

Chapitre 6

Les développements limités

Introduction.

On a vu que, par l'intermédiaire de la formule de Taylor, on peut approximer une fonction f par un polynôme. Mais dans la formule de Taylor, on exige de la fonction f d'être régulière c'est à dire dérivable jusqu'à l'ordre n sur un voisinage du point x_0 . Par contre, cette régularité n'est pas exigée pour obtenir un développement limité d'une fonction. C'est là l'avantage des développements limités qui permettent d'approcher des fonctions régulières ou non par des polynômes. L'autre avantage est, de passer par des techniques simples de calcul de D.L. pour trouver les développements de Taylor, pour les fonctions régulières, sans connaître les dérivées de f en x_0 , et par conséquent, on peut obtenir simplement des dérivées de f en x_0 . Nous commençons par les développements limités en zéro.

6.1 Développements limités en zéro.

Définition 6.1.1 Soit f une fonction définie sur un $v(0)$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 si, il existe $n + 1$ nombres réels (a_0, a_1, \dots, a_n) et une fonction

$$\begin{aligned}\varphi : v(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0,$$

tel que

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + x^n\varphi(x). \quad (6.1.1)$$

7. Les développements limités

- Le polynôme $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ est appelé partie régulière du développement limité de f .
- L'expression $x^n\varphi(x)$ est appelée reste d'ordre n du D.L. de f .
- Le monôme du plus bas degré de la partie régulière est appelé Partie principale du D.L. de f .

Remarque 6.1.2 Du fait que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0,$$

alors (6.1.1) s'écrit sous la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n). \quad (6.1.2)$$

Exemple 6.1.3 Soit f la fonction définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 2x + 5x^4 + 3x^7 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (6.1.3)$$

Cette fonction admet un $D.L.$ d'ordre 3 car elle s'écrit sous la forme:

$$f(x) = 1 - 2x + 0x^2 + 0x^3 + x^3 \left(5x^4 + 3x^4 \cos \frac{1}{x} \right) = 1 - 2x + o(x^3).$$

En fait cette fonction admet un $D.L.$ d'ordre k pour tout $k = 0, 1, \dots, 6$. En effet, $f(x)$ s'écrit:

$$f(x) = 1 - 2x + 5x^4 + x^6 \left(3x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right) = 1 - 2x + 5x^4 + o(x^6),$$

mais f n'admet pas de $D.L.$ d'ordre 7 en 0, car

$$f(x) = 1 - 2x + 5x^4 + 0x^7 + 3x^7 \cos \left(\frac{1}{x} \right),$$

mais

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left(\frac{1}{x} \right) \neq 0.$$

Remarque 6.1.4 La fonction f admet un $D.L.$ en zéro jusqu'à l'ordre 6 sans qu'elle ne soit continue en zéro. C'est l'avantage des $D.L.$ par rapport à la formule de Taylor qui exige beaucoup de régularité à la fonction f .

Unicité du développement limité.

7. Les développements limités

Proposition 6.1.5 *Si f admet un développement limité d'ordre n en zéro, alors ce développement est unique.*

6.1.1 D.L. obtenus par la formule de Tylor

Proposition 6.1.6 *Si la fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Taylor-Young (11.5.4), en $x_0 = 0$, alors elle admet un développement limité d'ordre n en zéro. De plus on a la relation*

$$a_k = \frac{f^k(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.1.4)$$

De la formule de Taylor et de l'unicité du développement limité on obtient les formules suivantes

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \end{aligned}$$

Exercice En déduire les D.L. des fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f_3(x) = \sqrt{1+x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque 6.1.7 On a vu plus haut qu'une fonction admet un D.L. en zéro, sans qu'elle ne soit continue en zéro. Mais il y'a comme même une condition que la fonction f doit satisfaire pour admettre un D.L. en zéro.

Condition nécessaire d'existence d'un D.L.

Proposition 6.1.8 *Si f admet un développement limité en 0 alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe et est finie.*

Remarque 6.1.9 Cette proposition permet de reconnaître les fonction n'ayant pas de développement limités. Par exemple les fonctions suivantes n'ont pas de développements limités en 0:

$$\ln x, \quad \frac{1}{x}, \quad \cotg x, \quad \sin \frac{1}{x}, \dots$$

car les 3 premières fonctions ont des limites infinies en zéro alors que la dernière n'admet pas de limite en zéro.

7. Les développements limités

6.1.2 Opérations sur les D.L.

Théorème 6.1.10 Soient f et g deux fonctions ayant des développements limités d'ordre n en zéro. Alors

1. les fonctions $f + g$ et fg admettent des développements limités d'ordre n en zéro,
2. si $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ admettent des développements limités en zéro.

De plus

1. la partie régulière du développement limité de $f+g$ est la somme des parties régulières des développements limités de f et de g .
2. la partie régulière du développement limité de fg s'obtient du produit des parties régulières des développements limités de f et de g , en ne gardant que les monômes de degrés inférieures ou égaux à n .
3. la partie régulière du développement limité de $\frac{f}{g}$ est le quotient d'ordre n de la division suivant les puissances croissantes des parties régulières des développements limités de f et de g .

Exemple 6.1.11 Pour obtenir le développement limité, d'ordre 4 de la fonction

$$f(x) = e^x \sin x$$

on multiplie les parties régulières des D.L. des e^x et $\sin x$. on a donc

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\right) \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + o(x^4) \\ &= x \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) - \frac{x^3}{3!}(1 + x) + o(x^4) \\ &= x + x^2 + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) x^4 + o(x^4) \\ &= x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4) \end{aligned}$$

Exemple 6.1.12 En utilisant la division suivant les puissances croissantes, on obtient

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

7. Les développements limités

6.1.3 D.L. de la fonction composée

Proposition 6.1.13 *Si les fonctions f et u ont des développements limités d'ordre n et si en outre $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ alors la fonction $g = f \circ u$ admet un développement limité d'ordre n . De plus la partie régulière du D.L. de g s'obtient de la partie régulière du D.L. de f en substituant la partie régulière du D.L. de u et en ne gardant que les monômes de degrés inférieures ou égaux à n .*

Exemple 6.1.14 Le D.L. d'ordre 4 de la fonction $e^{\sin x}$ s'obtient comme suit:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) + \frac{1}{2!} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^3 + \frac{1}{4!} \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{3!}\right) x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4!} x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

6.1.4 Intégration d'un D.L.

Soit f une fonction intégrable sur un voisinage de zéro. et soit

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

la primitive de f , s'annulant en zéro. On a le résultat suivant qui donne le D.L. de F à partir du D.L. de f .

Proposition 6.1.15 *Soit f une fonction intégrable sur un voisinage de zéro. Si f admet un développement limité d'ordre n en zéro alors sa primitive F admet un développement limité d'ordre $n + 1$ en zéro. De plus, la partie régulière du D.L. de F est la primitive, s'annulant en zéro, de la partie régulière du développement limité de f .*

Exemple 6.1.16 Sachant que (Trouver le résultat suivant)

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n+1}),$$

on obtient

$$\operatorname{Arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}).$$

Remarque 6.1.17 Comme annoncé en introduction de ce chapitre, le développement limité d'une fonction régulière permet de calculer les dérivées de cette fonction par la relation (6.1.4). Comme exemple

7. Les développements limités

$$(\operatorname{Arctg})^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k, \\ (-1)^k (2k)! & \text{si } n = 2k + 1. \end{cases}$$

Exercice

1) Déterminer les D.L. d'ordre 5 des fonctions

$$\operatorname{Arcsin} x, \quad \ln(3 + 2x) \quad \text{et} \quad \operatorname{Argsh} x.$$

2) Déterminer la dérivée d'ordre 5 en zéro de la fonction $f(x) = \operatorname{Arcsin} x \ln(3 + 2x)$.

6.1.5 Dérivation d'un D.L.

Proposition 6.1.18 *Supposons que*

1. *f admet un développement limité d'ordre n en zéro,*
2. *f est dérivable sur un voisinage de zéro*
3. *f' admet un développement limité d'ordre $n - 1$ en zéro,*

alors la partie régulière du développement limité de f' est la dérivée de la partie régulière du développement limité de f .

En effet, parce que la partie régulière du développement limité de f est une primitive de la partie régulière du développement limité de f' .

Remarque 6.1.19

1. Le fait que f admet un développement limité d'ordre n n'implique pas que f est dérivable.
2. Même si f est dérivable sur un voisinage de zéro, la fonction f' peut ne pas admettre de développement limité en zéro.

6.1.6 développement limité en x_0

Définition 6.1.20 Soit f une fonction définie sur un $v(x_0)$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si, il existe $n + 1$ nombres réels (a_0, a_1, \dots, a_n) et une fonction

$$\begin{aligned} \varphi : v(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

7. Les développements limités

avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x - x_0) = 0,$$

tel que

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varphi(x - x_0). \quad (6.1.5)$$

Remarque 6.1.21 Du fait que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^n \varphi(x - x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x - x_0) = 0,$$

alors (6.1.5) s'écrit sous la forme:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (6.1.6)$$

Proposition 6.1.22 Une fonction f admet un développement limité, d'ordre n , en x_0 si, et seulement si, la fonction $g(t) = f(t + x_0)$ admet un développement limité, d'ordre n , en zéro.

Exemple 6.1.23 Calculons le D.L. d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \cos x$ en $x_0 = \frac{\pi}{6}$. On pose $t = x - \frac{\pi}{6}$ et on a

$$\begin{aligned} \cos x &= \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos t - \frac{1}{2} \sin t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^4)\right] - \frac{1}{2} \left[t - \frac{t^3}{3!} + o(t^4)\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{12} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{48} \left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^4\right) \end{aligned}$$

Exemple 6.1.24 Calcul du D.L. d'ordre 3 de e^x en $x_0 = -2$. On posant $t = x + 2$ on aura:

$$\begin{aligned} e^x &= e^{-2} e^t \\ &= e^{-2} \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + o(t^3)\right] \\ &= e^{-2} \left[1 + (x + 2) + \frac{1}{2!}(x + 2)^2 + \frac{1}{3!}(x + 2)^3 + o((x + 2)^3)\right] \end{aligned}$$

7. Les développements limités

6.1.7 développement limité au voisinage de l'infini

Définition 6.1.25 Soit f une fonction définie sur $]\alpha, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $+\infty$ si, il existe $n + 1$ nombres réels (a_0, a_1, \dots, a_n) et une fonction

$$\begin{aligned}\varphi : v(0) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \varphi(x)\end{aligned}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

tels que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varphi\left(\frac{1}{x}\right). \quad (6.1.7)$$

Remarque 6.1.26 L'expression (6.1.7) s'écrit sous la forme:

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right). \quad (6.1.8)$$

Proposition 6.1.27 Une fonction f admet un développement limité, d'ordre n , au voisinage de $+\infty$ si et seulement si la fonction $g(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ admet un développement limité, d'ordre n , en zéro.

Remarque 6.1.28 On a la même définition pour le développement limité au voisinage de $-\infty$, pour une fonction définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha[$.

Application Déterminons, lorsque $x \rightarrow -\infty$, l'équation de l'asymptôte et sa position par rapport à la courbe de la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 - 1} - x.$$

7. Les développements limités

On pose $t = \frac{1}{x} \rightarrow 0$. On a alors

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{8x^3 + 4x^2 - 1} &= \sqrt[3]{\frac{8}{t^3} + \frac{4}{t^2} - 1} \\&= \frac{2}{t} \sqrt[3]{1 + \frac{t}{2} - \frac{t^3}{8}} \\&= \frac{2}{t} \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{8} \right) - \frac{1}{9} \left(\frac{t}{2} - \frac{t^3}{8} \right)^2 + o(t^2) \right] \\&= \frac{2}{t} \left[1 + \frac{t}{6} - \frac{t^2}{36} + o(t^2) \right] \\&= \frac{2}{t} + \frac{1}{3} - \frac{t}{18} + o(t).\end{aligned}$$

On obtient alors,

$$f(x) = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

L'équation de l'asymptôte à la courbe, lorsque $x \rightarrow -\infty$ est:

$$y = x + \frac{1}{3}.$$

De plus

$$f(x) - y = -\frac{1}{18x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow 0^+,$$

la courbe est donc au dessus de l'asymptôte, lorsque $x \rightarrow -\infty$.

6.1.8 développement limité généralisé

Commençons par un exemple.

Exemple 6.1.29 La fonction $f(x) = \cotg x$ n'admet pas de développement limité en zéro, car $\lim_{x \rightarrow 0} \cotg x$ n'est pas finie. Mais en utilisant les développements limités, par exemple d'ordre 5, en zéro des fonction \cos et \sin on a:

$$\begin{aligned}\cotg x &= \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} \\&= \frac{1}{x} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)}\end{aligned}$$

on voit bien que la fonction $x \cotg x$ admet un développement limité d'ordre 4 en zéro.

7. Les développements limités

Définition 6.1.30 Supposons que la fonction f n'a pas de développement limité en zéro, mais il existe $\alpha > 0$ tel que

$$x^\alpha f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + o(x^n).$$

Alors,

$$f(x) = \frac{a_0}{x^\alpha} + \frac{a_1}{x^{1-\alpha}} + \frac{a_2}{x^{2-\alpha}} + \dots + \frac{a_n}{x^{n-\alpha}} + o(x^{n-\alpha}),$$

et l'expression

$$\frac{a_0}{x^\alpha} + \frac{a_1}{x^{1-\alpha}} + \frac{a_2}{x^{2-\alpha}} + \dots + \frac{a_n}{x^{n-\alpha}} + o(x^{n-\alpha})$$

est appelée développement limité généralisé en zéro de f .

Pour l'exemple précédent, utilisant la division d'ordre 4, suivant les puissances croissantes on a :

$$x \cotg x = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{17}{3.5!} x^4 + o(x^4).$$

On obtient alors :

$$\cotg x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{17}{3.5!} x^3 + o(x^3).$$

6.2 Exercices

Exercice 1 Donner la réponse, en la justifiant, aux questions suivantes :

- 1) La fonction $x \mapsto \ln x$ a-t-elle un développement limité en zéro ?
- 2) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ a-t-elle un développement limité d'ordre 1 en zéro ?
- 3) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^7}$ a-t-elle un développement limité en zéro d'ordre 3 d'ordre 4 ?
- 4) La fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ possède-t-elle un développement limité en zéro d'ordre n ?

Exercice 2 Calculer le développement limité d'ordre n en 0 des fonctions suivantes

1. $(2 - \operatorname{Arctg} x)(e^x - \sin x)$ $n = 3$; 2. $(1 + \cos x)(x - \ln x)$ $n = 5$, 3. $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$ $n = 4$
4. $\frac{\ln(1 + x^3)}{x - \operatorname{tg} x}$ $n = 3$; 5. $e^{\cos x}$ $n = 3$; 6. $\sqrt[5]{1 - \ln(1 - x)}$ $n = 3$; 7. $(\cos x)^{\sin x}$ $n = 5$.

Exercice 3 Calculer le développement limité en zéro d'ordre 2 des fonctions

1. $f(x) = \frac{\exp\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) - e^2}{\ln(1 - x)}$; 2. $g(x) = \frac{\ln(1 + x^2) + \sin^2 x}{1 - \cos x}$.

7. Les développements limités

Exercice 4 Trouver un équivalent simple, lorsque x tend vers zéro des fonctions suivantes

1. $\sin x - \operatorname{tg} x$; 2. $e^{\cos x} + e^{\operatorname{ch} x} - 2e$; 3. $\sqrt{1 + \sin x} - e^{\frac{x}{2}}$; 4. $\frac{1 - \operatorname{Arctg} x}{3 - e^x} - \frac{2}{1 + x^3}$.

Exercice 5 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arctg} x - \operatorname{Arcsin} x}{x - \operatorname{tg} x}$; 2. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{3 - \sin^2 x}}{\cos^2 x}$; 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - x - 1}{x^2}$.

Exercice 6

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente en ce point.

2) Mêmes questions pour les fonctions:

1. $f(x) = \frac{1}{1+x}$,

2. $g(x) = \frac{1}{1+e^x}$,

Exercice 7 Etudier l'existence de l'asymptote oblique et la position de la courbe par rapport à l'asymptote pour les fonctions suivantes

1. $f_1(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$,

2. $f_2(x) = x^2 \ln \left(\frac{x+1}{x} \right)$,

3. $f_3(x) = x \exp \left(\frac{2x}{x^2 - 1} \right)$,

4. $f_4(x) = (3x^2 + 6x - 10) \ln \frac{x+4}{x+2}$,

5. $f_5(x) = \frac{x^2}{x-1} \cos \frac{1}{x}$.