Partie III

I – Fonction Arc sinus

II – Fonction Arc cosinus

III - Fonction Arc tangente

IV – Fonction Arc cotangente

I. Fonction Arc sinus

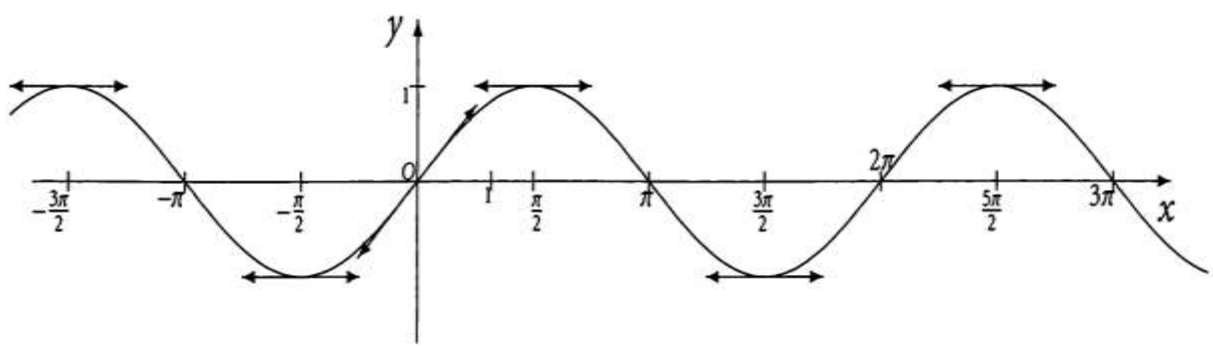
$$sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; \;\; sin(-x) = -sin(x)$$

$$\sin(x + 2\pi) = sin(x)$$

$$sin' = cos$$

$$cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Aspect de la courbe de la fonction sinus

Définition:

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [-\pi/2, \pi/2]$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $J = sin(I) = [-1, +1]$.

La bijection réciproque de la fonction $sin_{|\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}$ est par définition la fonction Arc sinus notée $arcsin$

$$arcsin: \quad [-1, +1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

De plus; pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = sin(x) \Leftrightarrow x = arcsin(y)$$

Proposition:

Pour tout $x \in [-1, +1]$, le réel $arcsin(x)$ est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.

On a

$$\forall x \in [-1, +1] \quad sin\big(arcsin(x)\big) = x$$

$$\forall \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad arcsin\big(sin(\alpha)\big) = \alpha$$

Remarque:

Pour tout réel α l'expression $arcsin(sin(\alpha))$ possède un sens , car $sin(\alpha)$ est toujours compris entre -1 et $+1$, mais l'égalité $arcsin(sin(\alpha)) = \alpha$, n'est valable que pour α dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction Arc sinus, c'est-à-dire $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Exemple :

$$arcsin\left(sin\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Car $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ avec $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

Proposition:

Pour tout $x \in [-1,+1]$

$$cos\big(arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$$

Preuve:

On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

D'où pour tout $x \in [-1,+1]$

$$cos^2\big(arcsin(x)\big) + sin^2\big(arcsin(x)\big) = 1$$

et

$$cos^2\big(arcsin(x)\big) = 1 - sin^2\big(arcsin(x)\big)$$

vue que $-\frac{\pi}{2} \leq arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ il vient que $cos\big(arcsin(x)\big) \geq 0$et donc

$$cos\big(arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$$

Proposition:

La fonction Arc sinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,+1[$

et de plus

Pout tout $x \in]-1,+1[$ on a

$$(arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve:

pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$y = sin(x) \Leftrightarrow x = arcsin(y)$$

Avec

$$(sin)'(x) = cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = +1$$

$$(arcsin)'(y) = \frac{1}{(sin)'(x)} = \frac{1}{cos(x)}$$

$$= \frac{1}{cos\big(arcsin(y)\big)}$$

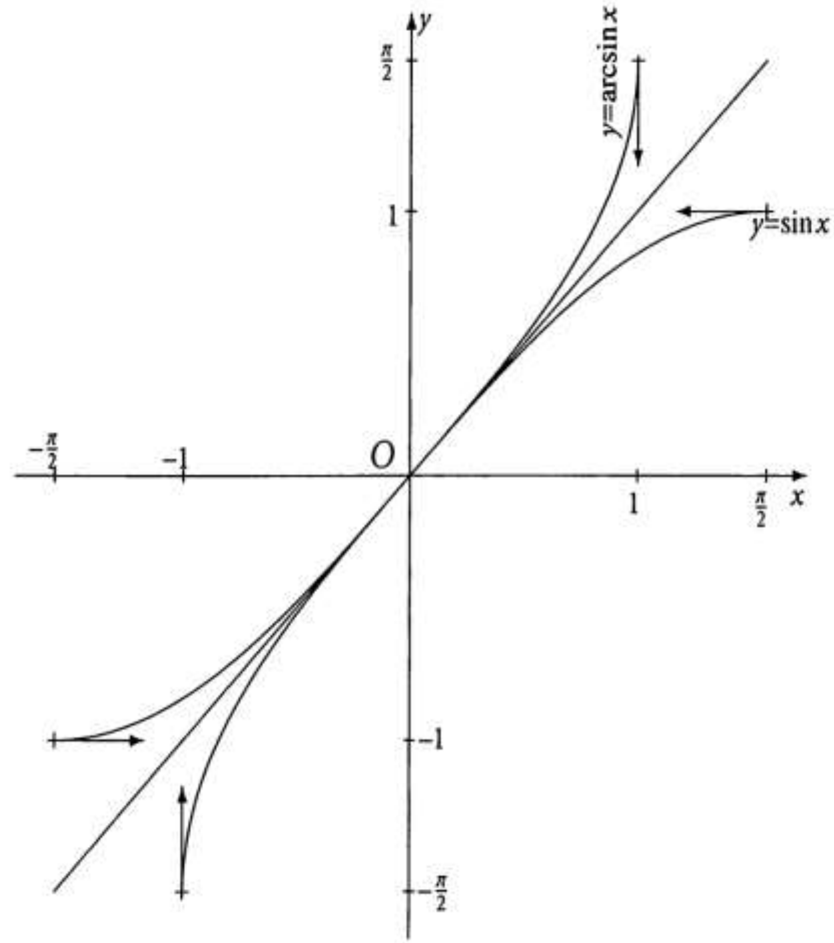
$$(arcsin)'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

Tableau de variation:

On résume les variations de la fonction Arc sinus dans le tableau suivant

x	-1			$+1$
$(arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	‖	$+$		‖
$arcsin(x)$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0	↗	$+\frac{\pi}{2}$

Représentation graphique de Arc sin:



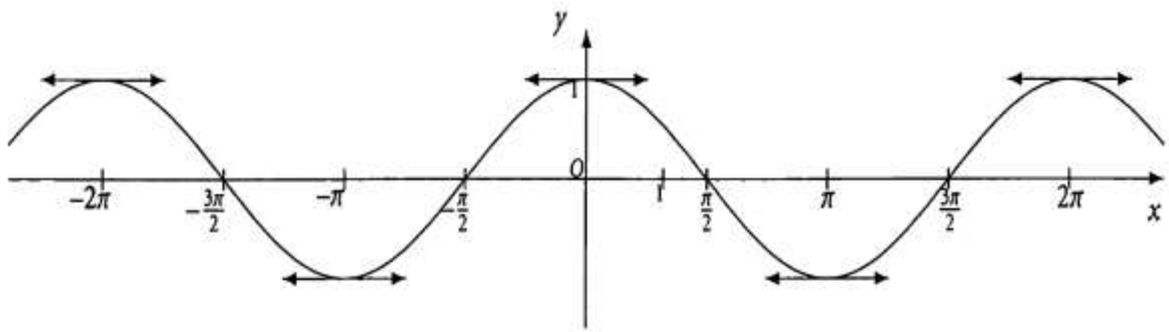
I. Fonction Arc cosinus

$$cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$$

$$\forall x \in \mathbb{R};\ \ cos(-x) = cos(x)$$

$$cos' = -sin$$

$$sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Aspect de la courbe de la fonction cosinus

Définition:

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I = [0, \pi]$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $J = cos(I) = [-1, +1]$

La bijection réciproque de la fonction $cos_{|[0,\pi]}$ est par définition la fonction Arc cosinus notée $arccos$

$$arccos: \quad [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$$

De plus; pour tout $x \in [0, \pi]$

$$y = cos(x) \Leftrightarrow x = arccos(y)$$

Proposition:

Pour tout $x \in [-1,+1]$, le réel $arccos(x)$ est l'unique élément de $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

On a

$$\forall x \in [-1,+1] \quad cos\big(arccos(x)\big) = x$$

$$\forall \alpha \in [0,\pi] \quad arccos\big(cos(\alpha)\big) = \alpha$$

Remarque:

Pour tout réel α l'expression $arccos\left(cos(\alpha)\right)$ possède un sens , car $\cos(\alpha)$ est toujours compris entre -1 et $+1$, mais l'égalité $arccos\left(cos(\alpha)\right)$, n'est valable que pour α dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction Arc cosinus, c'est-à-dire $[0, \pi]$

Exemple :

$$arccos\left(cos -\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

Car $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ avec $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$

Proposition:

Pour tout $x \in [-1, +1]$

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$$

Preuve:

On sait que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$cos^2(\theta) + sin^2(\theta) = 1$$

D'où pour tout $x \in [-1, +1]$

$$cos^2\big(arccos(x)\big) + sin^2\big(arccos(x)\big) = 1$$

et

$$sin^2\big(arccos(x)\big) = 1 - cos^2\big(arccos(x)\big)$$

vue que $0 \leq arccos(x) \leq \pi$ il vient que $sin\big(arccos(x)\big) \geq 0$et donc

$$sin\big(arccos(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}$$

Proposition:

La fonction Arc cosinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,+1[$

et de plus

Pout tout $x \in]-1,+1[$ on a

$$(arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Preuve:

pour tout $x \in [0, \pi]$

$$y = cos(x) \Leftrightarrow x = arccos(y)$$

Avec

$$(cos)'(x) = -sin(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 0\,, \qquad x = \pi$$

$$cos(0) = -1 \qquad cos(\pi) = +1$$

$$(arccos)'(y) = \frac{1}{(cos)'(x)} = -\frac{1}{sin(x)}$$

$$= -\frac{1}{sin\big(arccos(y)\big)}$$

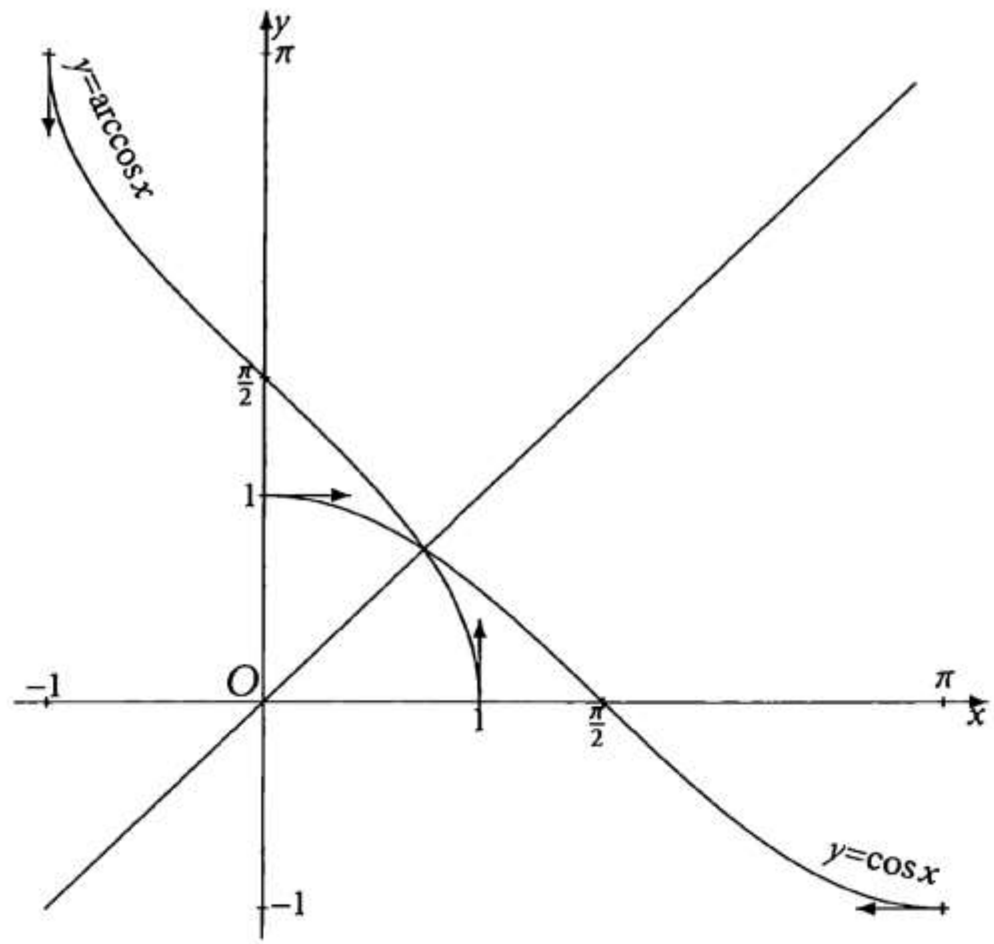
$$(arccos)'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

Tableau de variation:

On résume les variations de la fonction Arc cosinus dans le tableau suivant

x	-1		0		$+1$
$(\arccos)'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$			$-$		
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

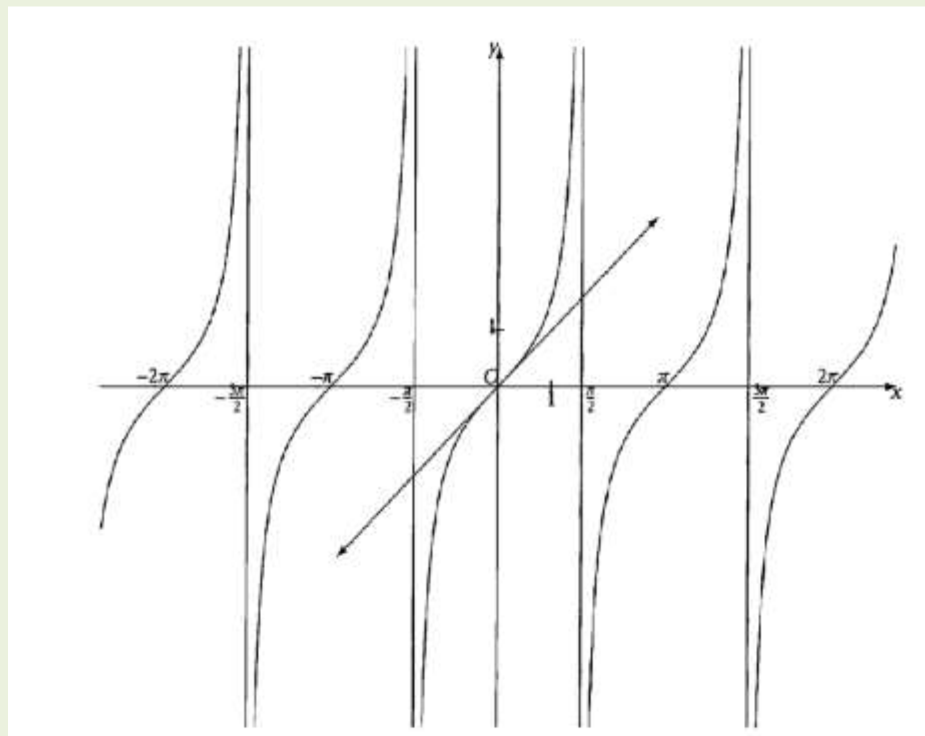
Représentation graphique de Arc cosinus:



I. Fonction Arc tangente

$$tan: \mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$$

$$tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)} \quad , (tan)'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$



Définition:

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle

$$J = tan(I) = \left]\lim_{\substack{> \\ x \to -\pi/2}} tan(x), \lim_{\substack{< \\ x \to \pi/2}} tan(x),\right[= \mathbb{R}$$

La bijection réciproque de la fonction $tan_{|\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[}$ est par définition la fonction Arc tangente notée $arctan$

$$arctan: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

De plus; pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$y = tan(x) \Leftrightarrow x = arctan(y)$$

Proposition:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $arctan(x)$ est l'unique élément de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad tan\big(arctan(x)\big) = x$$

$$\forall \alpha \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ arctan\big(tan(\alpha)\big) = \alpha$$

Remarque:

Pour tout réel $\alpha \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ l'expression $arctan\big(tan(\alpha)\big)$ possède un sens , car $tan(\alpha)$ est dans $\mathbb{R}$, mais l'égalité $arctan\big(tan(\alpha)\big)$, n'est valable que pour α dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction Arc tangente, c'est-à-dire $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exemple :

$$arctan\left(tan - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Car $\tan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = tan\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right) = tan\left(+\frac{\pi}{6}\right)$ avec $\frac{\pi}{6} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Proposition:

La fonction Arc tangente est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$

et de plus

Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(arctan)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Preuve:

pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$y = tan(x) \Leftrightarrow x = arctan(y)$$

$$(tan)'(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x) \neq 0$$

$$(arctan)'(y) = \frac{1}{(tan)'(x)} = \frac{1}{1 + tan^2(x)}$$

$$= \frac{1}{1 + tan^2\big(arctan(y)\big)}$$

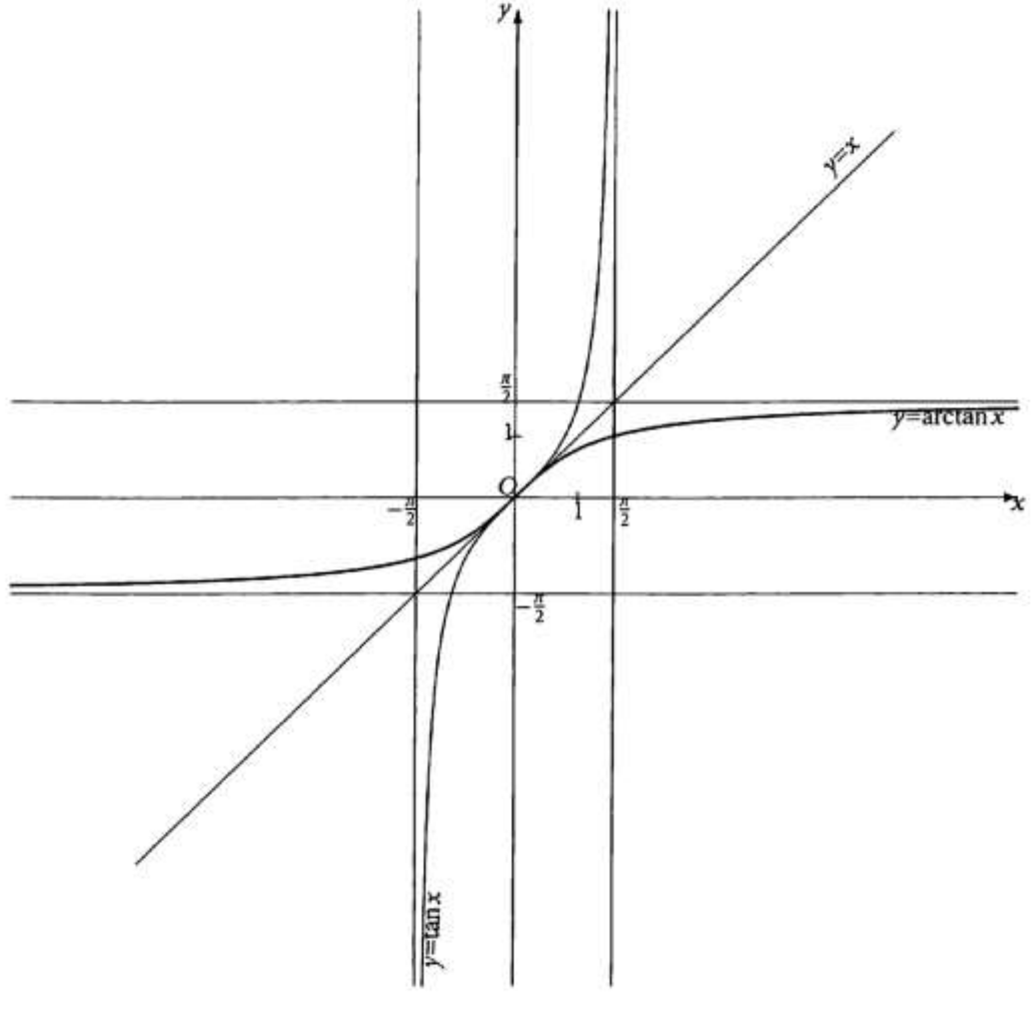
$$(arctan)'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Tableau de variation:

On résume les variations de la fonction Arc tangente dans le tableau suivant

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$		$+$	
			$\dfrac{\pi}{2}$
$arctan(x)$		0	
	$-\dfrac{\pi}{2}$		

Représentation graphique de Arc tangente:



Proposition:

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$$

Avec $\varepsilon = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ +1, & x > 0 \end{cases}$

Preuve:

$$f(x) = arctan(x) + arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = 0$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}^*$, de la forme

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_2, & x > 0 \end{cases}$$

Où c_1, c_2 sont des constantes réelles.

Prenons $x = -1$ puis $x = +1$, il vient que

$$c_1 = -\frac{\pi}{2}, \qquad c_2 = \frac{\pi}{2}$$

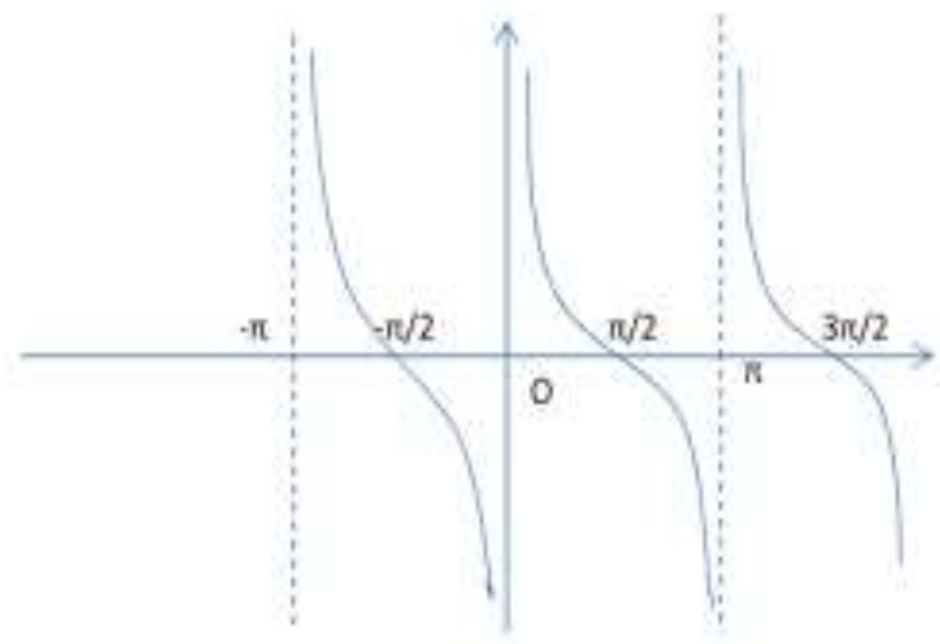
I. Fonction Arc cotangente

$$cotan: \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$cotan(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$$

$$(cotan)'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

$$= -(1 + cotan^2 x)$$



Définition:

La fonction cotangente est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $I =]0, \pi[$, elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle

$$J = cotan(I) = \mathbb{R}$$

La bijection réciproque de la fonction $cotan_{|]0,\pi[}$ est par définition la fonction Arc cotangente notée $arccot$

$$arccot: \mathbb{R} \to]0, \pi[$$

De plus; pour tout $x \in]0, \pi[$

$$y = cotan(x) \Leftrightarrow x = arccot(y)$$

Proposition:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $arccot(x)$ est l'unique élément de $]0, \pi[$ dont la cotangente vaut x.

On a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad cotan\big(arccot(x)\big) = x$$

$$\forall \alpha \in]0, \pi[arccot\big(cotan(\alpha)\big) = \alpha$$

Remarque:

Pour tout réel α l'expression $arccot\left(cotan(\alpha)\right)$ possède un sens , car $cotan(\alpha)$ est dans $\mathbb{R}$, mais l'égalité $arccot\left(cotan(\alpha)\right)$, n'est valable que pour α dans l'intervalle particulier formé de l'ensemble des valeurs de la fonction Arc cotangente, c'est-à-dire$]0, \pi\ [$

Exemple :

$$arccotan\left(cotan - \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Car $cotan\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = cotan\left(-\pi + \frac{\pi}{6}\right) = cotan\left(\frac{\pi}{6}\right)$ avec $\frac{\pi}{6} \in\ ]0, \pi\ [$

Proposition:

La fonction Arc cotangente est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}$

et de plus

Pout tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(arccotan)'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

Preuve:

pour tout $x \in]0, \pi[$

$$y = cotan(x) \Leftrightarrow x = arccot(y)$$

$$(cotan)'(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$$

$$= -\left(1 + cotan^2(x)\right) \neq 0$$

$$(arccot)'(y) = \frac{1}{(cotan)'(x)}$$

$$= -\frac{1}{1 + cotan^2(x)}$$

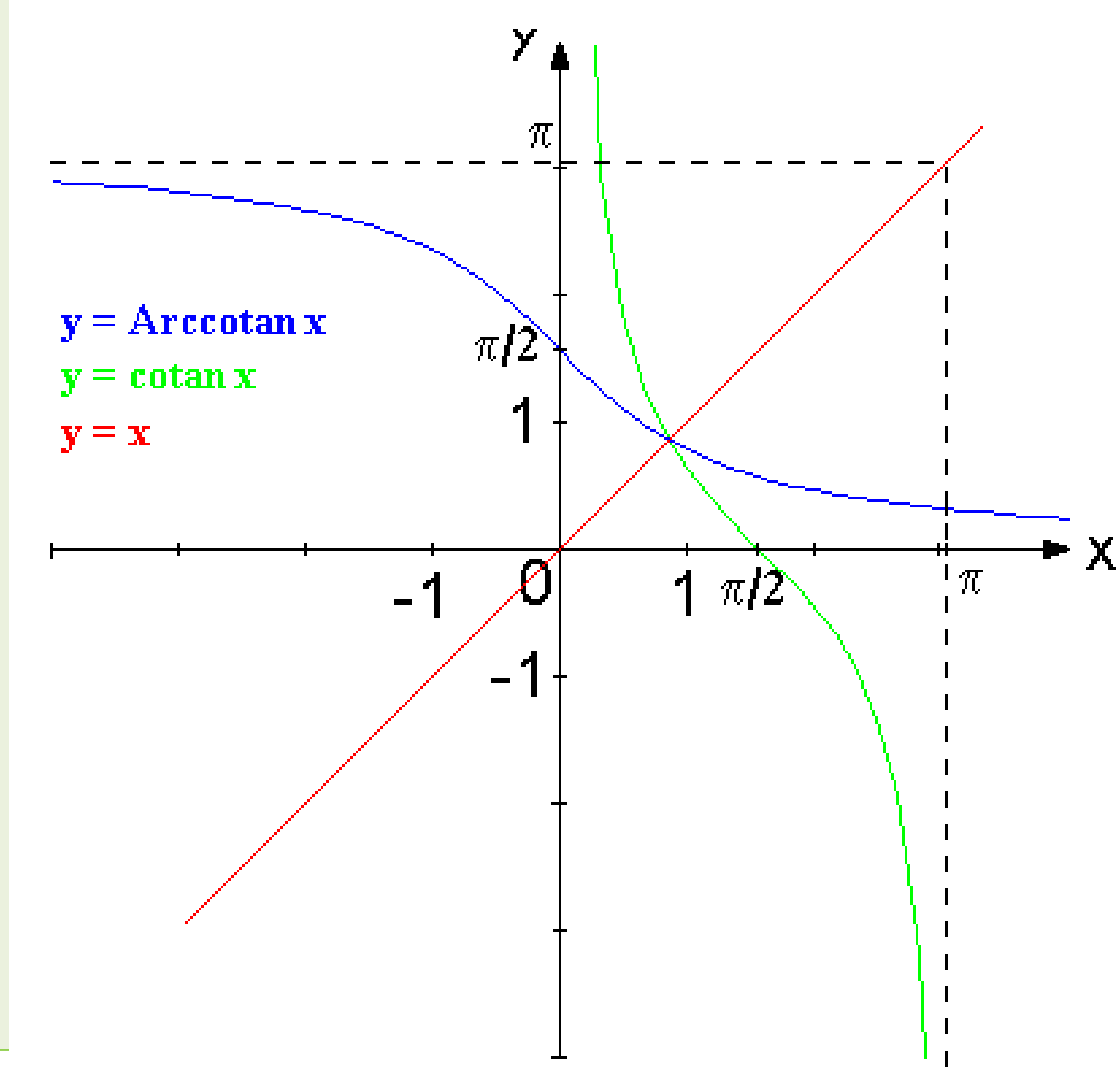
$$= -\frac{1}{1 + cotan^2\left(arccot(y)\right)}$$

$$(arccot)'(y) = -\frac{1}{1 + y^2}$$

Tableau de variation:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$(arccot)'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$			$-$		
$arccot(x)$	π	$\searrow$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

Représentation graphique de Arc cotangente:



Proposition:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$arccotan(x) + arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Preuve:

$$f(x) = arccotan(x) + arctan(x)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$, de la forme

Prenons $x = 1$puis, il vient que

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

Merci

Au prochain cours