Intégrales itérées

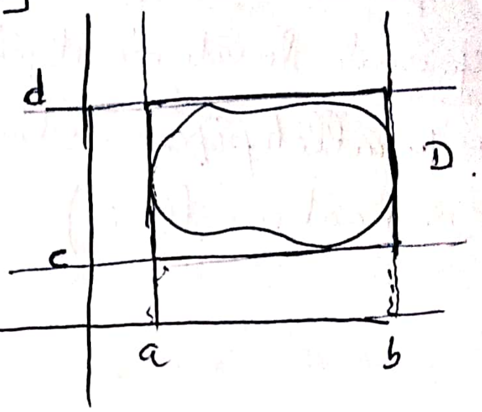
Intégrales Doubles

- Definition et Somme de Riemann

Soit f une fonction définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$; D un sous-ensemble borné de U. $(D \subset U)$. on suppose la frontière de D ; ∂D assez lisse, assez regulière, au moins par morceaux

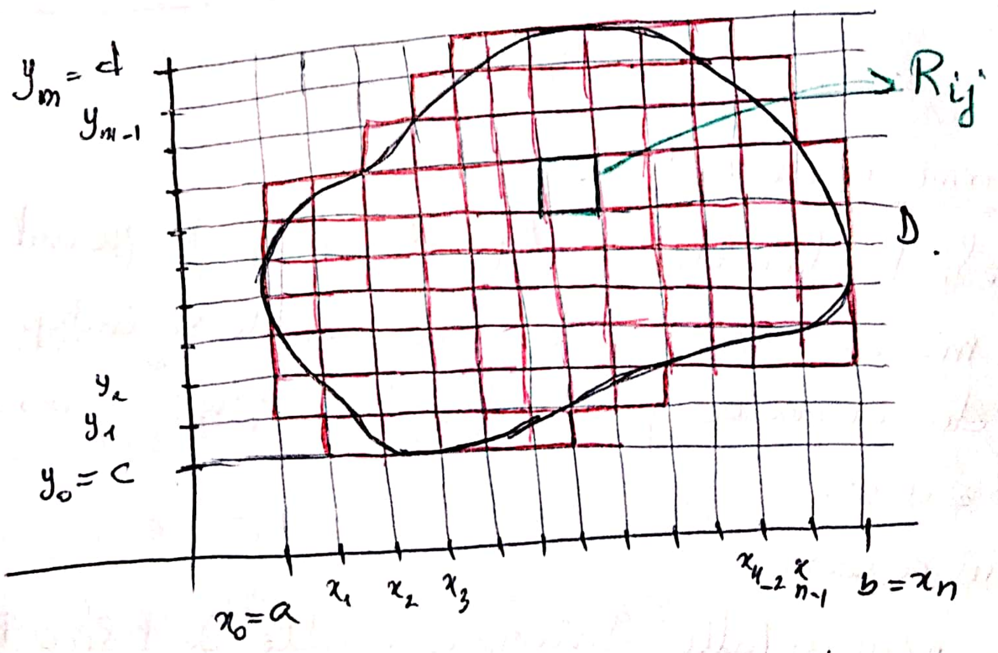
il existe alors des constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telles que :

$$D \subset [a,b] \times [c,d]$$



soit σ une subdivision de l'interval $[a,b]$ de pas δ : $\{x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$

et σ' une subdivision de l'interval $[c,d]$ de pas δ' : $\{y_0 = c, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m = d\}$.



On appelle subdivision de D ; l'ensemble des rectangles R_{ij} de coté $[x_i, x_{i+1}]$ et $[y_j, y_{j+1}]$ avec $0 \leq i \leq n-1$, $0 \leq j \leq m-1$ recontrant le domaine D. notée par $S_{\sigma,\sigma'}$

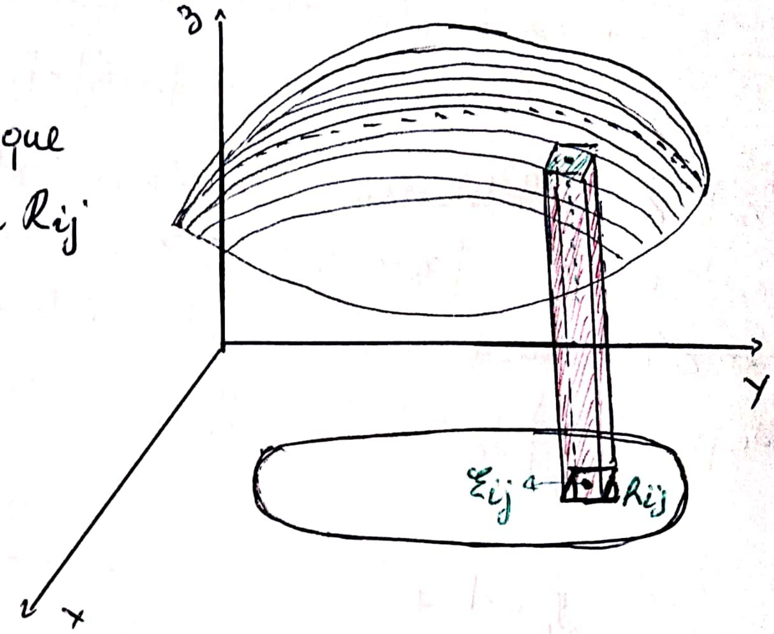
$$S_{\sigma,\sigma'} = \left\{ R_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] ;\ 0 \leq i \leq n-1,\ 0 \leq j \leq m-1 \quad R_{ij} \cap D \neq \emptyset \right\}$$

soit ξ_{ij} un point qcq de R_{ij}

On appelle Somme de Riemann de f associée à la Subdivision $S_{\sigma,\sigma'}$ et aux points $\{\xi_{ij}\}$ la Somme :

$$\mathcal{R}\left(f, \{\xi_{ij}\}, S_{\sigma,\sigma'}\right) = \sum_{\xi_{ij} \in R_{ij} \in S_{\sigma,\sigma'}} f(\xi_{ij}) . \delta . \delta'$$

chaque terme $f(\xi_{ij})\, \delta . \delta'$ représente le volume algébrique du parallélépipède de base R_{ij} et de hauteur $f(\xi_{ij})$



theoreme et definition

- Si la limite de $\mathcal{R}(f, (\xi_{ij}), S_{\sigma,\sigma'})$ quand $n \to +\infty$ et $m \to +\infty$ existe, alors cette limite st indépendantes du choix des points $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ et $\{y_j\}_{j=0}^{m}$ des Subdivisions σ et σ'.

Dans ce cas

- On appelle Intégrale double de f sur D cette limite qu'on note par $\iint_D f(x,y)\, dx dy$. et on a :

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta' \to 0}} \sum_{\xi_{ij} \in R_{ij} \in S_{\sigma,\sigma'}} f(\xi_{ij}) . \delta . \delta'$$

- On dit que f st intégrable sur D au sens de Riemann si l'intégrale $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ st finie

proposition :

Toute fonction f continue st intégrable selon Riemann sur un ensemble D, borné à frontière lisse (par morceaux)

Signification géométrique de l'intégrale double :

la quantité, lorsqu'elle existe, de $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ designe le volume algébrique compris entre le graphe de f et le plan (xoy) contenant D.

tandis que $\iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$ designe le volume pris en unité au cube de l'espace compris entre le graphe de f et le plan (xoy) contenant D.

remarque :

Si on considère la fonction constante $f(x,y) = 1$.

alors $\iint_D dx\,dy$ donne la valeur numérique de l'aire en unité au carré du Domaine D. (car dans ce cas le volume (unité^3) st égale à la hauteur $\times$ Aire de la base.

ie : $1 \times \text{Aire}(D) = \text{Aire}(D)\,(u^2 \times u) = \text{Air}(D).(\text{unité}^3)$.

Propriétés de l'intégrale Double

1- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\iint_D (\lambda f + \mu g)\,dx\,dy = \lambda . \iint_D f\,dx\,dy + \mu . \iint_D g\,dx\,dy$$

2- Si $D = D_1 \cup D_2$ avec $D_1 \cap D_2$ = un courbe ou un pt de D ou ϕ.

alors :
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3- $$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,dx\,dy$$

de plus si on note par $A(D)$ l'aire de D :
$$A(D) = \iint_D dx\,dy .$$

et sachant que f est continue sur D :

ie $$|f(x,y)| \leq \sup_D |f(x,y)|$$

alors il vient
$$\left| \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \sup_D |f(x,y)| \cdot A(D) .$$

4- Si f et g sont telles que $\forall (x,y) \in D$
$$f(x,y) \leq g(x,y)$$

alors :
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Calcul d'une intégrale Double

- Théorème de Fubini sur un rectangle

Soit f une fonction Continue et D un rectangle de la forme : $D = [a,b] \times [c,d]$ alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$

" La preuve de ce théorème se base essentiellement sur la definition de La Somme de Riemann pour une intégrale double et pour une intégrale triple. "

Corollaire Si la fonction f est définie par :

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad ; \text{ où } f_1 \text{ et } f_2$$

sont des fonct's à une variable Continue sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement, alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx\,dy$$

$$= \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right)$$

exemple

$$\iint_{[0,1]\times[0,\pi/2]} x \cos y\,dx\,dy = \int_0^1 x\,dx \times \int_0^{\pi/2} \cos y\,dy$$

$$= \frac{1}{2}x^2\Big]_0^1 \times \sin y\Big]_0^{\pi/2} = 1/2 .$$

- $$\iint_{[-1,+1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\left[\int_0^1 x^2y-1\,dy\right]dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}x^2y^2 - y\Big]_0^1 \,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1}\left(\frac{1}{2}x^2-1\right)dx = \frac{1}{6}x^3 - x\Big]_{-1}^{+1} = -\frac{5}{3}$$

ou encore :

$$\iint_{[-1,+1]\times[0,1]} (x^2y-1)\,dx\,dy = \iint_{[-1,+1]\times[0,1]} x^2y\,dx\,dy - \underbrace{\iint_{[-1,+1]\times[0,1]} dx\,dy}_{\text{aire du rectangle } [-1,+1]\times[0,1] = 2\times1=2}$$

$$= \int_{-1}^{+1} x^2\,dx \cdot \int_0^1 y\,dy - 2$$

$$= \frac{1}{3}x^3\Big]_{-1}^{+1} \times \frac{1}{2}y^2\Big]_0^1 - 2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{2} - 2 = -5/3$$

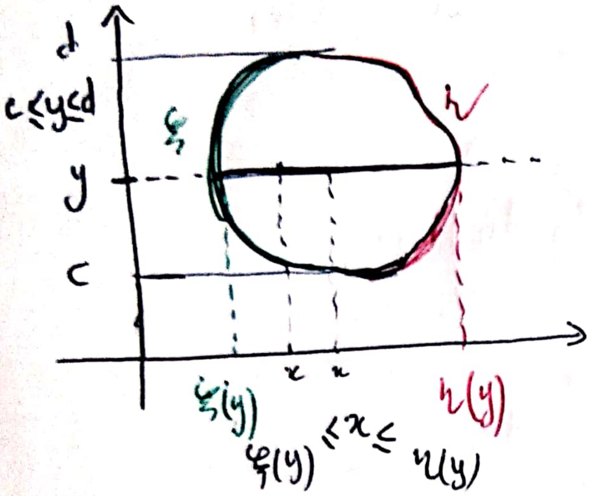
théorème de Fubini (cas d'un domaine borné)

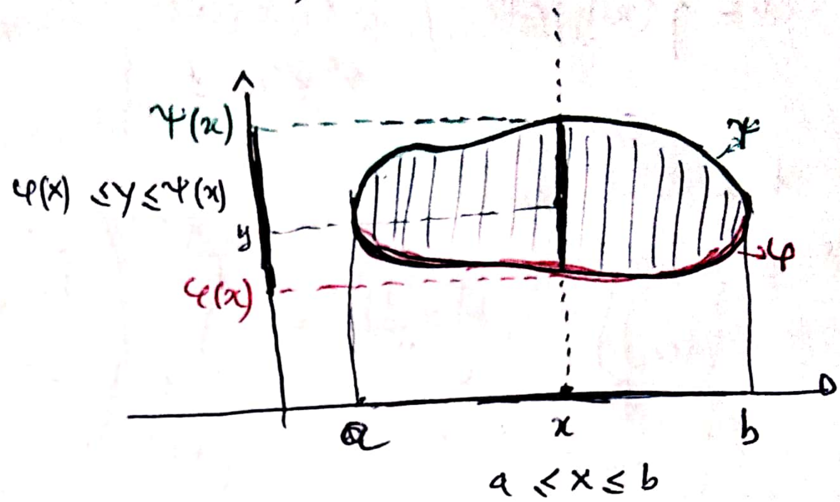
__Lemme :__ Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné (de frontière lisse) alors : il existe deux constantes $a, b \in \mathbb{R}$; deux fonction φ et ψ définies sur $[a,b]$ et continue ; telles que :

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ a \leq x \leq b \ \text{ et } \ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

de même, qu'il existe deux constantes $c, d \in \mathbb{R}$ et deux fonction ξ, η definies et continues sur $[c,d]$, telles que

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ c \leq y \leq d \text{ et } \xi(y) \leq x \leq \eta(x) \right\}.$$





le Domaine D est alors dit quarrable.

théorème de Fubini

Soit f une fonction continue et D un domaine borné : alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) \cdot dx$$

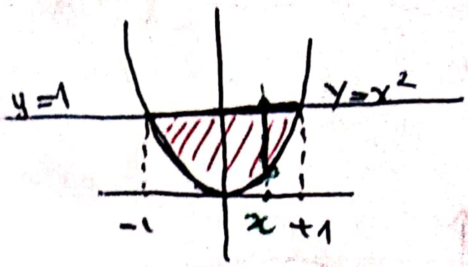
ou encore :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{\xi(y)}^{\eta(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Exemple :

- Soit D la partie du plan (xoy) délimitée par l'arc de parabole $y=x^2$ et la droite $y=1$

. on peut décrire D comme suit



$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;/\; \begin{array}{l} -1\leq x\leq +1 \\ x^2\leq y\leq 1 \end{array}\right\}$$

par conséquent :

$$\iint_D x^2y\,dx\,dy = \int_{-1}^{+1}\left(\int_{x^2}^{1} x^2y\,dy\right)dx$$

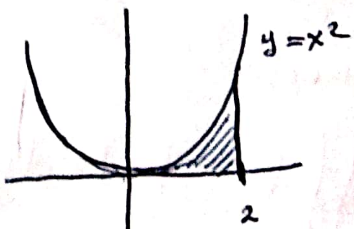
$$= \int_{-1}^{+1} \tfrac{1}{2}x^2y^2\Big]_{x^2}^{1}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x^4\,dx$$

$$= \tfrac{1}{6}x^3-\tfrac{1}{10}x^5\Big]_{-1}^{+1} = \frac{2}{15}$$

- Calcule de $\iint_D x\cos y\,dx\,dy$ où D est le domaine délimité par les courbe $y=0$, $y=x^2$ et $x=2$

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\; \begin{array}{l} 0\leq x\leq 2 \\ 0\leq y\leq x^2 \end{array}\right\}$$



$$\iint_D x\cos y\,dx\,dy = \int_0^2\left[\int_0^{x^2} x\cos y\,dy\right]dx$$

$$= \int_0^2 x\sin y\Big]_0^{x^2}\,dx = \int_0^2 x\sin x^2\,dx = -\tfrac{1}{2}\cos x^2\Big]_0^2$$

$$= -\tfrac{1}{2}\cos 4+\tfrac{1}{2}.$$

Scanné avec CamScanner

Changement de variable

Definition une application h definie d'un domaine $\tilde{D}$ vers un domaine D de $\mathbb{R}^2$ st dite changement de variable si h st un difféomorphisme de $\tilde{D}$ ds D

ie : h st bijective de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\tilde{D}$ et

h^{-1} st de classe $\mathcal{C}^1$ sur D :

$$h : \tilde{D} \longrightarrow D$$
$$(u,v) \longmapsto h(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix} ; \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

theorie du chang de variable :

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctions à deux variables (x,y) et $h : \tilde{D} \longrightarrow D$ un changement de variable dans $\mathbb{R}^2$

$h(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$ alors :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot \left|\det J_h(u,v)\right| du\,dv$$

$$= \iint_{\tilde{D}} (f \circ h)(u,v) \cdot \left|\det J_h(u,v)\right| \cdot du\,dv.$$

où $\tilde{D} = \{(u,v) ; h(u,v) \in D\}$ et

$J_h(u,v)$ appellée Jacobienne de h : $J_h(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$

ainsi $\det J_h(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$.

"appelle : Jacobien de h"

exemple de chang de variable :

Changement de variable polaire :

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$; $J_{(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$.

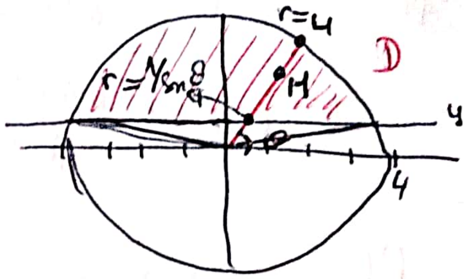
ainsi $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

Exemples.

- Calcule de l'integrale $\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy$

où $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2<4 \text{ et } y>1\}$

posons : $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$.



$x^2+y^2<4 \Leftrightarrow 0\leq r<4$.

$y>1$; donc $y>0 \Rightarrow \sin\theta>0$
$\Rightarrow \theta\in[0,\pi]$

$y>1 \Leftrightarrow r\sin\theta>1$ avec $\sin\theta>0$ donc $r>\frac{1}{\sin\theta}$.

remarquons que $r=4$ est l'équation polaire du cercle $x^2+y^2=4$

et $r=\frac{1}{\sin\theta}$ est l'équation polaire de la droite $y=1$.

graphiquement, on peut deduire que un point M du domaine D ayant un argument θ (i.e.) est à une distance de l'origine superieure ~~au point de la droite~~ à celle de un point de la droite intersection de $\vec{OM}$ avec $(y=1)$ ie superieure à $\frac{1}{\sin\theta}$

et inferieure à celle d'un pt du cercle intersection de (OM) avec (11)
le cercle $(x^2+y^2=4)$; ie à 4.

ie : si on choisie un point M de D ;

notons $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$.

notons par A le pt : $(OM) \cap (y=1)$ et B le pt : $(OM) \cap \mathcal{C}(0,4)$

alors :

$$OA \leq OM < OB$$

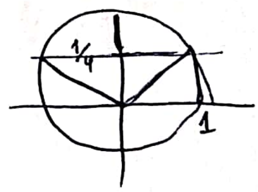
$OA = \frac{1}{\sin\theta}$; car A appartient à $(y=1)$

$OB = 4$; car B appartient à $\mathcal{C}(0,4)$

ainsi il vient $\frac{1}{\sin\theta} < r < 4$.

cependant on doit trouver l'intervalle de θ pour lequel

$\frac{1}{\sin\theta} < 4$.



$\frac{1}{\sin\theta} < 4 \Leftrightarrow \sin\theta > 1/4$. avec $\theta \in [0,\pi]$.

posons $\theta_0 \in [0, \pi/2]$; $\sin\theta_0 = 1/4$.

$\sin\theta > 1/4 \Rightarrow \theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ avec $\sin\theta_0 = 1/4$.

ainsi D est exprimée en polaire par :

$$\theta_0 \leq \theta \leq \pi - \theta_0$$

$$1/\sin\theta \leq r < 4.$$

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \int_{1/\sin\theta}^{4} \frac{\cancel{r^2}\sin^2\theta}{\cancel{r^2}} \cdot r\,dr\,d\theta.$$

$$= \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \left(\sin^2\theta \int_{1/\sin\theta}^{4} r\,dr \right) d\theta.$$

$$= \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sin^2\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 \Big]_{1/\sin\theta}^{4} d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sin^2\theta \left(16 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) d\theta$$

$$= 8\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \sin^2\theta \, d\theta - \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} d\theta$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

$$\iint_D \frac{y^2}{x^2+y^2}\, dx\, dy = 4\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} (1-\cos 2\theta)\, d\theta - \frac{1}{2}(\pi - 2\theta_0)$$

$$= 4(\pi - 2\theta_0) - 4\int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \cos 2\theta \, d\theta - \frac{1}{2}(\pi - 2\theta_0)$$

$$= \frac{7}{2}(\pi - 2\theta_0) - 2 \sin 2\theta \Big]_{\theta_0}^{\pi-\theta_0}$$

$$= \frac{7}{2}(\pi - 2\theta_0) - 2\left(\sin(2\pi - 2\theta_0) - \sin 2\theta_0\right)$$

$$= \frac{7}{2}(\pi - 2\theta_0) + 4 \sin 2\theta_0 .$$

Intégrales tiple

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un ensemble borné avec frontière $\partial\Omega$ assez régulière (lisse) au moins par morceaux

$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à trois variable.

De même que pour l'intégrale double, on définit l'intégrale tiple de f sur Ω grâce au somme de Riemann comme suite.

le domaine Ω étant borné donc $\exists a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tels que $\Omega \subset [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$.

On considerant les subdivision $\sigma, \sigma', \sigma''$ des intervales $[a,b], [c,d], [e,f]$ respectivement (13)

σ : sub de $[a,b]$ de pas δ ; $\{x_0 = a, \dots, x_n = b\}$.

σ' : sub de $[c,d]$ de pas δ' ; $\{y_0 = c, \dots, y_m = d\}$

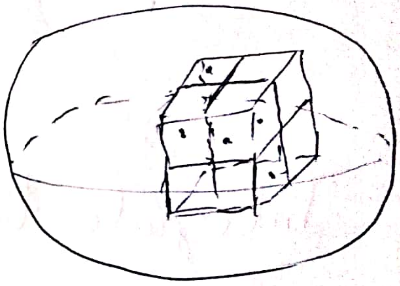
σ'' : sub de $[e,f]$ de pas δ'' : $\{z_0 = e, \dots, z_p = f\}$.

~~et soit~~, on definit alors une subdivision de Ω

Comme étant $$S_{\sigma,\sigma',\sigma''} = \Big\{ C_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$
avec $0 \leq i \leq n-1$
$0 \leq j \leq m-1$
$0 \leq k \leq p-1$,
telque : $C_{ijk} \cap \Omega \neq \emptyset \Big\}$.

Soit ξ_{ijk} un point qcq de C_{ijk}.

on defint la somme de Riemann de f associée à la subdivision $S_{\sigma,\sigma',\sigma''}$ Comme étant :



$$\mathcal{R}(f, \{\xi_{ijk}\}, S_{\sigma,\sigma',\sigma''}) = \sum_{\xi_{ijk} \in C_{ijk} \in S_{\sigma,\sigma',\sigma''}} f(\xi_{ijk}) \cdot \delta \cdot \delta' \cdot \delta''$$

On defint alors l'intégrale triple de f sur Ω Comme étant la limite (si elle existe) de $\mathcal{R}(f, \{\xi_{ijk}\}, S_{\sigma,\sigma',\sigma''})$

qd $n, m, p \longrightarrow +\infty$.

et on note cette limite par $\iiint_\Omega f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$.

la fonction f est dite intégrable sur Ω si ~~est~~ son integrale $\iiint_\Omega f$ est finie.

proposition

Toute fonct f continue st intégrable au sens de Riemann (au moins continue par morceaux).

propriété

- $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $\iiint_\Omega (\lambda f + \mu g)\, dx\,dy\,dz = \lambda \iiint_\Omega f + \mu \iiint_\Omega g$

- Si $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ avec $\Omega_1 \cap \Omega_2 =$ Surface, courbe ou un pt ou $\emptyset$, alors

$$\iiint_{\Omega} f = \iiint_{\Omega_1} f + \iiint_{\Omega_2} f$$

Calcule d'une intégrale triple :

- Sur un parallélépipède.

$$\Omega = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$$

$$\iiint_\Omega f = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f\, dz \right) dy \right) dx .$$

ou : $\int_c^d \int_e^f \int_a^b f\, dx) \, dy) \, dz$

- Si Ω peut s'écrire sous une forme :

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; a \le x \le b,\; \varphi(x) \le y \le \psi(x),\; \xi(x,y) \le z \le \eta(x,y) \right\}.$$

$$\iiint_\Omega f = \int_a^b \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \int_{\xi(x,y)}^{\eta(x,y)} f\, dz) \, dy) \, dx .$$

- Si Ω peut se mettre : $\left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \; (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,\; \xi(x,y) \le z \le \eta(x,y) \right\}$

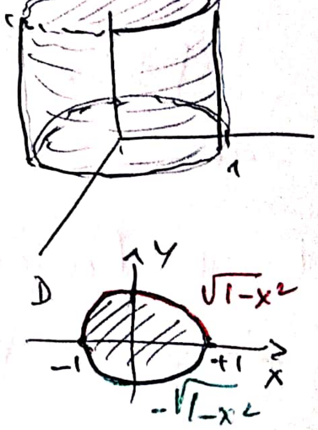
$$\iiint_\Omega f = \iint_D \left(\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f \, dz \right) dx\,dy .$$

on peut de ces trois cas intervertir entre x, y, et z.

Exemples : • Calculer $\displaystyle\iiint_\Omega (1-2yz)\, dx\, dy\, dz$.

où Ω est le cylindre plein de hauteur 3 et de base le disque $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2+y^2 \leq 1 ;\ z=0\}$.

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2 \leq 1}_{D} \text{ et } 0 \leq z \leq 3\}.$$



$x^2+y^2 \leq 1 \iff y^2 \leq 1-x^2$.

avec $x^2 \leq 1 \iff |x| \leq 1$.

ainsi $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} -1 \leq x \leq +1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 0 \leq z \leq 3 \end{array} \right\}.$$

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{+1} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} \left(\int_0^3 (1-2yz)\, dz \right) dy \right) dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left. z - yz^2 \right]_0^3 dy \Big)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 3 - 9y \quad dy \Big)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \left. 3y - \frac{9}{2} y^2 \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} dx = \int_{-1}^{+1} \left[3\sqrt{1-x^2} - \frac{9}{2}(1-x^2) \right] - \left[-3\sqrt{1-x^2} - \frac{9}{2}(1-x^2) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} 6\sqrt{1-x^2}\, dx \underset{x=\sin t}{=\!=} 6 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t\, dt = 3 \left(1 - \cos 2t \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3\pi .$$

Sinon on pourra dire

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\quad x^2+y^2\leq 1 \text{ et } 0\leq z\leq 3\}.$$

$$\iiint_\Omega (1-2yz)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_0^3 1-2yz\,dz\right)dx\,dy$$

$$= \iint_D \left[z - yz^2\right]_0^3 dx\,dy$$

$$= \iint_D 3-9y\,dx\,dy.$$

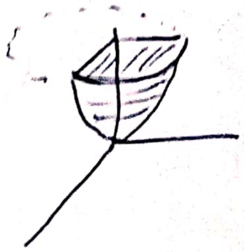
$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 (3-9r\sin\theta).\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{+\pi}\int_0^1 3r\,dr\,d\theta - 9\underbrace{\int_{-\pi}^{+\pi}\sin\theta\,d\theta}_{=0}.\int_0^1 r^2 dr$$

$$= 3(2\pi).\frac{1}{2} = 3\pi.$$

- $\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz$; $\quad \Omega : \begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \\ x^2+y^2\leq z\leq 1. \end{cases}$



$\Omega : \begin{cases} 0\leq x^2+y^2\leq 1 \\ x^2+y^2\leq z\leq 1. \end{cases}$

$$\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz = \iint_{x^2+y^2\leq 1}\left(\int_{x^2+y^2}^1 y\,dz\right)dx\,dy$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 1} y.(1-x^2-y^2)\,dx\,dy \underset{y=r\sin\theta.}{\overset{x=r\cos\theta}{=\!=\!=}} \int_0^{\pi/2}\int_0^1 r\sin\theta.(1-r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

$x,y\geq 0$; $\theta\in[0,\pi/2]$

$$= \int_0^{\pi/2}\sin\theta\,d\theta.\int_0^1 r^2 dr - \int_0^{\pi/2} d\theta.\int_0^1 r^4 dr$$

$$= 1.\,1/3 - \pi/2.\,1/5.$$

Changement de variable :

On considère une application

$$h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

vérifiant h bijective, $h, h^{-1} \in \mathcal{C}^1$ (h difféomorphisme)

en posant $\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases}$; $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(u,v,w) \longmapsto (x,y,z)$.

Thme Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ et h un changement de variable ; alors :

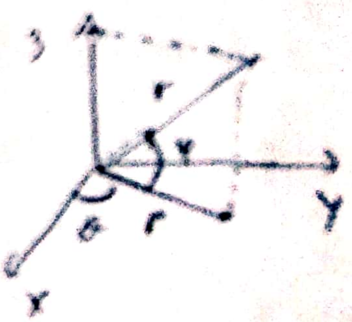
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\tilde{\Omega}} (f \circ h)(u,v,w) \cdot \left| \det J_h(u,v,w) \right| du\, dv\, dw$$

où $\tilde{\Omega} = \{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 ; \ h(u,v,w) \in \Omega \}$.

$$J_h = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}$$. La Jacobienne.

Changement de variable élémentaire ds $\mathbb{R}^3$:

– Coordonnées sphériques



$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = r \sin\varphi \end{cases}$ avec $\rho = r\cos\varphi$

ainsi $\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$

$r \geq 0$

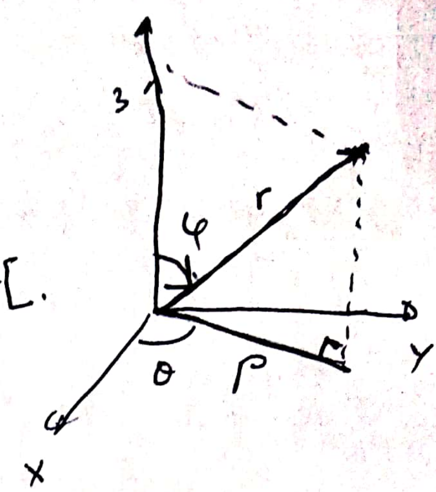
$\theta \in [0, 2\pi[$ ou $[-\pi, +\pi]$

$\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

dans ce cas

$$|\det J_h| = r^2 . \cos\varphi .$$

ou encore : sous la forme :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta\sin\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$\rho = r\sin\varphi$

$r \geq 0$

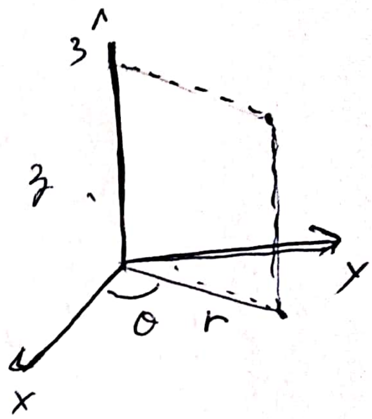
$\theta \in [0, 2\pi[$ ou $[-\pi, +\pi[$.

$\varphi \in [0, \pi]$

ds ce cas

$$|\det J_h| = r^2\sin\varphi .$$

- Coordonnées cylindrique



$x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z . \end{cases}$$

les nouvelles variables sont (r, θ, z)

$r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in \mathbb{R}$.

$$|\det J_h| = r .$$

qu'on n'oublie pas : Ω un solide de $\mathbb{R}^3$, borné.

le volume de Ω est donné par : $V(\Omega) = \iiint_\Omega dx\,dy\,dz$.

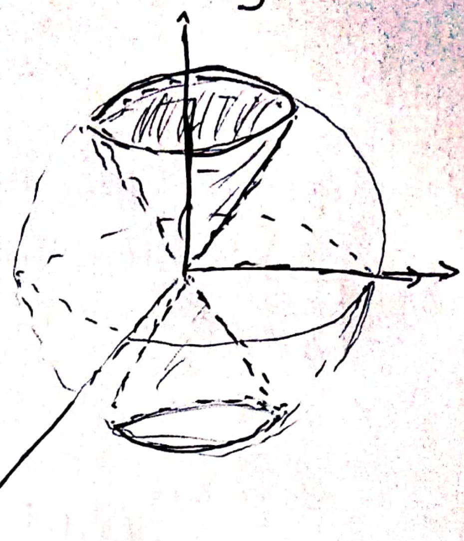
- Exemple

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,dx\,dy\,dz ;$$

$$\Omega : \begin{array}{l} x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x^2+y^2 \leq z^2 . \end{array}$$

on pose :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \cdot \cos\varphi \\ y = r\sin\theta \cdot \cos\varphi \\ z = r\sin\varphi \end{cases} \qquad r \geq 0 \;,\; \theta \in [-\pi, +\pi] \;,\; \varphi \in [-\pi/2, \pi/2] .$$



$x^2+y^2+z^2 \leq 12 \iff r^2 \leq 12 .$

donc $0 \leq r \leq \sqrt{12}$.

$x^2+y^2 \leq z^2 \iff r^2\cos^2\varphi \leq r^2\sin^2\varphi$

$\cos^2\varphi \leq \sin^2\varphi$

$\cancel{\iff (\cos\varphi - \sin\varphi)(\cos\varphi + \sin\varphi)} \leq 0 .$

$\cos^2\varphi \leq \sin^2\varphi \iff \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \leq 0$

$\iff \cos 2\varphi \leq 0 .$

$-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

$-\pi \leq 2\varphi \leq +\pi .$

$\Rightarrow -\pi \leq 2\varphi \leq -\pi/2 \Rightarrow -\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/4$

ou $\pi/2 \leq 2\varphi \leq \pi \Rightarrow \pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2$

$\Omega :$ $0 \leq r \leq \sqrt{12}$

$-\pi \leq \theta < \pi$

$-\pi/2 \leq \varphi \leq -\pi/4$ ou $\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/2 .$ $\; |\det J_h| = r^2\cos\varphi$

$$\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)^{3/2} \, dx\, dy\, d\theta .$$

$$= \int_0^{\sqrt{12}} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} r^5 \cdot \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$+ \int_0^{\sqrt{12}} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^5 \cdot \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta \, dr$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{12}} r^5 dr \cdot \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\varphi \, d\varphi + 2\pi \int_0^{\sqrt{12}} r^5 dr \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\varphi \, d\varphi .$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{6}(12)^3 \cdot \left[-1/\sqrt{2} + 1\right] + \frac{2\pi}{6}(12)^3 \cdot \left[1 - 1/\sqrt{2}\right] = \frac{2\pi}{3} \cdot (12)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Scanné avec CamScanner