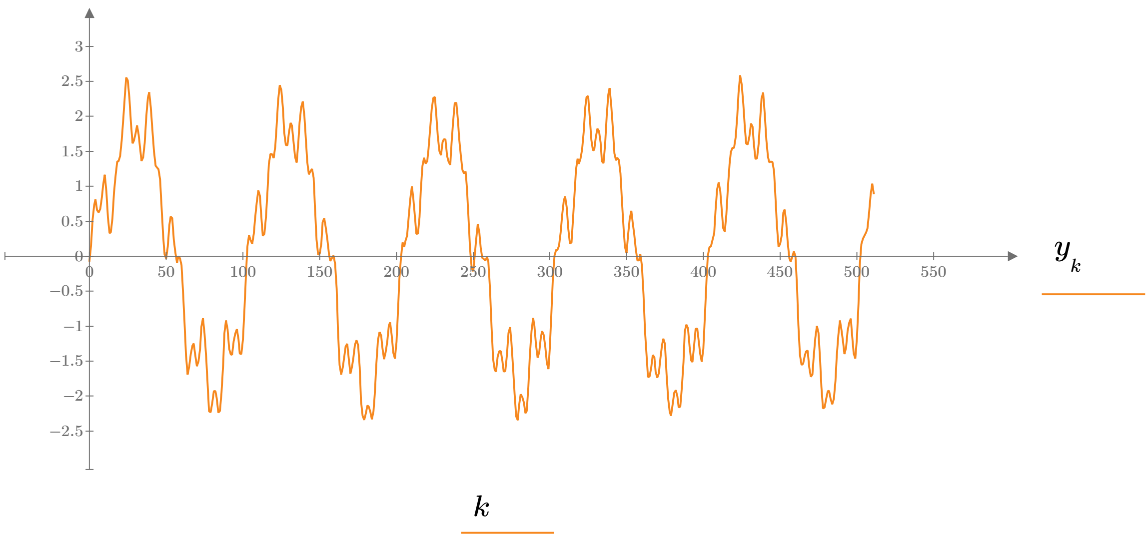
$spectrex := \mathrm{fft}(x)$

$fn := \frac{Fe}{N}$ $\qquad k := 0..N-1$



On voit la fondamentale, qui se trouve a 100Hz, et les 2 harmoniques qui se trouve au environ des 1000Hz.

$$y_k := \begin{Vmatrix} \text{if } k \le 0 \\ \quad \begin{Vmatrix} b0 \cdot x_k \end{Vmatrix} \\ \text{else if } k > 0 \\ \quad \begin{Vmatrix} b0 \cdot x_k - a1 \cdot y_{k-1} \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}$$



1.3.2 Filtre numérique LP du 2eme ordre

$$F0 := 300 \qquad Fe := 10000 \qquad Q := 1 \qquad \zeta := \frac{1}{2 \cdot Q} = 0.5$$

$$Han2(s) := \frac{1}{1 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2}$$

$$Hn2(f) := \frac{Te^2}{Te^2 + 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau - 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau \cdot \exp(-1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-1} + \tau^2 - \tau^2 \cdot \exp(-1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-2}}$$

$$toto := Te^2 + 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau + \tau^2$$

$$Hn2(f) := \frac{\dfrac{Te^2}{toto}}{1 - \dfrac{2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau}{toto} \cdot \exp(-1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-1} - \dfrac{\tau^2}{toto} \cdot \exp(-1\mathrm{i} \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-2}}$$

On peut donc maintenant recuperer a1, a2 et b0, en n'oubliant pas de remplacer 'toto'.

$$a1 := \frac{-2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau}{Te^2 + 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau + \tau^2} = -0.154 \qquad a2 := \frac{-\tau^2}{Te^2 + 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau + \tau^2} = -0.817$$

$$b0 := \frac{Te^2}{Te^2 + 2 \cdot \zeta \cdot Te \cdot \tau + \tau^2} = 0.029$$

2)

Afin que mathcad arrive a calculer la fonction et donc arrive a afficher la fonction, on integre a1, a2 et b0 a la fonction

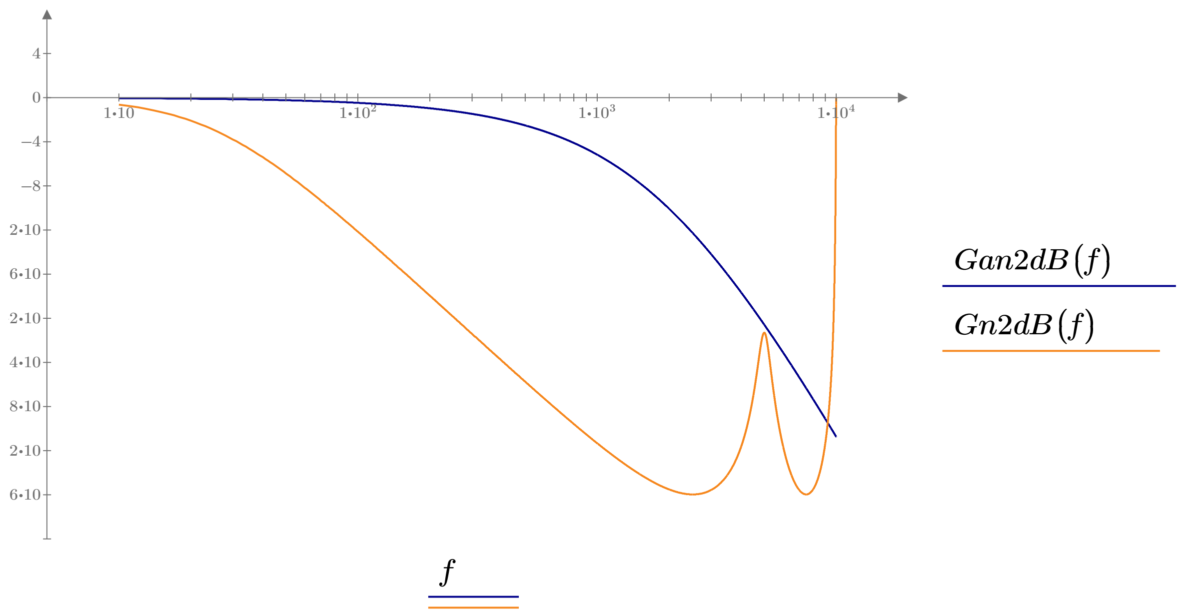
$$Hn2(f) := \frac{b0}{1 + a1 \cdot \exp(-1i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-1} + a2 \cdot \exp(-1i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot Te)^{-2}}$$

$$Gan2dB(f) := 20 \cdot \log(|Han2(f)|) \qquad Gn2dB(f) := 20 \cdot \log(|Hn2(f)|)$$

$$\Phi an2(f) := \arg(Han2(f)) \qquad \Phi n2(f) := \arg(Hn2(f))$$

$$f := 10 \, .. \, 10000$$

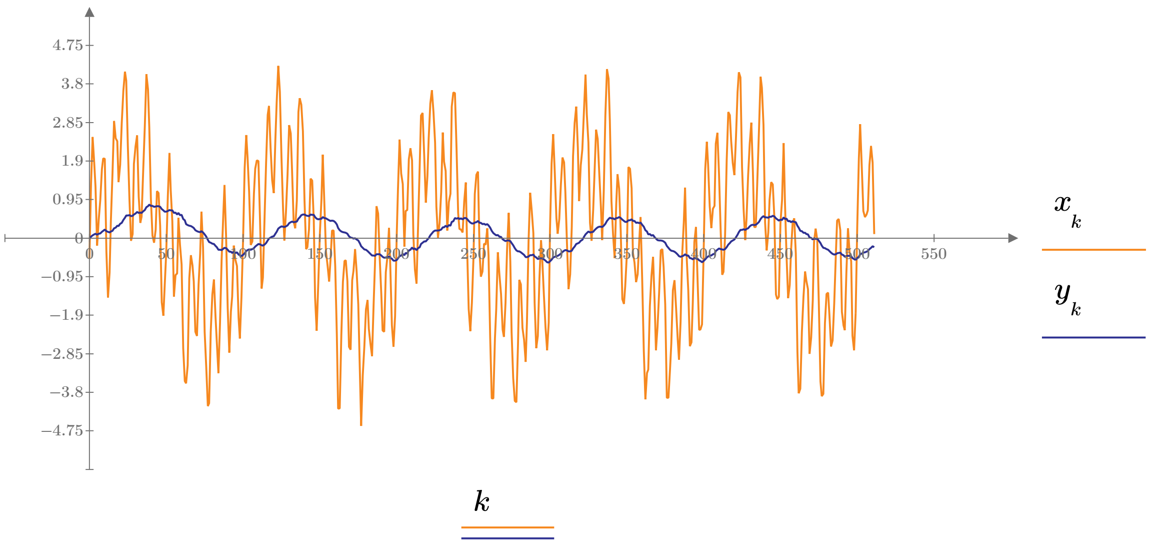
3)



On retrouve la même réponse de repliment sur la courbe du filtre numerique mais avec une reponse plus violente et avec une oscillation.

Traitement de données

$$y_k := \begin{array}{l} \text{if } k \le 0 \\ \quad b0 \cdot x_k \\ \text{else if } 0 < k \le 1 \\ \quad b0 \cdot x_k - a1 \cdot y_{k-1} \\ \text{else if } 2 \le k \\ \quad b0 \cdot x_k - a1 \cdot y_{k-1} - a2 \cdot y_{k-2} \end{array}$$

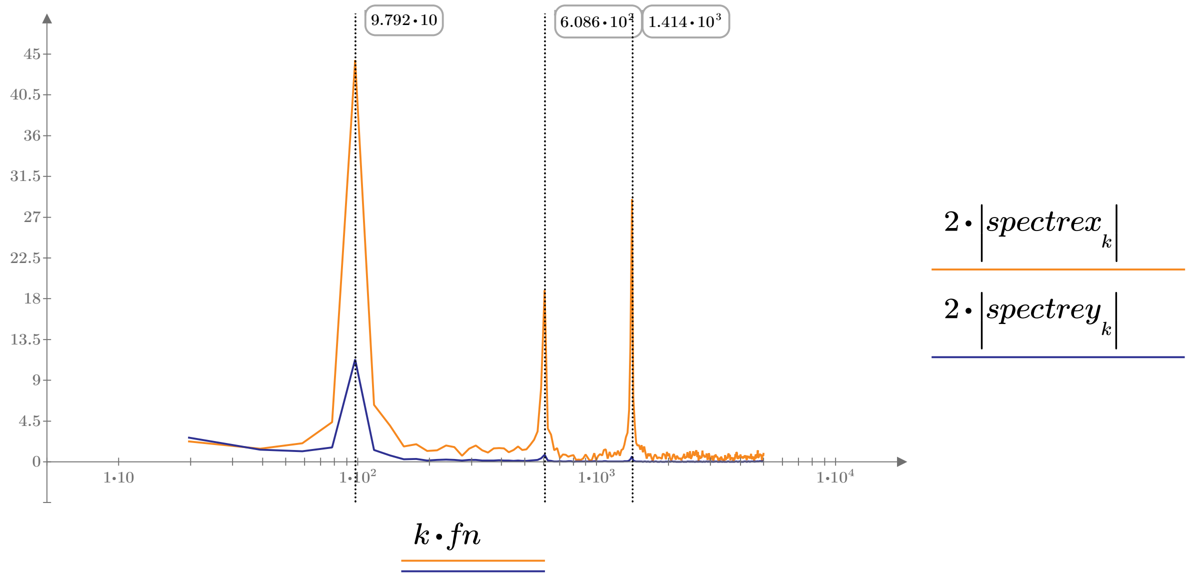


y_k ressemble au signal x_k, mais avec moins d'amplitude, surtout pour les pics de variation, qui on été lissé avec la courbe moyenne, et on remarque aussi le retard, mais qui est previsible vu que le traitement numerique est réalisé en temps différé, il suffit d'utiliser un DSP pour filtrer en temps réel.

3)

$N := 512$ $\quad$ $k := 0 .. N-1$ $\quad$ $fn := \dfrac{Fe}{N}$

$spectrex := \text{fft}(x)$ $\quad$ $spectrey := \text{fft}(y)$



On retrouve la frequence de la fondamentale a 98 Hz, de la premiere harmonique a 600Hz, et de la deuxieme a 1400Hz.

4)

On se rend compte que le spectre du filtre numerique (ici en bleu) est certe bien plus faible, environ 25% de la valeur total de la fondamentale de base, pour la fondamentale du numérique, et moins de 5% de la valeur total des harmoniques de bases, pour les harmoniques du spectre. On perd donc beaucoup en puissance, mais on grace a ceci, on perd pratiquement tous le bruit qui se trouvait avec les harmoniques.

Donc on voit bien qu'un filtre numérique est bien plus precis et presque sans aucun bruit que un filtre analogique, mais il sera beaucoup moins puissant.