Partie IV

I- Fonctions Hyperboliques

- Définitions des fonctions hyperboliques (sinus, cosinus tangente et cotangente hyperboliques)
- Variations des fonctions hyperboliques

II- Trigonométrie hyperbolique

- Formules d'addition
- Formules de multiplication

III- Fonctions hyperboliques réciproques

- Argument sinus hyperbolique
- Argument cosinus hyperbolique
- Argument tangente hyperbolique

Définition des fonctions hyperboliques :

Introduction:

$$f :]-\alpha, +\alpha[\to \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} f(x) = P(x) + Q(x) \\ f(-x) = P(x) - Q(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ Q(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Définition :

On appelle cosinus hyperbolique de x et sinus hyperbolique de x et on note respectivement $cosh(x)$ et $sinh(x)$les parties paire et impaire de e^x

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$cosh(x) - 1 = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} - 1$$

$$= \frac{e^{x} - 2 + e^{-x}}{2} = \frac{\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)^{2}}{2} \geq 0$$

Il vient que pour tout $x \in \mathbb{R}^{*}$; $cosh(x) > 1$avec $cosh(0) = 1$

Et du fait que

$$sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2e^{x}}$$

Il vient que $sinh(x)$ est du signe de x quel que soit $x \neq 0$ avec $sinh(0) = 0$.

Définition :

On appelle tangente hyperbolique de x et cotangente hyperbolique de x respectivement $tanh(x)$et $cotanh(x)$ les fonctions

$$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$$

$$cotanh(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$$

Ou encore sous la forme

$$tanh(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$cotanh(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

Remarque :

- Il est courant d'utiliser pour alléger l'écriture les notations suivantes : $ch\ x$au lieu de $cosh(x)$, $sh\ x$au lieu de $sinh(x)$, $th\ x$au lieu de $tanh(x)$ et $\coth x$ au lieu de $cotanh(x)$.
- Pour les fonctions hyperboliques la variable est appelée argument.

Propriété :

(Relation entre fonctions hyperboliques de même argument)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$ch\,x + sh\,x = e^{x} \quad , \qquad ch\,x - sh\,x = e^{-x}$$

$$ch^2\,x - sh^2\,x = 1$$

$$ch\,x = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2\,x}} \quad , sh\,x = \frac{th\,x}{\sqrt{1 - th^2\,x}}$$

Preuve :

$$(ch\,x + sh\,x)\cdot(ch\,x - sh\,x) = e^x e^{-x} = 1$$

$$ch^2\,x - sh^2\,x = 1$$

$$1 - th^2\,x = \frac{1}{ch^2\,x}$$

Et en tenant compte du fait que $ch\,x > 0$et que $sh\,x = ch\,x \cdot th\,x$il vient que

$$ch\,x = \frac{1}{\sqrt{1 - th^2 x}} \quad , \quad sh\,x = \frac{th\,x}{\sqrt{1 - th^2 x}}$$

Variation des fonctions hyperboliques :

Tenant compte de la parité des fonctions hyperboliques nous nous limiterons à l'intervalle $[0, +\infty[$

Dérivées. Sens de variation:

$$(ch\ x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = sh\ x$$

$$(sh\ x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$$

$$(th\ x)' = \frac{1}{ch^2 x} = 1 - th^2 x$$

$$(coth\ x)' = -\frac{1}{sh^2 x} = 1 - coth^2 x$$

De plus

$$\lim_{x\to+\infty} ch\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} sh\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} th\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} = +1$$

$$\lim_{x\to+\infty} coth\, x = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1} = +1$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to0}} coth\, x = \lim_{\substack{> \\ x\to0}} \frac{ch\, x}{sh\, x} = +\infty$$

Fonctions hyperboliques

x	$-\infty 0 + \infty$
$(ch)'x = sh\,x$	$-0+$
$ch\,x$	$+\infty + \infty$ $\searrow$ 0 $\nearrow$
$(sh)'x = ch\,x$	$+$
$sh\,x$	$+\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $-\infty$
$(th)'x = 1/ch^2x$	$+$
$th\,x$	$+1$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ -1
$(coth)'x = -1/sh^2x$	$-$ || $-$
$coth\,x$	-1 $\searrow$ $-\infty$ || $+\infty$ $\searrow$ $+1$

Représentation graphique:

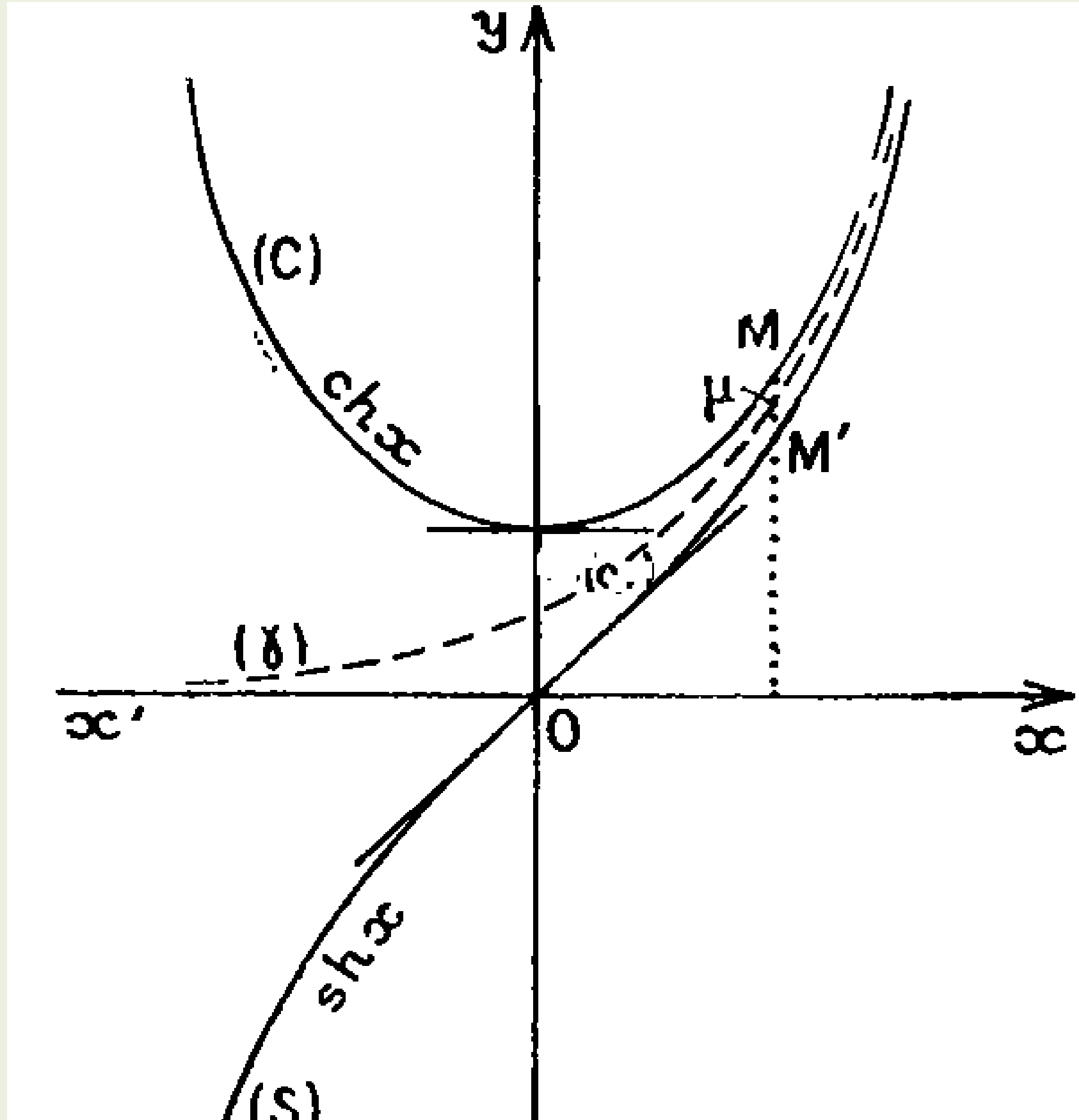
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{sh\ x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{ch\ x}{x} = +\infty$$

Et de plus on a

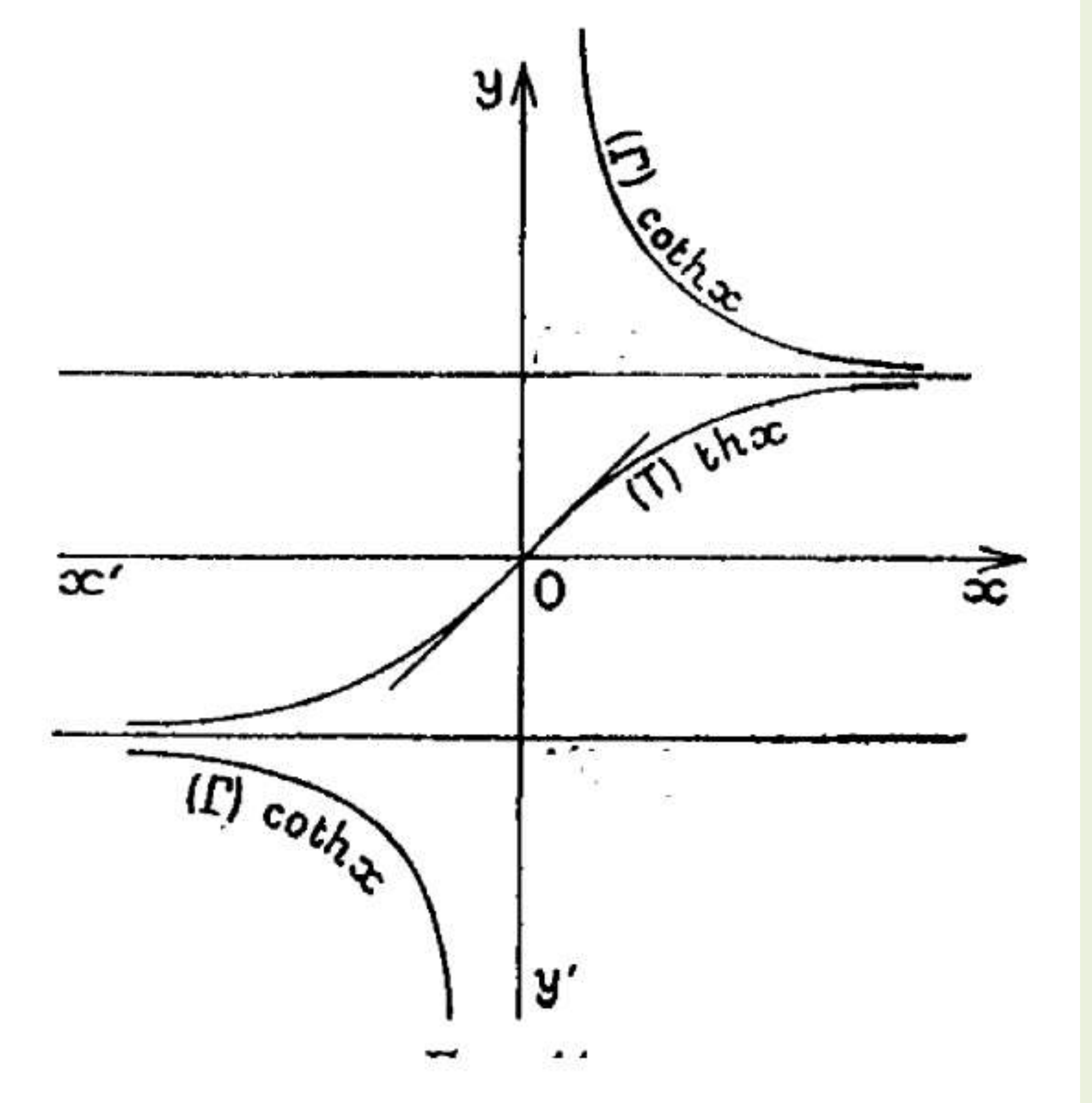
$$sh\ x - \frac{e^x}{2} = -\frac{e^{-x}}{2} \qquad ch\ x - \frac{e^x}{2} = \frac{e^{-x}}{2}$$

comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0^+$, la courbe de ch et la courbe de sh se rapprochent, pour $x \to +\infty$, de la courbe de $x \mapsto \frac{e^x}{2}$, qui est donc une courbe asymptote à ces deux courbes

Fonctions hyperboliques



Fonctions hyperboliques



Trigonométrie hyperboliques :

Formules d'addition :

Pour calculer $ch\,(a+b)$ et $sh\,(a+b)$ connaissant $ch\,a, sh\,a, ch\,b, sh\,b$, il suffit de remplacer dans les formules

$$ch\,(a+b) = ch\,a \cdot ch\,b + sh\,a \cdot sh\,b$$
$$sh\,(a+b) = sh\,a \cdot ch\,b + ch\,a \cdot sh\,b$$

$$ch\,(a-b) = ch\,a \cdot ch\,b - sh\,a \cdot sh\,b$$
$$sh\,(a-b) = sh\,a \cdot ch\,b - ch\,a \cdot sh\,b$$
$$th\,(a+b) = \frac{th\,a + th\,b}{1 + th\,a \cdot th\,b}$$
$$th\,(a-b) = \frac{th\,a - th\,b}{1 - th\,a \cdot th\,b}$$

Trigonométrie hyperbolique

$$ch\,(a+b) + ch\,(a-b) = 2\,ch\,a \cdot ch\,b$$
$$ch\,(a+b) - ch\,(a-b) = 2\,sh\,a \cdot sh\,b$$
$$sh\,(a+b) + sh\,(a-b) = 2\,sh\,a \cdot ch\,b$$
$$ch\,p + ch\,q = 2\,ch\,\frac{p+q}{2} \cdot ch\,\frac{p-q}{2}$$
$$ch\,p - ch\,q = 2\,sh\,\frac{p+q}{2} \cdot sh\,\frac{p-q}{2}$$
$$sh\,p + sh\,q = 2\,sh\,\frac{p+q}{2} \cdot ch\,\frac{p-q}{2}$$
$$sh\,p - sh\,q = 2\,sh\,\frac{p-q}{2} \cdot ch\,\frac{p+q}{2}$$

Formules de multiplication :

Multiplication par 2:

$$ch\,2\,a = ch^2 a + sh^2 a \qquad sh\,2\,a = 2\,sh\,a\,ch\,a$$

$$th\,2a = \frac{2\,th\,a}{1 + th^2 a}$$

$$ch\,2a + 1 = 2\,ch^2 a \qquad ch\,2a - 1 = 2\,sh^2 a$$

$$ch\,2a = \frac{1 + th^2 a}{1 - th^2 a} \qquad sh\,2a = \frac{2\,th\,a}{1 - th^2 a}$$

Trigonométrie hyperbolique

On pose$t = th\ a/2$

$$ch\ a = \frac{1+t^2}{1-t^2}$$

$$sh\ a = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$th\ a = \frac{2t}{1+t^2}$$

Ou pour $u = e^a$

$$ch\ a = \frac{1}{2}\left(u + \frac{1}{u}\right)$$

$$sh\ a = \frac{1}{2}\left(u - \frac{1}{u}\right)$$

$$th\ a = \frac{u^2-1}{u^3+1}$$

Multiplication par un entier naturel quelconque m :

Ecrivons

$$(ch\,a + sh\,a)^m = e^{ma}$$
$$(ch\,a - sh\,a)^m = e^{-ma}$$
$$(ch\,a + sh\,a)^m = ch\,ma + sh\,ma$$
$$(ch\,a - sh\,a)^m = ch\,ma - sh\,ma$$

$$2\,ch\,ma = (ch\,a + sh\,a)^m + (ch\,a - sh\,a)^m$$
$$2\,sh\,ma = (ch\,a + sh\,a)^m - (ch\,a - sh\,a)^m$$

$$th\,ma = \frac{(1 + tha)^m - (1 - tha)^m}{(1 + tha)^m - (1 - tha)^m}$$
$$= \frac{C_m^1 th\,a + C_m^3 th^3 a + \cdots}{1 + C_m^2 th^2\,a + C_m^4 th^4 a + \cdots}$$

Pour $m = 3$:

$$ch\ 3a = ch^3 a + 3\ ch\ a\ sh^2 a$$
$$sh\ 3a = 3\ ch^2 a\ sh\ a + sh^3 a$$
$$th\ 3a = \frac{3\ th\ a + th^3 a}{1 + 3\ th^2 a}$$

d'où

$$ch\ 3a = 4ch^3 a - 3ch\ a$$
$$sh\ 3a = 3\ sh\ a + 4\ sh^3 a$$

et

$$ch^3 a = \frac{ch\ 3a}{4} + \frac{3}{4} ch\ a$$
$$sh^3 a = \frac{sh\ 3a}{4} - \frac{3}{4} sh\ a$$

Fonctions hyperboliques inverses :

Inversion du sinus hyperbolique :

Définition :

La fonction sinus hyperbolique est une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction réciproque est appelée argument sinus hyperbolique ; on le désigne par le symbole $Argsh$ caractérisée par

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R}$$
$$y = sh\, x \Leftrightarrow x = Argsh\, y$$

Propriétés :

- La fonction argument sinus hyperbolique est une fonction impaire
- $\lim\limits_{x \to +\infty} Argsh\, x = +\infty \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} Argsh\, x = -\infty$
- La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable partout dans $\mathbb{R}$ et de plus

  Pour tout $y \in \mathbb{R}$tel que $y = sh\, x$

  $$(Argsh\,)'y = \frac{1}{sh'x} = \frac{1}{ch\, x} = \frac{1}{ch(Argsh\, y)}$$

  or vue que $ch^2x - sh^2x = 1$

  $ch\, x = \sqrt{1 + sh^2x}$

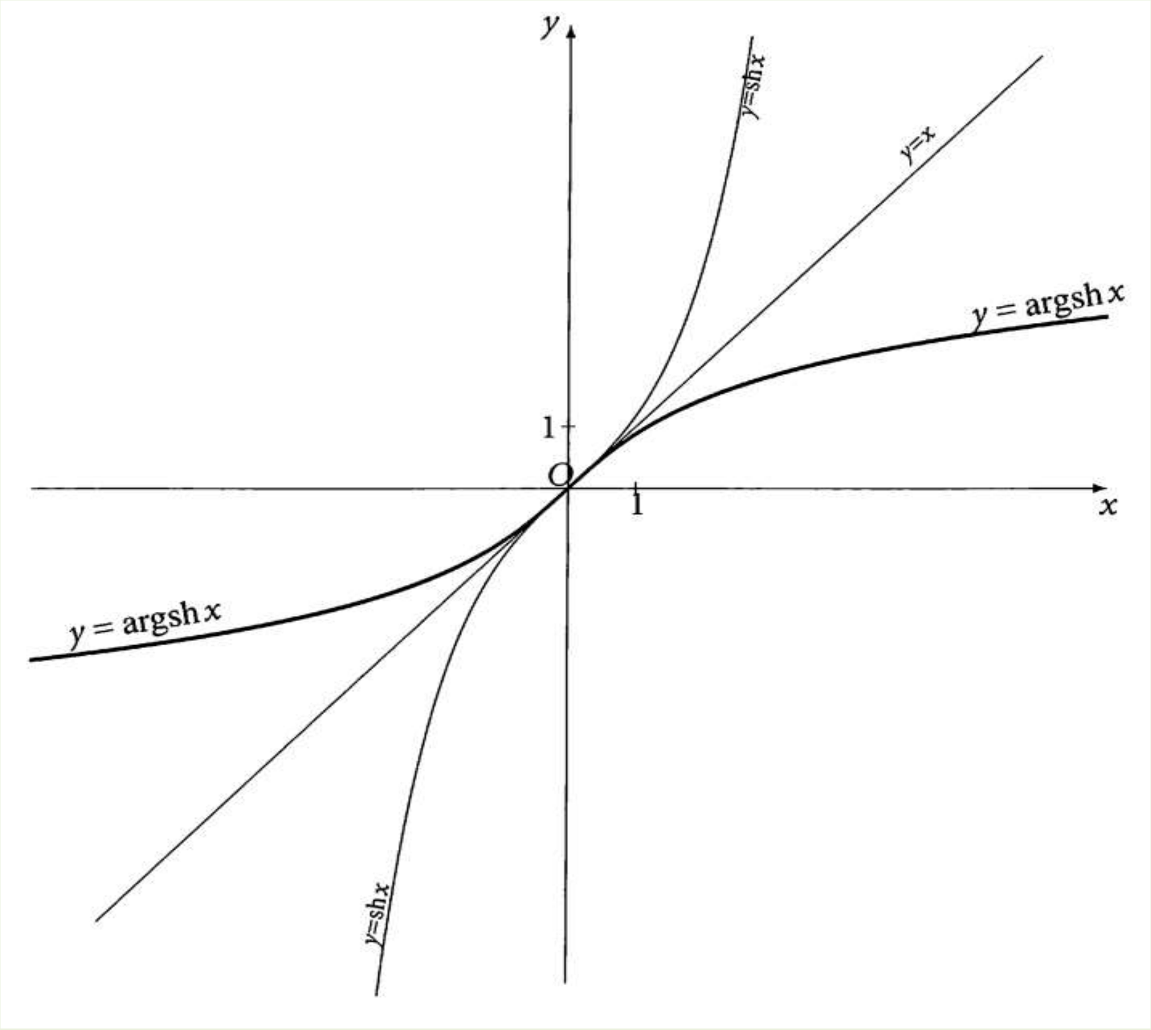
  $ch(Argsh\, y) = \sqrt{1 + y^2}$

$$(Argsh\,)'y = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Tableau de variation de Argsh:

x	$-\infty \quad 0 \quad +\infty$
$(Argsh)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$+$
$argsh\, x$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$

Graphe de Argsh:



Expression logarithmique de $argsh$:

Nous avons que pour tout x dans $\mathbb{R}$

$y = sh\,x$ et $ch\,x = \sqrt{1+y^2}$

Par addition il vient que $e^x = y + \sqrt{1+y^2}$ donc

$$x = \arg sh\,y = ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$$

D’où en déduit que la fonction Argument sinus hyperbolique peut être exprimée en fonction du logarithme comme suite

$$\forall x \in \mathbb{R};\quad Argsh\,x = ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

Inversion du cosinus hyperbolique :

Définition :

La restriction à $[0,+\infty[$ de la fonction cosinus hyperbolique est une application continue et strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[1,+\infty[$. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. Cette fonction réciproque est appelée argument cosinus hyperbolique ; on le désigne par le symbole $Argch$ caractérisée par

$$\forall x \in [0,+\infty[\quad \forall y \in [1,+\infty[\quad y = ch\, x \Leftrightarrow x = Argch\, y$$

Propriétés :

La fonction argument cosinus hyperbolique vérifie que

- $\lim_{x \to +\infty} Argch\, x = +\infty \quad Argch(1) = 0$
- La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable partout dans $]1, +\infty[$
  et de plus
  Pour tout $y \in]1, +\infty[$ tel que $y = ch\, x$ avec $x > 0$

  $$(Argch\,)'y = \frac{1}{ch'x} = \frac{1}{sh\,x} = \frac{1}{sh(Argch\,y)}$$

  or vue que $ch^2x - sh^2x = 1$

  donc $sh^2x = ch^2x - 1$ et $sh\,x = \sqrt{ch^2x - 1}$ il vient que

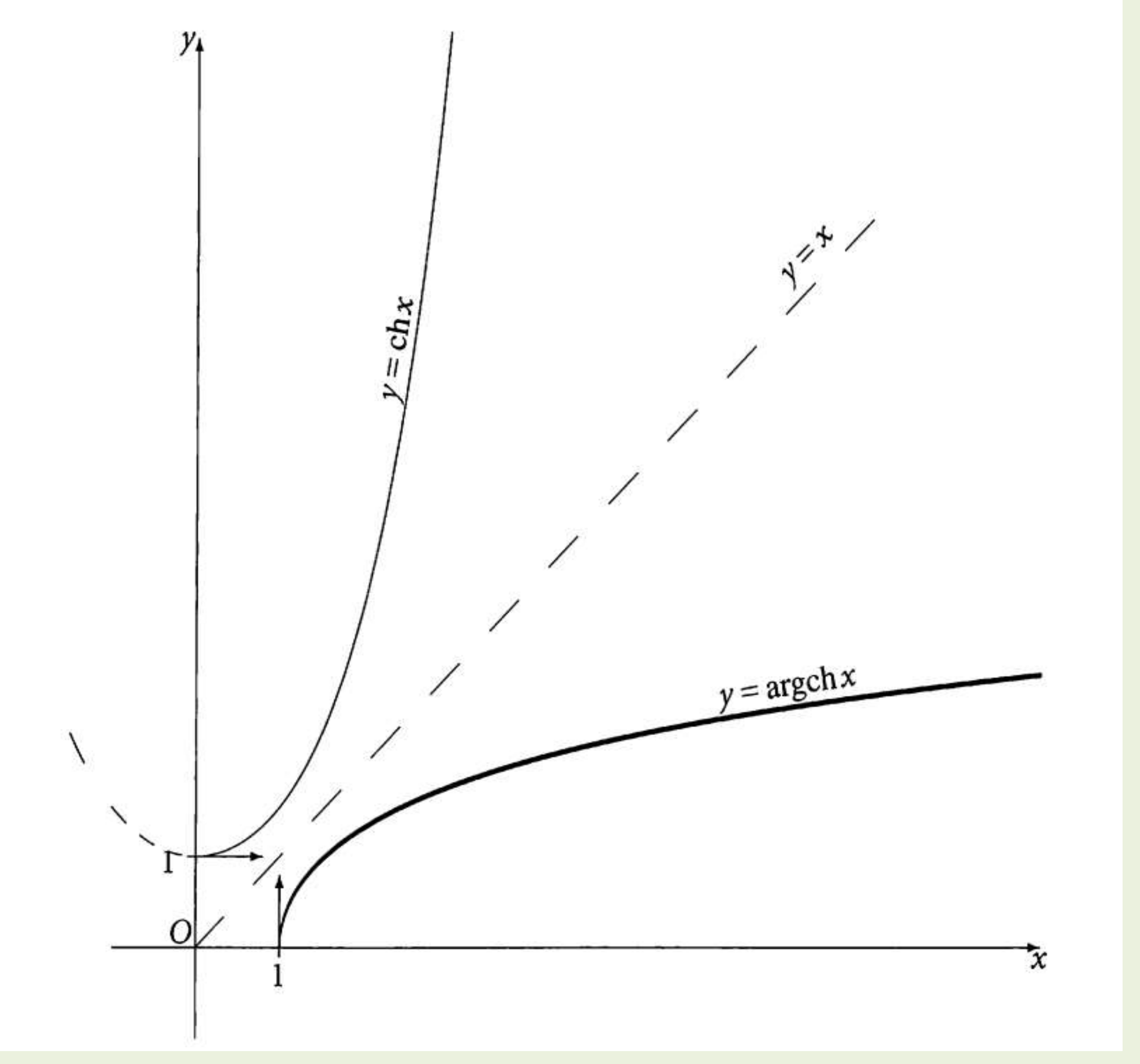
  $sh(Argch\,y) = \sqrt{y^2 - 1}$

$$(Argch\,)'y = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Tableau de variation de Argch:

x		$1 \quad +\infty$
$(Argch)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$+$
$argch\, x$		$0 \nearrow +\infty$

Graphe de Argch:



Expression logarithmique de $argch$:

Nous avons que pour tout x dans $[0, +\infty[$

$y = ch\, x$ et $sh\, x = \sqrt{y^2 - 1}$

Par addition il vient que $e^x = y + \sqrt{y^2 - 1}$ donc

$$x = \arg ch\, y = ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$$

D'où en déduit que la fonction Argument cosinus hyperbolique peut être exprimée en fonction du logarithme comme suite

$$\forall x \in [1, +\infty[;$$

$$Argch\, x = ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Inversion de la tangente hyperbolique :

Définition :

La fonction tangente hyperbolique est une application continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-1,+1[$. On peut donc définir la fonction réciproque, application continue et strictement croissante de $]-1,+1[$ sur $\mathbb{R}$. Cette fonction réciproque est appelée argument tangente hyperbolique ; on la désigne par le symbole $Argth$ caractérisée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in]-1,+1[;$$
$$y = th\, x \Leftrightarrow x = Argth\, y$$

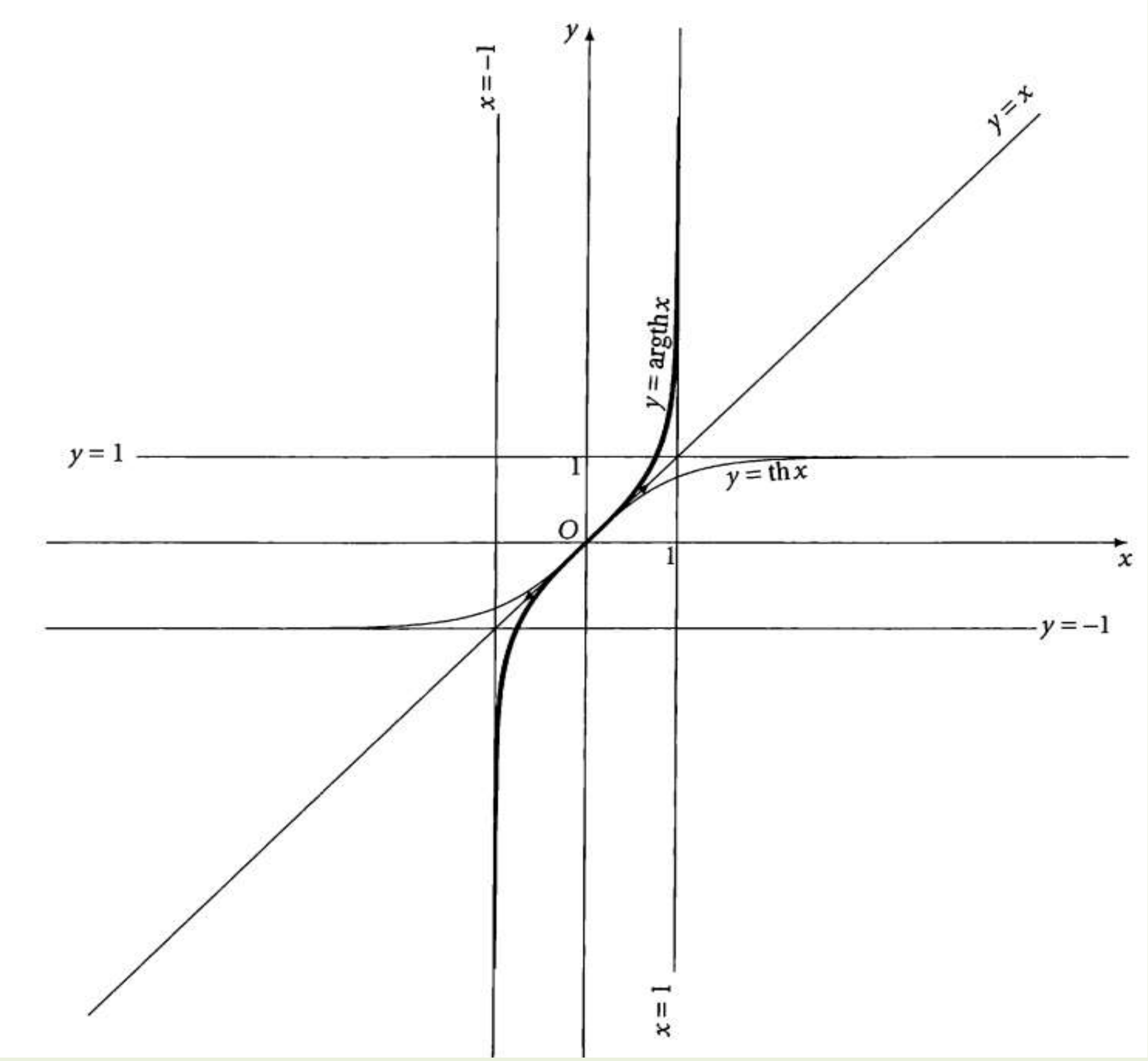
Propriétés :

- La fonction argument tangente hyperbolique est une fonction impaire
- Elle vérifie que
$$\lim_{x \to 1-} Argth\, x = +\infty \quad \lim_{x \to -1+} Argth\, x = -\infty$$
- La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable partout dans $]-1, +1[$
et de plus
Pour tout $y \in]-1, +1[$ tel que $y = th\, x$
$$(Argth\,)'y = \frac{1}{th'x} = \frac{1}{1 - th^2\, x} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Tableau de variation de Argth:

x	$-10+1$
$(Argth)'(x) = \frac{1}{1-x^2}$	$+$
$argth\ x$	$+\infty$ 0 $-\infty$

Graphe de Argch:



Expression logarithmique de $argth$:

Nous avons que pour tout x dans $\mathbb{R}$

$$x = Argth\, y \Leftrightarrow y = th\, x \Leftrightarrow y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

D'où en déduit que la fonction Argument tangente hyperbolique peut être exprimée en fonction du logarithme comme suite

$$\forall x \in \left]-1, +1\right[;$$

$$Argth\, x = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Merci de votre attention