Chapitre 3

Les équations différentielles

9.1 Définitions et généralités:

Définition 9.1.1 On appelle équation différentielle ordinaire du $n^{ième}$ ordre, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, toute relation entre la variable $x \in I$, une fonction inconnue $y(x)$ et ses dérivées successive $y^{(k)}(x),\ k \in \{1, \dots, n\}$ de la forme

$$F(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) \quad \text{avec } x \in I \tag{1}$$

où F est une fonction à $n+2$ variables.
Dans le cas le plus simple, elle permet d'exprimer, pour tout x dans I, la valeur de $y^{(n)}(x)$ au moyen de $y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)$ et de la variable x, sous la forme dite normalisée

$$y^{(n)} = f(x, y, \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{pour tout } x \in I \tag{2}$$

où f est une fonction de $n+1$ variables.

Exemple 9.1.2
L'équation

$$y' = -2xy \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}.$$

est une équation différentielle, du premier ordre car elle ne fait intervenir que la dérivée première.
L'équation

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}\, y'' - 5x \qquad \text{sur} \;\;]1, +\infty[\,,$$

est une équation différentielle du second ordre.

Définition 9.1.3 On appelle solution (ou intégrale) de l'équation différentielle (1), toute

fonction
$$\varphi \in C^n(I;\mathbb{R}),$$
(une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$, n fois continûment dérivable) telle que, pour tout $x \in I$, on ait
$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Exemple 9.1.4 **1)** On vérifie aisément que la fonction $\varphi(x) = e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle
$$y' = 2y, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$
De plus on remarque que toute fonction de la forme
$$\varphi_c(x) = c\, e^{2x},$$
où c est une constante réelle quelconque, est solution de cette équation.
2) Les fonctions de la forme
$$y(x) = a\cos x + b\sin x, \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$
sont solutions de l'équation différentielle du second ordre
$$y'' + y = 0.$$

Remarque 9.1.5 Nous nous intéressons ici qu'aux équations du premier ordre et aux équations du deuxième ordre particulières dites linéaires.

9.2 Equations du premier ordre

Définition 9.2.1 Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme
$$F(x, y(x), y'(x)) = 0\,. \tag{9.2.1}$$

Définition 9.2.2 On appelle solution générale d'une équation différentielle du premier ordre, une fonction notée
$$y(x) = \varphi(x, c)$$
dépendante d'une constante arbitraires c, de classe C^1 et qui satisfait à l'équation (9.2.1).

Dans ce qui suit, on étudie quelques types d'équations du premier ordre.

9.2.1 Equations différentielles à variables séparées:

Définition 9.2.3 Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle s'écrit sous la forme:

$$u(y)dy = v(x)dx\,, \tag{9.2.2}$$

où u et v sont deux fonctions continues, et où $\frac{dy}{dx}$ désigne y'

Exemple 9.2.4 L'équation définie sur $I =]1, +\infty[$ par

$$x\,y'\ln x = (3\ln x + 1)y$$

est une équation à variables séparées car on peut "séparer les variables" x et y en divisant par $yx\ln x$, ce qui est possible si, et seulement si, $y \neq 0$, on trouve: Pour $(x, y) \in]1, +\infty[\times \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} xy'\ln x = (3\ln x + 1)y \quad &\Longleftrightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x} \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{y}dy = \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}dx \end{aligned}$$

<u>**Méthode de résolution:**</u> Pour résoudre une équation différentielle à variables séparées, il suffit d'intégrer les deux membres de l'équation (9.2.2) séparément.

$$\begin{aligned} u(y)dy = v(x)dx \quad &\Longleftrightarrow \int u(y)dy = \int v(x)dx \\ &\Longleftrightarrow U(y) = V(x) + c \text{ où } c \text{ est une constante réelle} \end{aligned}$$

et si possible écrire y en fonction de x.

Exemple 9.2.5
1) Résoudre sur $I =]1, +\infty[$ l'équation différentielle de l'exemple précédent:

$$x\,y'\ln x = (3\ln x + 1)\,y\,. \tag{9.2.3}$$

Après séparation des variables, on intègre les deux membres, on aura

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy = \int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}dx &\Longleftrightarrow \ln|y| + c_1 = 3\ln|x| + \ln|\ln x| + c_2 \\ &\Longleftrightarrow \ln|y| = 3\ln x + \ln(\ln x) + c_3 \\ &\Longleftrightarrow \ln|y| = \ln\left(x^3\ln x\right) + c_3 \quad c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle dans la dernière égalité, on aura comme solution finale

$$y = C\,x^3 \ln x \text{ avec } c \in \mathbb{R}^*,$$

où $C = \pm e^{c_3}$ qui tient compte des deux possibilités pour $|y|$.
De plus vue que la fonction identiquement nulle $y = 0$ est solution de l'équation (9.2.3), solution qui peut être retrouvée en considérant simplement C dans $\mathbb{R}$.
Il vient que la solution générale de l'équation (9.2.3) sur I est donnée par

$$y = C\,x^3 \ln x \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}.$$

2) Résoudre l'équation

$$y - \frac{y'}{2x} = 1 \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^*. \tag{9.2.4}$$

On a:

$$\begin{aligned} y - \tfrac{y'}{2x} = 1, \quad x \in \mathbb{R}^* \qquad & \Longleftrightarrow \; y - \frac{dy}{2xdx} = 1 \\ & \Longleftrightarrow \; \frac{dy}{y-1} = 2xdx \quad \text{avec} \quad y \neq 1 \end{aligned}$$

par intégration il vient que:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y-1} = \int 2xdx \qquad & \Longleftrightarrow \; \ln|y-1| = x^2 + K \quad \text{avec} \quad K \in \mathbb{R} \\ & \Longleftrightarrow \; |y-1| = e^{x^2} e^K \\ & \Longleftrightarrow \; y - 1 = c\,e^{x^2} \quad \text{avec} \quad c = \pm e^K \in \mathbb{R}^* \end{aligned}$$

Comme la fonction constante $y = 1$ est aussi solution de l'équation (9.2.4), la solution générale de cette équation est donnée par:

$$y(x) = c\,e^{x^2} + 1 \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}$$

9.2.2 Equations différentielles homogènes:

Définition 9.2.6 Une fonction $f(x, y)$ est dite homogène de degré n par rapport aux variables x et y si l'on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y).$$

Exemple 9.2.7

1. La fonction $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$ est homogène de degré 1, car

$$f(\lambda x,\lambda y)=\sqrt[3]{(\lambda x)^3+(\lambda y)^3}=\lambda\sqrt[3]{x^3+y^3}=\lambda f(x,y).$$

2. La fonction

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{xy}$$

   est homogène de degré 0, car

$$\frac{(\lambda x)^2-(\lambda y)^2}{(\lambda x)(\lambda y)}=\frac{x^2-y^2}{xy}$$

Définition 9.2.8 Une équation différentielle du premier ordre

$$y'=f(x,y) \tag{9.2.5}$$

est dite homogène si la fonction $f(x,y)$ est homogène de degré zéro.

Méthode de résolution:

On a par hypothèse $f(\lambda x,\lambda y)=f(x,y)$, posant dans cette identité $\lambda=\frac{1}{x}$, on obtient:

$$f(x,y)=f(1,\frac{y}{x}),$$

c-à-d qu'une fonction homogène de degré zéro dépend seulement du rapport $\frac{y}{x}$.

Pour résoudre une équation différentielle homogène, on utilise le changement de fonction inconnue suivant:

$$z(x)=\frac{y(x)}{x},$$

ce qui donne

$$y'=xz'+z.$$

En remplaçant dans l'équation (9.2.5) on obtient l'équation suivante:

$$xz'+z=f(1,z),$$

qui est une équation à variables séparées. En effet, cette équation s'écrit sous la forme

$$\frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

On résout cette équation par la méthode de résolution des équations à variables séparées, puis on revient à la fonction $y(x)$.

Exemple 9.2.9 Soit l'équation différentielle suivante.

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{xy}.$$

On a vu précédemment que la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy}$$

est homogène de degré zéro, alors cette équation est homogène. En posant $\lambda = \frac{1}{x}$, l'équation s'écrit:

$$y' = \frac{1 - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{y}{x}}.$$

On pose alors

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = xz' + z,$$

l'équation devient, après calcul

$$xz' + z = \frac{1 - z^2}{z}.$$

Cette équation est à variables séparées. En effet, elle s'écrit sous la forme:

$$\frac{z\,dz}{1 - 2z^2} = \frac{dx}{x}.$$

9.2.3 Equation se ramenant aux équations homogènes

Equations de la forme:

$$y' = \frac{ax + by + c}{a_1\,x + b_1\,y + c_1} \tag{9.2.6}$$

où (c, c_1) sont deux constantes réelles non toutes les deux nulles.

Remarque 9.2.10 Remarquons que si $c = c_1 = 0$, l'équation est homogene, car la fonction

$$f(x, y) = \frac{ax + by}{a_1\,x + b_1\,y}$$

est bien homogène de degré zéro.

Cherchons un changement de variable et de fonction du type

$$x = t + h \quad \text{et} \quad z = y + k, \;\; (h, k) \in \mathbb{R}^2, \tag{9.2.7}$$

de sorte que la fonction
$$g(t,z) = f(x,y)$$
devienne homogène de degré zéro. Le premier membre de l'équation (9.2.6) s'écrit:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dz}{dt},$$
et l'équation s'écrit alors:
$$\frac{dz}{dt} = \frac{at + bz + ah + bk + c}{a_1\, t + b_1 z + a_1\, h + b_1\, k + c_1}.$$
Cette équation est homogène si, et seulement si, h et k vérifient le système
$$\begin{cases} a\, h + b\, k + c &= 0 \\ a_1\, h + b_1\, k + c_1 &= 0. \end{cases} \tag{9.2.8}$$
Ce système admet une solution unique si, et seulement si, son déterminant
$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = ab_1 - ba_1 \tag{9.2.9}$$
est non nul.

Premier cas Si $\Delta \neq 0$. Dans ce cas, le système (9.2.8) admet une unique solution donnée par
$$h = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} -c & b \\ -c_1 & b_1 \end{vmatrix} = \frac{b\, c_1 - c\, b_1}{\Delta} \quad \text{et} \quad k = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a & -c \\ a_1 & -c_1 \end{vmatrix} = \frac{c\, a_1 - a\, c_1}{\Delta}. \tag{9.2.10}$$
Utilisant alors ce changement de variable l'équation (9.2.6) devient
$$z' = \frac{at + bz}{a_1\, t + b_1\, z} \tag{9.2.11}$$
qui est une équation homogène, car la fonction
$$g(t,z) = \frac{at + bz}{a_1\, t + b_1\, z}$$
est homogène de degré zéro. Utilisant la méthode de résolution des équations homogènes, on détermine la solution $z(t)$ de l'équation (9.2.11) puis on revient aux anciennes variables.

Exemple 9.2.11 Résoudre l'équation différentielle :

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1} \tag{9.2.12}$$

On a,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

alors le système

$$\begin{cases} h+k-3=0 \\ h-k-1=0. \end{cases}$$

admet une unique solution donnée par

$$h = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \quad \text{et} \quad k = -\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

En posant alors

$$x = t+2 \quad \text{et} \quad y = z+1,$$

l'équation (9.2.12) devient

$$z' = \frac{t+z}{t-z}$$

qui est une équation homogène. On résout cette équation et on détermine la solution $y(x)$ de l'équation (9.2.12).

Deuxième cas Si $\Delta = 0$. Dans ce cas, le système (9.2.8) n'admet pas de solution et donc la méthode utilisée précédemment ne marche pas. On va s'y prendre d'une autre façon.

1. Si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors

$$a\,b_1 - b\,a_1 = 0 \Longleftrightarrow \exists\,\lambda \in \mathbb{R}\,;\ \frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda.$$

alors l'équation (9.2.6) s'écrit:

$$y' = \frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\,.$$

En posant

$$z = ax+by \Rightarrow y' = \frac{z'-a}{b},$$

cette équation s'écrit alors
$$z' = b\frac{z+c}{\lambda z + c_1} + a$$
qui est une équation à variables séparées, car elle s'écrit:
$$\frac{\lambda\, z + c_1}{(b+\lambda a)z + bc + ac_1}\, dz = dx\,.$$

2. Si $a = 0 \Rightarrow a_1\, b = 0$.
   (i) si $a_1 = 0$ l'équation (9.2.6) s'écrit alors sous la forme
$$y' = \frac{by + c}{b_1\, y + c_1}$$
   qui est une équation à variables séparées, car elle s'écrit sous la forme
$$\frac{b_1\, y + c_1}{b\, y + c}\, dy = dx.$$
   (ii) si $b = 0$ l'équation (9.2.6) est sous la forme
$$y' = \frac{c}{a_1\, x + b_1\, y + c_1}\,.$$
   On pose alors
$$z = a_1\, x + b_1\, y \Rightarrow y' = \frac{z' - a_1}{b_1},$$
   on obtient l'équation à variables séparées suivante.
$$z' = b\,\frac{c}{z + c_1} + a_1\,.$$

Remarquons que dans le cas où $\Delta = 0$, on se ramène directement aux équations à variables séparées.

Exemple 9.2.12

1. Intégrer l'équation différentielle suivante.
$$y' = \frac{x - 2y + 1}{-2x + 4y - 3} \tag{9.2.13}$$
   On a
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans ce cas, il est simple de remarquer que $\lambda = -2$. L'équation (9.2.13) s'écrit alors

$$y' = \frac{x - 2y + 1}{-2(x - 2y) - 3}.$$

On pose

$$z = x - 2y \Rightarrow y' = \frac{1 - z'}{2},$$

On obtient alors l'équation

$$z' = \frac{-4z - 5}{-2z - 3}$$

qui est une équation à variables séparées, car elle s'écrit:

$$\frac{2z + 3}{4z + 5}\, dz = dx\,;$$

2. Résoudre l'équation
$$y' = \frac{y + 1}{-3y + 2} \tag{9.2.14}$$
On est dans le cas où $a = a_1 = 0$. Remarquons que cette équation est à variables séparées.

3. Résoudre l'équation différentielle
$$y' = \frac{3x - 2}{5}. \tag{9.2.15}$$
Cette équation est à variables séparées. En effet, on obtient
$$dy = \frac{3x - 2}{5}\, dx.$$
Dans cet exemple, on a $a_1 = b_1 = 0$.

9.2.4 Equations linéaires du premier ordre.

Définition 9.2.13 Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation qui se met sous la forme

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = f(x) \tag{9.2.16}$$

où les fonctions

$$x \longmapsto a(x),\ b(x), \ \text{ et } \ f(x)$$

sont continues sur le même intervalle I, sur lequel la fonction $x \longmapsto a(x)$ ne s'anulle pas.

- La fonction $f(x)$ est appelée second membre de l'équation et cette équation,
- l'équation (9.2.16) est appelée équation avec second membre ou complète.

Définition 9.2.14 Si $f(x) = 0$, l'équation

$$a(x)\, y' + b(x)\, y \;= 0 \tag{9.2.17}$$

est appelée équation sans second membre ou homogène.

Remarque 9.2.15 Par abus de langage, en se référant aux systèmes d'équations algèbriques sans seconds membres, dits homogènes, l'équation sans second membre associée à l'équation (9.2.16) est appelée équation homogène. En vérité, elle n'a rien à voir avec les équations homogènes traitées précédemment.

Résolution de l'équation homogène.

En fait l'équation homogène (9.2.17) est une équation à variables séparées. En effet elle s'écrit sous la forme

$$\frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}\, dx.$$

En intégrant on aura

$$\ln|y| = -\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx \;+ c_1,\; c_1 \in \mathbb{R}.$$

Prenant l'exponnentiel des deux membres on a

$$y(x) = C \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right), \quad \text{avec} \quad C = \pm \exp\left(c_1\right) \in \mathbb{R}^*.$$

Comme $y = 0$ est solution de cette équation, alors la solution générales de l'équation homogène est

$$y_h(x) = C\, \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right), \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{R}. \tag{9.2.18}$$

Exemple 9.2.16 Soit l'équation:

$$(x+1)y' + 3xy = 0\; ; x \in I.$$

avec $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$.

Pour $y \neq 0$ l'équation s'écrit:

$$\frac{dy}{y} = -3\frac{x}{x+1}dx.$$

La solution générale de cette équation est

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C \exp\left(\int \left(-3 + \frac{3}{x+1}\right) dx\right) \\ &= C \exp\left(-3x + 3 \ln|x+1|\right) \\ &= C\, e^{-3x} |x+1|^3 \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Résolution de l'équation complète.

Supposons connue une solution particulière y_p de l'équation complète (9.2.16). On a

$$a(x)\, y_p' + b(x)\, y_p = f(x) \tag{9.2.19}$$

Des équations (9.2.16) et (9.2.19) on déduit que la fonction $z = y - y_p$ est solution de l'équation homogène (9.2.17). Comme $y = z + y_p$, on a donc le résultat suivant

Théorème 9.2.17 *La solution générale de l'équation complète* (9.2.16) *est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée et d'une solution particulière de l'équation complète.*

Recherche d'une solution particulière de l'équation complète.

Méthode de Lagrange, ou variation de la constante.

Cette méthode consiste à chercher une solution particulière de l'équation complète, à partir de la solution générale de l'équation homogène associée, en faisant varier la constante "C". C'est pourquoi elle porte ce nom. Soit donc

$$y_h(x) = C \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right)$$

la solution générale de l'équation homogène associée à (9.2.16). On cherche une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y_p(x) = C(x) \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right),$$

où l'inconnue est la fonction $C(x)$. On a

$$y_p'(x) = C'(x) \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right) - C(x)\, \frac{b(x)}{a(x)} \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right).$$

En remplaçant dans (9.2.16) et du fait que

$$C(x)\, b(x) \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right) - C(x)\, b(x) \exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\, dx\right) = 0,$$

on obtient,

$$C'(x)\,a(x)\exp\left(-\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right) = f(x),$$

ce qui donne

$$C(x) = \int \left[\frac{f(x)}{a(x)}\exp\left(\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right)\right] dx.$$

Exemple 9.2.18 Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\,y = \frac{1}{1+x^2}. \tag{9.2.20}$$

L'équation homogène associée à (9.2.20) est

$$y' + \frac{x}{1+x^2}\,y = 0. \tag{9.2.21}$$

La solution générale de cette équation est

$$\begin{aligned} y_h(x) &= C\exp\left(-\int \frac{x\,dx}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{C}{\sqrt{1+x^2}}\,. \end{aligned}$$

Cherchons une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y_p(x) = \frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

On a

$$y_p'(x) = \frac{C'(x)}{\sqrt{1+x^2}} - C(x)\,x\,(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

En remplaçant dans l'équation (9.2.20) on obtient

$$C'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow C(x) = \operatorname{Argsh} x.$$

Une solution particulière de l'équation complète est

$$y_p(x) = \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

La solution générale de l'équation (9.2.20) est donnée par

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{\operatorname{Argsh} x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

9.2.5 Equation de Bernoulli

Définition 9.2.19 Une équation de Bernoulli est une équation de la forme

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = y^n\, f(x), \tag{9.2.22}$$

où, les fonctions $x \longmapsto a(x),\ b(x)$ et $f(x)$ vérifient les hypothèses citées pour les équations linéaires.

Remarque 9.2.20

1. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, cette équation se réduit à une équation linéaire complète ou homogène respectivement.
2. En général, $n \in \mathbb{N}$. Mais on peut prendre $n = \alpha \in \mathbb{R}$, en considérant seulement les solutions positives.

Résolution de l'équation de Bernoulli.

En divisant les deux membres de cette équation par y^n, on obtient:

$$a(x)\, y'\, y^{-n} + b(x)\, y^{1-n} = f(x). \tag{9.2.23}$$

On pose alors

$$z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)\, y'\, y^{-n},$$

l'équation (9.2.23) devient

$$a(x)\, z' + (1-n) b(x)\, z = (1-n) f(x), \tag{9.2.24}$$

qui est une équation linéaire du premier ordre, avec second membre. On résout cette équation puis on revient à l'inconnue $y(x)$.

Exemple 9.2.21 Résoudre l'équation

$$y' + xy = x^3 y^3\,. \tag{9.2.25}$$

Divisant les deux membres par y^3 on obtient:

$$y^{-3}\, y' + xy^{-2} = x^3\,. \tag{9.2.26}$$

Posons maintenant

$$z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3},$$

l'équation (9.2.26) devient
$$z' - 2xz = -2x^3\,,$$
qui est une équation linéaire du premier ordre, avec second membre. La solution générale de cette équation est:
$$z(x) = c\,e^{x^2} + x^2 + 1\,; \quad c \in \mathbb{R}.$$
En remplaçant z par sa valeur on obtient
$$y^2(x) = \frac{1}{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}\,; \;\; C \in \mathbb{R}.$$
L'ensemble des solutions de l'équation (9.2.25) est donnée par
$$S = \left\{ y^2(x) = \frac{1}{x^2 + 1 + Ce^{x^2}}, \text{ où } C \in \mathbb{R}\,, y = 0 \right\}$$

9.2.6 Equation de Riccati

Définition 9.2.22 Une équation de Riccati est une équation du type:
$$a(x)\,y' + b(x)\,y = g(x) + y^2\,f(x), \tag{9.2.27}$$
où, les fonctions $x \longmapsto a(x)\,,\, b(x)\,,\, f(x)$ et $g(x)$ vérifient les hypothèses citées pour les équations linéaires.

Remarque 9.2.23

1. Si la fonction g est nulle, cette équation devient un cas particulier de l'équation de Bernoulli ($n = 2$).
2. Si on ne connait pas une solution particulière y_1, on ne sait pas résoudre cette équation.
   De plus, contrairement aux équations linéaires, on ne sait pas chercher une solution particulière sauf dans des cas très particuliers.
3. Par contre, si on connait une solution particulière, on sait trouver toutes les solutions de cette équation (la solution générale.)

Résolution de l'équation de Riccati.

Supposons connue une solution particulière y_1 de cette équation. On cherche la solution générale sous la forme

$$y(x) = u(x) + y_1(x).$$

Du fait que y_1 est solution particulière de l'équation (9.2.27), elle vérifie donc

$$a(x)\, y_p' + b(x)\, y_p = g(x) + y^2\, f(x).$$

En remplaçant $y(x)$ par sa valeur dans l'équation (9.2.27), on déduit que la fonction u vérifie l'équation de Bernoulli suivante:

$$a(x)\, u' + [b(x) - 2y_1\, f(x)]\ u = u^2\, f(x). \tag{9.2.28}$$

En résolvant l'équation de Bernoulli précédente on obtient la solution générale de l'équation de Riccati.

Exemple 9.2.24 Résoudre l'équation

$$y' + 3y = -y^2 - 2, \tag{9.2.29}$$

où $y_1 = -1$ est une solution particulière.
Cherchons alors la solution sous la forme

$$y = u - 1.$$

En remplaçant dans l'équation (9.2.29), on obtient l'équation de Bernoulli suivante satisfaite par la fonction u:

$$u' + u = -u^2. \tag{9.2.30}$$

La solution générale de cette équation (à faire) est

$$u(x) = \frac{1}{c\, e^x - 1}.$$

La solution générale de l'équation (9.2.29) est donnée par

$$y(x) = \frac{1}{c\, e^x - 1} - 1\,;\quad c \in \mathbb{R}\,;\quad c\, e^x - 1 \neq 0.$$

9.3 Equation différentielle linéaire du second ordre:

Définition 9.3.1 Une équation linéaire du second ordre définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, est une équation du type

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \text{ où } x \in I \tag{9.3.1}$$

telles que les fonctions $x \longmapsto a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, et $f(x)$ soient des fonctions continues sur I et que la fonctions $x \longmapsto a(x)$ ne s'annule pas sur I.

- les fonctions $x \longmapsto a(x)$, $b(x)$, et $c(x)$ sont appelées coefficients de l'équation,
- la fonction $x \longmapsto f(x)$ est appelée second membre de l'équation.

Résolution de ces équations.

Remarque 9.3.2 Comme toutes les équations linéaires, si y_p est une solution particulière de l'équation (9.3.1) alors, la fonction

$$z = y - y_p$$

est solution de l'équation homogène associée suivante:

$$a(x)\,y'' + b(x)\ y' + c(x)\,y = 0, \text{ où } x \in I \tag{9.3.2}$$

Comme pour les équations linéaires du premier ordre, on a le résultat suivant

Théorème 9.3.3 *La solution générale de l'équation complète est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.*

Résolution de l'équation homogène.

Définition 9.3.4 Deux solutions y_1 et y_2 sont dites indépendantes si elle sont non nulles et vérifient:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{ Cte.}$$

Nous avons la proposition:

Proposition 9.3.5 *Si y_1 et y_2 sont deux solutions indépendantes de l'équation homogène, alors la solution générale de cette équation est sous la forme*

$$y_h(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x)\,,$$

avec c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires.

Pour la résolution de l'équation homogène, on constate deux cas distincts:

- Cas où les coefficients de l'équation sont des constantes.
- Cas où les coefficients de l'équation sont des fonctions de x non tous constants.

9.3.1 Equation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants:

Elles sont sous la forme

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{9.3.3}$$

où a, b et c sont des constantes réelles.
L'équation caractéristique de l'équation (9.3.3) est:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{9.3.4}$$

qui a pour discriminant:

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Le théorème suivant donne la solution générale de l'équation (9.3.3).

Théorème 9.3.6

1. *Si r_1 et r_2 sont deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique* (9.3.4)*, la solution générale de l'équation* (9.3.3) *est donnée par*

$$y_h(x) = c_1\, e^{r_1 x} + c_2\, e^{r_2 x}, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.3.5}$$

2. *Si r est une racine double de l'équation* (9.3.4)*, la solution générale de l'équation* (9.3.3) *est sous la forme*

$$y_h(x) = c_1\, e^{rx} + c_2\, xe^{rx}, \quad c_1\,, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.3.6}$$

3. *Si r_1 et r_2 sont deux racines complexes cojuguées entre elles de l'équation* (9.3.4)

$$\left(r_1 = \alpha + i\beta, \quad r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta\right),$$

la solution générale de l'équation (9.3.3) *est donnée par*

$$y_h(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x \right), \quad c_1 \,, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.3.7}$$

Exemple 9.3.7 Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1. & y'' - 3y' + 2y = 0 & 2. & y'' + 2y' + y = 0 \\ 3. & y'' + 2y' + 5y = 0 & 4. & y'' + y = 0 \end{array}$$

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$,

Son équation caractéristique est: $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet deux racines distinctes

$$r_1 = 1 \text{ et } r_2 = 2.$$

Donc, l'équation homogène admet deux solutions particulières et indépendantes

$$y_1(x) = e^x \quad \text{et} \quad y_2(x) = e^{2x}.$$

La solution générale s'écrit donc

$$y(x) = c_1\, e^x + c_2\, e^{2x}\,; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. $y'' + 2y' + y = 0$.

Son équation caractéristique admet une racine double $r = -1$, et la solution générale s'écrit donc

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2\, x e^{-x}\,; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3. $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Son équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées:

$$r_1 = -1 + 2i \text{ et } r_2 = -1 - 2i,$$

et la solution générale est donnée par

$$y(x) = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

4. $y'' + y = 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes et conjugués:

$$r_1 = i \text{ et } r_2 = -i.$$

Donc la solution générale de l'équation est

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,;\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Recherche d'une solution particulière de l'équation complète:

La recherche d'une solution particulière de l'équation à coefficients constants, avec second membre suivante

$$ay'' + by' + cy = f(x). \tag{9.3.8}$$

se fait en générale comme pour le cas d'une équation d'ordre 1, par la méthode de variation des constantes (Méthode de Lagrange), méthode qui repose essentiellement sur l'hypothèse suivante:
Soit y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de l'équation homogène associée à l'équation (9.3.8) et

$$y_h(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

la solution générale de l'équation homogène. On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) \tag{9.3.9}$$

où, les fonctions inconnues $x \longmapsto c_1(x)$, $c_2(x)$ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle de résolution.
En remplaçant dans l'équation (9.3.8) on aboutit à une équation à deux inconnues, ce qui n'est pas commode. On fait alors l'hypothèse suivante appelée hypothèse de Lagrange

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0. \tag{9.3.10}$$

On a donc

$$y_p'(x) = \underbrace{c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x)}_{\substack{=0 \\ \text{hypothèse de Lagrange}}} + c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

$$y_p''(x) = c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + c_1(x)y_1''(x) + c_2(x)y_2''(x)$$

En substituant y_p dans (9.3.8) il vient que

$$a(c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x)) + c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2) = f(x).$$

Du fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène on obtient l'équation suivante

$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = \frac{f(x)}{a}. \tag{9.3.11}$$

On déduit donc que les fonctions $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$ sont solution du système d'équations:

$$(I)\ \begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \frac{f(x)}{a} \end{cases}$$

Le déterminant de ce Système est:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x),$$

appelé Wronksien des fonctions y_1 et y_2.
Le système (I) admet une solution unique si, et seulement si, le déterminant $W(x)$ est non nul. La réponse à cette question est donnée par la proposition suivante

Proposition 9.3.8 *Le Wronskien $W(x)$ est nul si, et seulement si, les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont liées.*

Du fait que les fonctions y_1 et y_2 sont indépendantes alors le système (I) admet une unique solution qu'on peut calculer de la manière suivante.

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ \frac{f(x)}{a} & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{1}{a}\, \frac{-\, y_2(x)\, f(x)}{y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x)},$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & \frac{f(x)}{a} \end{vmatrix}}{W(x)} = \frac{1}{a}\, \frac{y_1(x)\, f(x)}{y_1(x)\, y_2'(x) - y_2(x)\, y_1'(x)},$$

On calcule les primitives de ces deux fonctions, on remplace dans (9.3.9), on obtient alors une solution particulière de l'équation (9.3.8).

Exemple 9.3.9 Résoudre l'équation différentielle suivante

$$y'' + y = \sin x \tag{9.3.12}$$

La solution de l'équation homogène est donnée par:

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x\,.$$

Recherche d'une solution particulière y_p par la méthode de variation des constantes. On pose

$$y_p(x) = c_1(x) \cos x + c_2(x) \sin x.$$

Les fonctions $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$ sont solutions du système

$$(I)\ \begin{cases} c_1'(x)\cos x + c_2'(x)\sin x & = 0 \\ c_1'(x)(-\sin x) + c_2'(x)\cos x & = \sin x \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1.$$

La solution du système (I) est donnée par

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}}{W(x)} = -\sin^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x - 1),$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sin x \end{vmatrix}}{W(x)} = \cos x\,\sin x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

En intègrant, on obtient

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int (\cos 2x - 1)\,dx = \frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2}\,,$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = -\frac{\cos 2x}{4}\,.$$

Une solution particulière de l'équation (9.3.12) est donc:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \left(\frac{\sin 2x}{4} - \frac{x}{2}\right) \cos x - \frac{1}{4} \cos 2x \sin x \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin 2x \cos x - \cos 2x \sin x\right] - \frac{x}{2} \\ &= \frac{\sin x}{4} - \frac{x}{2}\,. \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation est:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\sin x}{4} - \frac{x}{2}\,, \quad c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{R}.$$

Quelques cas particuliers

En fait, il y'a des cas particuliers où l'on n'a pas besoin d'utiliser la méthode de variation des constantes, qui est applicable dans tous les cas, mais qui est relativement longue. Ces cas, on les trouve lorsque le second membre $f(x)$ se présente sous des formes bien particulières, dont nous donnons les plus utilisées.

1) Produit d'un polynôme et d'une exponentielle.

On a la proposition suivante

Proposition 9.3.1 *Dans le cas où le second membre de l'équation* (9.3.8) *est de la forme*

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$$

où P_n est un polynôme de degré n, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
On constate trois cas:

a. *Si α n'est pas racine de l'équation caractéristique* (9.3.4)*, une solution particulière de* (9.3.8) *est donnée sous la forme*

$$y_p(x) = Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

b. *Si α est une racine réelle simple de l'équation caractéristique* (9.3.4)*, une solution particulière de* (9.3.8) *peut être choisie sous la forme*

$$y_p(x) = x\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

c. *Si α est une racine double de l'équation caractéristique, une solution particulière de l'équation complète est sous la forme*

$$y_p(x) = x^2\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

***<u>En résumé</u>**, on cherche une solution particulière sous la forme*

$$y_p(x) = x^k\, Q_n(x)\, e^{\alpha x}$$

où k est l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de l'équation caractéristique, avec la convention $k = 0$ si α n'est pas racine.

Remarque 9.3.10 Si $f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x}$, dans beaucoup d'exemples, on trouve une solution particulière sous la forme

$$y_p(x) = Q(x)\, e^{\alpha x}$$

où $e^{\alpha x}$ est toujours le même , $Q(x)$ est un polynôme mais le degré de ce polynôme diffère d'un exemple à un autre. Pour cette raison, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Q(x)\, e^{\alpha x}$ et on regarde à quelle condition est liée le degré du polynôme Q.

2) Produit d'un polynôme, d'une exponentielle et d'un sinus ou cosinus

Proposition 9.3.2

1. *Dans le cas ou le second membre de l'équation* (9.3.8) *est de la forme*

$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \cos \beta x = \mathcal{R}e\,(P_n(x)\, e^{rx})$$

où $r = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, alors une solution particulière peut être cherchée sous la forme suivante

$$y_p(x) = \mathcal{R}e(Z_p(x)),$$

où $Z_p(x)$ est donnée comme suit:

a. *Si r n'est pas racine de l'équation caractéristique, $Z_p(x)$ est donnée sous la forme*

$$Z_p(x) = Q_n(x)\, e^{rx}$$

b. *Si r est une racine de l'équation caractéristique, $Z_p(x)$ est donnée sous la forme*

$$Z_p(x) = x\, Q_n(x)\, e^{rx}$$

2. *Dans le cas où*
$$f(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \sin \beta x = \mathcal{I}m\,(P_n(x)\, e^{rx})$$
alors une solution particulière peut être cherchée sous la forme suivante
$$y_p(x) = \mathcal{I}m(Z_p(x)),$$
et $(Z_p(x))$ *est donnée comme précédemment.*

La preuve de cette proposition est laissée à titre d'exercice.

Méthode de superposition.

Soit l'équation différentielle linéaire

$$ay'' + by' + cy = f(x) \tag{9.3.13}$$

où le second membre est somme de deux fonctions ou plus, par exemple

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

Pour chercher une solution particulière de l'équation (9.3.13), on peut utiliser le résultat suivant appelé méthode de superposition.

Proposition 9.3.11 *Si* y_1 *est une solution particulière de l'équation* (9.3.13) *relativement au second membre* $f_1(x)$ *et* y_2 *est une solution particulière de l'équation* (9.3.13) *relativement au second membre* $f_2(x)$ *alors*

$$y_p = y_1 + y_2$$

est une solution particulière de l'équation (9.3.13) *relativement au second membre*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

La preuve est laissée en exercice.

Exemple 9.3.12

1. Résoudre l'équation

$$y'' - 2y' + y = (9x^2 - 6x + 5)\, e^{-2x} + (3x - 2)\, e^{x} \tag{9.3.14}$$

- L'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ admet une racine double: $r = 1$. La solution générale de l'équation homogène est donc

$$y_h(x) = (c_1 + c_2 x)\, e^x, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

- Du fait que le second membre est somme de deux fonctions, alors on utilise la méthode de superposition.

i) On cherche une solution particulière de cette équation relativement au second membre

$$f_1(x) = (9x^2 - 6x + 5)\, e^{-2x}.$$

Du fait que $f_1(x)$ est de la forme

$$P_2(x)\, e^{\alpha x}$$

et $\alpha = -2$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution y_1 sous la forme

$$y_1(x) = Q(x)e^{-2x}\,, \quad \text{avec } Q(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2.$$

On a

$$y_1' = [Q'(x) - 2Q(x)]\ e^{-2x} \ \text{ et } \ y_1'' = [Q''(x) - 4Q'(x) + 4Q(x)]\ e^{-2x},$$

en remplaçant dans l'équation on obtient

$$Q''(x) - 6Q'(x) + 9Q(x) = (9x^2 - 6x + 5).$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$9a_2\, x^2 + (9a_1 - 12a_2)\, x + (2a_2 - 6a_1 + 9a_0) = 9x^2 - 6x + 5.$$

Par identification on obtient:

$$\begin{cases} 9a_2 = 9 \\ 9a_1 - 12a_2 = -6 \\ 2a_2 - 6a_1 + 9a_0 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = -2 \\ a_0 = -1 \end{cases}$$

donc

$$y_1(x) = (x^2 - 2x - 1)\, e^{-2x}$$

ii) On cherche une solution particulière, relativement au second membre

$$f_2(x) = (3x-2)\, e^x.$$

Du fait que $f_2(x)$ est de la forme

$$P_1(x)\, e^{\alpha x}$$

et $\alpha = 1$ est racine double de l'équation caractéristique, on cherche alors une solution y_2 sous la forme

$$y_2(x) = Q(x)e^{-2x}\,, \quad \text{avec } Q(x) = x^2(a_0 + a_1\, x).$$

On a

$$y_2' = [Q'(x) + Q(x)]\; e^x \;\text{ et }\; y_2'' = [Q''(x) + 2Q'(x) + Q(x)]\; e^x,$$

en remplaçant dans l'équation on obtient

$$Q''(x) = (3x-2).$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$6a_1\, x + 2a_1 = 9x^2 - 6x + 5,$$

on obtient alors:

$$a_1 = \frac{1}{2} \;\text{ et }\; a_0 = -1.$$

Donc

$$y_2(x) = \frac{x^2}{2}\,(x-2)\, e^x$$

Une solution particulière de l'équation (9.3.14) est

$$y_p(x) = (x^2 - 2x - 1)\, e^{-2x} + \frac{x^2}{2}\,(x-2)\, e^x.$$

La solution générale est:

$$y(x) = (c_1 + c_2\, x)\, e^{2x} + (x^2 - 2x - 1)\, e^{-2x} + \frac{x^2}{2}\,(x-2)\, e^x\,, \;\; c_1\,,\; c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

2. Résoudre
$$y'' + y = 4\cos^3 x + (6x - 3)\sin 2x. \tag{9.3.15}$$
L'équation caractéristique admet deux racines complexes $r_1 = i$ et $r_2 = \overline{r_1} = -i$, alors la solution générale de l'équation homogène est:
$$y_h(x) = A\cos x + B\sin x, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

3. Recherche d'une solution particulière de l'équation (9.3.15). Par une linéarisation, de $\cos^3 x$, le second membre de cette équation s'écrit:
$$f(x) = 3\cos x + \cos 3x + (6x - 3)\sin 2x = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)\,.$$
Par la méthode de superposition, on détermine trois solutions particulières. La première, y_1, est relative au second membre $f_1(x)$, la deuxième, y_2, est relative au second membre $f_2(x)$ et la troisième, y_3, est relative au second membre $f_3(x)$. On a, d'après la proposition (9.3.2),
$$y_1(x) = \mathcal{R}e(Z_1(x))\ , \ \ y_2(x) = \mathcal{R}e(Z_2(x)) \quad \text{et} \quad y_3(x) = \mathcal{I}m(Z_3(x))$$
où, $Z_1(x)$, $Z_2(x)$ et $Z_3(x)$ sont, respectivement solutions particulières des équations
$$y'' + y = 3\,e^{ix}\,, \quad y'' + y = e^{i3x} \quad \text{et} \ \ y'' + y = (6x - 3)\,e^{i2x}\,.$$
Calculons $Z_1(x)$.
Le fait que $r = i$ est racine de l'équation caractéristique, on cherche $Z_1(x)$ sous la forme
$$Z_1(x) = Ax\,e^{ix}$$
On a,
$$Z_1'(x) = (A + iAx)\,e^{ix} \quad \text{et} \quad Z_1''(x) = (2iA - Ax)\,e^{ix}\,.$$
En remplaçant on aura, après simplification par e^{ix}:
$$2i\,A = 3 \Leftrightarrow A = -\frac{3}{2}i.$$
Alors,
$$Z_1(x) = -\frac{3}{2}\,i\,e^{ix} = \frac{3}{2}\sin x - \frac{3}{2}\,i\cos x\,.$$

Comme $y_1(x) = \mathcal{R}\,e(Z_1(x))$ alors,

$$y_1(x) = \frac{3}{2}\sin x\,.$$

Calculons $Z_2(x)$.
Le fait que $r = 3i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche $(Z_1(x)$ sous la forme

$$Z_2(x) = A\,e^{3i\,x}$$

On a alors,

$$Z_2'(x) = 3i\,A\,e^{i3x} \quad \text{et} \quad Z_2''(x) = -9A\,e^{i3x}\,.$$

En remplaçant on aura,

$$-8A = 1 \Leftrightarrow A = -\frac{1}{8}.$$

Alors,

$$Z_2(x) = -\frac{1}{8}\,e^{i3x} = -\frac{1}{8}\cos 3x - \frac{1}{8}\,i\sin 3x)\,.$$

Comme $y_2(x) = \mathcal{R}\,e(Z_2(x))$ alors,

$$y_2(x) = -\frac{1}{8}\cos 3x\,.$$

Calculons $Z_3(x)$.
$r = 2i$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, alors

$$Z_3(x) = (ax+b)\,e^{i2x}$$

On a:

$$Z_3'(x) = [a + 2i\,(ax+b)]e^{i2x} \quad \text{et} \quad Z_3''(x) = [4i\,a - 4\,(ax+b)]e^{i2x}\,.$$

En remplaçant on aura,

$$-3a\,x + (-3b + 4i\,a) = 6x - 3 \Rightarrow a = -2 \;\text{ et }\; b = 1 - \frac{8}{3}\,i\,.$$

Donc,

$$\begin{aligned} Z_3(x) &= \left[(1-2x) - \frac{8}{3}\,i)\right](\cos 2x + i\sin 2x) \\ &= (1-2x)\cos 2x + \frac{8}{3}\sin 2x + i\left[(1-2x)\sin 2x - \frac{8}{3}\cos 2x\right] \end{aligned}$$

Donc
$$y_3(x) = \mathcal{I}m(Z_3(x)) = (1-2x)\sin 2x - \frac{8}{3})\cos 2x\,.$$
Une solution particulière de l'équation (9.3.15) est

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_1(x) + y_2(x) + y_3(x) \\ &= \frac{3}{2}\sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + (1-2x)\sin 2x - \frac{8}{3})\cos 2x\,. \end{aligned}$$

9.3.2 Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables:

Définition 9.3.13 Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients variables est du type:
$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x),\ \text{où } x \in I \tag{9.3.16}$$
où l'une au moins des fonctions $x \longmapsto a(x), b(x), c(x)$ ne soit pas une constante.

Résolution de ces équations. On a vu précédemment, que la solution générale d'une équation linéaire est la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète.

L'équation homogène associée.

Définition 9.3.14 L'équation homogène associée à l'équation (9.3.16) est du type:

$$a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = 0,\ \text{où } x \in I\,. \tag{9.3.17}$$

Remarque 9.3.15 Contrairement aux équations à coefficients constants, pour l'équation à coefficients variables, c'est la résolution de l'équation homogène qui pose problème. En fait, à part quelques cas, on ne sait pas, en général, résoudre ces équations.
Dans ce qui suit on donne quelques cas où l'on sait résoudre.

Rappelons que si on connait deux solutions indépendante y_1 et y_2 de l'équation homogène (9.3.17), alors la solution générale de cette équation est de la forme

$$y(x) = c_1\,y_1(x) + c_2\,y_2(x) \quad c_1\,,\ c_2 \in \mathbb{R}. \tag{9.3.18}$$

1) Si on connait une solution particulière.

Supposons connue une solution y_1 de l'équation homogène. On cherche une deuxième solution sous la forme
$$y_2 = u(x)\,y_1(x) \quad \text{avec} \quad u(x) \neq Cte.$$

On a alors

$$y_2' = u'(x)\, y_1(x) + u(x)\, y_1'(x) \;\text{ et }\; y_2'' = u''(x)\, y_1(x) + 2u'(x)\, y_1'(x) + u(x)\, y_1''(x)\,.$$

En remplaçant dans l'équation (9.3.17), du fait que y_1 est solution de cette équation, on déduit que la fonction $u'(x)$ vérifie l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante

$$a(x)\, y_1(x)\, u'' + [2a(x)\, y_1'(x) + b(x)\, y'(x)]\, u' = 0\,.$$

La résolution des équations différentielles linéaires du premier donne

$$u'(x) = \exp\left(-\int \frac{2a(x)\, y_1'(x) + b(x)\, y'(x)}{a(x)\, y_1(x)}\, dx\right) \neq 0.$$

En intégrant cette expression on obtient

$$u(x) = \int \left[\exp\left(-\int \frac{2a(x)\, y_1'(x) + b(x)\, y'(x)}{a(x)\, y_1(x)}\, dx\right)\right] dx \neq Cte\,. \tag{9.3.19}$$

Donc la fonction $y_2 = u(x)\, y_1(x)$ est bien une solution de l'équation (9.3.17) et elle est indépendante de $y_1(x)$. La solution générale de l'équation homogène est donée par

$$y(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, u(x)\, y_1(x) \quad c_1\,,\; c_2 \in \mathbb{R}.$$

On a donc le résultat suivant

Proposition 9.3.16 *Si l'on connait une solution particulière y_1 de l'équation homogène* (9.3.17), *alors*

$$y_2(x) = u(x)\, y_1(x)$$

est une deuxième solution de cette équation, indépendante de y_1, où $u(x)$ est donnée par la formule (9.3.19).

Exemple 9.3.17 Résoudre l'équation

$$x^2 y'' - 7xy' + 15y = 0, \tag{9.3.20}$$

connaissant une solution particulière $y_1 = x^3$. On cherche une deuxième solution de cette équation sous la forme

$$y_2(x) = x^3\, u(x).$$

On dérive:

$$y_2'(x) = x^3\,u'(x) + 3x^2\,u(x) \quad \text{et} \quad y_2''(x) = x^3\,u''(x) + 6x^2\,u'(x) + 6xu(x).$$

On remplace dans l'équation (9.3.20) on obtient

$$x^2\left(x^3\,u'' + 6x^2\,u' + 6x\,u\right) - 7x\left(3x^2\,u' - x^3u\right) + 15x^3u = 0 \Leftrightarrow x^5u'' - x^4u' = 0,$$

qui est une équation du premier ordre pour la fonction $z = u'$. Une solution de cette équation est

$$u'(x) = 2x.$$

En intégrant et en prenant la costante d'intégration égale à zéro on aura $u(x) = x^2$ et donc, une solution particulière de l'équation est

$$y_2(x) = x^2\,x^3 = x^5\,.$$

La solution générale de l'équation (9.3.20) est

$$y(x) = c_1\,x^3 + c_2\,x^5\,, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Méthode de changement de la variable .

Le but de cette méthode est de chercher un changement de variables, s'il existe, qui puisse ramener cette équation à une équation à coefficients constants.
En supposant que la fonction $c(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle I, on écrit l'équation (9.3.17) sous la forme:

$$A(x)\,y''(x) + B(x)\,y'(x) + y(x) = 0 \tag{9.3.21}$$

avec

$$A(x) = \frac{a(x)}{c(x)} \quad \text{et} \quad B(x) = \frac{b(x)}{c(x)}\,.$$

Soit un changement de variable donné sous la forme

$$\begin{cases} g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\quad x \quad \longmapsto t = g(x) \\ t = g(x) \iff x = g^{-1}(t). \end{cases}$$

où, g est supposée bijective, de classe C^2 ainsi que g^{-1}.
On a:

$$y(x) = y(g^{-1}(t)),$$

la fonction y sera donc considéré comme une fonction u de la nouvelle variable t et on pose

$$y(x) = u(g(x)) = u(t)$$

Les formules de dérivation des fonctions composées donnent, en notant $u' = \frac{du}{dt}$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(t)\, g'(x) \\ y''(x) &= u''(t)\, \left(g'(x)\right)^2 + u'(t)\, g''(x) \end{aligned} \tag{9.3.22}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} y'(x) &= u'(g(x)\, g'(x) \\ &= u'(t)\, g'(x). \end{aligned}$$

De même on obtient:

$$y''(x) = u''(t)\, (g'(x))^2 + u'(t)\, g''(x)\,.$$

En remplaçant dans l'équation (9.3.21), on déduit que la fonction $u(t)$ satisfait l'équation différentielle du second ordre:

$$A(x)\, (g'(x))^2\, u''(t) + [A(x)\, g''(x) + B(x)\, g'(x)]\; u'(t) + u(t) = 0. \tag{9.3.23}$$

Cette équation est à coefficients constants si, et seulement si, la fonction g satisfait les deux conditions suivantes

$$A(x)\, (g'(x))^2 = A \quad \text{et} \quad A(x)\, g''(x) + B(x)\, g'(x) = B, \tag{9.3.24}$$

où A et B sont des constantes.
On voit bien que si les conditions (9.3.24) sont satisfaites, l'équation (9.3.23) devient

$$A\, u''(t) + B\, u'(t) + u(t) = 0. \tag{9.3.25}$$

qui est une équation à coefficients constants et donc l'équation (9.3.21) se ramène en une équation à coefficients constants. On résout l'équation (9.3.25) puis on revient à l'ancienne variable $x = g^{-1}(t)$.

Exemple 9.3.18 Résoudre l'équation d'Euler pour $x > 0$

$$x^2y'' - 7x\,y' + 5y = 0 \tag{9.3.26}$$

On pose

$$t = g(x) \iff x = g^{-1}(t)\,.$$

D'après ce qui précède, l'équation (9.3.26) devient

$$x^2\,(g'(x))^2u'' + \left[x^2\,g''(x) - 7x\,g'(x)\right]\,u' + 5u = 0. \tag{9.3.27}$$

Cette équation devient à coefficients constants si, et seulement si, la fonction g satsfait les conditions suivantes:

$$x^2\,(g'(x))^2 = A \quad \text{et} \quad x^2\,g''(x) - 7x\,g'(x) = B, \tag{9.3.28}$$

Remarquons qu'on peut choisir $A = 1$, alors on a

$$x^2\,(g'(x))^2 = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}\,,$$

la deuxième condition devient alors

$$-1 - 7 = B \Leftrightarrow B = -8.$$

Le changement de variable est:

$$t = g(x) = \ln x \Longleftrightarrow x = e^t\,. \tag{9.3.29}$$

Par ce changement de variables, l'équation (9.3.27) s'écrit alors:

$$u'' - 8u' + 5u = 0, \tag{9.3.30}$$

La solution générale de cette équation est

$$u(t) = c_1\,e^{(4+\sqrt{11})t} + c_2\,e^{(4-\sqrt{11})t}\,; c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En revenant à la variable x on obtient

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\, e^{(4+\sqrt{11})\ln x} + c_2\, e^{(4-\sqrt{11})\ln x} \\ &= c_1\, e^{\ln(x)^{(4+\sqrt{11})}} + c_2\, e^{\ln(x)^{(4-\sqrt{11})}} \\ &= c_1\, x^{(4+\sqrt{11})} + c_2\, x^{(4-\sqrt{11})}, \quad c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Remarque 9.3.19 Il y'a une autre méthode, qui consiste à chercher, si possible, une solution particulière sous forme d'une série entière, $\sum a_n\, x^n$ donc, il faut supposer au mois que cette solution est de classe C^∞ puis déterminer une deuxième, en utilisant la proposition (9.3.16). Mais cette méthode est hors programme de la première année.

9.4 Exercices

Exercice 1 Résoudre les équations différentielles suivantes

1) $(1+x^2)y'+3xy = 0\,;$ **2)** $x^2yy' = \sqrt{1-y^2};$ **3)** $2xyy'+4x^2 = y^2\,;$ **4)** $y-xy'+x\cos\dfrac{y}{x} = 0\,;$

5) $(x^2+y^2)y' = 2xy\,;$ **6)** $(x+y-3)y' = 2x-y+1\,;$ **7)** $(4x-2y+1)y' = y-2x-4\,.$

Exercice 2 Intégrer les équations suivantes

1) $y'+2y = x^2-2x+3\,;$ **2)** $y'+y = xe^{-x}\,;$ **3)** $y'-2y = \cos x + 2\sin x;$

4) $y'+y = \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R};$ **5)** $(x+1)y'+y = 1+\ln(1+x),$ sur $]-1+\infty[\,;$

6) $y'+y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x\,,\ y(0) = 1$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}[;$

Exercice 3

1. Donner une équation différentielle dont les solutions sont de la forme

$$y(x) = \frac{x+c}{1+x^2}.$$

2. (**Circuit RL**) Donner l'équation différentielle satisfaite par le courant qui circule dans un **circuit R.L.** soumis à une tension sinusoïdale $U = U_0 \sin(\omega t)$. Déterminer $i(t)$ si $i(0) = 0$.

3. (**Dissolution d'un composé chimique**) La vitesse de dissolution d'un composé chimique dans l'eau est proportionnelle à la quantité restante. On place $20g$ de ce composé et on observe que $5min$ plus tard, il reste $10g$. Dans combien de temps restera-t-il seulement $1g$.

Exercice 4 On se propose d'étudier les solutions de l'équation differentielle suivante:

$$(x^3 - x)y' + (1 - 2x^2)y + 1 = 0. \tag{9.4.1}$$

1. En se plaçant sur l'un des intervalles $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$, résoudre l'équation (9.4.1).
2. Si y_1 est une solution sur $]-1, 0[$ et y_2 est une solution sur $]0, 1[$, on dit que les deux solutions se raccordent si elles vérifient

$$\lim_{x\to 0^-} y_1(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2(x) \text{ et } \lim_{x\to 0^-} y_1'(x) = \lim_{x\to 0^+} y_2'(x)\,.$$

Déterminer quelles sont les solutions qui se raccordent en -1, 0 et 1.
3. Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?

Exercice 5 Résoudre:

$$\mathbf{1)}\ xy' + y = y^3\,; \qquad \mathbf{2)}\ y' + 2y = (x+1)\sqrt{y}\,; \qquad \mathbf{3)}\ x^2(y' + y^2) = xy - 1\,.$$

Exercice 6 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1) $2y" - 5y' - 3y = 0\,;$ **2)** $y" - 9y = 0\,;$ **3)** $y" - 4y' + 4y = 0\,;$ **4)** $y" - 2y' + ay = 0\,(a \in \mathbb{R})\,;$

5) $y" - y' - 2y = (3x+1)\,e^x\,;$ **6)** $y" + 4y' + 4y = (x+1)\,e^{-2x}\,,$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1\,.$

7) $y" - 2y' + y = \operatorname{ch} x\,;$ **8)** $y" - 4y' + 4y = \dfrac{1}{3}(e^{2x} + e^{-2x})\,;$ **9)** $y" - y = 2x\sin x - 6\cos x\,.$

Exercice 7 Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :

1. $(x^2 - 1)\,y" - 2x\,y' - (x^2 - 2x - 1)\,y = 0\,.$ Chercher une solution particulière sous la forme $y_1 = e^{\alpha x}\,.$

2. $x^2\,y" - 4x\,y' + 2y = \ln(1 + x)\,.$ Chercher une solution particulière pour l'équation homogène sous la forme $y_1 = x^{\alpha}$.

3. $x^2\,y" + 4x\,y' + (2 - x^2)\,y = 1.$ (Poser $z = x^2\,y$.)

Exercice 8 On considère l'équation différentielle

$$x^2\,y" + x\,y' - y = 0. \tag{9.4.2}$$

1. On se place sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Effectuer le changement de variable $x = e^t$, trouver l'équation satisfaite par la fonction $z(t) = y(e^t)$.

2. Résoudre l'équation (9.4.2)

3. Mêmes questions pour les équations:

   - $$(1+x^2)\,y" + 2x\,y' + \frac{y}{1+x^2} = 0, \quad (x = \operatorname{tg} t),$$

   - $$y" - (6x + \frac{1}{x})\,y' + 8x^2\,y = x^4, \quad (u = x^2).$$