Chapitre 7

Intégrale de Riemann

Introduction

Soit $[a,\, b]$ un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$ et f une fonction bornée sur $[a,\, b]$. On suppose pour l'instant que f est positive. Le but de ce chapitre est de voir pour quels types de fonctions f, peut-on calculer l'aire de la surface $\mathcal{S}_f$ délimitée par les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[a,\, b]$. Dans l'affirmative, comment calculer cette aire ou comment l'approcher.

7.1 les subdivisions de $[a,\, b]$.

Définition 7.1.1 On appelle subdivision de l'intervalle $[a,\, b]$ tout sous ensemble fini de points de $[a,\, b]$ de la forme

$$\sigma = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ......x_n = b\}.$$

- L'intervalle $[x_{k-1},\, x_{k+1}]$ est appelé intervalle partiel de $[a,\, b]$ relativement à la subdivision σ.
- Le nombre
  $$\delta(\sigma) = \mathrm{Max}_{\,1\leq k\leq n}\; x_k - x_{k-1}$$
  est appelé **le pas** de la subdivision σ.
- Si les intervalles partiels sont tous égaux, avec:
  $$x_k - x_{k-1} = h = \frac{b-a}{n}\,,$$

on dit que la subdivision σ est **régulière**. Dans ce cas on a

$$x_k = a + kh,\ k = 1, 2, .., n.$$

Définition 7.1.2 Soit σ et σ' deux subdivisions de $[a,\, b]$. On dit que σ est **plus fine** que σ' si

$$\sigma' \subset \sigma\,.$$

En particulier, soit:

$$\delta_{2^n} = \frac{b-a}{2^n} \ \text{ et } \ \delta_{2^{n+1}} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

les pas des subdivisions σ_n et σ_{n+1} respectivement. On a bien σ_{n+1} est plus fine que σ_n

<u>**Notation**</u>

1) L'ensemble des subdivisions de $[a,\, b]$ est noté $S([a,\, b])$.

2) On note par σ_n la subdivision contenant $n+1$ points de $[a,\, b]$ et telle que

$$\lim_{n \to +\infty} \delta(\sigma_n) = 0.$$

3) Soit f une fonction bornée sur $[a,\, b]$. On pose

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x) \quad \text{et} \quad M_k = \sup_{x \in [x_{k-1},\, x_k]} f(x),$$

et

$$\|f\| = \sup_{x \in [a,\, b]} |f(x)|.$$

Les nombres m_k et M_k existent bien car la fonction f est bornée. De même pour $\|f\|$ qui est appelé **norme** de f sur $[a,\, b]$.

7.2 Les sommes de Darboux

Définition 7.2.1 Soit σ une subdivision de $[a,\, b]$. Les expressions suivantes:

$$d(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad D(f, \sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k - x_{k-1}) \tag{7.2.1}$$

sont appelées, respectivement, somme de Darboux inférieure et somme de Darboux supérieure de f relativement à la subdivision σ.

Exemple 7.2.2 Soit la fonction $f(x) = \sin x$ et $[a,\ b]\ = [0,\ \pi]$. Considérons la subdivision régulière suivante

$$\sigma_4 = \{x_k = k\,\frac{\pi}{4}\,,\ \ k = 0, 1, 2, 3, 4\}.$$

On a

$$m_1 = 0,\ \ m_2 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ \ m_3 = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,\ \ m_4 = \sin\pi = 0\,,$$

$$M_1 = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \ M_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1\ \ \ M_3 = \sin\frac{\pi}{2} = 1\,,\ \ m_4 = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,,$$

Comme la subdivision est régulière alors, $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{4}$, alors on a:

$$d(f,\sigma) = \frac{\pi}{4}\,(0 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 0) = \sqrt{2}\,\frac{\pi}{4}$$

$$D(f,\sigma) = \frac{\pi}{4}\,(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = (2 + \sqrt{2})\,\frac{\pi}{4}$$

Propriétés des sommes de Darboux

Proposition 7.2.3 *Pour toute subdivision* σ*, on a*

$$d(f,\sigma) \leq D(f,\sigma).$$

Proposition 7.2.4 *Soit* σ *et* σ' *deux subdivision de* $[a,\ b]$ *. Si* σ *est plus fine que* σ' *alors*

$$D(f,\sigma) \leq D(f,\sigma') \quad \text{et} \quad d(f,\sigma') \leq d(f,\sigma).$$

Proposition 7.2.5 *Pour toute subdivision* σ *et pour toute subdivision* σ'*, on a*

$$d(f,\sigma) \leq D(f,\sigma').$$

Remarque 7.2.6 Le sous ensemble de $\mathbb{R}$,

$$\{d(f,\sigma);\ \sigma \in S([a,\ b])\,\}$$

est majoré et le sous ensemble

$$\{D(f,\sigma);\ \sigma \in S([a,\ b])\,\}$$

est minoré.

En effet, en notant σ_0 la subdivision contenant seulement les points a et b on a, d'après la proposition (7.2.4),

$$\forall\, \sigma \in S([a,\, b])\,,\ \ d(f,\sigma) \leq D(f,\sigma_0)\ \text{ et }\ D(f,\sigma) \geq d(f,\sigma_0)\,.$$

Posons alors

$$^*\!\int_a^b f = \inf_{\sigma\in S([a,\,b])} D(f,\sigma) \quad \text{et} \quad {}_*\!\int_a^b f = \sup_{\sigma\in S([a,\,b])} d(f,\sigma).$$

Les valeurs

$${}_*\!\int_a^b f \quad \text{et} \quad {}^*\!\int_a^b f$$

sont appelées respectivement intégrale inférieure et intégrales supérieure de f sur $[a,\, b]$.

Remarque 7.2.7 Pour toute fonction bornée f, l'intégrale inférieure et l'intégrale supérieure de f existent. De plus

- $d(f,\, \sigma) \leq\ {}_*\!\int_a^b f\,,\ \ \forall\, \sigma \in S([a,\, b])\,,$
- ${}^*\!\int_a^b f \leq D(f,\, \sigma)\,,\ \ \forall\, \sigma \in S([a,\, b])\,,$
- ${}_*\!\int_a^b f \leq\ {}^*\!\int_a^b f\,.$

7.3 Les fonctions Riemann-intégrables

Définition 7.3.1 Soit f une fonction bornée sur $[a,\, b]$. Si

$${}^*\!\int_a^b f = {}_*\!\int_a^b f,$$

on dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann intégrable.) La valeur commune de ces deux nombres est appelée intégrale, au sens de Riemann, de f sur $[a,\, b]$ et est notée

$$\int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Lorsque f est Riemann-intégrable sur $[a,\, b]$, on note

$$f \in \mathcal{R}\,([a,\, b]\,).$$

Proposition 7.3.2 [$Caractrisation\, des\, fonctions\, intgrables$] *Une fonction f est Riemann-intégrable sur $[a,\, b]$ si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \sigma \in S([a,\, b])\ ;\ 0 \leq D(f,\sigma) - d(f,\sigma) < \varepsilon\,. \tag{7.3.1}$$

7.3.1 Deux types de fonctions Riemann-intégrables

Remarque 7.3.3 Si f est constante sur $[a,\, b]$ alors elle est intégrable.
En effet si $f(x) = c,\ \forall\, x \in [a,\, b]$, alors, pour toute subdivision σ, on a

$$D(f,\sigma) = c(b-a) \ \text{ et } \ d(f,\sigma) = c(b-a),$$

alors

$$_*\int_a^b f = {}^*\int_a^b f = c(b-a).$$

Les deux théorèmes suivants nous permettent de reconnaitre quelques fonctions intégrables au sens de Riemann.

Théorème 7.3.4 *Toute fonction monotone sur $[a,\, b]$ est intégrable sur $[a,\, b]$.*

Théorème 7.3.5 *Toute fonction continue sur $[a,\, b]$ est intégrable sur $[a,\, b]$.*

7.3.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann.

L'intégrale de Riemann vérifie les propriétés suivantes.

Proposition 7.3.6

1. *Si f est intégrable sur $[a,\, b]$ alors elle est intégrable sur tout intervalle*

$$[\alpha,\, \beta] \subset [a,\, b]\,.$$

2. *Si f est intégrable sur $[a,\, b]$ alors, pour tout $c \in [a,\, b]$, la fonction f est intégrable sur $[a,\, c]$ et sur $[c,\, b]$. De plus, on a*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

3. *Soit* $c \in [a, b]$ *. Si* f *est intégrable sur* $[a, c]$ *et sur* $[c, b]$ *alors elle est intégrable sur* $[a, b]$ *et on a*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

4. *Soient* a*,* b *et* c *trois nombres réels quelconques. Si* f *est intégrable chacun des intervalees* $[a, b]$ *,* $[a, c]$ *et* $[c, b]$ *alors on a la relation*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

5. *Soit* f *une fonction* ***bornée*** *sur* $[a, b]$ *. Si* f *est intégrable sur tout intervalle* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ *alors elle est intégrable sur* $[a, b]$ *.*

Remarque 7.3.7
1) La différence entre le troisième et le quatrième point de cette proposition est que dans le quatrième, le point c peut être en dehors de l'intervalle $[a, b]$. De plus, cette relation est appelée **relation de Chales**
2) Le cinquième point de cette proposition veut dire que la notion d'intégrabilité est une notion globale et non locale comme, par exemple la continuité qui est une notion locale. En effet, on sait qu'il y'a des fonction continue sur $]a, b[$ mais non continue en a.
De plus, les deux derniers points de cette proposition nous donne un ensemble assez large de fonctions intégrables au sens de Riemann, que nous verrons par la suite.

Corollaire 7.3.8

1. *Soit* E *un nombre fini de points de l'intervalle* $[a, b]$ *. Si une fonction* ***bornée*** f *est intégrable sur tout sous ensemble* $[a, b] \setminus E$ *de* $[a, b]$ *, alors elle est intégrable sur* $[a, b]$ *.*

2. *En particulier, si* f *est bornée et continue sur* $[a, b]$ *sauf en un nombre fini de points de* $[a, b]$ *alors elle est intégrable sur* $[a, b]$ *.*

7.3.3 Quelques fonctions intégrables

De la proposition et du corollaire précédents, on déduit que

1. Toute fonction bornée et monotone par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

2. Toute fonction bornée et continue par morceaux sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.

En particulier

1. Les polynômes sont intégrables sur tout intervalle fermé et borné $[a, b]$.
2. Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont intégrables sur tout intervalle fermé et borné $[a, b]$.
3. La fonction $x \mapsto \operatorname{tg} x$ est intégrable sur tout intervalle fermé inclus dans intervalle:

$$[\alpha, \beta] \subset \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

7.3.4 Opérations sur les fonctions intégrables

Théorème 7.3.9 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Alors*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction λf est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx.$$

2. *la fonction $f + g$ est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

Proposition 7.3.10 *Soit f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. Alors*

1.
$$f \geq 0 \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \geq 0.$$

2.
$$f \leq g \text{ sur } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx.$$

Théorème 7.3.11 *Soit f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$. Alors*

1. *la fonction $|f|$ est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx. \tag{7.3.2}$$

2. *la fonction fg est intégrable sur $[a,\, b]$ et*

$$\left|\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right| \le \left(\int_a^b (f(x))^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2\right)^{\frac{1}{2}} dx\,. \tag{7.3.3}$$

Remarque 7.3.12 Dans le point 2, on n'a pas égalité mais une inégalité, appelée inégalité de **Cauchy-Schwarz.**

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme suivant

Lemme 7.3.13 *Pour toute fonction Ψ définie sur un intervalle $\mathcal{I}$ on a*

$$\sup_{x\in\mathcal{I}} \Psi(x) - \inf_{x\in\mathcal{I}} \Psi(x) = \sup_{x,x'\in\mathcal{I}} (\Psi(x) - \Psi(x')) = \sup_{x,x'\in\mathcal{I}} |\Psi(x) - \Psi(x')|\,. \tag{7.3.4}$$

7.4 Intégrale et primitives

Soit f une fonction intégrable sur $[a,\, b]$ et considérons la fonction $F : [a,\, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \tag{7.4.1}$$

La fonction f vérifie les propriétés données par la proposition suivante.

Proposition 7.4.1

1. *La fonction F est continue sur $[a,\, b]$.*

2. *Si f est continue en $x_0 \in [a,\, b]$, alors la fonction F est dérivable en x_0. De plus,*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

3. *Si f est continue sur $[a,\, b]$ et G est une primitive quelconque de f alors,*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

Remarque 7.4.2 On voit donc, que pour une fonction positive et intégrable sur $[a,\, b]$, l'aire de la surface $\mathcal{S}_f$, comprise entre les droites $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$, est égale à

$$A(\mathcal{S}_f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Voyons si f n'est pas positive.
(i) Si f est négative sur $[a,\, b]$, alors la fonction $-f$ est positive. Donc

$$A(S_{-f}) = \int_a^b -f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Mais, les deux surfaces $\mathcal{S}_{-f}$ et $\mathcal{S}_f$, alors

$$A(\mathcal{S}_{-f}) = A(\mathcal{S}_f)\,.$$

On déduit alors que, si f est négative sur $[a,\, b]$, on a

$$A(\mathcal{S}_f) = -\int_a^b f(x)dx.$$

(ii) D'après ce qui précède, on déduit alors que, si f change de signe sur $[a,\, b]$, on a

$$A(\mathcal{S}_f) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

7.4.1 Une formule de dérivation

Proposition 7.4.3 *Soit f une fonction continue sur $[a,\, b]$ et u et v deux fonctions dérivables sur $[\alpha,\, \beta]$ à valeurs dans $[a,\, b]$. La fonction Ψ définie par*

$$\Psi(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

est dérivable sur $[a,\, b]$. De plus, on a la formule de dérivation suivante

$$\psi'(x) = f o\, v(x)\, v'(x) - f o\, u(x)\, u'(x). \tag{7.4.2}$$

7.5 Les formules de la moyenne.

Théorème 7.5.1 *[Première formule de la moyenne] Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,\, b]$. On suppose que la fonction g garde un signe constant sur $[a,\, b]$. Alors, il existe un nombre*

$$\mu \in \left[\inf_{x\in[a,\, b]} f(x),\ \sup_{x\in[a,\, b]} f(x)\right]$$

tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx. \tag{7.5.1}$$

De plus, si f est continue sur $[a, b]$, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $\mu = f(\xi)$ et la formule (7.5.1) *devient*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx. \tag{7.5.2}$$

Théorème 7.5.2 *[Deuxième formule de la moyenne] Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que la fonction g est décroissante et positive sur $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx. \tag{7.5.3}$$

Ce théorème admet les corollaires suivants

Corollaire 7.5.3 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que la fonction g est croissante et positive sur $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{7.5.4}$$

Corollaire 7.5.4 *Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$. On suppose que la fonction g est monotone sur $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx. \tag{7.5.5}$$

Chapitre 8

Calcul de primitives

Définition 8.0.5 Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que F est une primitive de f si

$$F' = f \quad \text{sur } I.$$

Remarque 8.0.6 Si G est une autre primitive de f alors, il existe une constante C telle que

$$G(x) = F(x) + C, \ \forall x \in I.$$

Donc, la même fonction f admet un ensemble de primitives.

<u>**Notation**</u> L'ensemble des primitives de f est noté

$$\int f(x)\, dx\,,$$

on lit primitive de f ou intégrale indéfinie de f.

8.1 Primitives de fonctions usuelles.

Dans leurs intervalles de définitions, on sait que

$$\int x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\, x^{\alpha+1} + C, \quad \text{si } \alpha \neq 1, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C\,, \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C\,, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C\,, \qquad \int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C,$$

8.2 Propriétés des intégrales indéfinies.

Proposition 8.2.1 *Soit f et g deux fonctions continues sur I. On a les deux formules suivantes:*

1. $\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$,
2. $\int \lambda\, f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve : En posant

$$F(x) = \int f(x)\, dx \quad \text{et} \quad G(x) = \int g(x)\, dx\,,$$

le résultat s'obtient de la formule de dérivation

$$(F + G)'(x) = F'(x) + G'(x).$$

En effet en intégrant les deux membres de cette égalité et du fait que

$$\int \varphi'(x)\, dx = \varphi(x),$$

on aura

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int f(x)\, dx\,.$$

On fait de même pour la deuxième.

8.3 Changement de variables .

Théorème 8.3.1 *Soit f une fonction continue sur I et*

$$\begin{aligned} h : J &\longrightarrow I \\ t &\longmapsto x = h(t) \end{aligned}$$

une application de classe C^1 sur J, où, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si F est une primitive de f alors $F\, o\, h$ est une primitive de $(f\, o\, h)h'$ et on écrit:

$$\int [f\, o\, h(t)]\, h'(t)\, dt = F(h(t)) + C. \tag{8.3.1}$$

Preuve : Il suffit d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée. En effet,

$$\begin{aligned}[F(h(t))]' &= F'(h(t)\, h'(t) \\ &= f(h(t)\, h'(t)\end{aligned}$$

Dans la pratique, on pose $u = h(t) \Rightarrow du = h'(t)\, dt$ et la formule devient

$$\int f(h(t))h'(t)\, dt = \int f(u)\, du = F(u) + C.$$

Exemple 8.3.2 On veut calculer l'intégrale indéfinie suivante.

$$I = \int (4t-3)\sin(2t^2 - 3t + 1)\, dt.$$

On pose

$$u = 2t^2 - 3t + 1 = h(t) \Rightarrow du = h'(t)\, dt = (4t-3)\ \ dt,$$

on aura alors

$$I = \int \sin u\, du = -\cos u + C = -\cos(2t^2 - 3t + 1) + C.$$

8.4 Intégration par parties.

Proposition 8.4.1 *Soit f et g deux fonctions de classe C^1 sur I. On a la formule, appelée formule d'intégration par parties suivante:*

$$\forall\, x \in I; \quad \int f'(x)\, g(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f(x)\, g'(x)\, dx\,. \tag{8.4.1}$$

Preuve : On sait que

$$(f\, g)'(x) = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x), \tag{8.4.2}$$

et

$$\int (f\, g)'(x)\, dx = f(x)\, g(x),$$

on obtient alors le résultat en intégrant les deux membres de l'égalité (8.4.2).

Exemple 8.4.2

1. Calcul de

$$\int x \cos x\, dx\,.$$

On pose

$$u(x) = x \ \text{ et } \ v'(x) = \cos x,$$

on obtient alors

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= x \sin x - \int \sin x \, dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int \operatorname{Arctg} x \, dx$. On pose

$$u'(x) = 1 \ \text{ et } \ v(x) = \operatorname{Arctg} x\,,$$

on aura

$$\begin{aligned}\int \operatorname{Arctg} x \, dx &= x \operatorname{Arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \operatorname{Arctg} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

8.5 Primitive d'une fraction rationnelle.

Remarque 8.5.1 Sachant que, dans $\mathbb{R}[X]$, toute fraction rationnelle se décompose, de façon unique, en somme d'éléments simples de premier et de deuxième espèces. Alors, d'après la proposition (8.2.1), pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle, il suffit de savoir intégrer les éléments simples.

8.6 Primitive d'un élément simple du premier espèce.

Définition 8.6.1 Un élément simple du premier espèce est une fraction de la forme

$$E_1(x) = \frac{1}{(ax+b)^k}\,, \quad \text{avec} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N}^*\,. \tag{8.6.1}$$

Une primitive de cet élément s'obtient simplement comme suit

$$\int \frac{1}{(ax+b)^k} \, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \ln|ax+b| + C, & \text{si} \quad k = 1 \\ \dfrac{1}{a(1-k)} \dfrac{1}{(ax+b)^{k-1}} + C, & \text{si} \quad k \neq 1. \end{cases}$$

Exemple 8.6.2

$$\int \frac{dx}{3x-2} = \frac{1}{3}\ln|3x-2| + C \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{(2x+5)^3} = -\frac{1}{4(2x+5)^2} + C\,.$$

8.7 Primitive d'un élément simple du second espèce.

Définition 8.7.1 Un élément simple du second espèce est une fraction de la forme

$$E_2(x) = \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}\,, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}^*,\ k \in \mathbb{N}^* \ \text{ et } \ \Delta = b^2 - 4ac < 0. \tag{8.7.1}$$

Du fait que $\Delta < 0$, alors la forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right], \ \text{ avec } \ \alpha = -\frac{b}{2a} \ \text{ et } \ \beta^2 = \frac{-\Delta}{4a^2}\,.$$

En utilisant le changement de variable suivant

$$x - \alpha = \beta\, t \Rightarrow dx = \beta\, dt$$

on aura

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^k}\, dx &= \int \frac{M(\beta\, t+\alpha)+N}{a^k\left[\beta^2 t^2 + \beta^2\right]^k}\, \beta\, dt \\
&= \frac{M}{a^k\, \beta^{2k-2}} \int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt \;+\; \frac{M\alpha + N}{a^k\, \beta^{2k-1}} \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt\,.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de savoir calculer les deux intégrales:

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt \quad \text{et} \quad \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\, dt\,.$$

La première intégrale est toute simple car, en posant

$$u = t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t\, dt,$$

on a

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\, dt = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^k}$$

et

$$\int \frac{du}{u^k} \;=\; \begin{cases} \ln u + C & \text{si} \quad k = 1 \\ \dfrac{1}{1-k}\dfrac{1}{u^{k-1}} + C, & \text{si} \quad k \neq 1. \end{cases}$$

Donc,

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^k}\,dt \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{2}\ln(t^2+1)+C & \text{si}\quad k=1 \\ \dfrac{1}{2(1-k)}\dfrac{1}{(t^2+1)^{k-1}}+C, & \text{si}\quad k\neq 1. \end{cases}$$

Pour le calcul de la deuxème intégrale on a, pour $k=1$,

$$\int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{Arctg} t + C,$$

pour $k \geq 2$, on trouve une formule de récurrence, en utilisant une intégration par partie, comme suit:

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{1}{(t^2+1)^k}\,dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{k+1}}\,dt \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^k} - 2k\int \frac{dt}{(t^2+1)^{k+1}} \\ &= \frac{t}{(t^2+1)^k} + 2kJ_k - 2kJ_{k+1}. \end{aligned}$$

On obtient la formule de récurrence suivante:

$$2k\,J_{k+1} = \frac{t}{(t^2+1)^k} + (2k-1)\,J_k. \tag{8.7.2}$$

En utilisant cette formule on obtient

$$2J_2 = \frac{t}{t^2+1} + J_1,$$

et donc,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctg} t + C\,.$$

On a aussi

$$4J_3 = \frac{t}{(t^2+1)^2} + 3J_2,$$

et donc,

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = \frac{1}{4}\frac{t}{(t^2+1)^2} + \frac{3}{8}\frac{t}{t^2+1} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctg} t + C\,.$$

Exemple 8.7.2 Calcul de

$$F(x) = \int \frac{2x+3}{(x^2+x+1)^3}\,dx.$$

On a un élément simple du second espèce, car le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = -3 < 0$. La forme canonoque de ce trinôme est

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.$$

On pose alors

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt,$$

on obtient

$$\begin{aligned} F(x) = G(t) &= \int \frac{\sqrt{3}t + 2}{\left(\frac{3}{4}(t^2+1)\right)^3} \frac{\sqrt{3}}{2}\, dt. \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^2 \int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^3} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^7 \int \frac{2dt}{(t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

On a:

$$\int \frac{t\, dt}{(t^2+1)^3} = -\frac{1}{4} \frac{1}{(t^2+1)^2} \quad \text{et} \quad \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} = J_3.$$

On obtient alors

$$F(x) = \frac{-1}{2(x^2+x+1)^2} + \frac{8x+4}{(x^2+x+1)^2} + \frac{4x+2}{\sqrt{3}(x^2+x+1)} + \frac{4}{3}\text{Arctg}\, \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

8.8 Fractions rationnelles en sinus et cosinus

Calcul de

$$F(x) = \int \mathcal{R}\left(\cos x, \sin x\right) dx, \tag{8.8.1}$$

où $\mathcal{R}$ est une fraction rationnelle.

Le cas général

En général, on utilise le changement de variable suivant

$$t = \text{tg}\, \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\text{Arctg}\, t, \tag{8.8.2}$$

on se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle en t. En effet, on a les formules suivantes

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \tag{8.8.3}$$

En remplaçant dx, $\cos x$ et $\sin x$ par leurs valeurs dans (8.8.1) on obtient une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Montrons les formules (8.8.3). On a

$$x = 2\text{Arctg}\, t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

En posant maintenant $\alpha = \text{Arctg}\, t$ et en utilisant les formules trigonométriques on a

$$\begin{aligned} \cos x = \cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= (1 - \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha \\ &= (1-t^2)\cos^2\alpha\,. \end{aligned} \tag{8.8.4}$$

$$\begin{aligned} \sin x = \sin 2\alpha &= 2\sin^2\alpha\cos\alpha \\ &= 2\,\text{tg}\,\alpha\cos^2\alpha \\ &= 2\,t\cos^2\alpha\,. \end{aligned} \tag{8.8.5}$$

D'aute part on a

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha \\ &= (1 + \text{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha \\ &= (1+t^2)\cos^2\alpha\,. \end{aligned}$$

on obtient

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+t^2}\,.$$

En remplaçant $\cos^2\alpha$ par sa valeur dans (8.8.4) et (8.8.5) on obtient les formules (8.8.3).

Exemple 8.8.1 Calcul de l'intégrale

$$F(x) = \int \frac{dx}{\cos x + \sin x}\,. \tag{8.8.6}$$

Par le changement de variabe (8.8.2) on aura

$$\cos x + \sin x = \frac{1+2\,t-t^2}{1+t^2},$$

et l'intégrale devient

$$\int \frac{2\,dt}{1+2\,t-t^2},$$

qui est une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

cas particulier

1) Cacul de

$$\int \mathcal{R}\ \left(\cos^{2k}(x), \sin^{m}x\right)\ \cos x\, dx\,. \tag{8.8.7}$$

Dans ce cas il est plus simple d'utiliser le changement de variable suivant

$$t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x\, dx, \tag{8.8.8}$$

et l'intégrale (8.8.7) devient une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 8.8.2 On veut calculer:

$$\int \frac{\sin^{3}x}{1+\cos^{4}x} \cos x\, dx\,. \tag{8.8.9}$$

Dans ce cas, par le changement de variabe (8.8.8), l'intégrale (8.8.9) devient

$$\int \frac{t^3}{1+t^4}\, dt\,,$$

qui est plus simple que si l'on a utilisé le changement de variable (8.8.2). (Comparer)

2) De même si on veut calculer

$$\int \mathcal{R}\ \left(\cos^{m}(x), \sin^{2k}x\right)\ \sin x\, dx\,, \tag{8.8.10}$$

on utiliser le changement de variable:

$$t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x\, dx, \tag{8.8.11}$$

on se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Remarque 8.8.3 Si on veut poser $t = \cos x$, il faut mettre $\sin x\, dx$ en facteur et l'exposant de $\sin x$ doit être paire. Si non, on aura à intégrer des expressions contenant $(\sqrt{1+t^2})^k$, qui ne sont pas des fractions rationnelles.

8.9 Fractions rationnelles en sh et ch

Calcul de

$$F(x) = \int \mathcal{R}\,(\mathrm{ch}\, x, \mathrm{sh}\, x)\, dx, \tag{8.9.1}$$

où $\mathcal{R}$ est une fraction rationnelle.
En général on utilise le changement de variable suivant

$$t = \operatorname{th} \frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{Argth} t, \tag{8.9.2}$$

on obtient les formules

$$dx = \frac{2dt}{1-t^2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}\,. \tag{8.9.3}$$

On se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 8.9.1 Calculons

$$\int \frac{1-\operatorname{sh} x}{2+\operatorname{ch} x}\, dx. \tag{8.9.4}$$

Par le changement de variable (8.9.2) on a

$$1-\operatorname{sh} x = \frac{t^2+2t-1}{t^2-1}\,, \quad 2+\operatorname{ch} x = \frac{t^2-3}{t^2-1} \quad \text{et} \quad dx = \frac{2\,dt}{1-t^2}\,.$$

L'intégrale (8.9.4) devient

$$\int \frac{t^2+2t-1}{t^2-3}\, \frac{2\,dt}{1-t^2}$$

qui est une intégrale d'une fraction rationnelle.

8.10 Primitives de $\mathcal{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Calcul de primitives du type

$$\int \mathcal{R}\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx. \tag{8.10.1}$$

Dans ce cas on pose

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \Rightarrow x = \frac{d\,t^n - b}{a - c\,t^n} = h(t).$$

On obtient alors

$$dx = h'(t)dt = \frac{n(a-b)\,t^{n-1}}{(a-c\,t^n)^2} dt.$$

En remplaçant dans (8.10.1) on obtient une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 8.10.1 Calcul de

$$I = \int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x+1}{3-5x}}\, dx.$$

On pose

$$t = \sqrt{\frac{2x+1}{3-5x}} \Longrightarrow x = \frac{3t^2-1}{5t^2+2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{22t}{(5t^2+2)^2}\,dt.$$

Alors,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5t^2+2}{3t^2-1}\,t\,\frac{22t}{(5t^2+2)^2}\,dt. \\ &= \int \frac{22t^2}{(3t^2-1)(5t^2+2)}\,dt \end{aligned}$$

qui est une intégrale d'une fraction rationnelle.

8.11 Primitives de $\mathcal{R}\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$.

La méthode utilisée pour le calcul de ces intégrales dépend du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Premier cas. Si $\Delta < 0$ alors, pour que la racine soit bien définie il faut que $a > 0$.

Première méthode On pose alors

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t + x\sqrt{a} \Rightarrow x = \frac{t^2-c}{b-2t\sqrt{a}} = h(t).$$

On déduit alors

$$dx = \frac{-2t^2\sqrt{a} + 2t\,b - 2c\sqrt{a}}{(b-2t\sqrt{a})^2}\,dt\,.$$

On se ramène alors à une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 8.11.1 Calcul de l'intégrale:

$$I = \int \frac{dx}{x^2}\sqrt{9x^2-2x+1}\,.$$

On pose

$$\sqrt{9x^2-2x+1} = 3x + t \Rightarrow x = \frac{1-t^2}{6t+2} \quad \text{et} \quad dx = \frac{-6t^2-4t-6}{(6t+2)^2}\,dt.$$

On a aussi

$$\sqrt{9x^2-2x+1} = 3x + t = \frac{3t^2+2t+3}{6t+2}.$$

On obtient alors,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(6t+2)^2}{(1-t^2)^2} \, \frac{3t^2+2t+3}{6t+2} \, \frac{-6t^2-4t-6}{(6t+2)^2} \, dt \\ &= \int \frac{(3t^2+2t+3)(6t^2+4t+6)}{(1-t^2)^2\,(6t+2)} \, dt \end{aligned}$$

Deuxième méthode On écrit le trinôme ax^2+bx+c sous sa forme canonique

$$ax^2+bx+c = a\left[(x+\alpha)^2+\beta^2\right] \;, \;\text{ avec }\; \alpha = \frac{b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \,.$$

En posant

$$x+\alpha = \beta\, t \Rightarrow dx = \beta\, dt \quad \text{et} \quad \sqrt{ax^2+bx+c} = \beta\,\sqrt{a}\,\sqrt{t^2+1}\,.$$

On pose alors

$$t = \operatorname{sh} y \Rightarrow dt = \operatorname{ch} y\, dy,$$

en remplaçant on obtient une intégrale d'une fraction rationnelle en **shx** et **chx**.

Exemple 8.11.2 Calcul de l'intégrale

$$I = \int \frac{1}{x+1}\,\sqrt{4x^2-x+1}\, dx\,.$$

On a

$$4x^2-x+1 = 4\left[\left(x-\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{15}{64}\right],$$

on pose alors

$$x-\frac{1}{8} = \frac{\sqrt{15}}{8}\, t \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{15}}{8}\, dt \quad \text{et} \quad \sqrt{4x^2-x+1} = 2\,\frac{\sqrt{15}}{8}\sqrt{t^2+1}\,.$$

L'intégrale devient

$$\frac{\sqrt{15}}{4} \int \frac{1}{\sqrt{15}\, t+9}\,\sqrt{t^2+1}\, dt\,.$$

On pose maintenant

$$t = \operatorname{sh} y \Rightarrow dt = \operatorname{ch} y\, dy$$

On obtient

$$I = \frac{\sqrt{15}}{4} \int \frac{\operatorname{ch}^2 y\; dy}{\sqrt{15}\,\operatorname{sh} y + 9}\,,$$

qui est une intégrale d'une fraction rationnelle en sh(y) et ch(y).

Deuxième cas. Si $\Delta > 0$ alors

$$ax^2 + bx + c = a\left[(x+\alpha)^2 - \beta^2\right] = a(x - x_1)(x - x_2),$$

où x_1 et x_2 sont les deux racines du trinôme.
Première méthode On pose

$$\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = (x - x_1)\, t \Rightarrow x = \frac{x_1\, t^2 - a\, x_2}{t^2 - a} = h(t) \;\text{ et }\; dx = h'(t)\, dt.$$

En remplaçant on obtient une intégrale d'une fraction rationnelle en t.

Exemple 8.11.3 Calcul de l'intégrale indéfinie:

$$F(x) = \int \frac{x+4}{\sqrt{x^2 + x - 2}}\, dx\,.$$

On pose

$$\sqrt{x^2 + x - 2} = \sqrt{(x-1)(x+2)} = (x-1)\, t \Longrightarrow x = \frac{t^2+2}{t^2-1}.$$

Ce qui donne

$$dx = \frac{-6t\, dt}{(t^2-1)^2} \quad \text{et} \quad x + 4 = \frac{5t^2+2}{t^2-1}\,,$$

en remplaçant on obtient:

$$F(x) = G(t) = -2 \int \frac{5t^2 - 2}{(t^2-1)^2}\, dt\,,$$

qui est une fraction rationnelle en t.

Deuxième méthode On écrit le trinôme sous sa forme canonique

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a\,[(x+\alpha)^2 - \beta^2]} \;\text{ avec } \alpha = \frac{b}{2a} \;\text{ et }\; \beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\,.$$

On pose comme précédemment

$$x + \alpha = \beta\, t,$$

on aura

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a\,[(x+\alpha)^2 - \beta^2]} = \begin{cases} \beta\sqrt{a}\,\sqrt{t^2-1} & \text{si} \quad a > 0 \\ \beta\sqrt{-a}\,\sqrt{1-t^2} & \text{si} \quad a < 0. \end{cases}$$

(i) Si $a > 0$, on pose $t = \operatorname{ch} y$, on se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle en

sh(y) et **ch(y)** .

(ii) Si $a < 0$, on pose $t = \cos y$, on se ramène à une intégrale d'une fraction rationnelle en **sin(y)** et **cos(y)**.

8.12 Exercices

Exercice 1 Calculer les intégrales indéfinies suivantes:

$$\int \frac{dx}{x^2+9}\,; \quad \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx\,; \quad \int (x^2+3x-1)e^{4x}\,dx\,; \quad \int \cos 3x\; e^{2x}\,dx\,; \quad \int \operatorname{Arctg} x\,dx$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{4-\cos^2 x}}\,dx\,; \quad \int x^n \ln x\,dx\,; \quad \int \cos x \ln(1+\sin x)\,dx\,; \quad \int \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\,.$$

Exercice 2 Déterminer les primitives des fonctions suivantes en indiquant l'ensemble de validité:

$$\int \frac{2x+1}{x(x-1)}\,dx\,; \quad \int \frac{37-11x}{(x+1)(x-2)(x-3)}\,dx\,; \quad \int \frac{dx}{x^3(x^2+1)}\,; \quad \int \frac{dx}{x^3+1}\,; \quad \int \frac{dx}{(x^2+x+1)^3}\,.$$

Exercice 3 Calculer

$$\int \frac{dx}{3+\cos x}\,; \quad \int \frac{\cos 2x\,dx}{\sin x+\sin 3x}; \quad \int \frac{\cos x\,dx}{1+\cos^2 x}; \quad \int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^7 x};$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{1+\cos x}\,dx; \quad \int \frac{\operatorname{th} x\,dx}{1+\operatorname{ch} x}; \quad \int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x}\,.$$

Exercice 4 Calculer les intégrales:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}\,dx\,; \quad \int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx\,; \quad \int \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+1}}\,; \quad \int \frac{\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,;$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^2+1}}\,; \quad \int \frac{dx}{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}\,, (x > -\frac{1}{2}).$$

Exercice 5

1. Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

2. Soit f une fonction en escalier sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx = 0.$$

On pourra commencer par montrer que pour tout $\alpha < \beta$,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\alpha^\beta \sin(nx)\, dx = 0.$$

3. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(x) \sin(nx)\, dx = 0.$$

On rappelle que pour toute fonction f continue sur $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction en escalier g telle que

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

Exercice 6 On pose pour tout $n \geq 0$

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n\, dx\,.$$

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Pour tout $n \geq 1$, trouver une relation entre I_n et I_{n-1} et Pour tout $n \geq 2$, en déduire une relation entre I_n et I_{n-2}.
3. Déterminer I_n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 7

Soit F la fonction définie pour tout $x > 1$ par

$$F(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} \frac{dt}{\ln(1+t)}\,.$$

1. A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer que pour tout $t > 0$:

$$t - \frac{t^2}{2} < \ln(1+t) < t.$$

2. En déduire que pour $x \in]1, \sqrt{3}[$:

$$\ln(1+x) \leq F(x) \leq \ln(1+x) + \ln\frac{3-x}{3-x^2} .$$

   Puis

$$\lim_{x \to 1^+} F(x).$$

3. Calculer, pour tout $x > 1$, $F'(x)$.

4. En déduire que pour tout $x > 1$, $F(x) > \ln 2$.