

Intégrale de Riemann

Cours de mathématiques
1^{er} cycle, 1^{re} année

1 Sommes de Riemann d'une fonction

- Définitions
- Exemples

2 Intégrale de Riemann

- Intégrabilité
- Exemples
- Propriétés
- Formule de la moyenne

3 Primitives

- Théorème fondamental de l'analyse
- Lien intégrale/primitive
- Exemple de synthèse
- Primitives des fonctions usuelles

- ① Sommes de Riemann d'une fonction
 - Définitions
 - Exemples
- ② Intégrale de Riemann
- ③ Primitives

Définition 1.1 (Subdivision)

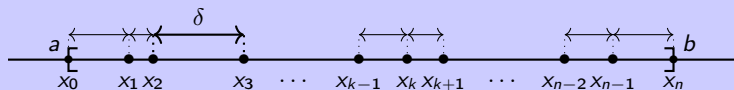
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

- Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ est une famille **finie** de réels (x_0, x_1, \dots, x_n) telle que : $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle $[a, b]$.

- Le **pas** d'une telle subdivision est le nombre $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}\}$.

C'est la longueur du **plus grand** intervalle dans le découpage de $[a, b]$.

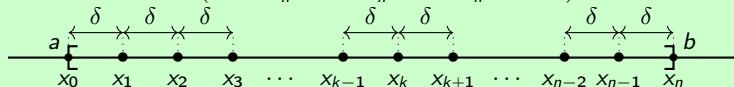


Exemple 1.2 (Subdivision « équirépartie »)

La subdivision **équirépartie** est issue d'un découpage **équidistant** de $[a, b]$ en n intervalles de longueur identique $\delta = \frac{b-a}{n}$.

Les points de subdivision sont donnés par $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$, $0 \leq k \leq n$ (ils sont répartis selon une progression arithmétique de raison δ) :

$$\sigma = \left(a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \dots, b \right).$$



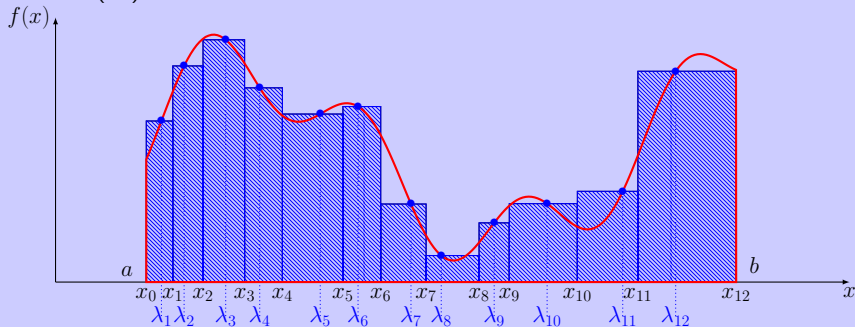
Définition 1.3 (Somme de Riemann)

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$, et $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels tels que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$ (on dit alors que la famille Λ est **adaptée** à la subdivision σ).

On appelle **somme de Riemann** de la fonction f associée à σ et à Λ le nombre

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\lambda_k).$$

Ce nombre représente l'aire de la réunion des rectangles de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(\lambda_k)$.



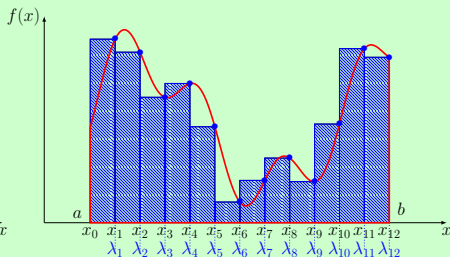
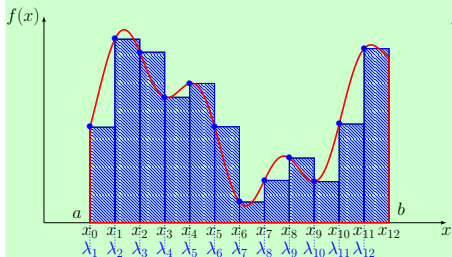
Exemple 1.4 (Subdivision équirépartie)

Considérons une subdivision « équirépartie » avec comme choix des λ_k une des

$$\text{bornes de chaque sous-intervalle : } \begin{cases} x_k = a + k \frac{b-a}{n}, & 0 \leq k \leq n \\ \lambda_k = x_{k-1} \text{ ou } x_k, & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Les sommes de Riemann correspondantes s'écrivent :

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$



Exemple 1.5 (Sommes de Darboux (facultatif))

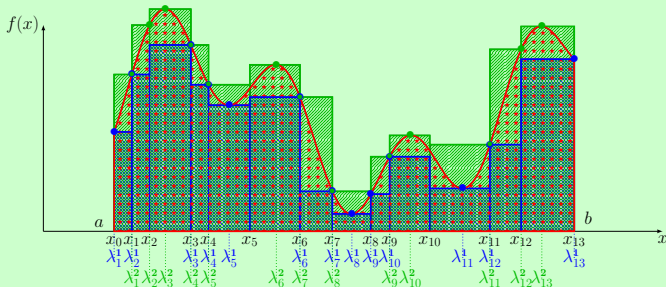
Soit f une fonction **continue** sur $[a, b]$, $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a, b]$. Introduisons les valeurs « extrémales » relatives à chacun des sous-intervalles de σ :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{et} \quad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Par continuité, f **atteint** ses bornes : il existe donc des λ_k^1, λ_k^2 dans $[x_{k-1}, x_k]$ tels que $f(\lambda_k^1) = m_k$ et $f(\lambda_k^2) = M_k$.

Les sommes de Riemann correspondant aux familles adaptées $\Lambda_1 = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$ et $\Lambda_2 = (\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$ sont appelées **sommes de Darboux** :

$$S_1 = S(f, \sigma, \Lambda_1) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad S_2 = S(f, \sigma, \Lambda_2) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$



Remarque : toutes les sommes de Riemann sont comprises entre S_1 et S_2 .

① Sommes de Riemann d'une fonction

② Intégrale de Riemann

- Intégrabilité
- Exemples
- Propriétés
- Formule de la moyenne

③ Primitives

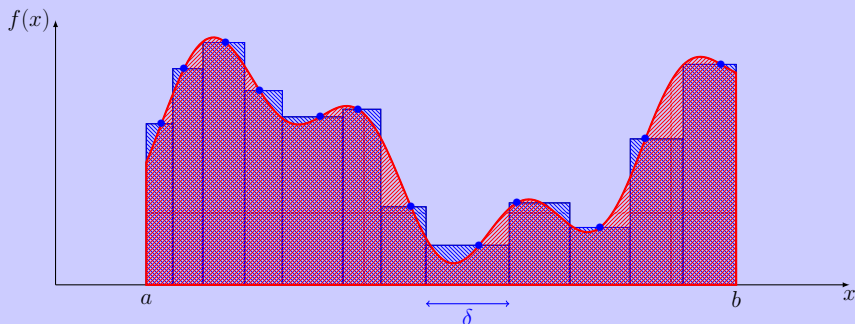
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel I tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est **intégrable (au sens de Riemann)** sur $[a, b]$ et le nombre I est l'**intégrale de f sur $[a, b]$** . Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f$.

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.



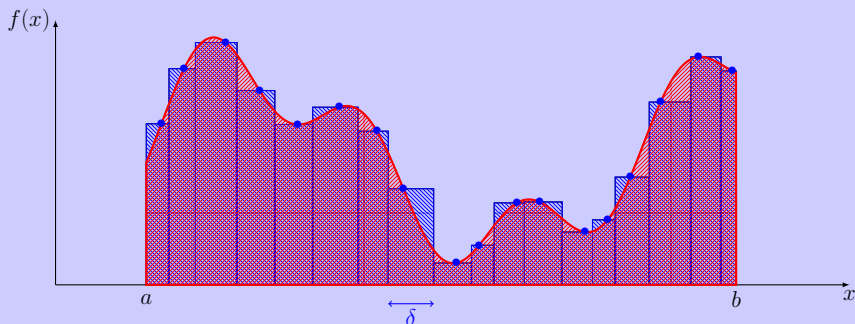
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel I tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est **intégrable (au sens de Riemann)** sur $[a, b]$ et le nombre I est l'**intégrale de f sur $[a, b]$** . Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f$.

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.



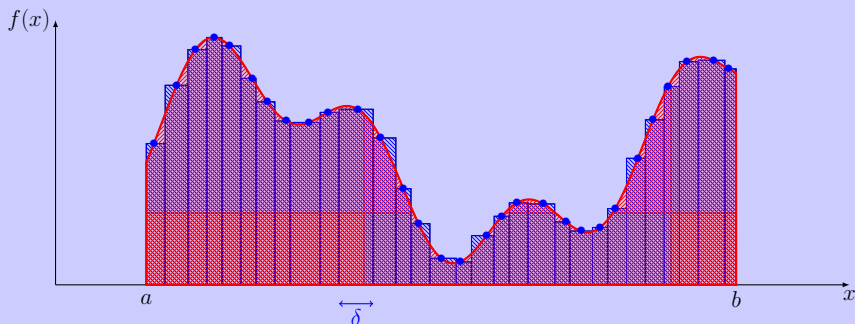
Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel I tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction f est **intégrable (au sens de Riemann)** sur $[a, b]$ et le nombre I est l'**intégrale de f sur $[a, b]$** . Ce nombre est noté $\int_a^b f(x) dx$ ou $\int_a^b f$.

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.

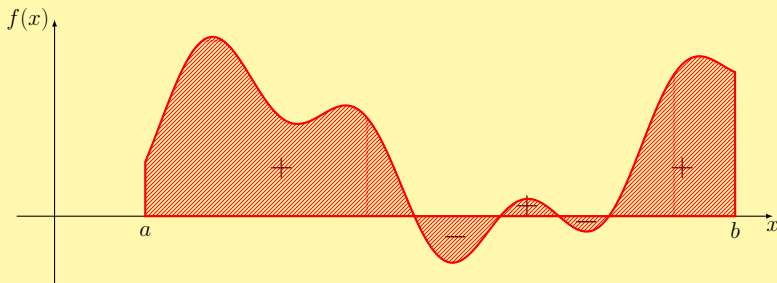


Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\odot) d\odot = \dots$$

- Le nombre $\int_a^b f$ représente l'« **aire algébrique** » entre la courbe de f dans un repère orthonormal et l'axe des abscisses, en comptant **négativement** les parties **au-dessous** de l'axe et **positivement** les parties **au-dessus**.



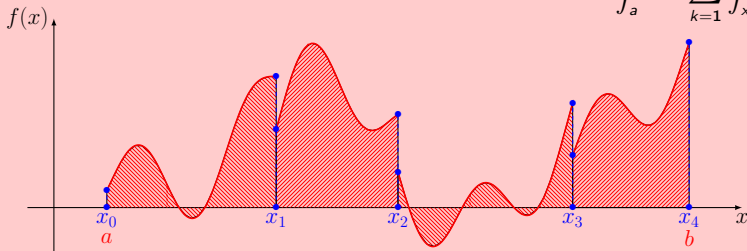
- Conventions : on convient que $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ et $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- Toute fonction **continue** sur $[a, b]$ est **intégrable** sur $[a, b]$.
- Plus généralement, toute fonction **continue par morceaux** sur $[a, b]$ (i.e. admettant un nombre **fini** de discontinuités, celles-ci étant de 1^{re} espèce) est **intégrable** sur $[a, b]$.

Plus précisément, en notant x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ses discontinuités et en posant $x_0 = a$ et $x_n = b$, on peut prolonger f par continuité sur chaque intervalle

$[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \dots, n\}$. Notons \tilde{f}_k ce prolongement. Alors $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k$.



Remarquons que si l'on modifie la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, alors la valeur de son intégrale reste la même.

- Toute fonction **monotone** sur $[a, b]$ est **intégrable** sur $[a, b]$.

Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie**, on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante**, cela donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \lambda = \lambda(b-a) \quad (\text{aire d'un rectangle !})$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle**, cela donne

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n e^{a+k \frac{b-a}{n}} = e^b - e^a.$$

- Dans le cas de la fonction **identité**, cela donne

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad (\text{aire d'un trapèze !})$$

- Dans le cas de la fonction **carré**, cela donne

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de \mathbb{Q})

Considérons la fonction « indicatrice » (ou « caractéristique ») de \mathbb{Q} . Il s'agit de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{Q} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$ de pas arbitrairement petit, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $\Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$ deux familles adaptées à la subdivision σ telles que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda) = b - a \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda') = 0.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.

Ainsi, la fonction indicatrice de \mathbb{Q} n'est intégrable sur **aucun** intervalle $[a, b]$.

Annexe (facultatif)

Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel et un irrationnel (en fait une infinité de chaque). On dit que les ensembles \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont **denses** dans \mathbb{R} .

En effet : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < b$. Alors il existe un entier n tel que $a < b - \frac{1}{n}$.

Posons $u_n = \frac{E(na)+1}{n}$ et $v_n = \frac{E(na\sqrt{2})+1}{n\sqrt{2}}$. Les nombres u_n et v_n sont compris entre a et b , u_n est rationnel et v_n est irrationnel.



Proposition 2.6 (Opérations)

① Linéarité

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leq b$) et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
La fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

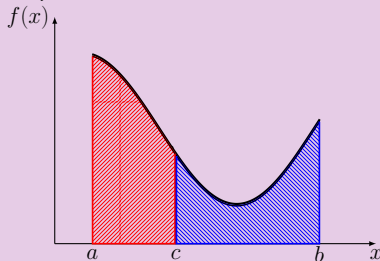
② Relation de Chasles

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leq b$)
Pour tout $c \in [a, b]$, f est intégrable
sur $[a, c]$ et $[c, b]$ et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ou encore

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$



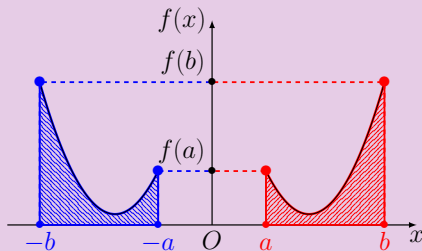
Ces propriétés restent valables lorsque $b < a$.

Proposition 2.7 (Parité)

Soit f une fonction intégrable sur $[-b, -a] \cup [a, b]$ ($0 \leq a \leq b$).

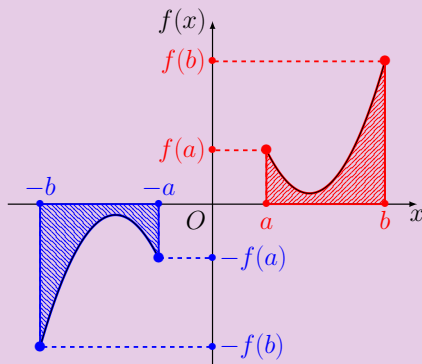
- Si f est **paire**, alors

$$\int_{-b}^{-a} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$



- Si f est **impaire**, alors

$$\int_{-b}^{-a} f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$



Proposition 2.7 (Parité)

Cas particulier : soit f une fonction intégrable sur $[-a, a]$ ($a \geq 0$).

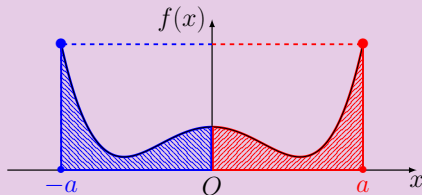
- Si f est **paire**, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Autrement dit, la fonction

$$x \in [-a, a] \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

est **impaire**.



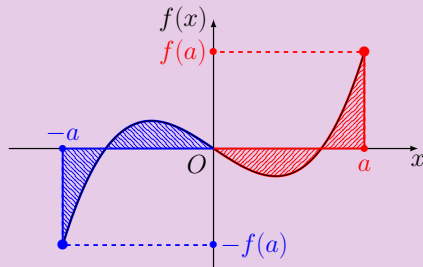
- Si f est **impaire**, alors

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$

Autrement dit, la fonction

$$x \in [-a, a] \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

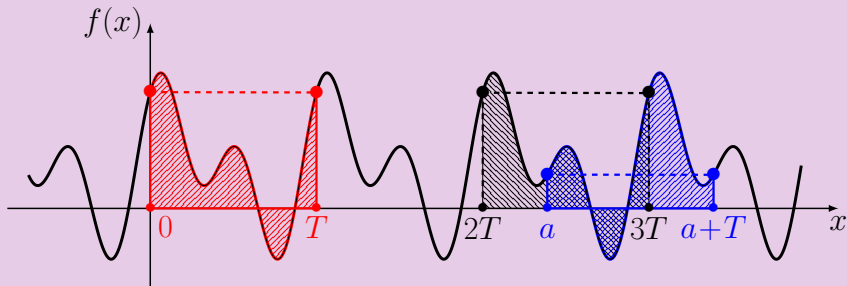
est **paire**.



Proposition 2.8 (Périodicité)

Soit f une fonction T -périodique sur \mathbb{R} intégrable sur $[0, T]$ ($T > 0$). Alors, pour tout réel a , f est intégrable sur $[a, a + T]$ et

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx.$$



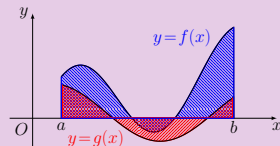
Proposition 2.9 (Ordre)

① Croissance/Positivité

Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$ ($a \leq b$).

Si $f \geq g$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

En particulier : si $f \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.



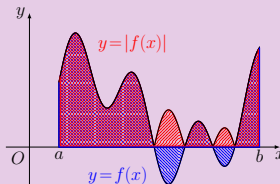
② Inégalité triangulaire

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$ ($a \leq b$).

On a $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Plus généralement, quel que soit l'ordre de a et b ,

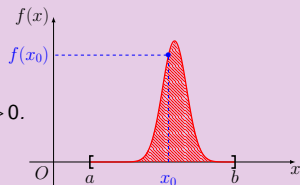
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \leq |b - a| \times \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$



③ Stricte positivité

Supposons f continue et positive.

- S'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.
- Si $\int_a^b f(x) dx = 0$ alors, pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) = 0$.



Définition 2.10 (Valeur moyenne)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

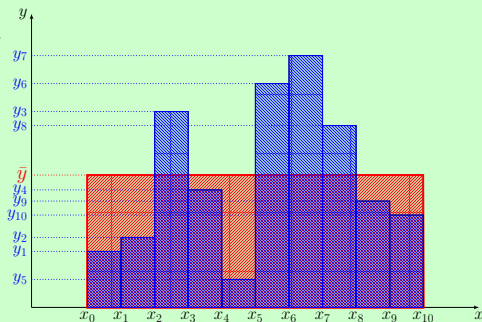
On appelle **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** le réel $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.

Exemple 2.11

Soit y_1, y_2, \dots, y_n des nombres réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction **constante par morceaux** définie par $f(x) = y_k$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $x \in [x_{k-1}, x_k]$ où l'on a posé $x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$.

Alors la **valeur moyenne de f sur $[a, b]$** coïncide avec la **moyenne arithmétique** des nombres y_1, \dots, y_n :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \bar{y}.$$



Théorème 2.12 (Formule de la moyenne)

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et soit $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable de signe constant.

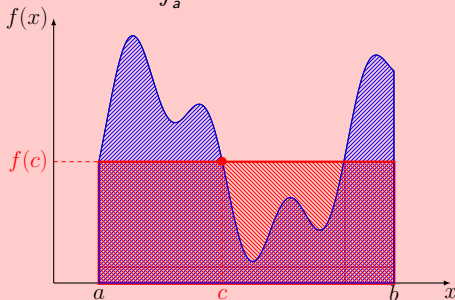
Alors

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, pour $g = 1$:

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Autrement dit, il existe un $c \in [a, b]$ tel que $f(c)$ coïncide avec la **valeur moyenne** de f sur $[a, b]$.



Exemple 2.13

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_a^b f(x) e^{-nx} dx$.

La fonction $x \mapsto e^{-nx}$ étant intégrable positive sur $[a, b]$,

$$\exists c_n \in [a, b], \quad u_n = f(c_n) \int_a^b e^{-nx} dx = \frac{1}{n} f(c_n) (e^{-na} - e^{-nb}).$$

La fonction f étant continue sur $[a, b]$, donc bornée, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

- ① Sommes de Riemann d'une fonction
- ② Intégrale de Riemann
- ③ Primitives
 - Théorème fondamental de l'analyse
 - Lien intégrale/primitive
 - Exemple de synthèse
 - Primitives des fonctions usuelles

Le théorème de la moyenne permet d'obtenir une relation de **réciprocité** entre les opérations d'**intégration** et de **dérivation** décrite dans le résultat suivant :

Théorème-définition 3.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I et $a \in I$ fixé.

On définit la fonction suivante F sur I par $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Alors F est de **classe \mathcal{C}^1** sur I et $F' = f$.

On dit que F est une **primitive** de f sur I .

F est en fait l'**unique** primitive de f sur I qui s'annule en a .

Remarque 3.2 (Raffinement de la formule de la moyenne (facultatif))

La formule de la moyenne précédemment énoncée stipule l'existence d'un c appartenant à l'intervalle **fermé** $[a, b]$ tel que $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$.

En fait, le théorème des accroissements finis appliqué à une primitive de f permet d'assurer plus précisément l'existence d'un tel c dans l'intervalle **ouvert** $]a, b[$.

Corollaire 3.3

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I . Alors :

- ① f admet des primitives sur I ;
- ② si F est une primitive de f , alors toutes les primitives de f s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à F ;
- ③ pour toute primitive F de f et $(a, b) \in I^2$, on a : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Notations :

- la quantité $F(b) - F(a)$ se note aussi $[F(t)]_a^b$;
- on note $\int f(x) dx$ toute primitive de f (définie à une constante additive près).

Corollaire 3.4

Soit f une fonction de **classe \mathcal{C}^1** sur un intervalle I .

Alors on a pour tout $(a, b) \in I^2$: $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

On fera attention de ne pas confondre la formule précédente avec la suivante (valable pour f **continue**), l'**ordre** d'intégration et de dérivation n'étant pas le même :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

① **La fonction d'intérêt** : soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$$

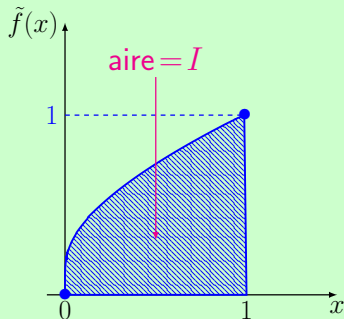
- La fonction f est continue sur $]0, 1[$.
- On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$.
- Donc f admet un prolongement par continuité \tilde{f} en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{f}(0) = 0$ et $\tilde{f}(1) = 1$.
Plus précisément :

$$\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On se propose alors de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \tilde{f}(x) dx.$$



Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

② **Une fonction intermédiaire** : soit $F :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

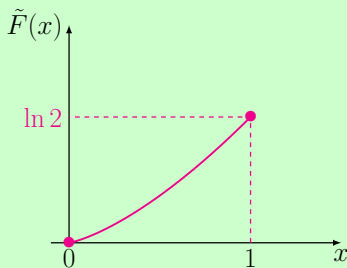
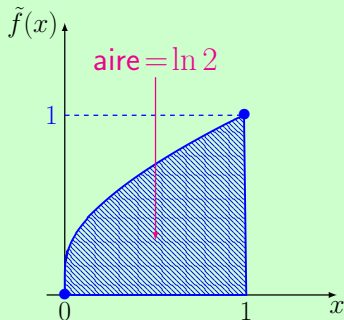
- Limite en 0^+** . Posons $\varphi(t) = \frac{1}{\ln t}$ pour $t \in]0, 1[$. En appliquant la formule de la moyenne à la fonction φ continue sur $[x^2, x]$, il existe $c(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = \frac{x^2 - x}{\ln(c(x))}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} c(x) = 0$. D'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$.
- Limite en 1^-** . En décomposant $\varphi(t) = f(t) \times \frac{1}{t-1}$ et en appliquant la formule de la moyenne, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant négative sur $[x^2, x]$, il existe $d(x) \in [x^2, x]$ tel que $F(x) = f(d(x)) \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = f(d(x)) \ln(x+1)$. Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} d(x) = 1$ et $\lim_{u \rightarrow 1^-} f(u) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(d(x)) = 1$. D'où $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \ln 2$.
- Prolongement par continuité sur $[0, 1]$** . Donc F admet un prolongement par continuité \tilde{F} en 0 et 1 obtenu en posant $\tilde{F}(0) = 0$ et $\tilde{F}(1) = \ln 2$ (F étant continue sur $]0, 1[$).
- Dérivée de \tilde{F}** . La fonction φ étant continue sur $]0, 1[$, elle admet une primitive Φ . On peut écrire $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$, Φ étant dérivable sur $]0, 1[$. On voit alors que F est dérivable sur $]0, 1[$ et $F'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = f(x)$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \tilde{f}(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} F'(x) = \tilde{f}(1)$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, \tilde{F} est dérivable en 0 et en 1 et $\tilde{F}' = \tilde{f}$ sur $[0, 1]$.

Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

③ Le calcul d'aire :

- La fonction \tilde{f} est une **primitive** de \tilde{f} sur $[0, 1]$.
En conséquence, $I = [\tilde{f}(x)]_0^1 = \tilde{f}(1) - \tilde{f}(0)$ soit

$$I = \ln 2.$$



Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives à connaître :

Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

$$\textcircled{1} \int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste \text{ pour tout } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ et } \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + Cste$$

ou encore $\int \frac{1}{x^p} dx = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} + Cste \text{ pour tout } p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\textcircled{2} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + Cste \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\textcircled{3} \int \cos x dx = \sin x + Cste \text{ et } \int \sin x dx = -\cos x + Cste$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + Cste$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + Cste \text{ et } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + Cste$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + Cste$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{argsh} x + Cste$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + Cste$$

Série de Riemann

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_riemann.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf)

Formule de Stirling

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_stirling.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf)

Entre Machin et Plouffe...

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_machin_plouffe.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf)

Sinus et produit eulérien

Aimé Lachal

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/
diaporama_sinus_eulerien.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf)

Notions à retenir

- Sommes de Riemann
 - ★ Application au calcul de limites de certaines suites
- Intégrale de Riemann
 - ★ Interprétation géométrique
 - ★ Opérations
 - ★ Inégalités, théorème de la moyenne
- Primitives
 - ★ Théorème fondamental de l'analyse : lien entre intégrale définie et primitive
 - ★ Primitives usuelles à connaître