Les Matrices en Infographie
Transformations Géométriques en 2D et 3D

Patricia Gaitan

IUT d''Aix-Marseille

Septembre 2013

Outline

1. Rappels d'Algèbre linéaire
   - Produit Scalaire
   - Orthogonalité
   - Projections orthogonales et symétries
   - Construction de bases orthonormées
2. Matrices de Rotations dans $\mathbb{R}^3$
   - La méthode géométrique
     - Rappels dans $\mathbb{R}^2$
     - Rotations dans $\mathbb{R}^3$
   - La méthode algébrique : les quaternions
     - Position du problème
     - Introduction des quaternions

Rappels d'Algèbre linéaire

Produit scalaire

Definition

On dit que l'application $f \; : \; E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** si :

- $\forall (u, u', v, v') \in E^4, \; \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, f est **bilinéaire**

  $f(\alpha u + \beta u', v) = \alpha f(u, v) + \beta f(u', v); \quad f$ linéaire à gauche.

  $f(u, \alpha v + \beta v') = \alpha f(u, v) + \beta f(u, v'); \quad f$ linéaire à droite.

- $\forall (u, v) \in E^2, \; f(u, v) = f(v, u)$: f est **symétrique**.
- $\forall u \in E, \; f(u, u) \in \mathbb{R}^+$: f est **positive**.
- $\forall u \in E, \; f(u, u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$: f est **définie**.

Espace Euclidien

Definition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On dit que E est **préhilbertien réel** s'il est muni d'un produit scalaire.
Un espace **euclidien** est un espace préhilbertien réel de dimension finie.

- Un produit scalaire sur E est donc une forme bilinéaire définie positive.

Notation

- Plutôt que de noter $f(u,v)$ le produit scalaire de u et de v, on note souvent $< u, v >$ ou $u \cdot v$ ou $(u|v)$.
  Avec la notation $< \cdot, \cdot >$ que nous utiliserons, la définition du produit scalaire devient :
  $\forall (u, u', v, v') \in E^4,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$
  $$\begin{cases} < \alpha u + \beta u', v >= \alpha < u, v > + \beta < u', v > \\ < u, \alpha v + \beta v' >= \alpha < u, v > + \beta < u, v' > \\ < u, v >=< v, u >; \quad < u, u > \geq 0; \quad < u, u >= 0 \Longleftrightarrow u = 0. \end{cases}$$
- Si E est un espace vectoriel euclidien, alors tout sous-espace vectoriel F de E est encore euclidien, avec la restriction du produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition

Soit $< \cdot, \cdot >$ *un produit scalaire sur* E. *Alors* $\forall (u, v) \in E^2$, *on a*

$$< u, v >^2 \leq < u, u > < v, v > .$$

Exemple classique : produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Soit $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathbb{R}^n$. On appelle produit scalaire des vecteurs u et v, noté $< u, v >$, l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$< u, v >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n =^t uv =^t vu.$$

Norme associée à un produit scalaire

Proposition

Soit $< \cdot, \cdot >$ *un produit scalaire sur* E *et* $u \in E$. *On appelle* **norme euclidienne** *associée au produit scalaire* $< \cdot, \cdot >$ *l'application notée* $\| \cdot \|$ *et définie par*

$$\|u\| = \sqrt{< u, u >}.$$

Cette application vérifie les propriétés suivantes :

- $\|u\| \geq 0 \quad \forall\ u \in E \quad \textit{et} \quad \|u\| = 0 \implies u = 0.$
- $\|\lambda u\| = |\lambda|.\|u\| \quad \textit{pour}\ \lambda \in \mathbb{R},\ u \in E.$
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \textit{pour}\ (u, v) \in E^2.$

Distance associée à un produit scalaire

Definition

Soit $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit la norme du vecteur V par

$$\|V\| = \sqrt{< V, V >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2},$$

et la distance de V à W par

$$d(V, W) = \|V - W\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$$

Propriétés élémentaires

- $\|V\| \geq 0 \;\; \forall\, V \in \mathbb{R}^n \quad$ et $\quad \|V\| = 0 \implies V = 0.$
- $\|\lambda V\| = |\lambda|.\|V\|$ pour $\lambda \in \mathbb{R},\; V \in \mathbb{R}^n$.
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$ pour $V, W \in \mathbb{R}^n$.
- $d(V, W) \geq 0$ pour $V, W \in \mathbb{R}^n$.
- $d(V, W) = d(W, V)$ pour $V, W \in \mathbb{R}^n$.
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W)$ pour $V, W, Z \in \mathbb{R}^n$.

Relation entre le produit scalaire et la norme associée

Proposition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$.
$\forall\ (u, v) \in E^2$, $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, *on a :*

$$\|\alpha u + \beta v\|^2 = \alpha^2\|u\|^2 + 2\alpha\beta < u, v > + \beta^2\|v\|^2.$$

En particulier

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2 < u, v > + \|v\|^2,$$

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - 2 < u, v > + \|v\|^2,$$

$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2+\|v\|^2)$, **identité du parallélogramme**,

$$< u, v >= \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2).$$

Notion d'Angle dans $\mathbb{R}^2$

Proposition

Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ *et* $v' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ *deux vecteurs non nuls de* $\mathbb{R}^2$*.*
Soit θ *l'angle entre les droites* $\mathbb{R}v$ *et* $\mathbb{R}v'$*. Alors*

$$\cos\theta = \frac{< v, v' >}{\|v\| \cdot \|v'\|}.$$

Supposons $\|v\| = \|v'\| = 1$ (il suffit de remplacer v par $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$ et v' par $v'_1 = \frac{v'}{\|v'\|}$).

Notion d'Angle dans $\mathbb{R}^2$

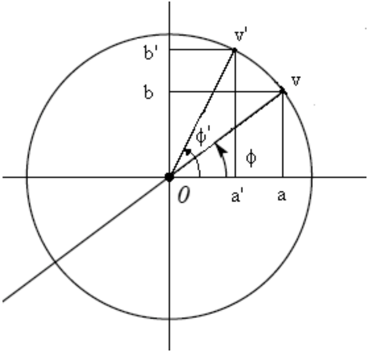


FIGURE: Angle entre deux vecteurs

$$\cos\theta = \cos(\phi' - \phi) = \cos\phi\cos\phi' + \sin\phi\sin\phi' = aa' + bb' = < v, v' > .$$

Vecteurs unitaires, vecteurs orthogonaux

Dans tout ce qui suit E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ muni d'un produit scalaire $< \cdot, \cdot >$ et de la norme associée.

Definition

Un vecteur u de E est dit **unitaire** (ou encore **normé**) si

$$\|u\| = 1.$$

Deux vecteurs u et v de E sont dits **orthogonaux** si

$$< u, v >= 0.$$

Remarques

- Ces notions dépendent évidemment du produit scalaire utilisé sur E. Si on en change, les vecteurs qui étaient orthogonaux ne le sont donc plus nécessairement.
- Si $u \neq 0$, les vecteurs $\pm\frac{u}{\|u\|}$ sont unitaires et ce sont les seuls de la droite $\mathbb{R}u$.
- La définition de l'orthogonalité est symétrique car $< u, v >=< v, u >$.
- Le seul vecteur u qui est orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

Produits scalaires et familles orthonormées

Definition

On dit qu'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est **orthogonale**, si les u_i sont orthogonaux deux à deux.

Si de plus ils sont unitaires, on dit que la famille est **orthonormée**.

Remarques

- Une base $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$< q_i, q_j >= \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{pour } \; 1 \leq i, j \leq n$$

  est une base **orthonormale** de $\mathbb{R}^n$ (δ_{ij} symboles de Kronecker).
- Soit $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ une base de $\mathbb{R}^n$. Alors dans l'écriture

$$v = \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + ... + \alpha_n q_n$$

  les coefficients α_1, α_2,..., α_n sont déterminés par

$$\alpha_1 =< v, q_1 >, \;\; \alpha_2 =< v, q_2 >, \; ..., \; \alpha_n =< v, q_n >,$$

$$\begin{aligned} < v, q_i > &= < \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 + ... + \alpha_n q_n, q_i > \\ &= \alpha_1 < q_1, q_i > + \alpha_2 < q_2, q_i > + ... + \alpha_n < q_n, q_i >= \alpha_i. \end{aligned}$$

Remarques

Soit $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ un système de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit $Q = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs q_1, q_2, ..., q_n. $Q \in \mathcal{M}_{n,n}$ et de plus, on a

$$\begin{aligned} {}^tQ \cdot Q &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} < q_1, q_1 > & < q_1, q_2 > & \dots & < q_1, q_n > \\ < q_2, q_1 > & < q_2, q_2 > & \dots & < q_2, q_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < q_n, q_1 > & < q_n, q_2 > & \dots & < q_n, q_n > \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarques

Donc $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

$$\iff {}^t Q \cdot Q = I \iff Q^{-1} = {}^t Q.$$

Definition

Une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_{n,n}$ telle que $Q^{-1} = {}^t Q$ est une **matrice orthogonale**.

Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Proposition

Soit $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *une base de* $\mathbb{R}^n$*. Alors, il existe une et une seule base orthonormale* $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *telle que*

$$\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + ... + \mathbb{R}v_k = \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 + ... + \mathbb{R}q_k \quad \textit{pour} \ \ 1 \leq k \leq n.$$

(Les segments initiaux correspondants de la base initiale et de la base orthonormale engendrent les **mêmes** *sous-espaces).*
Cette base est obtenue de la manière suivante :

$$q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 \quad \textit{et} \ \forall k \in \{2, ..., n\}, \ q_k = \frac{1}{\|q_k^*\|} q_k^*$$

$$\textit{avec} \ q_k^* = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} < v_k, q_j > q_j.$$

Démonstration

Construisons par réitération q_1, q_2,..., $q_k \in \mathbb{R}^n$ tels que

- $< q_i, q_j >= \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq k.$
- $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{R}v_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{R}q_i.$

$\underline{k = 1}$
$v_1 \neq 0$, soit $q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$.
Alors $< q_1, q_1 >= q_1 = \frac{<v_1, v_1>}{\|v_1\|^2} = 1$ et $\mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}q_1$.

Démonstration

$\underline{k=2}$
Soit $q_2^* = v_2 - < v_2, q_1 > q_1$.
Alors $q_2^* \neq 0$ puisque $v_2 \notin \mathbb{R}v_1 = \mathbb{R}q_1$ et

$$\begin{aligned} < q_2^*, q_1 > &= < v_2 - < v_2, q_1 > q_1, q_1 > \\ &= < v_2, q_1 > - < v_2, q_1 >< q_1, q_1 > \\ &= 0 \end{aligned}$$

Posons $q_2 = \frac{1}{\|q_2^*\|} q_2^*$, on a donc

$$< q_1, q_1 >=< q_2, q_2 >= 1, \quad < q_1, q_2 >= 0.$$

De plus, $\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 = \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2$ car
$q_2 \in \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$ et $v_2 \in \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2$.

Démonstration

$\underline{k=3}$
Soit $q_3^* = v_3 - < v_3, q_1 > q_1 - < v_3, q_2 > q_2$.
Alors $q_3^* \neq 0$ puisque $v_3 \notin \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2$ et

$$\begin{array}{rcl} < q_3^*, q_1 > & = & < v_3 - < v_3, q_1 > q_1 - < v_3, q_2 > q_2, q_1 > \\ & = & < v_3, q_1 > - < v_3, q_1 >< q_1, q_1 > - < v_3, q_2 >< q_2, q_1 \\ & = & 0 \end{array}$$

De même $< q_3^*, q_2 >= 0$. Posons $q_3 = \frac{1}{\|q_3^*\|} q_3^*$, on a donc

$$< q_1, q_1 >=< q_2, q_2 >=< q_3, q_3 >= 1, \ < q_1, q_2 >=< q_1, q_3 >=< q_2, q_3 >= 0.$$

De plus, $\mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3 = \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 + \mathbb{R}q_3$ car
$q_3 \in \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 + \mathbb{R}v_3 = \mathbb{R}v_1 + \mathbb{R}v_2 + \mathbb{R}v_3$ et
$v_3 \in \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 + \mathbb{R}q_3$.

Démonstration

$\underline{k \ \to k+1}$

q_1, q_2,..., q_k sont déjà construits et on a

- $< q_i, q_j >= \delta_{ij}, \ \ 1 \leq i, j \leq k.$
- $\sum_{i=1}^{k} \mathbb{R} v_i = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{R} q_i.$

Soit $q_{k+1}^* = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, q_i > q_i$.
Alors $q_{k+1}^* \neq 0$ puisque $v_{k+1} \notin \sum_{j=1}^{k} \mathbb{R} q_j = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{R} v_j$ et $< q_{k+1}^*, q_1 >=< q_{k+1}^*, q_2 >= ... =< q_{k+1}^*, q_k >= 0$. Posons $q_{k+1} = \frac{1}{\|q_{k+1}^*\|} q_{k+1}^*$, on a donc

$$< q_1, q_1 >=< q_2, q_2 >= ... =< q_{k+1}, q_{k+1} >= 1, \ < q_{k+1}, q_j >= 0 \ \text{ pour } \ j = 1, ..., k.$$

De plus, $\sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{R} v_j = \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{R} q_j$ car
$q_{k+1} \in \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{R} v_j = \mathbb{R} v_1 + \mathbb{R} v_2 + \mathbb{R} v_3$ et $v_{k+1} \in \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{R} q_j$.

Version matricielle de l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt

Proposition

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ *une matrice* **inversible**. *Alors, il existe une matrice* **orthogonale** $Q = (q_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ *et une matrice* **triangulaire supérieure** $U = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ *(*$c_{ij} = 0$ *pour* $i > j$ *et* $c_{ii} \neq 0$*) telles que*

$$A = Q \cdot U.$$

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n \end{pmatrix}$ avec $v_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$, $1 \leq j \leq n$. Soit $Q = \begin{pmatrix} q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ la matrice orthogonale dont les colonnes $q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \vdots \\ q_{nj} \end{pmatrix}$ sont la base orthonormale obtenue à partir de la base $\{v_1, ..., v_n\}$ par l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt. On a donc

$$v_j =< q_1, v_j > q_1+ < q_2, v_j > q_2 + ...+ < q_j, v_j > q_j, \ \ 1 \leq j \leq n,$$

c'est à dire par passage aux composantes

$$a_{ij} =< q_1, v_j > q_{i1}+ < q_2, v_j > q_{i2}+...+ < q_j, v_j > q_{ij}, \ 1 \leq i, j \leq n,$$

Démonstration

c'est à dire si

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} < q_1, v_1 > & < q_1, v_2 > & \dots & < q_1, v_n > \\ 0 & < q_2, v_2 > & \dots & < q_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & < q_n, v_n > \end{pmatrix},$$

soit

$$A = Q \cdot U.$$

Exemple

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1- Montrer que $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2- Orthonormaliser $\{v_1, v_2, v_3\}$ en une base orthonormale $\{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

1- $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si la matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible. Le test se fait par triangulation, A se triangule en $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ qui est inversible, donc A aussi.

2-

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{3\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Orthogonalité et systèmes linéaires

Definition

Soit v et w deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Soit U et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. $v \perp w$ ("v et w sont orthogonaux") $\iff < v, w >= 0$.
2. $U \perp W \iff < u, w >= 0 \ \forall u \in U, \ \forall w \in W$.
3. $U^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n, \ \ < v, u >= 0 \ \forall u \in U\}$.
   $U^\perp$ est le **complément orthogonal** de U dans $\mathbb{R}^n$.

Remarques

- $U^\perp$ est le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui est orthogonal à U.
- Soit $\left\{ u_1 = \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1n} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{pmatrix}, ..., u_p = \begin{pmatrix} u_{p1} \\ u_{p2} \\ \vdots \\ u_{pn} \end{pmatrix} \right\}$ un système générateur de U. Alors

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \ \left\{ \begin{array}{l} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + ... + u_{1n}x_n = 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + ... + u_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{p1}x_1 + u_{p2}x_2 + ... + u_{pn}x_n = 0 \end{array} \right. \right\}.$$

(Si $U = \mathbb{R}u_1 + \mathbb{R}u_2 + ... + \mathbb{R}u_p$, alors $x \in U^\perp \iff < x, u >= 0, \forall u \in U$
$\iff < x, u_1 >=< x, u_2 >= ... =< x, u_p >= 0$.)

Proposition

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

Remarques :

1. $n = dim\ U + dim\ U^{\perp}$.
2. $\mathbb{R}^n = U + U^{\perp}$ et $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. On dit que $\mathbb{R}^n$ est la **somme directe** de U et $U^{\perp}$, on note $\mathbb{R}^n = U \oplus U^{\perp}$.
3. Soit U_1 et U_2 deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, alors $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$.

Exemple

Soit $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Trouver une base du plan orthogonal à v_1.
2. Construire ensuite une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exemple

Si $U = \mathbb{R}v_1$ alors $U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$.

Les deux solutions fondamentales de l'équation $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$ sont $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$U^\perp = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

On construit ensuite une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ avec l'algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

$$q_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$q_2^* = v_2 - < v_2, q_1 > q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{1}{\|q_2^*\|} q_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$q_3^* = v_3 - < v_3, q_2 > q_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(-2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$q_3 = \frac{1}{\|q_3^*\|} q_3^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Projection Orthogonale

Proposition

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{q_1, q_2, ..., q_r\}$ une base orthonormale de U. Soit $\mathcal{P}_U : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{P}_U(v) = < v, q_1 > q_1 + < v, q_2 > q_2 + ... + < v, q_r > q_r.$$

$\mathcal{P}_U$ est la projection orthogonale sur U (projection sur U parallèlement à $U^\perp$).

- Si $\mathcal{P}_U$ est la projection orthogonale sur U, alors la projection orthogonale sur $U^\perp$ est $I - \mathcal{P}_U$.
- La matrice P associée à $\mathcal{P}_U$ est $P = q_1 \cdot {}^t q_1 + q_2 \cdot {}^t q_2 + ... + q_r \cdot {}^t q_r$ puisque ${}^t q \cdot v = < v, q >$.

Projection orthogonale

Proposition

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soit $\{q_1, q_2, ..., q_r\}$ une base orthonormale de U. La matrice de la projection orthogonale sur U est la matrice P définie par :

$$P = q_1 \cdot^t q_1 + q_2 \cdot^t q_2 + ... + q_r \cdot^t q_r \in \mathcal{M}_{n,n}.$$

- La matrice d'une projection orthogonale est symétrique.

Exemple

Soit $U = \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2 \subset \mathbb{R}^4$ avec

$$q_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } q_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- $\{q_1, q_2\}$ est une base orthonormale de U. En effet $< q_1, q_2 >= 0$.
- Soit $\mathcal{P}_U$ la projection orthogonale sur U.

$$\mathcal{P}_U \ : \ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \ \mathbb{R}^4.$$

Soit P la matrice associée à $\mathcal{P}_U$.

Exemple

$$\begin{aligned}
P &= q_1 \cdot^t q_1 + q_2 \cdot^t q_2 \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Symétrie

Proposition

Soit U un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, soit $\{q_1, q_2, ..., q_r\}$ une base orthonormée de U et $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathcal{S_U} : \mathbb{R}^\backslash \longrightarrow \mathbb{R}^\backslash$ l'application linéaire définie par

$$\mathcal{S}_U(v) = < v, q_1 > q_1 + < v, q_2 > q_2 + ... + < v, q_r > q_r - < v, q_{r+1} > q_{r+1}. - ... - < v, q_n > q_n.$$

$\mathcal{S}_U$ *est la* **symétrie** *par rapport à U.*

- La matrice S associée à $\mathcal{S}_U$ est $S = q_1 \cdot^t q_1 + q_2 \cdot^t q_2 + ... + q_r \cdot^t q_r - q_{r+1} \cdot^t q_{r+1} - ... - q_n \cdot^t q_n$.
- $S = 2P - Id$ où P est la matrice de la projection orthogonale sur U.

Construction de bases orthonormées

- Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt
- Produit vectoriel

Produit vectoriel

Soit q_1, q_2 donnés avec $\|q_1\| = \|q_2\| = 1$ et $< q_1, q_2 >= 0$.

- Comment trouver q_3 pour compléter $\{q_1, q_2\}$ en une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$?
- Solution : le produit vectoriel $q_1 \wedge q_2$
- Rappel : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix}$

Matrices de Rotations dans $\mathbb{R}^3$

Matrices orthogonales

Definition

Une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_{n,n}$ telle que $Q^{-1} =^t Q$ est une **matrice orthogonale**.

Proposition

Soit Q une matrice carrée d'ordre n et T l'application linéaire associée :

$$\begin{array}{rccc} T & : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & Q \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

La matrice Q est orthogonale $\Longleftrightarrow$ l'application T préserve les longueurs (c'est à dire $\|Tx\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$).

Rotations dans $\mathbb{R}^2$

Soit $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,2}$ une matrice orthogonale. Alors, il existe un angle θ unique $(0 \leq \theta < 2\pi)$ tel que :

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} & (1) \\ \\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & (2) \end{cases}$$

Cas (1) : $T_Q \; : \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une rotation d'angle θ.
Cas (2) : $T_Q \; : \; \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est une symétrie par rapport à l'axe Ox suivie d'une rotation d'angle θ.

Rotations dans $\mathbb{R}^2$

Ecrivons d'abord que Q est une matrice orthogonale, c'est à dire $Q \cdot^t Q = I$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

Il existe donc $0 \leq \theta, \theta_1 \leq 2\pi$ tels que

$$a = \cos\theta,\ b = \sin\theta, c = \sin\theta_1,\ d = \cos\theta_1.$$

Mais $ac + bd = \sin(\theta + \theta_1) = 0$ c'est à dire $\theta_1 = -\theta + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Rotations dans $\mathbb{R}^2$

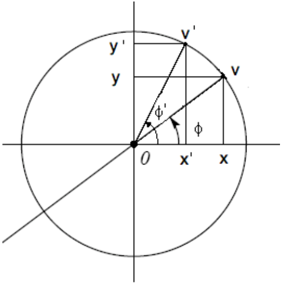
- Si k est pair, $c = -\sin\theta$, $d = \cos\theta$ et
$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

- Si k est impair, $c = \sin\theta$, $d = -\cos\theta$ et
$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Interprétation géométrique

Soit $Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, $T_Q \ : \ \mathbb{R}^2 \ \longrightarrow \ \mathbb{R}^2$ est une rotation d'angle θ. Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$Qv = \begin{pmatrix} x\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$



Interprétation géométrique

- si $\|v\| = 1$ ($x^2 + y^2 = 1$), alors il existe φ tel que $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$.

$$Qv = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix},$$

c'est à dire Qv s'obtient à partir de v par une rotation d'angle θ.

- si v n'est pas de norme 1, soit $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$,

$$Qv = \|v\|Qv_1 = \|v\| \begin{pmatrix} \cos(\varphi+\theta) \\ \sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}.$$

Produit Vectoriel

Definition

Le **produit vectoriel** est une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (v, w) & \mapsto & v \wedge w \end{array}$$

Si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ alors $v \wedge w = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$.

Propriétés du produit vectoriel

1. $v \wedge w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff v$ et w sont proportionnels.
2. Le vecteur $v \wedge w$ est orthogonal à v et à w, c'est à dire :
$$< v, v \wedge w >=< w, v \wedge w >= 0.$$
3. Plus généralement, soit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors
$$< v \wedge w, x >= \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & x_1 \\ v_2 & w_2 & x_2 \\ v_3 & w_3 & x_3 \end{vmatrix} = x_1(v_2w_3 - v_3w_2) + x_2(v_3w_1 - v_1w_3) + x_3(v_1w_2 - v_2w_1$$
4. Pour $x,\ v,\ w \in \mathbb{R}^3$ on a
$$x \wedge (v \wedge w) =< x, w > v- < x, v > w.$$

Rotations dans $\mathbb{R}^3$

Soit $R = (r_{ij}) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ une matrice orthogonale (ie $R^{-1} = {}^tR$)

- Si R est symétrique, on aura $R^{-1} = R \iff R^2 = I$ et on peut construire une base $\{q_1, q_2, q_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $Rq_j = \pm q_j$ pour $j = 1, 2, 3$.
- Si R n'est pas symétrique, alors l'application linéaire f_R associée à la matrice R est une rotation de $\mathbb{R}^3$ définie par la proposition suivante :

Rotations dans $\mathbb{R}^3$

Proposition

Il existe une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *telle que*

$$\begin{aligned} Rq_1 &= \cos\theta q_1 - \sin\theta q_2 \\ Rq_2 &= \sin\theta q_1 + \cos\theta q_2 \\ Rq_3 &= \pm q_3 \end{aligned}$$

C'est à dire $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ *où*

- $U = \mathbb{R}q_3$ *(sous-espace vectoriel engendré par* q_3*) est* **l'axe fixe** *de la rotation* f_R*,*
- $U^\perp = \mathbb{R}q_1 + \mathbb{R}q_2$ *(sous-espace vectoriel engendré par* q_1 *et* q_2*) est* **le plan orthogonal à l'axe fixe** *dans lequel* f_R *induit une rotation d'angle* θ*.*

Détermination de l'axe fixe et de l'angle d'une rotation à partir de la matrice R

- on cherche un vecteur unitaire invariant par R, $Rq_3 = q_3$ (résolution d'un système linéaire).
- on détermine ensuite une base orthonormée $\{q_1, q_2, q_3\}$, q_2 est un vecteur unitaire quelconque orthogonal à q_3 ($< q_2, q_3 >= 0$), et q_1 est tel que $q_1 = q_2 \wedge q_3$.
- le calcul de Rq_1 et/ou Rq_2 va permettre de déterminer l'angle θ (voir proposition précédente).

Reconstruction d'une rotation à partir des données géométriques

Soit $\{q_1, q_2, q_3\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit de trouver la matrice R de la rotation telle que

$$\begin{aligned} Rq_1 &= \cos\theta q_1 - \sin\theta q_2 \\ Rq_2 &= \sin\theta q_1 + \cos\theta q_2 \\ Rq_3 &= q_3 \end{aligned}$$

Soit $Q = (q_1, q_2, q_3)$ la matrice orthogonale dont les colonnes sont les vecteurs q_1, q_2, q_3 et $D(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Notons que $D(\theta)^{-1} = {}^tD(\theta) = D(-\theta)$.

Reconstruction d'une rotation à partir des données géométriques

On a alors

$$RQ = (\cos\theta q_1 - \sin\theta q_2, \sin\theta q_1 + \cos\theta q_2, q_3) = QD(-\theta)$$

$$\iff R = Q\ D(-\theta)\ {}^tQ.$$

Conclusion : la donnée de l'axe fixe permet de déterminer la base orthonormée et donc la matrice Q. La donnée de l'angle θ définie la matrice $D(-\theta)$ et donc d'après la formule précédente, on a la matrice R de la rotation.

Exemple 1

Soit la matrice $R = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que R est la matrice d'une rotation, trouver l'axe fixe U et l'angle θ.

- R matrice non symétrique (${}^tR \neq R$) et orthogonale (${}^tR\ R = I$).
- u appartient à l'axe fixe si $Ru = u$. On résout le système linéaire correspondant, ce qui donne $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. On choisit donc pour q_3 le vecteur unitaire correspondant

$$q_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'axe fixe U est le sous-espace vectoriel engendré par q_3.

Exemple 1

- q_2 est un vecteur unitaire quelconque orthogonal à q_3 :

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_1 = q_2 \wedge q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- calcul de l'angle de la rotation

$$Rq_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cos\theta q_1 - \sin\theta q_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \sin\theta \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix},$$

donc θ est tel que $\cos\theta = \dfrac{-2}{3}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
Soit $\theta = 131,81$ degrés.

Exemple 2

Soit $q_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $q_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $q_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $\{q_1, q_2, q_3\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer la matrice de la rotation d'axe fixe q_1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

- Soit $Q = (q_1, q_2, q_3)$, on vérifie que ${}^tQ\, Q = I$, donc Q est une matrice orthogonale et par suite $\{q_1, q_2, q_3\}$ est une base orthonormée.
- la matrice de la rotation est $R = Q\ D(-\theta)\ {}^tQ$ où

$$D(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2

Donc

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 10 & -2-\sqrt{3} & 2-\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & 13 & -4-3\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} & -4+3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Position du problème

Le but est de montrer comment sur le plan informatique, on peut intégrer au mieux les équations du mouvement d'un solide autour de son centre d'inertie. Ce sont les équations d'attitude. Le repérage de l'attitude d'un corps dans l'espace à l'aide des angles peut se faire par deux méthodes :

- angles d'Euler $\Longrightarrow$ précession, nutation et rotation propre,
- angles de Cardan $\Longrightarrow$ lacet, tangage et roulis.

Ces deux repérages possèdent des indéterminations ou des non définitions d'angles dans certaines configurations. De plus la mise sous forme canonique des équations s'avère très difficile, voire impossible.

Position du problème

L'attitude d'un satellite, c'est à dire son orientation, est équivalente à la connaissance de la position d'un repère R qui lui est lié, rapporté à un repère de référence R_0 inertiel ou pas. Or il existe toujours une rotation qui permet de transformer R_0 en R. Cette rotation peut être caractérisée de nombreuses manières :

Position du problème

- 3 scalaires, des angles par exemple de Cardan ou d'Euler,
- Une matrice de rotation P avec 9 scalaires reliés par 6 relations (3 vecteurs colonnes unitaires et 3 vecteurs lignes unitaires, de plus ${}^tP = P^{-1}$),
- La caractérisation géométrique de la rotation par un axe unitaire et un angle, soit 4 scalaires reliés par une relation (axe unitaire),
- Un être nouveau que nous allons définir par 4 scalaires avec une relation de norme 1 imposée, le quaternion, objet de cette étude.

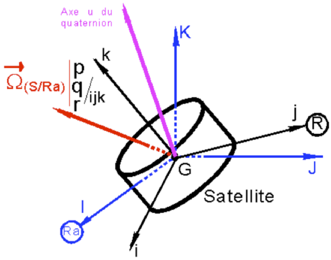
Dans tous les cas il y a 3 inconnues.

Rappels sur la rotation instantanée

La figure ci-dessous montre :

- La base $\{I, J, K\}$ de référence qui est en général inertielle,
- La base mobile $\{i, j, k\}$ en général liée au solide S en mouvement,
- Le vecteur rotation instantanée Ω du solide par rapport au repère inertiel. Dans le cas où la base mobile est liée au corps, c'est la rotation de cette base par rapport à la base absolue.

On note classiquement $\Omega = (p, q, r)$ la matrice des composantes de $\Omega(S/Ra)$ sur la base mobile $\{i, j, k\}$.



Rotation et quaternion élémentaire

Géométriquement il est clair que, quelle que soit la configuration des bases $\{I, J, K\}$ et $\{i, j, k\}$, il existe deux rotations qui permettent de passer de la base $\{I, J, K\}$ à la base $\{i, j, k\}$:

- Rotation d'axe le vecteur $u = (a, b, c)$ et d'angle θ $(0 < \theta < 2\pi)$,
- Rotation d'axe le vecteur $-u = -(a, b, c)$ et d'angle $2\pi - \theta$ $(0 < 2\pi - \theta < 2\pi)$.

L'idée a donc été de créer un être mathématique nouveau, à quatre composantes Q, appelé quaternion, représentant cette transformation géométrique.

Définition d'un quaternion

Definition

Un quaternion est un nombre complexe quadridimensionnel (ou nombre hypercomplexe). Dans la base canonique $(\mathbb{1}, i, j, k)$ avec

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Un quaternion est noté

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha\mathbb{1} + xi + yj + zk$$

α est la partie réelle et $xi + yj + zk$ est la partie imaginaire (vecteur).

Propriétés

L'algèbre des quaternions est le sous-espace vectoriel H de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4, engendré par la base $(\mathbb{1}, i, j, k)$. Un quaternion est donc noté sous forme complexe, dans la base canonique $(\mathbb{1}, i, j, k)$. Les composantes de Q sont réelles, $\mathbb{1}$ est l'élément neutre de la multiplication.

- La première composante α est appelée partie réelle.
- La deuxième composante $xi + yj + zk$ à trois termes est appelée partie imaginaire ou partie pure.
- Une partie imaginaire est assimilable à un vecteur.
- Tout quaternion se décompose de manière unique en sa partie réelle et sa partie imaginaire.
- Un quaternion pur a une partie réelle nulle.
- L'ensemble P des quaternions purs est un sous espace vectoriel de dimension 3.

Opérations dans l'algèbre des quaternions

On définit sur l'ensemble H des quaternions des opérations classiques :

- Une multiplication par un scalaire de définition classique.
- Une opération d'addition associative et commutative de définition évidente.
- Une multiplication associative mais **non commutative** en général, distributive par rapport à l'addition et satisfaisant aux règles de calcul suivantes :

Opérations dans l'algèbre des quaternions

La multiplication des quaternions est définie par :

$$\circ \ : \ \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$

- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$
- $i \circ j = k = -j \circ i$
- $j \circ k = i = -k \circ j$
- $k \circ i = j = -i \circ k$

$\mathbb{H} = (\mathbb{R}^4, \circ)$ s'appelle le corps des quaternions (introduit par Hamilton en 1843).

Opérations dans l'algèbre des quaternions

Le produit de deux quaternions s'explicite aussi à l'aide du produit scalaire des quaternions et du produit vectoriel.

$$P = \begin{pmatrix} \alpha \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \alpha \mathbb{1} + p_1 i + p_2 j + p_3 k = \alpha \mathbb{1} + \vec{p}, \quad \vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \beta \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \beta \mathbb{1} + q_1 i + q_2 j + q_3 k = \beta \mathbb{1} + \vec{q}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$$

Definition

$$P \circ Q = \alpha\beta - < \vec{p}, \vec{q} > + \alpha\vec{q} + \beta\vec{p} + \vec{p} \wedge \vec{q}$$

Exemple

Soit $Q_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\mathbb{1} + 2i - j + k$ et $Q_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\mathbb{1} + i + 2j - 3k$,

alors

$$Q_1 \circ Q_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 15 \\ -8 \end{pmatrix} = 13\mathbb{1} + 10i + 15j - 8k$$

$$Q_2 \circ Q_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 1 \\ -18 \end{pmatrix} = 13\mathbb{1} + 8i + j - 18k.$$

Quaternion conjugué

Definition

Si $Q = \begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \mathbb{1} + xi + yj + zk$ alors le quaternion conjugué est défini par : $\overline{Q} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} = \alpha \mathbb{1} - xi - yj - zk.$

Norme d'un quaternion

Definition

La norme d'un quaternion $Q = \begin{pmatrix} \alpha \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \mathbb{1} + xi + yj + zk$ est définie par :

$$N(Q) = Q \circ \overline{Q} = \overline{Q} \circ Q = \alpha^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Remarque : La norme d'un quaternion est le carré de la norme euclidienne, $N(Q) = \|Q\|^2$.

Inverse d'un quaternion

Definition

Tout quaternion Q non nul est inversible pour la multiplication, et

$$Q^{-1} = \frac{1}{N(Q)}\overline{Q}$$

Si $Q = \alpha\mathbb{1} + xi + yj + zk$, alors

$$Q^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 + x^2 + y^2 + z^2}(\alpha\mathbb{1} - xi - yj - zk)$$

Rotations et quaternions

On cherche via les quaternions à trouver les équations d'une rotation d'axe fixe $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d'angle θ.

- On suppose que $\|\vec{u}\| = 1$,
- On considère le quaternion unitaire

$$Q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ a\sin\frac{\theta}{2} \\ b\sin\frac{\theta}{2} \\ c\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Rotations et quaternions

Definition

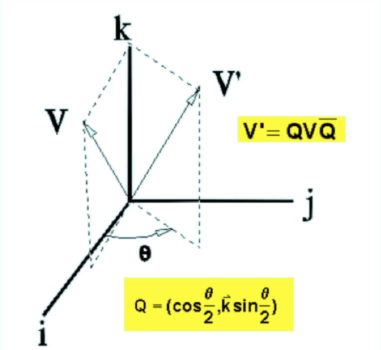
Soit R la matrice de la rotation d'axe fixe $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et d'angle θ.
Soit $Q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{u}\sin\frac{\theta}{2}$ un quaternion unitaire.

Cette rotation transforme V en V' et est définie par :

$$RV = V' = QV\overline{Q}.$$

Rotations et quaternions

Ci-dessous la rotation d'angle θ et d'axe $\vec{k}$ qui transforme V en V' :



Rotations et quaternions

En particulier, si $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ les trois lignes de la matrice R sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{11}i + r_{12}j + r_{13}k = Q \circ i \circ \overline{Q} \\ r_{21}i + r_{22}j + r_{23}k = Q \circ j \circ \overline{Q} \\ r_{31}i + r_{32}j + r_{33}k = Q \circ k \circ \overline{Q} \end{array} \right.$$

Exemple

Trouver les équations de la rotation d'axe fixe dirigé par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et centrée à l'origine.

- Soit $\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- On définit
  $Q = \cos\frac{\theta}{2} + \vec{v}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\vec{v} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(i + j + k)$.
  Donc $Q = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de $Q \circ i \circ \overline{Q}$

$$
\begin{aligned}
Q \circ i \circ \overline{Q} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcul de $Q \circ j \circ \overline{Q}$

$$
\begin{aligned}
Q \circ j \circ \overline{Q} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Calcul de $Q \circ k \circ \overline{Q}$

$$\begin{aligned}
Q \circ k \circ \overline{Q} &= \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Exemple

Donc la matrice de la rotation d'axe fixe dirigé par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ et centrée à l'origine s'écrit :

$$R_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les équations de cette rotation sont donc :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 2y - z) \\ \\ y' = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z) \\ \\ z' = \frac{1}{3}(2x - y + 2z) \end{cases}$$