Partie II

I

- Fonctions logarithme de base a

II

- Fonctions exponentielle de base a

III

- Fonction puissance

I. Fonction logarithme de base « a »:

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$

$$\forall x, y > 0 : f(xy) = f(x) + f(y)$$

$$x = y = 1 \Longrightarrow f(1) = 0$$

$$\forall x, y > 0 ; x f'(xy) = f'(y)$$

$$y = 1, \qquad \forall x > 0 \, ; f'(x) = f'(1)/x$$

$$\forall x > 0 ; f(x) = f'(1)\, ln(x) + C$$

$f(x) = k\, ln(x)$où$k = f'(1) \neq 0$

$$\exists a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\} ; ln(a) = \frac{1}{k}$$

donc :

$$f(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

avec $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

Définition:

Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1 .

On appelle logarithme de base a , la fonction notée log_a définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{aligned} log_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{ln(x)}{ln(a)} \end{aligned}$$

Propriétés:

- $log_a(1) = 0$ et $log_a(a) = 1$
- Pour tout $x, y > 0$
$$log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$$
- Pour tout $x, y > 0$
$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(xy)$$
- Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$log_a(x^r) = r log_a(x)$$

Fonctions logarithme de base « a »

De plus pout tout a, bdeux réels strictement positifs différents de 1 et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a

$$log_b(x) = log_b(a) \cdot log_a(x)$$

appelée: Formule de changement de base pour les logarithmes.

Il suffit pour cela de remarquer que:

$$log_b(x) = \frac{ln(x)}{ln(b)} = \frac{ln(a)}{ln(b)} \cdot \frac{ln(x)}{ln(a)}$$
$$= log_b(a) \cdot log_a(x)$$

Variations de la fonction logarithme de base a:

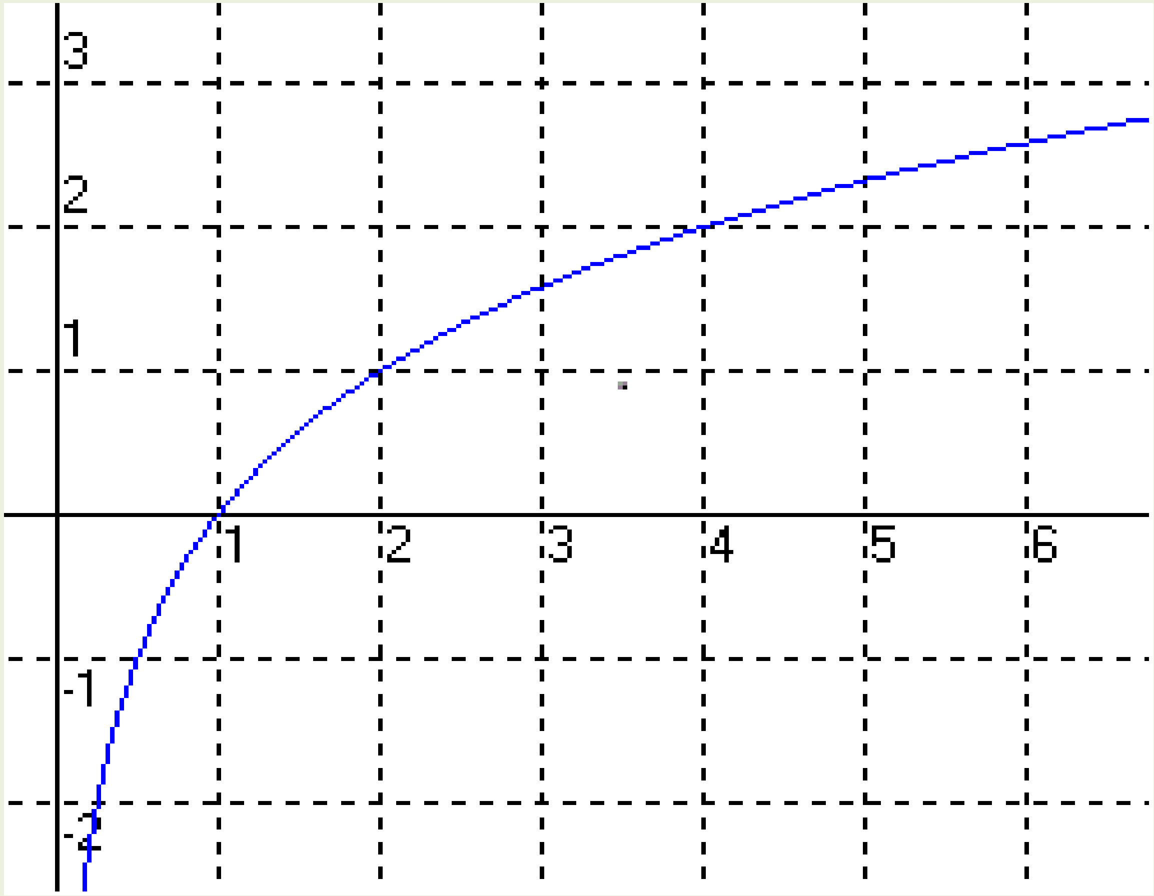
Pour : $a > 1$

x		$0 1 a + \infty$
$\left(log_a(x)\right)' = \frac{1}{xln(a)}$		$+$
$log_a(x)$		$+\infty$ 1 0 $-\infty$

Pour : $a < 1$

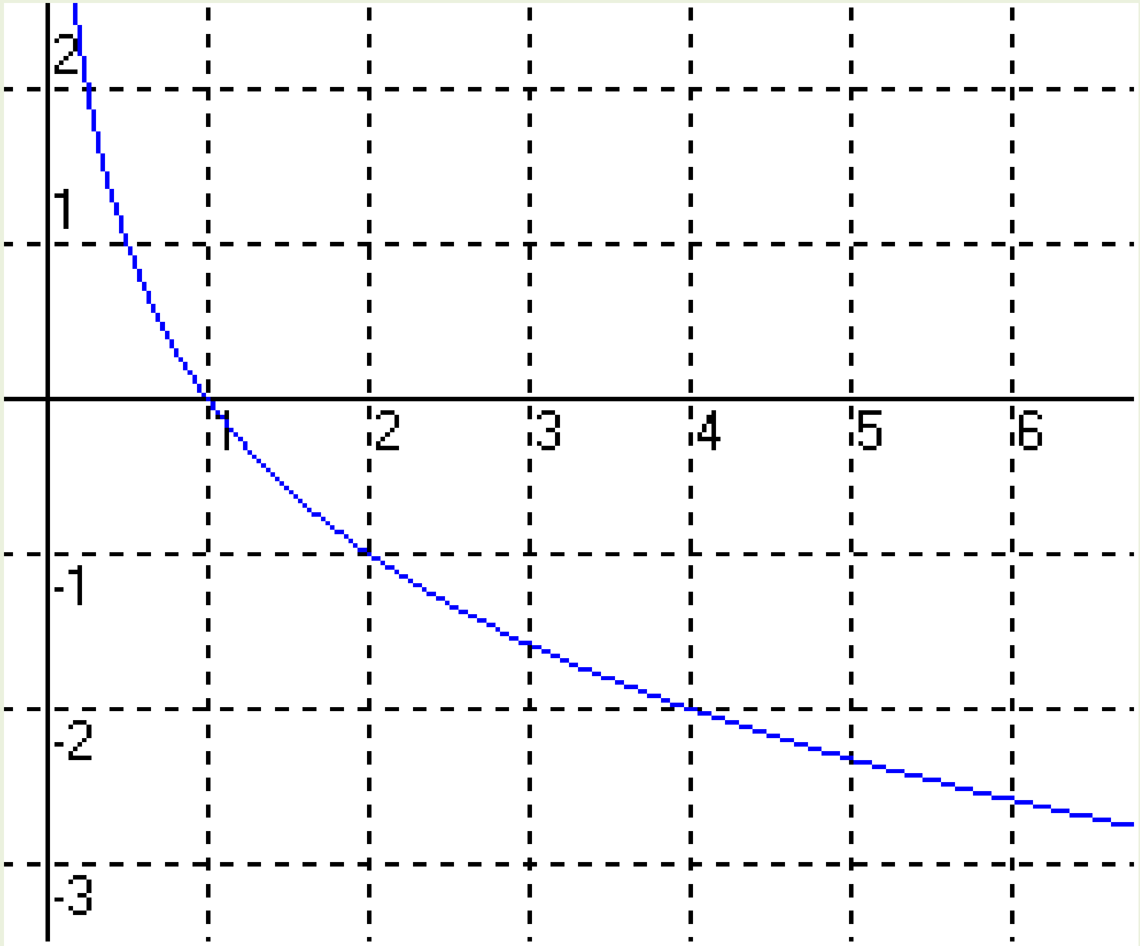
x		$0 a 1 + \infty$
$\left(log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{xln(a)}$		$-$
$log_a(x)$		$+\infty$ $\searrow$ 1 $\searrow$ 0 $\searrow$ $-\infty$

Représentation graphique:



Graphe de log_a pour $a > 1$

Représentation graphique:



Graphe de log_a pour $a < 1$

Le logarithme et le calcul scientifique:

Un peu d'histoire:

Issac Newton (1643-1727)

Edmond Halley (1656-1742)

John NAPIER (1550-1617)

(NEPER)

Cas particulier :Le logarithme décimal

$$1 = 10^0 \to 0$$
$$10 = 10^1 \to 1$$
$$100 = 10^2 \to 2$$
$$1000 = 10^3 \to 3 \cdots$$

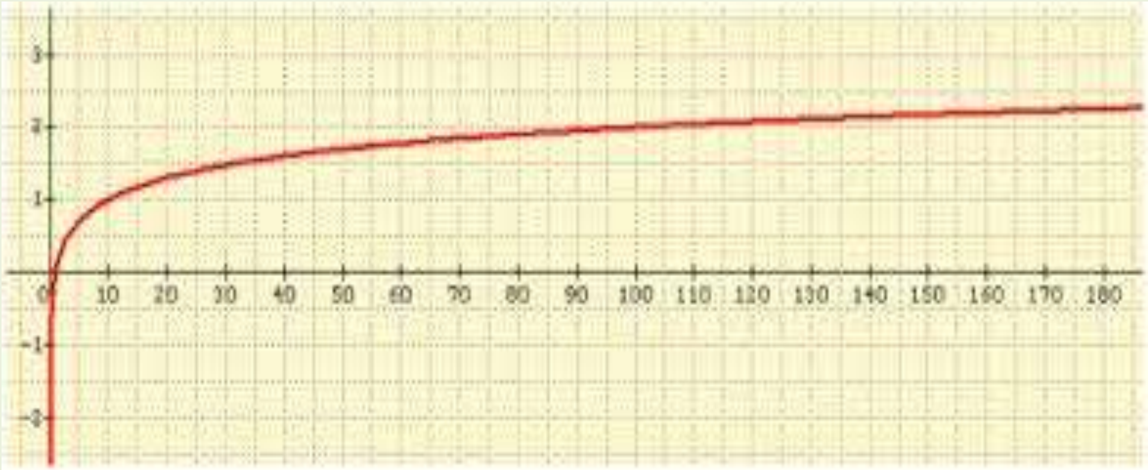
$$log_{10}(x) = log(x) = \frac{ln(x)}{ln(10)}$$

avec $log(10) = \frac{ln(10)}{ln(10)} = 1$

$$log(10^0) = 0 \cdot log(10) = 0 \to 0$$
$$log(10^1) = 1 \cdot log(10) = 1 \to 1$$
$$log(10^2) = 2 \cdot log(10) = 2 \to 2$$
$$log(10^3) = 3 \cdot log(10) = 3 \to 3$$

On étend le procédé aux puissances négatives de 10 :

$$0.1 \rightarrow log(10^{-1}) = (-1) \cdot log(10) = -1 \rightarrow -1$$
$$0.01 \rightarrow log(10^{-2}) = (-2) \cdot log(10) = -2 \rightarrow -2$$
$$0.001 \rightarrow log(10^{-3}) = (-3) \cdot log(10) = -3 \rightarrow -3$$
$$log(1) = 0$$
$$log(10) = 1, log(100) = 2$$
$$log(1000) = 3, log(10000) = 4$$
$$log(0.1) = -1, log(0.01) = -2$$
$$log(0.001) = -3, log(0.0001) = -4$$



II. Fonction exponentielle de base « a »:

Soit a un nombre réel strictement positif différent de 1 .

La fonction log_a logarithme de base « a » étant une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ elle admet donc une fonction réciproque définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$, de plus

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$ tels que $y = log_a(x)$ on a

$$y = log_a(x) \Leftrightarrow y = \frac{ln(x)}{ln(a)}$$

$$\Leftrightarrow ln(x) = yln(a)$$

$$\Leftrightarrow e^{ln(x)} = e^{yln(a)} = e^{ln(a^y)}$$

$$\Leftrightarrow x = a^y$$

Définition:

On appelle exponentielle de base a la bijection définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$ réciproque de la fonction log_a , notée par exp_a et définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}; \ \ exp_a(x) = e^{x ln(a)} = a^x$$

et qui vérifie :

$$y = log_a(x) \Leftrightarrow x = a^y; \ \forall y \in \mathbb{R}$$

Proposition:

La fonction exp_a réciproque de log_a est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\left(exp_a(x)\right)' = \left(exp\left(xln(a)\right)\right)' = ln(a)exp_a(x)$$

de plus:

si $a > 1$, exp_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

et

$$\lim_{x\to-\infty} exp_a(x) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} exp_a(x) = +\infty$$

si $a < 1$, exp_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

et

$$\lim_{x\to-\infty} exp_a(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} exp_a(x) = 0$$

Tableau de variation de exp_a :

Pour : $a > 1$

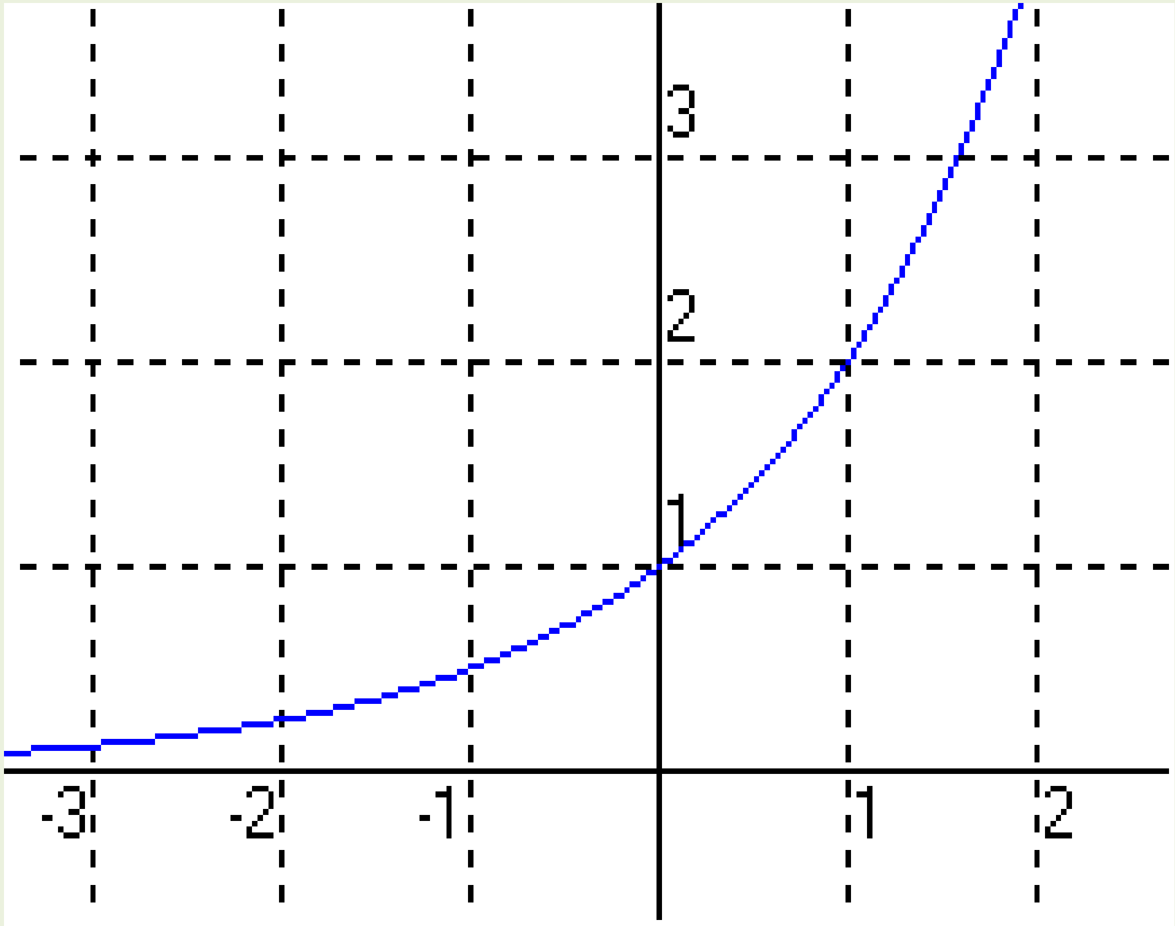
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(exp_a(x))' = ln(a)exp_a(x)$		$+$	
$exp_a(x)$		$+\infty$ 1 0	

Fonctions exponentielle de base « a »

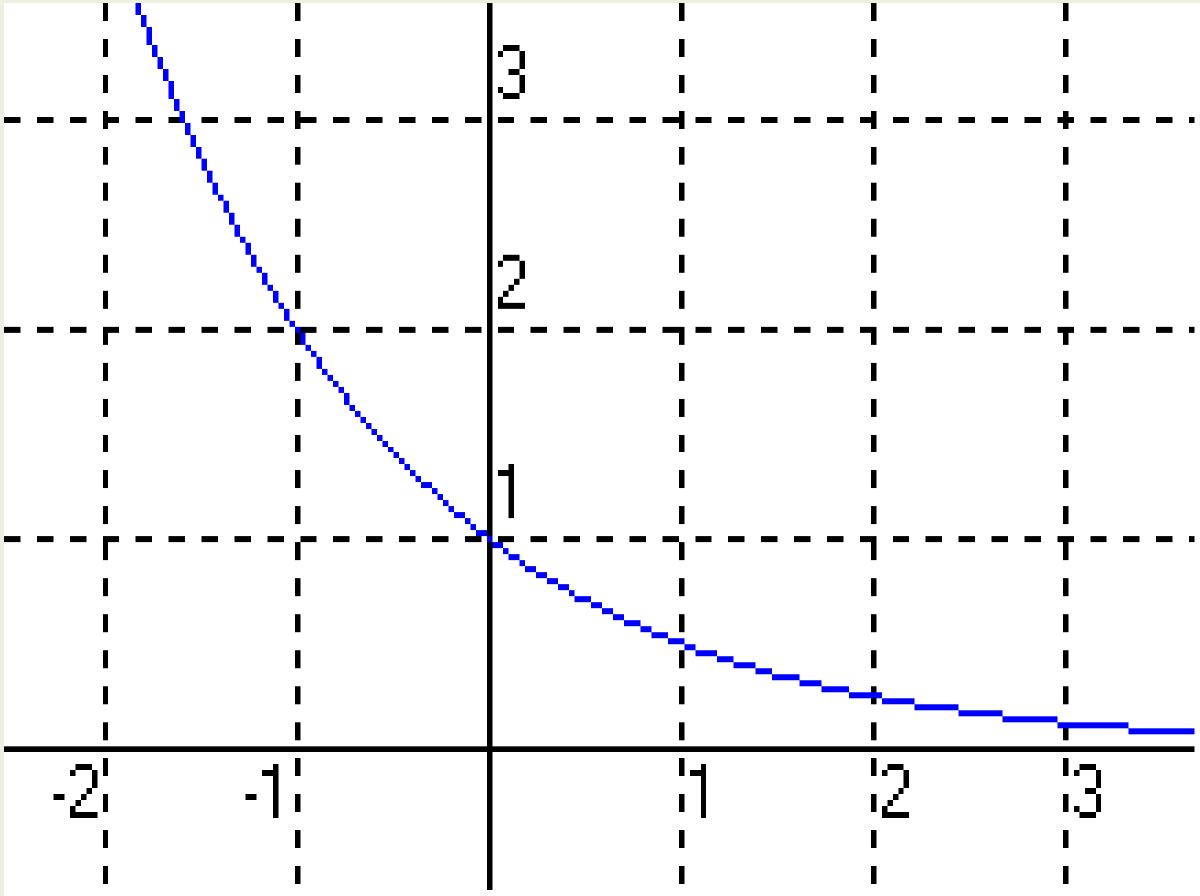
Pour : $a < 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\left(exp_a(x)\right)' = ln(a)exp_a(x)$		$-$	
$exp_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

Représentation graphique:



Graphe de exp_a pour $a > 1$


3
2
1
-2
-1
1
2
3

Proposition:

1. $exp_a(0) = 1$ et $exp_a(1) = a$
2. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$exp_a(x + y) = exp_a(x)exp_a(y)$$
3. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
$$exp_a(x - y) = exp_a(x)/exp_a(y)$$
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$et pour tout $r \in \mathbb{Q}$:
$$exp_a(rx) = \left(exp_a(x)\right)^r$$
5. De plus pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$
$$exp_{ab}(x) = exp_a(x)exp_b(x)$$

Preuve:

Pour démontrer les points 1°,2°,3° et 4° il suffit de calculer le logarithme base a des membres de gauches et de droite de chacune des égalités

Le dernier point est dû au fait que

$$\begin{aligned} exp_{ab}(x) &= (ab)^x = e^{xln(ab)} \\ &= e^{x(lna+lnb)} = e^{xlna}e^{xlnb} \\ &= exp_a(x)exp_b(x) \end{aligned}$$

Remarque:

la définition de la fonction exponentielle de base a pour $a > 0$ et différent de 1 permet de donner un sens à la notation a^x.

Néanmoins on peut prolongé cette notation au cas où $a = 1$ on posant $1^x = 1$ pour tout x dans $\mathbb{R}$

De plus les fonctions logarithme népérien et exponentielle sont des cas particulier pour $a = e$.

III. Fonction puissance

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x \in \mathbb{R} \to x^n$$

Pour n impair

$$x \in \mathbb{R} \to (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Pour n pair :

$$x \in [0, +\infty[\to x^n \in [0, +\infty[$$

$$x \in [0, +\infty[\to (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \in [0, +\infty[$$

Pour $\mathrm{a} > 0$, $\quad x \in \mathbb{R} \to a^x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

$$x^\alpha = e^{\alpha ln(x)}$$

Définition:

On appelle fonction puissance toute fonction φ_a définie par

$$\varphi_a : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \mapsto \varphi_a(x) = x^a$$

Avec $x^a = exp(aln(x))$

et $a \in \mathbb{R}$

Proposition:

Pour tout a, b dans $\mathbb{R}$ et $x, y > 0$ on a

$$1^a = 1$$

$$x^0 = 1$$

$$ln(x^a) = aln(x)$$

$$x^a y^a = (xy)^a$$

$$x^a x^b = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

Proposition:

La fonction φ_a est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\frac{d}{dx}[\varphi_a(x)] = ax^{a-1}$$

et ainsi

$$(\varphi_a)' = a\varphi_{a-1}$$

Preuve:

$$\overbrace{\underbrace{x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto ln(x)}_{ln} \underbrace{\longmapsto aln(x)}_{a\cdot x} \underbrace{\longmapsto exp\big(aln(x)\big)}_{exp}}^{\varphi_a}$$

$$\frac{d}{dx}[\varphi_a(x)] = \frac{d}{dx}[x^a] = \frac{d}{dx}[exp(alnx)]$$

$$= a\frac{d}{dx}(lnx)\left[\frac{d}{dx}(exp)\right](alnx)$$

$$= \frac{a}{x}exp(alnx) = \frac{a}{x}x^a = ax^{a-1}$$

avec $\varphi_{a-1}(x) = x^{a-1}$

Proposition:

$$\lim_{x\to 0} x^a = \lim_{x\to 0} exp\big(aln(x)\big) = \begin{cases} 0, & a > 0 \\ +\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x^a = \lim_{x\to +\infty} exp\big(aln(x)\big) = \begin{cases} +\infty, & a > 0 \\ 0, & a < 0 \end{cases}$$

De plus pour $a > 0$: φ_a admet un prolongement par continuité en 0

on écrit alors que pour $a > 0$

$$0^a = 0$$

Tableau de variation de la fonction puissance:

Pour : $a > 0$

x	$01 + \infty$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$+$
x^a	$+\infty$ 1 0

Fonctions puissances

Pour : $a < 0$

x	$01 + \infty$
$(x^a)' = ax^{a-1}$	$-$
x^a	$+\infty \searrow 1 \searrow 0$

De plus vue que

$$\frac{\varphi_a(x)}{x} = \varphi_{a-1}(x)$$

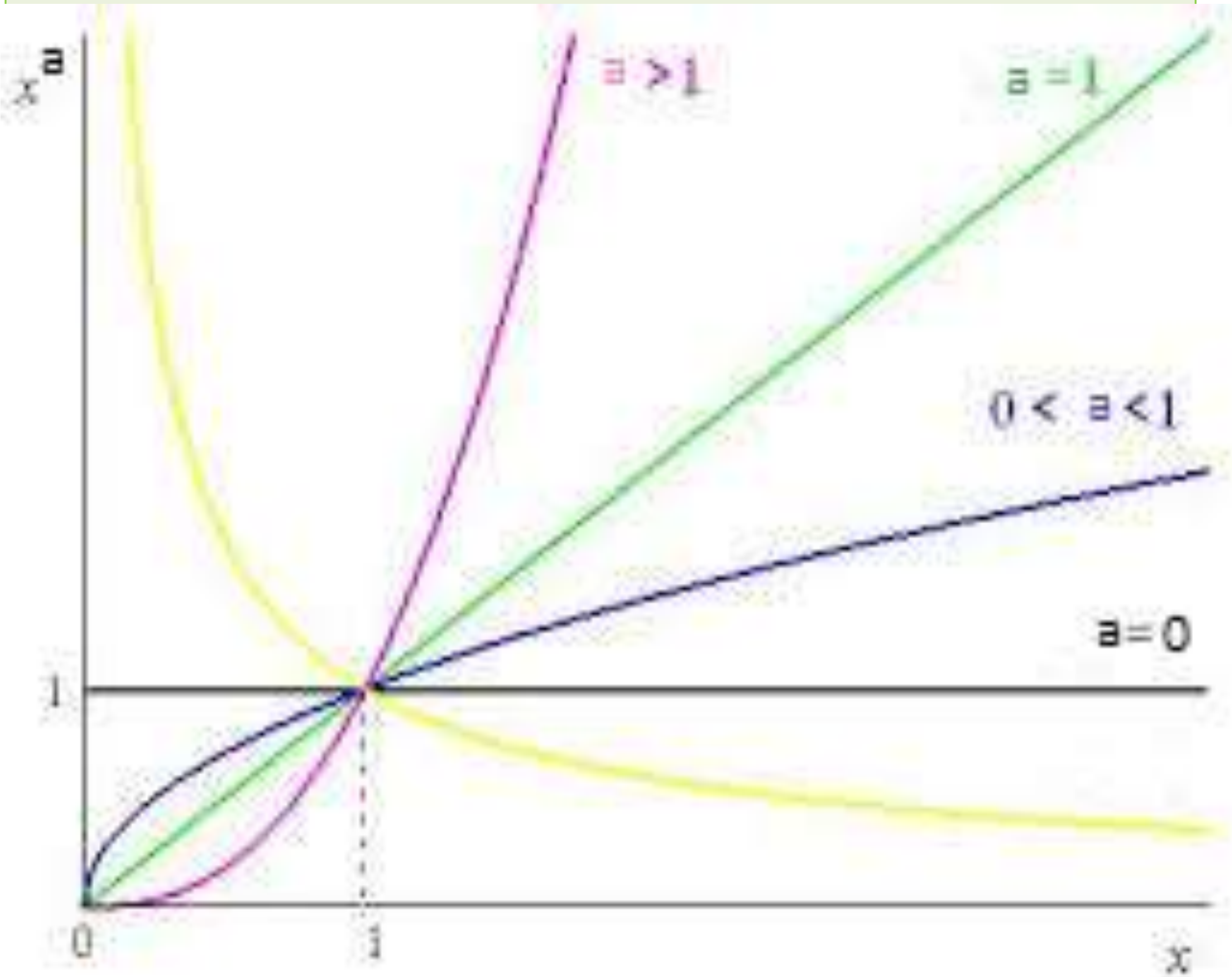
On en déduit que:

Si $a > 1$ la fonction φ_a est dérivable en 0 de nombre dérivé $(\varphi_a)'(0) = 0$

et si $0 < a < 1$la fonction φ_a est non dérivable en 0.

Pour $a = 1$ la fonction φ_1 est l'identité et donc dérivable de dérivée égale à 1 en 0

Graphe de la fonction puissance:



Comparaison des fonctions logarithme et puissance:

Théorème:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} x ln(x) = 0$$

Preuve:

Pour tout $t > 0$, on a $t \geq \sqrt{t}$, ce qui pour $x \geq 1$, permet d'écrire :

$$0 \leq ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \leq \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 < 2\sqrt{x}$$

Ce qui entraine que pour tout $x \geq 1$:

$0 \leq \frac{ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$, d'où la limite.

On pose $x = \frac{1}{y}$, quand sachant que $y \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \to 0} x ln(x) = -\lim_{y \to +\infty} \frac{ln(y)}{y} = 0$$

Proposition:

Si a, b sont deux réels strictement positifs, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(ln(x)\right)^b}{x^a} = 0$$

et

$$\lim_{x \to 0} x^a |ln(x)|^b = 0$$

Preuve:

Il suffit d'écrire

$$\frac{(ln(x))^b}{x^a} = \left(\frac{ln(x)}{x^{a/b}}\right)^b = \left(\frac{b}{a}\right)^b \left(\frac{ln\left(x^{a/b}\right)}{x^{a/b}}\right)^b$$

En posant $x^{a/b} = y$avec $y \to +\infty$ quand $x \to +\infty$, il vient du théorème précédent que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(ln(x))^b}{x^a} = 0$$

La deuxième limite est obtenue en posant $x = \frac{1}{y}$.

Comparaison des fonctions exponentielle et puissance:

Théorème:

Si a, b deux sont deux réels strictement positifs, on a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{exp(ax)}{x^b} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^b exp(ax) = 0$$

Merci de votre attention

au prochain cours