# Mathematik 2 für Maschinenbauer - Übung 2 (Lösungen)

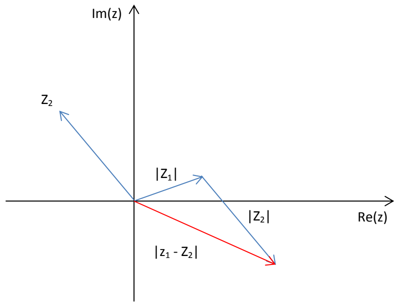
Komplexe Zahlen (Teil 2)

**Aufgabe 1** Begründen Sie grafisch die für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gültige Behauptung:

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

.

Dreiecksungleichung: In einem Dreieck kann eine Seite nicht länger sein als die Summe der beiden anderen.



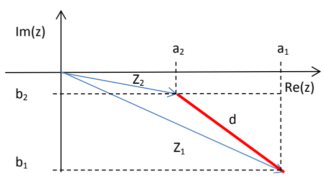

**Aufgabe 2** Welchen Abstand haben $z_1 = 8 - 5\,\mathrm{i}$ und $z_2 = 4 - 2\,\mathrm{i}$ in der Gaußschen Zahlenebene?

Lt. Skizze gilt nach Pythagoras:

$$\begin{aligned}
d^2 &= (\mathrm{Re}(z_1) - \mathrm{Re}(z_2))^2 + (\mathrm{Im}(z_1) - \mathrm{Im}(z_2))^2 \\
&= (8-4)^2 + (-5-(-2))^2 \\
&= 16 + 9 \\
&= 25 \\
\Rightarrow d &= 5
\end{aligned}$$

Verallgemeinert man dieses Vorgehen, so erhält man für zwei beliebige komplexe Zahlen $z_1 = a_1 + \mathrm{i}\, b_1$ und $z_2 = a_2 + \mathrm{i}\, b_2$ als Formel für den Abstand

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{|a_1 - a_2|^2 + |b_1 - b_2|^2}$$



**Aufgabe 3** Berechnen Sie

a) $\frac{1}{5+4\,\mathrm{i}}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5+4\,\mathrm{i}} &\overset{\text{mit konjugiert komplexem}}{\underset{\text{erweitern}}{=}} \frac{1}{5+4\,\mathrm{i}} \cdot \frac{5-4\,\mathrm{i}}{5-4\,\mathrm{i}} \\
&= \frac{5-4\,\mathrm{i}}{5^2+4^2} \\
&= \frac{5-4\,\mathrm{i}}{41} \\
&= \frac{5}{41} - \frac{4}{41}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

b) $\frac{(3+2\,\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5+\mathrm{i}}$

$$\begin{aligned}
\frac{(3+2\,\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{5+\mathrm{i}} &= \frac{6-3\,\mathrm{i}+4\,\mathrm{i}+2}{5+\mathrm{i}} \\
&= \frac{8+\mathrm{i}}{5+\mathrm{i}} \\
&\overset{\text{mit konjugiert komplexem}}{\underset{\text{erweitern}}{=}} \frac{(8+\mathrm{i})(5-\mathrm{i})}{(5+\mathrm{i})(5-\mathrm{i})} \\
&= \frac{40-8\,\mathrm{i}+5\,\mathrm{i}+1}{25+1} \\
&= \frac{41}{26} - \frac{3}{26}\,\mathrm{i}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 4** Rechnen Sie die komplexen Zahlen

$$z_1 = -1 - \mathrm{i}; \quad z_2 = -4\,\mathrm{i}; \quad z_3 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}}; \quad z_4 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4}{3}\pi}$$

in Exponential- bzw. karteische Form um. Bestimmen Sie die konjugiert komplexen Zahlen. Skizzieren Sie die Punkte in der Gaußschen Zahlenebene.

a) $z_1 = -1 - \mathrm{i}$

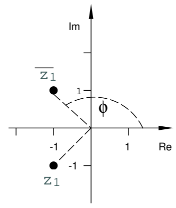
konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z_1} = -1 + \mathrm{i}$

Betrag bzw. Länge: $|z_1| = |\overline{z_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Winkel mit positiver x-Achse (3. bzw. 2. Quadrant, siehe Skizze):

$\phi_{z_1} = 45^\circ + 180^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{5\pi}{4}, \qquad \phi_{\overline{z_1}} = 45^\circ + 90^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{3\pi}{4}$

$\Rightarrow z_1 = -1 - \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{5}{4}\pi}, \qquad \overline{z_1} = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3}{4}\pi}$




b) $z_2 = -4\,\mathrm{i}$

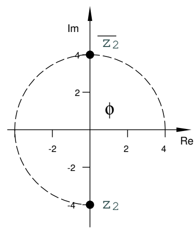
konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z_2} = 4\,\mathrm{i}$

Betrag bzw. Länge: $|z_2| = |\overline{z_2}| = \sqrt{(-4)^2} = 4$

Winkel mit positiver x-Achse:

$\phi_{z_2} = 270^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{3\pi}{2}, \qquad \phi_{\overline{z_2}} = 90^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow z_2 = -4\,\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{3}{2}\pi}, \qquad \overline{z_2} = 4\,\mathrm{i} = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}}$




c) $z_3 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$

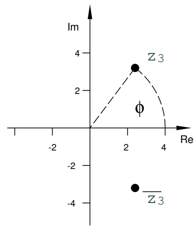
konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z_3} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}$

Betrag bzw. Länge: $|z_3| = |\overline{z_3}| = 4$

Winkel mit positiver x-Achse: $\phi_{z_3} = 1$ im Bogenmaß (!!!) ($1 \mathrel{\hat{=}} 57.3^\circ$)

$\phi_{\overline{z_3}} = -1 \mathrel{\hat{=}} -57.3^\circ = 302.7^\circ$

$\Rightarrow z_3 = 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}} = 4(\cos(1) + \mathrm{i} \cdot \sin(1)), \qquad \overline{z_3} = 4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}} = 4(\cos(-1) + \mathrm{i} \cdot \sin(-1))$




d) $z_4 = 3e^{i\,\frac{4}{3}\pi}$

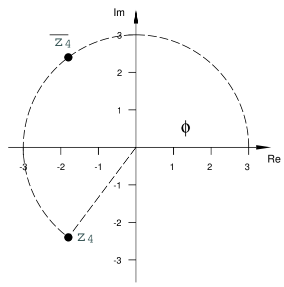
konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z_4} = 3e^{-i\,\frac{4}{3}\pi}$

Betrag bzw. Länge: $|z_4| = |\overline{z_4}| = 3$

Winkel mit positiver x-Achse: $\phi_{z_4} = \frac{4}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} 240°$, $\qquad \phi_{\overline{z_4}} = -\frac{4}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \mathrel{\hat{=}} 120°$

$\Rightarrow z_4 = 3e^{i\,\frac{4}{3}\pi} = 3\left(\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\right) \;=\; 3\left(-\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;=\; -\frac{3}{2} - i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overline{z_4} = 3e^{-i\,\frac{4}{3}\pi} = 3\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) \;=\; 3\left(-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \;=\; -\frac{3}{2} + i\,\frac{3\sqrt{3}}{2}$



**Aufgabe 5** Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen Formel, dass für die reellen Winkelfunktionen gilt:

$$\begin{aligned}
\cos(\phi) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2} \\
\sin(\phi) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{2\,\mathrm{i}} \\
\tan(\phi) &= \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}}
\end{aligned}$$

Die Eulersche Formel lautet: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos(\phi) + \mathrm{i}\sin(\phi)$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} &= \cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)+\cos(\phi)-\mathrm{i}\sin(\phi) \\
&= 2\cos(\phi) \\
\Rightarrow \cos(\phi) &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\right) \\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi} &= \cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)-(\cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)) \\
&= 2\,\mathrm{i}\sin(\phi) \\
\Rightarrow \sin(\phi) &= \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\right) \\
\Rightarrow \tan(\phi) &= \frac{\sin}{\cos} \\
&= \frac{\frac{1}{2\,\mathrm{i}}(\cos(\phi)-\mathrm{i}\sin(\phi))}{\frac{1}{2}(\cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi))} \\
&= \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{(\cos(\phi)-\mathrm{i}\sin(\phi))}{\cos(\phi)+\mathrm{i}\sin(\phi)}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6** Beim Drehstrom gibt es Neutralleiter und drei Leiter, deren Spannungen mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, aber jeweils um die Phase $\frac{2\pi}{3}$ gegeneinander verschoben sind. Somit liegen an den unterschiedlichen Leitern die Spannungen

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= U_0\,(\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)) \\
u_2(t) &= U_0\left(\cos\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
u_3(t) &= U_0\left(\cos\left(\omega t+\frac{4}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\omega t+\frac{4}{3}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$

an. Zeigen Sie, dass sich zu allen Zeitpunkten die Summe der SPannungen neutralisiert, d.h. $u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=0$ für alle $t\in\mathbb{R}$ gilt.

Darstellung in Exponentialform:

$$u_1(t)=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t};\quad u_2(t)=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right)};\quad u_3(t)=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t+\frac{4}{3}\pi\right)}$$

Damit ergibt sich

$$u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)=U_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\cdot\underbrace{\left(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{3}\pi}\right)}_{=0\,?}$$

und es gilt

$$
\begin{aligned}
1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2}{3}\pi}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4}{3}\pi} &= 1+\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\frac{4}{3}\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\sin\left(\frac{4}{3}\pi\right)\\
&= 1-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 7** Berechnen Sie die trigonometrischen Darstellungen der komplexen Zahlen

$$z_1 = -1+\mathrm{i},\ z_2 = \sqrt{27}+3\,\mathrm{i} \quad \text{und} \quad z_3 = 36$$

und bestimmen Sie mit ihrer Hilfe $\frac{z_1^{10}\cdot z_2^4}{z_3^2}$. Geben Sie das Ergebnis auch in kartesischer Form an.

$$
\begin{aligned}
|z_1| &= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}\\
\phi_{z_1} &= 135^\circ \mathrel{\hat{=}} \frac{3}{4}\pi \quad \text{(Winkelhalbierende 2./4. Quadrant)}\\
\Rightarrow z_1 &= -1+\mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_2| &= \sqrt{\sqrt{27}^2+3^2} = \sqrt{27+9} = 6\\
\phi_{z_2} &= \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{27}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}, \ \text{(1. Quadrant)}\\
\Rightarrow z_2 &= 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|z_3| &= 36\\
\phi_{z_3} &= 0 \quad \text{(liegt auf der reellen Achse)}\\
\Rightarrow z_3 &= 36\,(\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0))
\end{aligned}
$$

Und damit lässt sich berechnen (Längen werden potenziert, Winkel multipliziert!):

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1^{10} \cdot z_2^4}{z_3^2} &= \frac{\sqrt{2}^{10}\left(\cos\left(\frac{30\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{30\pi}{4}\right)\right) 6^4 \left(\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)\right)}{36^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}^{10} \cdot 6^4}{36^2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{30}{4}\pi} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4}{6}\pi} \\
&= 2^5 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{30}{4}\pi + \mathrm{i}\,\frac{4}{6}\pi} \\
&= 2^5 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{15}{2} + \frac{2}{3}\right)\pi} \\
&= 32\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{45+4}{6}\right)\pi} \\
&= 32\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{49}{6}\pi} \quad \text{(Vielfache von } 2\pi \text{ können vom Argument abgezogen werden)} \\
&= 32\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}} \\
&= 32\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \\
&= 16\sqrt{3} + 16\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 8** Berechnen Sie

a) $\left(-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right)^3$

$$
\begin{aligned}
z &:= \Big(\underbrace{-1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}}_{=:w}\Big)^3 \\
\Rightarrow |w| &= \sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2} = 2 \quad \text{und} \quad \phi_w = \arctan\left(-\sqrt{3}\right) + \pi = \frac{2}{3}\pi \quad \text{(2. Quadrant)} \\
\Rightarrow w &= 2\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
\Rightarrow z &= w^3 = 8\left(\cos(2\pi) + \mathrm{i}\sin(2\pi)\right) = 8
\end{aligned}
$$

b) $2^{-1000}\left(\frac{5+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}-\frac{1}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\right)^{999}$

$$\begin{aligned}
z &= 2^{-1000}\left(\underbrace{\frac{5+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}-\frac{1}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}}_{=:w}\right)^{999}\\
\Rightarrow w &= \frac{5+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}-\frac{1}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}\\
&= \frac{5+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}-\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\\
&= \frac{4+4\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\\
&= 1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}\\
\Rightarrow |w| &= 2\\
\Rightarrow \phi_w &= \arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}\quad \text{(1. Quadrant)}\\
\Rightarrow z &= 2^{-1000}\cdot 2^{999}\left(\cos\left(999\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(999\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\left(333\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(333\pi\right)\right)\quad \text{(Vielfache von } 2\pi \text{ können abgezogen werden)}\\
&= \frac{1}{2}(\cos(\pi)+\mathrm{i}\sin(\pi))\\
&= \frac{1}{2}\cdot(-1)\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 9**

a) Berechnen Sie alle dritten Wurzeln aus der Zahl $-125\,\mathrm{i}$ in trigonometrischer und in kartesischer Form.
Zunächst sollte man die Zahl in die trigonometrische Darstellung bringen

$$\begin{aligned}
w &:= -125\,\mathrm{i} \quad \text{neg. senkrechte Achse} \Rightarrow \hat{\phi}_w=\frac{3}{2}\pi, \hat{r}_w=125\\
\Rightarrow w &= 125\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$

Allgemein gilt für den Winkel $\phi$ und die Länge $r$ der $n$-ten Einheitswurzeln:

$$\phi_k=\frac{\hat{\phi}+2k\pi}{n}\quad k=0,\dots,n-1, \qquad \text{und} \qquad r=\sqrt[n]{\hat{r}}$$

Damit erhält man hier 3 Einheitswurzeln $z_0, z_1$ und $z_2$ mit $n = 3, \quad k = 0, 1, 2$:

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= \frac{\frac{3}{2}\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \\
r_0 &= \sqrt[3]{125} = 5 \quad \text{(gilt für alle 3 Lösungen)} \\
\Rightarrow z_0 &= 5\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 5\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi \\
r_1 &= r_0 = 5 \\
\Rightarrow z_1 &= 5\left(\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)\right) \\
&= 5\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \\
&= -\frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= \frac{\frac{3}{2}\pi + 4\pi}{3} = \frac{11}{6}\pi \\
r_2 &= r_0 = 5 \\
\Rightarrow z_2 &= 5\left(\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)\right) \\
&= 5\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{i}\right) \\
&= \frac{5}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

b) Geben Sie die Polardarstellung der komplexen Zahl $z = -18(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i})$ an und berechnen Sie die Quadratwurzeln aus dieser Zahl.

$$
\begin{aligned}
z &= -18\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) \\
&= -18 - 18\sqrt{3}\,\mathrm{i} \\
\Rightarrow \hat{r}_z &= |-18| \cdot \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 18 \cdot \sqrt{4} = 36 \\
\Rightarrow \hat{\phi}_z &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{4}{3}\pi \quad \text{(3. Quadrant)}
\end{aligned}
$$

die “18” hat keinen Einfluss auf den Winkel, aber das negative Vorzeichen schon!

Mit der allgemeinen Formel (siehe Teil a.) )folgt

$$
\begin{aligned}
z_0 &= 6\left(\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)\right) \\
&= 6\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) \\
&= -3 + 3\sqrt{3}\,\mathrm{i} \\
z_1 &= 6\left(\cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)\right) \\
&= 6\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\mathrm{i}\right) \\
&= 3 - 3\sqrt{3}\,\mathrm{i}
\end{aligned}
$$