A.KACIMI
Maître de conférences classe A
Faculté de Mathématique
USTHB

Fonctions élémentaires d'une variable réelle

Plan du cours

I.	• Fonction Logarithme • Fonction exponentielle
II.	• Fonction logarithme de base « a » • Fonction exponentielle de base « a » • Fonctions puissances
III.	• Fonctions trigonométriques • Fonctions trigonométriques inverses
IV.	• Fonctions hyperboliques • Fonctions hyperboliques inverses

Plan du cours

I.
- Fonction Logarithme
- Fonction exponentielle

II.
- Fonction logarithme de base « a »
- Fonction exponentielle de base « a »
- Fonctions puissances

III.
- Fonctions trigonométriques
- Fonctions trigonométriques inverses

IV.
- Fonctions hyperboliques
- Fonctions hyperboliques inverses

Prérequis

1. Les nombres réels

2. Les applications

3.Les Suites numériques

4. Les fonctions numériques

5. Continuité et dérivabilité des fonctions numériques

Proposition 00:

$$f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui possède une dérivée strictement positive sur I (respectivement strictement négative sur I)

alors f représente une bijection de I sur $J = f(I)$ admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie de J sur I

De plus

- f^{-1} est dérivable sur J et $\forall x \in J; f^{-1}(x) = \dfrac{1}{f\prime[f^{-1}(x)]}$
- f et f^{-1} ont même sens de variation
- Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la première bissectrice.

I. Fonction Logarithme népérien

Soit $m \in \mathbb{Q} - \{-1\}$

$$x \longmapsto x^m$$

$$x \longmapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad \text{où} \quad c \in \mathbb{R}$$

Pour $m = -1$

$$x \longmapsto \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

I. Fonction Logarithme népérien

Définition:

On appelle fonction logarithme népérien que l'on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1 et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{array}{llll} ln: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

I. Fonction Logarithme népérien

Proposition:

La fonction logarithme est

- Indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $(lnx)' = \frac{1}{x}\ , x \in \mathbb{R}_+^*$
- Strictement croissante
- Concave

I. Fonction Logarithme népérien

Preuve:

$$ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

$(lnx)' = \frac{1}{x}$pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$(lnx)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

I. Fonction Logarithme népérien

Proposition : (Propriété fondamentale)

La fonction logarithme népérien vérifie que

Pour tout x, y dans $\mathbb{R}_+^*$

$$ln(xy) = ln(x) + ln(y)$$

De plus pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$ln(x^n) = nln(x)$$

Preuve:

Pour tout $y > 0$

$$u_y(x) = ln(xy)$$

Pour tout $x > 0$

$$u'_y(x) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*;\ ln(xy) - lnx = C$$

En prenant $x = 1$; $C = lny$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n > 0$$

$$ln(x_1 x_2 \cdots x_n)$$
$$= ln(x_1) + ln(x_2) + \cdots + ln(x_n)$$

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x$, il vient

$$\forall x > 0, \forall n \in \mathbb{N}; ln(x^n) = nln(x)$$

Conséquence:

1. $\forall x, y > 0; ln\left(\frac{x}{y}\right) = ln(x) - ln(y),$
2. $\forall x > 0, \forall r \in \mathbb{Q}; ln(x^r) = r ln(x).$

Preuve:

1. $z = \frac{x}{y}$ donc que $x = zy$

$$ln(x) = ln(yz) = lny + lnz$$

$$lnz = ln\left(\frac{x}{y}\right) = lnx - lny$$

en prenant $x = 1$

$$\forall y > 0; ln\left(\frac{1}{y}\right) = -lny$$

I. Fonction Logarithme népérien

2. $n \in \mathbb{Z}$ on a $ln(x^n) = nlnx$

$n = -m$ avec $m \in \mathbb{N}$

$$ln(x^n) = ln(1/x)^m = mln(1/x)$$
$$= -mln(x)$$

posons $y = \sqrt[n]{x}$ ie $x = y^n$

$$lnx = ln(y^n) = nln(y)$$

$$ln\left(x^{(1/n)}\right) = (1/n)ln(x)$$

$r = \frac{p}{q}$ tel que $p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$ln(x^r) = ln\left((x^p)^{1/q}\right) = (1/q)(plnx)$$
$$= rlnx$$

I. Fonction Logarithme népérien

Proposition :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\longrightarrow 0} ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

Preuve:

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} ln(2^n) = +\infty$$

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} ln(x) = +\infty$$

$$ln(1/x) = -ln(x)$$

$$x \to ln(1+x); \ \frac{d}{dx} ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$$

Pour $x = 0$

$$\frac{d}{dx} ln(1+x)|_{x=0} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{ln(1+x)-0}{x-0} = 1$$

I. Fonction Logarithme népérien

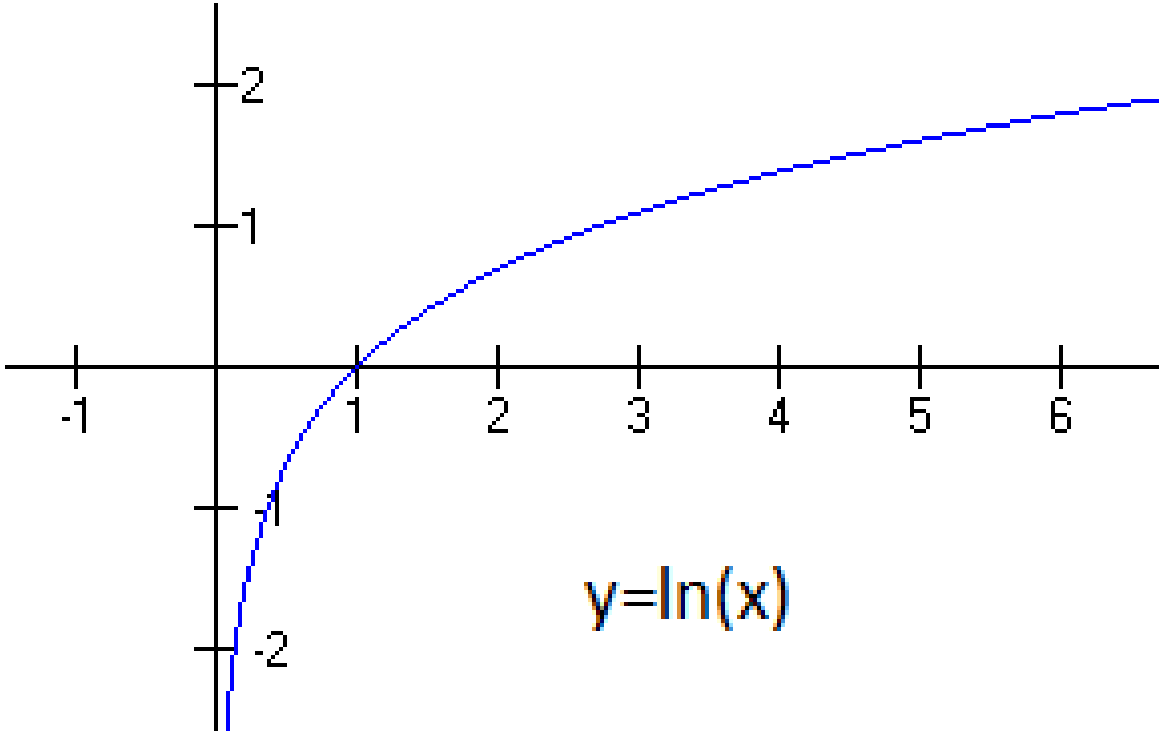
Tableau de variation:

$\boldsymbol{x}$			$\mathbf{01}+\infty$
$ln'(x)$			$+$
$ln(x)$			$-\infty$ $\nearrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

I. Fonction Logarithme népérien

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$$

Graphe du logarithme népérien:



Dérivée logarithmique

$$u : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u(x_0) \neq 0$$

Définition :

On appelle dérivée logarithmique de u en x_0, le nombre

$$\frac{u'(x_0)}{u(x_0)}.$$

Remarque:

$$x \longrightarrow ln\big(u(x)\big) \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}.$$

$$(ln|u(x)|)' = \frac{u'(x_0)}{u(x_0)}$$

I. Fonction Logarithme népérien

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + uv'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\frac{u}{v}} = \frac{u'v - uv'}{uv} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

Exemple:

La relation donnant la période T d'un pendule de torsion en fonction de sa constante de torsion C et de son moment d'inertie J est

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}$$

Déduire l'incertitude sur la période.

Solution:

$$ln(T) = ln\left(2\pi\sqrt{\frac{J}{C}}\right) = ln(2\pi) + ln\left(\sqrt{\frac{J}{C}}\right)$$

$$ln(T) = ln(2\pi) + \frac{1}{2}[ln(J) - ln(C)]$$

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{dJ}{J} - \frac{dC}{C}\right]$$

D'où l'incertitude ΔT vérifie

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta C}{C}\right]$$

Donc

$$\Delta T = \frac{T}{2}\left[\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta C}{C}\right]$$

II. Fonction exponentielle

Définition:

On appelle fonction exponentielle, notée exp la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

et on a

$$y = exp(x) \Leftrightarrow x = ln(y); \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Proposition:

La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$

$$exp: \quad \mathbb{R} \longrightarrow \quad \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longmapsto y = exp(x)$$

sa dérivée

$$(exp)'(x) = \frac{1}{ln'(y)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{y}\right)} = exp(x)$$

De plus

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} exp(x) = +\infty, \lim_{x \longrightarrow -\infty} exp(x) = 0$$

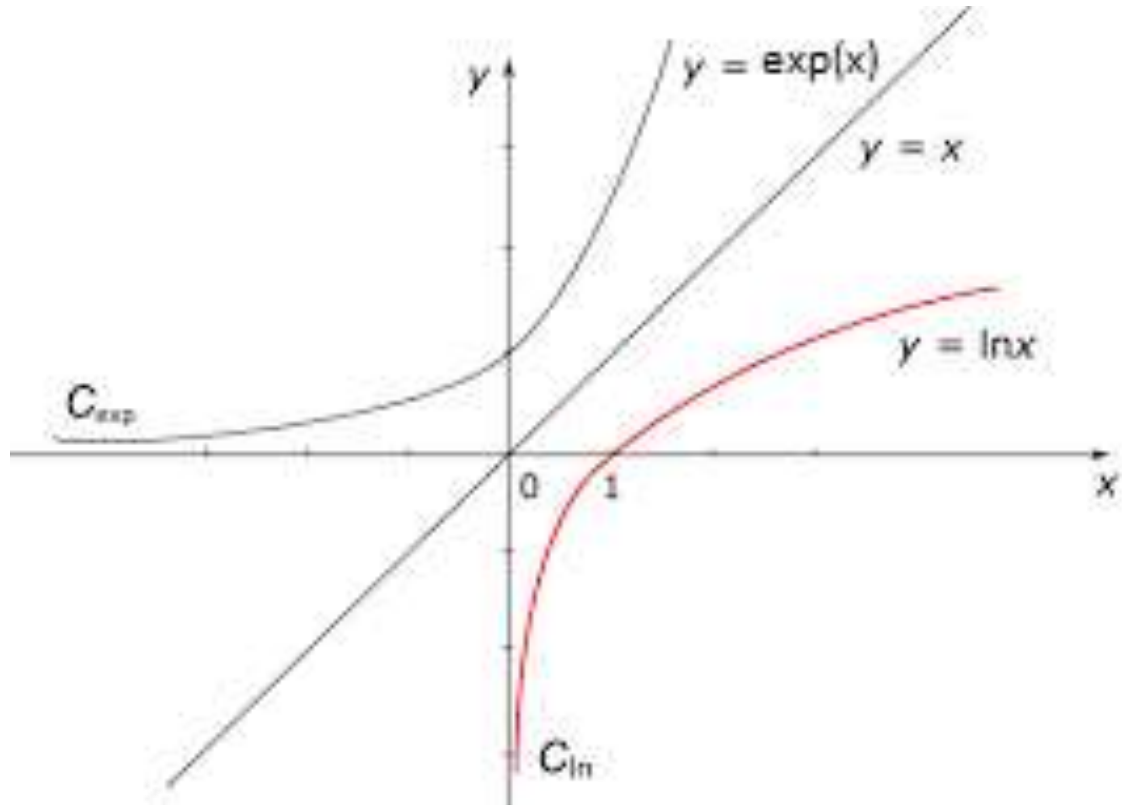
II. Fonction exponentielle

Tableau de variations:

$\boldsymbol{x}$	$-\infty$	$\mathbf{0}$	$+\infty$
$exp'(x)$		$+$	
$exp(x)$	0 $\nearrow$	1	$\nearrow$ $+\infty$

I. Fonction exponentielle

Graphe de l’exponentielle:



II. Fonctions exponentielle

Proposition:

1. $exp(0) = 1$
2. Pour tout x, y dans$\mathbb{R}$

$$exp(x+y) = exp(x)exp(y)$$

3. Pour tout $x$dans$\mathbb{R}$

$$exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$$

4. Pour tout x, y dans $\mathbb{R}$

$$exp(x-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$$

5. Pour tout x dans $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$;

$$exp(nx) = \left(exp(x)\right)^n$$

Preuve:

- $ln1 = 0 \Leftrightarrow exp(0) = 1$

- $ln\big(exp(x+y)\big) = x + y$, et $ln\big(exp(x)exp(y)\big) = ln\big(exp(x)\big) + ln\big(exp(y)\big) = x + y$

- $ln\big(exp(-x)\big) = -x$ et
$$ln\left(\frac{1}{exp(x)}\right) = -ln\big(exp(x)\big) = -x$$

- $exp(x-y) = exp\big(x + (-y)\big) = exp(x)exp(-y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$

- $ln\big(exp(nx)\big) = nx$ et
$$ln\left(\big(exp(x)\big)^n\right) = nln\big(exp(x)\big) = nx$$

Théorème fondamentaux:

Soit la suite $(U_n)_{n\geq 0}$

$$U_0 = 1, U_1 = 1 + \frac{1}{1!}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Lemme 1:

La suite $(U_n)_{n\geq 0}$est convergente et de plus sa limite est un nombre irrationnel

Preuve du lemme:

$$V_1 = 1 + \frac{1}{1!}, \qquad V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0, \qquad \forall n > 1$$

$$\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n = L \in \mathbb{R}$$

$$\forall n; \;\; U_n < L < V_n$$

Suite de la preuve:

Montrons par l'absurde que $L \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

$$L \in \mathbb{Q}; \qquad L = \frac{P}{N}$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{N!} < \frac{P}{N}$$

$$< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{N!} + \frac{1}{N!}$$

$$A < P(N-1)! < A + 1$$

$$A = 2N! + \frac{N!}{2!} + \cdots + N(N-1) + N + 1$$

$$L \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

Définition du nombre e d'Euler:

On désigne par la lettre e le nombre irrationnel limite de la suite $(U_n)_{n\geq 0}$ de terme général

$$U_0 = 1\,, \qquad U_1 = 1 + \frac{1}{1!}$$

$$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$e \cong 2.718\ 281\ 828$$

Théorème 1:

$$exp(1) = e$$

Preuve :

$$exp(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} exp(\theta_n);$$

avec $0 < \theta_n < 1$

$$exp(1) = U_n + \frac{1}{(n+1)!} exp(\theta_n)$$

$$\frac{1}{(n+1)!} < exp(1) - U_n = \frac{1}{(n+1)!} exp(\theta_n) < \frac{exp(1)}{(n+1)!}$$

avec $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{(n+1)!} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{exp(1)}{(n+1)!} = 0$

d'où

$$U_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} exp(1)$$

$$exp(1) = e$$

Théorème 2:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

Preuve:

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

$$x_n = \frac{1}{n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 0$$

On obtient que:

$$\frac{1}{x_n}ln(1+x_n) = nln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$= ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} 1$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = exp\left[ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]\xrightarrow[n\longrightarrow+\infty]{} e$$

Nouvelle notation de la fonction exponentielle:

$$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}\,;\ exp(nx) = \big(exp(x)\big)^n$$

$$exp(n) = \big(exp(1)\big)^n = e^n$$

$$ln\big(e^{(1/q)}\big) = (1/q)ln(e) = 1/q$$

$$exp(1/q) = e^{(1/q)}$$

pour tout $r = p/q \in \mathbb{Q}$avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{0\}$, on a

$$exp(p/q) = \big(exp(1/q)\big)^p = e^{(p/q)}$$

$$\forall r \in \mathbb{Q};\quad exp(r) = e^r$$

définie sur $\mathbb{Q}$ par $r \longrightarrow e^r$

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\quad exp(x) = e^x$$