Algèbre de Boole

Michel BERNE

7 octobre 2013

Sommaire

Première partie

Relation d'ordre

1 Définition

Soit E un ensemble et R une relation linéaire entre éléments de E. R est un ordre sur $E \Leftrightarrow R$ est réflexive, antisymétrique et transitive.

- réflexive : $\forall a \in E, aRa$
- antisymétrique : $\forall a, b \in E, aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
- transitive : $\forall a, b, c \in E, aRc$

Remarque Si pour tous $a, b \in E$ on a $(aRb) \vee (bRa)$, l'ordre est total. Sinon, l'ordre est partiel (certains éléments ne sont pas « comparables » par R car on a ni (aRb) ni (bRa).

Exemples

1. Soit $E \neq \emptyset$: l'inclusion définit un ordre (partiel) sur $P(E)$. $A \subset B \Leftrightarrow \forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B$
   On n'a ni $A \subset B$, ni $B \subset A$, l'ordre est partiel. D'autre part, on a bien :
   - $A \subset A$ pour toute $A \in P(E), C$ est réflexive
   - $(A \subset B$ et $B \subset A) \Rightarrow A = B$: c'est la définition même de $A = B$
   - $(A \subset B$ et $B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

   C est asymétrique, $\subset$ est donc un ordre de $P(E)$.
2. La relation « a divise b » définit un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$ (notation : $a|b$). En effet, pour tout $a \neq 0, a|a$ donc $|$ est réflexive. $(a|b)$ et $(b|a) \Rightarrow a = b$ donc $|$ est asymétrique. $(a|b)$ et $(b|a) \Rightarrow a|c$ donc $|$ est transitive. Par exemple, $5|15$ mais $\neg(4|15)$: l'ordre est donc partiel.
3. Représenter la relation $a|b$ sur l'ensemble des diviseurs de 30, puis 60.
   - Les diviseurs de 30 : $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$
   - Les diviseurs de 60 : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$

   Sur $\mathbb{N}$, la relation $\leq$