Chapitre 4

Dérivabilité et formules de Taylor

4.1 La dérivabilité

Définition 4.1.1 Soit f une fonction définie en x_0 et sur un voisinage de x_0. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l, \tag{4.1.1}$$

existe et est finie.
Le nombre l est appelé nombre dérivé de f au point x_0, et noté $f'(x_0)$.

Remarque 4.1.2 En posant $h = x - x_0$, la définition précédente s'écrit:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0). \tag{4.1.2}$$

Exemple 4.1.3
1) Si f est constante sur un voisinage de x_0 alors elle est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 0$.
2) Si $f(x) = x$ sur un voisinage de x_0 alors elle est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = 1$.
3) Si $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ sur un voisinage de x_0 alors elle est dérivable en x_0 et

$$f'(x_0) = n x_0^{n-1}.$$

En effet, utilisant la formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\left[f(x_0 + h) - f(x_0)\right] &= \frac{1}{h}\left[\sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k\ h^k\ x_0^{n-k} - x_0^n\right] \\ &= n x_0^{n-1} + h \sum_{k=2}^{n} \mathcal{C}_n^k\ h^{k-2}\ x_0^{n-k}.\end{aligned}$$

Comme
$$\lim_{h\to 0} h \sum_{k=2}^{n} \mathcal{C}_n^k \, h^{k-1} \, x_0^{n-k} = 0,$$
On a le résultat voulu.

Proposition 4.1.4 *La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, il existe un nombre l et une fonction*
$$\varphi :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}, \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0,$$
tels que
$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\,l + h\,\varphi(h). \tag{4.1.3}$$
Dans ce cas, $l = f'(x_0)$.

Dérivabilité à gauche et à droite.

Définition 4.1.5 On dit que f est dérivable en x_0, à gauche, si
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l, \tag{4.1.4}$$
existe et est finie.
Le nombre l est appelé nombre dérivé à gauche, de f au point x_0, et noté $f'_g(x_0)$.

Définition 4.1.6 On dit que f est dérivable en x_0, à droite, si
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = l, \tag{4.1.5}$$
existe et est finie.
Le nombre l est appelé nombre dérivé à droite, de f au point x_0, et noté $f'_d(x_0)$.

La proposition suivante relie la dérivabilité et les dérivabilités à gauche et à droite.

Proposition 4.1.7 *La fonction f est dérivable en x_0 si, et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et*
$$f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Application.
1) La fonction $f(x) = |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0, car
$$f'_g(0) = -1 \text{ et } f'_d(0) = 1.$$

Relation entre la dérivabilité et la continuité.

Proposition 4.1.8 *Si f est dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0.*

Remarque 4.1.9 La proposition précédente est une simple implication (f est dérivable $\Rightarrow f$ est continue). La réciproque de cette proposition est **fausse** Pour cela il suffit de considérer l'exemple précédent ; $f(x) = |x|$ qui est évidemment continue en 0 mais on a vu qu'elle n'est pas dérivable en ce point.

Interprétation géométrique du nombre dérivé.

Soit f une fonction dérivable en x_0. On pose $y_0 = f(x_0)$, M_0 le point de la courbe de coordonnées (x_0, y_0) et M le point de coordonnées $(x, f(x))$. Pour simplifier, on suppose que $x_0 < x$. On note par:

- D_0 la demi-droite d'origine M_0 et parallele à l'axe ox,
- D la droite qui coupe la courbe aux deux point M_0 et M. (on dit qe D est sécante à la cource $\mathcal{C}_f$).
- L'angle aigu formé par la demi-droite D_0 et la droite D est noté θ.

On a

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{4.1.6}$$

Lorsque x tend vers x_0, sachant que f est continue en x_0, alors le point M tend vers M_0. La droite D s'incline vers une droite "limite" (Δ), qui coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ en deux points confondus M_0. Cette droite est appelée par définition droite tangente à la courbe au point M_0. L'angle θ tend vers l'angle α formé par D_0 et la tangente Δ. D'une part, du fait que la fonction **tg** est continue sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ le premier terme de l'égalité (4.1.6) tend vers $\operatorname{tg}\alpha$. D'autre part, comme f est dérivable en x_0, alors le deuxième terme de (4.1.6) tend vers $f'(x_0)$. On déduit alors:

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0). \tag{4.1.7}$$

De ce qui précède, on déduit que le nombre dérivé représente la pente de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0.
Voir fugure ci après

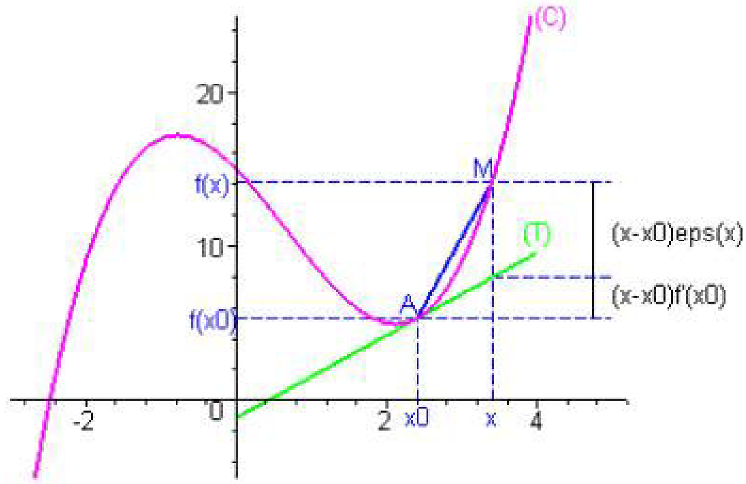

Figure 4.1: Interprétation géométrique du nombre dérivé

4.1.1 Dérivabilité sur un intervalle.

Définition 4.1.10 Soit $\mathcal{I} =]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable sur chaque point de $\mathcal{I}$, on dit qu'elle est dérivable sur $\mathcal{I}$.
Si $\mathcal{I} = [a, b]$, on dit que f est dérivable sur $\mathcal{I}$ si elle est :

- dérivable sur $]a, b[$,
- dérivable à droite en a,
- dérivable à gauche en b.

<u>La fonction dérivée.</u>

Définition 4.1.11 Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur $\mathcal{I}$. Alors la fonction suivante

$$\begin{aligned} g : I &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto g(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \end{aligned} \tag{4.1.8}$$

est bien définie, car $g(x)$ existe pour tout $x \in \mathcal{I}$. Cette fonction est appelée fonction dérivée de f sur $\mathcal{I}$ et elle est notée f'.

Exemple 4.1.12
(1) La fonction définie par $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}$ par (Voir l'exemple plus haut)

$$f'(x) = nx^{n-1},\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(2) La fonction $f(x) = \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \cos x$.
En effet

$$\frac{1}{h}\left(\sin\left(x+h\right) - \sin x\right) = \frac{2}{h}\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2},$$

et

$$\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) = \cos x \ \text{ et } \ \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h} = 1.$$

4.1.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4.1.13 *Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Alors*

1. *La fonctions λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$.*
2. *La fonctions $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.*
3. *La fonctions fg est dérivable en x_0 et*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0).$$

4. *Si $g(x_0) \neq 0$ alors*
   - *La fonctions $\frac{1}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

   - *La fonctions $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Applications.
On a vu que les monômes $a_n x^n$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ alors tout polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$ et toute fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

4.1.3 Dérivée de la fonction composée.

Théorème 4.1.14 *Soient f et g deux fonctions telles que $h = gof$ soit définie. Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors la fonction h est dérivable en x_0. De plus on a la formule de dérivation suivante:*

$$(gof)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0). \tag{4.1.9}$$

On comprend la formule précédente comme suit:
On dérive la fonction f par rapport à sa variable x au point x_0,
on dérive la fonction g par rapport à sa variable y au point y_0.

Applications.

1) $$\left[\cos\left(3x^2-2x+1\right)\right]' = -(6x-2)\sin\left(3x^2-2x+1\right), \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

2) Du fait que la composition de fonction est une opération associative, on a

$$\left[\sin\exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\right]' = \frac{-3}{(x-2)^2}\exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right)\cos\exp\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}.$$

3) Calculer la dérivée de la fonction suivante.

$$f(x) = \left[\cos\ln\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right)\right]^5.$$

4.1.4 Dérivée de la fonction réciproque.

Théorème 4.1.15 *Soit $f : I \to J$ une fonction ayant une fonction réciproque f^{-1}. Si f est dérivable x_0 et si $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. De plus, on a*

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.1.10}$$

Applications.
On sait que la fonction $f(x) = \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0, \, \forall\, x > 0.$$

Alors sa fonction réciproque **exp** est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, en posant

$$y = \ln \Leftrightarrow x = \exp y,$$

on a:

$$(\exp y)' = \frac{1}{(\ln x)'} = x = \exp y.$$

Ce théorème nous permettra d'étudier la dérivabilité et de calculer les dérivées des **fonctions élémentaires** que nous étudierons plus tard.

Proposition 4.1.16 *Si une fonction f admet un extremum en x_0 et si elle est dérivable en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 4.1.17 La fonction $x \mapsto |x|$ admet bien un minimum en $x_0 = 0$ mais la dérivée n'est pas nulle car elle n'existe pas en 0.

4.1.5 Le théorème de Rolle.

Théorème 4.1.18 *Soit f une fonction vérifiant les hypothèses suivantes*

- *f est continue sur le fermé $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$,*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 4.1.19 Les trois hypothèses du théorème de Rolle sont nécessaires comme on va le voir dans les exemples suivants.

Exemple 1 Soit la la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On voit bien que f satisfait les deux derniers points du théorème de Rolle mais

$$f'(x) = 1 \neq 0, \ \forall\, x \in]0, 1[.$$

Le théorème de Rolle n'est pas applicable car f n'est pas continue sur le fermé $[0, 1]$.
Exemple 2 Soit $f(x) = |x|, \ \ x \in [-1, 1]$. Les hypothèses 1) et 3) sont vérifiées mais

$$f'(x) = \begin{cases} -1 \ \text{si} \ x \in [-1, 0[, \\ \ \ 1 \ \text{si} \ x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Le théorème de Rolle n'est pas applicable car f n'est pas dérivable en $0 \in]-1, 1[$.
Exemple 3

$$f(x) = x, \ \ x \in [a, b].$$

Les deux premières hypothèses du théorème sont satisfaites mais $f'(x) = 1, \ \forall x \in]a, b[$. car $f(a) \neq f(b)$.

4.1.6 Le théorème des accroissements finis.

L'interprétation géométrique du théorème de Rolle est que sous les hypothèses suscitées, il existe $c \in]a, b[$ où la pente de la tangente au point $M(c, f(c))$ est parallèle au segment $[AB]$ avec; $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Maintenant, si $f(a) \neq f(b)$, la pente de la droite, support de $[AB]$ est

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Alors la question est: Existe-t-il $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \ ?$$

La réponse affirmative est donnée par le théorème suivant

Théorème 4.1.20 ***[Le théorème des accroissements finis.]*** *Soit f une fonction vérifiant les hypothèses suivantes*

- *f est continue sur le fermé $[a, b]$,*
- *f est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$.*

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Applications
1) Le théorème des accroissements finis simplifie l'étude de la continuité uniforme. En

effet, si f' est bornée par M sur $\mathcal{I}$, alors

$$\forall\,(x,y)\in\mathcal{I}^2,\ |f(x)-f(y)|=|x-y|\,|f'(c)|\leq M\,|x-y|.$$

Donc f est Lipschitzienne sur $\mathcal{I}$ alors elle est uniformément continue sur $\mathcal{I}$.

Exemple 1

$$|\sin x-\sin y|=|x-y|\,|\cos c|\leq|x-y|,$$

donc la fonction sin est Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, alors elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) On peut déduire **des inégalités**.

Exemple 2 Soit la fonction $f(t)=\ln t$. On voit bien qu'on peut appliquer le théorème des accroissements finis à cette fonction sur $[x,x+1]$, $\forall\,x>0$ et :

$$\ln(x+1)-\ln x=\frac{1}{c},\ x<c<x+1.$$

Comme

$$\frac{1}{x+1}<\frac{1}{c}<\frac{1}{x},$$

on déduit alors la double inégalité suivante:

$$\frac{1}{x+1}<\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}\ \ \forall\,x>0.$$

De même on obtient sur l'intervalle $[1,x]$, la double inégalité suivante.

$$1-\frac{1}{x}<\ln x<x-1.$$

Théorème 4.1.21 ***[Le théorème des accroissements finis généralisé.]*** *Soit f et g deux fonctions vérifiant:*

- *f et g sont continues sur le fermé $[a,\,b]$,*
- *f et g sont dérivables sur l'ouvert $]a,\,b[$,*
- *$g'(x)\neq 0,\ \forall\,x\in]a,b[$.*

Alors il existe c dans $]a,\,b[$ tel que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Remarque 4.1.22
1. Le théorème des accroissements finis est applicable pour chacune des fonctions f et g séparément. Mais on n'obtient pas le même c vérifiant la formule précédente.
2. On a le droit de diviser par $g(b) - g(a)$ car il est différent de zéro. En effet si $g(b) - g(a) = 0$ alors g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle et donc

$$\exists\, c \in]a, b[;\ g'(c) = 0,$$

ce qui contredit la troisième hypothèse du théorème .

Corollaire 4.1.23 ***[Regle de l'Hôpital.]*** *Soiet f et g deux fonctions continues et dérivables sur un voisinage de x_0 et que la dérivée de g ne s'annule pas sur ce voisinage. On suppose de plus que*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

existe (fini ou non), alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = l.$$

4.2 Dérivées d'ordres supérieures

Définition 4.2.1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $\mathcal{I}$ et soit $x_0 \in \mathcal{I}$. On a les définitions suivantes.

1. Si la fonction dérivée f' est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que la fonction f est continument dérivable sur $\mathcal{I}$, ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{I}$ et on note:

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{I}).$$

2. Si la fonction dérivée f' est dérivable en x_0, on dit que la fonction f est deux fois dérivable en x_0 et on note:

$$f"(x_0) = (f')'(x_0).$$

3. Si la fonction dérivée f' est dérivable sur $\mathcal{I}$, on dit que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathcal{I}$. On note

$$f"(x) = (f')'(x),\ \forall\, x \in \mathcal{I}.$$

4. Si la fonction $f"$ est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{I}$.

On note
$$f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{I}).$$

5. En général Supposons que f est n fois dérivable sur $\mathcal{I}$. Si la dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$, est continue sur $\mathcal{I}$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{I}$ et on note
$$f \in \mathcal{C}^n(\mathcal{I}).$$

6. Si la fonction $f^{(n)}$ est dérivable en x_0, on dit que la fonction f est $n+1$ fois dérivable en x_0 et on note:
$$f^{(n+1)}(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0).$$

7. Si f est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dit que f est indéfiniment dérivable sur $\mathcal{I}$, ou elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{I}$ et on note:
$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}).$$

Exemple 4.2.2

1. Une fonction polynôme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonction $\sin$, $\cos$, $\exp$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a
$$(\exp)^{(n)}(x) = \exp(x),\ \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right),\ \text{ et }\ \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$
Montrer, par récurrence, ces deux dernières formules.
3. Les fonctions tg, cotg, $\ln$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.

Théorème 4.2.3 *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur $\mathcal{I}$. Alors*

1. *La fonctions $f + g$ est n fois dérivable sur $\mathcal{I}$ et*
$$(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x),\ \forall\, x \in \mathcal{I}.$$
2. *La fonctions fg est n fois dérivable sur $\mathcal{I}$ et*
$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k\, f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x),\ \forall\, x \in \mathcal{I}. \tag{4.2.1}$$

Avec la convention: $f^{(0)} = f$.

La formule (10.3.7) *est appelée formule de* ***Leïbnitz.***

Remarque 4.2.4 D'apès la commutativité de la multiplication, la formule (10.3.7) s'écrit aussi

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k\, f^{(n-k)}(x)\, g^{(k)}(x),\ \forall\, x \in \mathcal{I}.$$

Exemple 4.2.5

1. Pour $n = 4$, On a

$$(fg)^{(4)}(x) = f^{(4)}(x) + 4f^{(3)}(x)g(x) + 6f^{(2)}(x)g^{(2)}(x) + 4f(x)g^{(3)}(x) + g^{(4)}(x).$$

2.

$$\begin{aligned}(\sin x \exp x)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k \exp^{(n-k)} x \sin^{(k)} x \\ &= \exp x \sum_{k=0}^{n} \mathcal{C}_n^k \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

4.3 La formule de Taylor

Théorème 4.3.1 ***[Formule de Taylor avec reste généralisé]*** *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant:*

1. • *f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur le fermé $[a, b]$,*
   • *f est $n+1$ fois dérivable sur l'ouvert $]a, b[$*
2. • *g est continue sur le fermé $[a, b]$,*
   • *g est dérivable sur l'ouvert $]a, b[$,*
   • $g'(x) \neq 0,\ \forall\, x \in]a, b[$.

Soit $x_0 \in [a, b]$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $c = x_0 + t(x - x_0), t \in]0, 1[$ tel que l'on ait :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k\, \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + R_n(x, x_0), \tag{4.3.1}$$

où,

$$R_n(x,x_0) = \frac{(x-c)^n\ f^{(n+1)}(c)\ (g(x)-g(x_0))}{n!\ g'(c)} \tag{4.3.2}$$

La formule (4.3.1) *est appelé* ***formule de Taylor avec reste généralisé*** (4.3.2).

Le polynôme

$$P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + (x-x_0)^2\,\frac{f''(x_0)}{2!} + ... + (x-x_0)^n\,\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

est appelé partie régulière de f.

Théorème 4.3.2 ***[Formule de Taylor avec reste de Lagrange]*** *Soit f une fonction vérifiant le hypothèse du théorème* (4.3.1). *Alors, pour tous $x_0, x \in [a,b]$ on a la formule suivante*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-x_0)^k\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\ +\ (x-x_0)^{n+1}\,\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}. \tag{4.3.3}$$

Le terme

$$(x-x_0)^n\ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

est appelé **reste de Lagrange.**

Application

1. Pour $f(x) = e^x$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, alors on peut appliquer la théorème précédent. De plus, $f^{(k)}(0) = 1$. Alors, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, c = tx,\ t \in]0,1[$ tel que

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\ +\ \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^c, \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,e^c,\quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

2. Soit $f(x) = \cos x$. De même on peut appliquer le théorème précédent pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, car $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. De plus on sait que

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k+1, \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k. \end{cases}$$

On a alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$,

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{x^{2k}}{(2k)!}\ +\ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(c + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right), \tag{4.3.5}$$

On a par exemple:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} \cos\left(c + 7\frac{\pi}{2}\right).$$

On peut aussi écrire, du fait que $f^{(7)}(0) = 0$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \cos(c).$$

3. Pour $f(x) = \sin x$, on a :

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^k & \text{si } n = 2k+1. \end{cases}$$

et donc, $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \exists\, c = tx,\ t \in]0,1[$ tel que:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left(c + (2n+3)\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.6}$$

Notons que le reste est d'ordre $(2n+3)$, car $f^{(2n+2)}(0) = 0$.

4. Soit la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$. On montre par récurrence que

$$f^{(k)}(0) = \alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)......(\alpha-k+1).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la formule:

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + ... + \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \\ &+ \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)....(\alpha-n)}{(n+1)!}\,(1+c)^{\alpha-n-1}.\end{aligned} \tag{4.3.7}$$

De cette formule, on peut déduire d'autres formules importantes pour la suite, en choisissant des valeurs particulières de α.

(i) Pour $\alpha = -1$, on a:

$$f^{(k)}(0) = (-1)^k\, k!,$$

alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n\, x^n + (-1)^{n+1}\, x^{n+1}\, \frac{1}{(1+c)^n}. \tag{4.3.8}$$

(ii) Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on montre par récurrence que

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k-1}\ \frac{1.3.5.....(2k-3)}{2.4.6....2k}\ ,$$

on obtient alors:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2.4}\,x^2 + \frac{1.3}{2.4.6}\,x^3 + ... + (-1)^{n-1}\ \frac{1.3.5....(2n-3)}{2.4.6....2n}\ x^n \\ &\quad + (-1)^n\ \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n(2n+2)}\,(1+c)^{\frac{1}{2}-n-1}.\end{aligned} \tag{4.3.9}$$

(iii) Pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on montre aussi par récurrence que

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^k\ \frac{1.3.5.....(2k-1)}{2.4.6....2k}\ ,$$

on obtient alors:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\,x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^3 + ... + (-1)^n\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}\,x^n \\ &\quad + (-1)^n\frac{1.3.5....(2n+1)}{2.4.6....2n(2n+2)}\,(1+c)^{-\frac{1}{2}-n-1}.\end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Théorème 4.3.3 ***[Formule de Taylor-Young]*** *Soit $f:\ [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in [a,b]$ On suppose que*

- *f est $(n-1)$ fois dérivable sur un voisinage de x_0,*
- *f est n fois dérivable en x_0.*

Alors, pour tout $x \in [a,b]$, il existe une fonction

$$\varphi :]-\alpha,\alpha[\to \mathbb{R}, \quad \text{avec} \ \lim_{h\to 0}\varphi(h) = 0,$$

telle que l'on ait:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-x_0)^k\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + (x-x_0)^n\ \varphi(x-x_0). \tag{4.3.11}$$

l'expression

$$R_n(x,x_0) = (x-x_0)^n\ \varphi(x-x_0),$$

est appelée ***reste de Young.***

Pour la démonstration de ce théorème , on a besoin du résultat suivant.

Lemme 4.3.4 *Soit* $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction* $(n-1)$ *fois dérivable sur un voisinage de* x_0 *et* n *fois dérivable en* x_0 *et vérifiant:*

$$g(x_0) = g'(x_0) = g"(x_0) = ... = g^{(n)}(x_0) = 0.$$

Alors, pour tout $x \in [a,b]$, *il existe une fonction*

$$\varphi :]-\alpha, \alpha[\to \mathbb{R}, \quad \text{avec} \ \lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0,$$

telle que l'on ait:

$$g(x) = (x - x_0)^n \ \varphi(x - x_0). \tag{4.3.12}$$

Notations de Landau.

Définition 4.3.5 Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de x_0. On dit que f est négligeable devant g au $v(x_0)$ s'il existe une fonction φ définie sur un voisinage de zéro et vérifiant

$$\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0,$$

telle que

$$f(x) = g(x)\,\varphi(x - x_0). \tag{4.3.13}$$

Dans ce cas, on note

$$f = o(g) \quad \text{sur} \ \ v(x_0).$$

Définition 4.3.6 Si g ne s'annule pas sur un voisinage de x_0 sauf peut être en x_0, on a

$$f = o(g) \quad \text{sur} \ \ v(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{4.3.14}$$

Exemple 4.3.7 **1)**

$$x^2 = o(x) \text{ au } v(0), \ \text{ car } \ \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

2) En général:

$$\text{si } \ k < n, \ (x - x_0)^n = o\left((x - x_0)^k\right) \text{ au } v(x_0), \ \text{ car } \ \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)^n}{(x - x_0)^k} = 0.$$

3)

$$\text{si } \ k < n, \ x^k = o(x^n) \text{ au } v(+\infty).$$

Utilisant les notations de Landau, la formule du théorème de Taylor-Young s'écrit:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (x - x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + o\left((x - x_0)^n\right). \tag{4.3.15}$$

En effet,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \varphi(x - x_0) = 0.$$

En pratique, on utilise souvent cette notation.

Exemple 4.3.8 *(Pour $x_0 = 0$)*

$$\textit{1)} \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

$$\textit{2)} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

$$\textit{3)} \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

4.4 Etude locale

Remarque 4.4.1 Au $v(x_0)$, le signe de l'expression

$$g(x) = a_k(x - x_0)^k + a_{k+1}(x - x_0)^{k+1} + ... + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$$

est du signe du premier terme $a_k(x - x_0)^k$.
En effet, on a:

$$g(x) = a_k(x - x_0)^k \left[1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(x - x_0) + ... + \frac{a_n}{a_k}(x - x_0)^{n-k} + o\left((x - x_0)^{n-k}\right)\right].$$

Comme

$$\lim_{x \to x_0} \left[1 + \frac{a_{k+1}}{a_k}(x - x_0) + ... + \frac{a_n}{a_k}(x - x_0)^{n-k} + o\left((x - x_0)^{n-k}\right)\right] = 1,$$

alors, cette dernière expression est positive au $v(x_0)$.

Extremums.

Rappel. Une fonction f admet un extremum en x_0 si $f(x) - f(x_0)$ garde un signe constant sur un voisinage de x_0 du type $\mathcal{I}_{x_0} =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, \ \alpha > 0$.

Ecrivons la formule de Taylor avec reste de Young:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0)+(x-x_0)^2\frac{f"(x_0)}{2!}+....+(x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o\left((x-x_0)^n\right) \tag{4.4.1}$$

1) Si $f'(x_0)\neq 0$, comme $x-x_0$ change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, alors $f(x)-f(x_0)$ change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc f n'a pas d'extremum en x_0.
On vient de retrouver le résultat de la proposition (4.1.16) (sa contraposée).

2) Si $f'(x_0)=0$ et $f"(x_0)\neq 0$, alors, la formule (4.4.1) s'écrit:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\frac{f"(x_0)}{2!}+....+(x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Comme $(x-x_0)^2$ ne change pas de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, alors $f(x)-f(x_0)$ garde un signe constant sur $\mathcal{I}_{x_0}$, donc f admet un extremum en x_0. De plus
(i) si $f"(x_0)>0$, f admet un minimum en x_0,
(ii) si $f"(x_0)<0$, f admet un maximum en x_0.

3) Si $f'(x_0)=f"(x_0)=0$ et $f^{(3)}(x_0)\neq 0$, on a:

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^3\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}+....+(x-x_0)^n\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Dans ce cas $f(x)-f(x_0)$ change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, donc f n'a pas d'extremum en x_0.
Notons que dans ce cas, $f'(x_0)=0$ mais f n'a pas d'extremum en x_0. On déduit alors que, pour l'existence d'un extremum, la condition $f'(x_0)=0$ **est nécessaire mais pas suffisante.**

<u>**En général,**</u> Soit $k\geq 1$ le plus petit entier tel que $f^{(k)}(x_0)\neq 0$. Alors

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^k\ \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}+....+(x-x_0)^n\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Donc,
(i) si k est impair, f n'a pas d'extremum en x_0,
(ii) si k est pair, f admet un extremum en x_0. De plus,
(a) si $f^{(k)}(x_0)>0$, f admet un minimum en x_0,
(b) si $f^{(k)}(x_0)<0$, f admet un maximum en x_0.

Exemple 4.4.2 1) $f(x) = \sin x, \ \ x_0 = \frac{3\pi}{2}$. On a

$$f(x_0) = -1, \ f'(x_0) = 0 \ \text{ et } \ f''(x_0) = 1,$$

alors

$$\sin x - \sin \frac{3\pi}{2} = \frac{1}{2!}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + o\left((x - \frac{3\pi}{2})^2\right).$$

On voit bien que $\sin x - \sin \frac{3\pi}{2} \geq 0$ sur $\mathcal{I}_{x_0}$, alors la fonction **sin** admet un minimum en $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

2) $f(x) = \sin x, \ \ x_0 = \pi$. On a

$$f(x_0) = 0 \ \text{ et } \ f'(x_0) = -1.$$

donc,

$$\sin x - \sin \pi = -(x - \pi) + o\left((x - \pi)\right).$$

Donc $\sin x - \sin \pi$ change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$ alors f n'a pas d'extremum en $x_0 = \pi$.

Position de la courbe par rapport a sa tangente.

On sait que l'équation de la tangente (Δ), à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M_0(x_0, f(x_0)$ est donnée par:

$$(\Delta): \ y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0).$$

En fait c'est le polynôme de degré ≤ 1 de la formule de Taylor au point x_0.
Etude du signe de $f(x) - y$.
On a,

$$f(x) - y = (x - x_0)^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + (x - x_0)^3 \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + ... + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o\left((x - x_0)^n\right).$$

1) Si $f''(x_0) \neq 0$, alors $f(x) - y$ ne change pas de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est du même coté par rapport à sa tangente au point M_0. De plus
(i) Si $f''(x_0) > 0$, alors $f(x) - y \geq 0$ sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point M_0.
(ii) Si $f''(x_0) < 0$, alors $f(x) - y \leq 0$ sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente au point M_0.

2) Si $f''(x_0) = 0$ et $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ alors

$$f(x) - y = (x - x_0)^3 \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} + ... + (x - x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o\left((x - x_0)^n\right).$$

On voit bien que $f(x)-y$ change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe sa tangente au point M_0.
Dans ce cas on dit la courbe $\mathcal{C}_f$ admet **un point d'inflexion** au point M_0.

3) Si $f"(x_0) = f^{(3)}(x_0) = 0$ et $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, alors $f(x) - y$ ne change pas de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, et donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est du même coté par rapport à sa tangente au point M_0. C'est identique au premier cas.
Notons aussi que, dans ce cas, $f"(x_0) = 0$ mais la courbe n'a pas de point d'inflexion en M_0. Donc, pour l'existence du point d'inflexion, la condition $f"(x_0) = 0$ est seulement **nécessaire mais pas suffisante.**

<u>**En général,**</u> Soit $k \geq 2$ le plus petit entier tel que $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Alors

$$f(x) - y = (x-x_0)^k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} + ... + (x-x_0)^n \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Donc,
(i) si k est impair, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en M_0,
(ii) si k est pair, la courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion en M_0. De plus,
(a) si $f^{(k)}(x_0) > 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente sur $\mathcal{I}_{x_0}$,
(b) si $f^{(k)}(x_0) < 0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente sur $\mathcal{I}_{x_0}$.

Exemple 4.4.3 **1)** $f(x) = \cos x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{4}$. On a:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{4} + o\left((x - \frac{\pi}{4})^2\right).$$

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0 est

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2} = -x + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \frac{\pi}{4}),$$

et

$$\cos x - y = -\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{4} + o\left((x - \frac{\pi}{4})^2\right).$$

On voit bien que $\cos x - y \leq 0$ sur $\mathcal{I}_{x_0}$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de sa tangente sur $\mathcal{I}_{x_0}$.

2) $f(x) = \cos x,\ \ x_0 = \frac{\pi}{2}$. On a

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left((x - \frac{\pi}{2})^3\right).$$

L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point M_0 est

$$y = \frac{\pi}{2} - x,$$

et

$$\cos x - y = \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 + o\left((x - \frac{\pi}{2})^3\right),$$

qui change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point $M_0(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Cherchons une condition nécessaire et suffisante d'existence de point d'inflexion. Soit $k \geq 2$ le plus petit entier tel que $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. On a vu que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion si et seulement si k est impair.
Ecrivons maintenant la formule de Taylor-Young à la dérivée seconde f". On a

$$f"(x) = (x - x_0)^{k-2}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!} + ... + (x - x_0)^{n-2}\frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-2)!} + o\left((x - x_0)^{n-2}\right).$$

On voit bien que la fonction f" change de signe sur $\mathcal{I}_{x_0}$ si et seulement si k est impair. On déduit alors

Proposition 4.4.4 *La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion en $M_0(x_0, f(x_0))$ si et seulement si sa dérivée seconde s'annule en x_0 et change de signe sur un voisinage $\mathcal{I}_{x_0}$ de x_0.*

4.5 Exercices

Exercice 1 Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \;\; f_1(0) = 0; \quad f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \;\; f_2(0) = 0;$$
$$f_3(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}, \text{ si } x \neq 1 \;\; f_3(1) = 1.$$

Exercice 2 Calculer les dérivées des fonctions :

$$x \mapsto \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}, \quad x \mapsto \frac{\exp(1/x) + 1}{\exp(1/x) - 1}, \quad x \mapsto \log\left(\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}\right), \quad x \mapsto (x(x-2))^{1/3}.$$

Exercice 3 Étant donné α dans $]0,1[$, montrer que pour tout entier naturel n

$$\frac{\alpha}{(n+1)^{1-\alpha}} \leq (n+1)^{\alpha} - n^{\alpha} \leq \frac{\alpha}{n^{1-\alpha}}.$$

En déduire la limite

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^{\alpha}}.$$

Exercice 4 Montrer que pour tout réel strictement positif x, on a:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

Exercice 5

1. Soit f une application continue d'un intervalle $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable en $c \in]a,b[$. Montrer qu'il existe une (unique) application continue ε de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(c) = 0$ et, pour tout $x \in]a,b[$ distinct de c, on ait :

$$f(x) = f(c) + (x-c)f'(c) + (x-c)\epsilon(x)$$

2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$$

est décroissante et qu'elle converge vers une limite que l'on nommera S.

3. Pourquoi peut on dire, *a priori*, que $\frac{1}{2} \leq S \leq 1$?

4. Soit $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une application continue, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$. Montrer que la suite $(\sigma_n(f))_{n\geq 1}$ de terme général :

$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right)$$

converge vers $f'(0)S$ (utiliser 1.).

5. Montrer que $\sigma_n(f) = \log(2)$ lorsque f est l'application $x \mapsto \log(1+x)$ et en déduire la valeur de S.

6. Calculer la limite de la suite $(\sigma_n)_{n\geq 1}$ de terme général :

$$\sigma_n = \sin\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n+1} + \cdots + \sin\frac{1}{2n}.$$

Exercice 6 Calculer les dérivées n^{mes} des fonctions suivantes.

$$f(x) = \sin x\, e^x\,, \quad g(x) = (x^3 - 4x^2 + 1)\cos(2x).$$

Exercice 7 En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que:

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \quad x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \quad 1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Exercice 8 Jusqu' à quel ordre doit-on développer, sur $[-1, 1]$, la fonction $f(x) = e^x$, pour avoir une estimation polynômiale de cette fonction avec une erreur inférieur ou égale à $0,001$.

Exercice 9 Etudier les extremums des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$, **b)** $g(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$, (seulement au point x = 0).

Exercice 10 Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point x_0 et sa position par rapport à cette courbe.

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0, \quad f(x) = \cos x, \quad x_0 = \tfrac{\pi}{2}, \quad f(x) = \sin x, \quad x_0 = \tfrac{\pi}{2}.$$

Exercice 11 Donner les intervalles ou les fonctions suivantes sont convexes ou concaves et donner leurs points d'inflexions.

i) $f(x) = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$, **ii)** $g(x) = 2 - |x^5 - 1|$

Exercice 12 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = e^{1/t} \text{ si } t < 0, \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \text{ si } t \geq 0$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier en $t = 0$.
2. Etudier l'existence de $f''(0)$.

3. On veut montrer que pour $t < 0$, la dérivée n-ième de f s'écrit

$$f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)}{t^{2n}} e^{1/t}$$

   où P_n est un polynôme.

   (a) Trouver P_1 et P_2.

   (b) Trouver une relation de récurrence entre P_{n+1}, P_n et P_n' pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Montrer que f est de classe C^∞.