

Algèbre de Boole

Michel BERNE

8 octobre 2013

Sommaire

I	Relation d'ordre	4
1	Définition	4
2	Éléments remarquables liés à une relation d'ordre	4
2.1	Minorants et majorants	4
2.2	Éléments minimaux et maximaux	4
2.3	Plus petit élément, plus grand élément	5
2.4	Borne inférieure et borne supérieure	5
II	Treillis	6
3	Définition	6
4	Opérations sur un treillis	6
5	Propriétés	6
5.1	Treillis distributifs	7
5.2	Treillis complémentés	7

Première partie

Relation d'ordre

1 Définition

Soit E un ensemble et R une relation linéaire entre éléments de E . R est un ordre sur $E \Leftrightarrow R$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

- réflexive : $\forall a \in E, aRa$
- antisymétrique : $\forall a, b \in E, aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitive : $\forall a, b, c \in E, aRc$

Remarque Si pour tous $a, b \in E$ on a $(aRb) \vee (bRa)$, l'ordre est total. Sinon, l'ordre est partiel (certains éléments ne sont pas « comparables » par R car on a ni (aRb) ni (bRa)).

Exemples

1. Soit $E \neq \emptyset$: l'inclusion définit un ordre (partiel) sur $P(E)$. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Rightarrow x \in B$
On n'a ni $A \subset B$, ni $B \subset A$, l'ordre est partiel. D'autre part, on a bien :
 - $A \subset A$ pour toute $A \in P(E)$, \subset est réflexive
 - $(A \subset B \text{ et } B \subset A) \Rightarrow A = B$: c'est la définition même de $A = B$
 - $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$ \subset est asymétrique, \subset est donc un ordre de $P(E)$.
2. La relation « a divise b » définit un ordre partiel sur \mathbb{N}^* (notation : $a|b$). En effet, pour tout $a \neq 0, a|a$ donc $|$ est réflexive. $(a|b) \text{ et } (b|a) \Rightarrow a = b$ donc $|$ est asymétrique. $(a|b) \text{ et } (b|a) \Rightarrow a|c$ donc $|$ est transitive. Par exemple, $5|15$ mais $\neg(4|15)$: l'ordre est donc partiel.
3. Représenter la relation $a|b$ sur l'ensemble des diviseurs de 30, puis 60.
 - Les diviseurs de 30 : 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30
 - Les diviseurs de 60 : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60Sur \mathbb{N} , la relation \leq usuelle définit un ordre total.

2 Éléments remarquables liés à une relation d'ordre

2.1 Minorants et majorants

Soit E un ensemble ordonné par R et $A \subset E$:

- $m \in E$ est un minorant de A pour $R \Leftrightarrow \forall a \in A, mRa$
- $M \in E$ est un majorant de A pour $R \Leftrightarrow \forall a \in A, aRM$

2.2 Éléments minimaux et maximaux

$a \in A$ est minimal dans A pour $R \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \text{ et } xRa) \Rightarrow x = a$, et maximal dans A pour $R \Leftrightarrow \forall x, (x \in A \text{ et } aRx) \Rightarrow x = a$.

Un élément minimal dans A n'a pas de minorant strict dans A . Un élément maximal dans A n'a pas de majorant strict dans A .

2.3 Plus petit élément, plus grand élément

$A \subset E$ admet un plus petit élément (noté $\min(A)$) $\Leftrightarrow \exists a \in A, \forall x \in A, aRx$. $A \subset E$ admet un plus grand élément (noté $\max(A)$) $\Leftrightarrow \exists a \in A, \forall x \in A, xRa$.

Remarques

- $\min(A)$ existe \Leftrightarrow il existe un minorant de A qui appartient à A (c'est lui, $\min(A)$)
- $\max(A)$ existe \Leftrightarrow il existe un majorant de A qui appartient à A (c'est lui, $\max(A)$)
- Si $\min(A)$ existe, il est unique ; en effet, si $a = \min(A)$ et $b = \min(A)$, on doit voir aRb et bRa , d'où $a = b$ par antisymétrie
- Si $\max(A)$ existe, il est unique ; en effet, si $a = \max(A)$ et $b = \max(A)$, on doit voir bRa et aRb , d'où $a = b$ par antisymétrie

2.4 Borne inférieure et borne supérieure

$A \subset E$ admet une borne inférieure (notée $\inf(A)$) $\Leftrightarrow A$ admet des minorants dans E et l'ensemble des minorants admet un plus grand élément (c'est $\inf(A)$).

$A \subset E$ admet une borne supérieure (notée $\sup(A)$) $\Leftrightarrow A$ admet des majorants dans E et l'ensemble des majorants admet un plus petit élément (c'est $\sup(A)$).

Exemple Dans les diviseurs de 30, 1, 3, 5 est majoré par 15 et 30 ; 5, 10, 15 est minoré par 5 et 1.

Deuxième partie

Treillis

Dorénavant, on note par défaut \leq pour une relation d'ordre, et $a < b$ pour ($a \leq b$ et $a \neq b$).

3 Définition

E muni d'un ordre \leq est un treillis \Leftrightarrow quels que soit a, b dans E , il existe $\inf(a, b)$ et $\sup(a, b)$.

Remarque Si \leq est un ordre total, on a $a \leq b$ et $b \leq a$:

- dans le 1^{er} cas : $a = \inf(a, b)$ et $b = \sup(a, b)$
- dans le 2^{ème} cas : $a = \sup(a, b)$ et $b = \inf(a, b)$

Les treillis intéressants sont plutôt ceux pour lequel l'ordre \leq est partiel. Par exemple, $E = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$ est un treillis pour la divisibilité : $\inf(6, 10) = 2$, $\sup(6, 10) = 30$ et $\inf(3, 5) = 1$, $\sup(3, 5) = 15$.

Exemples

1. $E = a, b, c, d$ défini par $\left. \begin{array}{l} a \leq c \\ b \leq c \\ a \leq d \\ b \leq d \end{array} \right\}$ plus la réflexivité et la « fermeture transitive » \leq est bien un ordre (par construction), mais (E, \leq) n'est pas un treillis : c, d n'est pas majoré donc $\sup c, d$ n'existe pas. a et b minorent c, d mais ne sont pas comparables, donc $\inf(c, d)$ n'existe pas.
2. \leq est définie par $x \leq y \Leftrightarrow$ il existe une suite de flèches adjacentes conduisant de x à y (plus la réflexivité). On a bien une structure de treillis et l'ordre est partiel (on n'a ni $b \leq c$ ni $c \leq b$).
3. $E \neq \emptyset$: $(P(E), \subset)$ est un treillis. Pour $A \subset E, B \subset E$ on a $\inf(A, B) = A \cap B$ et $\sup(A, B) = A \cup B$.

4 Opérations sur un treillis

Soit (E, \leq) un treillis. On pose :

$$a + b := \sup(a, b)$$

$$a \times b := \inf(a, b)$$

5 Propriétés

1. $+$ et \times sont associatives et commutatives
2. Si E est fini alors $\sup(E) = \max(E)$ et $\inf(E) = \min(E)$ existent ; si $E = R_1, R_2, \dots, R_n$, on pose :

$$1_E = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \max(E)$$

$$0_E = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = \min(E)$$

3. Si $1_E = \sup(E)$ et $0_E = \inf(E)$ existent, alors :
 - 1_E est absorbant par $+$: $a + 1_E = 1_E$ pour tout $a \in E$

- 1_E est élément neutre par \times : $a \times 1_E = a$ pour tout $a \in E$
- 0_E est absorbant par \times : $a \times 0_E = 0_E$ pour tout $a \in E$
- 0_E est élément neutre par $+$: $a + 0_E = a$ pour tout $a \in E$

5.1 Treillis distributifs

Un treillis (E, \leq) est dit distributif si :

- $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ (distributivité de \times par rapport à $+$)
- $a + b \times c = (a + b) \times (a + c)$ (distributivité de $+$ par rapport \times)

Exemples

1. $E \neq \emptyset, (P(E), \subset)$: ici, $+$ est la réunion et \times est l'intersection, et on a :
 - $((A \cup B) \cap C) = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$2. E = a, b, c, d, e \leq \text{ induite par } \begin{cases} a \leq b \\ a \leq c \\ a \leq e \\ b \leq d \\ c \leq d \\ e \leq d \end{cases}$$

(E, \leq) est bien un treillis, mais il n'est pas distributif :

$$\left(\begin{array}{lcl} (e \times (b + c)) & = & e \times d = e \\ e \times c = a & \Rightarrow & e \times b + e \times c = a + a = a \end{array} \right) \Rightarrow e \times b(b + c) \neq e \times b + e \times c$$

5.2 Treillis complémentés

Soit (E, \leq) un treillis avec $1_E = \sup(E)$ et $0_E = \inf(E)$; (E, \leq) est dit complémenté si, pour chaque $a \in E$, il existe $x \in E$ vérifiant $\begin{cases} a + x = 1_E \\ a \times x = 0_E \end{cases}$

Remarque Si (E, \leq) est distributif, le système ci-dessus admet au plus une solution : on l'appelle le complément de a et on le note \bar{a} . On aura alors évidemment $\bar{\bar{a}} = a$.

5.3 Algèbre de Boole

5.3.1 Définition

Une algèbre de Boole est un treillis distributif complémenté. L'exemple prototype $(P(E), \subset)$ avec $E \neq \emptyset$. Un exemple fondamental est $B = 0, 1$.