Extremum d'une fonction à deux variables :

Def

Une fonction f definie sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ presente en un point $a \in \mathcal{U}$

- Un Maximum (global) si $\forall u \in \mathcal{U}$; $f(u) \leq f(a)$
- Un Minimum (global) si $\forall u \in \mathcal{U}$ $f(u) \geq f(a)$

le pt a st dit extremum global de f.

Def :

Une fonction f definie sur une partie $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ presente en a

- Un Maximum Local s'il existe un réel $r > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathcal{U} ; \ \|u - a\| \leq r \Rightarrow f(u) \leq f(a)$$

- Un Minimum Local s'il existe un réel $r > 0$

$$\forall u \in \mathcal{U} ; \ \|u - a\| \leq r \Rightarrow f(u) \geq f(a).$$

On dit alors que a st un extremum Locale de f.

Proposition Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, si f presente un extremum local en $a \in \mathcal{U}$, alors $\overrightarrow{grad}(f)(a) = 0$

→ a étant un extremum Local (on peut supposer que a st un Maximum Local) ansi a st un Maximum dans toutes les direction possible., en particulièr. sur la direction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$. le ~~a~~ x_a presente un ~~loca~~ ~~M~~maximum local de f_{y_a} et y_a presente un Maximum local de f_{x_a}

f_{x_a} et f_{y_a} étant les fonctions partielles de f en a.

ainsi, du cours de 1re année on deduit que.

$$f'_{y_a}(x_a) = 0 \quad \text{et} \quad f'_{x_a}(y_a) = 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

$$\text{ie} \quad \overrightarrow{\text{grad}}\, f(a) = 0.$$

→ Remarque:

~~pour~~ $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$, un point de $\mathcal{U}$ où le gradient s'annule st dit pt critique de f.

$$\text{Les pts critique} = \{u \in \mathcal{U};\ \overrightarrow{\text{grad}}\, f(u) = 0\}.$$

ainsi tout extremum st critique, cependant comme on le verra un pt critique peut ne pas être extremum.

Test pour la determination de ~~pt~~ la nature des pts critique:

On donne dans ce qui suit un test (~~[illegible]~~) assez simple pour la reconnaissance de la nature des pts critiques. Ce test repose sur un Developpement de Taylor d'une fonction à deux variables. (pour ceux qui désirent en lire plus ; je vous conseille : des livres sur ~~exposant la~~ le calcul Differentiel sur les espace de Banach)

Le test

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U})$; $a \in \mathcal{U}$. avec $\overrightarrow{\text{grad}}\, f = 0$.

posons : $$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)\right)^2$$

* D désigne le déterminant de la matrice.

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}$$

appellée : Hessienne de f en a.

<u>alors</u> :

- si $D > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$ $\left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) > 0 \right)$

  $\Rightarrow$ ~~au présent~~ <u>f présente un minimum local en a</u>

- si $D > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$ $\left(\text{ou } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) < 0 \right)$

  $\Rightarrow$ f présente un maximum local en a

- si $D < 0$ $\Rightarrow$ a n'est ni un minimum, ni un maximum local.

  a joue le rôle d'un pt selle.

$\longrightarrow$ si $D = 0$ le pt a est un pt de dégénérescence.

" à ne travailler pas devant lui "
sauvez-vous

<u>Exemples</u> • $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$.

$$\partial_x f = 4x^3 - 4y$$

$$\partial_y f = 4y^3 - 4x$$

$$\vec{\text{grad}} f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \\ \text{et} \\ y^3 = x \end{cases} \Rightarrow x^9 = x$$

$$\Rightarrow x^9 - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^8 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 1)(x^4 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = 0$$

$\Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=0$

ainsi : $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$

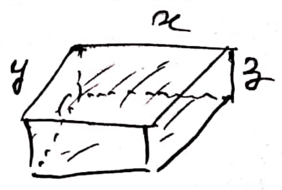
sont les pts critiques de f.

on a : $\partial_x f = 4x^3 - 4y \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4$

$\partial_y f = 4y^3 - 4x \rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4$.

operateur / pts	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$	$D = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2$	résultat
$(0,0)$	0	0	-4	$D=-16$	pt Selle
$(1,1)$	12	12	-4	$D=128$	Mini local
$(-1,-1)$	12	12	-4	$D=128$	Mini Local

- On veut fabriquer à partir de $12\,m^2$ de carton une boite de volume maximale ; trouver ce volume.



$V = xyz$;

$2xy + 2yz + 2xz = 12$.

$\Rightarrow z = \dfrac{12 - 2xy}{2y + 2x} = \dfrac{6 - xy}{x+y}$,

$V(x;y) = xy \cdot \dfrac{6 - xy}{x+y}$

$= \dfrac{6xy - x^2y^2}{x+y}$,

$\partial_x V = \dfrac{(6y - 2xy^2)(x+y) - 6xy + x^2y^2}{(x+y)^2}$

$= \dfrac{\cancel{6xy} + 6y^2 - 2x^2y^2 - 2xy^3 - \cancel{6xy} + x^2y^2}{(x+y)^2}$

53

d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{6y^2 - x^2y^2 - 2xy^3}{(x+y)^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{6x^2 - x^2y^2 - 2yx^3}{(x+y)^3}.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\left[6 - x^2 - 2xy\right] = 0 \\ x^2\left[6 - y^2 - 2xy\right] = 0. \end{cases}$$

les solutions $x = y = 0$ sont refusés.

d'où : $\begin{cases} 2xy = 6 - x^2 \\ 2xy = 6 - y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = y^2$ et donc $x = y$ car $y > 0, x > 0, z > 0$.

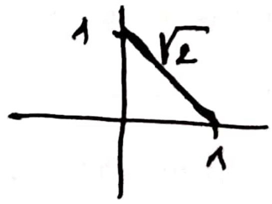
on trouve : $2x^2 = 6 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \sqrt{2} = y.$

et de plus $z = \dfrac{6 - xy}{x+y} = \sqrt{2}.$

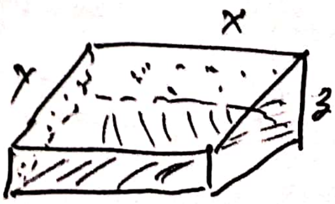
$(x, y, z) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}).$

comment un industriel pour construire une longueur de $\sqrt{2}$.



Exemple :

Une boite rectangulaire ouverte au dessus a un volume de $32 m^3$. Quelles doivent être ses dimension pour que sa surface totale soit minimum ?



Soit x, y, z les longueurs des arêts.

le volume $V = xyz = 32$

l'aire $S = xy + 2yz + 2xz$

il vient : $z = 32/xy$.

$$S = xy + \frac{64}{x} + \frac{64}{y}.$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} = 0 \qquad \Rightarrow x^2y = 64 \text{ et } xy^2 = 64.$$

$$\frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2} = 0$$

ainsi : $\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$:

$$x^3 = 64 \Rightarrow \boxed{x = y = 4} \text{ et } z = 2.$$

$$D = S''_{xx} \cdot S''_{yy} - (S''_{xy})^2 = \left(\frac{128}{x^3}\right) \times \left(\frac{128}{y^3}\right)_{x=y=4} - 1 > 0 \text{ avec}$$

$S''_{xx} = \frac{128}{4^3} > 0$; il s'ensuit que les dimensions cherchées

sont $x = 4$ unité, $y = 4$ unité, $z = 2$. unité.

~~Remarque~~ Dans ce qui précède, on cherche à optimiser une quantité f (un potentiel, une énergie, un taux!...) sont conditions supplémentaire ; sans contrainte supplémentaire on dit qu'on cherche un extremum libre.

Dans le cas contraire, si on veut optimiser un phénomène donné avec conditions ou sous-certaine conditions dites contraintes, on parle d'extremume liée ou extremum avec contraints.

Maximums et Minimum liées : (avec contraints)

Methode des Multiplicateurs de Lagrange

On cherche les extremum Locaux (relatifs) d'une fonction

$F : (x,y,z) \longmapsto F(x,y,z)$ Lorsque les variables x, y, z

sont liées par la contraine $g(x,y,z) = 0$.

On dit alors qu'on a des extremums liées.

Pour cela, on applique la Méthode du Multiplicateur de Lagrange. qui revient à determiner les extremums de La fonction auxilliaire G definie par :

$$(x,y,z) \xrightarrow{G} F(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

ou

$$(x,y,z) \xrightarrow{G} \lambda F(x,y,z) + g(x,y,z)$$

avec λ un paramètre réel,

en determinant en premier es pts critiques :

$$\vec{\text{grad}}\, G = 0 \ : \ \text{ie} \begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Conditions nécessaire pour L'obtention d'un pt critiques.

le paramètre λ independant de x, y, z s'appelle Multiplicateur de Lagrange.

~~Exemple~~ Pour une interprétation geométrique de cette Methode on renvoi au livre de James stewart page 934 $\longrightarrow$ p+o

Exemple :

trouver la plus petite distance de L'origine à l'hyperbole $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$; $z = 0$

ainsi nous devant Minimiser le Carré de la distance : $x^2 + y^2$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = F(x,y) \\ x^2 + 8xy + 7y^2 = 225 \quad . \quad g(x,y) = 225. \end{cases}$$

$$G = \lambda(x^2+y^2) + x^2 + 8xy + 7y^2 - 225.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G}{\partial x} = 2\lambda x + 2x + 8y = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} = 2\lambda y + 8x + 14y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} (\lambda+1)x + 4y = 0 \\ 4x + (\lambda+7)y = 0. \end{cases}$$

$(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 4 \\ 4 & \lambda+7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 1, -9.$$

1er cas : $\lambda = 1$: on aura : $x = -2y$ d'où en remplaçant ds $g(x,y) = 225$:

il vient : $-3y^2 = 225$ impossible.

2e cas $\lambda = 9$. il vient $y = 2x$ en remplaçant ds $g(x,y) = 225$

il vient : $45x^2 = 225$ donc $x^2 = 5$, $y = 20$

et donc $x^2 + y^2 = 25$.

la plus petite distance à l'origine est $\sqrt{25} = 5$.

Generalisation

cette Méthode peut se généraliser, si nous voulons determiner les extremums locaux d'une fonction

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto F(x_1, \dots, x_n)$$

Lorsque les variables sont liées par les Contraintes :

$$\phi_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \dots, \phi_k(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

nous formons la fonct auxilliaire :

$$G(x_1, \dots, x_n) = F + \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \dots + \lambda_k \phi_k.$$

assujettis aux Conditions

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0, \ \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

exemple

1°/ trouver les valeurs Max et Min de $x^2+y^2+z^2$ assujetties aux Conditions

$x^2/4 + y^2/5 + z^2/25 = 1$ et $z = x+y$.

posons $F = x^2+y^2+z^2$.

$$\phi_1 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \quad \text{—— (1)}$$

$$\phi_2 = x+y-z = 0. \quad \text{—— (2)}$$

en utilisant les multiplicateurs de Lagrange : λ_1, λ_2 et en considerant la fonct :

$$G = F + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 .$$

$$= x^2+y^2+z^2 + \lambda_1\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} - 1\right) + \lambda_2(x+y-z)$$

$$\left.\begin{aligned} \partial_x G &= 2x + \frac{\lambda_1 x}{2} + \lambda_2 = 0 \\ \partial_y G &= 2y + \frac{2\lambda_1 y}{5} + \lambda_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\partial_z G = 2z + \frac{2\lambda_1 z}{25} - \lambda_2 = 0.$$

il vient : $x = \dfrac{-2\lambda_2}{\lambda_1+4}$; $y = \dfrac{-5\lambda_2}{10+2\lambda_1}$

$$z = \frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1}$$

sachant $x+y-z=0$

$$\frac{-2\lambda_2}{\lambda_1+4} + \frac{-5\lambda_2}{10+2\lambda_1} - \frac{25\lambda_2}{50+2\lambda_1} = 0.$$

en derivisant pas $\lambda_2 \neq 0$ (car sinon $x=y=z=0$ imp).

il vient.

$$\frac{2}{\lambda_1+4} + \frac{5}{10+2\lambda_1} + \frac{25}{50+2\lambda_1} = 0.$$

$$17\lambda_1^2 + 245\lambda_1 + 750 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -10 \text{ ou } \lambda_1 = -75/17$$

pour $\lambda_1 = -10$.

$x = \frac{1}{3}\lambda_2$, $y = \frac{1}{2}\lambda_2$, $z = \frac{5}{6}\lambda_2$ en remplaçant ds la 1ère contrainte : nous trouvons $\lambda_2^2 = \frac{180}{19}$.

$$\lambda_2 = \pm 6\sqrt{5/19}$$

on a alors : deux pts :

$$\left(2\sqrt{5/19},\ 3\sqrt{5/19},\ 5\sqrt{5/19}\right)$$

$$\left(-2\sqrt{5/19},\ -3\sqrt{5/19},\ -5\sqrt{5/19}\right).$$

la valeur de $x^2+y^2+z^2$ y correspondant est 10.

2e : $\lambda_1 = -75/17$.

de même ~~de la 1ère contrainte~~ :

$x = 34/7\,\lambda_2$, $y = -17/4\,\lambda_2$, $z = 17/28\,\lambda_2$

ainsi $\phi_1 = 0$: $\lambda_2 = \pm 140/(17\sqrt{646})$ ce qui donne

les pts : $\left(40/\sqrt{646},\ -35/\sqrt{646},\ 5/\sqrt{646}\right)$

$\left(-40/\sqrt{646},\ 35/\sqrt{646},\ -5/\sqrt{646}\right)$

Ds ce cas la distance est : $\cancel{x^2}+y^2+z^2 = 75/17$.

donc 10 est la valeur Max et $75/17$ est la Valeur Min.

2°/

~~$f(x,y) = x^2 + 2y^2$.~~

~~$g(x,y) = 1 : x^2 + y^2 = 1$.~~

~~$G = f + \lambda g = x^2 + 2y^2 + \lambda x^2 + \lambda y^2 - \lambda$.~~

~~$\nabla G = 0 \left\{ \begin{array}{l} \partial_x G = 2x + 2\lambda x = 0 \\ \partial_y G = 4y + 2\lambda y = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 2(1+\lambda)x = 0 \\ 2(1+\lambda)y = 0. \end{array} \right.$~~

~~$\lambda = -1$~~

59