Algèbre de Boole

Michel BERNE

7 octobre 2013

Sommaire

Première partie
Relation d'ordre

1 Définition

Soit E un ensemble et R une relation linéaire entre éléments de E. R est un ordre sur $E \Leftrightarrow R$ est réflexive, antisymétrique et transitive.
- réflexive : $\forall a \in E, aRa$
- antisymétrique : $\forall a, b \in E, aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitive : $\forall a, b, c \in E, aRc$

Remarque Si pour tous $a, b \in E$ on a $(aRb) \vee (bRa)$, l'ordre est total. Sinon, l'ordre est partiel (certains éléments ne sont pas « comparables » par R car on a ni (aRb) ni (bRa).

Exemples

1. Soit $E \neq \emptyset$: l'inclusion définit un ordre (partiel) sur $P(E)$. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$
   On n'a ni $A \subset B$, ni $B \subset A$, l'ordre est partiel. D'autre part, on a bien :
   - $A \subset A$ pour toute $A \in P(E), C$ est réflexive
   - $(A \subset B$ et $B \subset A) \Rightarrow A = B$: c'est la définition même de $A = B$
   - $(A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

   C est asymétrique, $\subset$ est donc un ordre de $P(E)$.
2. La relation « a divise b » définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ (notation : $a|b$). En effet, pour tout $a \neq 0, a|a$ donc $|$ est réflexive. $(a|b)$ et $(b|a) \Rightarrow a = b$ donc $|$ est asymétrique. $(a|b)$ et $(b|a) \Rightarrow a|c$ donc $|$ est transitive. Par exemple, $5|15$ mais $\neg(4|15)$: l'ordre est donc partiel.
3. Représenter la relation $a|b$ sur l'ensemble des diviseurs de 30, puis 60.
   - Les diviseurs de 30 : $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$
   - Les diviseurs de 60 : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

   Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$ usuelle définit un ordre total.

2 Éléments remarquables liés à une relation d'ordre

2.1 Minorants et majorants

Soit E un ensemble ordonné par R et $A \subset E$:
- $m \in E$ est un minorant de A pour $R \Leftrightarrow \forall a \in A, mRa$
- $M \in E$ est un majorant de A pour $R \Leftrightarrow \forall a \in A, aRM$

2.2 Éléments minimaux et maximaux

$a \in A$ est minimal dans A pour $R \Leftrightarrow \forall x, (x \in A$ et $xRa) \Rightarrow x = a$, et maximal dans A pour $R \Leftrightarrow \forall x, (x \in A$ et $aRx) \Rightarrow x = a$.

Un élément minimal dans A n'a pas de minorant strict dans A. Un élément maximal dans A n'a pas de majorant strict dans A.

2.3 Plus petit élément, plus grand élément

$A \subset E$ admet un plus petit élément (noté $min(A)$)$\Leftrightarrow \exists a \in A, \forall x \in A, aRx$. $A \subset E$ admet un plus grand élément (noté $max(A)$)$\Leftrightarrow \exists a \in A, \forall x \in A, xRa$.

Remarques

- $min(A)$ existe $\Leftrightarrow$ il existe un minorant de A qui appartient à A (c'est lui, $min(A)$)
- $max(A)$ existe $\Leftrightarrow$ il existe un majorant de A qui appartient à A (c'est lui, $max(A)$)
- Si $min(A)$ existe, il est unique ; en effet, si $a = min(A)$ et $b = min(A)$, on doit voir aRb et bRa, d'où $a = b$ par antisymétrie
- Si $max(A)$ existe, il est unique ; en effet, si $a = max(A)$ et $b = max(A)$, on doit voir bRa et aRb, d'où $a = b$ par antisymétrie

2.4 Borne inférieure et borne supérieure

$A \subset E$ admet une borne inférieure (notée $inf(A)$)$\Leftrightarrow A$ admet des minorants dans E et l'ensemble des minorants admet un plus grand élément (c'est $inf(A)$).

$A \subset E$ admet une borne supérieure (notée $sup(A)$)$\Leftrightarrow A$ admet des majorants dans E et l'ensemble des majorants admet un plus petit élément (c'est $asup(A)$).

Exemple Dans les diviseurs de 30, $1, 3, 5$ est majoré par 15 et 30 ; $5, 10, 15$ est minoré par 5 et 1.

Deuxième partie

Treillis

Dorénavant, on note par défaut $\leq$ pour une relation d'ordre, et $a < b$ pour ($a \leq b$ et $a \neq b$).

3 Définition

E muni d'un ordre $\leq$ est un treillis $\Leftrightarrow$ quels que soit a, b dans E, il existe $inf(a, b)$ et $sup(a, b)$.

Remarque Si $\leq$ est un ordre total, on a $a \leq b$ et $b \leq a$:
- dans le 1^{er} cas : $a = inf(a, b)$ et $b = sup(a, b)$
- dans le 2^{ème} cas : $a = sup(a, b)$ et $b = inf(a, b)$

Les treillis intéressants sont plutôt ceux pour lequel l'ordre $\leq$ est partiel. Par exemple, $E = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 10, 15, 30$ est un treillis pour la divisibilité : $inf(6, 10) = 2sup(6, 10) = 30$ et $inf(3, 5) = 1sup(3, 5) = 15$.

Exemples

1. $E = a, b, c, d \leq$ défini par $\left| \begin{array}{l} a \leq c \\ b \leq c \\ a \leq d \\ b \leq d \end{array} \right.$ plus la réflexivité et la « fermeture transitive » $\leq$ est bien un ordre (par construction), mais $(E, \leq)$ n'est pas un treillis : c, d n'est pas majoré donc $supc, d$ n'existe pas. a et b minorent c, d mais ne sont pas comparables, donc $inf(c, d)$ n'existe pas.
2. $\leq$ est définie par $x \leq y \Leftrightarrow$ il existe une suite de flèches adjacentes conduisant de x à y (plus la réflexivité). On a bien une structure de treillis et l'ordre est partiel (on n'a ni $b \leq c$ ni $c \leq b$).
3. $E \neq \emptyset$: $(P(E), \subset)$ est un treillis. Pour $a \subset E, B \subset E$ on a $inf(A, B) = A \cap B$ et $sup(A, B) = A \cup B$.

4 Opérations sur un treillis

Soit $(E, \leq)$ un treillis. On pose :

$$a + b := sup(a, b)$$

$$a \times b := inf(a, b)$$

5 Propriétés

1. $+$ et $\times$ sont associatives et commutatives
2. Si E est fini alors $sup(E) = max(E)$ et $inf(E) = min(E)$ existent ; si $E = R_1, R_2, \ldots, R_n$, on pose :
$$1_E = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = max(E)$$
$$0_E = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n = min(E)$$
3. Si $1_E = sup(E)$ et $0_E = inf(E)$ existent, alors :
   - 1_E est absorbant par $+$: $a + 1_E = 1_E$ pour tout $a \in E$

- A_E est élément neutre par $\times$: $a \times 1_E = a$ pour tout $a \in E$
- 9_E est absorbant par $\times$: $a \times 0_E = 0_E$ pour tout $a \in E$
- 0_E est élément neutre par $+$: $a + 0_E = a$ pour tout $a \in E$

5.1 Treillis distributifs