



КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

ПРАКТИКУМ

МИНСК 2008

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«МИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ВЫСШИЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ КОЛЛЕДЖ»

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Практикум
для учащихся специальности 2-40 01 01
«Программное обеспечение информационных технологий»
и студентов специальности 1-08 01 01-07
«Профессиональное обучение. (Информатика)»

МИНСК 2008

УДК 681.327.1(075)
ББК 32.973.26–018.2я7
К63

Рекомендовано к изданию кафедрой информатики (протокол № 10 от 28.05.2008 г.) и Научно-методическим советом Учреждения образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж» (протокол № 10 от 11.06.2008 г.)

С о с т а в и т е л ь

М. В. Крейцер, старший преподаватель
кафедры информатики МГВРК

Р е ц е н з е н т

Ю. А. Скудняков, зав. кафедрой информатики МГВРК,
канд. техн. наук, доцент

Компьютерная графика : практикум для учащихся специальности 2-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий» и студентов специальности 1-08 01 01-07 «Профессиональное обучение. (Информатика)» / сост. М. В. Крейцер. – Мн. : МГВРК, 2008. – 40 с.
ISBN 978-985-526-015-9

Приведены описания семи практических работ, каждая из которых включает теоретические сведения, задания в соответствии с вариантом, контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы.

Предназначено для учащихся, студентов и преподавателей колледжа.

УДК 681.327.1(075)
ББК 32.973.26–018.2я7

ISBN 978-985-526-015-9

© Крейцер М. В., составление, 2008
© Оформление. Учреждение образования «Минский государственный высший радиотехнический колледж», 2008

Предисловие

Компьютерная графика как наука сформировалась во второй половине XX в. Она используется практически во всех научных и инженерных дисциплинах для создания наглядности и передачи информации, а также и в таких областях, как бизнес, медицина, индустрия развлечений (видеоигры, мультипликационные и художественные фильмы) и т. д.

При изучении учебных дисциплин «Компьютерная графика» и «Математические основы и средства компьютерной графики» используется математический аппарат матриц, знание возможностей которого необходимо в практической деятельности многих разработчиков программ для визуализации различных изображений в динамике. Помимо этого, интерес представляет фрактальная геометрия природы, сформировавшаяся в компьютерной графике в 70-е гг. XX в.

Практикум включает описание семи практических работ. Четыре работы опираются на математический аппарат матриц, пятая – связана с изучением лекальных кривых, две последних – ориентированы на закрепление знаний из теории фракталов.

Пособие предназначено для усвоения математических основ компьютерной графики, ознакомления с особенностями растровой графики, формирования навыков использования математического аппарата и приобретения умений при написании программ визуализации изображений в динамике.

Требования безопасности при работе на ПЭВМ

При эксплуатации ПЭВМ запрещается:

- подключать и отключать разъемы кабелей электропитания и блоков вентиляции при поданном напряжении электросети;
- заменять съемные элементы под напряжением;
- производить пайку в аппаратуре, находящейся под напряжением;
- пользоваться электрическими паяльниками и другими электроинструментами с напряжением 36 В и выше с незаземленными корпусами;
- оставлять без надзора включенные ПЭВМ;

- закрывать двери на замок при проведении занятий;
- самостоятельно устранять неисправности и неполадки в работе ПЭВМ.

Обо всех нарушениях правил ТБ сообщать преподавателю или дежурному лаборанту.

Требования безопасности при возникновении аварийных ситуаций

При возникновении аварийной ситуации, грозящей здоровью работающих людей, производится немедленное отключение всех рабочих мест рубильником (автоматом) любым человеком, находящимся в аудитории.

В случае поражения работающего электрическим током он должен быть немедленно освобожден от токоведущих цепей. Если пострадавший находится в бессознательном состоянии, немедленно приступить к оказанию первой помощи и вызвать скорую помощь.

Телефон скорой помощи – 103.

В случае возникновения пожара начать немедленную эвакуацию людей из лаборатории УВЦ, принять меры по его ликвидации, поставив в известность преподавателя и пожарную службу.

Телефон пожарной службы – 101.

Требования безопасности по окончании работ

При техническом обслуживании аппаратуры ПЭВМ обязательным является следующее:

- при проверке и обслуживании съемных блоков электропитания их корпуса должны заземляться;
- измерение напряжений в токоведущих частях с напряжением 36 В необходимо производить, пользуясь резиновыми ковриками и изолированными щупами;
- при прозвонке электрических цепей необходимо предварительно эти цепи обесточить и проверить отсутствие напряжения с помощью вольтметра. Прозвонку схем ТЭЗов производить прибором с источником постоянного напряжения не более 1,5 В;
- металлические корпуса приборов следует заземлять.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

Цель работы: освоение технологии преобразований геометрических объектов с использованием аппарата матриц, закрепление знаний практическим построением объектов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Точка представляется на плоскости двумя своими координатами. В алгебраическом виде точка записывается так: $P(x, y)$. В матричной форме точка представляется элементами матрицы размером (1×2) – $[x \ y]$ – вектор-строка. Либо в виде вектор-столбца $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Строку $[x \ y]$ или столбец $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ называют координатным вектором.

Для формирования такого вектора будем использовать матрицу-строку, т. е. множество точек, каждая из которых определяет координатный вектор в некоторой системе измерения. Данное множество хранится в компьютере в виде матрицы или массива чисел. Положением точек можно управлять путем манипулирования соответствующей матрицей. Линии, соединяющие точки, формируют отрезки, кривые и картинки.

Преобразование геометрического объекта, координаты вершин которого заданы в виде матрицы, можно произвести путем умножения координат объекта, заданного в виде матрицы, на геометрический оператор в виде матрицы $[T]$ размером (2×2) :

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Отражение. Отражение – поворот на 180° в *трехмерное пространство* и обратно на плоскость. Оно происходит относительно оси поворота, которая лежит в плоскости XU .

Отражение может выполняться относительно одной из координатных осей (OX или OY) либо через начало координат (относительно обеих координатных осей XU), причем, в зависимости от принятых элементов геометрического оператора, может происходить зеркальное или спиральное отражение.

Поворот на плоскости XU в двумерном пространстве осуществляется относительно нормали к плоскости (ось вращения).

Преобразование поворота вокруг точки начала координат на произвольный угол φ задается матрицей:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Повороты являются *положительными*, если они осуществляются *против часовой стрелки* относительно точки вращения.

Обратное преобразование осуществляется матрицей:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

При дискретных значениях угла φ поворот осуществляется на заданный угол (*дискретный поворот*). При изменении угла φ в цикле будет происходить *непрерывный поворот*.

Масштабирование осуществляется геометрическим оператором, у которого элементы имеют значения, не равные 0 или единице. Два одинаковых значения этих элементов увеличивают (оба элемента больше 0) или уменьшают объект (оба элемента меньше 0), в противном случае объект по форме искажается.

Пример 1. Даны координаты вершин объекта ($\triangle ABC$): $A = [2 \ 2]$, $B = [8 \ 2]$, $C = [8 \ 6]$.

Изображаем треугольник по заданным координатам (в первом квадранте). Исходное положение треугольника представлено на рис. 1.1.

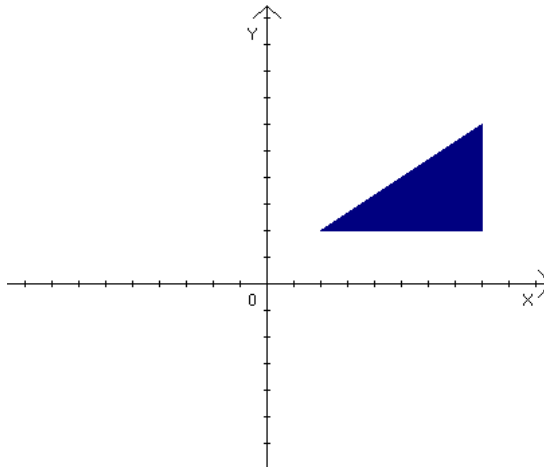


Рис. 1.1. Исходный объект

Подбираем элементы матрицы для отражения треугольника из первого квадранта в третий в следующем виде:

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Положение треугольника в результате отражения из исходного (первого) квадранта представлено на рис. 1.2.

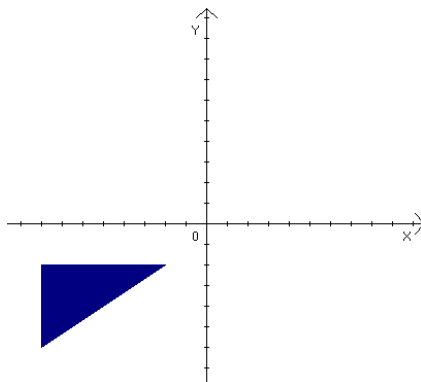


Рис. 1.2. Отраженный объект

Для выполнения дискретного поворота из первого во второй квадрант используем геометрический оператор:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Дискретный поворот треугольника из первого квадранта во второй представлен на рис. 1.3.

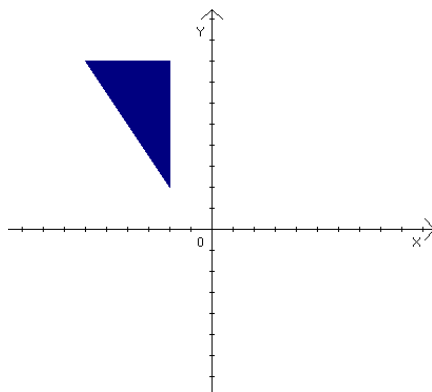


Рис. 1.3. Повернутый объект

ЗАДАНИЕ

Определить координаты вершин исходного объекта. В соответствии с вариантом (табл. 1.1) назначить элементы геометрического оператора и вычислить координаты вершин после каждого преобразования. В системе координат XOY построить исходный и промежуточные объекты.

Т а б л и ц а 1.1

Вариант	Отражение с масштабированием, коэффициент: K			4: дискретный поворот на угол, градус
	1 (два): относительно оси XU	2: относительно оси OX	3: относительно оси OY	
1	2	1	0,5	90
2	1	2	0,5	180
3	0,5	1	2	270
4	2	0,5	1	90
5	2	1	0,5	180
6	1	2	0,5	270
7	2	0,5	1	90
8	0,5	1	2	180
9	0,5	2	1	270
10	1	1	2	90
11	2	0,5	1	180
12	2	1	0,5	270
13	0,5	2	1	90
14	2	1	0,5	180
15	1	2	0,5	270
16	1	1	0,5	90
17	0,5	1	2	180
18	0,5	1	0,5	270
19	2	2	1	90
20	2	1	0,5	180
21	1	2	0,5	270
22	0,5	1	2	90
23	0,5	1	2	180
24	0,5	1	2	270
25	2	2	0,5	90
26	2	0,5	1	180
27	1	0,5	2	270
28	2	0,5	1	90
29	0,5	2	1	180
30	2	1	0,5	270

Последовательность выполнения задания

1. Величине Γ присвоить первую цифру номера учебной группы.
Если $\Gamma \leq 4$, то принять $G = 1$, в противном случае – $G = 2$.
2. Величине P присвоить последнюю цифру номера учебной группы.
3. Величине N присвоить порядковый номер учащегося или студента по учебному журналу.
4. Определить дополнительные параметры для расчета координат объектов (фигур):
 $0 < N \leq 10 \rightarrow \Delta A = 0; \Delta B = 1; \Delta C = 4; \Delta D = 3; K = 10.$
 $10 < N \leq 20 \rightarrow \Delta A = 1; \Delta B = 2; \Delta C = 3; \Delta D = 2; K = 20.$
 $20 < N \leq 30 \rightarrow \Delta A = 2; \Delta B = 3; \Delta C = 2; \Delta D = 1; K = 30.$
 $N > 30 \rightarrow \Delta A = 3; \Delta B = 4; \Delta C = 1; \Delta D = 0; K = 35.$
5. Расчет координат вершин объекта по оси X :
 $XA = K - N + \Delta A.$
 $XB = XA + G + \Delta B$, если $\Gamma \leq 4$, $XB = XB + 3.$
 $XC = XA + P + \Delta C$, если $\Gamma \leq 4$, $XC = XC + 2.$
 $XD = XC + \Delta D.$
6. Расчет координат вершин объекта по оси Y :
 $YA = XA + G + \Delta A; YB = YA + P + \Delta B.$
 $YC = YB + G + \Delta C; YD = YC - P + \Delta D.$
7. Координаты вершин представить в табличном виде.
8. В тетради через центр листа в клеточку провести координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X , O , Y . На координатные оси нанести разметку с шагом 5: 0, 5, 10, 15 и т. д. в обоих направлениях с указанием знака для отрицательных величин.
9. По исходным данным, полученным в результате расчета координат вершин, в системе координат XOY нанести точки вершин объекта и соединить их прямыми линиями. Вершины обозначить буквами. В соответствии с вариантом (табл. 1.1) назначить элементы матриц для выполнения преобразований.
10. На отдельных страницах произвести подробные вычисления новых координат вершин, построить новые положения объектов. Каждую вершину в новом положении обозначить буквами с индексом внизу в соответствии с номером указания на преобразование или сопровождать надписями на фигурах (исходный объект или объект после преобразования).

11. Анализ преобразований, формулировка выводов.

Содержание отчета

1. Исходные данные в соответствии с вариантом для выполнения работы.
2. Подробные вычисления начальных координат объекта, представление результатов расчета в табличной форме.
3. Подробные вычисления преобразованных координат объекта, представление результатов расчета в табличной форме.
4. Рисунки объектов в тетради.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Способы представления точки на плоскости.
2. Способы представления точки в трехмерном пространстве.
3. Однородные координаты.
4. Способы представления точки в однородных координатах.
5. Общий вид геометрического оператора для выполнения преобразований объектов на плоскости.
6. Недостаток геометрического оператора в виде матрицы размера (2×2) для осуществления преобразований на плоскости.
7. Свойство начала координат.
8. Вид матрицы для выполнения масштабирования.
9. Вид матрицы для выполнения поворота.
10. Вид матрицы для выполнения отражения.
11. Какие существуют способы отражения объектов через начало координат?
12. Отличия при отражении объекта через начало координат, выполняемые двумя способами. Какие названия эти отражения имеют?
13. Геометрический смысл термина «отражение».
14. Геометрический смысл термина «поворот».
15. Предметная область компьютерной графики.
16. Особенности растровой графики.
17. Особенности векторной графики.
18. Термин «информация» в компьютерной графике.
19. Что такое изображение в компьютерной графике?
20. Количество цветов, реализуемых на компьютерах.
21. Цветовые модели, используемые в компьютерной графике.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЦЕНЫ

Цель работы: освоение технологии преобразований сцены и закрепление знаний практическим построением сцен.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Исходная система координат инвариантна (неизменна) по отношению ко всем преобразованиям, совершаемым с помощью (2×2) -матрицы общего преобразования. Иногда возникает необходимость изменять положение начала координат, т. е. преобразовывать каждую точку на плоскости. Этого можно достичь путем перемещения точки начала координат или любой другой точки на плоскости

$$X^* = ax + cy + m,$$

$$Y^* = bx + dy + n.$$

К сожалению, нельзя ввести константы перемещения m и n в (2×2) -матрицу преобразования, так как это *не пространство*!

Данное затруднение можно преодолеть, используя однородные координаты.

В системе однородных координат n -мерное пространство представляется $n + 1$ измерением.

На плоскости однородные координаты представляются в виде $[hx \ hy \ 1]$, где h – произвольный множитель.

Всегда существует один набор однородных координат вида $[x \ y \ 1]$. Эта форма представляет координатный вектор $[x \ y]$ на физической плоскости XY .

В картографии и компьютерной графике этот множитель является масштабным.

Матрица преобразования для однородных координат имеет размер 3×3 . Общий вид геометрического оператора следующий:

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix},$$

где действие элементов a , b , c и d верхней части (2×2) -подматрицы точно соответствует действиям, рассмотренным ранее.

Элементы m и n являются коэффициентами перемещения в

направлениях X и Y соответственно. Полная двумерная матрица преобразования имеет вид

$$[x^* \ y^* \ 1] = [x \ y \ 1] \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ m & n & 1 \end{bmatrix} = [x+m \ y+n \ 1].$$

Отметим, что каждая точка плоскости и даже начало координат $x = y = 0$ могут быть преобразованы с использованием матрицы размером (3×3) .

ЗАДАНИЕ

В соответствии с последовательностью выполнения задания определить координаты вершин исходных объектов, назначить элементы геометрического оператора и вычислить координаты вершин после каждого преобразования. В системе координат XOY построить исходную, промежуточную и смещенную сцены.

Последовательность выполнения задания

1. Величине G присвоить первую цифру номера учебной группы.
2. Величине P присвоить последнюю цифру номера учебной группы.
3. Величине N присвоить порядковый номер учащегося или студента по учебному журналу.
4. Определить дополнительные параметры для расчета координат объектов:
 $K_1 = 1; K_2 = 1$, если $N \leq 8$;
 $K_1 = -1; K_2 = 1$, если $8 < N \leq 15$;
 $K_1 = -1; K_2 = -1$, если $15 < N \leq 23$;
 $K_1 = 1; K_2 = -1$, если $N > 23$.
5. Определить координаты вершин объектов (по 8 вершин):
 $X_A = P \cdot K_1; X_B = (|X_A| + 2) K_1$;
 $X_C = (|X_B| + 4) K_1; X_D = (|X_A| + 10) K_1$;
 $Y_A = (P + 1) K_2; Y_B = (|X_A| + 5) K_2$;
 $Y_C = Y_B; Y_D = Y_A$;
 $X_E = X_B + 1; X_K = X_C - 1; X_F = X_E; X_G = X_K$;
 $Y_F = Y_B + 4; Y_G = Y_F; Y_E = Y_B; Y_K = Y_E$;
 $X_L = X_E - 2; X_M = X_L; X_N = X_E; X_P = X_N$;
 $Y_L = Y_B + 1; Y_P = Y_L; Y_M = Y_L + 2; Y_N = Y_M$;

$$X_S = X_K; X_R = X_K; X_T = X_K + 3; X_V = X_T;$$

$$Y_R = Y_M; Y_T = Y_M; Y_S = Y_L; Y_V = Y_S.$$

6. Представить координаты вершин в табличной форме.
7. Через центр листа в клеточку провести координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X , O , Y . На координатные оси нанести разметку с шагом 5: 0, 5, 10, 15 и т. д. в обоих направлениях с указанием знака для отрицательных величин.
8. По расчетным параметрам нанести координаты вершин и соединить их прямыми линиями. Вершины обозначить соответствующими буквами.
9. Назначить элементы матрицы для выполнения отражения первого объекта в соответствии с вариантом (табл. 2.1).

Т а б л и ц а 2.1

Вариант	Отражение относительно	Коэффициент масштабирования при отражении
До 10	оси OY	2
От 11 до 20	начала координат	3
Свыше 20	оси OX	1

10. Выполнить необходимые вычисления для определения координат положения отраженного объекта.
11. Для построения видоизменения сцены выполнить второй рисунок, проведя координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X' , O' , Y' . Произвести разметку осей.
12. Построить в системе координат $X'O'Y'$ отраженный (первый объект) и второй объекты.
13. Определить параметры для расчета смещения сцены:
 $m = -(G + P + 12) K_1$; $n = -(G + 8) K_1$.
14. Назначить элементы матриц для выполнения преобразований.
15. Выполнить вычисления для преобразования этой сцены.
16. Для построения нового положения сцены выполнить рисунок, проведя координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X^* , O^* , Y^* . Произвести разметку осей.
17. Выполнить построения объектов преобразованной сцены.
18. Под каждым рисунком выполнить подпись, характеризующую сцену.
19. Анализ преобразований, формулировка выводов.

Содержание отчета

1. Исходные данные в соответствии с вариантом для выполнения работы.
2. Подробные вычисления начальных координат объекта, представление результатов расчета в табличной форме.
3. Промежуточные вычисления на отдельных страницах.
4. Начальная, промежуточная и конечная (смещенная) сцены – на отдельных рисунках.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Характеристика однородных координат.
2. Метод однородных координат.
3. Недостаток геометрического оператора в виде матрицы размера (2×2) для осуществления преобразований на плоскости.
4. Почему геометрический оператор в виде матрицы размера (3×3) позволяет выполнять перемещение начала координат?
5. На ваш взгляд, что такое сцена применительно к данной работе?
6. Функции частей геометрического оператора в виде матрицы размера (3×3) .
7. По какой причине выполняются три рисунка?
8. Если бы эта работа выполнялась на компьютере как следствие работы программы, какие варианты вы бы предложили для выполнения на мониторе визуализации построения и преобразования сцены?
9. Какие особенности моделирования динамики визуальных преобразований в статическом режиме?
10. Каковы достоинства алгоритмического задания координат объектов сцены?
11. Какую технологию реализации сцены вы бы предложили, чтобы разнообразить варианты визуализации?
12. Какие преобразования дополнительно можно реализовать, используя полностью все возможности матрицы размера (3×3) ?
13. Особенности моделирования трехмерного пространства на плоскости.
14. Как получить проекцию точки, заданную в пространстве?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3

КОМБИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Цель работы: освоение технологии преобразований, закрепление знания практическим построением объектов двумя методами, анализ сцен.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

С помощью матричных операций над координатными векторами, определяющими вершины фигур, можно управлять формой и положением поверхности. Однако для получения желаемой ориентации может потребоваться более одного преобразования. Так как операция умножения матриц не коммутативна, то важен порядок выполнения преобразования. Если над каким-либо объектом выполнить поворот и отражение

$$[X^*] = [X] [T_1] [T_2] = [X] [T_3],$$

а затем провести преобразование: отражение, поворот

$$[X^*] = [X] [T_2] [T_1] = [X] [T_4],$$

то результат будет отличным от исходного объекта.

ЗАДАНИЕ

Построить исходную сцену, выполнить преобразования объекта в соответствии с вариантом (табл. 3.1). Построить новое положение сцены.

Последовательность выполнения задания

1. Величине G присвоить первую цифру номера учебной группы.
2. Величине P присвоить последнюю цифру из номера группы.
3. Определить координаты вершин объекта:
 $X_A = P$; $X_B = X_A + 3$; $X_C = X_B + 4$; $X_D = X_A + 12$;
 $Y_A = P + 1$; $Y_B = Y_A + 5$; $Y_C = Y_B$; $Y_D = Y_A$.
4. Представить координаты вершин в табличной форме.
5. Выбрать на двойном листе в клеточку положение системы координат в соответствии с координатами вершин фигуры и заданных преобразований, провести координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X , O , Y . На координатные оси нанести разметку с шагом 5: 0, 5, 10, 15

и т. д. в обоих направлениях с указанием знака для отрицательных величин.

6. Построить исходную сцену, нанеся положение вершин точками по расчетным параметрам и соединить их прямыми линиями, вершины обозначить соответствующими буквами. Над изображением выполнить надпись: «Исходная сцена».

Т а б л и ц а 3.1

Вариант	Коэффициент масштабирования, K_m	Отражение относительно оси	Угол поворота, градус
1	2	OX	-90
2	1	OY	180
3	3	XY	-270
4	2	OX	-180
5	1	OY	90
6	2	XY	180
7	3	OY	270
8	2	OX	-90
9	1	XY	-180
10	2	OY	-270
11	2	OX	-90
12	1	OY	180
13	3	XY	-270
14	2	OX	-180
15	1	OY	90
16	2	XY	180
17	3	OY	270
18	2	OX	-90
19	1	XY	-180
20	2	OY	-270
21	2	OX	-90
22	1	OY	180
23	3	XY	-270
24	2	OX	-180
25	1	OY	90
26	2	XY	180
27	3	OY	270
28	2	OX	-90
29	1	XY	-180
30	2	OY	-270

7. Определить параметры геометрических операторов для выполнения пошаговых преобразований в соответствии с вариантом (табл. 3.1).
8. Выполнить вычисления новых положений вершин объектов для пошагового процесса преобразований. Представить координаты вершин в табличной форме.
9. Для построения видоизменения сцены выполнить второй рисунок, проведя координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X' , O' , Y' . Произвести разметку осей.
10. В системе координат $X'O'Y'$ построить положения объекта в результате пошагового преобразования. Над изображением выполнить надпись: «Сцена пошаговых преобразований».
11. Определить параметры геометрического оператора для выполнения комбинированного преобразования.
12. Выполнить вычисления новых положений вершин объекта в результате комбинированного преобразования. Представить координаты вершин в табличной форме.
13. Для построения сцены визуализации комбинированного преобразования выполнить третий рисунок, проведя координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X'' , O'' , Y'' . Произвести разметку осей.
14. В системе координат $X''O''Y''$ построить положение объекта в результате комбинированного преобразования. Над изображением выполнить надпись: «Сцена комбинированного преобразования».
15. Сравнить результаты построений, выполненные на втором и третьем рисунках. При совпадении результатов продолжить работу. В противном случае проанализировать промежуточные вычисления и, обнаружив ошибку, внести соответствующие изменения в вычисления и построения.
16. Определить параметры для расчета смещения сцены:
 $m = -(G + P + 12)$; $n = -(G + 8)$.
17. Выполнить необходимые расчеты, определив параметры, необходимые для построения нового положения сцены, исходя из результатов комбинированного преобразования.
18. На четвертом рисунке провести координатные оси со стрелками, рядом с осями указать обозначения: X^* , O^* , Y^* . Произвести разметку осей.

19. Построить конечную сцену, нанеся положение вершин точками по расчетным параметрам и соединить их прямыми линиями, вершины обозначить соответствующими буквами. Для визуализации смещения сцены изобразить исходную систему координат XOY . Над изображением выполнить надпись: «Конечная сцена».
20. Анализ преобразований, формулировка выводов.

Содержание отчета

1. Исходные данные в соответствии с вариантом для выполнения работы.
2. Подробные вычисления начальных координат объекта, представление результатов расчетов в табличной форме.
3. Промежуточные вычисления на отдельных страницах.
4. Начальная, промежуточная и конечная сцены – на отдельных листах.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Как определяется форма геометрического оператора для выполнения комбинированных преобразований?
2. Как проверить правильность выполнения комбинированных преобразований?
3. По какой причине в данной практической работе выполняется несколько рисунков?
4. Какие особенности моделирования динамики визуальных преобразований в статическом режиме?
5. Можно ли менять местами матрицы для получения обратного комбинированного преобразования?
6. Если расширить условие задания введением требования выполнять одновременно непрерывное вращение с переводом изображения в другую параллельную плоскость, то какой динамический эффект будет выполняться на компьютере?
7. Особенности смещения сцены в рассматриваемой плоскости и смещение сцены в параллельную плоскость.
8. Какую форму должен иметь геометрический оператор для реализации смещения сцены в плоскость, параллельную рассматриваемой?
9. Когда при смещении сцены может исказиться изображение?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4*

ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Цель работы: формирование умений создания универсальных подходов к решению поставленных задач, развитие логических способностей и аналитических навыков.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Некоторые инструкции к лабораторно-практическим работам, отдельным видам домашних заданий, курсовым работам и проектам в качестве исходных данных содержат численные значения, представляемые в виде таблиц. Как правило, такие инструкции не меняются на протяжении нескольких лет вследствие существенных затрат времени на коррекцию, а также требующегося значительного расхода бумаги, используемой в качестве носителя информации. Такое постоянство не обеспечивает «разграничение доступа» к информации между группами внутри учебного заведения. Применение компьютеров частично решает проблему. Но использование электронного носителя информации не исключает контрольных экземпляров на бумаге.

Положение часто усугубляется при тиражировании методических пособий типографским способом. В век компьютеризации использование коллективных сайтов создает предпосылки тиражирования решений последующими поколениями студентов.

Возможен выход из существующего положения заменой констант в таблицах формированием их значений вычислением по формулам. Для этого в качестве управляющих данных достаточно три параметра.

В МГВРК принята система нумерации групп: на первом месте стоит год формирования группы, а на последнем – ее порядковый номер на курсе. Эти два параметра и порядковый номер фамилии, имени и отчества студента в журнале группы образуют триаду, необходимую и достаточную, чтобы обеспечить формирование численных значений для вышеуказанных заданий, не повторяющихся в учебном заведении в течение десяти лет. Для реализации такого подхода задается схема алгоритма, по которому сами студенты вычисляют исходные данные.

* Для студентов специальности 1-08 01 01-07.

ЗАДАНИЕ

Разработать универсальный алгоритм формирования исходных данных для построения сцены и ее преобразования. Алгоритм предназначен для формирования данных, исходя из условия, что данные должны отличаться не только для студентов одной группы, а также между группами внутри одного года обучения и по годам. Выполнить указанные преобразования объектов и построение сцен.

Последовательность выполнения задания

1. Величине N присвоить порядковый номер учащегося или студента по учебному журналу.
2. В соответствии с вариантом (табл. 4.1 и 4.2) разработать универсальный алгоритм формирования задания для построения сцены и ее преобразования.
3. По сформированному заданию выполнить необходимые вычисления в следующей последовательности: масштабирование выполнять первым преобразованием в исходном квадранте, второе действие – отражение и совместить второе масштабирование с поворотом.
4. В системе координат XOY построить начальную сцену и по шагам конечную сцену, чтобы обосновать и визуализировать универсальный характер предложенного алгоритма.
5. Проанализировать полученные результаты и обосновать универсальный характер предложенного алгоритма.

Содержание отчета

1. Исходные данные в соответствии с вариантом для выполнения работы.
2. Предлагаемые преобразования.
3. Универсальный алгоритм формирования исходных данных.
4. Вычисления координат вершин объекта, представление результатов расчета в табличной форме.
5. Подробные вычисления преобразованных координат объекта, представление результатов расчета в табличной форме.
6. Вычисления смещений сцены.
7. Эскиз на бумаге, визуализирующий полный перечень преобразований.
8. Выводы.

Т а б л и ц а 4.1

Вариант	Преобразование			
	Коэффициент масштабирования, K_m	Отражение относительно оси	Поворот	
			угол, градус	K_m
1	2	OX	180	0,5
2	0,5	OY	-90	2
3	2	XY	180	0,5
4	2	OX	90	0,5
5	0,5	OY	-90	2
6	2	XY	-270	0,5
7	2	OY	-180	0,5
8	2	OX	90	0,5
9	0,5	XY	270	2
10	2	OY	180	0,5
11	2	OX	180	0,5
12	0,5	OY	90	2
13	2	XY	180	0,5
14	2	OX	270	0,5
15	0,5	OY	-180	2
16	2	XY	-90	0,5
17	2	OY	-180	0,5
18	2	OX	270	0,5
19	0,5	XY	-270	2
20	2	OY	90	0,5
21	2	OX	180	0,5
22	0,5	OY	-90	2
23	2	XY	180	0,5
24	2	OX	270	0,5
25	0,5	OY	-270	2
26	2	XY	180	0,5
27	2	OY	270	0,5
28	2	OX	-90	0,5
29	0,5	XY	-180	2
30	2	OY	-270	0,5

Т а б л и ц а 4.2

Вариант	Объект	Исходный квадрант	Характер расположения в квадранте
1	Прямоугольный треугольник	1	Катеты \perp осям XU
2	Прямоугольный треугольник	1	Основание \perp оси OY , удалено от оси OX
3	Равносторонний треугольник	1	Основание \perp оси OY
4	Равносторонний треугольник	1	Основание \perp оси OX
5	Равносторонний треугольник	1	Основание \perp оси OX
6	Равносторонний треугольник	1	Основание \perp оси OY
7	Квадрат	1	Стороны \perp осям XU
8	Квадрат	1	Стороны под углом 45° к осям XU
9	Прямоугольный треугольник	2	Катеты \perp осям XU
10	Прямоугольный треугольник	2	Основание \perp оси OY
11	Равносторонний треугольник	2	Основание \perp оси OY
12	Равносторонний треугольник	2	Основание \perp оси OX
13	Равносторонний треугольник	2	Основание \perp оси OX
14	Равносторонний треугольник	2	Основание \perp оси OY
15	Квадрат	2	Стороны \perp осям XU
16	Квадрат	2	Стороны под углом 45° к осям XU
17	Ромб	3	Длинная диагональ \perp оси OX
18	Ромб	3	Длинная диагональ \perp оси OY
19	Трапеция	3	Основание \perp оси OX
20	Трапеция	3	Основание под углом 45° к осям XU
21	Квадрат	3	Стороны под углом 45° к осям XU
22	Квадрат	3	Стороны \perp осям XU
23	Ромб	3	Длинная диагональ \perp оси OX
24	Ромб	3	Длинная диагональ \perp оси OY
25	Трапеция	4	Основание \perp оси OX
26	Трапеция	4	Основание под углом 45° к осям XU
27	Квадрат	4	Стороны под углом 45° к осям XU
28	Квадрат	4	Стороны \perp осям XU
29	Прямоугольный треугольник	4	Катеты \perp осям XU
30	Прямоугольный треугольник	4	Основание \perp оси OY , удалено от оси OX

Контрольные вопросы

1. Зачем необходим алгоритмический подход при формировании исходных данных для учебных работ?
2. Какие параметры можно использовать при создании универсального алгоритма мобильного формирования исходных данных для выполнения практической работы?
3. С какой целью, на ваш взгляд, предусмотрена данная практическая работа?
4. Где, на ваш взгляд, при решении каких проблем можно использовать такой алгоритмический подход?
5. В каких, на ваш взгляд, действиях при выполнении данной работы происходит развитие аналитического и логического мышления?
6. Даст ли выполнение данной работы «толчок» вашему мышлению к критической оценке методов решения других задач и выработке стремления к универсализму?
7. Внимательно изучите инструкцию к данной работе в части изображения таблиц. Согласны ли вы, что представление каждой таблицы иным образом (например, на нескольких страницах), может привести к увеличению числа строк и возможности появления ошибки при невнимательном изучении вариантов?
8. В чем причины возникновения ошибок в процессе самостоятельной работы обучаемых с текстами инструкций к заданиям?
9. Характерные ошибки, связанные с изучением инструкций, при выполнении лабораторно-практических работ.
10. Каким образом при разработке заданий к лабораторно-практическим работам можно совсем отказаться от использования таблиц, задающих варианты условий решения поставленных задач, или хотя бы уменьшить их размеры?
11. Почему алгоритмический подход к формированию заданий сокращает возможность появления ошибок?
12. Гносеологические корни ошибок в процессе обучения?
13. Психофизиологические факторы детерминизма появления ошибок в процессе обучения.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5

ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

Цель работы: закрепление знаний практическим построением объектов, анализ построений.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Термин «сплайн» (spline) известен с XVIII в., когда кораблестроители и архитекторы использовали тонкие деревянные или металлические планки, называемые сплайнами, для создания изогнутых линий, например, сечения корпуса корабля. Такая лента вставлялась между штифтами, соответствующими положению контрольных точек на кривой, и за счет упругости образовывала гладкую линию контура. Оказалось, что эта линия математически описывается сегментами полиномиальных кривых степени не выше третьей. За такими составными полиномиальными кривыми и закрепилось название сплайны.

Гладкие кривые – такие, функция первой производной которых непрерывна на всем интервале существования параметра. В некоторых случаях гладкой должна быть не только функция первой производной, но и производных более высокого порядка.

Во многих задачах компьютерной графики и автоматизации проектирования нас вполне устраивает, если *кривая* проходит в *малой окрестности* заданных контрольных точек и при этом обеспечивается ее гладкость. Сегодня сплайнами называют линии, которые изгибаются по контрольным точкам, расположенным на них (или рядом с ними).

Контуры описываются математическими формулами, в частности, используется так называемая кривая Безье, названная в честь французского математика Пьера Безье, который применял математические кривые и поверхности в процессе конструирования кузова автомобиля фирмы «Рено».

Семейство кривых, из которых используется частный случай кривой третьей степени, описывается таким уравнением:

$$P(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1t(1-t)^2 + 3P_2t^2(1-t) + P_3t^3,$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Такую кривую можно построить, если известны координаты четырех точек, называемых контрольными. Из четырех кон-

трольных точек кривая проходит только через две, поэтому эти точки иначе называются опорными (или узлами, так как «связывают» элементарные кривые друг с другом, чтобы образовать сложный единый контур). Две другие контрольные точки не лежат на кривой, но их расположение определяет кривизну кривой, поэтому эти точки иначе называются управляющими точками, а линии, соединяющие управляющую и опорную точку, – управляющей линией (рис. 5.1).

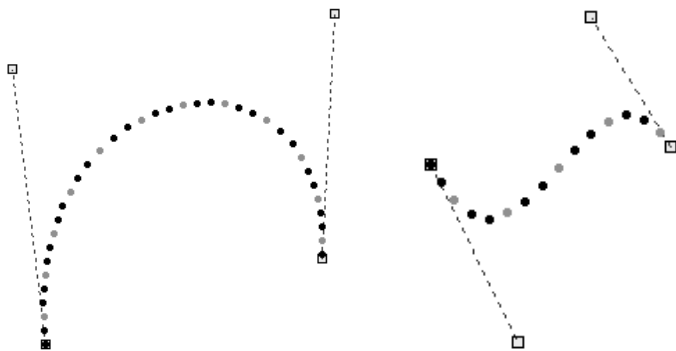


Рис. 5.1. Изображение кривых Безье шариками (результат работы программы)

Кривая Безье непрерывно заполняет промежуток между начальной и конечной точками и является гладкой кривой. Кривая начинается в первой опорной точке, касаясь отрезка своей управляющей линией. Это позволяет гладко соединять две кривые Безье друг с другом: управляющие линии располагаются вдоль одной прямой. Кривая Безье симметрична. Она сохраняет свою форму, даже при изменении направления вектора кривой на противоположное направление (поменять местами начальную и конечную опорные точки). Это свойство находит применение при создании составных контуров.

Кривая Безье сохраняет свою форму при масштабировании. Если существуют только две контрольные точки (опорные точки) или управляющие линии коллинеарные (лежат на одной прямой), кривая превращается в отрезок прямой. Изменение положения хотя бы одной из контрольных точек ведет к изменению формы всей кривой Безье. Это свойство – источник бесконечного разнообразия векторных объектов.

Пример 1. Дано: $P_0 = 0$; $P_1 = 7$; $P_2 = 7$; $P_3 = 0$.

Подставляются в уравнение заданные величины и вычисляются значения функции при дискретных значениях t :

$$P(0) = 0 \cdot (1-0)^3 + 21 \cdot 0 \cdot (1-0)^2 + 21 \cdot 0^2 \cdot (1-0) + 0 \cdot 0^3 = 0;$$

$$P(0,1) = 0 \cdot (1-0,1)^3 + 21 \cdot 0,1 \cdot (1-0,1)^2 + 21 \cdot 0,1^2 \cdot (1-0,1) + 0 \cdot 0,1^3 = 1,89;$$

$$P(0,2) = 0 \cdot (1-0,2)^3 + 21 \cdot 0,2 \cdot (1-0,2)^2 + 21 \cdot 0,2^2 \cdot (1-0,2) + 0 \cdot 0,2^3 = 3,36;$$

$$P(0,3) = 0 \cdot (1-0,3)^3 + 21 \cdot 0,3 \cdot (1-0,3)^2 + 21 \cdot 0,3^2 \cdot (1-0,3) + 0 \cdot 0,3^3 = 4,41;$$

$$P(0,4) = 0 \cdot (1-0,4)^3 + 21 \cdot 0,4 \cdot (1-0,4)^2 + 21 \cdot 0,4^2 \cdot (1-0,4) + 0 \cdot 0,4^3 = 5,04;$$

$$P(0,5) = 0 \cdot (1-0,5)^3 + 21 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5)^2 + 21 \cdot 0,5^2 \cdot (1-0,5) + 0 \cdot 0,5^3 = 5,25;$$

$$P(0,6) = 0 \cdot (1-0,6)^3 + 21 \cdot 0,6 \cdot (1-0,6)^2 + 21 \cdot 0,6^2 \cdot (1-0,6) + 0 \cdot 0,6^3 = 5,04;$$

$$P(0,7) = 0 \cdot (1-0,7)^3 + 21 \cdot 0,7 \cdot (1-0,7)^2 + 21 \cdot 0,7^2 \cdot (1-0,7) + 0 \cdot 0,7^3 = 4,41;$$

$$P(0,8) = 0 \cdot (1-0,8)^3 + 21 \cdot 0,8 \cdot (1-0,8)^2 + 21 \cdot 0,8^2 \cdot (1-0,8) + 0 \cdot 0,8^3 = 3,36;$$

$$P(0,9) = 0 \cdot (1-0,9)^3 + 21 \cdot 0,9 \cdot (1-0,9)^2 + 21 \cdot 0,9^2 \cdot (1-0,9) + 0 \cdot 0,9^3 = 1,89;$$

$$P(1) = 0 \cdot (1-1)^3 + 21 \cdot 1 \cdot (1-1)^2 + 21 \cdot 1^2 \cdot (1-1) + 0 \cdot 1^3 = 0.$$

Схема построения приведена на рис. 5.2.

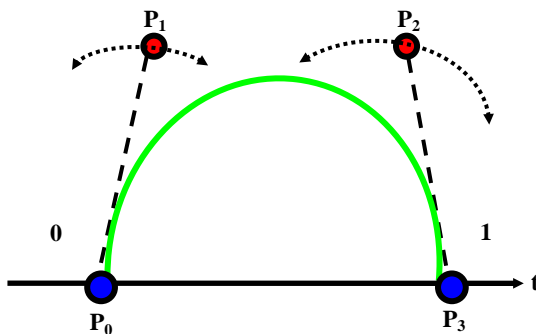


Рис. 5.2. Кривая Безье (выпуклая симметричная). Схема построения

ЗАДАНИЕ

Построить 4 кривых Безье в соответствии с вариантом (табл. 5.1), а для пятой определить значение t , при котором $P(t) = 0$. Проанализировать построения.

Последовательность выполнения задания

1. Величине Γ присвоить первую цифру номера учебной группы.
Если $\Gamma \leq 4$, то принять $G = 1$, в противном случае принять $G = 2$.
2. Величине Q присвоить последнюю цифру из номера группы.
3. Определить дополнительные параметры для расчета координат кривой по данным табл. 5.1.

Таблица 5.1

Вариант	D	R	Вариант	D	R	Вариант	D	R
1	8	6	11	10	8	21	12	9
2	8	7	12	10	9	22	12	10
3	8	9	13	11	6	23	12	11
4	8	10	14	11	7	24	13	6
5	9	6	15	11	8	25	13	7
6	9	7	16	11	9	26	13	8
7	9	8	17	11	10	27	13	9
8	9	10	18	12	6	28	13	10
9	10	6	19	12	7	29	13	11
10	10	7	20	12	8	30	13	12

4. Произвести подробные вычисления значения $P(t)$ при следующих данных:
 кривая 1: $P_0 = 0; P_1 = D; P_2 = D; P_3 = 0$;
 кривая 2: $P_0 = 0; P_1 = -D; P_2 = -D; P_3 = 0$;
 кривая 3: $P_0 = G; P_1 = D; P_2 = -R; P_3 = G$;
 кривая 4: $P_0 = Q; P_1 = -D; P_2 = R; P_3 = -Q$;
 кривая 5: $P_0 = 0; P_1 = D; P_2 = -R; P_3 = 0$.
5. Выбрать для каждой кривой соответствующий масштаб для изображения результатов расчета.
6. Для каждого построения кривой в тетради на листах в клеточку провести координатную ось со стрелкой (обозначить t), на оси выбрать интервал от 0 до 1. В этом интервале на координатную ось нанести разметку штрихами с шагом 0,1 величины интервала, указав под штрихами их величину.
7. По исходным данным, полученным в результате расчетов, нанести соответственно полученным значениям над (под) каждой координатной осью точки и соединить их плавной линией. Указать обозначения контрольных точек и через знак «=» указать их численное значение.
8. Выполнить анализ построений, сформулировать выводы.

Содержание отчета

1. Подробные вычисления промежуточных и конечных значений функции $P(t)$.
2. Эскизы на бумаге четырех кривых Безье.
3. Вывод уравнения для кривой 5.

4. Определение и вычисление значения величины t для кривой 5.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое кривая Безье?
2. Где и когда работал Пьер Безье и почему он на основе исследования лекальных кривых предложил в практических целях использовать функцию со степенью не выше трех?
3. Какой недостаток данной практической работы для визуальной характеристики кривой Безье?
4. Что необходимо сделать, чтобы исключить указанный недостаток?
5. Почему одна пара контрольных точек, используемых для образования кривой Безье, называются опорными, а другая – управляющими?
6. Какую роль играют управляющие линии в образовании кривой Безье?
7. Роль коэффициентов в уравнении кривой Безье.
8. Какие методы можно использовать для решения уравнения третьей степени?
9. Объясните последовательность вычисления корней уравнения третьей степени.
10. Как определить точное направление управляющих линий?
11. К чему приводит изменение положения управляющих точек при изображении кривых Безье?
12. Каковы последствия (недостаток) при использовании в форме кузова движущихся объектов негладких поверхностей?
13. Какую роль играет концентрация напряжений при изготовлении объемных листовых деталей в штампах на прессах?
14. Что такое коллинеарные линии? Что следует в этом случае?
15. Если заданы две точки для построения кривой Безье, каков будет результат?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6

ПОСТРОЕНИЕ УЗОРОВ СЕРПИНСКОГО В ТРЕУГОЛЬНИКАХ

Цель работы: развитие логических способностей и аналитических навыков, закрепление знаний практическим построением объектов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Точечный метод. В качестве демонстрации принципов программирования задач двумерной графики рассматривается узор Серпинского, который строится по точкам (рис. 6.1).

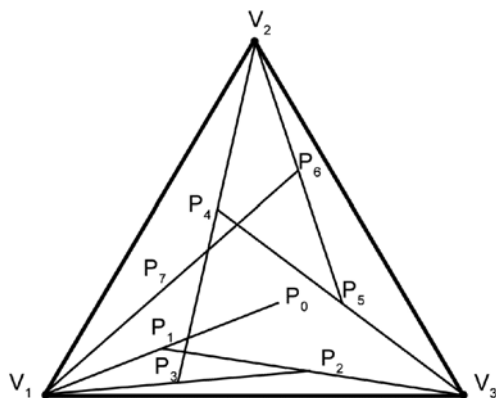


Рис. 6.1. Точечный метод построения узора Серпинского

Предположим, что в исходном состоянии у нас есть три точки на плоскости, причем их положение описано в системе координат X, Y : (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) . Далее выполняется следующая процедура:

- шаг 1 – случайно выбирается некоторая точка внутри треугольника, образованного заданными вершинами;
- шаг 2 – случайно выбирается одна из трех вершин;
- шаг 3 – выбирается точка, равноотстоящая от первой выбранной точки и от выбранной вершины;
- шаг 4 – новая точка включается в изображение и помечается маркером, например, кружком;

- шаг 5 – исходная точка заменяется этой новой точкой;
- шаг 6 – повторяется вся процедура, начиная с шага 2.

Таким образом, каждая новая точка, созданная на шаге 3, включается в изображение и выводится на устройство отображения. Узор является случайным объектом, но в пределе его форма стремится к детерминированному объекту.

Рекурсивный метод. Рассмотренные процедурные методы формирования графических образов применяются рекурсивно, детализируя на каждом очередном цикле ранее созданный образ, сохраняя характерные признаки формы исходного объекта.

Рассмотрим построение узора в треугольнике, предложенное в 1915 г. (автор – польский математик Вацлав Серпинский).

Если провести отрезки между средними точками прилежащих сторон исходного треугольника, то он будет разбит на четыре треугольника, причем в средний треугольник точки узора никогда не попадут, поскольку дальнейшее разбиение продолжается в треугольниках, исключая центральный (рис. 6.2).



Рис. 6.2. Рекурсивный метод построения узора Серпинского

Если проанализировать структуру изображения, то можно сделать вывод, что независимо от количества сформированных точек, они никогда не появляются в середине треугольных областей.

Если к *тетраэдру* применить процедуру построения узора Серпинского (точечным и рекурсивным разбиением), то в результате могут быть получены интересные разновидности трехмерных узоров Серпинского.

ЗАДАНИЕ

Построить узоры Серпинского в треугольниках точечным и рекурсивным методами.

Последовательность выполнения задания

1. В тетради на листах в клеточку построить два эскиза равно-сторонних треугольников.
2. В первом треугольнике рекурсивным методом за 5 итераций выполнить построение.
3. Во втором треугольнике выполнить построение точечным ме-тодом, причем число итераций должно быть не менее 50.
4. Проанализировать результаты построения узоров обоими ва-риантами и сформулировать выводы.

Содержание отчета

1. Эскиз узора на бумаге, построенный на основе рекурсивного метода.
2. Эскиз узора на бумаге, построенный точечным методом.
3. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Когда Вацлав Серпинский выполнял построение узора в рав-ностороннем треугольнике?
2. В чем достоинство метода рекурсии, используемого для по-строения узора Серпинского?
3. В чем недостатки точечного метода, используемого для по-строения узора Серпинского?
4. Какое название имеет функция, являющаяся фундаментом точечного метода, используемого для построения узора Сер-пинского?
5. Какие еще узоры построил Вацлав Серпинский?
6. В каком алгоритмическом языке программирования впервые была введена функция рекурсии и с какой целью?
7. Почему эскизы геометрических объектов, полученные в ре-зультате выполнения очередной итерации, называются поко-лениями?
8. Почему при построении узора Серпинского точечным мето-дом на компьютере невозможно получить результат даже при очень большом числе итераций? В чем причина?
9. Почему на экране монитора прекращается визуальное изме-нение построения узора Серпинского рекурсивным методом?
10. Каковы ограничения при построении узоров на компьютере?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7

ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ И СНЕЖИНКИ КОХА

Цель работы: развитие логических способностей и аналитических навыков, закрепление знаний практическим построением объектов.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Фрактал в математике – это множество, обладающее самоподобной структурой. Оно состоит из элементов, являющихся уменьшенной копией всего множества. В настоящее время астрономы, проанализировав данные, полученные в рамках программы цифрового обзора неба, пришли к выводу, что материя во Вселенной распределена в виде фракталов.

Фракталы – объекты сложной формы, которые описываются простыми *циклами итераций*.

Прямая линия является одномерной, а плоскость – двумерной, однако существуют «создания» и в промежутке между ними. Например, можно определить кривые бесконечной длины, но лежащие внутри конечного прямоугольника: их размерность располагается где-то между 1 и 2.

Понять математическую суть проблемы можно, воспользовавшись рекурсивным применением кривой Коха.

Шведский математик *Хельге фон Кох* в 1904 г. открыл интересное явление – кривую, которая была названа в его честь. Эта кривая вызвала огромный интерес в математическом мире, поскольку она образует бесконечно длинную линию внутри области конечной длины.

Последовательные поколения кривой Коха обозначаются K_0, K_1, K_2, \dots . Форма нулевого поколения K_0 – это просто горизонтальная линия единичной длины. Для создания кривой K_1 разделим прямую K_0 на три равные части и заменим среднюю из них треугольным «зубцом» со сторонами длиной $1/3$. Очевидно, что длина всей линии составляет $4/3$. Кривая второго поколения K_2 образована путем построения зубца на каждом из четырех отрезков линии K_1 (рис. 7.1).

Для создания кривой Коха K_{n+1} из K_n необходимо разделить каждый отрезок кривой K_n на три равные части и заменить

среднюю часть зубцом в форме равностороннего треугольника.

В течение этого процесса длина каждого отрезка увеличивается в $4/3$ раза, следовательно, общая длина кривой последующего поколения в $4/3$ раза больше длины кривой предыдущего поколения. Тогда общая длина кривой K_i составляет $(4/3)^i$ и увеличивается с ростом i . Когда i стремится к бесконечности, длина кривой становится бесконечной.

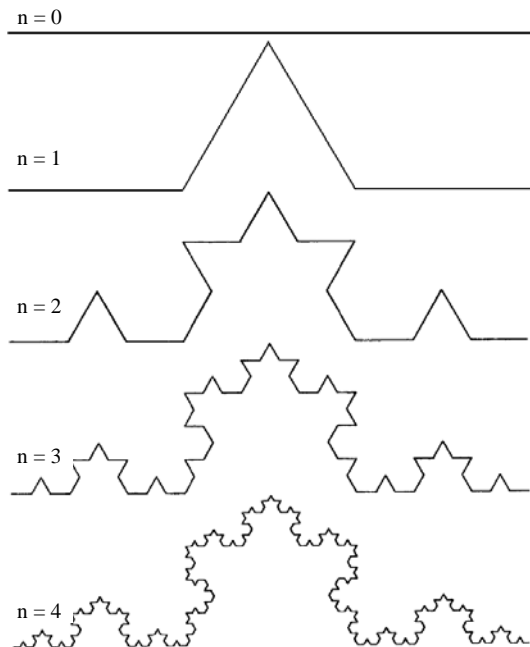


Рис. 7.1. Последовательность построения кривой Коха

Снежинка Коха (рис. 7.2) образована из трех соединенных вместе кривых Коха. Периметр P_i i -го поколения этой формы втрое больше длины простой кривой Коха и, следовательно, равен $P_i = 3 \times (4/3)^i$, что, разумеется, неограниченно возрастает при увеличении i . Однако площадь, ограниченная снежинкой Коха, растет довольно медленно и в пределе S_∞ составляет всего $8/5$ от площади S_0 !

Таким образом, ребро снежинки Коха становится все более извилистым и все более длинным, а ее площадь остается ограниченной.

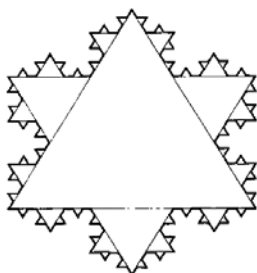


Рис. 7.2. Снежинка Коха

Самоподобие кривой Коха с точки зрения генезиса (процесса образования) предопределяет естественный рекурсивный метод для визуализации кривой любого порядка (ограничение в компьютерной графике – расстояние между пикселями).

Многие кривые и изображения обладают одним особенно важным свойством: они *самоподобны*. Интуитивно это понятие означает, что эти формы выглядят «одинаковыми» при любом масштабировании: не имеет значения, насколько было увеличено изображение такой кривой – она имеет одну и ту же степень сложности. Одни кривые в точности самоподобны: какое бы сильное увеличение не применялось, увеличенное изображение выглядит в точности как оригинал (за исключением, быть может, поворота и сдвига). Другие кривые являются только статистически самоподобными: здесь неправильности и изгибы кривой при любом увеличении картинки не изменяются только в «среднем».

Геометрию фракталов разработал *Бенуа Мандельброт* в 70-х гг. XX в., который положил начало новому направлению в математике. Именно он обобщил и популяризировал исследование природы самоподобия и назвал различные формы самоподобных кривых – *фракталы* (лат. fractus – фрагментированный, нерегулярный, что также означает англ. fractional dimensional – дробной размерности).

Исследования в этом направлении привели к созданию методов, позволяющих описать очень интересные явления, неподвластные средствам традиционной геометрии. Специалисты по компьютерной графике использовали идеи геометрии фракталов не только для создания графических объектов причудливой формы, но и для моделирования многих физических явлений, кото-

рые другими методами представить не удастся. Графические объекты, созданные с помощью методов геометрии фракталов, получили название *графталы*.

Стройное здание геометрии фракталов опирается на два *положения*:

- 1) зависимость между геометрией формы и масштабом;
- 2) внутренняя симметрия (самосимметрия).

Прямая линия является одномерной, а плоскость – двумерной, однако существуют «создания» и в промежутке между ними. Например, можно определить кривые бесконечной длины, но лежащие внутри конечного прямоугольника: их размерность располагается где-то между 1 и 2. Для объемных объектов размерность определяется в промежутке между 2 и 3.

Математик *Феликс Хаусдорф* (1868–1942) ввел понятие дробных размерностей на основе анализа простых самоподобных объектов типа прямых, квадратов и кубов.

Предположим, что мы разбиваем прямую *линию* единичной длины на N равных отрезков. Очевидно, что отношение длины

каждого из отрезков к длине исходной прямой равно $r = \frac{1}{N}$. Те-

перь сделаем то же с квадратом: разделим его на N одинаковых квадратов. Тогда соотношение сторон каждого маленького

квадрата к исходному квадрату составляет $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}}$. Разделим

куб на N одинаковых частей и обнаружим, что отношение стороны каждого «нового куба» к стороне исходного куба равно

$$r = \frac{1}{N^{\frac{1}{3}}} \text{ раз.}$$

Просматривается *закономерность*: *размерность объекта* фигурирует в показателе степени при основании N . Можно дать такое определение: *объект* имеет *размерность* D , если при делении его на N равных частей каждая часть будет иметь сторону

меньше стороны *исходного объекта* в $r = \frac{1}{N^{\frac{1}{D}}}$ раз.

После логарифмирования обеих частей этого равенства (по любому основанию) получим:

$$D = \frac{\log N}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \text{ или } D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}.$$

Так как при переходе от одного поколения к следующему кривая Коха создается увеличением числа новых отрезков (4) к трем исходным, то $D = \frac{\log 4}{\log 3} = 1,26$ или $D = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,2186$.

Повторим аналогичные рассуждения в отношении узора Серпинского. В каждом цикле стороны треугольника делятся пополам, и формируется объект, в который включаются три из четырех образовавшихся треугольников. Следовательно, получим $D = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1,58496$.

ЗАДАНИЕ

Построить кривую и снежинку Коха. Вычислить длину кривой, периметр и площадь снежинки Коха, определить их дробную размерность. Логически обосновать предельную площадь снежинки Коха.

Последовательность выполнения задания

1. В тетради на листе в клеточку выполнить построение кривой Коха на всю ширину листа в следующей последовательности:
 - вначале изобразить три эскиза, отражающих исходное, промежуточное и начальное положение в построении кривой Коха;
 - а затем на четвертом эскизе осуществить окончательное построение, фиксируя на бумаге число итераций.
2. Вычислить длину построенной кривой Коха и ее дробную размерность.
3. В тетради на листе в клеточку выполнить построение снежинки Коха в следующей последовательности:
 - изобразить тонкими линиями исходный треугольник;
 - выполнить необходимые построения;
 - полученный узор обвести широкими линиями.
4. Вычислить периметр, площадь и дробную размерность построенной снежинки Коха.

5. Описать полученный узор квадратом, используя другой цвет линий.
6. Проанализировать построения и сформулировать выводы.

Содержание отчета

1. Эскиз на бумаге кривой Коха с указанием числа итераций.
2. Вычисление по формуле значения длины и дробной размерности кривой Коха.
3. Эскиз на бумаге снежинки Коха с указанием числа итераций.
4. Вычисление периметра, площади и дробной размерности снежинки Коха.
5. Выводы.

Контрольные вопросы

1. Что такое фракталы?
2. Что такое графталы?
3. Когда и по какой причине Кох занялся изучением некоторых геометрических объектов?
4. Почему эскизы геометрических объектов, полученные в результате выполнения очередной итерации, называются поколениями?
5. На какие положения опирается теория фракталов?
6. Чему в пределе будет равна площадь снежинки Коха?
7. Как логически из выполненных построений снежинки Коха обосновать ее предельную площадь?
8. Какое значение имеет геометрия фракталов в современном естествознании?
9. Гносеологические корни геометрии фракталов.
10. Понятие «дробная размерность».
11. Кто ввел понятие «дробная размерность»?
12. Какую роль играет понятие «дробная размерность» в современной математике?
13. Как определить дробную размерность геометрического объекта?
14. Как определить дробную размерность треугольника Серпинского?
15. Как определить дробную размерность кривой Коха?
16. Как определить дробную размерность снежинки Коха?

Рекомендуемая литература

1. Альберг, Дж. Теория сплайнов и ее приложения / Дж. Альберг, Э. Нильсен, Дж. Уолш. – М. : Мир, 1972. – 316 с. : ил.
2. Божокин, С. В. Фракталы и мультифракталы / С. В. Божокин, Д. А. Паршин. – Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 128 с.
3. Газале, М. Гномон : от фараонов до фракталов / М. Газале. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 272 с.
4. Гордеюк, А. В. Мобильное формирование исходных данных для различных задач / А. В. Гордеюк, М. В. Крейцер, Ю. А. Скудняков // Современная радиоэлектроника : научные исследования и подготовка кадров : сб. материалов (по итогам работы МНПК, Минск, 10–11 апреля 2007 г.) : в 4 ч. / М-во образования Респ. Беларусь, УО «Минский гос. высш. радиотехн. колледж» ; под общ. ред. проф. Н. А. Цырельчука. – Мн. : МГВРК, 2007. – Ч. 4. – С. 33–35.
5. Ермильченко, Н. В. Энциклопедия живописи для детей. Импрессионизм / Н. В. Ермильченко. – М. : Белый город, 2003. – 47 с. : ил.
6. Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах: Основы теории / Р. М. Кроновер. – М. : Постмаркет, 2000. – 352 с.
7. Мандельброт, Б. Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 656 с.
8. Морозов, А. Д. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем / А. Д. Морозов, Т. Н. Драгунов. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2003. – 304 с.
9. Морозов, А. Д. Введение в теорию фракталов / А. Д. Морозов. – М. ; Ижевск : Ин-т компьютер. исслед., 2002. – 160 с.
10. Мюллер, С. Модернизация и ремонт ПК / С. Мюллер. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2003. – 1184 с. : ил.
11. Пайтген, Х.-О. Красота фракталов / Х.-О. Пайтген, П. Х. Рихтер. – М. : Мир, 1993. – 176 с.
12. Роджерс, Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – М. : Мир, 2001. – 604 с. : ил.
13. Федер, Е. Фракталы / Е. Федер. – М. : Мир, 1991. – 254 с. : ил.

Содержание

Предисловие	3
<i>Требования безопасности при работе на ПЭВМ</i>	<i>3</i>
<i>Требования безопасности при возникновении аварийных ситуаций</i>	<i>4</i>
<i>Требования безопасности по окончании работ</i>	<i>4</i>
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 1	
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ	5
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 2	
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЦЕНЫ	11
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 3	
КОМБИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ	15
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 4	
ФОРМИРОВАНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ	19
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 5	
ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ БЕЗЬЕ	24
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 6	
ПОСТРОЕНИЕ УЗОРОВ СЕРПИНСКОГО В ТРЕУГОЛЬНИКАХ	29
ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА 7	
ПОСТРОЕНИЕ КРИВОЙ И СНЕЖИНКИ КОХА	32
Рекомендуемая литература	38

Учебное издание

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРАФИКА

Практикум

для учащихся специальности 2-40 01 01
«Программное обеспечение информационных технологий»
и студентов специальности 1-08 01 01-07
«Профессиональное обучение. (Информатика)»

Составитель

Крейцер Марат Владимирович

Зав. ред.-издат. отд. О. П. Козельская

Редактор Г. Л. Говор

Компьютерная верстка А. П. Пучек

План издания 2008 г. (поз. 45)

Изд. лиц. № 02330/0131735 от 17.02.2004.

Подписано в печать 26.11.2008. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Бумага писчая. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.

Усл. печ. л. 2,32. Уч.-изд. л. 1,47. Тираж 120 экз. Заказ 270.

Издатель и полиграфическое исполнение Учреждение образования
«Минский государственный высший радиотехнический колледж»
220005, г. Минск, пр-т Независимости, 62.

