Kolc

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

First Name: .... Surname:..

Section:..... Group:......... Student Identifier (SID):......./........................ Code:......................

Academic year: 20....../ 20....... Semester: ...... Term: ...... Code: ....

Course: .... Date: ..../........./20........	Observations	Grade: /20

1

Serie numérique:

Soit donné un Suite numérique (à valeurs ds $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) $(U_n)_{n\geq 0}$.

on note par $(S_n)_n$ La Suite de ses Somme partielles à L'ordre n:

$n \longmapsto U_n$ $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

On appelle Serie numérique réelle ou complexe, la donnée du couple $((U_n)_n, (S_n)_n)$ notée par $\sum_{n\geq 0} U_n$

ou $\sum_{n\geq 0} U_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$

~~ou~~ les termes $U_0, U_1, \dots$ de cette Somme infinie sont dits terme successifs de la Serie, U_n st dit terme general de la Serie.

Scanné avec CamScanner

exemple : $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$, $\sum_{n\geq 0} n^2+2n-3/n+1$;

Nature de la Serie : la Serie $\sum_{n\geq 0} u_n$ st dite convergente

Ssi la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ st convergente.
Sinon elle st dite Divergente.
Si $S = \lim_n S_n$ ~~alors la somme de la Serie~~
la Serie $\sum u_n$ st convergente et a pour somme S.
et on ecrit : $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

→ Serie Definie à partir d'un certain rang :

Soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique definie pour $n\geq n_0$.
on appelle Serie numerique de terme general u_n la Serie notée $\sum_{n\geq n_0} u_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n + \dots$,

appelle Serie de terme general u_n definie à partir d'un certain rang ~~n_0~~

!! Ceci st possible ; il suffit pour cela de considere la suite $v_n = u_n$; $n\geq n_0$; $v_n = 0$ $0\leq n < n_0$;
la Serie $\sum_{n\geq 0} v_n$

peut alors s'écrire

$$\sum_{n\geq 0} v_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0-1} + v_{n_0} + v_{n_0+1}$$

$$= u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots = \sum_{n\geq n_0} u_n$$

on remarque de plus que les deux série sont

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \cancel{= \frac{v_{n+1}}{v_n}}$$

$$u_n \cancel{\times \frac{u_n}{u_{n-1}} \times \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \times \frac{u_1}{u_0}} < u_0 \times$$

de même une série peut être définie par troncature à partir d'un certain rang n_0 :

$\sum_{n\geq 0} u_n$; définie à partir de $n = 0$

$\sum_{n\geq n_0} u_n$ " " " de $n = n_0$.

en cas de Convergence des deux série :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0-1} + \sum_{n\geq n_0}^{+\infty} u_n$$

les Sommes des deux Série différes par $u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0}$

$\sum_{n\geq 0} u_n = S$, $\sum_{n\geq n_0} u_n = S'$

$$S = u_0 + \dots + u_{n_0} + S'.$$

Fermé

de plus les deux série ont même nature

ie $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ ont même nature.

car pour $N \geq n_0$

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0} + \sum_{n=n_0}^{N} u_n$$

en posant $q_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n$ on remarque que

$$S_N = u_0 + \dots + u_{n_0} + q_N$$

les deux suite $(S_N)_n$ et $(q_n)_n$ sont alors de même nature.

Exemple de ~~suite~~ Série

— Série géometrique :

Soit $(u_n)_n$ un suite geométrique de terme général
$u_n = a^n$; avec $a \in \mathbb{R}$.

les sommes partielle de $(u_n)_n$ sont definies par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k$$

(on sait à partir du Secondaire)

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} ; & a \neq 1 \\ n & a = 1 \end{cases}$$

ainsi pour $|a| < 1$ $\lim_n S_n = \dfrac{1}{1-a}$ la serie cv.

pour $|a| \geq 1$ la serie diverge.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

First Name: .... Surname: ....

Section:..... Group:........ Student Identifier (SID):....../...................... Code:....................

Academic year: 20...../ 20...... Semester: ..... Term: ..... Code: ....

Course: .... Date: ..../......../20........	Observations 5	Grade: /20

ie $\sum_n a^n$ s-cv ~~ssi~~ $|a|<1$ et de plus

$$\sum_{n\geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}.$$

— Serie telescopique : On appelle serie telescopique tout serie dont le terme général u_n peut se mettre sous la forme : $u_n = v_{n+1} - v_n$ ou $u_n = v_n - v_{n+1}$.

exemple :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \; ; \quad u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln(n) - \ln(n+1)$$

ici $v_n = \ln n$.

proposition :

Une serie telescopique et de même nature que la suite $(v_n)_n$ définissant le terme général.

preuve : $\sum_{n\geq 0} u_n = \sum_{n\geq 0} (v_{n+1} - v_n)$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

$$u_0 = \cancel{v_1} - v_0$$
$$u_1 = \cancel{v_2} - \cancel{v_1}$$
$$\vdots$$
$$u_{n-1} = \cancel{v_n} - \cancel{v_{n-1}}$$
$$u_n = v_{n+1} - \cancel{v_n}$$

$$S_n = v_{n+1} - v_0$$

ainsi les deux suite $(S_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont de même nature

la serie $\sum u_n$ et $(v_n)_n$ sont alors de même nature.

exmp : $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$; $v_n = \ln n$ est une suite divergente

$\Rightarrow$ la serie $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ est divergente.

Condition nécessaire de convergence

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série numérique :

Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ CV $\Longrightarrow u_n \xrightarrow[n]{} 0$.

preuve

on pose : $S_n = u_0 + \dots + u_n$

$S_{n-1} = u_0 + \dots + u_{n-1}$

Si $\sum u_n$ CV les deux suites (S_n) et (S_{n-1}) CV vers la même limite S.

il vient qu'alors $S_n - S_{n-1} = u_n$

par passage à la limite. $\lim_n u_n = 0$.

la reciproque est fausse : si le terme general d'une serie CV vers 0 cela ne veut pas dire que cette serie converge.

par exemple :

$$\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) ;$$

$u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \xrightarrow[n]{} 0$.

alors que $\sum u_n$ DIV. car telescopique avec $v_n = \ln n$.

Definition de la CV (

Soit $\sum_{n\geq n_0} u_n$ une serie numérique.

$\sum_n u_n$ CV $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 ; \exists N ; \forall n \geq N : \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| < \varepsilon$

ceci est dû au fait que si $\sum u_n$ CV $\Leftrightarrow (S_n)_{n\geq n_0}$ est CV et donc si on note par $S = \lim_n S_n$; $S = \sum_{n \geq n_0}^{+\infty} u_n$

alors : $\forall \varepsilon > 0$; $\exists N \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq N$: $|S_n - S| < \varepsilon$

$$|S_n - S| < \varepsilon \iff \left| \sum_{k=n_0}^{n} u_k - \sum_{k \geq n_0} u_k \right| < \varepsilon$$

$$\iff \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right| < \varepsilon$$

La quantité $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est appellée reste d'ordre $(n+1)$.

la serie $\sum_n u_n$ est donc dite CV ssi la suite des restes $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} u_k$ converge vers 0.

- Critère de Cauchy pour la CV des Serie

Soit $\sum_n u_n$ une serie numériques, sachant que la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ est CV ssi elle est de Cauchy alors :

$\sum_n u_n$ est CV ssi $\forall \varepsilon > 0$; $\exists N$; $\forall p, q > N$: $|S_p - S_q| < \varepsilon$

$$S_p - S_q = \sum_{k=0}^{p} u_k - \sum_{k=0}^{q} u_k \underset{p = q+l}{\overset{p > q}{=}} \sum_{k=q+1}^{q+l} u_k$$

il vient donc :

$\sum_n u_n$ est CV ssi : $\forall l \in \mathbb{N}$; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$; $\forall q > N$: $\left| \sum_{q+1}^{q+l} u_k \right| < \varepsilon$.

critère de Cauchy.

ensia

People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

28

First Name: .... Surname:..

Section:..... Group:.........Student Identifier (SID):......./....................... Code:.......................

Academic year: 20....../ 20....... Semester: ...... Term: ...... Code: ....

Course: .... Date: ..../......../20........	Observations 9	Grade: /20

Convergence absolue d'une Serie :

Soit donnée une Serie numerique $\sum_n u_n$

Considerant $\sum_n |u_n|$ (Serie des valeurs abs.)

Supposons : $\sum_n |u_n|$ CV et Montrons que $\sum u_n$ CV

$\sum_1 |u_n|$ CV $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N ; \forall q \geq N :$ $\left| \sum_{q+1}^{q+l} |u_k| \right| < \varepsilon$

$\forall l \in \mathbb{N}$: i.e $\sum_{q+1}^{q+l} |u_k| < \varepsilon$

~~Soit ε>0~~ :

on a : $\left| \sum_{q+1}^{q+l} u_k \right| \leq \sum_{q+1}^{q+l} |u_k|$

ainsi $\forall \varepsilon > 0 ; \exists N ; \forall q \geq N ;$ $\left| \sum_{q+1}^{q+l} u_k \right| < \varepsilon$

Scanné avec CamScanner

Ainsi on deduit :

$$\sum |u_n| \text{ CV} \Rightarrow \sum u_n \text{ CV}.$$

Def : Une Serie numque $\sum u_n$ st dite absolument convergente ssi $\sum_n |u_n|$ CV.

Remarque : • le terme absolument CV contient deux informations

• $\sum_n |u_n|$ CV • $\sum u_n$ conv

une Serie $\sum u_n$ qui n'st pas absolument CV et de qui soit convergente st dite semi_convergente.

$$\sum u_n \text{ : Semi convergente} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum |u_n| \text{ Div.} \\ \sum u_n \text{ CV.} \end{cases}$$

• Une Serie divergente n'ést pas Semi_CV

~~operations~~ exemple :

$$\sum \frac{(-1)^n}{n} ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ st Semi CV.

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ st absol CV.

Operations element sur les Serie :

On appelle Somme de deux Serie $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la Serie de terme general : $(u_n + v_n)$.

$$\sum u_n + \sum v_n = \sum (u_n + v_n)$$

le produit par un scalaire

$$\lambda \sum u_n = \sum \lambda u_n$$

les deux egalités en lieu seulement ds le cas ou toute les serie CV.

Critère de CV des serie à term positif:

• Soit $\sum u_n$ une serie à term positifs (a partir d'un certain rang n_0, qu'on choisit $n_0 = 0$)

la suite des sommes partielles $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est une suite croissante, car $S_n - S_{n-1} = u_n \geq 0$.

Une condition suffisante pour qu'une suite croissante soit convergente est qu'elle soit bornée superieurement (i.e Majorée).

comme conséquence on a le critè suivant:

— Critère de comparaison :

Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux series à term positifs telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $\forall n \geq n_0$: $u_n \leq v_n$

alors

• si $\sum v_n$ CV $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CV.

• si $\sum u_n$ DIV $\Rightarrow$ $\sum v_n$ DIV.

preuve :

• soit S_n, Q_n les sommes partielle de $\sum u_n$, $\sum v_n$

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$; avec $n \geq n_0$

$Q_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0-1} + u_{n_0} + \dots + u_n$

$Q_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n_0-1} + v_{n_0} + \dots + v_n$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

ensia

a

First Name: .... Surname:..

Section:..... Group:.........Student Identifier (SID):......./........................ Code:.....................

Academic year: 20...../ 20...... Semester: ...... Term: ...... Code: ....

Course: .... Date: ..../........./20........	Observations 12	Grade: /20

On sait que : $\forall n \geq n_0$:

$$u_{n_0} \leq v_{n_0}$$

$$\vdots$$

$$u_n \leq v_n$$

donc $S_n \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{n_0-1} + v_{n_0} + \dots + v_n$

avec $v_{n_0} + \dots + v_n = Q_n - v_0 - v_1 - \dots - v_{n_0-1}$

il vient donc : $S_n \leq \underbrace{(u_0 - v_0) + (u_1 - v_1) + \dots + (u_{n_0-1} - v_{n_0-1})}_{\text{cette somme fini et constante}} + Q_n$

de la dernière inégalité (à l'aide du cours de Suite)

si $\sum v_n$ cv $\Rightarrow Q_n$ est conv

et grâce au fait que Q_n st croissante donc Majorée par un certain $\cancel{M} > 0$.
il vient donc que S_n st Majorée par

$$S_n \leq (u_{n_0} - v_{n_0}) + \dots + (u_{n_0} - v_0) + M$$

La suite S_n st donc convergente, ainsi que $\sum u_n$.

- si $\sum u_n$ Div $\Rightarrow S_n$ st non Majorée

$\Rightarrow \forall m > 0, \exists N, m < S_N$.

$\Rightarrow \exists N; \quad Q_N > m - (u_{n_0} - v_{n_0}) + \dots (u_0 - v_0)$

Q_n st donc non majorable $\Rightarrow Q_n$ Div $\Rightarrow \sum v_n$ Div.

Corollaire : $\sum u_n, \sum v_n$ deux séries à terms positifs tells que : $\exists a, b > 0$: $a v_n \leq u_n \leq b v_n$
alors u_n et v_n sont de même nature

$a < \left(\frac{u_n}{v_n}\right) < b$

Corollaire $\sum u_n, \sum v_n$: $u_n \sim v_n$ alors :
$\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

$u_n \sim v_n$ si $\lim\limits_n \frac{u_n}{v_n} = 1$. (14)

Critère de Comparaison avec une Serie Géométrique

Soit $\sum u_n$ une Serie à termes positifs

- Regle de D'Alembert

Considerons le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

- Si $\forall n \geq n_0 : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ avec $k < 1$

$\Rightarrow \sum u_n$ CV

- Si $\forall n \geq n_0$ $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k > 1 \Rightarrow \sum u_n$ Div

preuve: . $\forall n \geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k$ avec $k < 1$

$\Rightarrow$

$u_{n+1} \leq k u_n \leq k^2 u_{n-1} \leq \dots \leq k^{n-n_0+1} u_{n_0}$

$= k^n \frac{u_{n_0}}{k^{n_0-1}}$

$\frac{u_{n_0}}{k^{n_0-1}} = C^{te}$ la Serie $\sum k^n$ st CV car $k<1$

ainsi $\sum u_n$ CV.

. $\forall n \geq n_0$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \Rightarrow u_{n+1} > u_n > \dots > u_{n_0}$

la serie diverge grossierement.

il vient de cela: (en cas de l utilisation de la limite)

1/ Si $\lim\limits_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l < 1$, la $\sum u_n$ CV.

2/ Si $\lim\limits_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ avec $l > 1$, la Serie Div.

3/ Si $\lim\limits_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$, on ne peut rien conclure.

Regle de Cauchy :

Considérons la quantité : $\sqrt[n]{u_n} = (u_n)^{1/n}$

alors :

1°/ Si $\forall n \geq n_0$: $\sqrt[n]{u_n} \leq k$ avec $k < 1$

la Serie $\sum u_n$ st CV

car : $u_n \leq k^n$; $n \geq n_0$ $\sum k^n$ CV

2°/ Si $\forall n \geq n_0$

$\sqrt[n]{u_n} \geq 1 \Rightarrow u_n \geq 1 \Rightarrow$ La Serie Diverge grossièrement.

il vient de cela : Utilisation de $\lim_n \sqrt[n]{u_n}$

1°/ $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = l$ avec $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ CV

2°/ $\lim_n \sqrt[n]{u_n} = l$ avec $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ Div

3°/ $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$, on peut rien conclure

" ds ce cas on a pas seulement $u_n \geq 1$ "

Remarque : Lorsque $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite l pour $n \to +\infty$ alors $\sqrt[n]{u_n}$ admet la même limite.

Critère de Comparaison avec une intégrale

Soit $\sum u_n$ une Serie numque à terms positifs, dont le terme général u_n st definie à l'aide d'une fonct f positive, continue et decroissante sur un intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > 0$, par $u_n = f(n)$

~~soit~~ on suppose pour facilité la notion que $A = 0$.

$\sum_{n \geq 0} u_n = \sum_{n \geq 0} f(n)$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

5

First Name: .... Surname: ....

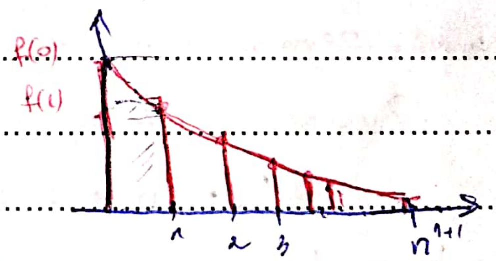
Section:..... Group:.........Student Identifier (SID):......./........................ Code:......................

Academic year: 20....../ 20....... Semester: ...... Term: ...... Code: ....

Course: .... Date: ..../........./20.........	Observations 16	Grade: /20

Soit $(S_n)_n$ la suite des somme partielles de $\sum u_n$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f(k) = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$
$$= f(0) + f(1) + \dots + f(n)$$



on a : $\forall x \in [k, k+1]$; $k \geq 0$

$$f(x) \leq f(k)$$

ainsi $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k)$

de plus $\forall x \in [k, k+1]$: $f(k+1) \leq f(x)$

d'où : $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)$

il vient alors :

$$\forall k \geq 1 : \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x).dx$$

S_n vérifie donc :

$$f(0) + \int_1^2 f(x)dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq f(0) + \int_0^1 f(x)dx + \dots + \int_{n-1}^{n} f(x).dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\Big]_1^{+\infty} = 1$$

$$\int_1^{n} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{n^2}+1$$

$$\int_2^{n+1} = -\frac{1}{(n+1)}$$

$$f(1) + \int_2^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{n\geq 1}^{N} \frac{1}{n^2} \leq f(1) + \int_1^{n} \frac{dx}{x^2}$$

$$f(1) + \frac{1}{4} - \frac{1}{(n+1)} \leq S_n \leq f(1) + 1$$

$$1 + \frac{1}{4} \leq S_n \leq$$

$5/4$

17

on a alors :

$$f(0) + \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq S_n \leq f(0) + \int_0^{n} f(x)\,dx \quad (*)$$

La Suite $(S_n)_n$ et l'integrale $\int^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature

$\lim_n S_n$ existe ssi $\lim_n \int_0^{n} f$ ou $\int_1^{+n+1} f$ existent

ie $\int_1^{+\infty} f$ CV ou $=(+\infty)$.

Remarque : L'encadrement assure seulement que la Serie $\sum u_n$ et que l'integrale impropre (generalisé $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$) sont de même nature, il ne nous fixe pas la Somme de la Serie, car les bornes de l'encadrement ont en valeurs des valeurs differentes en general.

Exemples et Definition 1/ Serie harmonique (Serie de Riemann)

Soit la Serie dite de Riemann ou Serie harmonique definie par : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Le terme général de cette Serie est definie à l'aide de la fonct :

$$[1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = 1/x^\alpha \quad \left(f' = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}\right)$$ fonct. Continue, decroissante sur $[1,+\infty[$.

la Serie harmonique $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ st donc de même nature que l'integrale généralisé $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$

Etude de la nature de cet integrale :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A\to+\infty} \cancel{\frac{1}{-\alpha+1}} \int_1^A x^{-\alpha}\,dx$$

pour $\alpha = 1$, $\int_1^A \frac{dx}{x} = Ln(A) - Ln(1) = Ln(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} +\infty$

donc L'integrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ Div (il n'existe pas).

pour $\alpha \neq 1$

$$\cancel{\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1}\Big]_1^A = \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{A^\alpha} - 1\right]}$$

$$\cancel{\frac{1}{\alpha-1} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{A^\alpha}\right) \xrightarrow[A\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = 1}$$

pour $\alpha \neq 1$
$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^A x^{-\alpha}\,dx = \frac{1}{-\alpha+1}\, x^{-\alpha+1}\Big]_1^A$$
$$= \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{A^{\alpha-1}} - 1\right]$$

ainsi $\int_1^A \frac{dx}{x} = \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{A^{\alpha-1}}\right]$

pour $\alpha > 1$; $(\alpha - 1 > 0)$: $\lim_{A\to+\infty} \int_1^A \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

pour $\alpha < 1$ $(\alpha - 1 < 0)$ $\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{A^{\alpha-1}} = \infty$ i.e. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ DiV.

ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$: $\begin{cases} \alpha > 1 & \text{CV} \\ \alpha \leq 1 & \text{DiV.} \end{cases}$

la Serie harmonique $\sum_{n\geq 1} 1/n^\alpha$ st donc convergente ssi $\alpha > 1$.

~~Série de Bertrand~~

Critère de Comparaison avec une Série de Riemann

Soit $\sum_n u_n$ une Série à termes positifs

alors.

Pour que la Série $\sum u_n$ soit convergente, il suffit de trouver un réel $\alpha > 1$ tel que la Suite $(n^\alpha u_n)$ soit Majorée.

Pour que la Série $\sum u_n$ soit Divergente, il suffit qu'il existe un nombre $k > 0$ tel que l'on ait, à partir d'un certain rang, $n u_n \geq k$.

Preuve

Soit $\alpha > 1$ telque il existe $M > 0$.

$$n^\alpha u_n \leq M$$

ainsi $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$

la Série $\sum M/n^\alpha$ est cv., car Série de Riemann avec $\alpha > 1$

donc $\sum u_n$ cv.

si $\exists\, k > 0$; telque à partir d'un certain rang n_0

$$n u_n \geq k \Rightarrow u_n \geq k/n.$$

$\sum_{n \geq n_0} k/n$ Div $\Rightarrow \sum_{n \geq n_0} u_n$ Div.

Corollaire

Pour que la Série $\sum u_n$ soit convergente, il suffit de trouver un réel $\alpha > 1$ tel que la limite

$$\lim_n n^\alpha u_n \text{ soit finie}$$

Pour que la Série $\sum u_n$ Soit Divergente, il suffit de trouver un réel $\alpha \leq 1$; tel que la limite

$$\lim_n n^\alpha u_n \text{ soit non nulle.}$$

People's Democratic Republic of Algeria

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministry of Higher Education and Scientific Research

المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي

The National Higher School of Artificial Intelligence

First Name: .... Surname:..

Section:..... Group:........Student Identifier (SID):....../..................... Code:.....................

Academic year: 20...../ 20...... Semester: ...... Term: ......   Code: ....

Course: .... Date: ..../......../20........	Observations	Grade: /20
	20	

Serie de Bertrand:

on appelle serie de Bertrand la serie à terme positif definie par :

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} . Ln^{\beta} n} \; ; \; \alpha, \beta > 0 \; ; \; \alpha \geq 0 .$$

- elle sont générés par le developpent assymptotique généralisés

On sait que : $\lim_{x \to +\infty} \frac{Ln x}{x} = 0$; $\lim_{x \overset{>}{\to} 0} x Ln x = 0$

- la fonction $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha} . Ln^{\beta} x}$ st decroissante et tend vers 0 à l'infinie ; $\sum_{n} \frac{1}{n^{\alpha} Ln^{\beta} n}$ st de même nature que l'integrale $\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha} . Ln^{\beta} x}$.

alors

- Si $\alpha > 1$; et $\beta \geq 0$; on aura

$$0 < \frac{1}{x^\alpha . \ln^\beta x} \leq \frac{1}{x^\alpha} ;$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \text{ cv pour } \alpha > 1 \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} \text{ existe et cv.}$$

ce qui donne la convergence de la serie $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha . \ln^\beta n}$

- Si $\alpha > 1$ et $\beta < 0$

Cette partie utilise les ~~fonctions~~ intégral généralisé ; on donne seulement les resultats.

- $\alpha > 1$, β quelconque $\Rightarrow \sum 1/n^\alpha \ln^\beta n$ cv.
- $\alpha < 1$, β quelconque $\Rightarrow \sum 1/n^\alpha \ln^\beta n$ Div.
- $\alpha = 1$, $\beta > 1$ $\Rightarrow \sum 1/n^\alpha \ln^\beta n$ cv.
- $\alpha = 1$; $\beta \leq 1$ $\Rightarrow \sum 1/n^\alpha \ln^\beta n$ Div.

Critère de convergence pour les Serie à termes réels de signe quelconque :

* L'un des premiers critères de convergence de ce type de Serie st la convergence absolue : on étudie la nature de la Serie $\sum |u_n|$; en utilisant les critères ~~des serie~~ de convergence des Serie à termes positives

ne pas oublier : $\sum |u_n|$ CV $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CV

et ds ce cas $\sum u_n$ st dite abs. convergente

Dans ce qui suit on donne deux ~~re~~ résultats important concernant les Serie dont $\sum |u_n|$ DIV, ce qui veut dire qu'on étudie la semi-convergence des Serie.

théorème d'Abel

Soit $\sum u_n v_n$ une Serie numérique (à valeurs ~~réell~~ réelles ou complexes) telle que :

- $\exists M>0 ; \forall n : |U_n| < M$; où $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

" La suite des sommes partielle associée à la suite $(u_n)_n$ st bornée "

- $\sum_{n\geq 0} |v_n - v_{n+1}| < +\infty$; ($(v_n)_n$ st dite à variation bornée)

cette condition veut dire que la Serie $\sum_{n\geq 0} (v_n - v_{n+1})$ st absolument bornée si ~~elle~~ $(v_n)_n$ st réelle ou normalement convergente si $(v_n)_n$ st complexe

- $\lim_n v_n = 0$

d.a.s $\sum_n u_n v_n$ converge

pour la preuve :

On utilise ~~[illegible]~~ on montre la cv. de la serie en montrant que la suite des somme partielle associe à la serie $\sum u_n v_n$ est une suite de Cauchy ie on utilise le sens de Cauchy pour avoir la cv

on montre ; que

$$\forall \varepsilon > 0 ;\ \exists N ;\ \forall k > N ;\ \forall p \in \mathbb{N}$$

$$\left| \sum_{n=k+1}^{k+p} u_n v_n \right| < \varepsilon$$

pour cela Abel a introduit la réécriture suivante de la quantité $\sum_{k+1}^{k+1} u_n v_n$:

$$\sum_{k+1}^{k+p} u_n v_n = \sum_{k+1}^{k+p-1} U_n (v_n - v_{n+1}) + U_{k+p}\, v_{k+p} - U_k\, v_{k+1}$$

appellée : formule de intégrale par partie discrète d'Abel

Corollaire : Soit la serie $\sum u_n v_n$ d.a.s

- Si (v_n) est une suite réelle positive qui tend vers zéro en decroissant : $\left(v_n \searrow_{n \to +\infty} 0 \right)$
- $\left| \sum_{p=n} U_p \right| \leq M$; ou k est une constante et ceci ~~$\forall n$ et~~ $\forall m \geq n_0$.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
People's Democratic Republic of Algeria
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministry of Higher Education and Scientific Research
المدرسة الوطنية العليا للذكاء الاصطناعي
The National Higher School of Artificial Intelligence

ensia

First Name: .... Surname:..

Section:..... Group:.........Student Identifier (SID):......./........................ Code:......................

Academic year: 20....../ 20....... Semester: ...... Term: ...... Code: ....

Course: .... Date: ..../........./20.........	Observations 24	Grade: /20

alors $\sum u_n v_n$ CV

Corollaire : $\sum u_n v_n$ telle que

- $\sum u_n$ CV
- v_n Monotone et bornée

$\Rightarrow \sum u_n v_n$ CV

ex: $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, $x \neq 2k\pi$

Serie Alternée (Critère de Leibnitz)

une Serie est dite alternée, si pour tout n ; $(n \geq n_0)$ u_n et u_{n+1} sont des ~~coef~~ reels de signe contraire en fait si ~~sont~~ il existe une suite (a_n) de signe (constant) positive tel que

$$u_n = (-1)^n a_n \, ;$$

ex :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n-1} \; ; \quad \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} .$$

th : pour qu'une serie alterne $\sum (-1)^n a_n$ converge il suffit que la suite (a_n) tend vers 0 et decroit

de plus $\left| \sum_{n+1}^{+\infty} u_k \right| \leq |u_{n+1}| = |a_{n+1}|$