partie 1

Topologie de $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^n$; $n \geq 2$)

Normes sur $\mathbb{R}^2$

Étant donné un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E

On appelle norme sur E toute application $\mathcal{N}$ de E dans $\mathbb{R}$; vérifiant les trois propriétés suivantes :

- $\forall u \in E$; $\mathcal{N}(u) = 0 \Rightarrow u = 0$ (Séparation)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$; $\forall u \in E$; $\mathcal{N}(\lambda u) = |\lambda| . \mathcal{N}(u)$ (homogénéité)
- $\forall u \in E, \forall v \in E$; $\mathcal{N}(u \pm v) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(v)$ (Inégalité triangulaire)

→ Remarque

Si $\mathcal{N}$ est une norme sur E, alors $\forall u \in E$, $\mathcal{N}(u) \geq 0$

ceci est dû au fait que :

$$\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(u + (-u)) \leq \mathcal{N}(u) + \mathcal{N}(-u)$$
$$\leq \mathcal{N}(u) + |-1| \mathcal{N}(u)$$
$$\leq 2\mathcal{N}(u)$$

avec : $\mathcal{N}(0) = \mathcal{N}(0.u) = 0 . \mathcal{N}(u) = 0$.

ainsi $\mathcal{N}(u) \geq 0$

proposition

L'inégalité triangulaire peut aussi se présenter sous la forme suivante :

$\forall u \in E, \forall v \in E$;

$$|\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v)| \leq \mathcal{N}(u - v)$$

preuve

On a d'un côté :

$$\mathcal{N}(u) = \mathcal{N}(u - v + v) \leq \mathcal{N}(u - v) + \mathcal{N}(v)$$

et donc $$\mathcal{N}(u) - \mathcal{N}(v) \leq \mathcal{N}(u - v) \quad \text{—— (1)}$$

d'un autre côté

$$\mathcal{N}(v) = \mathcal{N}(v-u+u) \leq \mathcal{N}(v-u)+\mathcal{N}(u)$$

$$\mathcal{N}(v)-\mathcal{N}(u) \leq \mathcal{N}(v-u)$$

$$\leq \mathcal{N}(u-v)$$ car $\mathcal{N}(v-u)=\mathcal{N}(u-v)$

et donc

$$-\mathcal{N}(u-v) \leq \mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v) \quad \text{—— ②}$$

de ① et ②, il vient

$$|\mathcal{N}(u)-\mathcal{N}(v)| \leq \mathcal{N}(u-v).$$

→ en pratique une norme est souvent notée par $\|\cdot\|_E$

$$\forall u \in E; \quad \mathcal{N}(u) = \|u\|_E$$

ou encore $\mathcal{N}(u) = \|u\|$.

Proposition - Notations

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, on definit les applications:

$$\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|_1 = |x_1|+|x_2|$$

$$\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$$

avec $x=(x_1,x_2)$

$$\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \|x\|_\infty = \mathrm{Max}(|x_1|,|x_2|)$$

Les trois applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ appelées normes ~~équivalentes~~ usuelles de $\mathbb{R}^2$
en particulier $\|\cdot\|_2$ st appelée norme euclidienne.

Boules ouverte, fermée, sphère de $\mathbb{R}^2$.

Soient a un point de $\mathbb{R}^2$ et R un réel strictement positif on appelle

- boule ouverte de centre a et de rayon R, l'ensemble des pts de $\mathbb{R}^2$ noté $B(a,R)$ tel que :

$$B(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ \|x-a\| < R\}$$

- boule fermée de centre a et de rayon R, l'ensemble des pts de $\mathbb{R}^2$ noté $\overline{B}(a,R)$ tel que :

$$\overline{B}(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ \|x-a\| \leq R\}$$

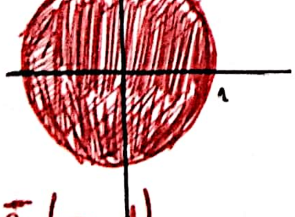
- Sphère de centre a et de rayon R, l'ensemble des pts de $\mathbb{R}^2$, noté $\mathcal{S}(a,R)$ tel que :

$$\mathcal{S}(a,R) = \{x \in \mathbb{R}^2 ;\ \|x-a\| = R\}$$

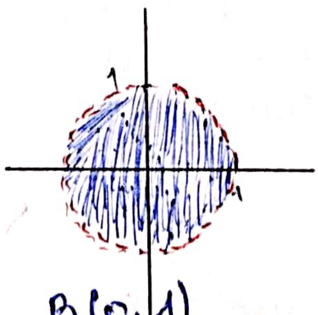
Dans le cas où $a=0$ (origine) et $R=1$, on parle de boule unitaire et de sphère unitaire.

→ pour la norme $\| \ \|_2$:

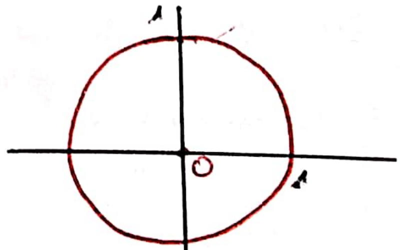
Les boules $B(a,R)$ et $\overline{B}(a,R)$ sont respectivement les disques ouvert et fermé de centre a et de rayon R. la sphère $\mathcal{S}(a,R)$ est le cercle de centre a et de rayon R



$\overline{B}(0,1)$
boule fermée



$B(0,1)$
boule ouverte.



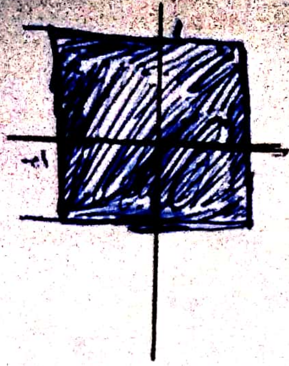
Sphère $\mathcal{S}(0,1)$

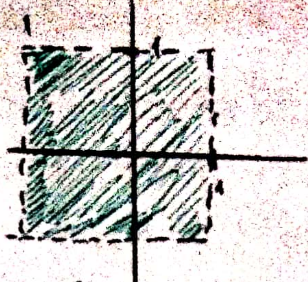
→ Pour la norme $\| \ \|_\infty$

La sphère $\mathcal{S}(a,R)$ est le carré de sommets

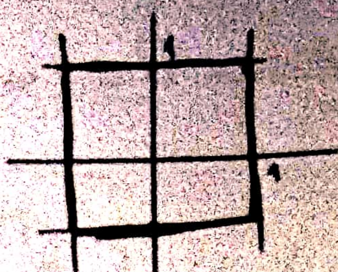
$$(x_0-R, y_0-R), (x_0-R, y_0+R), (x_0+R, y_0+R), (x_0+R, y_0+R)$$

avec $a=(x_0, y_0)$



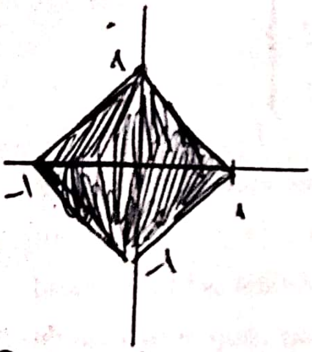


$B(0,1)$ ouverte



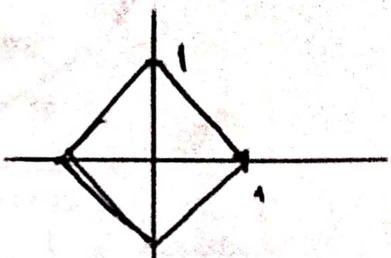
$S(0,1)$

→ Pour la norme $\| \ \|_1$
la Sphère $S(a,R)$ est le ~~carré de~~ losange (car a est quelconque : $a\,(x_0, y_0)$, en général $|x_0|+|y_0|$)
de sommets : (x_0, y_0-R), $(\cancel{y_0} + R, y_0)$, (x_0-R, y_0)
(x_0, y_0+R)



$\bar{B}(0,1)$

$B(0,1)$



$S(0,1)$
« Carré »

Normes équivalentes

Soient N, N' deux normes sur $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n$; $n \geq 2$) on dit que N est équivalente à N' si et seulement si
$\exists \alpha > 0$; $\exists \beta > 0$ tels que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2 \qquad \alpha N(u) \leq N'(u) \leq \beta N(u)$$

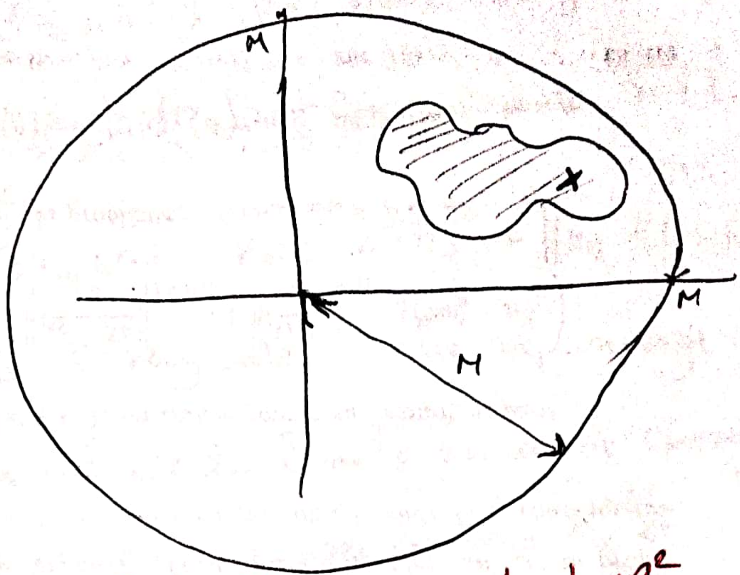
proposition :
Les trois normes usuelles de $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes.

Définition (Partie bornée de $\mathbb{R}^2$):

Une partie X de $\mathbb{R}^2$ st dite bornée, s'il existe un réel $M>0$; tel que :

$$\forall u \in X \; ; \; \|u\| \leq M$$

ie : X st incluse dans une boule fermée de centre O.



Partie ouvertes, fermés de $\mathbb{R}^2$: Compact de $\mathbb{R}^2$

Def • Une partie X de $\mathbb{R}^2$ st dite partie ouverte de $\mathbb{R}^2$ ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$, si pour tout $x_0 \in X$ il existe un reel $h>0$, tel que $B(x_0, h) \subset X$

• Une partie de $\mathbb{R}^2$ st dite partie fermé de $\mathbb{R}^2$ ou un fermé de $\mathbb{R}^2$, si son complémentaire st une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

• Une partie X de $\mathbb{R}^2$ st dite Compact si et seulement si X st une partie bornée et fermée de $\mathbb{R}^2$.

Suite dans $\mathbb{R}^2$:

Soit $(U_n)_n$ une suite de pts de $\mathbb{R}^2$

- Soit $l \in \mathbb{R}^2$, on dit que la suite $(U_n)_n$ st convergeante vers l si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n : n > n_0 \Rightarrow \|U_n - l\| < \varepsilon .$$

- On dit que la suite $(U_n)_n$ st convergeante s'il existe $l \in \mathbb{R}^2$. tel que :

$$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_0 \in \mathbb{N} ; \forall n ; n > n_0 \Rightarrow \|U_n - l\| < \varepsilon .$$

- $(U_n)_n$ st dite Divergente si elle ne converge pas.

proposition (Unicité de la limite en cas de convergence)

Si une suite $(U_n)_n$ de $\mathbb{R}^2$ converge vers $l_1 \in \mathbb{R}$ et converge vers $l_2 \in \mathbb{R}$ alors $l_1 = l_2$

et on ecrit $\lim_n u_n = l_1$

proposition Soit $u_n = (x_n, y_n)$ une suite de $\mathbb{R}^2$ convergente vers $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$u_n \to l \iff \begin{cases} x_n \to l_1 \\ y_n \to l_2 \end{cases}$$

Definition

Soient $u \in \mathbb{R}^2$ et A une partie de $\mathbb{R}^2$

- On dit que u st adhérent à A ssi il existe une suite d élément de A convergente vers u.

ou encore ! u st dit adherent à A ssi $\forall r > 0$;

$$(B(u,r) - \{u\}) \cap A \neq \emptyset .$$

i.e A intersect toute boule ouverte de centre u en des pts differents de u.

Théorème de Bolzano-Weierstrass

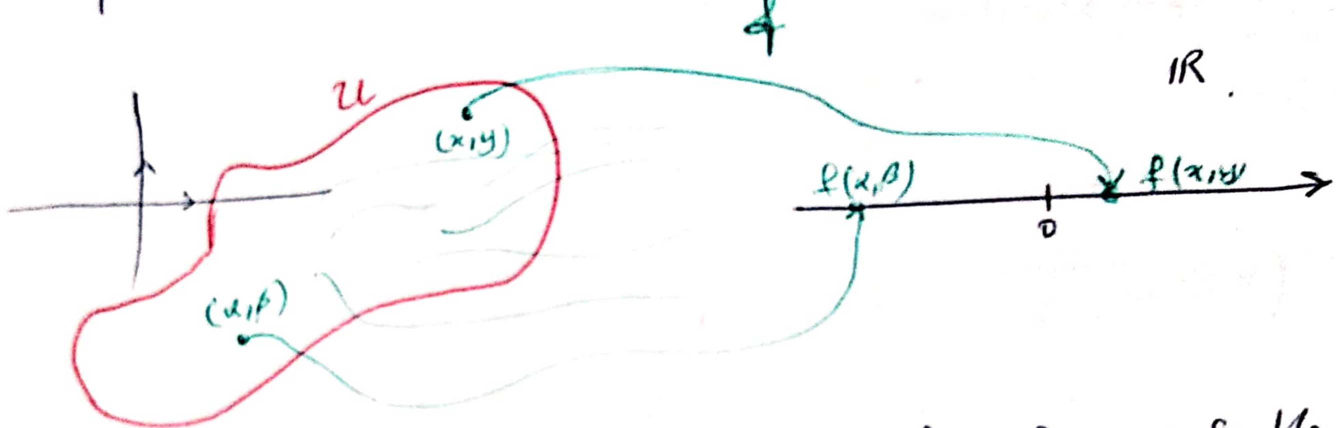
Toute suite bornée de $\mathbb{R}^2$ admet une suite extraite convergente.

Partie 2

Fonction à deux ou trois variables

Définition

Soit U une sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^n, n \geq 2$).
Une fonction f définie sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}$ fait correspondre, à tout couple (x,y) (n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$) un unique élément de $\mathbb{R}$ noté $f(x,y)$.



- On appelle ensemble de definition de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ noté D_f définit par :

$$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x,y) \in \mathbb{R}\}.$$

- On appelle Image de f ou ensemble image de f le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ notée $Img(f)$ definit par.

$$Img(f) = \{\ell \in \mathbb{R} ;\ \exists (x,y) \in D_f ;\ \ell = f(x,y)\}.$$

ou $$Im(f) = f(D_f).$$

- En général une fonction f st donnée explicitement par une relation entre x et y ; notée par

$$z = f(x,y).$$

x et y sont dites variables independantes et z la variable dependants exemple

- $(x,y) \xmapsto{f_1} z = f_1(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$

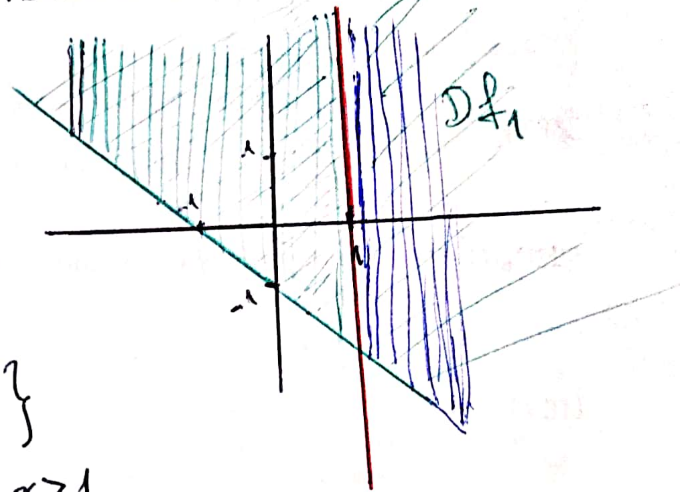
- $z = f_2(x,y) = x \ln(y^2-1)$

$Df_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x+y+1 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}.$

- $x+y+1 \geq 0$: represente le demi-plan de frontiere la droite d'équation $x+y+1=0$ et contenant l'origine.

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. represente la droite verticale d'éq $x=1$

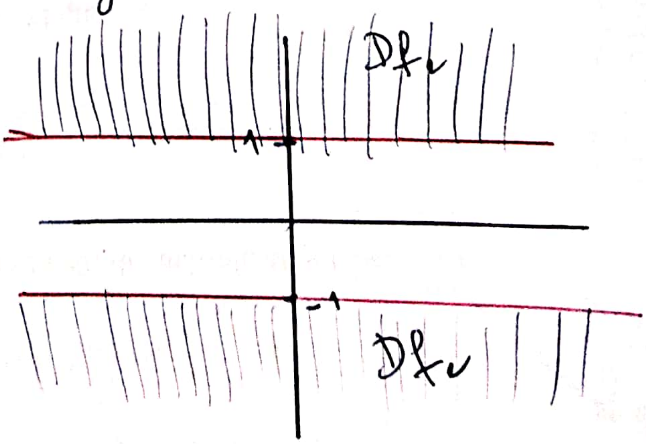
ce domaine peut être exprimé comme suite :



$$Df_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \begin{array}{l} x<1 \\ -1-x \leq y \end{array}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \begin{array}{l} x>1 \\ -1-x \leq y \end{array}\right\}.$$

$Df_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ y^2-1 > 0\}$

$y^2-1>0 \Leftrightarrow y^2>1$. $y \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$



- Graphe, Courbe de niveau, sections verticales

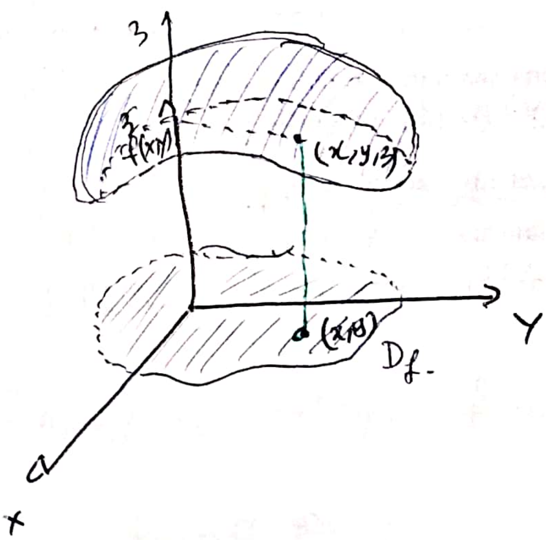
Definition : (Graphe) :

Soit f une fonction de deux variables, D_f son domaine de definition.

On appelle graphe de f, ou surface representative de f l'ensemble des pts (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ où (x,y) st ds D_f et qui verifient : $z = f(x,y)$:

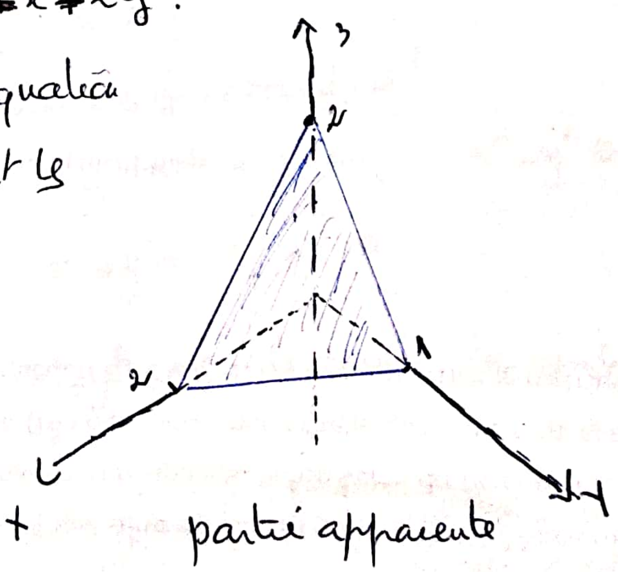
$$Gr(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ (x,y) \in D_f ;\ z = f(x,y)\}.$$

$(x,y) \longmapsto f(x,y)$



exemple $\quad z = f(x,y) = 2 - x - 2y$.

le graphe de f est le plan d'équation $z = 2 - x - 2y$ contenant les pt $(2,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,2)$



Le graphe d'une fonction à deux (trois, quatre, ..) variables est beaucoup plus difficile à tracer (voir même impossible comme le cas de trois et plus) que le graphe de fonction d'une variable (Difficulté de visualisation, abscense de notion analogue à celle de Tableau de variation). Pour cela on utilise d'autres modes de représentation graphique tels que : les courbes de niveau - Fonctions partielles,

Courbes de niveau (level curves) :

Soit f une fonction de deux variables et k un nombre réel appartenant à l'ensemble image de f.

$$k \in Im(D_f) \subset \mathbb{R}$$

On appelle ligne de niveau k ou courbe de niveau k de la fonction f L'ensemble des pts (x, y) du plan (Oxy) en lesquels f prend la valeur k.

$$L_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \text{ tels que } f(x,y) = k\}$$

exemple : Soit f La fonction donnée par :

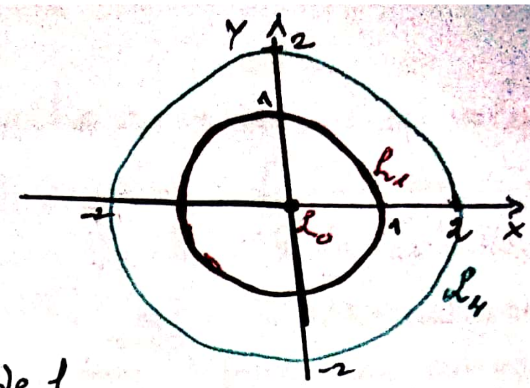
$$(x,y) \longmapsto f(x,y) = x^2 + y^2.$$

- L'ensemble de definition de f étant $\mathbb{R}^2$
- On remarque que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$; $x^2 + y^2 \geq 0$
- $L_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x^2+y^2 = -1\} = \emptyset$

$L_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x^2+y^2 = 1\}$: le cercle de centre O et de rayon 1.

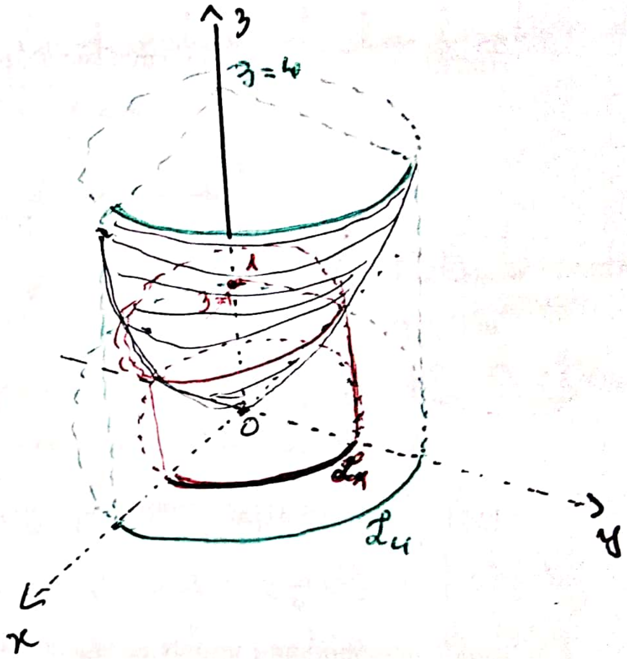
$L_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x^2+y^2 = 0\} = \{0\}$ un seul point L'origine.

Scanné avec CamScanner

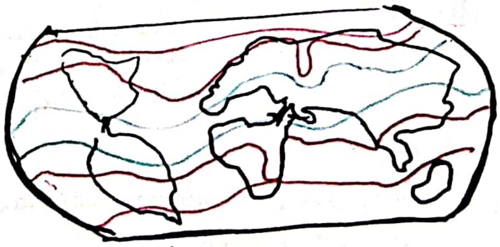


les courbes de niveau de f

L_h : represente La projéction sur le plan (Oxy) de L'intesection du graphe de f avec le plan horizontal d'equation $z=h$; ainsi une première visualisation du graphe de f se fait pas relèvement de cette courbe au niveau h.



→ Comme application de cette notion ds le Monde de La physique on a : la cartes des isobares donnant ls courbes de niveau de La fonction pression $P(x,y)$



en éléctricité ces courbes de niveau sont appelle. equipotentièL .

Fonctions partielles

Dans le but de connaître les variations des valeurs de f en se deplaçant sur le graphe de f dans un direction choisie, On introduit des fonctions dites partielles, qui sont des fcts à une seule variable, ~~obtenue~~ obtenue par deplacement

choisie△ sur G_f dans une direction ~~fixe~~ choisie definie par un vecteurs unitaire $\vec{u}$ à partir d'un point fixe . $a = (x_0, y_0)$

→ **Definition** : Soit f une fonction à deux variables x, y et $a = (x_0, y_0)$ un point du domaine de definition de f, $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^2$. On appelle fonction partielle de f au pt. (x_0, y_0) suivant la direction $\vec{u}$ la fonction d'une variable réel t definie par :

$$f_{\vec{u}}(t) = f(a + t\vec{u})$$

→ Dans le cas ou $\vec{u} = \vec{e}_1$ ou $\vec{e}_2$ ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$: La base canonique de $\mathbb{R}^2$)

on obtient les fonctions partielles de f au pt $a = (x_0, y_0)$ suivant x et y respectivement comme suit :

- $\vec{u} = \vec{i}$: $f_{\vec{i}}(t) = f(a + t\vec{i}) = f(x_0 + t, y_0)$
  en posant $x_0 + t = x$ il vient : $f_{\vec{i}}(t) = f(x, y_0)$
  notée en général (dans la pratique $f_{y_0}(x)$)

- $\vec{u} = \vec{j}$: $f_{\vec{j}}(t) = f(a + t\vec{j}) = f(x_0, y_0 + t)$
  en posant $y_0 + t = y$; il vient $f_{\vec{j}}(t) = f(x_0, y)$
  notée par $f_{x_0}(y)$.

ainsi les deux fonctions partielles les plus importantes sont les fcts partielles suivant x ou y definie par :

$$x \xmapsto{f_{y_0}} f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$$

obtenue en fixant la variable $y = y_0$ ds l'expression de f.

et
$$y \xmapsto{f_{x_0}} f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$$

obtenue en fixant la variable $x = x_0$ ds l expression de f.

Remarque

- l ensemble de definition ou d'application de la fonction $t \longmapsto f_{\vec{u}}(a+t\vec{u})$ st obtenue par la condition que.

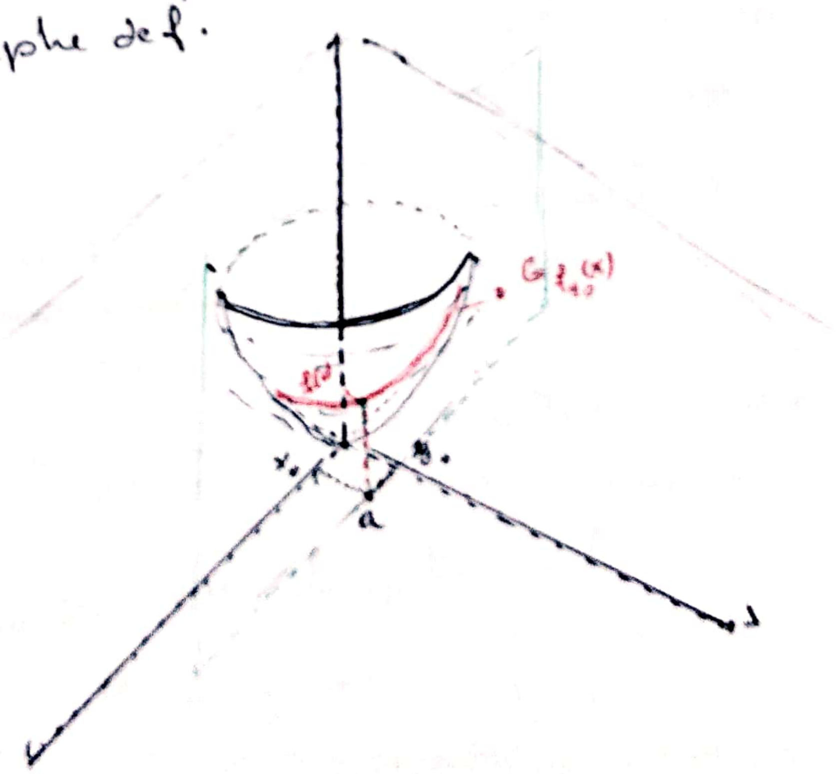
$$a+t\vec{u} \in D_f .$$

- le graphe de $t \longmapsto f_{\vec{u}}(a+t\vec{u})$ st obtenue par l'intersection du graphe de f avec le plan verticale passant par le pt a et contenant la droite vectorielle $a+t\vec{u}$; $t \in \mathbb{R}$.

ainsi

→ le graphe de la fonction partielle $x \xmapsto{f_{y_0}} f_{y_0}(x)$ st l'intersection du plan verticale d'équation $y = y_0$ avec le graphe de f.

→ le graphe de la fonction partielle $y \xmapsto{f_{x_0}} f_{x_0}(y)$ st l'intersection du plan verticale d'équation $x = x_0$ avec le graphe de f.



Scanné avec CamScanner

partie 3

Limite et Continuité

Soit f une fonction à deux variables definie sur un domaine $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$.

$a \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{U}$. $a = (x_0, y_0)$.

afin d'exprimer l'idée que approche le réel l qd (x,y) s'approche de a par tout les chemins possible (en restant bien sûr ds le domaine de definition D_f), on donne la definition qui suit :

Definition $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et a un pt adhérent à $\mathcal{U}$

on dit que la limite de f est égale à l lorsque (x,y) s'approche de a suivant tous les chemins possible et en restant ds D_f ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 ;\ \exists \delta > 0 ;\ \forall_{u=}(x,y) \in D_f \text{ et } \|u - a\| < \delta \Rightarrow |f(u) - l| < \varepsilon .$$

ie : si l'on veut se placé ds un voisinage de l, on a qu'à se placé "ds un certain voisinage de a.

→ vue l'équivalence des normes usuelles, on est libre d'utiliser l'une quelconque d'entre elle.

→ la limite d'une fonction f en a si elle existe elle est unique.

→ dans ce cas on ecrit $\lim\limits_{a} f(x,y) = l$. ou

$$f(x,y) \xrightarrow[a]{} l .$$

→ Soit $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ deux chemins distinct passant par a et contenue dans D_f. tels que :

$$\lim_{\substack{(x,y) \to a \\ \text{sur } \mathcal{C}_1}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{(x,y) \to a \\ \text{sur } \mathcal{C}_2}} f(x,y)$$

; on dit que la limite de f en a n'existe pas.

→ Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \overline{U}$ (a adherent à U), $a=(x_0,y_0)$

Si $\lim\limits_{a} f(x,y)$ existe $= l \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{y \to y_0} f_{x_0}(y) = \lim_{x \to x_0} f_{y_0}(x) = l .$$

ie : Les deux fcts partielles f_{x_0} et f_{y_0} tendent toute les deux vers la même limite l lorsque $y \to y_0$ et $x \to x_0$ respectivement

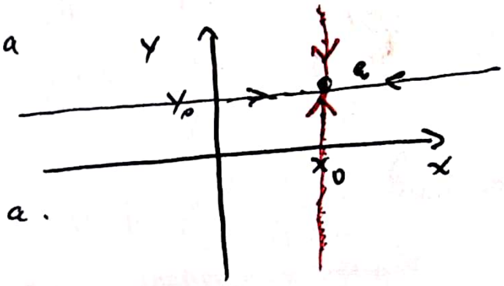
" Tout simplement cela est dû au choix de deux chemins particulier

pour $\lim\limits_{y \to y_0} f_{x_0}(y)$; on a ~~tout~~ choisit le chemin : $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y \end{cases}$.

la droite verticale d'éq $x = x_0$. passant par a

pour $\lim\limits_{x \to x_0} f_{y_0}(x)$: le chemin $\begin{cases} x = x \\ y = y_0 \end{cases}$

la droite horizentale $y = y_0$ passant par a.



ainsi si $\lim\limits_{x \to x_0} f_{y_0}(x) \neq \lim\limits_{y \to y_0} f_{x_0}(y)$

on deduit que la limite de f en a n'existe pas.

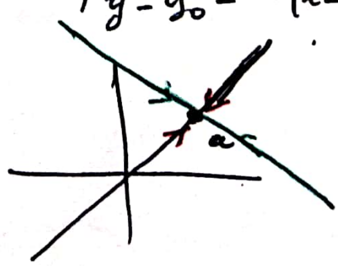
→ ~~Ensiglement ... ou ...~~

En pratique : pour calculer la limite de f en a, on suit les étapes suivants :

étape 1 – On commence par calculs les limites des fonctions partielles f_{y_0} pour $x \to x_0$ et f_{x_0} pour $y \to y_0$.

- Si ces deux limits sont differentes, on deduit directement que la limite de f n'existe pas.
- Si ces deux limits sont égaux on passe à la second étapes.

étape 2 – on choisie d'approchér a par les chemin Directe ie par le chemin droit allant vers a. en posant $\begin{cases} x = x \\ y - y_0 = \lambda (x - x_0) \end{cases}$



et calculs la limite de :

$$\lim_{x \to x_0} f\big(x, \; y_0 + \lambda (x - x_0)\big)$$

" λ designe la pente de la droite "

- Si cette limite dépend de λ ; on deduit directement que la limite de f n'existe pas.
- Si cette limite existe et st indépendante de λ on passe à La troisième étape.

cette étape peut être remplacer par un changement de variable. en coordonnées polaires en posant :

$x = x_0 + r\cos\theta$, $y = y_0 + r\sin\theta$ avec $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, +\pi]$.

Dire que : $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0) \Leftrightarrow \left| r \longrightarrow 0 \right.$ pour tout θ.

ainsi

$$\lim_{(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{r \to 0} f\left(x_0 + r\cos\theta,\, y_0 + r\sin\theta\right)$$

cette limite devra existé ~~est~~ être unique pour toute valeur de θ. afin de s'assurer de cela on passe à L'étape suivante:

étape 3 -

à fin de s'assure que la limite ~~l~~ determiner grâce au coordonnées polaire ~~sur~~ représente la limite de f suivant tout les chemins ~~on~~, on détermine une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; telle que.

$$\left| f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - l \right| < h(r) \quad \text{avec } h(r) \longrightarrow 0.$$

cette inégalité montre que la limite st obtenue seulement du fait que (x,y) s'approche de (x_0,y_0), sans prendre en consideration la manière avec laquelle il l'approche.

exemples

1 ~~calcul~~ Calculer $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}$.

$x = 0$ ou $y = 0$: $f(0,y) = f(x,0) = 0 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ \text{ou } y \to 0}]{} 0$.

$x = x$, $y = \lambda x$: on remarque : $f(x,\lambda x) = \dfrac{3\lambda x^3}{(1+\lambda^2)x^2}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3\lambda x^3}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{3\lambda}{1+\lambda^2} \cdot \lim_{x \to 0} x^2 = 0.$$

donc suivant les chemins directes $f(x,y) \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

cela apparait bien grâce au coordonnés polaire :

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{3r^3 \cos^2\theta . \sin\theta}{r^2} = 3r \cos^2\theta . \sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \ ; \ \theta \text{ fixé.}$$

$$|f(r\cos\theta, r\sin\theta) - 0| = 3r . |\cos^2\theta| |\sin\theta| \leq \underbrace{3r}_{h(r)} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

$\Rightarrow$ la lim de f en $(0,0)$ est 0 suivant tout les chemins

donc $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

$\rightarrow$ On pourra utiliser la definition pour montrer que la lim est 0 ; "0 obtenue par les chemin directe"

$$|f(x,y)| = \frac{3x^2 |y|}{x^2+y^2} \ ; \quad \text{on a :} \quad x^2 < x^2+y. \quad |y| < \sqrt{x^2+y^2}.$$

$$\text{donc} \quad |f(x,y)| \leq \frac{3(x^2+y^2).\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} = 3.\sqrt{x^2+y^2} = 3\|(x,y)\|_2 .$$

ainsi $\forall \varepsilon > 0$: si on veut que : $|f(x,y)| < \varepsilon$; on prend :

$\|(x,y)\|_2 < \varepsilon/2$, il existe donc $\delta = \varepsilon/3$.

ie $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0$.

2— Calcul de $\lim\limits_{(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$; $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

suivant les chemins $x=0$ et $y=0$:

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$f(0,y) = 0 \xrightarrow[y\to 0]{} 0$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^3 . \cos\theta . \sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta)} = r . \frac{\cos\theta . \sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$$

si on passe à la lim pour θ fixé $\theta = \theta_0$, on aura 0

~~cas cosθ~~ même pour $\theta = \pm\pi/2$ car : $\cos \pm \pi/2 = 0$.

cependant Lorsque θ dépend de r suivant un chemin non directe comment peut se comporte le rapport $\frac{\cos\theta . \sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta}$.

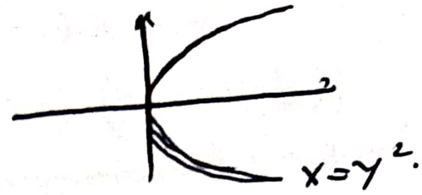
supposons le chemin : $x = y^2$; $f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow[y\to 0]{} \frac{1}{2}$

ainsi $\frac{1}{2} \neq 0$ ie la limite n'existe pas.

• Si on veut voir sur ce chemin comment se comporte θ :

$x = y^2$ en polaire: $r\cos\theta = r^2\sin^2\theta$

donc $\sin^2\theta = \frac{\cos\theta}{r}$.



ainsi $\sin^4\theta = \frac{\cos^2\theta}{r^2}$.

le rapport $\frac{\cos\theta . \sin^2\theta}{\cos^2\theta + r^2\sin^4\theta} = \frac{\cos\theta \times \frac{\cos\theta}{r}}{\cos^2\theta + \cos^2\theta} = \frac{1}{2r}$.

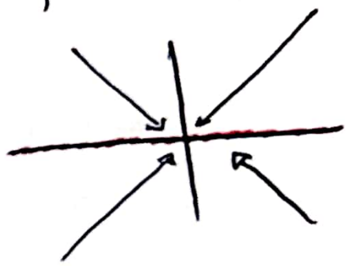
et ainsi sur ce chemin:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r \times \frac{1}{2r} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2}.$$

3_ Calcule de $\lim_{(0,0)} \frac{x^2 \mathrm{Ln}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$f(x,y) = \frac{x^2 \mathrm{Ln}|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \neq 0\}$.

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{x'ox\}$



$y = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$.

$$f(x, \lambda x) = \frac{x^{\cancel{2}} . \mathrm{Ln}|\lambda|.|x|}{\sqrt{(1+\lambda^2)}\,|\cancel{x}|} \quad ; x \longrightarrow 0$$

$$= \frac{x \,\mathrm{Ln}|\lambda|.|x|}{\sqrt{1+\lambda^2}} . \mathrm{signe}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

car $x \,\mathrm{Ln}|x| \longrightarrow 0$.

donc suivant un chemin directe appartenant au demi-plan supérieur ou inferieur, la limite est nulle.

on pourra voir cela en coordonnées polaire:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ avec $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$.

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r^2\cos^2\theta . \mathrm{Ln}\, r.|\sin\theta|}{r} = r\cos^2\theta \,\mathrm{Ln}\, r.|\sin\theta|$$

$$= r\cos^2\theta . \mathrm{Ln}\, r + r\cos^2\theta . \mathrm{Ln}|\sin\theta|$$

pour θ fixé $\theta \neq 0$, $\theta \neq \pi$. $r\cos^2\theta \,\mathrm{Ln}\, r \xrightarrow[r]{} 0$ et $r\cos^2\theta \,\mathrm{Ln}|\sin\theta| \xrightarrow[r]{} 0$

cependant pour un chemin courbe ou θ st fonction de r.

si Losque r s'approche de 0 $|\sin\theta|$ s'approche de 0 ie θ s'approche de 0 ou de π; comment va se comporte $r \mathrm{Ln}|\sin\theta|$

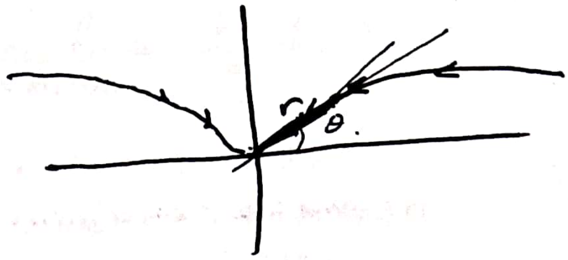
pour cela L'un de vos camarade a proposé un chemin assez ingénieux :

on pose : $y = \exp(-\frac{1}{x^2})$; sur ce chemin.

on remarque que le pt de coordonnées $(x, \exp(-\frac{1}{x^2}))$.

en s'approchant de 0 : $r \to 0$: son argument θ s'approche de 0 (ou de π

$x \to 0$: $\exp(-1/x^2) \longrightarrow 0$.



$$f(x, \exp(-\frac{1}{x^2})) = \frac{x^2 \ln(\exp(-1/x^2))}{\sqrt{x^2 + \exp(-2/x^2)}}$$

$$= \frac{x^2 \cdot (-1/x^2)}{\sqrt{x^2 + \exp(-2/x^2)}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + \exp(-2/x^2)}} \xrightarrow[x \to 0]{} -\infty$$

ie La limite sur ce chemin st non nulle et pire encore elle n'existe pas.

delà : $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Definition • Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in U$.

f une fct à deux (ou trois) variable définie sur U.

a un pt de U ; ($f(a)$ existe)

f st dite continue en a ssi $\lim\limits_{a} f(x,y) = f(a)$

ie : $\forall \varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$; $\forall u = (x,y) \in D_f$: $\|u - a\| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(a)| < \varepsilon$.

• f st dite continue sur U ssi elle st continue en chaque pt de U.

Propriétés.

En procédant comme pour une fct à une variable, on sait que si f, g, sont des fonctions définies sur $\mathcal{U}$ et $a \in \overline{\mathcal{U}}$ (a adhérent à $\mathcal{U}$) : alors : si $\lim_a f$ et $\lim_a g$ existe, il vient que :

- $\lim_a (f \pm g)$ existe ~~et~~ est égale à $\lim_a f \pm \lim_a g$
- $\lambda \in \mathbb{R}$ $\left(\lim_a \lambda f\right) = \lambda \lim_a f$
- Si $\lim_a g \neq 0$: $\lim_a \frac{f}{g} = \frac{\lim_a f}{\lim_a g}$.
- Si ~~[illegible]~~ u et v deux fct : telque :

$$u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v : \cancel{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{avec } \mathcal{U} \supseteq v(V)$$

~~telque~~ : $v : (x,y) \longrightarrow \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$.

alors si $\lim_{(x_0,y_0)} v(x,y) = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$. et si

$$\lim_{(l_1,l_2)} u(x,y) = l \text{ ,}$$

il vient que $\lim_{(x_0,y_0)} (u \circ v)(x,y) = l$,

de cela il vient,

Si f, g sont deux fcts continues en $a \in \mathcal{U}$.

$f+g$, λf, $f.g$, $\frac{f}{g}$ avec $g(a) \neq 0$ sont continue en a.

Si $v : V \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ st continue en $a = (x_0, y_0)$.

et $u : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ st continue en $v(a)$

alors : $u \circ v$ st continue en a.

Limites Séquentielles et Continuité Séquentielle :

Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \overline{\mathcal{U}}$; $l \in \mathbb{R}$.

et $(u_n)_n$ une suite de pts tendant vers a quand $n \to +\infty$

alors si $\lim\limits_{a} f(x,y) = l$

$\Rightarrow$ la suite $(f(u_n))_n$ st convergente vers l.

de plus :

Dire que ~~la fonction f admet l pour limite lorsque (x,y) → a est équivalent à dire que la limite de toute suite (f(un))n est égale à l où (un)n~~

$\lim\limits_{a} f(x,y) = l \iff$ pour toute suite $(u_n)_n$; $u_n \xrightarrow[n]{} a$.

$f(u_n)_n \xrightarrow[n]{} l$.

pour le cas de la continuité il suffit de prendre $l = f(a)$.

proposition : (th)

Soit f une fct définie et continue sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

et soit $D \subset \mathcal{U}$; un ensemble fermé, borné (compact) ds $\mathcal{U}$.

alors $\exists\, a \in D$ et $b \in D$;

$$\underset{(x,y) \in D}{\text{Max}}\, f(x,y) = f(a).$$

$$\underset{(x,y) \in D}{\text{Min}}\, f(x,y) = f(b).$$

ie : une fonction continue sur un compact, y atteint ses bornes sup et inf.

partie 4

Dérivées partielles et Différentiabilité

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$; une application, $a \in U$.

Définition (Dérivées partielle $\partial_x f$, $\partial_y f$ en un pt)

- f est dite dérivable en a par rapport à la 1ère variable (1ère place) ssi la fonction partielle

$$f_{y_a} : x \longmapsto f_{y_a}(x) = f(x, y_a)$$

est dérivable en x_a.

dans ce cas, on appelle dérivée partielle première en a par rapport à x le nombre dérivé de $f_{y_a}(x)$ en x_a

et on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{d f_{y_a}}{d x}(x_a)$$

- De même f est dite dérivable en a par rapport à La 2ème variable (2ème place) ssi la fonction partielle

$$f_{x_a} : y \longmapsto f_{x_a}(y) = f(x_a, y)$$

est dérivable en y_a.

Dans ce cas on appelle dérivée partielle seconde en a par rapport à y le nombre dérivé de $f_{x_a}(y)$ en y_a

et on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \frac{d f_{x_a}}{d y}(y_a).$$

par définition du nombre dérivée (1ère année)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_a+h, y_a) - f(x_a, y_a)}{h}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_a, y_a+k) - f(a)}{k}$$

Exemple :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} ; & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k \to 0} \dfrac{0}{k} = 0.$

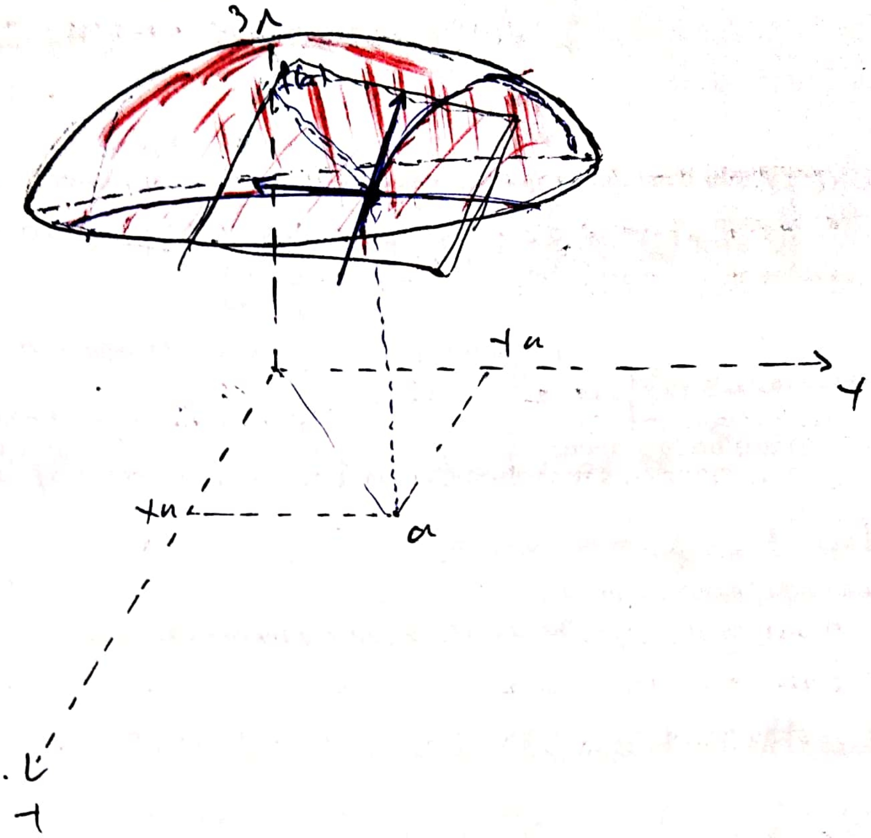
Remarque : l'existence d'une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$; n'implique pas la continuité de f en a. elle implique seulement que la fonction partielle correspondante est continue ;

Interprétation géométrique

le nombre $\partial_x f(a)$ désigne la pente dans le plan (xoz) du vecteur tangent à la courbe representatif de f_{y_a} en x_a, intersection du plan $y = y_a$ avec le graphe de f ce vecteur est de composante $(1, 0, \partial_x f(a))$.

le nombre $\partial_y f(a)$ désigne la pente dans le plan (yoz) du vecteur tangent en y_a à la courbe representatif de f_{x_a}

intersection du plan vertical $x = x_a$ et le graphe de f de composante $(0, 1, \partial_y f(a))$.



Ls deux vecteurs $(1, 0, \partial_x f(a))$ et $(0, 1, \partial_y f(a))$ définissent un plan tangent au graphe de f au point

$(x_a, y_a, f(a))$.

ce plan est d'equation

$$\begin{vmatrix} x - x_a & 1 & 0 \\ y - y_a & 0 & 1 \\ z - f(a) & \partial_x f(a) & \partial_y f(a) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = \partial_x f(a)(x - x_0) + \partial_y f(a)(y - y_a) + f(a)}$$

d'un point de vue numérique :

Ce plan tangent represente-t-il une bonne approximation des valeur de f.

ie : pour $(x,y) \in$ Voisinage de a :

$$f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-y_a) + f(a)\right] \text{ st-t-elle}$$

au voisinage de 0. ?

Comment se comporte cette difference Lorsque : le pt. (x,y) est assez proche de a .?

La reponse à cette question et donnée par l'introduction de La notion de Differentiabilité.

Def Soit $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; $a \in \mathcal{U}$. admettant en a des derivées partielles premieres ($\partial_x f(a), \partial_y f(a)$ existe).

f st dite Differentiable en a ssi. La quantité :

$$\frac{f(x_a+h, y_a+k) - f(a) - \partial_x f(a).h - \partial_y f(a).k}{\|(h,k)\|} \text{ tend}$$

vers 0 qd $(h,k) \longrightarrow (0,0)$.

ds ce cas : en posant :

$$\frac{f(x_a+h, y_a+k) - f(a) - \partial_x f(a)h - \partial_y f(a)k}{\|(h,k)\|} = \varepsilon(h,k)$$

il vient

$$f(x_a+h, y_a+k) - f(a) = \partial_x f(a)h - \partial_y f(a)k + \|(h,k)\| \varepsilon(h,k)$$

avec $\varepsilon(h,k) \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$

de ce fait à partir de perturbation contrôlé au voisinage de a. (on perturbe x_a par h : x_a+h
on perturbe y_a par k ; y_a+k)

on arrive à determiner les variations de f au voisinage de $f(a)$

$$\Delta_a f \approx \partial_x f(a)\,\Delta x + \partial_y f(a)\,\Delta y .$$

où $\Delta x = h$, $\Delta y = k$.

- ~~[illegible]~~

Derivées partielles premiers $\partial_x f$, $\partial_y f$ sur un Domaine.

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

Si en chaque point $a \in U$, la fonction f admet des derivées partielles premiers $\partial_x f(a)$, $\partial_y f(a)$. on definit alors les fonction derivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sur U par :

$$\partial_x f = \frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto \partial_x f(x,y) . \end{array}$$

$$\partial_y f = \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{l} U \longrightarrow \mathbb{R} . \\ (x,y) \longmapsto \partial_y f(x,y) \end{array}$$

remarquons que : $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont des fcts à 2 variables.

exemple

- $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \longmapsto \arctan y/x .$$

pour calcule les derivés partielle : on suppose que l'une des variable st constante et on derive par rapport à l'autre

$$\partial_x f(x,y) = -\frac{y}{x^2} \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2} .$$

$$\partial_y f(x,y) = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+(y/x)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} .$$

- $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\partial_x r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; ; \; \partial_y r = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Etant l'impossibilité de vérifier la differentiabilité d'une fct à deux variables sur un domaine de $\mathbb{R}^2$, en appliquant le calcule de la limite (*) en chaque point de ce domaine.

On donne une condition suffisante de Differentiabilité sur un domaine.

Def Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$, admettante des derivés partielles $\partial_x f, \partial_y f$ sur U.

f st dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ; et on ecrit $f \in \mathcal{C}^1(U)$

ssi :
$$\begin{cases} f : \text{continue sur } U \\ \partial_x f, \partial_y f \text{ existe ds } U . \\ \partial_x f, \partial_y f \text{ sont continue sur } U . \end{cases}$$

ainsi on a :

Proposition :

Si f est une fonct de classe $\mathcal{C}^1$ sur un domaine $\mathcal{U}$ alors f est differentiable sur $\mathcal{U}$ et de plus :

- en chaque pt (x,y) de $\mathcal{U}$: une bonne approximation des valeur de f est fournit par l equation du plan tangent.

ce qui s'exprime par l écriture.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy, \text{———} (*)(*)$$

$a \in \mathcal{U}$: $$df_{(a)} = \frac{\partial f}{\partial x}(a)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a)\, dy.$$

(*)(*) est appellée forme differentielle de f sur $\mathcal{U}$.

- Le vecteur de composante $(\partial_x f, \partial_y f)$ est appellé gradient de f : noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$, $\vec{\nabla} f$, qui défini une application à deux variables à deux composante.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \end{pmatrix}(x,y).$$

en posant $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $\Rightarrow d\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$.

il vient alors : $\boxed{df = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \cdot d\overrightarrow{OM}}$

quelque propriétés :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f+g) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \overrightarrow{\text{grad}}\, g.$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(\lambda f) = \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f.$$
$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g + \overrightarrow{\text{grad}}\, f\; g.$$

Dérivée d'ordre supérieur

- Dérivées partielles secondes :

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

On dit que f admet des dérivées partielles secondes par rapport à x et à y ssi chacune des fonctions $\partial_x f$ et $\partial_y f$ définies sur U admet des dérivées partielles premières par rapport à x et à y.

Ainsi si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ possède des dérivées partielles :

- sa première dérivée partielle se note $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ou f''_{x^2}
- sa deuxième dérivée partielle se note $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ou f''_{xy}

de même, quand elles existent, les dérivées partielles de $\frac{\partial f}{\partial y}$ se notent respectivement :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{yx} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{y^2}$$

→ les dérivées partielles secondes : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$: sont appelées dérivées mixtes.

Définition

Une fonction f définie sur U, est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U, si ses 4 dérivées partielles secondes

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} ; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} ; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

existent et sont continues sur U.

proposition (théorème de Schwartz)

Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U alors

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

- Derivees partielle d'ordre $k \geq 2$

à leurs tour, si les derivés partielles secondes admettent des derivés partielle on defini les derivées partielle d'ordre 3 et plus generalement on defini la notion de derivee partielle d'ordre $k \geq 3$

Def une fonction f, definie sur $\mathcal{U}$, est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathcal{U}$ si toutes ses derivées partielles jusqu'à l'ordre k existent et sont continue sur $\mathcal{U}$.

Differentielle de fonction Composés : "Chaine de dérivation"

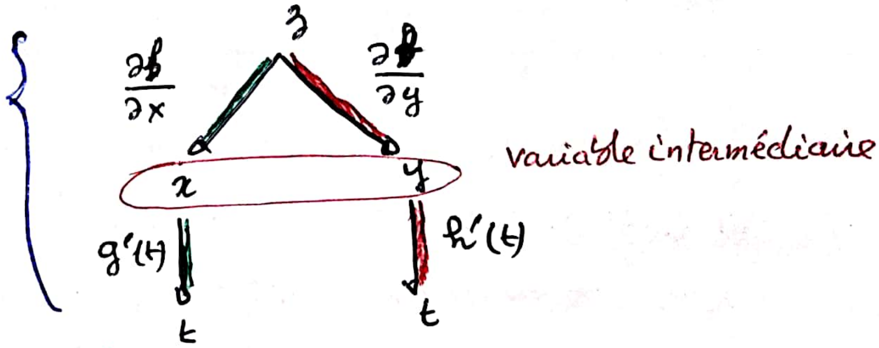
→ 1-cas : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathcal{U})$; g, h deux fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$

telque :

$$z = f(x,y) = f(g(t), h(t)) = F(t).$$

F est une fonction à une seule variable t ;

organigrame de derivation en chaine



$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dg}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dh}{dt}.$$

ie : $$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(t), h(t)) \cdot g'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(t), h(t)) \cdot h'(t).$$

exemple $z = x^2 y + 3x y^4$; $x = \sin 2t$, $y = \cos t$

on a : $x'(t) = 2\cos 2t$; $y'(t) = -\sin t$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 3y^4 ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 12xy^3$$

ainsi

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \left.2xy + 3y^4\right|_{\substack{x = x(t) \\ y = y(t)}} \cdot 2\cos 2t + \left.x^2 + 12xy^3\right|_{\substack{x = x(t) \\ y = y(t)}} \cdot (-\sin t)$$

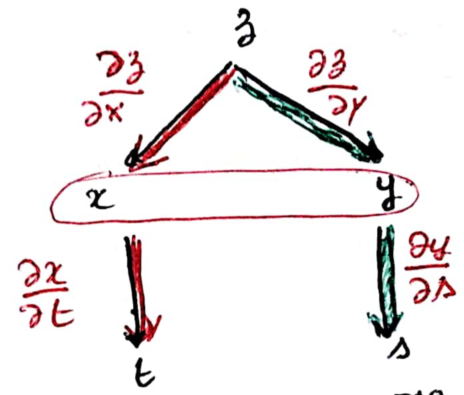
$$= \left(2\sin 2t \cos t + 3\cos^4 t\right) \cdot 2 \cdot \cos 2t + \left(\sin^2 2t + 12 \sin 2t \cos^3 t\right) \cdot \left[-\sin t\right]$$

→ 2 - cas

$f \in \mathcal{C}^1(U)$; g, h deux fct de classe $\mathcal{C}^1$:

$$z = f\big(g(t), h(s)\big) = F(t, s)$$

algorigramme de dérivation



variables intermédiaires

$$\underbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}_{\text{ce qui signifie } \frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \cancel{+ \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}}$$

la partie $\frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$ est nulle car y ne dépend que de s.

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

la partie $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}$ est nulle car y ne dépend que de t.

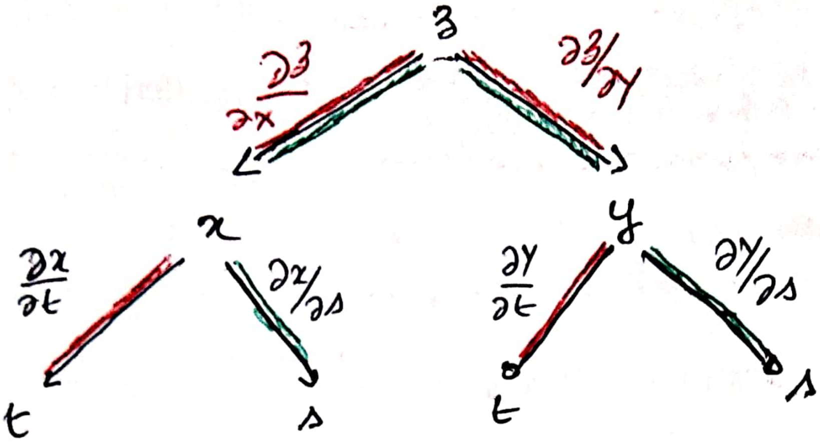
ainsi en terme de F, f, g, h :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(g(t), h(s)\big) \cdot g'(t) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(g(t), h(s)\big) \cdot h'(s). \end{cases}$$

→ 3 - cas :

$$f \in \mathcal{C}^1 \; ; \; g, h \in \mathcal{C}^1 .$$

$$z = f\big(g(t,s), h(t,s)\big)$$



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(g(t,s), h(t,s)\big) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(g(t,s), h(t,s)\big) \cdot \dfrac{\partial h}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(g(t,s), h(t,s)\big) \cdot \dfrac{\partial g}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\big(g(t,s), h(t,s)\big) \cdot \dfrac{\partial h}{\partial s} . \end{cases}$$

exemple

$$z = \sqrt{x}\, e^{xy} \; ; \quad x = 1 + st \; ; \; y = s^2 - t^2$$

1re Méthode : par substitution (cette méthode est très lourde le risque d'erreur ~~[illegible]~~ et d'omission est grand).

$$z = \sqrt{1+st} \cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)} = \sqrt{1+st} \cdot e^{s^2 + s^3 t - s t^3 - t^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{s}{2\sqrt{1+st}} \cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)} + \sqrt{1+st}\cdot\left(s^3-2t-3st^2\right)\cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)}$$

$$= \frac{s + 2(1+st)(s^3-2t-3st^2)}{2\sqrt{1+st}} \cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)}$$

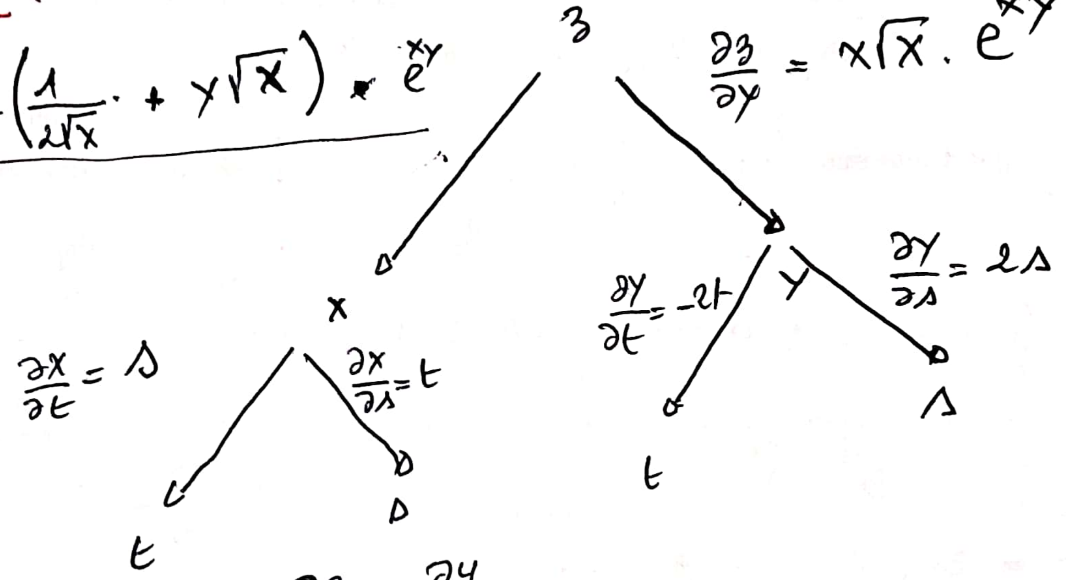
$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{t}{2\sqrt{1+st}} \cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)} + \sqrt{1+st}\cdot\left(3s^2t+2s-t^3\right) e^{(1+st)(s^2-t^2)}$$

$$= \frac{t + 2(1+st)(3s^2t+2s-t^3)}{2\sqrt{1+st}} \cdot e^{(1+st)(s^2-t^2)}$$

2 Methode :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + y\sqrt{x}\right) \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{x} \cdot e^{xy}$$



$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + y\sqrt{x}\right) e^{xy}\cdot s + x\sqrt{x}\, e^{xy}\cdot(-2t)$$

$$= \frac{s + 2syx - 4tx^2}{2\sqrt{x}}\, e^{xy} \quad \Big]\ x = 1+st,\ y = s^2-t^2.$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + y\sqrt{x}\right) e^{xy}\cdot t + x\sqrt{x}\, e^{xy}\cdot 2s$$

$$= \frac{t + 2txy + 4sx^2}{2\sqrt{x}} \cdot e^{xy} \quad \Big]\ x = 1+st,\ y = s^2-t^2$$

exemple 2

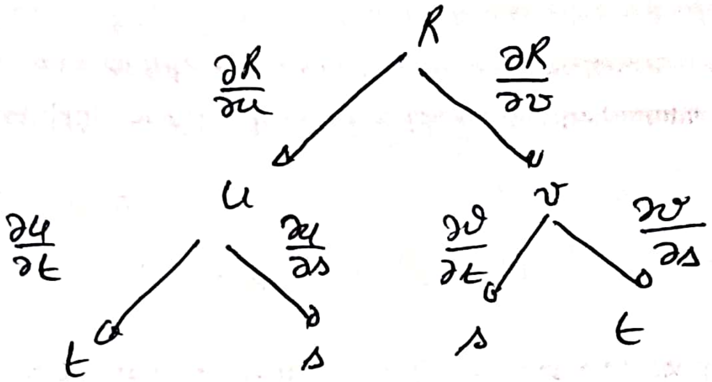
$$R(s,t) = G\big(u(s,t),\, v(s,t)\big) \;;\quad G, u, v \in \mathcal{C}^1$$

$u(1,2) = 5 \qquad \partial_s u(1,2) = 4 \qquad \partial_s v(1,2) = 2$

$v(1,2) = 7 \qquad \partial_t u(1,2) = -3 \qquad \partial_t v(1,2) = 6$

$\partial_u G(5,7) = 9.$

$\partial_v G(5,7) = -2.$



$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial R}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial R}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial R}{\partial t}(1,2) = \frac{\partial R}{\partial u}\big(u(1,2), v(1,2)\big) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(1,2) + \frac{\partial R}{\partial v}\big(u(1,2), v(1,2)\big) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(1,2)$$

$$= \frac{\partial R}{\partial u}(5,7) \cdot \frac{\partial u}{\partial t}(1,2) + \frac{\partial R}{\partial v}(5,7) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}(1,2)$$

$$= 9 \times (-3) + (-2) \times 6 = -27 - 12 = -39.$$

de même :

$$\frac{\partial R}{\partial s}(1,2) = \frac{\partial R}{\partial u}(5,7) \cdot \frac{\partial u}{\partial s}(1,2) + \frac{\partial R}{\partial v}(5,7) \cdot \frac{\partial v}{\partial s}(1,2)$$

$$= 9 \times 4 + (-2) \times 2 = 36 - 4 = 32.$$

Derivation implicite (th des fcts implicite)

Soit donnée L'équation
$$F(x,y)=0 \quad \text{sur } \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2.$$

· on suppose qu'on peut definir y implicitement en fonction de x : ie $y=\varphi(x)$; avec $x \in I \subset \mathbb{R}$ tel que $(x,y) \in \mathcal{U}$

· si $F \in \mathcal{C}^1$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1$

sur le chemin $(x, \varphi(x))$: L'equation $F(x,y)=0$; s'ecrit :
$$F(x,\varphi(x))=0$$
la regle de derivation en chaine donne :
$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

avec $\frac{dx}{dx}=1$, $\frac{dy}{dx}=f'(x)$.

ainsi pour une certain $(x_0, \varphi(x_0))$ pour lequel
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,\varphi(x_0)) \neq 0 \text{ ; il vient ;}$$
$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}(x_0) = - \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}(x_0, \varphi(x_0)).$$

cette technique de travail se base sur un théorème essentielle en analyse (Calcul Differentiel sur les espace de Banach).

Théorème des fonctions implicite.

Soit $F : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$; une fonction à deux variables $F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$; soit $a \in \mathcal{U}$ ou $\frac{\partial F}{\partial x}(a) \neq 0$. alors :

- Il existe des intervalles ouverts non vides I et J de centre respectifs α et β. avec $a=(\alpha,\beta)$ tels que : $K = I \times J \subset \mathcal{U}$ et satisfaisant à La condition suivante :

Il existe une fonction φ de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et à valeur dans J telle que:

$$\forall (x,y) \in K : F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

et de plus

$$\varphi'(\alpha) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a)}.$$

ie: La courbe d'équation $F(x,y) = 0$ possède au voisinage de a, une representation cartésienne $y = \varphi(x)$ de classe $\mathcal{C}^k$

→ Remarque

- si $\frac{\partial F}{\partial x}(a) \neq 0$: on peut aussi deduit l'existance de deux intervale : J, I ; J centré en β, I centré en α tel que $J \times I \subset \mathcal{U}$, et d'une fct $\psi : J \to I$. avec $\psi(\beta) = \alpha$.

tel que : $\forall (x,y) \in J \times I$: $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = \psi(y)$

et : $$\psi'(\beta) = - \frac{\partial F/\partial y\,(a)}{\partial F/\partial x\,(a)}.$$

- le resultat peut se généraliser facilement au cas de trois variables :

$$F(x,y,z) = 0 \quad ; F \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}) ; \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3.$$

et soit $a \in \mathcal{U}$; $a = (\alpha, \beta, \gamma)$; $F(a) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a) \neq 0$

alors il existe une disque de centre (α, β) noté D. $D \subset \mathbb{R}^2$; et un intervale K de $\mathbb{R}$ centré en γ

et une fonction φ à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$:

telle que $\forall (x,y,z) \in D \times J \subset \mathcal{U}$:

$$F(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow z = \varphi(x,y).$$

ie : $F(x, y, \varphi(x,y)) = 0$

une derivation en chaine donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}\,\frac{dx}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dy} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dy} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

avec $\frac{dx}{dx} = 1$ $\frac{dx}{dy} = 0$

$\frac{dy}{dy} = 1$ $\frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$

il vient :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\alpha,\beta) = - \frac{\partial F/\partial x\,(a)}{\partial F/\partial z\,(a)}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(\alpha,\beta) = - \frac{\partial F/\partial y\,(a)}{\partial F/\partial z\,(a)}.$$

→ Complément.

_ Derivée Directionnelle

de ce qui précède : on a remarqué que $\partial_x f$ et $\partial_y f$ nous informe sur le Taux de variation de f Lorsque on se deplace sur le graphe de f ; suivant les axes (xox'), (yoy') respectivent.

Comme généralisation de cette procédure, on deduit que le Taux de variations de f Lorsqu'on se deplace sur le graphe de f, suivant une direction bien determiner est tout simplement donné par la derivation de la fonct partielle definie dans cette direction.

Ainsi soit $\vec{v}$ un vecteur. (supposant $\|\vec{v}\| = 1$, pour avoir de plus belle formule)

Def

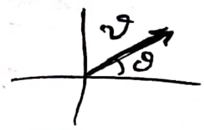
On appelle dérivée directionnelle de f suivant $\vec{v}$ en a le reel noté $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}$ definie par :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \frac{d}{dt}\left(f(a+t\vec{v})\right)\Big]_{t=0}.$$

ainsi : d'après la derivation en chaine :

sachant que : $\vec{v}\,(\cos\theta, \sin\theta)$ car $\|\vec{v}\| = 1$. , θ fixé la direct.



$$f(a+t\vec{v}) = f(x_a + t\cos\theta, y_a + t\sin\theta).$$

$$\frac{df}{dt}(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (\cos\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (\sin\theta)$$

il vient alors.

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \cdot \vec{v}.}$$

Question dans quelle direction le taux de variations de f est Maximal.

Soit $\vec{v}$ une Direction

on a : $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a) = \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \cdot \vec{v}$

$$= \|\overrightarrow{\text{grad}} f(a)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\big(\underbrace{\widehat{\overrightarrow{\text{grad}} f(a), \vec{v}}}_{h}\big)$$

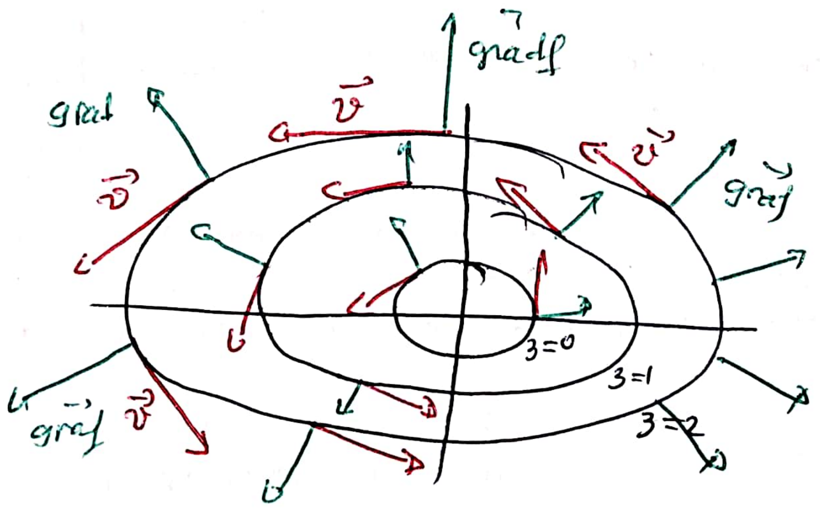
$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a)\right| = \|\overrightarrow{\text{grad}} f(a)\| \cdot |\cos(h)|$$

$$\leq \|\overrightarrow{\text{grad}} f(a)\|.$$

ainsi le Taux de variation Maximal de f est dans la direction de $\overrightarrow{grad} f$ ou inversement :

ie : $\vec{v}$ devra être colinéaire avec $\overrightarrow{grad} f$ pour avoir un Taux Maximal de variation en valeur absolue.

D'un autre côté : le Taux de variation est nul Lorsqu'on se deplace perpendiculairement à $\overrightarrow{grad} f$: (ie : Lorsqu'on se deplace sur les courbe de niveau ; car f ne varie pas).



— Fonctions harmoniques

Soit $f : U \to \mathbb{R}$; $f \in \mathcal{C}^2(U)$.

f est dite harmonique ssi : $\Delta f = 0$

ie : $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$