МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В. Г. Жадан

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ЧАСТЬ I

ВВЕДЕНИЕ В ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЮ ОПТИМИЗАЦИИ

Допущено
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия для студентов вузов
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2014

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73
Ж15

Рецензенты:
Кафедра исследования операций
факультета вычислительной математики и кибернетики
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова
(зав. кафедрой академик РАН *П. С. Краснощеков*)

Доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Лотов*

Жадан, В. Г.

Ж15 Методы оптимизации. Ч. I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации : учебное пособие / В. Г. Жадан. – М. : МФТИ, 2014. – 271 с.

ISBN 978-5-7417-0514-8 (Ч. I)

Книга является учебным пособием по теории и численным методам решения оптимизационных задач. Написана на основе материалов курса «Методы оптимизации», читаемого автором в течение нескольких лет студентам 3 курса факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета). Первая часть книги посвящена основам выпуклого анализа и условиям оптимальности для различных классов оптимизационных задач.

Предназначено для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Может быть использовано для самостоятельного изучения основных разделов теории оптимизации.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73

ISBN 978-5-7417-0514-8 (Ч. I)
ISBN 978-5-7417-0516-2

Оглавление

Предисловие 5

Введение 6

Глава 1 Основные определения и примеры задач **9**

1.1. Основные определения 9

1.2. Примеры задач оптимизации 14

Глава 2 Выпуклые множества **22**

2.1. Выпуклые и аффинные множества, выпуклые конусы . . 22

2.2. Топологические свойства выпуклых множеств 36

2.3. Проекция точки на выпуклое множество 45

2.4. Отделимость выпуклых множеств 51

2.5. Сопряженные множества и конусы 60

2.6. Многогранные множества и системы линейных неравенств 67

2.7. Линейные матричные неравенства 83

Глава 3 Выпуклые функции **88**

3.1. Определения и основные свойства выпуклых функций . 88

3.2. Дифференциальные критерии выпуклости функций . . . 103

3.3. Дифференцируемость по направлениям и субдифференциал 107

3.4. Сопряженные и полярные функции 124

3.5. Рецессивные конусы и функции 139

3.6. Обобщения выпуклых функций 145

Глава 4 Общие условия оптимальности **153**

4.1. Нелокальные критерии оптимальности 153

4.2. Локальные критерии оптимальности 160

Глава 5 Условия оптимальности для задач математического программирования **170**

5.1. Необходимые условия первого порядка 170

5.2. Условия оптимальности для задач выпуклого программирования 187

5.3. Достаточные условия второго порядка 191

Глава 6 Двойственность для задач оптимизации **203**
6.1. Седловые точки функции Лагранжа 203
6.2. Прямые и двойственные задачи 212
6.3. Несобственные задачи математического программирования 218

Глава 7 Оптимизационные задачи специального вида **224**
7.1. Линейное программирование 224
7.2. Квадратичное программирование 233
7.3. Коническое и полуопределенное программирование . . . 239
7.4. Геометрическое программирование 246

Глава 8 Задачи многокритериальной оптимизации **251**
8.1. Условия оптимальности для задач с несколькими критериями 251
8.2. Многокритериальные задачи принятия решений 260

Ссылки на литературу и комментарии 264

Литература 267

Предисловие

Эта книга написана на основе курса лекций, который читался автором в течение нескольких лет на факультете управления и прикладной математики Московского физико-технического института (государственного университета). Курс годовой, в настоящую первую часть вошел материал первого семестра.

Изложение материала достаточно традиционное для многих современных пособий и книг по теории и методам конечномерной оптимизации. Вначале приводятся некоторые сведения из выпуклого анализа, необходимые для формулировки последующих результатов. После этого рассматриваются собственно задачи оптимизации в различных постановках, включая задачи с несколькими критериями. Для них формулируются необходимые и достаточные условия оптимальности, излагается теория двойственности.

Объем учебного пособия достаточно большой, и при первом чтении некоторые разделы могут быть опущены, особенно это касается доказательств некоторых теорем и утверждений. Тем не менее автор посчитал нужным их привести, чтобы дать возможность при желании самостоятельно ознакомиться как с доказательствами, так и с дополнительными результатами.

Автор считает своим приятным долгом высказать признательность коллегам по кафедре математических основ управления О. С. Федько, А. Г. Бирюкову, Р. В. Константинову, П. Е. Двуреченскому, А. А. Орлову, Ю. В. Дорну за совместную работу по преподаванию данного курса и за полезные замечания, а также выражает благодарность В. У. Малковой за помощь в подготовке иллюстративного материала.

Введение

Задачи оптимизации часто встречаются в научных исследованиях и в практических приложениях в том числе, в техническом проектировании, в экономическом анализе, в планировании эксперимента и т.д. Формализация этих задач приводит к математическим постановкам, которые достаточно интересны как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения нахождения подходов к их аналитическому или численному решению.

Первые задачи оптимизации в простейших своих постановках стали изучаться еще в глубокой древности и послужили одним из стимулов развития математики. В дальнейшем возникали новые более сложные постановки. Очень многие известные в прошлом математики участвовали в решении различных оптимизационных задач, в том числе и прикладных, а также способствовали существенному развитию теории оптимизации, например, братья Бернулли, И. Ньютон, Л. Эйлер, Ж. Лагранж, А. Лежандр, К. Вейерштрасс, В. Гамильтон, А. Пуанкаре, М. В. Остроградский, П. Л. Чебышев и многие другие.

Хотя история задач оптимизации насчитывает достаточно большой период, но ряд очень важных результатов был получен сравнительно недавно, а именно в прошлом, двадцатом веке, в основном в его второй половине. Причинами такого прорыва в этой области послужили, с одной стороны, практические запросы, связанные главным образом с научно-техническим прогрессом и применением его результатов в промышленности, в военно-технической сфере (авиация и ракетно-космическая техника, атомный проект и т.д.). С другой стороны, мощный толчок развитию исследований в области оптимизации в этот период, особенно численных методов решения различных оптимизационных задач, дало появление электронно-вычислительных машин. Они позволили перевести решение оптимизационных задач в практическую плоскость. В настоящее время созданы мощные программные комплексы, с помощью которых можно решать различные оптимизационные задачи больших и сверхбольших размеров.

Отметим также, что методы оптимизации входят в виде составной части в такую современную область прикладной математики, как *исследование операций*. Методы этой дисциплины получили широкое применение в планировании боевых действий, в перспективном прогнозировании, в управлении производственной и финансовой деятельностью экономических агентов.

Курс «Методы оптимизации» впервые был поставлен на факультете управления и прикладной математики Московского физико-технического института (ГУ) Н. Н. Моисеевым. Впоследствии он читался Ю. Г. Евтушенко, Ю. П. Иваниловым, С.И. Бирюковым, А. Г. Бирюковым. Ими были изданы монографии и учебные пособия по этому курсу, которые послужили автору основным отправным материалом при написании данного учебного пособия [46], [25], [11], [10].

В настоящее время оптимизация является достаточно хорошо сложившейся областью вычислительной математики. Теории и методам решения отимизационных задач посвящена обширная литература, в том числе и на русском языке. Укажем, например, книги [13], [33], [54], [28], [49], [60], где дается прекрасное изложение материала. В них интересующиеся могут найти гораздо более полное изложение тех или иных вопросов, касающихся различных аспектов оптимизации, а также более детальные ссылки на специальную литературу. Из книг на английском языке сошлемся на монографии [69], [75]. В [69] представлен достаточно современный взгляд на теорию и методы выпуклой оптимизации, причем данная книга доступна в Интернете.

В первой части пособия основное внимание уделяется теоретическим аспектам оптимизации, а именно постановкам задач и условиям оптимальности. Для этого требуются многие понятия из выпуклого анализа. Ниже в главе 1 даются начальные сведения о постановках оптимизационных задач и применяемой при этом терминологии. Кроме того, приводятся некоторые примеры оптимизационных задач из разных областей. Последующие две главы, 2 и 3, посвящены введению в выпуклый анализ. В главах 4 и 5 рассматриваются различные условия оптимальности для задач безусловной и условной оптимизации. Теория двойственности для задач оптимизации затрагивается в главе 6. В главе 7 исследуются оптимизационные задачи специального вида — линейного программирования, квадратичного программирования и некоторых других. В главе 8 понятие оптимального решения обобщается на случай задач многокритериальной оптимизации.

Везде далее в пособии без особого пояснения используются обозначения из следующего списка.

Список основных обозначений

$J^n = [1 : n]$ — множество целых чисел от 1 до n;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{R}_{++}$ — множество положительных вещественных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вещественных векторов;

$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \geq 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ — неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n$;

$\mathbb{R}^n_{++} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i > 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ — положительный ортант $\mathbb{R}^n$;

$\mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \leq 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ — неположительный ортант $\mathbb{R}^n$;

$\mathbb{R}^n_{--} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i < 0, \ 1 \leq i \leq n\}$ — отрицательный ортант $\mathbb{R}^n$;

x_+ — вектор с координатами $x^i_+ = \max\,[x^i, 0]$, $1 \leq i \leq n$;

x_- — вектор с координатами $x^i_- = \min\,[x^i, 0]$, $1 \leq i \leq n$;

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ — евклидово скалярное произведение;

$0_n = [0, \dots, 0]^T$ — нулевой n-мерный вектор;

0_{mn} — нулевая матрица размера $m \times n$;

I_n — единичная матрица порядка n;

$D(x)$ — диагональная матрица с вектором x на диагонали;

$\|x\|$ — норма вектора x (как правило, если не дано уточнения, имеется в виду евклидова норма);

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\right)^{1/p}$ — p-я гельдеровская норма вектора x, $1 \leq p < \infty$ (при $p = 2$ совпадает с евклидовой нормой);

$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x^i|$ — чебышовская норма вектора x (называемая также максимальной или кубической нормой);

$\|A\|$ — норма матрицы A (согласованная с нормой в пространствах векторов);

$\mathbb{S}^n$ — пространство симметричных матриц порядка n;

$\mathbb{S}^n_+$ — конус в $\mathbb{S}^n$ положительно полуопределенных матриц;

$\mathbb{S}^n_{++}$ — конус в $\mathbb{S}^n$ положительно определенных матриц.

Глава 1

Основные определения и примеры задач

1.1. Основные определения

В достаточно общем виде постановку задачи оптимизации можно описать следующим образом. Пусть имеется множество X, которое называется *допустимым множеством* или *множеством альтернатив (множеством возможных решений).* Через x будем обозначать элементы этого множества X. В нашем курсе мы ограничимся рассмотрением только таких задач оптимизации, в которых X принадлежит *конечномерному евклидову пространству* $\mathbb{R}^n$ или совпадает с ним.

Предположим также, что на X или на некоторой области, содержащей X, задана функция $f(x)$, которую будем называть *целевой функцией* или *критерием.* Данная функция $f(x)$ описывает предпочтения, которыми руководствуются при выборе того или иного элемента x из множества альтернатив X.

Мы скажем, что элемент $x_1 \in X$ предпочтительнее другого элемента $x_2 \in X$, если $f(x_1) < f(x_2)$. Здесь как бы заранее мы настроены на нахождение элемента, на котором целевая функция принимала как можно меньшее значение. Можно было бы поступить иначе и считать, что элемент $x_1 \in X$ предпочтительнее элемента $x_2 \in X$, когда $f(x_1) > f(x_2)$. Если первое предпочтение приводит к *задаче минимизации*, то второе предпочтение, напротив, — к *задаче максимизации.* Мы условимся в дальнейшем рассматривать в основном задачи минимизации. Это никак не ограничивает общность, поскольку всегда можно перейти от задачи максимизации к задаче минимизации, взяв целевую функцию с противоположным знаком. На множество решений это никоим образом не влияет.

С точки зрения задачи минимизации элемент $x_* \in X$ является *наилучшим*, если $f(x_*) \leq f(x)$ для всех $x \in X$. Задачу нахождения наилучшего элемента формально записывают в виде

$$f(x) \to \min_{x \in X}.$$

Ее также записывают как

$$f_* = \min_{x \in X} f(x), \tag{1.1.1}$$

особенно когда данная задача разрешима, т.е. если существует хотя бы один наилучший элемент. Величина f_* в этом случае называется *оптимальным значением* целевой функции.

Определение 1.1.1. *Точка $x_* \in X$ называется глобальным решением задачи (1.1.1) или точкой глобального минимума функции $f(x)$ на X, если*

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \forall\ x \in X. \tag{1.1.2}$$

Часто глобальное решение (глобальный минимум) называют просто решением (минимумом). В дальнейшем множество всех решений (1.1.1), если оно существует, обозначается $X_* = \{x \in X:\ f(x) = f_*\}$. Подчеркивая, что данное множество есть решение задачи минимизации (1.1.1), пишут также

$$X_* = \operatorname{Arg}\min_{x \in X} f(x).$$

Произвольный элемент x_* из множества X_* обозначается как

$$x_* = \arg\min_{x \in X} f(x).$$

Наряду с глобальными решениями задачи минимизации (1.1.1) рассматривают также *локальные решения*. Пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в $\mathbb{R}^n$ и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Через $\Delta_\varepsilon(x_*)$ обозначим ε-окрестность точки x_* в $\mathbb{R}^n$, определяемую как

$$\Delta_\varepsilon(x_*) = \left\{x \in \mathbb{R}^n:\ \|x - x_*\| \leq \varepsilon\right\}.$$

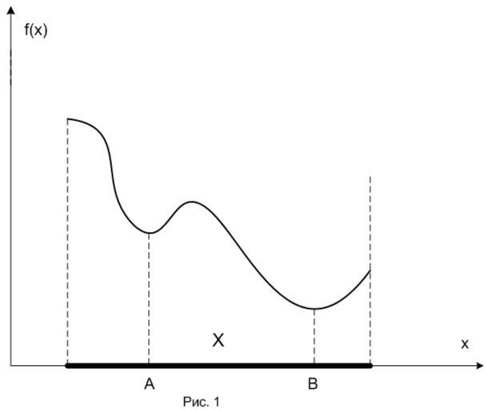

Рис. 1.1. Локальные и глобальные решения

Определение 1.1.2. *Точка $x_* \in X$ называется локальным решением задачи минимизации (1.1.1) или точкой локального минимума функции $f(x)$ на X, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что*

$$f(x_*) \leq f(x) \quad \forall\, x \in X \cap \Delta_\varepsilon(x_*). \tag{1.1.3}$$

Любое глобальное решение задачи минимизации является одновременно и локальным решением, но не наоборот. На рис. 1.1 показаны как локальные решения (точки A и B), так и глобальное решение (точка B).

Определение 1.1.3. *Точка $x_* \in X$ называется точкой строгого минимума (глобального или локального) функции $f(x)$ на X, если соответствующие неравенства (1.1.2) или (1.1.3) выполняются как строгие, когда $x \neq x_*$.*

Определение 1.1.4. *Точка $x_* \in X$ называется точкой острого минимума функции $f(x)$ на X, если*

$$f(x) - f(x_*) \geq \gamma \|x - x_*\|$$

для некоторого $\gamma > 0$ и всех $x \in X$.

Понятно, что всегда точка острого минимума является точкой строгого минимума (точка A на рис. 1.2). Аналогичным образом можно ввести также и понятие острого локального минимума.

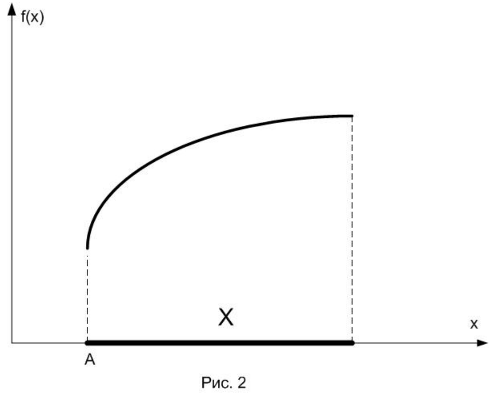

Рис. 1.2. Точка острого минимума

Из математического анализа известен важный результат — теорема Вееерштрасса. Согласно этой теореме, если $f(x)$ — непрерывная функция, а $X \subset \mathbb{R}^n$ — компактное множество, т.е. ограниченное и замкнутое, то решение задачи минимизации (1.1.1) всегда существует, множество X_* не пусто. Если же множество X оказывается открытым или неограниченным, то задача (1.1.1) может не иметь решения. В этом случае вместо (1.1.1) более корректно рассматривать задачу

$$f_* = \inf_{x \in X} f(x). \qquad (1.1.4)$$

Величину f_* в (1.1.4) при этом принято называть *нижней гранью*. В случае, когда она конечна, выполняются следующие два условия:

1. $f_* \leq f(x)$ для всех $x \in X$;

2. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая точка $x_\varepsilon \in X$, что $f(x_\varepsilon) < f_* + \varepsilon$.

Когда функция $f(x)$ не ограничена снизу на X, полагают $f_* = -\infty$. Последовательность $\{x_k\} \subset X$ называется *минимизирующей* для функции $f(x)$ на множестве X, если $f(x_k) \to f_*$ при $k \to \infty$. Здесь f_* — нижняя грань. В дальнейшем почти всегда считается, если не оговорено противное, что решение задачи (1.1.1) существует.

В зависимости от свойств функции $f(x)$ и вида множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ среди задач минимизации (1.1.1) выделяют отдельные классы, которые имеют свои собственные названия. Например, что касается допустимого множества X, то рассматривают следующие задачи.

1. *Задача одномерной минимизации.* В ней множество X есть подмножество действительной прямой $\mathbb{R}$ и обычно является либо отрезком в $\mathbb{R}$, либо неотрицательной полуосью $\mathbb{R}_+$.

2. *Задача безусловной минимизации.* В ней $X = \mathbb{R}^n$, т.е. совпадает со всем пространством.

3. *Задача условной минимизации.* В этой задаче множество X является собственным подмножеством $\mathbb{R}^n$. Пусть $g(x)$ и $h(x)$ — соответственно l-мерная и m-мерная вектор-функции на $\mathbb{R}^n$. Предположим, что множество X задается функциональным образом с помощью ограничений типа равенства или неравенства, а именно:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0_l; \ h(x) \leq 0_m\right\}. \tag{1.1.5}$$

В этом случае о задаче условной оптимизации говорят как о *задаче математического программирования.*

Если все функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, определяющие критерий и целевую функцию, линейные, то такую задачу называют *задачей линейного программирования.* Если же линейны лишь функции $g(x)$ и $h(x)$, а функция $f(x)$ квадратичная, то (1.1.1) называют *задачей квадратичного программирования.* В общем случае говорят о задачах *нелинейного программирования*, выделяя среди них задачи *выпуклого программирования*, обладающие полезными дополнительными свойствами.

Наряду с задачей математического программирования (1.1.1) с допустимым множеством (1.1.5) рассматривают также задачи условной *минимизации на множестве простой структуры* $X = \Pi$, понимая под этим, что множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ имеет несложный вид и не требует для своего задания привлечения каких-либо функций. Например, в качестве такого множества может быть неотрицательный ортант пространства $\Pi = \mathbb{R}^n_+$ или множество «параллелепипедного вида»:

$$\Pi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ a \leq x \leq b\right\},$$

где $a, b \in \mathbb{R}^n$ и $a \leq b$.

Важно подчеркнуть, что деление ограничений на *функциональные* и *простые* весьма условно. В конкретной задаче в зависимости от ситуации некоторые из них можно записывать как в одной, так и в другой форме. Задачи, в которых присутствуют как ограничения простого вида, так и функциональные ограничения, т.е. когда

$$X = \{x \in \Pi : \ g(x) = 0_l; \ h(x) \leq 0_m\},$$

где $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ — множество простой структуры, обычно называют *общей задачей математического программирования.* О множестве Π в этом случае говорят как об *основном* или *базовом допустимом множестве.*

Термин *программирование* в названиях задач оптимизации представляется не очень удачным и объясняется в основном историческими причинами, связанными с использованием появившихся электронных вычислительных машин для решения данных задач. В настоящее время стараются уходить от этого термина и пользоваться более точными названиями, а именно: задача линейной оптимизации, задача квадратичной оптимизации, задача выпуклой оптимизации и т.д.

1.2. Примеры задач оптимизации

1. Задачи аппроксимации

а) Задача о наименьших квадратах. Данная задача, являющаяся задачей безусловной минимизации, имеет большое прикладное значение, например при обработке результатов экспериментов. В ней ищется минимум на $\mathbb{R}^n$ функции

$$f(x) = \|Ax - b\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\langle a_i, x\rangle - b_i\right)^2, \tag{1.2.1}$$

где A — $(m \times n)$-матрица со строками $a_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le m$. Такие задачи играют важную роль в регрессионном анализе, а также в стохастических задачах оценивания и фильтрации данных, особенно когда эти данные подвержены случайным ошибкам измерения, распределенными по нормальному гауссовскому закону.

Наряду с простейшей задачей о наименьших квадратах рассматривают также **задачу о наименьших взвешенных квадратах**. В ней вместо (1.2.1) используется целевая функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\langle a_i, x\rangle - b^i\right)^2,$$

где c_i — положительные коэффициенты, $1 \le i \le m$.

б) Задача чебышевской аппроксимации. Данная задача также относится к задачам безусловной минимизации и близка в некотором смысле к задаче о наименьших квадратах. В ней требуется найти минимум функции

$$f(x) = \max_{1 \le i \le m} |\langle a_i, x\rangle - b^i|. \tag{1.2.2}$$

Таким образом, в обоих случаях, в задаче о наименьших квадратах и в задаче чебышевской аппроксимации, речь идет о нахождении такого вектора $x \in \mathbb{R}^n$, который минимизировал бы длину вектора $Ax - b$ в разных нормах в $\mathbb{R}^m$. В первом случае (1.2.1) — это евклидова квадратичная норма. Во втором случае — максимальная (или чебышевская) норма. Отметим, что в отличие от (1.2.1) функция (1.2.2) является негладкой.

2. Задачи о потоках в сетях

Пусть у нас имеется *сеть*, состоящая из n *узлов*, связанных между собой дугами. Считаем, что дуги являются *направленными.* Дугу, выходящую из узла i и входящую в узел j, обозначим (i, j), причем допускается случай, когда не все узлы связаны между собой дугами. Совокупность всех узлов обозначим $\mathcal{N}$, совокупность всех дуг — $\mathcal{A}$. Пару $\{\mathcal{N}, \mathcal{A}\}$ называют также *графом (направленным).*

В каждом узле имеется какое-то количество *ресурса*, который может быть поставлен в сеть. Обозначим это количество через b_i, где i — номер узла. Данная величина может иметь и отрицательное значение, что указывает на то, что на самом деле в этом узле нуждаются в ресурсе в количестве $|b_i|$ единиц. Считаем также, что нет внешних источников поступления ресурса в сеть и что количество поставленного ресурса одними узлами совпадает с количеством потребленного ресурса другими узлами. Формально это выразится через равенство

$$\sum_{i \in N} b_i = 0.$$

Допустим, что стоимость перемещения единицы ресурса из узла i в узел j равняется c_{ij}. Если из i в j перемещается x_{ij} единиц ресурса, то затраты равняются $c_{ij}x_{ij}$, а суммарные затраты по всей сети составят

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij}x_{ij}. \tag{1.2.3}$$

Цель состоит в том, чтобы сделать эти затраты как можно меньшими.

Надо еще учесть, что все x_{ij}, $(i, j) \in \mathcal{A}$, должны принимать неотрицательные значения. Кроме того, в каждом i-м узле должен соблюдаться баланс между находящимся в нем ресурсом, а также между вывезенным и ввезенным ресурсом. Обозначим

$$J_{i,-} = \{j \in \mathcal{N} : \ (i, j) \in \mathcal{A}\}, \quad J_{i,+} = \{j \in \mathcal{N} : \ (j, i) \in \mathcal{A}\}.$$

Множество $J_{i,-}$ состоит из тех узлов, куда поставляется ресурс из i-го узла. Напротив, множество $J_{i,+}$ указывает те узлы, из которых идут поставки в i-й узел. Тогда

$$\sum_{j \in J_{i,-}} x_{ij} - \sum_{j \in J_{i,+}} x_{ji} = b_i, \quad i \in \mathcal{N}.$$

Объединяя целевую функцию (1.2.3) с ограничениями, приходим к следующей задаче условной оптимизации:

$$\begin{array}{rcl} \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}} c_{ij} x_{ij} & \to & \min, \\ \sum_{j \in J_{i,-}} x_{ij} - \sum_{j \in J_{i,+}} x_{ji} & = & b_i, \quad i \in \mathcal{N}, \\ x_{ij} & \geq & 0, \quad (i,j) \in \mathcal{A}. \end{array} \tag{1.2.4}$$

Она является, по существу, задачей линейного программирования. Здесь есть n линейных ограничений типа равенства и m ограничений типа неравенства, заключающиеся в неотрицательности переменных x_{ij}, где m — общее количество дуг в $\mathcal{A}$. Последние можно трактовать так же, как ограничения простой структуры, и не относить к общим функциональным ограничениям. Специфика линейных ограничений в (1.2.4) заключается в том, что все коэффициенты в линейных ограничениях типа равенства принимают значения либо 1, либо -1.

Важным частным случаем задачи о потоках в сетях является *транспортная задача*, в которой ресурс есть некий товар. Его надо поставить с баз потребителям. Таким образом, вся совокупность узлов $\mathcal{N}$ разбивается на два непересекающихся подмножества $\mathcal{N}_S$ и $\mathcal{N}_D$ соответственно поставщиков и потребителей. Для компонент вектора b должно выполняться $b_i \geq 0$, $i \in \mathcal{N}_S$ и $b_i \leq 0$, $i \in \mathcal{N}_D$. В случае, когда каждый поставщик поставляет товар каждому потребителю, задача может быть записана как

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i \in \mathcal{N}_S, j \in \mathcal{N}_D} c_{ij} x_{ij} & \to & \min, \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_D} x_{ij} & = & s_i, \quad i \in \mathcal{N}_S, \\ \sum_{i \in \mathcal{N}_S} x_{ij} & = & d_j, \quad j \in \mathcal{N}_D, \\ x_{ij} & \geq & 0, \quad i \in \mathcal{N}_S, \ j \in \mathcal{N}_D, \end{array}$$

где через s_i и d_j обозначено соответственно количество товара, поставляемого из узла i, $i \in \mathcal{N}_S$, и количество товара, поставляемого в узел j, $j \in \mathcal{N}_D$.

Рассмотренный вариант транспортной задачи принято называть *задачей Хитчкока*. К ней близка по постановке и *задача о назначении*, в которой требуется распределить n работников по n работам, причем стоимость выполнения j-й работы i-м работником зависит от его квалификации и равна c_{ij}. Каждый работник может быть назначен только на одну работу, и каждая работа выполняется только одним работником. Таким образом, имеем $|\mathcal{N}_S| = |\mathcal{N}_D| = n$ и

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й работник выполняет } j\text{-ю работу,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Задача формально записывается как

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i\in\mathcal{N}_S, j\in\mathcal{N}_D} c_{ij}x_{ij} & \to & \min, \\ \sum_{j\in\mathcal{N}_D} x_{ij} & = & 1, \quad i\in\mathcal{N}_S, \\ \sum_{i\in\mathcal{N}_S} x_{ij} & = & 1, \quad j\in\mathcal{N}_D, \\ x_{ij} & \in & \{0,1\}, \quad i\in\mathcal{N}_S,\ j\in\mathcal{N}_D. \end{array}$$

Если отказаться от требования, что x_{ij} есть булевы переменные, то получается задача линейного программирования, являющаяся *релаксацией* задачи о назначении.

3. Электрические и гидравлические цепи

Другим важным примером оптимизационных задач являются задачи о равновесном состоянии гидравлических или электрических цепей. Приведем одну из простейших постановок таких задач.

Пусть имеется электрическая цепь постоянного тока, состоящая из n *узлов*, связанная между собой m *ветвями*. На каждой такой ветви может находиться либо источник напряжения, либо диод, либо сопротивление. Совокупность всех узлов обозначим через $\mathcal{N}$, совокупность всех ветвей — через $\mathcal{A}$. Такую цепь, состоящую из нескольких ветвей и узлов, описывают с помощью *матрицы соединения узлов* A, элементы которой a_{ij} могут принимать следующие значения:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если узел } i \text{ есть вход } j\text{-й ветви,} \\ 1, & \text{если узел } i \text{ есть выход } j\text{-й ветви,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Размер такой матрицы $n \times m$. Не умаляя общности, ее можно представить в виде

$$A = [A_S,\ A_D,\ A_R],$$

где A_S, A_D и A_R — подматрицы соединения всех узлов с ветвями, содержащими соответственно источники напряжения, диоды и сопротивления.

Если на j-й ветви находится источник напряжения, то он поддерживает в этой ветви постоянное напряжение v_j независимо от тока c_j. Такой элемент поглощает мощность $-v_jc_j$. В случае, когда на j-й ветви находится диод, то он поглощает нулевую мощность, но позволяет току течь только в одном направлении (положительном). Следовательно, должно выполняться: $c_j \geq 0$, $v_j \geq 0$ и $c_j v_j = 0$. Наконец, если j-я ветвь содержит сопротивление r_j, то ток c_j и напряжение v_j в этой ветви связаны между собой соотношением $v_j = -r_j c_j$. Поглощаемая мощность равна $-v_j c_j = r_j c_j^2$.

Если обозначить через c и v m-мерные векторы, составленные из токов и напряжений во всех ветвях, то в соответствии с разбиением матрицы A их также можно разбить на подвекторы

$$c = [c_S,\ c_D,\ c_R]^T, \quad v = [v_S,\ v_D,\ v_R]^T.$$

Равновесное состояние цепи достигается при выполнении законов Киргофа. Согласно *первому закону Киргофа* сумма всех входящих в узел токов равна сумме всех вытекающих из него токов. Формально это записывается как $Ac = 0_n$, или

$$A_S c_S + A_D c_D + A_R c_R = 0_n. \tag{1.2.5}$$

С каждым узлом i связан потенциал p_i. Совокупность всех таких потенциалов p_i, $1 \leq i \leq n$, обозначим через n-мерный вектор p. По *второму закону Киргофа* разность потенциалов узлов, соединяемых j-й ветвью, равна напряжению в этой ветви, что можно записать в виде равенства $A^T p = v$ или для отдельных компонент вектора v:

$$v_S = A_S^T p, \quad v_D = A_D^T p, \quad v_R = A_R^T p. \tag{1.2.6}$$

К равенствам (1.2.5) и (1.2.6) согласно вышесказанному следует добавить также соотношения, которые должны выполняться на ветвях, содержащих диоды и сопротивления:

$$c_D \geq 0, \quad v_D \geq 0, \quad v_D^T c_D = 0, \quad v_R = -D(r_R) c_R, \tag{1.2.7}$$

где $D(r_R)$ — диагональная матрица с вектором r_R на диагонали. Элементами вектора r_R являются значения сопротивлений соответствующих ветвей.

Приведенные равенства и неравенства (1.2.5) — (1.2.7) описывают равновесное состояние цепи. Замечательно, что к этим же самым соотношениям можно прийти, если обратиться к оптимизационной задаче:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2} c_R D(r_R) c_R - v_S^T c_S & \to & \min, \\ A_S c_S + A_D c_D + A_R c_R & = & 0_n, \\ c_D & \geq & 0. \end{array} \tag{1.2.8}$$

Целевая функция в этой задаче равна половине мощности, поглощаемой сопротивлениями, сложенной с мощностью, теряемой на источниках напряжения.

Если в задаче (1.2.8) отбросить последнее ограничение типа неравенства, то она становится *классической оптимизационной задачей* с ограничениями-равенствами. Согласно формализму Лагранжа для ее решения надо составить функцию Лагранжа, сложив целевую функцию с ограничениями, предварительно умноженными на множители Лагранжа u_i, $1 \le i \le n$. В совокупности они составляют вектор $u = [u_1, \ldots, u_n]$. Условия оптимальности такой задачи получаются путем приравнивания нулю производных функции Лагранжа по x и u.

Наличие последнего ограничения типа неравенства приводит к тому, что задача становится *неклассической*. Однако для нее также справедливо обобщенное правило Лагранжа, согласно которому с каждым ограничением-неравенством $c_j \ge 0$ также следует связать неотрицательный множитель Лагранжа u_j и вычесть их из функции Лагранжа. Подробнее об этом будет говориться ниже в нашем курсе. Объединяя теперь все такие неотрицательные множители в вектор u_D и выписывая условия оптимальности для всей задачи (1.2.8) с учетом того, что $c_D \ge 0$ и $u_D \ge 0$, в результате должны получить

$$\begin{gathered}
A_S^T u - V_S = 0, \quad A_D^T u - u_D = 0, \quad A_R^T u + D(r_R) c_R = 0, \\
A_S c_S + A_D c_D + A_R c_R = 0_n, \\
c_D^T u_D = 0, \\
c_D \ge 0, \quad u_D \ge 0.
\end{gathered} \tag{1.2.9}$$

Если положить $p = u$, $v_D = u_D$ и принять во внимание, что согласно (1.2.7) $v_R = -D(r_R)c_R$, то условия (1.2.9) полностью совпадают с равенствами и неравенствами (1.2.5) — (1.2.7). Таким образом, расчет равновесного состояния электрической цепи может быть сведен к решению оптимизационной задачи (1.2.8), которая является задачей квадратичного программирования.

4. Задача из теории распознавания образов

Различные оптимизационные задачи часто возникают в теории распознавания образов. Приведем одну из них в качестве простейшего примера. Пусть имеется несколько объектов в количестве m штук. Все они характеризуются некоторыми признаками, число которых равно n. Другими словами, задано m n-мерных векторов:

$$x_1, \; \ldots, \; x_m, \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \le i \le m.$$

Считается, что все эти объекты принадлежат одному классу K. Надо определить для некоторого другого объекта (вектора $x \in \mathbb{R}^n$), принадлежит ли он этому классу или нет.

Один из возможных подходов заключается в определении «среднего расстояния» от x до всех заданных точек $x_1, \ldots, x_m$, входящих в K. Если оно меньше некоторого порогового значения, то объект x входит в класс K. Если больше — то нет. В связи с этим встает вопрос: как мерить расстояние между точками в $\mathbb{R}^n$, чтобы среднее расстояние между точками $x_1, \ldots, x_m$ в этой метрике было бы минимальным?

Пусть $d(x_i, x_j)$ — искомое «расстояние» между точками x_i и x_j. В теории так называемых обучающих машин предлагают, в частности, рассматривать такую функцию:

$$d(x_i, x_j) = \| A(x_i - x_j) \|^2,$$

где A — квадратная матрица порядка n со строками $a_1, \ldots, a_n$. Тогда среднее расстояние между точками $x_1, \ldots, x_m$ равняется величине

$$f = \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} d(x_i, x_j) = \frac{1}{m^2} \sum_{i,j=1}^{m} \| A(x_i - x_j) \|^2.$$

Задача сводится теперь к нахождению матрицы A такой, чтобы величина f была минимальной. Для исключения тривиального случая нулевой матрицы на A накладывают ограничение, например,

$$\prod_{i=1}^{n} \|a_i\|^2 = 1. \tag{1.2.10}$$

Опуская константу $1/m^2$, приходим к задаче оптимизации с нелинейной целевой функцией и нелинейным ограничением типа равенства: найти минимум функции

$$f\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i,j=1}^{m} \|A(x_i - x_j)\ \|^2$$

при условии (1.2.10). Данная задача является классической задачей нелинейного программирования, и ее решение достаточно просто получить с помощью правила Лагранжа.

Обозначим через X матрицу

$$X = \sum_{i,j=1}^{m} (x_i - x_j)\,(x_i - x_j)^T\,.$$

Матрица X симметричная и положительно полуопределенная, так как представляет собой сумму симметричных положительно полуопределенных матриц единичного ранга. Воспользуемся известным из матричного анализа результатом, согласно которому след произведения матриц не меняется при круговой перестановке матриц. Тогда

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i,j=1}^m \|A(x_i - x_j)\ \|^2 = \sum_{i,j=1}^m \langle x_i - x_j, A^T A(x_i - x_j)\rangle = \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^m \operatorname{tr}\ \left[(x_i - x_j)^T A^T A(x_i - x_j)\right] = \\
&\quad = \textstyle\sum_{i,j=1}^m \operatorname{tr}\ \left[A^T A(x_i - x_j)(x_i - x_j)^T\right] = \operatorname{tr}\ A^T A X = \\
&\quad = \operatorname{tr}\ A X A^T = \textstyle\sum_{i=1}^n \langle a_i, X a_i\rangle.
\end{aligned}$$

Составим для задачи функцию Лагранжа:

$$L(a, u) = \sum_{i=1}^n \langle a_i, X a_i\rangle + u\left(1 - \prod_{i=1}^n \|a_i\|^2\right),$$

где $a = (a_1, \ldots, a_n)^T \in \mathbb{R}^{n^2}$ и $u \in \mathbb{R}$. Дифференцируя данную функцию по a_i, $1 \le i \le n$, и приравнивая градиенты нулю, получаем с учетом равенства (1.2.10):

$$L_{a_i}(a, u) = 2\left[X a_i - u \prod_{j=1,\ j\ne i}^n \|a_j\|^2 a_i\right] = 2\left[X a_i - \frac{u}{\|a_i\|^2} a_i\right] = 0_n.$$

Отсюда следует

$$X a_i = \lambda_i a_i, \quad \lambda_i = \frac{u}{\|a_i\|^2}, \quad 1 \le i \le n. \tag{1.2.11}$$

Следовательно, строка a_i должна быть собственным вектором матрицы X, соответствующим ее собственному значению λ_i. Характеристическое уравнение $|X - \lambda_i I_n| = 0$ определяет n собственных значений матрицы X. Если X — положительно определенная матрица, то все $\lambda_i > 0$, $1 \le i \le n$. Из равенств (1.2.10) и (1.2.11) получаем, что $u^n \left(\prod_{i=1}^m\ \lambda_i\right)^{-1} = 1$, откуда $u = \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i\right)^{1/n}$. Таким образом,

$$\|a_i\|^2 = \frac{u}{\lambda^i} = \frac{u}{\lambda^i}\left(\prod_{j=1}^n \lambda_j\right)^{1/n}, \quad 1 \le i \le n,$$

и для векторов $a_1, \ldots, a_n$ выполняется условие нормировки (1.2.10).

Глава 2

Выпуклые множества

2.1. Выпуклые и аффинные множества, выпуклые конусы

Понятие выпуклого множества является основным в выпуклом анализе.

Определение 2.1.1. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым, если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $0 \le \lambda \le 1$ точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ также принадлежит X.*

Таким образом, выпуклое множество наряду с любыми своими двумя точками всегда содержит и весь отрезок, соединяющий эти две точки (см. рис. 2.1). Пустое множество по определению считают выпуклым. Множество, состоящее из единственной точки, множество «параллелепипедного вида», целое пространство $\mathbb{R}^n$, любое его линейное подпространство — все это простейшие примеры выпуклых множеств.

Другими примерами выпуклых множеств в $\mathbb{R}^n$ являются *единичные шары* в разных нормах:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \le 1 \right\},$$

а также *эллипсоид*, который можно задать как

$$B_A = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, A^{-1}x \rangle \le 1 \right\}, \tag{2.1.1}$$

где A — симметричная положительно определенная матрица. Длины полуосей этого эллипсоида определяются собственными значениями σ_i матрицы A и равны соответственно $\sqrt{\sigma_i}$, $1 \le i \le n$.

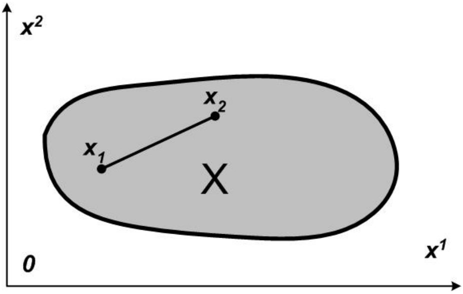

Рис. 2.1. Выпуклое множество

Рассмотрим некоторые операции над множествами, которые сохраняют их выпуклость.

Утверждение 2.1.1. *Пересечение любого конечного или бесконечного числа выпуклых множеств выпукло.*

Доказательство. Пусть I — произвольное конечное или бесконечное множество индексов. Пусть, кроме того, $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество для любого $i \in I$ и $X = \bigcap_{i \in I} X_i$. Если множество X пусто, то оно выпукло по определению. Если нет, то возьмем две произвольные точки $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$. Тогда $x_1 \in X_i$, $x_2 \in X_i$ для всех $i \in I$. Так как все множества X_i выпуклы, то для любого $0 \leq \lambda \leq 1$ и всех $i \in I$ точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ принадлежит X_i. Но тогда $x_\lambda \in X$. Следовательно, X — выпуклое множество. ■

Укажем еще две простые алгебраические операции над множествами, не нарушающие выпуклости. Имеет место следующие почти очевидные утверждения, касающиеся непустых выпуклых множеств.

Утверждение 2.1.2. *Произведение выпуклого множества на произвольную константу $\alpha \in \mathbb{R}$ выпукло.*

Утверждение 2.1.3. *Сумма двух выпуклых множеств выпукла.*

Доказательство. Пусть $X_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $X_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклые множества и $X = X_1 + X_2$. Возьмем две произвольные точки $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$. Нам надо показать, что какое бы ни было $0 \leq \lambda \leq 1$, точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)\, x_2$ также принадлежит X.

Так как $x_1 \in X$, то найдутся две такие точки $y_1 \in X_1$ и $z_1 \in X_2$, что $x_1 = y_1 + z_1$. Точно так же: $x_2 = y_2 + z_2$ для некоторых $y_2 \in X_1$ и $z_2 \in X_2$. Поэтому

$$x_\lambda = \lambda(y_1 + z_1) + (1 - \lambda)(y_2 + z_2) = y_\lambda + z_\lambda,$$

где

$$y_\lambda = \lambda y_1 + (1 - \lambda) y_2, \quad z_\lambda = \lambda z_1 + (1 - \lambda) z_2.$$

Но, в силу выпуклости множеств X_1 и X_2, имеют место включения: $y_\lambda \in X_1$, $z_\lambda \in X_2$. Поэтому точка $x_\lambda = y_\lambda + z_\lambda$ обязательно содержится во множестве X, являющемся суммой двух множеств X_1 и X_2. ■

Заметим, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и α_1 и α_2 — некоторые числа, то в силу утверждений 2.1.2 и 2.1.3 следующее множество $\alpha_1 X + \alpha_2 X$ обязательно выпукло. Более того, если числа α_1 и α_2 одного знака, то имеет место формула

$$\alpha_1 X + \alpha_2 X = (\alpha_1 + \alpha_2)\, X. \tag{2.1.2}$$

Однако если числа α_1 и α_2 имеют разные знаки, то равенство (2.1.2) не всегда выполняется.

Определение 2.1.2. *Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — произвольные множества из $\mathbb{R}^n$, а $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — произвольные числа. Тогда множество*

$$X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \quad x_i \in X_i, \ 1 \le i \le m \right\}$$

называется линейной комбинацией множеств $X_1, \ldots, X_m$.

На основании утверждений 2.1.2 и 2.1.3 приходим к выводу, что справедлив следующий результат.

Утверждение 2.1.4. *Любая линейная комбинация конечного числа выпуклых множеств выпукла.*

В качестве следствия из данного утверждения получаем, что разность $X = X_1 - X_2$ двух выпуклых множеств X_1 и X_2 выпукла.

Существуют отображения, которые переводят выпуклые множества в выпуклые множества, быть может, в других пространствах. Приведем некоторые из них.

Отображение $F(x)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ называется *линейным*, если оно имеет вид $F(x) = Ax + b$, где A — $(m \times n)$-матрица и $b \in \mathbb{R}^m$. При линейном отображении выпуклого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ получаем, что его образ

$$Y = F(X) = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y = F(x), \ x \in X\}$$

также является выпуклым множеством в пространстве $\mathbb{R}^m$. С другой стороны, прообраз любого выпуклого множества $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ при линейном отображении $F(x)$, т.е. множество

$$X = F^{-1}(Y) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ y = F(x) \in Y\right\},$$

также выпукло. В частности, беря в качестве $F(x)$ линейное отображение $F(x) = A^{-1/2}x$, убеждаемся в выпуклости эллипсоида B_A, определяемым равенством (2.1.1), поскольку он есть прообраз единичного шара B в евклидовой норме.

Если свойство линейных отображений сохранять выпуклость множества, на которое оно действует, представляется вполне естественным, то обладание этим свойством *дробно-линейных отображений* вида

$$F(x) = \frac{Ax + b}{\langle c, x\rangle + d}, \quad c \in \mathbb{R}^n, \ d \in \mathbb{R}, \tag{2.1.3}$$

определенных на подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$, где $\langle c, x\rangle + d > 0$, на первый взгляд не столь очевидно. Однако это так, и, чтобы убедиться в указанном свойстве, введем в рассмотрение блочную матрицу:

$$Q = \begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix},$$

а также определяемое ею линейное отображение $G(y) = Qy$, заданное на $\mathbb{R}^{n+1}$. Если действовать этим отображением на точки вида $y = [x, 1] \in \mathbb{R}^{n+1}$, то будем получать следующие точки из $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$Qy = Q\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax + b \\ \langle c, x\rangle + d \end{bmatrix}.$$

Предполагая теперь, что множество $X \in \mathbb{R}^n$ является выпуклым и при этом $\langle c, x\rangle + d > 0$ для всех $x \in X$, получаем в силу линейности отображения $G(y)$, что образ выпуклого множества

$$Y = \left\{[x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in X, \mu = 1\right\}$$

также является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Обратимся далее к так называемому *перспективному отображению*, действующему из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^n$ по правилу

$$P(y) = \frac{x}{\mu}, \quad y = [x, \mu],\ x \in \mathbb{R}^n,\ \mu > 0.$$

Перспективное отображение нормализует вектор y, умножая все его компоненты на одно и то же положительное число, причем делает это таким образом, чтобы последняя компонента стала равной единице. После этого данная последняя компонента отбрасывается.

Покажем, что образ выпуклого множества Y в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ при перспективном отображении также является выпуклым множеством в $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть $y_1 = [x_1, \mu_1] \in Y$, $y_2 = [x_2, \mu_2] \in Y$ и $\mu_1 > 0$, $\mu_2 > 0$. Возьмем произвольное $0 \le \lambda \le 1$ и рассмотрим точку $y_\lambda = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$. Имеем

$$P(y_\lambda) = \frac{\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2}{\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2} = \theta \frac{x_1}{\mu_1} + (1-\theta)\frac{x_2}{\mu_2} = \theta P(y_1) + (1-\theta) P(y_2),$$

где

$$\theta = \frac{\lambda \mu_1}{\lambda \mu_1 + (1-\lambda)\mu_2}, \quad 0 \le \theta \le 1.$$

Таким образом, любой отрезок в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$ при перспективном отображении переводится в соответствующий отрезок в $\mathbb{R}^n$.

Остается только отметить, что дробно-линейное отображение вида (2.1.3) можно представить как суперпозицию двух отображений, а именно песпективного отображения и линейного отображения: $F(x) = P(Qy)$, в котором в качестве $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ берутся векторы $y = [x, \mu]$ с $\mu = 1$. Из вышесказанного тогда следует, что оно сохраняет выпуклость множеств $X \subset \mathbb{R}^n$, если только $\langle c, x \rangle + d > 0$ для всех $x \in X$. В частном случае, когда $c = 0_n$, дробно линейное отображение переходит в обычное линейное отображение, определенное на всем пространстве.

Рассмотрим далее два важных частных случая выпуклых множеств, каждый из которых обладает дополнительным свойством.

Аффинные множества. Эти множества широко используются в линейной алгебре.

Определение 2.1.3. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется аффинным, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ принадлежит X для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, т.е. X наряду с x_1 и x_2 содержит целиком всю прямую, проходящую через эти две точки.*

Так как прямая, проходящая через две точки, всегда содержит отрезок, соединяющий эти две точки, то любое аффинное множество выпукло. По определению принято считать пустое множество также аффинным.

Аффинные множества имеют простую структуру, а именно, можно показать, что они являются сдвигами линейных подпространств. Пусть X — произвольное аффинное множество и пусть $x_0 \in X$. Рассмотрим множество $L = X - x_0$. Данное множество также является аффинным. В самом деле, возьмем $x_1 \in L$ и $x_2 \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Имеем $x_1 = y_1 - x_0$, $x_2 = y_2 - x_0$, где $y_1, y_2 \in X$. Тогда

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 - x_0 \in L,$$

так как из-за аффинности множества X следует справедливость включения $\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 \in X$.

Множество L является линейным подпространством. Действительно, оно содержит начало координат, поскольку $x_0 - x_0 = 0_n \in L$. Далее, в силу аффинности множества L для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in L$ выполняется $\lambda x = \lambda x + (1-\lambda)0_n \in L$. Кроме того, опять же в силу аффинности L для произвольных $x_1 \in L$ и $x_2 \in L$ выполняется: $x = 0.5x_1 + 0.5x_2 \in L$, откуда немедленно следует, что $x_1 + x_2 = 2x \in L$. Таким образом, мы получили, что множество L таково, что сумма двух его элементов и произведение его элемента на число также принадлежат L. Поэтому L — линейное подпространство.

Множество $L = X - x_0$ называют *линейным подпространством, параллельным аффинному множеству* X. По определению, под *размерностью* $X = L + x_0$ понимают размерность линейного подпространства L. Сами аффинные множества часто называют также *линейными многообразиями.* Точка и все пространство $\mathbb{R}^n$ представляют собой крайние примеры аффинных множеств размерности 0 и n соответственно.

Упражнение 1. *Убедитесь, что линейное подпространство L, параллельное аффинному множеству X, определяется единственным образом, т.е. не зависит от выбора конкретного элемента $x_0 \in X$.*

Упражнение 2. *Убедитесь, что пересечение любого числа, а также линейная комбинация конечного числа аффинных множеств есть снова аффинное множество.*

Известно, что всякое линейное подпространство можно представить как множество решений системы линейных однородных уравнений. Действительно, пусть L — линейное подпространство, не совпадающее со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Возьмем его ортогональное дополнение $L^\perp$. Оно не пусто, так как L является собственным подпространством $\mathbb{R}^n$. Предположим, что размерность $L^\perp$ равна m, и пусть

$a_1, \ldots, a_m$ — произвольный базис в $L^{\perp}$. Все векторы $a_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le m$, ненулевые. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ принадлежит подпространству L в том и только в том случае, когда $\langle a_i, x \rangle = 0$ для всех $1 \le i \le m$. Но тогда x есть решение линейной однородной системы алгебраических уравнений $Ax = 0_m$, где A — матрица размера $m \times n$, строками которой являются векторы a_i, $1 \le i \le m$. Так как это векторы линейно независимы, образуя базис в $L^{\perp}$, то ранг матрицы A равен m.

Как было выяснено, всякое непустое аффинное множество X представимо в виде $X = L + x_0$, где L — линейное подпространство, параллельное X, и x_0 — произвольная точка из X. Положим теперь $b = Ax_0$. Тогда получаем, что $b \in \mathbb{R}^m$ и

$$\begin{gathered} X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_1 + x_0, \ Ax_1 = 0_m \right\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ A(x - x_0) = 0_m \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b \right\}. \end{gathered} \tag{2.1.4}$$

Размерность такого множества X равняется $d = n - m$.

Если X совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, то для него соответствующее линейное подпространство L также есть все пространство $\mathbb{R}^n$, т.е. $X = L$. Но в этом случае L, а стало быть, и X можно представить в виде (2.1.4), в котором A — любая нулевая матрица, а b — нулевой вектор соответствующей размерности. Наконец, если множество X пустое, то его также можно записать в виде (2.1.4), однако теперь A — по-прежнему нулевая матрица, а b — ненулевой вектор.

Суммируя все вышесказанное, приходим к следующему полезному результату.

Теорема 2.1.1. *Пусть X — аффинное множество. Тогда X является множеством решений системы линейных алгебраических уравнений, т.е.*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b \right\} \tag{2.1.5}$$

для некоторой матрицы A и некоторого вектора b.

Заметим, что верно и обратное: непустое множество решений системы (2.1.5) всегда является аффинным множеством.

Теорема 2.1.1 дает первый из двух возможных способов представления аффинных множеств, а именно, как множества решений систем линейных алгебраических уравнений. Имеется также и второй способ. Заключается он в следующем: аффинное множество X размерности d записывается в виде

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_0 + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i x_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, \ 1 \le i \le d \right\},$$

где x_i — линейно независимые (фундаментальные) решения однородной системы $Ax = 0_m$ и x_0 — произвольное решение неоднородной системы $Ax = b$. Так как ранг матрицы A равен m, то однородная система $Ax = 0_m$ всегда имеет $d = n - m$ таких линейно независимых решений x_i.

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор и $b \in \mathbb{R}$. *Гиперплоскостью* в $\mathbb{R}^n$ называется множество вида

$$\Gamma = \Gamma_{a,b} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle a, x \rangle = b \right\}. \tag{2.1.6}$$

Если $x_0 \in \Gamma$, то $\langle a, x_0 \rangle = b$. Тогда определение (2.1.6) для гиперплоскости Γ может быть записано как

$$\Gamma = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle a, x - x_0 \rangle = 0 \right\},$$

т.е. эта гиперплоскость состоит из тех и только тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых вектор $x - x_0$ ортогонален вектору a. Вектор a называется *нормальным вектором* гиперплоскости Γ.

Гиперплоскость всегда является аффинным множеством в $\mathbb{R}^n$, причем непустым, ее размерность равна $n - 1$. Пересечение любого конечного числа гиперплоскостей также является аффинным множеством.

Выпуклые конусы. Другим важным частным случаем выпуклых множеств являются выпуклые конусы.

Определение 2.1.4. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется конусом, если $\lambda x \in X$ для всех $x \in X$ и $\lambda \geq 0$.*

Согласно сделанному определению, конус — это такое множество, которое наряду с любой своей точкой содержит и весь луч, выходящий из начала координат и проходящий через эту точку. Иногда вместо условия $\lambda \geq 0$ накладывают требование, чтобы $\lambda > 0$. Тогда начало координат может не принадлежать конусу.

Конус, который является выпуклым множеством, называется *выпуклым конусом* (см. рис. 2.2). Выпуклый конус можно определить и несколько иначе.

Определение 2.1.5. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ называется выпуклым конусом, если $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$ для всех $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.*

То, что данное множество является конусом, убеждаемся сразу, полагая $\lambda_2 = 0$. Тогда $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \lambda_1 x_1 \in X$ для любого $\lambda_1 \geq 0$ и любого $x_1 \in X$, независимо от выбора x_2. Нетрудно также видеть, что X есть

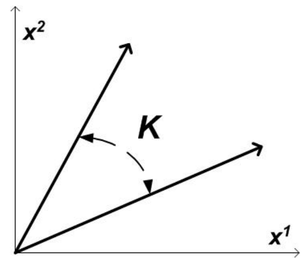

Рис. 2.2. Выпуклый конус

выпуклое множество, поскольку, беря произвольные $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $0 \leq \lambda \leq 1$, получаем в силу неотрицательности коэффициентов λ и $1-\lambda$, что $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in X$.

Упражнение 3. *Убедитесь, что если X — выпуклый конус, то $X = X + X$.*

Пусть $a \in \mathbb{R}^n$ — ненулевой вектор. Рассмотрим множество

$$L_a^+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle a, x\rangle \geq 0\right\},$$

которое принято называть *полупространством* (замкнутым).

Упражнение 4. *Убедитесь, что любые линейные подпространства и замкнутые полупространства являются выпуклыми конусами.*

Другим важным примером конуса в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ является *конус, порожденный нормой* в $\mathbb{R}^n$. Данный конус определяется как

$$K = \Big\{[x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \|x\| \leq \mu\Big\},$$

где $\|\cdot\|$ — произвольная норма в $\mathbb{R}^n$. В частности, для евклидовой нормы получаем

$$K = \left\{[x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \leq \mu^2, \ \mu \geq 0\right\}.$$

Данный конус называют *квадратичным.* Он имеет и другие названия, в частности, *конус второго порядка, конус Лоренца.*

Упражнение 5. *Убедитесь, что пересечение любого числа, а также линейная комбинация конечного числа выпуклых конусов есть снова выпуклый конус.*

Конус K называется *заостренным*, если из условий $x \in K$ и $-x \in K$ следует, что $x = 0_n$. Конусы, порожденные нормой, всегда заостренные. В отличие от них линейные подпространства и замкнутые полупространства не являются заостренными конусами. Заостренные конусы не содержат прямых, целиком принадлежащих конусу.

Выпуклые, аффинные и неотрицательные комбинации точек. Среди всех линейных комбинаций точек выделяют выпуклые, аффинные и неотрицательные комбинации. Каждая из них удовлетворяет специальному дополнительному условию на коэффициенты. Дадим определения этих комбинаций.

Определение 2.1.6. *Пусть* $x_1, \ldots, x_m$ *— некоторые точки из* $\mathbb{R}^n$ *и пусть*

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i$$

— линейная комбинация этих точек с коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ *из* $\mathbb{R}$*. Тогда эта линейная комбинация называется:*

1) *выпуклой, если* $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, *и* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$;

2) *неотрицательной, если* $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$;

3) *аффинной, если* $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Между выпуклыми множествами и выпуклыми комбинациями их точек существует взаимосвязь. Аналогично существует взаимосвязь между выпуклыми конусами и неотрицательными комбинациями точек, а также между аффинными множествами и аффинными комбинациями точек.

Теорема 2.1.2. *Множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпукло тогда и только тогда, когда оно содержит всевозможные выпуклые комбинации своих точек.*

Доказательство. *Достаточность.* Если множество X содержит все выпуклые комбинации своих точек, то оно, в частности, содержит и все выпуклые комбинации любых своих двух точек. По определению такое множество является выпуклым.

Необходимость. Предположим теперь, что множество X выпукло. Надо показать, что каково бы ни было целое число m, любая выпуклая комбинация m точек $x_1, \ldots, x_m$ из X принадлежит X. Доказательство этого утверждения проведем индукцией по m.

При $m = 1$ и $m = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно имеет место при $m = k$ и покажем, что оно сохраняется при $m = k + 1$. Возьмем произвольную выпуклую комбинацию, состоящую из $k + 1$ точки:

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i,$$

где $x_i \in X$, $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq k+1$ и $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$. Считаем, что $\lambda_{k+1} > 0$.

В случае, когда $\lambda_{k+1} = 1$, имеем $x = x_{k+1} \in X$. Предположим теперь, что $\lambda_{k+1} < 1$. Тогда

$$x = (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \tag{2.1.7}$$

Обратимся к точке

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} x_i.$$

Для коэффициентов этой линейной комбинации выполняется:

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

Поэтому точка $\bar{x}$ является выпуклой комбинацией k точек из X и, следовательно, по предположению индукции $\bar{x} \in X$. Но тогда на основании (2.1.7) и выпуклости множества X:

$$x = (1 - \lambda_{k+1})\, \bar{x} + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in X.$$

Теорема доказана. ■

Теорема 2.1.3. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ является выпуклым конусом тогда и только тогда, когда оно содержит все неотрицательные комбинации своих точек.*

Теорема 2.1.4. *Множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ является аффинным тогда и только тогда, когда оно содержит все аффинные комбинации своих точек.*

Упражнение 6. *Докажите утверждения теорем 2.1.3 и 2.1.4.*

Выпуклые, аффинные и конические оболочки множеств. Если множество X не выпукло, то его можно сделать выпуклым, пополнив другими элементами. Желательно только, чтобы число добавленных элементов было как можно меньшим. Это приводит к понятию выпуклой оболочки множества. Исходя из подобных соображений, можно строить конические и аффинные оболочки множеств.

Определение 2.1.7. *Пусть X — произвольное множество из $\mathbb{R}^n$. Пересечение всех выпуклых множеств (выпуклых конусов, аффинных множеств) из $\mathbb{R}^n$, содержащих X, называется выпуклой (конической, аффинной) оболочкой данного множества и обозначается $convX$ (соответственно $coneX$, $affX$).*

Так как все пространство $\mathbb{R}^n$ есть выпуклое множество, то выпуклая оболочка любого непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ всегда непуста. По определению она является выпуклым множеством и имеет место включение $X \subseteq \mathrm{conv}X$. Более того, если $X \subseteq Y$, где Y — выпуклое множество, то $\mathrm{conv}X \subseteq Y$. Поэтому в случае, когда X — выпуклое множество, беря в качестве Y само множество X, получаем, что выполняется обратное включение $\mathrm{conv}X \subseteq X$. Отсюда делаем вывод, что $\mathrm{conv}X = X$ для выпуклых множеств X. Можно сказать даже больше: множество X выпукло тогда и только тогда, когда $X = \mathrm{conv}X$.

Аналогично всегда существует коническая оболочка любого непустого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{cone}X = X$, если X — выпуклый конус. Точно так же аффинная оболочка X всегда не пуста и $\mathrm{aff}X = X$ в том и только том случае, когда X — аффинное множество.

Определение 2.1.8. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество и x_0 — произвольная точка из X. Множество $aff(X - x_0)$ называют линейным подпространством, параллельным множеству X, или несущим подпространством X и обозначают $LinX$.*

Линейное подпространство, параллельное множеству $X \subseteq \mathbb{R}^n$, не зависит от выбора конкретной точки x_0 из X. На самом деле ее можно брать даже из $\mathrm{aff}X$. Всегда выполняется равенство $\mathrm{aff}X = \mathrm{Lin}X + x_0$, где x_0 — произвольная точка из $\mathrm{aff}X$. По аналогии с аффинным множеством *размерность произвольного выпуклого множества* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ (*аффинная*) определяется как размерность $\mathrm{Lin}X$. Размерность пустого множества полагается равной -1.

Линейное подпространство $\mathrm{Lin}X$, параллельное множеству X, не следует путать с *линейной оболочкой* $\mathrm{lin}X$ этого множества, которая есть наименьшее линейное подпространство, содержащее X.

Теорема 2.1.5. *Выпуклая (коническая, аффинная) оболочка произвольного множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ совпадает со множеством всех выпуклых (неотрицательных, аффинных) комбинацией точек из X.*

Доказательство проведем только для случая выпуклой оболочки. Обозначим через Z совокупность всех выпуклых комбинаций точек из X. Требуется показать, что $Z = \text{conv}X$.

В первую очередь проверим, что Z — выпуклое множество. Пусть $x \in Z$ и $y \in Z$. Имеем

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \quad x_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq k, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1,$$

$$y = \sum_{j=1}^{s} \mu_j y_j, \quad y_j \in X, \quad \mu_j \geq 0, \quad 1 \leq j \leq s, \quad \sum_{j=1}^{s} \mu_j = 1.$$

Возьмем точку $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, где α — произвольное число из отрезка $[0,1]$. Точка z является линейной комбинацией как точек x_i, $1 \leq i \leq k$, так и точек y_j, $1 \leq j \leq s$. Коэффициенты этой линейной комбинации следующие: $\alpha\lambda_1, \ldots, \alpha\lambda_k, (1-\alpha)\mu_i, \ldots, (1-\alpha)\mu_s$. Все они неотрицательные и их сумма равна единице, поскольку

$$\alpha \sum_{i=1}^{k} \lambda_i + (1-\alpha) \sum_{j=1}^{s} \mu_j = 1.$$

Таким образом, точка z есть выпуклая комбинация точек из X, поэтому $z \in Z$ и, следовательно, Z — выпуклое множество. Из выпуклости Z и из того, что $X \subseteq Z$, следует включение: $\text{conv}X \subseteq Z$.

Покажем, что на самом деле имеет место равенство $\text{conv}X = Z$. Пусть Y — произвольное выпуклое множество, содержащее X. По теореме 2.1.2 оно содержит выпуклые комбинации всех своих точек, в том числе и точек из X. Поэтому $Z \subseteq Y$. Но выпуклая оболочка $\text{conv}X$ есть пересечение всех выпуклых множеств, содержащих X. Это выпуклое множество, включающее X. Отсюда, беря в качестве Y эту выпуклую оболочку $\text{conv}X$, получаем, что $Z \subseteq \text{conv}X$. Сопоставляя данное включение с полученным ранее обратным включением, приходим к выводу, что $\text{conv}X = Z$. ■

Упражнение 7. *Докажите теорему 2.1.5 для случая конических и аффинных оболочек множества X.*

Согласно теореме 2.1.5 любую точку из $\text{conv}X$ можно представить как выпуклую комбинацию конечного числа точек из X, но о том, какое конкретное количество точек должно быть задействовано в этой комбинации, в теореме 2.1.5 не уточняется. Важный факт состоит в том, что в конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n$ достаточно взять не более чем $n+1$ точку. Это фундаментальный результат выпуклого анализа в конечномерных пространствах.

Лемма 2.1.1. *Пусть точка x является неотрицательной комбинацией точек $x_1, \ldots, x_m$, не равных нулю одновременно. Тогда x можно представить в виде неотрицательной комбинации линейно независимой подсистемы этих точек.*

Доказательство. Возьмем $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$, где $\lambda_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$. Не умаляя общности, считаем, что все точки $x_i \neq 0_n$, $1 \leq i \leq m$. Если эти точки линейно независимы, то требуемый результат имеет место.

Предположим теперь, что точки $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $\mu_1, \ldots, \mu_m$, не равные нулю одновременно, что $\sum_{i=1}^m \mu_i x_i = 0_n$. Предположим также, что среди μ_i, $1 \leq i \leq m$, имеется хотя бы один положительный элемент. Пусть

$$\alpha = \min_{i:\ \mu_i > 0} \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{\lambda_s}{\mu_s}.$$

Имеем $\alpha \geq 0$. Тогда $\gamma_i = \lambda_i - \alpha\mu_i \geq 0$, $1 \leq i \leq m$, причем $\gamma_s = 0$.

Точка x в этом случае может быть представлена как

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i - \alpha \sum_{i=1}^m \mu_i x_i = \sum_{i=1,\ i \neq s}^m \gamma_i x_i.$$

Таким образом, получена неотрицательная комбинация меньшего числа точек. Если эти точки линейно независимы, то результат теоремы установлен. Если нет, то повторяем рассуждения. ■

В $\mathbb{R}^n$ линейно независимых точек не более чем n, поэтому справедливо

Следствие 2.1.1. *Пусть X — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда любая точка из $\mathrm{cone}\, X$ может быть представлена в виде неотрицательной комбинации не более чем n точек из X.*

Теорема 2.1.6. (Теорема Каратеодори.) *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Тогда любую точку из $\mathrm{conv}\, X$ можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем $n+1$ точек из X.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbb{R}^{n+1}$ множество $Y = X \times \{1\}$. Условие, что точка x принадлежит выпуклой оболочке $\mathrm{conv}X$ эквивалентно условию, что точка $[x, 1]$ принадлежит $\mathrm{cone}Y$. Но тогда по следствию к лемме 2.1.1 эту точку можно представить в виде

$$[x, 1] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [x_i, 1], \quad x_i \in X, \quad \lambda_i \geq 0,\ 1 \leq i \leq m,$$

где $m \leq n + 1$. Отсюда следует, что

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,$$

т.е. x представима в виде выпуклой комбинации не более чем $n + 1$ точки из X. ■

2.2. Топологические свойства выпуклых множеств

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть $\Delta_\varepsilon(x)$ обозначает ε-окрестность точки $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. множество

$$\Delta_\varepsilon(x) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n :\ \|y - x\| \leq \varepsilon \right\} = x + \varepsilon B,$$

где $B = \left\{ y \in \mathbb{R}^n :\ \|y\| \leq 1 \right\}$ — единичный шар в $\mathbb{R}^n$.

Определение 2.2.1. *Точка $x \in X$ называется внутренней точкой множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\Delta_\varepsilon(x) \subseteq X$.*

Совокупность всех внутренних точек множества X называется его *внутренностью* и обозначается $\mathrm{int}X$. Выпуклое множество, имеющее непустую внутренность, называется также *выпуклым телом.*

Часто оказывается, что внутренность выпуклого множества пуста. Например, если взять отрезок в двумерном пространстве (см. рис. 2.3), то все его точки не являются внутренними. Однако интуитивно понятно, что точки, отличные от концевых точек отрезка, обладают определенными свойствами, присущими внутренней точке. Надо только погрузить данный отрезок в другое пространство, точнее, в его аффинную оболочку, и забыть об остальных точках двумерного пространства $\mathbb{R}^2$. Эти соображения приводят в следующему понятию.

Определение 2.2.2. *Точка $x \in X$ называется относительно внутренней точкой множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\Delta_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff}X \subseteq X$.*

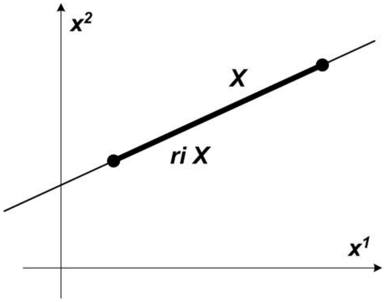

Рис. 2.3. Относительная внутренность множества

Совокупность всех относительно внутренних точек множества X называется его *относительной внутренностью* и обозначается $\mathrm{ri}X$.

Утверждение 2.2.1. *Если* $\mathrm{int}X \neq \emptyset$, *то* $\mathrm{ri}X = \mathrm{int}X$.

Доказательство. Если множество $\mathrm{int}X$ не пусто, то не пусто и $\mathrm{int}(\mathrm{aff}X)$. Но тогда $\mathrm{aff}X = \mathbb{R}^n$. Поэтому в этом случае определения внутренности и относительной внутренности совпадают. ■

Множество X называется *открытым*, если $\mathrm{int}X = X$, и *относительно открытым*, если $\mathrm{ri}X = X$.

Определение 2.2.3. *Точка* $x \in \mathbb{R}^n$ *называется предельной точкой множества* $X \subseteq \mathbb{R}^n$, *если существует такая последовательность точек* $\{x_k\}$ *из* X, *которая сходится к* x.

Совокупность всех предельных точек множества X называется его *замыканием* и обозначается $\mathrm{cl}X$ или $\bar{X}$. Понятно, что всегда выполняются включения

$$\mathrm{ri}X \subseteq X \subseteq \mathrm{cl}X.$$

Множество X называется *замкнутым*, если $\mathrm{cl}X = X$. Аффинное множество является одновременно и относительно открытым и замкнутым.

Отметим также, что из $X_1 \subset X_2$ всегда следует $\mathrm{int}X_1 \subseteq \mathrm{int}X_2$, $\mathrm{cl}X_1 \subseteq \mathrm{cl}X_2$, но включение $\mathrm{ri}X_1 \subseteq \mathrm{ri}X_2$ может не иметь места. Например, если взять в качестве множеств X_1 и X_2 соответственно:

$$X_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x^i \leq 1, \quad i = 1, 2\right\},$$

$$X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = 0, \quad 0 \leq x^1 \leq 1, \right\},$$

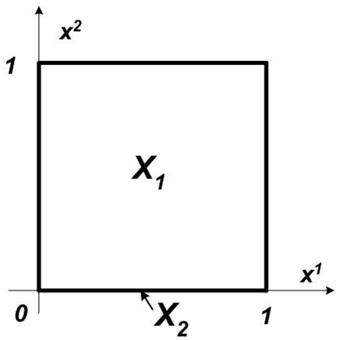

Рис. 2.4. Множества $\mathrm{ri}X_1$ и $\mathrm{ri}X_2$ не пересекаются

т.е. квадрат в $\mathbb{R}^2$ и одну из его сторон (см. рис. 2.4), то оба множества X_1 и X_2 имеют непустые относительные внутренности:

$$\mathrm{ri}X_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^i < 1, \quad i = 1, 2\right\},$$

$$\mathrm{ri}X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 = 0, \quad 0 < x^1 < 1, \right\},$$

которые не пересекаются между собой.

Множество $\mathrm{cl}X \setminus \mathrm{int}X$ называется *границей* множества X и обозначается ∂X. Соответственно множество $\mathrm{cl}X \setminus \mathrm{ri}X$ называется *относительной границей* X и обозначается $r\partial X$. Если $\mathrm{int}X$ — непустое множество, то относительная граница X совпадает с границей X. В противном случае они могут сильно отличаться.

Наряду с граничными и относительно граничными точками выпуклых множеств интерес представляют также их *крайние точки.*

Определение 2.2.4. *Точка x выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ называется крайней или экстремальной, если ее нельзя представить в виде*

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \quad x_1 \in X, \ x_2 \in X, \ x_1 \neq x_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Ниже совокупность всех крайних точек выпуклого множества X обозначается через $\mathrm{extr}X$. Из приведенного определения следует, что крайними могут быть лишь относительно граничные точки множества. Если взять треугольное множество, то у него крайними являются лишь вершины треугольника. У круга крайними являются все точки ограничивающей его окружности. У выпуклого конуса крайней точкой может быть только его вершина.

Имеет место следующее простое утверждение, которое иногда берут за определение крайней точки в конечномерном пространстве.

Лемма 2.2.1. *Точка x тогда и только тогда является крайней точкой выпуклого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$, когда не существует двух точек $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ таких, что $x_1 \neq x_2$ и $x = (x_1 + x_2)/2$.*

Доказательство. Докажем только достаточность, так как необходимость следует из определения крайней точки. Допустим, что некоторую точку $x \in X$ нельзя представить в виде полусуммы двух других не совпадающих между собой точек из X, но найдутся $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такие, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Выберем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы $\gamma_1 = \lambda_1 + \varepsilon \leq 1$, $\gamma_2 = \lambda_1 - \varepsilon \geq 0$. Тогда, поскольку $x_1, x_2 \in X$ и X — выпуклое множество, имеем: $y_1 = \gamma_1 x_1 + (1 - \gamma_1)x_2 \in X$ и $y_2 = \gamma_2 x_1 + (1 - \gamma_2)x_2 \in X$. Но

$$x = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1)x_2 = (y_1 + y_2)/2,$$

что противоречит сделанному допущению. ■

Теорема 2.2.1. *Любое непустое компактное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет хотя бы одну крайнюю точку.*

Доказательство. Непрерывная функция $f(x) = \|x\|$, где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, в силу компактности множества X достигает своего максимума на X. Поэтому можно указать такую точку $x_0 \in X$, что $\|x_0\| \geq \|x\|$ для любого $x \in X$. Предположим, что для x_0 существует представление $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, в котором $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда $x_0 = x_1 + (x_2 - x_1)/2$. Поэтому согласно неравенству треугольника

$$\|x_1\|^2 \leq \|x_0\|^2 = \|x_1\|^2 + \langle x_2 - x_1, x_1 \rangle + \|x_2 - x_1\|^2/4$$

и, следовательно, $\|x_2 - x_1\|^2 \geq -4\langle x_2 - x_1, x_1 \rangle$.

Аналогичным образом, используя разложение $x_0 = x_2 + (x_1 - x_2)/2$, приходим к неравенству $\|x_2 - x_1\|^2 \geq 4\langle x_2 - x_1, x_2 \rangle$. Складывая это неравенство с предыдущим, получаем $2\|x_2 - x_1\| \leq 0$, что возможно только тогда, когда $x_1 = x_2$. Таким образом, наше предположение неверно, и, согласно лемме 2.2.1, x_0 — крайняя точка множества X. ■

Приведем еще одно фундаментальное свойство выпуклых множеств, заключающееся в существовании относительной внутренности у любого непустого выпуклого множества.

Теорема 2.2.2. *Любое непустое выпуклое множество* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *имеет непустую относительную внутренность* $\mathrm{ri}X$.

Доказательство. Предположим сначала, что $0_n \in X$. В этом случае, поскольку $\mathrm{Lin}X = \mathrm{aff}X - x_0$ для произвольной точки $x_0 \in X$, то, беря в качестве $x_0 = 0_n$, получаем: $\mathrm{aff}X = \mathrm{Lin}X$. Таким образом, аффинная оболочка $\mathrm{aff}X$ является линейным подпространством.

Покажем, что для порождения этого линейного подпространства достаточно взять только точки из X. С этой целью выберем точки $x_1 \in X$, ..., $x_m \in X$ так, чтобы они были бы линейно независимыми и чтобы их число было максимально возможным. Рассмотрим далее линейное подпространство, натянутое на векторы $x_1, \dots, x_m$:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \le i \le m \right\}.$$

Нам надо убедиться в равенстве: $L = \mathrm{aff}X$.

С одной стороны, так как все x_i выбраны из X и линейно независимы, то $X \subseteq L$. Отсюда, поскольку L, будучи линейным подпространством, является аффинным множеством, получаем: $\mathrm{aff}X \subseteq L$.

С другой стороны, любая точка x из L есть аффинная комбинация точек x_1, ..., x_m и 0_n, так как

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i + \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right) 0_n. \tag{2.2.1}$$

Все эти точки x_1, ..., x_m и 0_n принадлежат X. Поэтому в силу того, что аффинная оболочка X совпадает с множеством всех аффинных комбинаций точек из X, приходим к обратному включению $L \subseteq \mathrm{aff}X$. Сопоставляя его с полученным ранее включением $\mathrm{aff}X \subseteq L$, делаем вывод, что $\mathrm{aff}X = L$.

Пусть далее A — матрица полного ранга размером $n \times m$, столбцами которой являются векторы x_1, ..., x_m. Введем в рассмотрение линейное отображение

$$x(\lambda) = A\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, \quad \lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m]^T, \tag{2.2.2}$$

отображающее $\mathbb{R}^m$ в L. Далее выделим в $\mathbb{R}^m$ выпуклое множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m : \; \lambda > 0_m, \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < 1 \right\}.$$

Оно открытое и согласно (2.2.1) и (2.2.2) для любого $\lambda \in \Lambda$ точка $x(\lambda)$ является выпуклой комбинацией точек $x_1, \dots, x_m$ и 0_n из X. Из-за выпуклости X данная точка $x(\lambda)$ обязательно должна принадлежать X. Отсюда в силу произвольности выбора $\lambda \in \Lambda$ заключаем, что множество

$$X_\Lambda = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = x(\lambda), \ \lambda \in \Lambda\right\}$$

принадлежит X, причем оно выпуклое, поскольку является образом выпуклого множества Λ при линейном отображении $x(\lambda)$.

У отображения $x(\lambda)$ имеется обратное отображение $\lambda(x)$, которое также является линейным. Его можно получить после умножения левой и правой частей равенства $x = A\lambda$ на матрицу A^T, в результате чего оно принимает вид $A^T x = A^T A\lambda$, откуда, так как квадратная матрица $A^T A$ неособая, приходим к $\lambda(x) = (A^T A)^{-1} A^T x$. Но все линейные отображения непрерывны, поэтому отображение $x(\lambda)$ является гомеоморфизмом, оно отображает открытые множества из $\mathbb{R}^m$ в открытые множества в L. Но тогда множество X_Λ, являющееся образом открытого множества Λ, должно быть открытым множеством в L. Отсюда следует, что для любой точки $x \in X_\Lambda$ существует такое $\varepsilon > 0$, для которого

$$\Delta_\varepsilon(x) \cap L \subseteq X_\Lambda \subseteq X. \tag{2.2.3}$$

Так как $L = \mathrm{aff} X$, то (2.2.3) означает, что $x \in \mathrm{ri} X$. Таким образом, $\mathrm{ri} X \neq \emptyset$.

В более общем случае, когда $0_n \notin X$, положим $Y = X - x_0$, где x_0 — произвольная точка из X. Тогда $0_n \in Y$ и по доказанному выше существует точка $y \in \mathrm{ri} Y$. Если теперь взять $x = y + x_0$, то $x \in \mathrm{ri} X$. Опять заключаем, что $\mathrm{ri} X \neq \emptyset$. ■

Заметим, что если отказаться от требования выпуклости множества X, то утверждение теоремы 2.2.2 может не выполняться. Например, если X есть единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат, т.е. $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ \|x\| = 1\}$, то $\mathrm{aff} X = \mathbb{R}^2$, но $\mathrm{ri} X = \emptyset$.

В определении 2.2.2 относительно внутренней точки $x \in X$ можно заменить замкнутую окрестность $\Delta_\varepsilon(x) = x + \varepsilon B$ на открытую окрестность $\Delta^0_\varepsilon(x) = x + \varepsilon B^0$, где $B^0 = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ \|y\| < 1\right\}$ — единичный открытый шар. Суть определения от этого не меняется. Кроме того, между аффинной оболочкой множества X и линейным подпространством, параллельным этому множеству, имеет место связь $\mathrm{aff} X = \mathrm{Lin} X + x$, где $x \in X$. Поэтому

$$\Delta^0_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff} X = \left(x + \varepsilon B^0\right) \cap (x + \mathrm{Lin} X) = x + \left(\varepsilon B^0\right) \cap \mathrm{Lin} X$$

и точка $x \in X$ является относительно внутренней, если

$$U_\varepsilon(x) = x + (\varepsilon B^0) \cap \mathrm{Lin} X \subseteq X$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Множество $U_\varepsilon(x)$ есть открытая ε-окрестность точки x в линейном многообразии $\mathrm{aff} X$.

Упражнение 8. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и s — произвольный ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим множество*

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_0 + \alpha s, \quad 1 \le \alpha \le 1 \right\},$$

являющееся двумерным отрезком в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что

$$riX = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_0 + \alpha s, \quad 1 < \alpha < 1 \right\}.$$

Следующая лемма может оказаться полезной при доказательстве различных утверждений, касающихся свойств относительных внутренностей и замыканий выпуклых множеств.

Лемма 2.2.2. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Пусть, кроме того, $x_1 \in ri\ X$ и $x_2 \in cl\ X$. Тогда $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in ri\ X$ для любого $0 < \lambda < 1$.*

Доказательство. Так как согласно условиям леммы $\lambda < 1$, для точки x_2 справедливо представление

$$x_2 = \frac{1}{1-\lambda} \left(x_\lambda - \lambda x_1 \right).$$

Пусть $\varepsilon_1 > 0$. Возьмем ε_1-окрестность $U_{\varepsilon_1}(x_1)$ точки x_1. Возьмем также окрестность $U_{\varepsilon_2}(x_2)$ точки x_2, положив

$$U_{\varepsilon_2}(x_2) = x_2 + \left(\varepsilon_2 B^0 \right) \cap \mathrm{Lin} X, \tag{2.2.4}$$

где $\varepsilon_2 = \gamma \varepsilon_1$, $\gamma = \lambda/(1-\lambda)$.

В силу принадлежности точки x_2 замыканию множества X можно указать такую точку $\bar{x}_2 \in X$, что $\bar{x}_2 \in U_{\varepsilon_2}(x_2)$, причем $\|\bar{x}_2 - x_2\| \le \varepsilon_2$. Из равенства $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ следует, что точка x_1 представима в виде $x_1 = \lambda^{-1} \left(x_\lambda - (1-\lambda) x_2 \right)$. Заменяя в этом равенстве точку x_2 на $\bar{x}_2$, приходим к сдвинутой точке $\bar{x}_1 = \lambda^{-1} \left(x_\lambda - (1-\lambda) \bar{x}_2 \right)$.

Поскольку

$$\bar{x}_1 - x_1 = \frac{1-\lambda}{\lambda} (x_2 - \bar{x}_2)$$

и $\bar{x}_2 \in U_{\varepsilon_2}(x_2)$, то

$$\|\bar{x}_1 - x_1\| = \frac{1-\lambda}{\lambda}\|x_2 - \bar{x}_2\| < \varepsilon_1.$$

Кроме того, согласно (2.2.4) из-за принадлежности точки $x_2 - \bar{x}_2$ линейному подпространству Lin$X$ следует принадлежность этому подпространству и точки $\bar{x}_1 - x_1$. Таким образом, $\bar{x}_1$ принадлежит окрестности $U_{\varepsilon_1}(x_1)$.

Окрестность $U_{\varepsilon_1}(x_1)$ является относительно открытым множеством. Но тогда, очевидно, множества $\alpha U_{\varepsilon_1}(x_1)$ и $y + U_{\varepsilon_1}(x_1)$ также относительно открыты для любых ненулевых $\alpha \in \mathbb{R}$ и произвольных $y \in \mathbb{R}^n$. Используя теперь представление $x_\lambda = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, получаем, что точка x_λ принадлежит относительно открытому выпуклому множеству

$$W = \lambda U_{\varepsilon_1}(x_1) + (1-\lambda)\bar{x}_2.$$

Так как $\bar{x}_2 \in X$ и $U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq X$, то в силу выпуклости множества X имеет место включение $W \subseteq X$. Поэтому $x_\lambda \in X$ и, стало быть, x_λ является относительно открытой точкой множества X. ■

Теорема 2.2.3. *Относительная внутренность, внутренность и замыкание выпуклого множества выпуклы.*

Упражнение 9. *Используя лемму 2.2.2, докажите теорему 2.2.3.*

В следующей теореме приводится ряд равенств, касающихся относительной внутренности, замыкания и аффинной оболочки выпуклого множества.

Теорема 2.2.4. *Пусть X — выпуклое множество. Тогда*

$$riX = ri\,(clX)\,, \quad clX = cl\,(riX)\,. \tag{2.2.5}$$

$$aff\,X = aff\,(clX) = aff\,(riX). \tag{2.2.6}$$

Доказательство. Так как ri$X \subseteq X$, то справедливо включение cl(ri$X$) $\subseteq$ cl$X$. С другой стороны, если $x_1 \in$ ri$X$, $x_2 \in$ cl$X$, то по лемме 2.2.2 весь интервал, соединяющий точки x_1 и x_2, принадлежит ri$X$. Следовательно, $x_2 \in$ cl(ri$X$). Но точка $x_2 \in$ cl$X$ взята произвольным образом. Поэтому cl$X \subseteq$ cl(ri$X$). Отсюда приходим ко второму равенству в (2.2.5), а именно: cl$X$ = cl (ri$X$).

Далее, поскольку $X \subseteq$ aff$X$, имеет место очевидное включение: cl$X \subseteq$ cl(aff$X$). Но аффинная оболочка любого множества X, будучи аффинным множеством, является одновременно и относительно открытым и замкнутым множеством. Поэтому $\mathrm{cl}(\mathrm{aff}X) = \mathrm{aff}X$. Следовательно, $\mathrm{cl}X \subseteq \mathrm{aff}X$. Отсюда, так как аффинная оболочка $\mathrm{cl}X$ не меньше, чем аффинная оболочка самого множества X, заключаем, что $\mathrm{aff}(\mathrm{cl}X) = \mathrm{aff}X$, т.е. выполняется первое из равенств (2.2.6). Второе равенство $\mathrm{aff}(\mathrm{ri}X) = \mathrm{aff}X$ из (2.2.6) также очевидно, поскольку каждая точка из $\mathrm{ri}X$ принадлежит $\mathrm{aff}X$ вместе со своею окрестностью.

Учтём, что $X \subseteq \mathrm{cl}X$. Тогда на основании полученного утверждения о совпадении аффинных оболочек у множеств X и $\mathrm{cl}X$ приходим к включению: $\mathrm{ri}X \subseteq \mathrm{ri}\,(\mathrm{cl}X)$. Остается показать, что из $x \in \mathrm{ri}\,(\mathrm{cl}X)$ следует $x \in \mathrm{ri}X$. Действительно, пусть x_1 — точка из $\mathrm{ri}X$, отличная от x. Пусть, кроме того, l — прямая, проходящая через эти две точки. Тогда, беря $\lambda > 1$, получаем, что точка

$$x_2 = \lambda x + (1-\lambda)x_1 = x - (\lambda - 1)(x_1 - x) \in \mathrm{ri}(\mathrm{cl}X),$$

когда $\lambda - 1$ достаточно мало. Поэтому $x_2 \in \mathrm{cl}X$ и для точки x имеет место представление: $x = \mu x_1 + (1-\mu)x_2$, где $\mu = (\lambda - 1)/\lambda$. Имеем $0 < \mu < 1$. Поэтому согласно лемме 2.2.2 $x \in \mathrm{ri}X$. Таким образом, доказано первое равенство (2.2.5). ■

Теорема 2.2.5. *Пусть X_1 и X_2 — выпуклые множества и пусть $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 \neq \emptyset$. Тогда*

$$\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 = \mathrm{ri}\,(X_1 \cap X_2)\,, \quad \mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2 = \mathrm{cl}\,(X_1 \cap X_2)\,. \qquad (2.2.7)$$

Доказательство. Возьмем произвольные точки $x_1 \in \mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2$ и $x_2 \in \mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2$. Согласно условиям теоремы точка x_1 обязательно найдется, тем более найдется точка x_2. Положим $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, где $0 < \lambda < 1$. Из утверждения леммы 2.2.2 следует, что $x_\lambda \in \mathrm{ri}X_i$ $i = 1, 2$. Кроме того, $x_\lambda \to x_2$ при $\lambda \downarrow 0$. Поэтому, в силу произвольности точки $x_2 \in \mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2$,

$$\mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2 \subseteq \mathrm{cl}\,(\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2) \subseteq \mathrm{cl}\,(X_1 \cap X_2) \subseteq \mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2. \qquad (2.2.8)$$

Так как левое и правое множества совпадают, отсюда приходим ко второму равенству (2.2.7).

Покажем теперь, что первое равенство (2.2.7) также выполняется. Из цепочки включений (2.2.8) вытекает еще одно равенство:

$$\mathrm{cl}\,(\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2) = \mathrm{cl}\,(X_1 \cap X_2)\,.$$

Но тогда, как следует из утверждения теоремы 2.2.4, у этих двух множеств $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2$ и $X_1 \cap X_2$ должны быть одинаковые относительные внутренности. Поэтому

$$\mathrm{ri}\,(X_1 \cap X_2) \subseteq \mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2.$$

Убедимся, что имеет место и обратное включение.

Пусть точка $x \in \mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2$ произвольная. Так как $x \in \mathrm{ri}X_1$, то беря любую другую точку $x_1 \in X_1$, получаем, что для x справедливо представление $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, где $0 < \lambda < 1$ и x_2 — некоторая точка из X_1, лежащая на прямой, соединяющей точки x_1 и x. Другими словами, любой отрезок, лежащий в X_1 и имеющий в качестве одного из своих концов относительно внутреннюю точку x, может быть продолжен далее x, оставаясь в X_1. То же самое касается и второго множества X_2. Поэтому если взять теперь в качестве x_1 точку $x_1 \in \mathrm{ri}(X_1 \cap X_2)$, то эта точка принадлежит одновременно и X_1, и X_2. В этом случае отрезок $[x_1, x]$, лежащий во множестве $X_1 \cap X_2$, может быть увеличен до отрезка $[x_1, x_2]$, которой остается в этом множестве, а для точки x становится справедливым представление $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, в котором $0 < \lambda < 1$. Отсюда, поскольку $x_1 \in \mathrm{ri}(X_1 \cap X_2)$, на основании леммы 2.2.2 делаем вывод, что $x \in \mathrm{ri}(X_1 \cap X_2)$. Таким образом, $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 \subseteq \mathrm{ri}(X_1 \cap X_2)$ и, стало быть, справедливо первое равенство (2.2.7). ■

Приведем пример, показывающий существенность требования непустоты пересечения относительных внутренностей выпуклых множеств X_1 и X_2 для выполнения правого равенства (2.2.7). Пусть

$$X_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < x^i < 1,\ i = 1, 2\right\} \cup \{0_2\},$$

$$X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \le x^1 \le 1,\ x^2 = 0\right\}.$$

Их относительные внутренности не пересекаются. Имеем, с одной стороны, $\mathrm{cl}(X_1 \cap X_2) = \{0_2\}$. А с другой стороны, $\mathrm{cl}X_1 \cap \mathrm{cl}X_2 = X_2$.

Уже упоминавшийся пример квадрата и одной его стороны в качестве двух выпуклых множеств с непересекающимися относительными внутренностями (см. рис. 2.4) демонстрирует невыполнимость левого равенства (2.2.7). В этом примере: $\mathrm{ri}(X_1 \cap X_2) = \mathrm{ri}X_1$.

2.3. Проекция точки на выпуклое множество

Дадим определение проекции точки на множество.

Определение 2.3.1. *Пусть имеются точка $a \in \mathbb{R}^n$ и множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Точка $\pi_X(a) \in X$ называется проекцией a на X, если $\|\pi_X(a) - a\| \le \|x - a\|$ для любого $x \in X$.*

Если $a \in X$, то понятно, что $\pi_X(a) = a$. Если X — открытое множество и $a \notin X$, то проекции точки a на X не существует.

Лемма 2.3.1. *Проекция точки a на непустое замкнутое множество X всегда существует.*

Доказательство. Если $a \in X$, то данное утверждение тривиально. Предположим теперь, что $a \notin X$. Тогда, вводя в рассмотрение функцию $f(x) = \|x - a\|$, получаем, что $f(x) > 0$ для всех $x \in X$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$. Для нее выполняется: $f(x_0) > 0$. Пусть $Y = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \le f(x_0)\right\}$ и пусть $Z = X \cap Y$. Множество Z как пересечение двух замкнутых множеств, одно из которых (множество Y) ограничено, является компактным, причем, очевидно, не пустым. По теореме Вейерштрасса непрерывная функция $f(x)$ достигает на Z своего минимума. Любая точка ее минимума по определению является проекцией точки a на X. ■

Понятно, что в случае произвольного замкнутого множества X проекция точки $a \notin X$ на X не обязательно должна быть единственной. Однако в случае выпуклого множества это так — любая точка может иметь только единственную проекцию.

Теорема 2.3.1. *Пусть X — выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$. Тогда проекция $\pi_X(a)$ любой точки $a \in \mathbb{R}^n$ на X существует и единственна. Имеют место следующие неравенства:*

$$\langle \pi_X(a) - a, x - \pi_X(a) \rangle \ge 0 \quad \forall\ x \in X, \tag{2.3.1}$$

$$\langle \pi_X(a) - a, x - a \rangle \ge \|\pi_X(a) - a\|^2 \quad \forall\ x \in X. \tag{2.3.2}$$

Доказательство. Существование проекции $\pi_X(a)$ следует из утверждения леммы 2.3.1. Покажем,что она единственна, даже если $a \notin X$. От противного, пусть $a \notin X$ и пусть имеются две отличные друг от друга точки $\pi_X^1(a)$ и $\pi_X^2(a)$, являющиеся проекциями точки a на множество X. В силу определения проекции для них выполняется равенство $\|\pi_X^1(a) - a\| = \|\pi_X^2(a) - a\|$.

Рассмотрим точку

$$b = \frac{1}{2}\pi_X^1(a) + \frac{1}{2}\pi_X^2(a).$$

Так как b является выпуклой комбинацией точек из выпуклого множества X, то $b \in X$. Имеем с использованием *неравенства треугольника* для норм

$$\begin{array}{rcl} \|b-a\| & = & \|\frac{1}{2}\pi_X^1(a)+\frac{1}{2}\pi_X^2(a)-a\| < \\ & < & \frac{1}{2}\|\pi_X^1(a)-a\|+\frac{1}{2}\|\pi_X^2(a)-a\| = \\ & = & \|\pi_X^1(a)-a\| = \|\pi_X^2(a)-a\|. \end{array}$$

Мы пришли к противоречию с тем, что $\pi_X^1(a)$ и $\pi_X^2(a)$ являются проекциями точки a на X. Поэтому проекция $\pi_X(a)$ на выпуклое множество X единственна.

Для всех $x \in X$ и любого $0 < \lambda < 1$ точка $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)\pi_X(a)$ принадлежит X. Поэтому из-за того, что $\pi_X(a) \in X$ есть проекция точки a на X, справедливо неравенство

$$\begin{array}{l} \|\pi_X(a)-a\|^2 \le \|x_\lambda - a\|^2 = \|\pi_X(a)-a+\lambda(x-\pi_X(a))\|^2 = \\ \quad = \|\pi_X(a)-a\|^2 + 2\lambda\langle \pi_X(a)-a, x-\pi_X(a)\rangle + \lambda^2\|x-\pi_X(a)\|^2. \end{array}$$

Отсюда

$$2\langle \pi_X(a)-a, x-\pi_X(a)\rangle + \lambda\|x-\pi_X(a)\|^2 \ge 0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \downarrow 0$, получаем неравенство (2.3.1).

Далее, используя (2.3.1), убеждаемся, что для любого $x \in X$

$$\begin{array}{l} \langle \pi_X(a)-a, x-a\rangle = \langle \pi_X(a)-a, \pi_X(a)-a+x-\pi_X(a)\rangle = \\ \qquad = \|\pi_X(a)-a\|^2 + \langle \pi_X(a)-a, x-\pi_X(a)\rangle \ge \\ \qquad \ge \|\pi_X(a)-a\|^2, \end{array}$$

т.е. выполняется (2.3.2). ■

Геометрический смысл неравенства (2.3.1) поясняется на рис. 2.5. Оказывается, оно является не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы точка $\pi_X(a)$ была бы проекцией точки a на выпуклое множество X.

Утверждение 2.3.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество. Пусть, кроме того, имеются точки $a \in \mathbb{R}^n$ и $\bar{x} \in X$. Тогда если для всех $x \in X$ справедливо неравенство*

$$\langle \bar{x}-a, x-\bar{x}\rangle \ge 0, \tag{2.3.3}$$

то $\bar{x}$ является проекцией точки a на X, т.е. $\bar{x} = \pi_X(a)$.

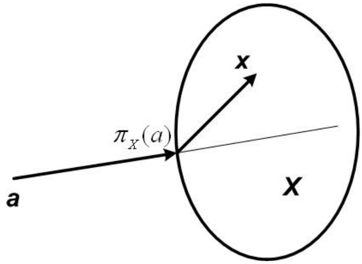

Рис. 2.5. Геометрический смысл неравенства (2.3.1)

Доказательство. Используя неравенство (2.3.3), получаем для любого $x \in X$:

$$\begin{aligned} \|x-a\|^2 &= \|\bar{x}-a+x-\bar{x}\|^2 = \\ &= \|\bar{x}-a\|^2 + \|x-\bar{x}\|^2 + 2\langle \bar{x}-a, x-\bar{x}\rangle \geq \\ &\geq \|\bar{x}-a\|^2, \end{aligned}$$

откуда, в силу определения проекции точки на множество, следует, что $\bar{x} = \pi_X(a)$. ■

В частном случае, когда X — аффинное множество, неравенство (2.3.3) переходит в равенство.

Утверждение 2.3.2. *Пусть X — аффинное множество. Тогда для того, чтобы точка $\bar{x} \in X$ была бы проекцией точки a на X, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\langle \bar{x}-a, x-\bar{x}\rangle = 0 \tag{2.3.4}$$

для любого $x \in X$.

Доказательство. Так как аффинное множество является выпуклым замкнутым множеством, то в силу теоремы 2.3.1 и утверждения 2.3.1 для того, чтобы $\bar{x} \in X$ была бы проекцией точки a на X, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in X$ выполнялось неравенство (2.3.3).

Пусть x — произвольная точка из X, отличная от $\bar{x}$. Рассмотрим прямую L, проходящую через точки x и $\bar{x}$. Так как X — аффинное множество, то эта прямая L целиком лежит в X. Возьмем теперь другую точку $\tilde{x}$, которая принадлежит прямой L и симметрична по отношению к точке x, т.е. она удовлетворяет равенству: $\tilde{x} - \bar{x} = -(x - \bar{x})$ или

$$\tilde{x} = 2\bar{x} - x. \tag{2.3.5}$$

Для обеих точек x и $\tilde{x}$ выполняется неравенство (2.3.3):

$$\langle \bar{x} - a, x - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \langle \bar{x} - a, \tilde{x} - \bar{x} \rangle \geq 0. \tag{2.3.6}$$

Если теперь подставить во второе неравенство выражение (2.3.5) для точки $\tilde{x}$, то получаем $\langle \bar{x} - a, x - \bar{x} \rangle \leq 0$. Сопоставляя данное неравенство с первым неравенством в (2.3.6), делаем вывод, что имеет место (2.3.4). ■

Приведем примеры построения проекции точки на некоторые простейшие выпуклые множества.

1. Возьмем сначала в качестве X неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$. Для него имеем $\pi_{R^n_+}(a) = a_+$, где a_+ — положительная срезка вектора a, т.е. это такой вектор $a_+ = [a^1_+, \ldots, a^n_+]$, у которого $a^i_+ = \max[a^i, 0]$, $1 \leq i \leq n$. В этом легко убедиться с помощью неравенства (2.3.3).

2. Предположим теперь, что $X = L_c$, где

$$L_c = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x^i = c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Множество L_c является аффинным. При $c = 0$ оно становится линейным подпространством. Пусть e — вектор в $\mathbb{R}^n$, все компоненты которого равны единице. Несложно понять, что $\pi_{L_c}(a) = a - \alpha e$, где коэффициент α находится из условия: $a - \alpha e \in L_c$. Отсюда получаем $\alpha = n^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i - c \right)$. Следовательно,

$$\pi_{L_c}(a) = a - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a^i - c \right) e.$$

Неравенство (2.3.3) для любого $x \in L_c$ выполняется как тождественное равенство. В частном случае линейного подпространства L_0 имеем: $\pi_{L_0}(a) = a - n^{-1} \sum_{i=1}^{n} a^i \; e$.

3. Рассмотрим далее случай, когда множество $X \subset \mathbb{R}^n$ имеет вид

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} x^i = 1 \right\},$$

т.е. $X = L_0 \cap \mathbb{R}^n_+$. Такое множество называют еще вероятностным симплексом в $\mathbb{R}^n$. Найдем проекцию произвольной точки $a \in \mathbb{R}^n$ на данное множество. С этой целью упорядочим компоненты вектора a в порядке их убывания: $a^{i_1} \geq a^{i_2} \geq \ldots \geq a^{i_n}$ и определим величины

$$\mu_k = \frac{1}{k} \left(1 + k a^{i_k} - \sum_{j=1}^{k} a^{i_j} \right).$$

Нетрудно видеть, что $\mu_1 = 1$ и, если $\mu_k > 0$, то $\mu_k > \mu_{k+1}$. Действительно, при $\mu_{k+1} \le 0$ это неравенство очевидно. В противном случае

$$\begin{aligned} \mu_k &\ge k^{-1}\left(1 + ka^{i_{k+1}} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} a^{i_j}\right) = \\ &= k^{-1}\left[1 + (k+1)a^{i_{k+1}} - \textstyle\sum_{j=1}^{k+1} a^{i_j}\right] > \\ &> (k+1)^{-1}\left[1 + (k+1)a^{i_{k+1}} - \textstyle\sum_{j=1}^{k+1} a^{i_j}\right] = \mu_{k+1}. \end{aligned}$$

Пусть m — максимальный индекс из $J^n = [1:n]$ такой, что $\mu_k > 0$. Обозначим $J_+(a) = \{i_1, \ldots, i_m\}$ и положим

$$\sigma(a) = \frac{1}{m}\left(\sum_{i \in J_+(a)} a^i - 1\right).$$

Пусть теперь $\bar{x} = \pi_X(a)$. Тогда

$$\bar{x}^i = \begin{cases} a^i - \sigma(a), & i \in J_+(a), \\ 0, & i \notin J_+(a). \end{cases} \tag{2.3.7}$$

Убедимся, что действительно $\bar{x} \in X$ есть искомая проекция. С этой целью покажем сначала, что $\bar{x} \in X$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i = \sum_{i \in J_+(a)} \bar{x}^i = \sum_{i \in J_+(a)} a^i - m\sigma(a) = 1.$$

Кроме того, если взять наименьшую компоненту $\bar{x}^{i_m}$ среди всех компонент $\bar{x}^{i_j}$, $j \in J_+(a)$, то для нее в силу вышеуказанного способа выбора номера m получаем

$$\begin{aligned} \bar{x}^{i_m} = a^{i_m} - m^{-1}\left(\textstyle\sum_{j=1}^{m} a^{i_j} - 1\right) = \\ = m^{-1}\left(1 + ma^{i_m} - \textstyle\sum_{j=1}^{m} a^{i_j}\right) = \mu_m > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\bar{x}^i > 0$, $i \in J_+(a)$, и, стало быть, $\bar{x} \in X$.

Проверим выполнение неравенства (2.3.3) для найденной проекции (2.3.7). Так как $x \in L_1$ и $\bar{x} \in L_1$, то $x - \bar{x} \in L_0$. Представим вектор $\bar{x} - a$ в виде: $\bar{x} - a = y_1 + y_2$, где $y_1 \in L_0$, а вектор y_2 принадлежит ортогональному дополнению к L_0. Имеем согласно вышесказанному:

$$\begin{aligned} y_1 = \pi_{L_0}(\bar{x} - a) = \bar{x} - a - n^{-1}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \bar{x}^i - \sum_{i=1}^{n} a^i\right) e = \\ = \bar{x} - a - n^{-1}\left(1 - \textstyle\sum_{i=1}^{n} a^i\right) e. \end{aligned}$$

Обозначим $s(a) = \sum_{i=1}^n a^i$. После подстановки соответствующих значений компонент вектора $\bar{x}$ из (2.3.7) получаем

$$y_1^{i_j} = \begin{cases} -[\sigma(a) + n^{-1}(1 - s(a))], & i_j \in J_+(a), \\ -[a^{i_j} + n^{-1}(1 - s(a))], & i_j \notin J_+(a). \end{cases}$$

Поскольку

$$\langle x - \bar{x}, \bar{x} - a \rangle = \langle x - \bar{x}, y_1 + y_2 \rangle = \langle x - \bar{x}, y_1 \rangle,$$

то неравенство (2.3.3) для данных a и $\bar{x}$ выполняется в том и только в том случае, когда $\langle x - \bar{x}, y_1 \rangle \geq 0$ для любого $x \in X$. Имеем

$$\begin{aligned} \langle x - \bar{x}, y_1 \rangle &= -\sigma(a) \textstyle\sum_{j=1}^m (x^{i_j} - \bar{x}^{i_j}) - \sum_{j=1+m}^n x^{i_j} a^{i_j} = \\ &= -\left[\sigma(a) \left(\textstyle\sum_{j=1}^m x^{i_j} - 1\right) + \sum_{j=1+m}^n x^{i_j} a^{i_j}\right] = \\ &= -\left[m^{-1} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m a^{i_j} - 1\right)\left(\sum_{j=1}^m x^{i_j} - 1\right) + \sum_{j=m+1}^n x^{i_j} a^{i_j}\right] = \\ &= m^{-1} \left(\textstyle\sum_{j=1}^m a^{i_j} - 1\right) \sum_{j=m+1}^n x^{i_j} - \sum_{j=m+1}^n x^{i_j} a^{i_j}. \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

Но из того, что $\mu_{k+1} \leq 0$, следует неравенство

$$m^{-1}(\sum_{j=1}^m a^{i_j} - 1) \geq a^{i_{m+1}}.$$

Отсюда и из (2.3.8) с учетом того, что $a^{i_j} \leq a^{i_{m+1}}$ для всех $m < j \leq n$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \langle x - \bar{x}, y_1 \rangle \geq a^{i_{m+1}} \textstyle\sum_{j=m+1}^n x^{i_j} - \sum_{j=m+1}^n x^{i_j} a^{i_j} = \\ = \textstyle\sum_{j=m+1}^n x^{i_j} \left(a^{i_{m+1}} - a^{i_j}\right) \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно утверждению 2.3.1, вектор $\bar{x}$ с компонентами (2.3.7) действительно является искомой проекцией $\pi_X(a)$.

2.4. Отделимость выпуклых множеств

Перейдем теперь к рассмотрению очень важного понятия, касающегося выпуклых множеств. Оно связано с возможностью поместить их в разные полупространства, задаваемые одной и той же гиперплоскостью. Особый интерес это имеет в случае двух непересекающихся выпуклых множеств.

Пусть X_1 и X_2 — два произвольных множества из $\mathbb{R}^n$. Дадим ряд определений.

Определение 2.4.1. *Множества X_1 и X_2 называются отделимыми, если существует такой ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\langle p, x_1 \rangle \geq \beta \geq \langle p, x_2 \rangle \quad \forall\, x_1 \in X_1, \quad \forall\, x_2 \in X_2 \tag{2.4.1}$$

для некоторого $\beta \in \mathbb{R}$.

Определение 2.4.2. *Множества X_1 и X_2 называются собственно отделимыми, если они отделимы, т.е. для них выполняется неравенство (2.4.1), и можно дополнительно указать такие $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, что*

$$\langle p, x_1 \rangle > \langle p, x_2 \rangle.$$

Определение 2.4.3. *Множества X_1 и X_2 называются строго отделимыми, если существует такой ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\langle p, x_1 \rangle > \langle p, x_2 \rangle \quad \forall\, x_1 \in X_1, \quad \forall\, x_2 \in X_2.$$

Определение 2.4.4. *Множества X_1 и X_2 называются сильно отделимыми, если существует такой ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^n$, что*

$$\inf_{x_1 \in X_1} \langle p, x_1 \rangle > \beta > \sup_{x_2 \in X_2} \langle p, x_2 \rangle \tag{2.4.2}$$

для некоторого $\beta \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Gamma_{p,\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, x \rangle = \beta \right\}$ — гиперплоскость в $\mathbb{R}_n$ и пусть $\Gamma^+_{p,\beta}$ и $\Gamma^-_{p,\beta}$ — порождаемые этой гиперплоскостью соответствующие замкнутые полупространства:

$$\Gamma^+_{p,\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, x \rangle \geq \beta \right\}, \quad \Gamma^-_{p,\beta} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle p, x \rangle \leq \beta \right\}.$$

Согласно определению, если множества X_1 и X_2 отделимы друг от друга, то первое из них оказывается в полупространстве $\Gamma^+_{p,\beta}$, а второе — в полупространстве $\Gamma^-_{p,\beta}$. Про гиперплоскость $\Gamma_{p,\beta}$ в этом случае говорят, что она *разделяет множества X_1 и X_2* или что она является *разделяющей гиперплоскостью.*

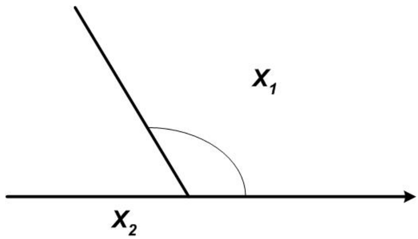

Рис. 2.6. Собственно отделимые множества

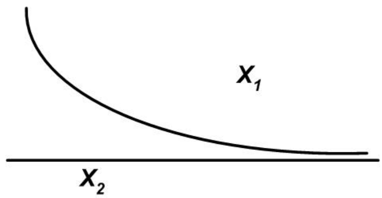

Рис. 2.7. Строго отделимые множества

Из сильной отделимости следует строгая отделимость, а из строгой отделимости следует собственная отделимость. Примеры собственно отделимых, строго отделимых и сильно отделимых множеств показаны соответственно на рис. 2.6, 2.7 и 2.8. В первом и втором случаях разделяющая гиперплоскость совпадает с множеством X_2.

Упражнение 10. *Приведите пример двух множеств, которые являются отделимыми, но не собственно отделимыми.*

Ниже исследуются условия, при которых существует отделимость выпуклых множеств. В первую очередь рассмотрим условия, гарантирующие сильную отделимость.

Определение 2.4.5. *Расстоянием между множествами X_1 и X_2 называется число*

$$\rho(X_1, X_2) = \inf_{x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2} \|x_1 - x_2\|.$$

Теорема 2.4.1. (О сильной отделимости.) *Выпуклые множества X_1 и X_2 сильно отделимы тогда и только тогда, когда расстояние между ними положительно.*

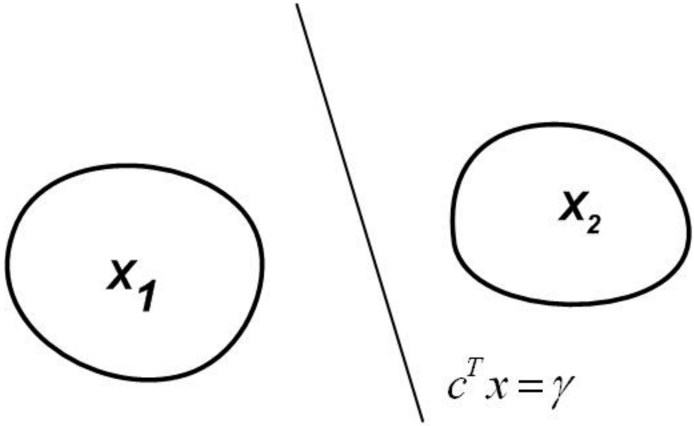

Рис. 2.8. Сильно отделимые множества

Доказательство. *Необходимость.* Покажем сначала, что если множества X_1 и X_2 сильно отделимы, то $\rho(X_1, X_2) > 0$. Пусть

$$\delta = \inf_{x_1 \in X_1} \langle p, x_1 \rangle - \sup_{x_2 \in X_2} \langle p, x_2 \rangle > 0,$$

где положительность величины δ следует из неравенств (2.4.2), входящих в определение 2.4.4 сильно отделимых множеств. Так как всегда $\sup_{x \in X} f(x) = -\inf_{x \in X}(-f(x))$ для любой функции $f(x)$ и любого множества X, то

$$\delta = \inf_{x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2} \langle p, x_1 - x_2 \rangle > 0.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского, согласно которому

$$\delta \leq \langle p, x_1 - x_2 \rangle \leq \|p\| \|x_1 - x_2\|$$

для всех $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$. Отсюда, учитывая, что $p \neq 0_n$, приходим к

$$\rho(X_1, X_2) \geq \frac{\delta}{\|p\|} > 0.$$

Достаточность. Пусть $\rho(X_1, X_2) > 0$. Введем в рассмотрение множество $X = \mathrm{cl}(X_1 - X_2)$. Оно выпукло и замкнуто. Из $\rho(X_1, X_2) > 0$ следует, что $0_n \notin X$. Спроектируем начало координат 0_n на X. По теореме 2.2.4 такая проекция существует и единственна. Обозначим ее $p = \pi_X(0_n)$. Вектор p ненулевой, и из неравенства (2.3.2) следует, что

$$\langle p, x\rangle \geq \|p\|^2 > 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Откуда

$$\inf_{x_1\in X_1,\ x_2\in X_2}\langle p, x_1 - x_2\rangle \geq \|p\|^2 > 0$$

или

$$\inf_{x_1\in X_1}\langle p, x_1\rangle > \sup_{x_2\in X_2}\langle p, x_2\rangle. \tag{2.4.3}$$

Пусть

$$\beta_1 = \inf_{x_1\in X_1}\langle p, x_1\rangle, \quad \beta_2 = \sup_{x_2\in X_2}\langle p, x_2\rangle.$$

Имеем согласно (2.4.3) $\beta_1 > \beta_2$. Берем промежуточное $\beta_2 < \beta < \beta_1$ и видим, что выполняется неравенство

$$\inf_{x_1\in X_1}\langle p, x_1\rangle > \beta > \sup_{x_2\in X_2}\langle p, x_2\rangle,$$

означающие, что множества X_1 и X_2 сильно отделимы. ■

Следствие 2.4.1. *Пусть X_1 и X_2 — выпуклые замкнутые множества и $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Пусть, кроме того, множество X_2 ограничено. Тогда множества X_1 и X_2 сильно отделимы.*

Для доказательства следствия надо лишь убедиться, что при этих предположениях $\rho(X_1, X_2) > 0$. Из следствия 2.4.1 в качестве частного случая также немедленно получаем, что если X — выпуклое замкнутое множество и точка x не принадлежит X, то x может быть сильно отделена от X.

Рассмотрим теперь условия, при которых имеют место другие виды отделимости выпуклых множеств. Прежде всего укажем их для случая, когда, по крайней мере, одно из множеств состоит только из единственной точки.

Теорема 2.4.2. (Об отделимости точки и множества.) *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество и $a \notin \mathrm{ri}X$. Тогда точка a отделима от X и строго отделима от $\mathrm{ri}X$. Если же $a \notin \mathrm{cl}X$, то a сильно отделима от X.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $a \notin \mathrm{cl}X$. При этом предположении согласно следствию 2.4.1 к теореме 2.4.1 точка a сильно отделима от $\mathrm{cl}X$. Тем более, она сильно отделима от X.

Перейдем теперь к случаю, когда $a \in \mathrm{cl}X$. Так как по предположению $a \notin \mathrm{ri}X$, то это возможно тогда и только тогда, когда $a \in r\partial X$ (относительной границе X). Кроме того, для выпуклого множества X его аффинная оболочка совпадает с аффинной оболочкой $\mathrm{cl}X$, что приводит к включению $\mathrm{cl}X \subseteq \mathrm{aff}(\mathrm{cl}X) = \mathrm{aff}X$, из которого следует, что $a \in \mathrm{aff}X$.

Возьмем последовательность точек $a_k \in \mathrm{aff}X$, $a_k \notin \mathrm{cl}X$, и такую, что $a_k \to a$ при $k \to \infty$. Рассмотрим ненулевые векторы

$$\tilde{p}_k = \pi_{\mathrm{cl}X}(a_k) - a_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и положим $p_k = \tilde{p}_k / \|\tilde{p}_k\|$. Имеем $\|p_k\| = 1$ для всех k. Из свойств проекции следует

$$\langle \tilde{p}_k, x - a_k \rangle \geq \|\tilde{p}_k\|^2 > 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{cl}X$$

или

$$\langle p_k, x - a_k \rangle \geq \|\tilde{p}_k\| > 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{cl}X.$$

Отсюда приходим к неравенству

$$\langle p_k, x \rangle > \langle p_k, a_k \rangle \quad \forall\, x \in \mathrm{cl}X, \quad k = 1, 2, \dots \tag{2.4.4}$$

Все векторы p_k принадлежат единичной сфере, поэтому последовательность $\{p_k\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Не ограничивая общности, считаем, что сходится сама последовательность $\{p_k\}$, т.е. $p_k \to p$, где $\|p\| = 1$. Тогда, переходя в неравенствах (2.4.4) к пределу, получаем

$$\langle p, x \rangle \geq \langle p, a \rangle \quad \forall\, x \in \mathrm{cl}X. \tag{2.4.5}$$

Таким образом, точка a отделима от $\mathrm{cl}X$ и, следовательно, от самого множества X.

Осталось показать, что точка a строго отделима от $\mathrm{ri}X$. Пусть точка $x \in \mathrm{ri}X$ и пусть $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $\Delta_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff}X \subseteq X$, где $\Delta_\varepsilon(x)$ — ε-окрестность точки x. Возьмем точку $\tilde{x} = x - \varepsilon p$. Поскольку $a_k \in \mathrm{aff}X$, $\pi_{\mathrm{cl}X}(a_k) \in \mathrm{aff}X$, то $\tilde{p}_k = \pi_{\mathrm{cl}X}(a_k) - a_k \in \mathrm{Lin}X$. Стало быть, и $p_k \in \mathrm{Lin}X$. Но линейное подпространство $\mathrm{Lin}X$ замкнуто, поэтому предельный вектор p также принадлежит $\mathrm{Lin}X$. Следовательно, $\tilde{x} \in \mathrm{aff}X$. Кроме того, $\tilde{x} \in \Delta_\varepsilon(x)$, так как $\|p\| = 1$. Объединяя эти два включения, приходим к выводу, что

$$\tilde{x} \in \Delta_\varepsilon(x) \cap \mathrm{aff}X \subseteq X.$$

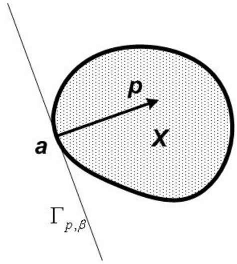

Рис. 2.9. Опорная гиперплоскость (собственная)

После подстановки $\tilde{x}$ в (2.4.5) получаем

$$\langle p, \tilde{x}\rangle = \langle p, x\rangle - \varepsilon\|p\|^2 = \langle p, x\rangle - \varepsilon \geq \langle p, a\rangle.$$

Таким образом, $\langle p, x\rangle > \langle p, a\rangle$. В силу произвольности точки x из $\mathrm{ri}X$, отсюда заключаем, что точка a строго отделима от $\mathrm{ri}X$. ■

Особый интерес представляют гиперплоскости, которые проходят через граничную точку выпуклого множества и разделяют это множество и граничную точку.

Определение 2.4.6. *Гиперплоскость* $\Gamma_{p,\beta} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle p, x\rangle = \beta\}$ *называется опорной к множеству* X *в точке* $a \in \partial X$, *если*

$$\langle p, x\rangle \geq \beta = \langle p, a\rangle \quad \forall\ x \in X. \tag{2.4.6}$$

Опорная гиперплоскость называется собственной опорной, если, кроме того, можно указать $\bar{x} \in X$ *такое, что* $\langle p, \bar{x}\rangle > \beta$.

Таким образом, если гиперплоскость $\Gamma_{p,\beta}$ является опорной к множеству X в граничной точке $a \in \partial X$, то X лежит в одном из полупространств, определяемым этой гиперплоскостью, а именно в полупространстве $\Gamma^+_{p,\beta}$. Сама же гиперплоскость $\Gamma_{p,\beta}$ проходит через граничную точку a (см. рис. 2.9). О ненулевом векторе, обратном к вектору p из неравенства (2.4.6), говорят как об *опорном векторе* к множеству X в точке $a \in \partial X$.

Теорема 2.4.3. (Об опорной гиперплоскости.) *В любой граничной (относительно граничной) точке* a *выпуклого множества* X *существует опорная (собственная опорная) гиперплоскость.*

Доказательство. Предположим сначала, что $a \notin \mathrm{ri}X$. Тогда обязательно $a \in r\partial X$ и согласно теореме 2.4.2 точка a отделима от X и строго отделима от $\mathrm{ri}X$, причем, как следует из доказательства теоремы, разделяющую гиперплоскость можно провести через a. Эта гиперплоскость и будет собственной опорной гиперплоскостью к X в a.

Рассмотрим далее случай, когда $a \in \mathrm{ri}X$. Поскольку по условиям теоремы, $a \in \partial X$, то это возможно только тогда, когда $\mathrm{int}X = \emptyset$ и $\mathrm{aff}X \neq \mathbb{R}^n$. Отсюда для размерности m множества X, совпадающей с размерностью аффинной оболочки X, справедливо неравенство $m < n$. Тогда можно указать $(m \times n)$-матрицу A полного ранга (равного m) и m-мерный вектор b такие, что

$$\mathrm{aff}X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\right\}.$$

Множество X содержится в $\mathrm{aff}X$, и, стало быть, оно содержится в любой гиперплоскости, определяемой каким-либо одним уравнением из системы уравнений $Ax = b$. Но при этом в этой же гиперплоскости содержится и точка a, принадлежащая $\mathrm{ri}X$. Следовательно, любая такая гиперплоскость является опорной гиперплоскостью к X в a. ■

Выясним теперь, когда два выпуклых множества обладают собственной отделимостью.

Теорема 2.4.4. (О собственной отделимости.) *Выпуклые множества X_1 и X_2 собственно отделимы в том и только в том случае, когда их относительные внутренности не пересекаются.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 = \emptyset$. Рассмотрим множество $X = \mathrm{ri}X_1 - \mathrm{ri}X_2$. Оно выпукло и $0_n \notin X$. Возможны два случая.

Случай 1. $0_n \notin \mathrm{cl}X$. При этом предположении точка 0_n сильно отделима от $\mathrm{cl}X$ и, стало быть, от X. Но тогда для некоторого ненулевого вектора $p \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle p, x\rangle > \langle p, 0_n\rangle = 0 \quad \forall\, x \in X \tag{2.4.7}$$

или

$$\langle p, x_1\rangle > \langle p, x_2\rangle \quad \forall\, x_1 \in \mathrm{ri}X_1, \quad \forall\, x_2 \in \mathrm{ri}X_2. \tag{2.4.8}$$

В частности,

$$\langle p, \bar{x}_1\rangle > \langle p, \bar{x}_2\rangle \tag{2.4.9}$$

для некоторых $\bar{x}_1 \in \mathrm{ri}X_1 \subseteq X_1$, $\bar{x}_2 \in \mathrm{ri}X_2 \subseteq X_2$.

Перейдем в неравенстве (2.4.8) от множеств $\mathrm{ri}X_1$ и $\mathrm{ri}X_2$ соответственно к множествам $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_1)$ и $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_2)$, учтем также, что $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_1) = \mathrm{cl}X_1$, $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_2) = \mathrm{cl}X_2$ для выпуклых множеств X_1 и X_2. Тогда неравенство (2.4.8) перепишется в виде

$$\langle p, x_1\rangle \geq \langle p, x_2\rangle \quad \forall\, x_1 \in \mathrm{cl}X_1, \quad \forall\, x_2 \in \mathrm{cl}X_2. \tag{2.4.10}$$

Но $X_1 \subseteq \mathrm{cl}X_1$, $X_2 \subseteq \mathrm{cl}X_2$. Поэтому наряду с (2.4.10) имеет место неравенство

$$\langle p, x_1 \rangle \geq \langle p, x_2 \rangle \quad \forall\, x_1 \in X_1, \quad \forall\, x_2 \in X_2. \tag{2.4.11}$$

На основании (2.4.11) и (2.4.9) заключаем, что выпуклые множества X_1 и X_2 собственно отделимы.

Случай 2. $0_n \in \mathrm{cl}X$. При этом предположении с учетом того, что $0_n \notin X$, получаем: $0_n \in \mathrm{cl}X \setminus X$. Но поскольку $\mathrm{ri}X \subseteq X$, для множества $\mathrm{cl}X \setminus X$ справедливо включение

$$\mathrm{cl}X \setminus X \subseteq \mathrm{cl}X \setminus \mathrm{ri}X = r\partial X.$$

Таким образом, в этом случае $0_n \in r\partial X$ и по теореме 2.4.3 в точке 0_n существует собственная опорная гиперплоскость к множеству X. Поэтому опять можно указать ненулевой вектор p, для которого выполняется неравенство (2.4.8), причем как нестрогое. Кроме того, существуют $\bar{x}_1 \in \mathrm{ri}X_1$ и $\bar{x}_2 \in \mathrm{ri}X_2$, для которых оно строгое.

Дальнейшие рассуждения полностью аналогичны первому случаю, а именно, от множеств $\mathrm{ri}X_1$ и $\mathrm{ri}X_2$ в (2.4.8) переходим соответственно к множествам $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_1) = \mathrm{cl}X_1$ и $\mathrm{cl}(\mathrm{ri}X_2) = \mathrm{cl}X_2$. В результате опять получаем неравенство (2.4.11), на основании которого, а также на основании неравенства (2.4.9), заключаем, что множества X_1 и X_2 собственно отделимы.

Необходимость. Пусть множества X_1 и X_2 собственно отделимы, т.е. для некоторого ненулевого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ и всех $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$ выполняется неравенство (2.4.11). Кроме того, существуют $\bar{x}_1 \in X_1$ и $\bar{x}_2 \in X_2$, для которых справедливо строгое неравенство (2.4.9).

Предположим, что $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 \neq \emptyset$. Возьмем точку $x \in \mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2$, а также достаточно малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим две точки:

$$x_1 = x + \varepsilon(x - \bar{x}_1) \in X_1, \quad x_2 = x + \varepsilon(x - \bar{x}_2) \in X_2.$$

Имеем для этих x_1 и x_2:

$$\langle p, x_1 \rangle = \langle p, x \rangle + \varepsilon \langle p, x \rangle - \varepsilon \langle p, \bar{x}_1 \rangle,$$

$$\langle p, x_2 \rangle = \langle p, x \rangle + \varepsilon \langle p, x \rangle - \varepsilon \langle p, \bar{x}_2 \rangle.$$

Отсюда на основании (2.4.9) заключаем, что $\langle p, x_1 \rangle < \langle p, x_2 \rangle$. Данное неравенство противоречит отделимости множеств X_1 и X_2 и тем более их собственной отделимости. Таким образом, $\mathrm{ri}X_1 \cap \mathrm{ri}X_2 = \emptyset$. ■

2.5. Сопряженные множества и конусы

Выпуклые множества, содержащие начало координат, допускают двойственное описание. Делается это, по существу, с помощью опорных гиперплоскостей. Беря различные опорные гиперплоскости с разными направляющими векторами, можно «обследовать» выпуклое множество со всех сторон и тем самым получить полное или почти полное представление о нем. Если выпуклое множество не содержит начало координат, то, идя по этому пути, можно получить информацию о выпуклой оболочке объединения этого множества с началом координат. Все выявленные таким путем сведения об исследуемом множестве, будучи собранными вместе, оказываются сосредоточенными в некотором другом множестве, которое обязательно является выпуклым.

Определение 2.5.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное непустое множество. Тогда множество*

$$X^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall\, x \in X \right\}$$

называется сопряженным (двойственным) к X.

Сопряженное множество X^* к любому множеству X всегда выпукло и замкнуто. Кроме того, $0_n \in X^*$.

Упражнение 11. *Покажите, что сопряженное множество обладает следующими свойствами:*

1) $\left(\cup_{i=1}^m X_i\right)^* = \cap_{i=1}^m X_i^*$;

2) $X^* = (clX)^* = (convX)^* = (X \cup \{0_n\})^* = (cl(conv(X \cup \{0_n\})))^*$.

Определение 2.5.2. *Множество*

$$X^{**} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall\, y \in X^* \right\}$$

называется вторым сопряженным к множеству X.

Второе сопряженное множество, как всякое сопряженное множество, выпукло, замкнуто и содержит начало координат. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.5.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Тогда*

$$X^{**} = cl(conv(X \cup \{0_n\})). \tag{2.5.1}$$

Доказательство. Обозначим множество, стоящее в правой части равенства (2.5.1), через $\tilde{X}$. Если $x \in X$, то, по определению сопряженного множества X^*, для всех $y \in X^*$ выполняется неравенство, $\langle y, x\rangle \geq -1$. Но это и означает, что $x \in X^{**}$. Таким образом, $X \subseteq X^{**}$. Отсюда следует, что $\tilde{X} \subseteq X^{**}$, поскольку $\tilde{X}$ не только содержит X, но и является наименьшим выпуклым замкнутым множеством, включающим в себя начало координат — точку 0_n. А второе сопряженное множество X^{**}, как всякое сопряженное множество, должно обладать этими свойствами.

Покажем теперь, что имеет место обратное включение $X^{**} \subseteq \tilde{X}$. Допустим противное, т.е. существует такая точка $a \in X^{**}$, что $a \notin \tilde{X}$. Так как $\tilde{X}$ замкнутое выпуклое множество, то по теореме 2.4.2 точка a сильно отделима от множества $\tilde{X}$. Поэтому найдутся ненулевой вектор $p \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\langle p, x\rangle > \beta > \langle p, a\rangle \quad \forall\, x \in \tilde{X}.$$

Отсюда, поскольку $0_n \in \tilde{X}$, величина β удовлетворяет неравенству: $\beta < 0$. Разделим вектор p на $-\beta$ и обозначим $y = (-\beta)^{-1}p$. Тогда

$$\langle y, x\rangle > -1 > \langle y, a\rangle \quad \forall\, x \in \tilde{X}. \tag{2.5.2}$$

Поскольку $X \subseteq \tilde{X}$, из левого неравенства вытекает, что $y \in X^*$. Кроме того, из-за того, что $y \in X^*$ и $a \in X^{**}$, согласно определению второго сопряженного множества, справедливо неравенство: $\langle y, a\rangle \geq -1$. Данное неравенство противоречит правому неравенству (2.5.2). Таким образом, $X^{**} \subseteq \tilde{X}$. Сопоставляя данное включение с полученным ранее противоположным включением, заключаем, что имеет место равенство (2.5.1). ■

Теорема 2.5.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество, содержащее начало координат — точку 0_n. Тогда $X^{**} = X$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.5.1, поскольку

$$X^{**} = \mathrm{cl}\,(\mathrm{conv}\,(X \cup \{0_n\})) = \mathrm{cl}\,(\mathrm{conv} X) = \mathrm{cl} X = X.$$

Здесь учтено также, что выпуклая оболочка выпуклого множества X совпадает с самим множеством X. ■

Обозначим через

$$B_p = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \|x\|_p \leq 1\right\}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

единичный шар относительно p-й гельдеровской нормы. Беря шар B_1, получаем, что $B_1^* = B_\infty$. С другой стороны, $B_\infty^* = B_1$. Указанная связь между единичными шарами сохраняется и для промежуточных $1 < p < \infty$, а именно, $B_p^* = B_{p_*}$, где p и p_* — сопряженные числа, т.е. $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$.

Определение 2.5.3. *Множества X_1 и X_2 называются взаимосопряженными, если $X_1^* = X_2$, $X_2^* = X_1$.*

Таким образом, единичные шары B_p и B_{p_*} относительно двойственных норм $\|\cdot\|_p$ и $\|\cdot\|_{p_*}$ являются взаимосопряженными множествами. Сопряженное множество к единичному шару B_2 относительно евклидовой нормы совпадает с ним самим. О таких множествах говорят как о *самосопряженных* множествах.

Уточним вид сопряженных множеств для двух важных частных случаев множества X, а именно для конусов и линейных подпространств.

Утверждение 2.5.1. *Если K — конус в $\mathbb{R}^n$, то*

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in K \right\}. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Обозначим множество, стоящее в правой части (2.5.3), через $\tilde{K}$. Из определения сопряженного множества следует, что $\tilde{K} \subseteq K^*$.

Покажем, что имеет место и обратное включение. Пусть $y \in K^*$, т.е. $\langle y, x \rangle \geq -1$ для всех $x \in K$. Так как K — конус, то $\lambda x \in K$ для любого $x \in K$ и любого $\lambda \geq 0$. Возьмем $x \in K$ и $\lambda > 0$. Тогда $\langle y, \lambda x \rangle \geq -1$ или $\langle y, x \rangle \geq -1/\lambda$. Отсюда, переходя к пределу при $\lambda \to +\infty$, получаем: $\langle y, x \rangle \geq 0$. Поскольку x — произвольная точка из K, а y — произвольная точка из K^*, то данное неравенство означает, что $K^* \subseteq \tilde{K}$. Следовательно, для сопряженного множества K^* справедливо представление (2.5.3). ■

Множество K^* вида (2.5.3) является, очевидно, замкнутым выпуклым конусом, его называют *сопряженным конусом* к конусу K (см. рис. 2.10). Часто сама формула (2.5.3) служит определением сопряженного конуса.

Упражнение 12. *Покажите, что если выпуклый конус K имеет непустую внутренность, то сопряженный конус K^* обязательно должен быть заостренным. И наоборот, сопряженный конус K^* обладает непустой внутренностью, если K — заостренный конус.*

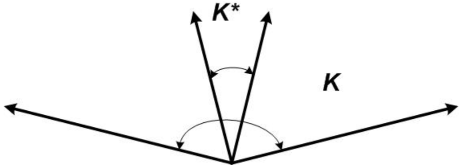

Рис. 2.10. Сопряженный конус

Беря второй сопряженный конус

$$K^{**} = (K^*)^* = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle x, y\rangle \geq 0 \ \ \forall\, y \in K^*\right\},$$

непосредственно из утверждения теоремы 2.5.1 приходим к следующему результату.

Теорема 2.5.2. *Пусть K — выпуклый замкнутый конус. Тогда $K^{**} = K$.*

Неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$ есть простейший пример выпуклого замкнутого конуса K в пространстве $\mathbb{R}^n$. Для него не только выполняется равенство $K^{**} = K$, но и, как нетрудно проверить, равенство $K^* = K$, т.е. неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$ является *самосопряженным конусом.*

Рассмотрим еще один пример выпуклого конуса в $\mathbb{R}^n$.

Пример 1. Пусть A — матрица размера $n \times m$. Рассмотрим множество

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = Az, \quad z \in \mathbb{R}^m_+\right\}.$$

Данное множество, будучи конической оболочкой столбцов матрицы A, является конусом. Его часто обозначают как pos$A$. Найдем конус, сопряженный к этому конусу. Согласно формуле (2.5.3)

$$(\text{pos}A)^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x\rangle \geq 0 \quad \forall\, x = Az, \ z \in \mathbb{R}^m_+\right\},$$

откуда следует, что если $y \in (\text{pos}A)^*$, то $\langle y, Az\rangle \geq 0$ или, что то же самое, $\langle A^T y, z\rangle \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{R}^m_+$. Но последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $A^T y \in \mathbb{R}^m_+$. Мы получаем, что

$$(\text{pos}A)^* = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \ A^T y \geq 0_m\right\}. \tag{2.5.4}$$

Перейдем теперь к выяснению вида сопряженного множества для линейных подпространств.

Утверждение 2.5.2. *Пусть L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$L^* = \big\{ y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, x \rangle = 0 \quad \forall\, x \in L \big\} = L^{\perp},$$

где $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение к L.

Доказательство. Линейное подпространство является конусом, поэтому для его сопряженного множества справедливо представление (2.5.3). Но линейное подпространство L таково, что наряду с точкой $x \in L$ оно всегда содержит противоположную точку $-x$. Поэтому неравенство в (2.5.3) может выполняться только как равенство. ∎

Рассмотрим вопрос о том, что получается с сопряженными множествами при сложении исходных множеств или при их пересечении.

Утверждение 2.5.3. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное множество, а K — конус в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$(X + K)^* = X^* \cap K^*. \tag{2.5.5}$$

Доказательство. Возьмем произвольное $y \in (X + K)^*$. Тогда, по определению сопряженного множества,

$$\langle y, x_1 \rangle + \langle y, x_2 \rangle \geq -1 \quad \forall\, x_1 \in X, \quad \forall\, x_2 \in K. \tag{2.5.6}$$

Поскольку K — конус, то $0_n \in K$. Полагая в (2.5.6) $x_2 = 0_n$, приходим к неравенству

$$\langle y, x_1 \rangle \geq -1 \quad \forall\, x_1 \in X,$$

откуда следует, что $y \in X^*$.

Кроме того, опять с учетом того, что K — конус, имеем

$$\langle y, x_1 \rangle + \langle y, \lambda x_2 \rangle \geq -1 \quad \forall\, x_1 \in X, \quad \forall\, x_2 \in K, \quad \forall\, \lambda \geq 0. \tag{2.5.7}$$

Зафиксируем в этом неравенстве $x_1 \in X$ и устремим $\lambda \to +\infty$. Тогда (2.5.7) переходит в неравенство: $\langle y, x_2 \rangle \geq 0$ для всех $x_2 \in K$, т.е. $y \in K^*$. Таким образом, $y \in X^* \cap K^*$.

Предположим теперь с обратной стороны, что $y \in X^* \cap K^*$, т.е.

$$\langle y, x_1 \rangle \geq -1 \quad \forall\, x_1 \in X, \quad \langle y, x_2 \rangle \geq 0 \quad \forall\, x_2 \in K.$$

Сложение этих двух неравенств приводит к неравенству (2.5.6), означающему, что $y \in (X + K)^*$. ∎

Следствие 2.5.1. *Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — конусы в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \bigcap_{i=1}^{m} K_i^*.$$

Если теперь рассмотреть вместо операции сложения операцию пересечения множеств, то здесь дело обстоит несколько сложнее. Во всяком случае, аналог формулы (2.5.5) получается только при дополнительных предположениях.

Утверждение 2.5.4. *Пусть K_1 и K_2 — замкнутые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$(K_1 \cap K_2)^* = cl\,(K_1^* + K_2^*)\,. \tag{2.5.8}$$

Доказательство. На основании утверждения 2.5.3, а также теоремы 2.5.2 и следствия 2.5.1 имеем

$$\begin{aligned} (K_1 \cap K_2)^* \quad &= \quad (K_1^{**} \cap K_2^{**})^* = \left((K_1^* + K_2^*)^*\right)^* = \\ &= \quad (K_1^* + K_2^*)^{**} = \mathrm{cl}\,(K_1^* + K_2^*)\,. \end{aligned}$$

Мы пришли к (2.5.8). ■

Результат утверждения 2.5.4 остается справедливым и при большем числе конусов, а не только для двух конусов. Отметим также, что при некоторых дополнительных предположениях можно убрать операцию замыкания в правой части формулы (2.5.8). Приведем без доказательства один такой результат, причем в общем случае, когда есть нескольких конусов.

Утверждение 2.5.5. *Пусть $K_1, \ldots, K_m$ — выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, их пересечение имеет внутреннюю точку. Тогда*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \sum_{i=1}^{m} K_i^*.$$

Пример 2. Предположим, что имеется матрица A размером $m \times n$ со строками $a_1, \ldots, a_m$. Рассмотрим множество

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \geq 0_m\right\}.$$

Множество K, как пересечение конечного числа замкнутых полупространств

$$K_i = \left\{x \in \mathbb{R}^n :\ \langle a_i, x\rangle \geq 0\right\}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

является, разумеется, конусом, причем выпуклым и замкнутым. Имеем

$$K_i^* = \{y = \lambda_i a_i : \lambda \geq 0\},$$

т.е. K_i^* является лучом, выпущенным из начала координат в направлении вектора a_i. Это также выпуклый замкнутый конус. Для суммы конусов K_i^* получаем

$$\sum_{i=1}^{m} K_i^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n :\ y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,\ \lambda \geq 0_m\right\}. \qquad (2.5.9)$$

Данное множество есть коническая оболочка векторов $a_1, \ldots, a_m$ и также является замкнутым конусом. Поэтому согласно утверждению 2.5.4 и равенству (2.5.9)

$$K^* = \left(\bigcap_{i=1}^{m} K_i\right)^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n :\ y = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m,\ \lambda \geq 0_m\right\}. \qquad (2.5.10)$$

В матричном виде формула (2.5.10) записывается как $K^* = \mathrm{pos}A^T$.

Понятно, что к полученному выражению для сопряженного конуса K^* можно было бы прийти более простым путем, поскольку конус, сопряженный к конусу $\mathrm{pos}A^T$, как показано в примере 1, имеет вид (2.5.4). Поэтому $K^* = (\mathrm{pos}A^T)^{**} = \mathrm{pos}A^T$.

Сопряженные конусы иногда называют *двойственными.* Если обратиться к конусу, порожденному p-й гельдеровской нормой $\|\cdot\|_p$, т.е. к конусу вида

$$K_p = \left\{[x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \|x\|_p \leq \mu\right\}, \quad 1 < p < \infty,$$

то для него сопряженным является конус K_{p_*}, где $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$. Таким образом, он также является конусом, порожденным нормой, причем в данном случае двойственной нормой $\|\cdot\|_{p_*}$.

Упражнение 13. *Покажите, что $K_p^* = K_{p_*}$ для всех $1 \leq p \leq$ $\leq +\infty$. При этом считается, что $p_* = +\infty$, когда $p = 1$, и, наоборот, $p_* = 1$, когда $p = +\infty$.*

2.6. Многогранные множества и системы линейных неравенств

Многогранные и полиэдральные множества. Среди общих выпуклых множеств выделяется отдельный класс множеств, имеющих достаточно специальную структуру, а именно, эти множества могут быть представлены в виде множества решений систем линейных неравенств. Данные множества находят широкое применение в оптимизации, в частности, при задании допустимых множеств в задачах линейного и квадратичного программирования. Дадим ряд определений.

Определение 2.6.1. *Пусть $a_1, \ldots, a_l$ и $b_1, \ldots, b_k$ — некоторые точки в $\mathbb{R}^n$. Тогда*

1) *множество $X = conv\{a_1, \ldots, a_l\}$ называется выпуклым многогранником;*

2) *множество $K = cone\{b_1, \ldots, b_k\}$ называется многогранным конусом;*

3) *множество*
$$X = X_1 + K, \tag{2.6.1}$$
где X_1 — выпуклый многогранник, а K — многогранный конус, называется многогранным множеством.

Используя теорему 2.1.5, получаем, что выпуклый многогранник X и многогранный конус K из определения 2.6.1 представимы соответственно в виде

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0, \; 1 \leq i \leq l, \quad \sum_{i=1}^{l} \lambda_i = 1 \right\}, \tag{2.6.2}$$

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i b_i, \quad \lambda_i \geq 0, \; 1 \leq i \leq k \right\}. \tag{2.6.3}$$

Многогранный конус всегда является выпуклым множеством. Множество, представленное на рис. 2.11, является многогранным.

Если $l = n + 1$ и векторы $a_1 - a_{n+1}, \ldots, a_n - a_{n+1}$ линейно независимы, то выпуклый многогранник X называется *симплексом*. Размерность (аффинная) симплекса равна числу n. Одномерный симплекс есть линейный сегмент, а двумерный симплекс — это треугольник. Под

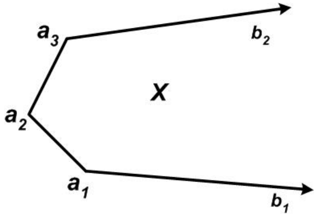

Рис. 2.11. Многогранное множество

единичным симплексом в $\mathbb{R}^n$ обычно понимают n-мерный симплекс, порожденный началом координат и единичными ортами. Таким образом, единичный n-мерный симплекс имеет вид

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} x^i \leq 1 \right\}. \tag{2.6.4}$$

Симплекс же вида

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^{n} x^i = 1 \right\}$$

в отличие от (2.6.4) иногда называют *вероятностным*. Он имеет размерность $n-1$ и порожден только единичными ортами в $\mathbb{R}^n$.

Примером многогранного конуса является конус $\mathrm{pos}A$, где A — матрица размера $n \times k$. В этом случае в качестве точек $b_1, \ldots, b_k$ берутся столбцы матрицы A. Если A — неособая квадратная матрица порядка n, т.е. ее столбцы в количестве n штук линейно независимы, то такой конус называется *симплициальным*.

Выпуклая оболочка произвольного замкнутого множества может оказаться незамкнутой. Например, если $X = X_1 \cup e_2$, где X_1 есть ось абсцисс в $\mathbb{R}^2$, а $e_2 = [0,1]^T$ — второй единичный орт в $\mathbb{R}^2$, то $\mathrm{conv}X$ не является замкнутым множеством. Однако имеют место следующие полезные результаты, которые несложно доказать с применением следствия к лемме 2.1.1 или теоремы Каратеодори 2.1.6.

Лемма 2.6.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное множество. Тогда $\mathrm{conv}X$ — также компактное множество.*

Доказательство. Обозначим через $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^{n+1}_+ : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$

n-мерный вероятностный симплекс и рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ точки вида

$$y = f(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i,$$

где $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}] \in \Lambda$, $x_i \in X$, $1 \le i \le n+1$.

Отображение $f(\lambda, x_1, \dots, x_{n+1})$ является непрерывным. Поэтому f отображает компактное множество $\mathcal{X} = \Lambda \times X \times X \times \ldots \times X$, в котором множество X берется $n+1$ раз, в компактное множество. Но по теореме Каратеодори 2.1.6 образ множества $\mathcal{X}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества X. Поэтому $\mathrm{conv} X$ — компактное множество. ■

Следствие 2.6.1. *Выпуклый многогранник есть компактное множество.*

Доказательство. Данный результат вытекает из утверждения леммы 2.6.1 и из того факта, что объединение конечного числа точек всегда есть компактное множество. ■

Лемма 2.6.2. *Многогранный конус является замкнутым множеством.*

Доказательство. При доказательстве леммы считаем, не умаляя общности, что среди всех векторов b_1, ..., b_k, определяющих многогранный конус (2.6.3), имеются ненулевые, ибо иначе конус K состоит только из начала координат и, следовательно, есть компактное множество.

Предположим сначала, что векторы $b_1, \dots, b_k$ в представлении (2.6.3) линейно независимы. Пусть B — $(n \times k)$-матрица, столбцами которой являются векторы $b_1, \dots, b_k$. Данная матрица имеет полный ранг, равный k. Рассмотрим линейное отображение $y = f(\lambda) = B\lambda$, где $\lambda \in \mathbb{R}^k$. Обратное к нему отображение $\lambda = f^{-1}(y) = \left(B^T B\right)^{-1} B^T y$ также линейное. Оба отображения $f(\lambda)$ и $f^{-1}(y)$ как линейные отображения непрерывны, поэтому отображение $f(\lambda)$ есть гомеоморфизм, оно отображает замкнутое множество в замкнутое множество. Но конус K согласно (2.6.3) имеет вид $K = f(\mathbb{R}^k_+)$, и, поскольку ортант $\mathbb{R}^k_+$ — замкнутое множество, отсюда заключаем, что K также является замкнутым множеством.

Если векторы $b_1, \dots, b_k$ линейно зависимы, то на основании леммы 2.1.1 любая точка из K может быть представлена в виде конической комбинации подсистемы линейно независимых векторов из $b_1, \dots, b_k$. Поэтому в силу вышесказанного эта точка принадлежит замкнутому конусу. Поскольку число таких линейно независимых подсистем конечно, то отсюда заключаем, что конус K есть объединение конечного числа замкнутых конусов и, следовательно, является замкнутым множеством. ■

Нами установлена замкнутость выпуклого многогранника и многогранного конуса. Но оказывается, что и любое многогранное множество также замкнуто. Это вытекает из следующего результата, который имеет место для любых множеств X_1 и X_2.

Лемма 2.6.3. *Пусть X_1 и X_2 — замкнутые множества, множество X_1 ограничено. Тогда множество $X_1 + X_2$ замкнуто.*

Доказательство. Возьмем сходящуюся подпоследовательность точек $\{x_k\}$ из X, которая сходится к точке x. Надо показать, что $x \in X$. Так как каждая точка $x_k \in X$, то $x_k = y_k + z_k$, где $y_k \in X_1$, $z_k \in X_2$. Но последовательность $\{z_k\}$ принадлежит компактному множеству X_2, поэтому имеет предельные точки. Пусть $\{z_{k_j}\}$ — сходящаяся подпоследовательность из $\{z_k\}$ и пусть $z_{k_j} \to z$. Из замкнутости множества X_2 следует, что $z \in X_2$. Кроме того, поскольку $\{x_k\}$ сходится к x, то $x_{k_j} \to x$. Поэтому подпоследовательность $\{y_{k_j}\}$ также является сходящейся, причем в силу замкнутости множества X_1 предельная точка y подпоследовательности $\{y_{k_j}\}$ также принадлежит X_1. Имеем $x = y + z$, где $y \in X_1$, $z \in X_2$, следовательно, $x \in X$. ■

Используя данную лемму, приходим к следующему результату.

Теорема 2.6.1. *Любое многогранное множество вида (2.6.1) замкнуто.*

Введем теперь в рассмотрение выпуклые множества, определение которых основано на использовании точек, удовлетворяющих системам линейных неравенств.

Определение 2.6.2. *Пусть A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Тогда множество $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; Ax \leq b\right\}$ называется полиэдральным, или полиэдром. Если X — ограниченное множество, то это ограниченный полиэдр. Если $b = 0_m$, то X называют однородным полиэдром.*

На самом деле многогранные множества и полиэдральные множества — это два разных представления одних и тех же множеств. С аналогичной ситуацией мы сталкивались при рассмотрении аффинных множеств. Их также можно описывать двумя способами.

Теорема 2.6.2. *Имеют место следующие утверждения:*

1) однородный полиэдр — это многогранный конус;

2) ограниченный полиэдр — это выпуклый многогранник;

3) полиэдр — это многогранное множество

и наоборот.

Как было получено в примере 2.5.4, множество, сопряженное к многогранному конусу, является полиэдральным, точнее, однородным полиэдром. Этот результат может быть распространен и на многогранные множества более общего вида.

Теорема 2.6.3. *Пусть* $X = X_1 + K$*, где*

$$X_1 = conv\{a_1, \ldots, a_l\}, \quad K = cone\{b_1, \ldots, b_k\}.$$

Тогда

$$X^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, a_i \rangle \geq -1, \ i = 1, \ldots, l; \ \langle y, b_j \rangle \geq 0, \ j = 1, \ldots, k \right\}, \tag{2.6.5}$$

т.е. X^* *есть полиэдр.*

Доказательство. Так как $X = X_1 + K$ и K есть выпуклый конус, то согласно утверждению 2.5.3 $X^* = (X_1 + K)^* = X_1^* \cap K^*$. Имеем

$$\begin{aligned} X_1^* = (\mathrm{conv}\{a_1, \ldots, a_l\})^* = (\{a_1, \ldots, a_l\})^* = \\ = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, a_i \rangle \geq -1, \ 1 \leq i \leq l \right\}. \end{aligned} \tag{2.6.6}$$

Пусть B — матрица размера $n \times k$, столбцами которой являются векторы b_1, ..., b_k. Тогда $K = \mathrm{pos}\ B$, и на основании вышесказанного получаем

$$K^* = (\mathrm{pos} B)^* = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ \langle y, b_j \rangle \geq 0, \ 1 \leq j \leq k \right\}. \tag{2.6.7}$$

Из (2.6.6) и (2.6.7) приходим к (2.6.5). ■

Системы линейных неравенств. Полиэдральное множество было введено как множество решений системы *линейных неравенств*:

$$Ax \leq b, \tag{2.6.8}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Пусть a_1, ..., a_m — строки матрицы A. Предполагаем, что среди них нет нулевых. Из (2.6.8) следует, что полиэдральное множество является пересечением конечного числа полупространств, задаваемых гиперплоскостями с направляющими векторами

a_i, $1 \le i \le m$. Система (2.6.8) считается *совместной* или *разрешимой*, если она обладает хотя бы одним решением. В противном случае будем говорить, что она *несовместная* или *неразрешимая*. В силу сделанного предположения об отсутствии среди строк матрицы A нулевых строк, множество решений совместной системы (2.6.8) не может совпадать со всем пространством $\mathbb{R}^n$.

Рангом r системы (2.6.8) называется максимальное число линейно независимых строк матрицы A. Понятно, что ранг системы (2.6.8) не превышает число переменных n. В случае $r = n$ имеем систему линейных неравенств *полного ранга*, в противном случае $r < n$ — систему линейных неравенств *неполного ранга*. Заметим, что всегда можно перейти от системы неполного ранга к системе с полным рангом. Действительно, если $r < n$, то размерность $d = n - r$ нуль-пространства $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = 0_m\}$ матрицы A положительна, и тогда любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_2 \in \mathcal{N}(A)$, а x_1 принадлежит пространству столбцов матрицы A^T, являющимся ортогональным дополнением к $\mathcal{N}(A)$. Размерность этого пространства столбцов равна r, и если $e_1, \dots, e_r$ — некоторый базис в нем, то $x_1 = \sum_{j=1}^r \tilde{x}^j e_j$. Полагая теперь $\tilde{a}_{ij} = \langle a_i, e_j \rangle$ и составляя из элементов $\tilde{a}_{ij}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le r$, матрицу $\tilde{A}$ размером $m \times r$, приходим к системе неравенств $\tilde{A}\tilde{x} \le b$, где $\tilde{x} \in \mathbb{R}^r$. Данная система уже является системой полного ранга, зная ее решения, легко получить решения системы (2.6.8).

Вызывает интерес геометрический вид полиэдрального множества, особенно строение его границ. В связи с этим вводят понятие *k-грани*, включающее в себя, в частности, такие понятия, как вершина, ребро и т.д. Пусть множество индексов $J^m = [1 : m]$ разбито на два непересекающиеся подмножества J_1 и J_2. Пусть, кроме того, A_1 — подматрица матрицы A, составленная из строк с номерами из J_1, а A_2 — подматрица матрицы A, составленная из строк с номерами из J_2. В соответствии с разбиением матрицы A разобьем также вектор правых частей b на два подвектора b_1 и b_2. Тогда систему равенств и неравенств

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x \le b_2 \tag{2.6.9}$$

принято называть *k-граничной*, если множество J_1 состоит из k индексов и все строки в матрице A_1 (их число также равно k) линейно независимы. Обозначим через $X(J_1)$ множество решений системы (2.6.9). Если $X(J_1)$ не пусто, то оно называется k-гранью полиэдрального или, что, по сути, одно и то же, многогранного множества решений X системы (2.6.8). Важный результат состоит в том, что если система (2.6.8) совместна и имеет ранг $r > 0$, то для любого $0 < k \le r$ существует k-грань. Убедимся в этом.

Определение 2.6.3. *Неравенство $c^T x \le d$, где $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}$, называется следствием системы неравенств $Ax \le b$ (или системы уравнений $Ax = b$), если любое решение системы удовлетворяет также и ему.*

Лемма 2.6.4. *Пусть $a_i \in \mathbb{R}^n$, $0 \le i \le m$, и пусть A — матрица размера $m \times n$, строками которой являются векторы a_i, $1 \le i \le m$. Предположим, что для некоторых $b_0 \in \mathbb{R}$ и $b = [b_1, \dots, b_m]^T$ система*

$$Ax = b, \qquad a_0^T x \le b_0 \tag{2.6.10}$$

совместна. Тогда для того чтобы неравенство $a_0^T x \le b_0$ являлось следствием системы

$$Ax = b, \tag{2.6.11}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$a_0 = A^T y \tag{2.6.12}$$

для некоторого $y \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. *Достаточность.* Покажем, что если выполнено (2.6.12), то любое решение системы (2.6.11) удовлетворяет неравенству $a_0^T x \le b_0$. Возьмем некоторое решение x_1 системы (2.6.10), оно одновременно является и решением системы уравнений (2.6.11). Поэтому произвольное решение $\bar{x}$ системы (2.6.11) может быть представлено как $\bar{x} = x_1 + x_2$, где x_2 — произвольное решение однородной системы $Ax = 0_m$. Подставим это решение $\bar{x}$ в неравенство $a_0^T x \le b_0$. Прежде всего, с учетом (2.6.12) имеем

$$\langle a_0, \bar{x} \rangle = \langle A^T y, x_1 + x_2 \rangle = \langle y, Ax_1 \rangle = \langle A^T y, x_1 \rangle = \langle a_0, x_1 \rangle.$$

Но x_1 есть решение системы (2.6.10), поэтому $a_0^T \bar{x} = a_0^T x_1 \le b_0$. Отсюда приходим к выводу, что произвольное решение $\bar{x}$ системы (2.6.11) удовлетворяет одновременно и неравенству $a_0^T x \le b_0$.

Необходимость. Предполагаем, не умаляя общности, что векторы $a_1, \dots, a_m$ линейно независимы. Если допустить, что равенство (2.6.12) не выполняется, т.е. вектор a_0 не является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_m$, то система линейных уравнений

$$Ax = b, \quad \langle a_0, x \rangle = d$$

имеет решение $\bar{x}$ для любых b и d. Поэтому, беря $d > b_0$, получаем, что это решение $\bar{x}$ удовлетворяет системе (2.6.11), но не удовлетворяет неравенству $a_0^T x \leq b_0$. Таким образом, данное неравенство не является следствием системы (2.6.11), что противоречит условиям леммы. ■

Теорема 2.6.4. *Пусть система (2.6.8) совместна и ее ранг равен $r > 0$. Тогда для любого $0 < k \leq r$ существует k-грань.*

Доказательство проведем индукцией по k. Возьмем сначала $k = 1$. Предположим, что точка x_1 удовлетворяет системе (2.6.8), а x_2 — не удовлетворяет. Пусть

$$\tilde{J}(x_2) = \{j \in J^m : \ \langle a_j, x_2 \rangle > b_j\}$$

и пусть для $j \in \tilde{J}(x_2)$:

$$\lambda_j(x_1, x_2) = \min\left\{\lambda \in [0,1] : \ \langle a_j, x_\lambda \rangle \leq b_j, \ x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right\}.$$

Обозначим

$$\lambda_*(x_1, x_2) = \min_{j \in \tilde{J}(x_2)} \lambda_j(x_1, x_2),$$

$$\tilde{J}_*(x_2) = \left\{j \in \tilde{J}(x_2) : \ \lambda_j(x_1, x_2) = \lambda_*(x_1, x_2)\right\}.$$

Множество $\tilde{J}_*(x_2)$ не пусто. Выберем произвольный индекс $j_1 \in \tilde{J}_*(x_2)$ и положим: $J_1 = \{j_1\}$, $J_2 = J \setminus J_1$. Тогда если рассмотреть систему

$$\begin{aligned} \langle a_j, x \rangle &= b_j, \quad j \in J_1, \\ \langle a_j, x \rangle &\leq b_j, \quad j \in J_2, \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

то точка $x_* = \lambda_* x_1 + (1-\lambda_*)x_2$, где $\lambda_* = \lambda_*(x_1, x_2)$, удовлетворяет этой системе, т.е. эта система является 1-граничной для системы (2.6.8), а множество ее решений есть 1-грань.

Предположим теперь, что утверждение теоремы верно для $k < r$, и покажем, что найдется $(k+1)$-грань. С этой целью возьмем произвольную k-грань, существование которой следует из предположения индукции. Она совпадает с множеством решений некоторой k-граничной системы вида (2.6.13), в которой множество индексов J_1 содержит k индексов из J^m, причем векторы a_j, $j \in J_1$, линейно независимы. Пусть x_1 принадлежит этой k-грани, а x_2 — решение системы уравнений

$$\langle a_j, x \rangle = b_j, \quad j \in J_1, \tag{2.6.14}$$

не являющейся решением всей системы (2.6.13). Такая точка x_2 обязательно найдется, так как иначе каждое из неравенств $\langle a_j, x \rangle \leq b_j$, где $j \in J_2$, было бы следствием системы (2.6.14). Но тогда по лемме 2.6.4 каждый вектор a_j, $j \in J_2$, был бы представим в виде линейной комбинации векторов a_j, $j \in J_1$ и, следовательно, ранг, системы $Ax \le b$ равнялся бы k, что противоречит предположению $k < r$.

Далее поступаем аналогично первому случаю, когда $k = 1$, но только множество индексов $\tilde{J}(x_2)$ формируем теперь не из J^m, а из подмножества индексов J_2. Беря теперь индекс $j_1 \in \tilde{J}_*(x_2)$ и добавляя его в множество J_1, получаем, что новая система векторов a_j, $j \in J_1$, остается линейно независимой и соответствующая точка x_* удовлетворяет системе (2.6.13), в которой множество J_1 содержит уже $k+1$ индекс. Таким образом, эта система определяет $(k+1)$-грань. $\blacksquare$

Если система (2.6.8) имеет ранг $r > 0$, то ее r-грани называются *минимальными*. В случае ранга $r \ge n-1$, если $(n-1)$-грань не является точкой, то она называется *ребром*. Геометрически ребро может быть отрезком, лучом или прямой. Для системы полного ранга, когда $r = n$, вводится понятие *вершины*. Вершина — это n-грань. Любая вершина является *крайней точкой* многогранника решений системы (2.6.11), т.е. не существует такого принадлежащего этому многограннику отрезка положительной длины, что данная точка есть середина этого отрезка.

Альтернативные линейные системы. Наряду с системами линейных неравенств большой интерес представляют *общие системы линейных равенств и неравенств*:

$$A_1 x = b_1, \quad A_2 x \le b_2, \tag{2.6.15}$$

в которых $A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$. Системы (2.6.8) или (2.6.15) называются *неоднородными*, если правые части в них ненулевые. В противном случае они называются *однородными*. Встает вопрос, когда системы вида (2.6.8) или (2.6.15), а также их всевозможные частные случаи имеют решение и каковы должны быть условия, которые гарантировали бы существование решений таких совместных систем.

Один из возможных подходов к получению таких условий состоит в использовании так называемых *теорем об альтернативах*. Поясним его основную идею на примере простейшей линейной неоднородной системы уравнений $Ax = b$, где A — $(m \times n)$-матрица, $b \ne 0_m$. Понятно, что данная система уравнений имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b принадлежит пространству столбцов матрицы A. Обозначим это пространство через L. Если $b \in L$, то проекция вектора b

на ортогональное дополнение $L^{\perp}$ пространства L должна равняться нулю. Но ортогональное дополнение $L^{\perp}$ имеет вид

$$L^{\perp} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ A^T y = 0_n \right\}.$$

Поэтому система уравнений будет иметь решение тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathbb{R}^m$ такого, что $A^T y = 0_n$, выполняется $b^T y = 0$.

Приведенный результат можно представить в несколько иной форме, а именно в виде теоремы об альтернативах.

Теорема 2.6.5. (Фредгольма.) *Пусть A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0_m$. Тогда если неоднородная система*

$$Ax = b \tag{2.6.16}$$

совместна, то система

$$A^T y = 0_n, \quad b^T y > 0 \tag{2.6.17}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.16) не совместна, то система (2.6.17) совместна.

Доказательство. Действительно, если система (2.6.16) имеет решение, то, как уже говорилось выше, вектор $b \in L$, и, следовательно, $b^T y = 0$ для всех $y \in L^{\perp}$. Поэтому неравенство $b^T y > 0$ не выполняется ни для одного y из $L^{\perp}$.

С другой стороны, если система (2.6.16) не имеет решения, то это возможно только в том случае, когда L не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$ и $b \notin L$. Но тогда система (2.6.17) обязательно имеет решение. ■

Разумеется, неравенство $b^T y > 0$ в (2.6.17) может быть заменено на противоположное неравенство: $b^T y < 0$. Знак здесь не играет роли, важно только, чтобы $b^T y \neq 0$. Обратим также внимание на то, что пространство столбцов L матрицы A, как всякое линейное подпространство, есть выпуклый конус, а его ортогональное дополнение $L^{\perp}$ согласно утверждению 2.5.2 — сопряженный к L конус.

Аналогичные результаты могут быть получены для систем линейных неравенств, а также для совместных систем равенств и неравенств. Приведем их для некоторых частных случаев. Сначала предполагаем, что системы неоднородны.

а) Рассмотрим задачу нахождения решения той же системы линейных уравнений (2.6.16), предполагая дополнительно, что $x \geq 0_n$. По-прежнему считаем, что система (2.6.16) неоднородна. Нетрудно видеть, что, беря $x \geq 0_n$, мы будем получать в левой части (2.6.16) точки

Ax, принадлежащие конусу pos$A$. Поэтому данная система $Ax = b$, $x \geq 0_n$ может иметь решение тогда и только тогда, когда вектор $b \in \text{pos}A$. Возьмем конус, сопряженный к конусу pos$A$. Согласно (2.5.4) он имеет вид

$$(\text{pos}A)^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ A^T y \geq 0_n \right\}. \tag{2.6.18}$$

Но если $b \in \text{pos}A$, то, по определению сопряженного конуса, $b^T y \geq 0$ для всех $y \in (\text{pos}A)^*$. Если же вектор b не принадлежит pos$A$, то обязательно найдется такой вектор y из $(\text{pos}A)^*$, для которого $b^T y < 0$. Отсюда напрашивается вывод, что система (2.6.16) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда для любого $y \in \mathbb{R}^n$ такого, что $A^T y \geq 0_n$, выполняется $b^T y \geq 0$.

Придадим этому результату иную формулировку в виде теоремы об альтернативах.

Теорема 2.6.6. (Фаркаша–Минковского.) *Пусть A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0_m$. Тогда если неоднородная система*

$$Ax = b, \quad x \geq 0_n \tag{2.6.19}$$

совместна, то система

$$A^T y \geq 0_n, \quad b^T y < 0 \tag{2.6.20}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.19) *не совместна, то система* (2.6.20) *совместна.*

Доказательство. То, что система (2.6.20) не совместна, когда совместна система (2.6.19), следует из вышеприведенных рассуждений. Остается только показать, что у системы (2.6.20) обязательно существует решение, когда система (2.6.19) не совместна. Действительно, в этом случае вектор b не принадлежит конусу pos$A$. Поэтому по теореме 2.4.2 вектор b сильно отделим от pos$A$ и, следовательно, найдется ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\langle Ax, y \rangle > \langle b, y \rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{2.6.21}$$

Поскольку $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^T y \rangle$ и все координаты вектора x могут принимать сколь угодно большие положительные значения, данное неравенство имеет место лишь тогда, когда $A^T y \geq 0_n$. Кроме того, полагая $x = 0_n$, из (2.6.21) получаем, что $\langle b, y \rangle < 0$. Таким образом, вектор y удовлетворяет системе (2.6.20). ■

Теорему Фаркаша–Минковского 2.6.6 довольно часто называют леммой или *теоремой Фаркаша*. Она играет очень важную роль при доказательстве условий оптимальности для различных оптимизационных задач и допускает другие формулировки.

б) Рассмотрим далее неоднородную систему из двух неравенств $Ax \le b$ и $x \ge 0_n$. Из ее вида следует, что она имеет решение тогда и только тогда, когда вектор b принадлежит конусу $K = \mathrm{pos}A + \mathbb{R}^m_+$. Обратимся к сопряженному конусу K^*. Согласно утверждению 2.5.3 $K^* = (\mathrm{pos}A)^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^*$. Но $(\mathbb{R}^m_+)^* = \mathbb{R}^m_+$, а конус $(\mathrm{pos}A)^*$, как мы уже знаем, имеет вид (2.6.18). Поэтому

$$K^* = \left\{ y \in \mathbb{R}^m_+ : \ A^T y \ge 0_m \right\}.$$

Включение $b \in K$ будет выполняться тогда и только тогда, когда $\langle b, y \rangle \ge 0$ для всех $y \in K^*$. Отсюда приходим к условию разрешимости системы $Ax \le b$, $x \ge 0_n$, а именно, она разрешима в том и только в том случае, когда $\langle b, y \rangle \ge 0$ для любого $y \ge 0_m$, удовлетворяющего неравенству $A^T y \ge 0_m$. Сформулируем теперь данный результат в виде теоремы об альтернативах.

Теорема 2.6.7. *Пусть A — матрица размера $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$, $b \ne 0_m$. Тогда если неоднородная система*

$$Ax \le b, \quad x \ge 0_n \tag{2.6.22}$$

совместна, то система

$$A^T y \ge 0_m, \quad y \ge 0_m, \quad b^T y < 0 \tag{2.6.23}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.22) *не совместна, то система* (2.6.23) *совместна.*

в) Опустим теперь в предыдущей системе $Ax \le b$, $x \ge 0_n$ требование $x \ge 0_n$, т.е. рассмотрим систему неравенств $Ax \le b$. Пусть L — линейное подпространство, порожденное столбцами матрицы A. Несложно понять, что данная система неравенств будет иметь решение тогда и только тогда, когда вектор b принадлежит конусу $K = L + \mathbb{R}^m_+$. Но вектор b в свою очередь будет принадлежать K тогда и только тогда, когда $\langle b, y \rangle \ge 0$ для всех $y \in K^*$. Сопряженный к K конус опять же на основании утверждения 2.5.3 равен $K^* = L^* \cap (\mathbb{R}^m_+)^*$. Но L^* согласно утверждению 2.5.2 совпадает с $L^\perp$, а конус $\mathbb{R}^m_+$, как уже отмечалось, является самосопряженным, т.е. $(\mathbb{R}^m_+)^* = \mathbb{R}^m_+$. Имеем $L^\perp = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ A^T y = 0_n \right\}$. Отсюда следует, что система неравенств $Ax \le b$ разрешима в том и только в том случае, когда $\langle b, y \rangle \ge 0$ для любого $y \ge 0_m$, удовлетворяющего условию $A^T y = 0_n$. Снова переформулируем этот результат в виде соответствующей теоремы об альтернативах.

Теорема 2.6.8. (Гейла.) *Пусть A — матрица размером $m \times n$ и $b \in \mathbb{R}^m$, $b \neq 0_m$. Тогда если неоднородная система*

$$Ax \le b \tag{2.6.24}$$

совместна, то система

$$A^T y = 0_m, \quad y \ge 0_m, \quad b^T y < 0 \tag{2.6.25}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.24) *не совместна, то система* (2.6.25) *совместна.*

Упражнение 14. *Докажите теоремы 2.6.7 и 2.6.8.*

г) Рассмотрим линейную неоднородную систему, состоящую как из равенств, так и из общих неравенств

$$A_1 x \le b_1, \quad A_2 x = b_2, \tag{2.6.26}$$

где A_1 и A_2 — соответственно $(m_1 \times n)$ и $(m_2 \times n)$-матрицы, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$. Объединим матрицы A_1 и A_2 в единую матрицу A и векторы b_1 и b_2 в единый вектор b:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть $m = m_1 + m_2$. Пусть, кроме того, L обозначает пространство столбцов матрицы A, а E — множество:

$$E = \left\{ y = [y_1, y_2] \in \mathbb{R}^m : \ y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+, \ y_2 = 0_{m_2} \right\},$$

являющееся конусом в $\mathbb{R}^m$. Система (2.6.26) совместна в том и только в том случае, когда $b \in L + E$, причем для выполнения данного включения необходимо и достаточно, чтобы $\langle b, y \rangle \ge 0$ для всех $y \in (L+E)^*$. Но $(L+E)^* = L^\perp \cap E^*$. Более того,

$$E^* = \left\{ y = [y_1, y_2] \in \mathbb{R}^m : \ y_1 \in \mathbb{R}^{m_1}_+, \ y_2 \in \mathbb{R}^{m_2} \right\}.$$

Таким образом, $y = [y_1, y_2] \in (L+E)^*$ в том и только в том случае, когда $A_1^T y_1 + A_2 y_2 = 0_n$, где $y_1 \ge 0_{m_1}$. Приведем соответствующую теорему об альтернативах.

Теорема 2.6.9. *Пусть A_1 и A_2 — матрицы соответственно размером $m_1 \times n$ и $m_2 \times n$. Пусть, кроме того, $b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$,* *причем* $[b_1, b_2] \neq 0_m$. *Тогда если неоднородная система* (2.6.26) *совместна, то система*

$$A_1^T y_1 + A_2 y_2 = 0_n, \quad y_1 \geq 0_{m_1}, \quad \langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, y_2\rangle < 0 \tag{2.6.27}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.26) *не совместна, то система* (2.6.27) *совместна.*

Доказательство. Докажем только второе утверждение. Пусть система (2.6.26) не имеет решения. Тогда вектор b не принадлежит выпуклому конусу $L + E$, поэтому по теореме 2.4.2 данный вектор b сильно отделим от $L + E$, т. е. можно указать ненулевой вектор $y = [y_1, y_2]$ такой, что

$$\langle A_1 x + z, y_1\rangle + \langle A_2 x, y_2\rangle > \langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, y_2\rangle \tag{2.6.28}$$

для любого $x \in \mathbb{R}^n$ и $z \in \mathbb{R}_+^{m_1}$. Отсюда, поскольку компоненты вектора z могут принимать сколь угодно большие значения, следует, что обязательно $y_1 \geq 0_{m_1}$. Кроме того, переписав неравенство (2.6.28) в виде

$$\langle x, A_1^T y_1 + A_2^T y_2\rangle + \langle z, y_1\rangle > \langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, y_2\rangle, \tag{2.6.29}$$

в силу произвольности x приходим к выводу, что должно выполняться равенство: $A_1^T y_1 + A_2^T y_2 = 0_n$. Из (2.6.29), полагая $x = 0_n$ и $z = 0_{m_1}$, получаем также неравенство $\langle b_1, y_1\rangle + \langle b_2, y_2\rangle < 0$. Таким образом, вектор y удовлетворяет системе (2.6.27). ∎

д) Если обратиться теперь к однородным системам вида (2.6.8), (2.6.15) или (2.6.26), то все они заведомо имеют *тривиальное решение* $x = 0_n$. Поэтому интерес вызывают те случаи, когда существуют нетривиальные решения однородных систем.

Теорема 2.6.10. (Гордана.) *Пусть* A — *матрица размера* $m \times n$. *Тогда если однородная система*

$$Ax = 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad x \neq 0_n \tag{2.6.30}$$

совместна, то система

$$A^T y < 0_n \tag{2.6.31}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.30) *не совместна, то система* (2.6.31) *совместна.*

Доказательство. Предположим сначала, что система (2.6.30) имеет решение $\bar{x}$. Тогда если допустить, что и система (2.6.31) имеет решение $\bar{y}$, то обязательно вектор $\bar{y} \neq 0_m$. Умножая обе части неравенства

$A^T\bar{y} < 0_n$ на $\bar{x}^T$ и учитывая, что $\bar{x} \neq 0_n$, получаем: $\langle \bar{x}, A^T\bar{y}\rangle = \langle A\bar{x}, \bar{y}\rangle < 0$. Но $A\bar{x} = 0_m$, поэтому $\langle \bar{x}, A^T\bar{y}\rangle = 0$. Мы пришли к противоречию. Поэтому система (2.6.31) не имеет решения.

Предположим теперь, что система (2.6.30) не имеет решения и покажем, что в этом случае у системы (2.6.31) обязательно существует решение. От противного, пусть система (2.6.31) также не имеет решения. Но тогда и система $A^Ty \leq -c$ для любого вектора $c > 0_n$ не имеет решения. В этом случае в силу теоремы 2.6.8 является совместной система

$$Ax = 0_m, \quad x \geq 0, \quad \langle c, x\rangle > 0. \tag{2.6.32}$$

Любое решение этой системы будет одновременно и решением системы (2.6.30). Мы пришли к противоречию. Таким образом, система (2.6.31) совместна. ■

Замечание. *Утверждение теоремы 2.6.10 сохранится, если систему* (2.6.31) *заменить на противоположную систему* $A^Ty > 0_n$.

Теорема 2.6.11. (Вилля.) *Пусть A — матрица размером $m \times n$. Тогда если однородная система*

$$Ax \leq 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad x \neq 0_n \tag{2.6.33}$$

совместна, то система

$$A^Ty > 0_n, \quad y \geq 0_m \tag{2.6.34}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.33) *не совместна, то система* (2.6.34) *совместна.*

Доказательство. Предположим сначала, что система (2.6.33) имеет решение. Пусть $\bar{x}$ — её решение. Покажем, что система (2.6.34) в этом случае решения не имеет. От противного, пусть существует $\bar{y}$, удовлетворяющий (2.6.34). Тогда после умножения левой и правой частей неравенства $A^Ty > 0_n$ на $\bar{x}^T$ получаем с учетом того, что $\bar{x} \geq 0_n$ и $\bar{x} \neq 0_n$, неравенство $\langle \bar{x}, A^T\bar{y}\rangle > 0$. Но $A\bar{x} \leq 0_m$, $\bar{y} \geq 0_m$, поэтому $\langle A\bar{x}, \bar{y}\rangle = \langle \bar{x}, A^T\bar{y}\rangle \leq 0$. Нами получены два противоречащих друг другу неравенства. Поэтому система (2.6.34) неразрешима.

Пусть теперь у системы (2.6.33) нет решения. Покажем, что в этом случае оно имеется у системы (2.6.34). Действительно, если это не так, то какое бы $c > 0_n$ мы не брали, у системы

$$-A^Te \leq -\mathrm{c}, \quad y \geq 0_m$$

также нет решения. Тогда, применяя теорему 2.6.7, получаем, что система

$$Ax \leq 0_m, \quad x \geq 0_m, \quad \langle c, x\rangle > 0$$

совместна. Любое ее решение будет одновременно и решением системы (2.6.33). Мы пришли к противоречию. Следовательно, предположение о том, что у системы (2.6.33) нет решения, неверно. ■

е) Можно рассмотреть также однородные системы равенств и неравенств, в которых требование неотрицательности переменных в явном виде отсутствует. Утверждения относительно соответствующих альтернативных систем носят названия *теорем Моцкина* и находят широкое применение при выводе условий оптимальности для различных экстремальных задач. В качестве примера приведем один такой результат, касающийся достаточно общей системы.

Теорема 2.6.12. (Моцкина.) *Пусть A_1, A_2 и A_3 — матрицы соответственно размером $m_1 \times n$, $m_2 \times n$ и $m_3 \times n$. Тогда если однородная система*

$$A_1 x < 0_{m_1}, \quad A_2 x \leq 0_{m_2}, \quad A_3 x = 0_{m_3} \tag{2.6.35}$$

совместна, то система

$$A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + A_3^T y_3 = 0_n, \quad y_1 \geq 0_{m_1}, \quad y_2 \geq 0_{m_2} \quad y_1 \neq 0_{m_1} \tag{2.6.36}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.35) *не совместна, то система* (2.6.36) *совместна.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда имеется решение x у системы (2.6.35) . Предположим, что и система (2.6.36) также имеет решение $y = [y_1, y_2, y_3]$. Тогда, умножая левую и правую части равенства $A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + A_3 y_3 = 0_n$ на x^T, получаем, с одной стороны,

$$\langle x, A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + A_3^T y_3\rangle = 0.$$

С другой стороны, поскольку $y_1 \geq 0_{m_1}$, $y_2 \geq 0_{m_2}$, $y_1 \neq 0_{m_1}$, имеем

$$\begin{aligned}\langle A_1 x, y_1\rangle + \langle A_2 x, y_2\rangle + \langle A_3 x, y_3\rangle = \\ = \langle A_1 x, y_1\rangle + \langle A_2 x, y_2\rangle \leq \langle A_1 x, y_1\rangle < 0.\end{aligned}$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, система (2.6.36) не имеет решения.

Пусть теперь система (2.6.35) не совместна. Но тогда для любого $c > 0_{m_1}$ у неоднородной системы

$$A_1 x \leq -c, \quad A_2 x \leq 0_{m_2}, \quad A_3 x = 0_{m_3}$$

также не существует решения. В этом случае по теореме 2.6.9 можно указать такое $y = [y_1, y_2, y_3]$, для которого

$$A_1^T y_1 + A_2^T y_2 + A_3^T y_3 = 0_n, \quad y_1 \geq 0_{m_1}, \quad y_2 \geq 0_{m_2}, \quad \langle \mathrm{c}, y_1 \rangle > 0.$$

Следовательно, $y_1 \neq 0_{m_1}$, и, стало быть, данное $y = [y_1, y_2, y_3]$ удовлетворяет системе (2.6.36). ■

В качестве частного случая из теоремы 2.6.12 получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6.13. (Штимке.) *Пусть A — матрица размера $m \times n$. Тогда если однородная система*

$$Ax = 0_m, \quad x > 0_n \tag{2.6.37}$$

совместна, то система

$$A^T y \geq 0_n, \quad A^T y \neq 0_n \tag{2.6.38}$$

не совместна, и, наоборот, если система (2.6.37) *не совместна, то система* (2.6.38) *совместна.*

Отметим, что размерности переменных в альтернативных системах могут отличаться друг от друга. Поэтому если размерность вектора x в исходной системе очень большая, а размерность вектора y в альтернативной системе, напротив, гораздо меньше размерности x, то в ряде случаев целесообразно обратиться к решению альтернативной системы. Хотя может оказаться, что она заведомо не имеет решения, но если в ней найдено решение, минимизирующее "невязку", то по специальным формулам можно определить решение исходной системы. Если же окажется, что в альтернативной системе "невязка" равна нулю, то это означает, что исходная система не имеет решения.

2.7. Линейные матричные неравенства

Наряду с различными линейными системами неравенств большую роль, особенно в теории управления, играют *линейные матричные неравенства.* Под линейным матричным неравенством относительно неизвестных переменных $x = [x^1, x^2, \ldots, x^m]$ понимается неравенство вида

$$F(x) = B + \sum_{i=1}^{m} x^i A_i \succ 0, \tag{2.7.1}$$

где B и A_i, $1 \leq i \leq m$, — симметричные матрицы порядка n. Запись $F(x) \succ 0$ означает, что суммарная матрица $F(x)$ должна быть положительно определенной. Про саму матрицу $F(x)$ говорят, что она зависит от x *аффинным образом.*

Наряду со строгим неравенством (2.7.1) рассматривают также и нестрогое неравенство

$$F(x) \succeq 0, \tag{2.7.2}$$

в котором от матрицы $F(x)$ уже требуется, чтобы она была положительно полуопределенной. Несложно проверить, что множество точек x, удовлетворяющих как строгому неравенству (2.7.1), так и нестрогому неравенству (2.7.2), является выпуклым.

В случае, когда матрица B и все матрицы A_i, $1 \leq i \leq m$, диагональные, неравенства (2.7.1) и (2.7.2) переходят в обычные линейные неравенства.

Если у нас есть несколько линейных матричных неравенств, например,

$$F_1(x) \succ 0,\ F_2(x) \succ 0,\ \ldots,\ F_k(x) \succ 0,$$

то они могут быть записаны также в виде одного ограничения (2.7.1), если положить

$$F(x) = Diag\,(F_1(x), F_2(x), \ldots, F_k(x)) \succ 0,$$

где через $Diag(F_1, \ldots, F_k)$ обозначена блочная диагональная матрица с блоками F_1, …, F_k на диагонали, так что форма (2.7.1) для представления линейных матричных неравенств в виде одного неравенства не является ограничительной.

Важность линейных матричных неравенств состоит также в том, что к ним формально могут быть сведены и некоторые нелинейные матричные неравенства. Рассмотрим линейное матричное неравенство с матрицей $F(x)$ блочного вида

$$F(x) = \begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} \succ 0,$$

где $Q(x)$ и $R(x)$ — симметричные матрицы, и все матрицы, входящие в блочную матрицу $F(x)$ как $Q(x)$ и $R(x)$, так и $S(x)$, зависят от $x \in \mathbb{R}^m$ аффинным образом.

Если $Q(x) \succ 0$, то $F(x) \succ 0$ тогда и только тогда, когда

$$R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) \succ 0 \tag{2.7.3}$$

(справедливость этого условия доказывается в следующей главе). Матрица, стоящая в левой части этого неравенства, называется *дополнением по Шуру* матрицы $Q(x)$ в матрице $F(x)$.

Таким образом, если у нас есть *нелинейная система* матричных неравенств

$$Q(x) \succ 0, \quad R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) \succ 0 \tag{2.7.4}$$

(нелинейным здесь является второе неравенство), то формально она может быть записана как *линейное* матричное неравенство (2.7.2). Система (2.7.4) эквивалентна неравенству (2.7.2). Отсюда, в частности, следует, что множество решений системы (2.7.4) выпукло.

Пример. Пусть $Z(x)$ — матрица размера $m \times n$, аффинным образом зависящая от вектора x, и пусть требуется, чтобы норма этой матрицы была бы меньше единицы, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$\|Z(x)\| \leq 1, \tag{2.7.5}$$

где $\|Z\|$ — норма матрицы Z, подчиненная евклидовым нормам соответственно в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ и определяемая как

$$\|Z\| = \sup_{x \in R^n} \frac{\|Zx\|_2}{\|x\|_2}.$$

Если обратиться к линейному матричному неравенству

$$\begin{bmatrix} I_m & Z(x) \\ Z^T(x) & I_n \end{bmatrix} \succ 0,$$

то, в силу вышесказанного, оно будет выполняться, когда

$$I_n - Z^T(x)Z(x) \succ 0.$$

Нетрудно видеть, что данное неравенство эквивалентно (2.7.5).

Часто встречаются неравенства, где переменными являются матрицы, например, *неравенство А. М. Ляпунова*:

$$G(X) = Q^T X + XQ \prec 0, \tag{2.7.6}$$

где Q и X — квадратные матрицы порядка n, матрица X симметричная. Запись $G(X) \prec 0$ означает, что матрица $G(X)$ должна быть отрицательно определенной.

Неравенство (2.7.6) появляется, например, при исследовании устойчивости тривиального положения равновесия $y_*(t) \equiv 0_n$ следующего линейного дифференциального уравнения:

$$\frac{dy}{dt} = Qy, \tag{2.7.7}$$

где Q — матрица с постоянными элементами.

Пусть мы хотим узнать, является ли данное положение равновесия асимптотически устойчивым или нет. Выяснить этот вопрос можно, если воспользоваться *положительно определенной функцией Ляпунова*, т.е. такой функцией $v(y)$, которая равна нулю в начале координат (точке 0_n) и строго положительна в некоторой окрестности 0_n. Предположим, что функция $v(y)$ является непрерывно дифференцируемой. Тогда тривиальное положение равновесия $y_*(t) \equiv 0_n$ будет асимптотически устойчивым, если выяснится, что полная производная по времени функции $v(y)$, вычисленная вдоль траекторий системы (2.7.7), в окрестности 0_n удовлетворяет неравенству

$$\dot{v}(y) = \frac{dv(y(t))}{dt} = \langle v_y(y), \frac{dy}{dt} \rangle < 0, \quad y \neq 0_n. \tag{2.7.8}$$

Попытаемся строить $v(y)$ в виде квадратичной функции

$$v(y) = \langle y, Xy \rangle, \tag{2.7.9}$$

где от матрицы X потребуем, чтобы она была симметричной положительно определенной. Подставляя функцию (2.7.9) в (2.7.8), приходим к следующему неравенству:

$$\dot{v}(y) = \langle \dot{y}, Xy \rangle + \langle y, X\dot{y} \rangle < 0$$

или с учетом (2.7.7)

$$\langle y, \left(Q^T X + XQ\right) y \rangle < 0. \tag{2.7.10}$$

Неравенство (2.7.10) заведомо будет выполняться, если симметричная матрица $Q^T X + XQ$ является отрицательно определенной. Это приводит к линейному матричному неравенству (2.7.6) относительно матричной переменной X.

Чтобы придать (2.7.6) форму линейного матричного неравенства (2.7.1), возьмем некоторый базис в пространстве $\mathbb{S}^n$ симметричных матриц порядка n:

$$X_1, X_2, \ldots X_m. \tag{2.7.11}$$

Пространство $\mathbb{S}^n$ является конечномерным, и его размерность равна так называемому «треугольному числу» $n_\triangle = n(n+1)/2$. Таким образом, для числа m в (2.7.11) имеем $m = n_\triangle$. Тогда, полагая

$$B = 0_{nn}, \quad A_i = -Q^T X_i - X_i Q, \quad 1 \le i \le m,$$

и вводя вектор $x \in \mathbb{R}^m$, приходим к линейному матричному неравенству вида (2.7.1). К нему следует добавить матричное неравенство $X = x^1 X_1 + \cdots + x^m X_m \succ 0$.

Нетрудно также видеть, что в качестве простейшего базиса в $\mathbb{S}^n$ могут быть взяты матрицы X_i, у которых все элементы нулевые, за исключением либо одного элемента, либо двух элементов. В первом случае ненулевой элемент, равный единице, стоит на диагонали X_i. Во втором случае два ненулевых элемента, опять же равных единице, расположены симметрично относительно диагонали.

Глава 3

Выпуклые функции

3.1. Определения и основные свойства выпуклых функций

Выпуклые функции, наряду с выпуклыми множествами, играют исключительно важную роль в теории оптимизации. Для задач математического программирования, задаваемых выпуклыми функциями, удается получить наиболее содержательные условия оптимальности, а также разработать эффективные численные методы их решения.

Определение 3.1.1. *Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется выпуклой на X, если*

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \tag{3.1.1}$$

для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

Если неравенство (3.1.1) выполняется как строгое, когда $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ и $0 < \lambda < 1$, то $f(x)$ называется строго выпуклой функций на X.

Пример выпуклой функции, определенной на множестве X, приводится на рис. 3.1.

Определение 3.1.2. *Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется сильно выпуклой на X с константой $\theta > 0$, если*

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2 \tag{3.1.2}$$

для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $0 \leq \lambda \leq 1$.

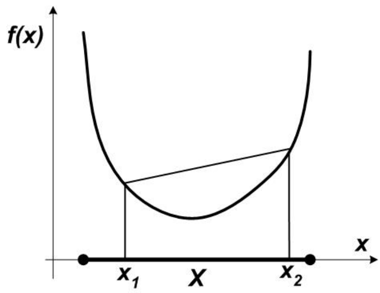

Рис. 3.1. Выпуклая функция

Сильно выпуклую на X функцию с константой $\theta > 0$ будем называть просто сильно выпуклой, если точное значение положительной константы θ для нас не столь существенно. Сильно выпуклая функция всегда является строго выпуклой функцией, а та в свою очередь просто выпуклой функцией.

Определение 3.1.3. *Функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется вогнутой (строго, сильно) на X, если $-f(x)$ является выпуклой (строго, сильно) функцией на X.*

В дальнейшем будут рассматриваться в основном выпуклые функции, все результаты, касающиеся этих функций, полностью переносятся на вогнутые функции с соответствующими изменениями. Непосредственно из определений 3.1.1 и 3.1.3 следует, что любая *линейная* (точнее, *аффинная*) *функция* $f(x) = a^T x + b$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, является одновременно и выпуклой, и вогнутой функцией. Это единственный класс функций, обладающий данным свойством.

Приведем простейшие примеры выпуклых функций, область определения которых либо совпадает с действительной прямой $\mathbb{R}$, либо принадлежит ей:

1. $f(x) = x^p$, $p > 1$, $X = \mathbb{R}_+$;
2. $f(x) = |x|^p$, $p > 1$, $X = \mathbb{R}$;
3. $f(x) = e^{cx}$, $c \in \mathbb{R}$, $X = \mathbb{R}$;
4. $f(x) = -\ln x$, $X = \mathbb{R}_{++}$;
5. $f(x) = x \ln x$, $X = \mathbb{R}_{++}$.

Все эти функции строго выпуклы на соответствующем множестве X, первая и вторая функции при $p = 2$ оказываются даже сильно выпуклыми. Последнюю функцию $f(x) = x \ln x$ называют *отрицательной энтропией.* Обычно ее доопределяют в точке $x = 0$, полагая $f(0) = 0$.

Из других часто встречающихся выпуклых функций укажем произвольные нормы в $\mathbb{R}^n$, в частности, гельдеровские нормы $f(x) = \|x\|_p$, $1 \le p < \infty$, а также их предельный случай — чебышевскую норму $f(x) = \|x\|_\infty$. Как нормы эти функции $f(x)$ не только выпуклы, но и положительно однородны, т.е. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, когда $\lambda \ge 0$. Примером сильно выпуклой функции на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ является квадратичная функция $f(x) = \langle x, Ax \rangle$, где A — симметричная положительно определенная матрица.

При проверке выпуклости функции $f(x)$ на выпуклом множестве X может оказаться полезным следующее простое утверждение.

Утверждение 3.1.1. *Функция $f(x)$ выпукла на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда функция одного аргумента $\phi(\alpha) = f(x + \alpha s)$ выпукла по α на множестве*

$$\mathcal{A}_{x,s} = \big\{\alpha \in \mathbb{R} : x + \alpha s \in X\big\}$$

для любого $x \in X$ и любого ненулевого $s \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. *Необходимость.* Возьмем произвольные точку $x \in X$ и направление $s \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что для них множество $\mathcal{A}_{x,s}$ состоит более чем из одной точки, т.е. $\mathcal{A}_{x,s}$ — либо отрезок, либо луч, либо прямая. Возьмем две точки: $\alpha_1 \in \mathcal{A}_{x,s}$, $\alpha_2 \in \mathcal{A}_{x,s}$, $\alpha_1 < \alpha_2$. Тогда для любого $0 \le \lambda \le 1$ имеем $\alpha_\lambda \in \mathcal{A}_{x,s}$, где $\alpha_\lambda = \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$. Кроме того, в силу выпуклости функции $f(x)$

$$\begin{aligned}\phi(\alpha_\lambda) = f(x + \alpha_\lambda s) = f\left(\lambda(x + \alpha_1 s) + (1-\lambda)(x + \alpha_2 s)\right) \le \\ \le \lambda f(x + \alpha_1 s) + (1-\lambda) f(x + \alpha_2 s) = \lambda\phi(\alpha_1) + (1-\lambda)\phi(\alpha_2).\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\phi(\alpha)$ выпукла на $\mathcal{A}_{x,s}$.

Достаточность. Пусть теперь x_1 и x_2 — две отличные друг от друга точки из X. Тогда направление $s = x_2 - x_1$ ненулевое, и множество $\mathcal{A}_{x,s}$ состоит более чем из одной точки. Беря в качестве x точку x_1, получаем: $f(x_1) = \phi(0)$, $f(x_2) = \phi(1)$. Кроме того, имеем в силу выпуклости функции $\phi(\alpha)$ на $\mathcal{A}_{x,s}$ для произвольного $0 \le \lambda \le 1$:

$$\begin{aligned}f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f\left(x_1 + (1-\lambda)(x_2 - x_1)\right) = \\ = f\left(x + 0 \cdot s + (1-\lambda)s\right) = f\left(x + (\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 1)\, s\right) = \\ = \phi(\lambda \cdot 0 + (1-\lambda)\cdot 1) \le \lambda\phi(0) + (1-\lambda)\phi(1) = \\ = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).\end{aligned}$$

Таким образом, $f(x)$ — выпуклая функция на X. ■

Обозначим через Λ^m — вероятностный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^m$, т.е. множество

$$\Lambda^m = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \sum_{i=1}^{m} \lambda^i = 1 \right\}.$$

Теорема 3.1.1. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_i \in X$, $1 \le i \le m$, — произвольные точки из X. Тогда*

$$f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda^i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda^i f(x_i) \tag{3.1.3}$$

для любого $\lambda = [\lambda^1, \ldots, \lambda^m] \in \Lambda^m$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что точка $\sum_{i=1}^{m} \lambda^i x_i$ как выпуклая комбинация точек из выпуклого множества X принадлежит X.

Доказательство будем проводить по индукции. При $m = 1$ утверждение очевидно, а при $m = 2$ следует из определения выпуклой функции. Предположим, что оно верно для всех m вплоть до $m = k$, и докажем его для $m = k + 1$. Пусть $\lambda \in \Lambda^{k+1}$ и

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda^i x_i + \lambda^{k+1} x_{k+1}.$$

При этом считаем, что $0 < \lambda^{k+1} < 1$, так как иначе все сводится к уже рассмотренным ранее случаям. Тогда

$$x = \lambda^{k+1} x_{k+1} + \left(1 - \lambda^{k+1}\right) \bar{x},$$

где

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} \gamma^i x_i, \quad \gamma^i = \frac{\lambda^i}{1 - \lambda^{k+1}} \ge 0, \quad 1 \le i \le k.$$

Так как $\lambda \in \Lambda^{k+1}$, то $\gamma = [\gamma^1, \ldots, \gamma^k] \in \Lambda^k$. Поэтому $\bar{x} \in X$ и в силу выпуклости функции $f(x)$ и предположения индукции:

$$\begin{aligned} &f\left(\textstyle\sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i x_i\right) = f\left(\lambda^{k+1} + (1 - \lambda^{k+1})\bar{x}\right) \le \\ &\quad \le \lambda^{k+1} f(x_{k+1}) + (1 - \lambda^{k+1}) f(\bar{x}) \le \\ &\quad \le \lambda^{k+1} f(x_{k+1}) + (1 - \lambda^{k+1}) \textstyle\sum_{i=1}^{k} \gamma^i f(x_i) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda^i f(x_i). \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (3.1.3) выполняется и при $m = k + 1$. ■

Неравенство (3.1.3) носит название *неравенства Йенсена.* Из него в частных случаях могут быть получены многие известные неравенства, например, *неравенство между арифметическим и геометрическим средним*, которое для двух переменных имеет вид

$$\sqrt{ab} \le (a + b)/2, \tag{3.1.4}$$

где $a, b \ge 0$. Продемонстрируем его вывод с помощью выпуклой функции $-\ln x$. Полагая $\lambda^1 = \lambda^2 = 1/2$, получаем согласно (3.1.3) для $a > 0$, $b > 0$:

$$-\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{-\ln a - \ln b}{2}.$$

Беря экспоненту от левой и правой частей этого неравенства, приходим к (3.1.4).

Упражнение 15. *Используя выпуклость функции $-\ln x$ на $\mathbb{R}_{++}$ и более общий вариант неравенства (3.1.4) между геометрическим и арифметическим средним*

$$a^\lambda b^{1-\lambda} \le \lambda a + (1-\lambda) b, \quad 0 \le \lambda \le 1,$$

докажите неравенство Гельдера:

$$\sum_{i=1}^n x^i y^i \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|_*^p\right)^{1/p_*}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

где $1 < p < \infty$, $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$.

Рассмотрим теперь некоторые операции над выпуклыми функциями, которые сохраняют выпуклость. Нетрудно показать (проверьте это), что имеет место следующий результат.

Теорема 3.1.2. *Пусть $f_1(x)$, …, $f_m(x)$ — выпуклые функции на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\alpha^i \ge 0$, $1 \le i \le m$. Тогда следующие две функции:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha^i f_i(x), \qquad f(x) = \max_{1 \le i \le m} f_i(x) \tag{3.1.5}$$

выпуклы на X.

Из утверждения теоремы 3.1.2 следует, в частности, что операция умножения выпуклой функции на неотрицательную константу оставляет ее выпуклой. Точно так же сумма двух выпуклых функций, определенных на одном и том же выпуклом множестве X, будет выпуклой функцией на X. Вообще говоря, выпуклые функции на выпуклом множестве X образуют выпуклый конус в пространстве всех функций, определенных на X. Имеются и другие операции над выпуклыми функциями, которые сохраняют их выпуклость. Некоторые из них будут рассмотрены позже.

Согласно теореме 3.1.2 так называемая *кусочно-линейная функция* (точнее, *кусочно-аффинная функция*)

$$f(x) = \max\left\{a_1^T x + b_1, \ldots, a_m^T x + b_m\right\}, \tag{3.1.6}$$

где $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le m$, выпукла на $\mathbb{R}^n$. При этом все пространство $\mathbb{R}^n$ разбивается на m или меньшее число областей, на каждой из которых функция $f(x)$ линейна. Частным случаем кусочно-линейной функции (3.1.6) является следующая выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$:

$$f(x) = \max\left\{x_1, \ldots, x_n\right\}.$$

Суперпозиция $f(x) = g(h(x))$ двух выпуклых функций $g(y)$ и $h(x)$, определенных соответственно на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, при дополнительном требовании монотонности первой функции дает опять выпуклую функцию на $\mathbb{R}^n$. Напомним, функция $g(y)$ называется *неубывающей* на $\mathbb{R}$, если $g(y_1) \le g(y_2)$ для всех $y_1 < y_2$. Если же $g(y_1) \ge g(y_2)$ для $y_1 < y_2$, то такая функция $g(y)$ называется *невозрастающей* на $\mathbb{R}$.

Утверждение 3.1.2. *Пусть $g(y)$ и $h(x)$ — выпуклые функции соответственно на $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $g(y)$ — неубывающая функция на $\mathbb{R}$. Тогда функция $f(x) = g(h(x))$ выпукла на $\mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Возьмем произвольные точки $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ и $0 \le \lambda \le 1$. Обозначим $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. В силу выпуклости функции $h(x)$ выполняется неравенство

$$h(x_\lambda) \le \lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2).$$

Но внешняя функция $g(y)$ является неубывающей и выпуклой на $\mathbb{R}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) = g(h(x_\lambda)) \le g(\lambda h(x_1) + (1-\lambda)h(x_2)) \le \\ \le \lambda g(h(x_1)) + (1-\lambda)g(h(x_2)) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \end{aligned}$$

Таким образом, $f(x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. ■

Приведенное утверждение является одним из простейших вариантов целой серии утверждений относительно выпуклости суперпозиций двух функций. Можно, например, ослабить условие, которое требует, чтобы функции $g(y)$ и $h(x)$ были определены на всем пространстве. Более того, можно даже не требовать, чтобы внутренняя функция $h(x)$ была бы выпуклой. Анализ доказательства утверждения 3.1.2 показывает, что справедлив также следующий результат.

Утверждение 3.1.3. *Пусть $g(y)$ — выпуклая невозрастающая функция на $\mathbb{R}$, а $h(x)$ — вогнутая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда функция $f(x) = g(h(x))$ выпукла на $\mathbb{R}^n$.*

Используя утверждение 3.1.2, а также некоторое обобщение утверждения 3.1.3, получаем, что следующие две функции являются выпуклыми:

1) $f(x) = e^{h(x)}$, $X = \mathbb{R}^n$;

2) $f(x) = -\ln(-h(x))$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ h(x) < 0\}$.

Здесь $h(x)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция.

Упражнение 16. *Пусть $g(x)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^m$, и пусть A — $(m \times n)$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$. Покажите, что функция*

$$f(x) = g(Ax + b)$$

выпукла на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим далее два важных выпуклых множества, которые связаны с выпуклыми функциями.

Эпиграф выпуклой функции. Напомним определение эпиграфа функции.

Определение 3.1.4. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда множество*

$$\operatorname{epi} f = \big\{[x, \mu] \in X \times \mathbb{R} : \ \mu \geq f(x)\big\}$$

называется эпиграфом или надграфиком функции $f(x)$.

График выпуклой на множестве X функции и ее эпиграф приведены на рис. 3.2.

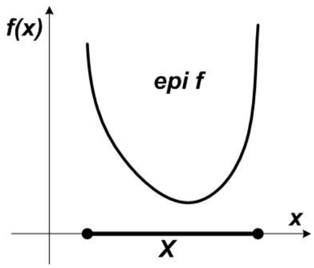

Рис. 3.2. Эпиграф выпуклой функции

Теорема 3.1.3. *Для того чтобы функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве X, была выпуклой на X, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{epi} f$ был выпуклым множеством.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть функция $f(x)$ выпукла на X. Возьмем две произвольные точки $[x_1, \mu_1] \in \mathrm{epi} f$ и $[x_2, \mu_2] \in \mathrm{epi} f$. Возьмем также $0 \leq \lambda \leq 1$ и обозначим $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\mu_\lambda = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. Тогда

$$\lambda[x_1, \mu_1] + (1-\lambda)[x_2, \mu_2] = [x_\lambda, \mu_\lambda].$$

Из выпуклости множества X следует, что $x_\lambda \in X$. Кроме того, поскольку $f(x)$ — выпуклая функция,

$$f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \leq \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2 = \mu_\lambda. \qquad (3.1.7)$$

Неравенство (3.1.7) показывает, что $[x_\lambda, \mu_\lambda] \in \mathrm{epi} f$. Таким образом, множество epi f является выпуклым.

Достаточность. Пусть $\mathrm{epi} f$ — выпуклое множество. Тогда из принадлежности точек $[x_1, \mu_1]$ и $[x_2, \mu_2]$ эпиграфу $\mathrm{epi} f$ следует, что

$$[x_\lambda, \mu_\lambda] = \lambda[x_1, \mu_1] + (1-\lambda)[x_2, \mu_2] \in \mathrm{epi} f$$

для любого $0 \leq \lambda \leq 1$, т.е. $f(x_\lambda) \leq \mu_\lambda = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$. Но это верно для всех $\mu_1 \geq f(x_1)$ и $\mu_2 \geq f(x_2)$, в частности, когда $\mu_1 = f(x_1)$, $\mu_2 = f(x_2)$. Отсюда приходим к неравенству

$$f(x_\lambda) = f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Поскольку точки $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ могут быть взяты произвольными, то $f(x)$ — выпуклая функция на X. ■

Над эпиграфами выпуклых функций как выпуклыми множествами можно проводить различные операции, сохраняющие их выпуклость. В частности, в качестве такой операции может быть взята операция пересечения двух выпуклых множеств. Пересекая эпиграфы двух выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных соответственно на множествах X_1 и X_2, приходим к выпуклому множеству, которое является эпиграфом функции

$$f(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}.$$

Данная функция имеет вид второй функции из (3.1.5) и определена на множестве $X = X_1 \cap X_2$.

Но пересекая не только два, а произвольное конечное или бесконечное число выпуклых множеств, мы опять получаем выпуклое множество. Поэтому если функция двух аргументов $g(x, y)$ выпукла по $x \in \mathbb{R}^n$ для любого $y \in Y \subseteq \mathbb{R}^m$, то следующая функция

$$f(x) = \sup_{y \in Y} g(x, y) \tag{3.1.8}$$

также выпукла по x.

Более того, когда функция двух аргументов $g(x, y)$ выпукла одновременно относительно обеих переменных и Y — непустое выпуклое множество, то наряду с (3.1.8) функция

$$f(x) = \inf_{y \in Y} g(x, y) \tag{3.1.9}$$

выпукла по x при условии, что $f(x)$ принимает конечное значение по крайней мере для одного x. Чтобы проверить это, возьмем произвольные $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$, где X — область определения функции $f(x)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ такие, что $f(x_i) \le g(x_i, y_i) + \varepsilon$, $i = 1, 2$. Беря $0 \le \lambda \le 1$ и обозначая $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $y_\lambda = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, имеем последовательно

$$\begin{aligned} f(x_\lambda) &= \inf\nolimits_{y \in Y} g(x_\lambda, y) \le g(x_\lambda, y_\lambda) \le \\ &\le \lambda g(x_1, y_1) + (1-\lambda) g(x_2, y_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что функция $f(x)$ выпукла на X. Из приведенного доказательства видно, что если функция $g(x, y)$ сильно выпукла, то и функция $f(x)$ оказывается сильно выпуклой.

Эпиграф функции $f(x)$ есть проекция эпиграфа функции $g(x, y)$ на соответствующее подпространство, а именно

$$\operatorname{epi} f = \{[x, \mu] : \ [x, y, \mu] \in \ \operatorname{epi} g \text{ для некоторого } y \in Y\}.$$

Так как $\mathrm{epi}\, g$ — выпуклое множество, то и его проекция также является выпуклым множеством. Область определения X функции $f(x)$ совпадает с проекцией области определения функции $g(x, y)$ на подпространство первой переменной x.

В качестве следствия получаем, что *функция расстояния* до непустого выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$

$$\rho(x|X) = \rho_{\min}(x|X) = \inf_{y \in X} \|x - y\|,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{R}^n$, выпукла на $\mathbb{R}^n$. Функция же *расстояния до наиболее удаленной* точки множества X

$$\rho_{\max}(x|X) = \sup_{y \in X} \|x - y\|$$

всегда выпукла, даже когда множество X не выпукло.

Используя функцию вида (3.1.9), можно убедиться в справедливости условия (2.7.3). Действительно, пусть имеется положительно определенная блочная матрица

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}, \tag{3.1.10}$$

где A и C — симметричные матрицы, матрица A положительно определена. Тогда если ввести функцию двух аргументов

$$g(x, y) = \langle x, Cx \rangle + \langle y, Ay \rangle + 2\langle x, B^T y \rangle,$$

то она является сильно выпуклой. Ее минимум по y достигается в единственной точке $y = y(x) = -A^{-1}Bx$, и после подстановки приходим к квадратичной функции

$$f(x) = g(x, y(x)) = \langle x, (C - B^T A^{-1} B)x \rangle,$$

которая также сильно выпукла. Поэтому матрица $C - B^T A^{-1} B$, называемая дополнением по Шуру матрицы A в блочной матрице (3.1.10), должна быть положительно определенной.

Множество подуровня выпуклой функции. Обратимся теперь ко второму важному множеству (вернее, семейству множеств), связанному с выпуклыми функциями, а именно к множеству подуровня. Напомним его определение.

Определение 3.1.5. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве X. Тогда множество*

$$\mathcal{L}_\beta = \{x \in X : \ f(x) \le \beta\}$$

называется множеством Лебега или множеством подуровня функции $f(x)$.

Нетрудно видеть, что если $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве X, то для любого β множество подуровня $\mathcal{L}_\beta$ выпукло. Множество подуровня часто называют также *множеством уровня.*

Теорема 3.1.4. *Пусть $f(x)$ — непрерывная сильно выпуклая функция с константой θ, определенная на замкнутом выпуклом множестве X. Тогда для любого β множество подуровня $\mathcal{L}_\beta$ ограничено.*

Доказательство. Если множество $\mathcal{L}_\beta$ пусто, то утверждение теоремы тривиально. Предположим теперь, что множество $\mathcal{L}_\beta$ не пусто. Возьмем произвольную точку $x_0 \in \mathcal{L}_\beta$ (см. рис. 3.3). Пусть $\Delta_1(x_0)$ — шар единичного радиуса с центром в точке x_0. В силу непрерывности $f(x)$ и замкнутости X существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $f(x) \geq \alpha$ для всех $x \in X \cap \Delta_1(x_0)$. Для значения $f(x_0)$ функции $f(x)$ согласно определению величин α и β выполняются неравенства $\alpha \leq f(x_0) \leq \beta$.

Покажем, что

$$\|x - x_0\| \leq 1 + \frac{\beta - \alpha}{\theta} \quad \forall\, x \in \mathcal{L}_\beta. \tag{3.1.11}$$

В случае, когда точка $x \in \mathcal{L}_\beta$ такова, что $x \in \Delta_1(x_0)$, неравенство (3.1.11) очевидно. Далее будем предполагать, что $x \in \mathcal{L}_\beta \setminus \Delta_1(x_0)$. Тогда $\|x - x_0\| > 1$. Положим $\lambda = \|x - x_0\|^{-1} < 1$ и рассмотрим точку $\bar{x} = \lambda x + (1-\lambda)x_0$. В силу выпуклости множества $\mathcal{L}_\beta$ точка $\bar{x} \in \mathcal{L}_\beta$. Имеем $\bar{x} = \lambda[x + (\lambda^{-1} - 1)x_0]$. Откуда

$$\|\bar{x} - x_0\| = \lambda\|x + (\lambda^{-1} - 1)x_0 - \lambda^{-1}x_0\| = \lambda\|x - x_0\| = 1.$$

Таким образом, точка $\bar{x}$ принадлежит границе единичного шара $\Delta_1(x_0)$. Поэтому с учетом сильной выпуклости функции $f(x)$ получаем

$$\begin{array}{rcl}
\alpha & \leq & f(\bar{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x - x_0\|^2 \leq \\
& \leq & \beta - \theta\lambda(1-\lambda)\|x - x_0\|^2 = \\
& = & \beta - \theta\|x - x_0\|^{-2}\left(\|x - x_0\| - 1\right)\|x - x_0\|^2 = \\
& = & \beta - \theta\left(\|x - x_0\| - 1\right).
\end{array}$$

Отсюда приходим к требуемому неравенству (3.1.11), из которого следует, что множество $\mathcal{L}_\beta$ ограничено. ■

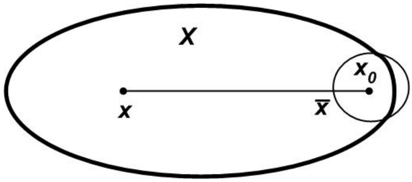

Рис. 3.3. Ограниченность множества подуровня

При определении выпуклых функций все время оговаривалось, что они заданы на выпуклом множестве X. Существует также другой подход к описанию выпуклых функций, а именно считается, что они заданы на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и при этом могут принимать значения $\pm\infty$, операции с которыми (сложение и умножение на ноль и на бесконечные числа) подчинены специальным правилам, устраняющим возможные двусмысленности. При таком соглашении функции вида $f(x) \equiv +\infty$ или $f(x) \equiv -\infty$ также считаются выпуклыми. Чтобы выделить множество точек, в которых значения функции $f(x)$ отличны от $+\infty$, вводят понятие *эффективной области* функции, определяемой следующим образом:

$$\mathrm{dom} f = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) < +\infty\right\}.$$

У выпуклых функций их эффективная область всегда выпукла.

Те выпуклые функции $f(x)$, которые не принимают значение $-\infty$ и не равны тождественно $+\infty$, называются *собственными*. В противном случае они называются *несобственными*. Важным примером собственной выпуклой функции является *индикаторная функция* непустого выпуклого множества $X \in \mathbb{R}^n$:

$$\delta(x|X) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ +\infty, & x \notin X. \end{cases}$$

Примером несобственной выпуклой функции на $\mathbb{R}$, не равной тождественно $+\infty$, является следующая функция:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ или } x = 1, \\ -\infty, & x \in (0,1), \\ +\infty, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать только собственные выпуклые функции. Более того, при их задании, как правило, будем придерживаться первого подхода, т.е. оговаривать то множество, на котором данная выпуклая функция определена и принимает конечные значения, т.е., говоря другими словами, указывать ее эффективную область.

Свойство выпуклости функций приводит к тому, что такие функции обладают многими дополнительными важными свойствами, например, они являются непрерывными функциями на относительных внутренностях своих областей определения (эффективных областей), а разрывы могут иметь лишь на относительной границе этих областей.

Теорема 3.1.5. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x)$ непрерывна в любой точке $x \in riX$.*

Доказательство проведем при упрощающем предположении, что $\mathrm{int}X \neq \emptyset$. Считаем также, не умаляя общности, что $0_n \in \mathrm{int}X$ и $f(0_n) = 0$. Выполнения последних двух предположений всегда можно добиться заменой переменной $y = x - x_0$, где $x_0 \in \mathrm{int}X$, и добавлением константы к функции. Эти преобразования соответствуют сдвигу надграфика функции $f(x)$ в $(n+1)$-мерном пространстве и фактически не меняют ее вид.

Обозначим через $\Delta_\delta(0_n)$ окрестность начала координат, определяемую с помощью первой гельдеровской нормы:

$$\Delta_\delta(0_n) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\|_1 \leq \delta \right\}.$$

Эта окрестность является выпуклым многогранником, натянутым на $2n$ точек $x_{j,\delta} \in \mathbb{R}^n$, имеющих вид: $x_{j,\delta} = \pm\delta e_i$, где e_i — i-й единичный орт, $1 \leq i \leq n$.

Так как $0_n \in \mathrm{int}X$, то можно указать такое $\bar\delta > 0$, что $\Delta_{\bar\delta}(0_n) \subset X$. Пусть

$$c = \max_{1 \leq j \leq 2n} f(x_{j,\bar\delta}).$$

Если взять произвольное $0 < \delta < \bar\delta$, то из выпуклости функции $f(x)$ для всех точек $x_{j,\delta}$, $1 \leq j \leq 2n$, получаем

$$f\left(x_{j,\delta}\right) = f\left(\delta x_{j,\bar\delta}\right) = f\left(\delta x_{j,\bar\delta} + (1-\delta)0_n\right) \leq \delta f\left(x_{j,\bar\delta}\right) \leq \delta c. \qquad (3.1.12)$$

Поскольку окрестность $\Delta_\delta(0_n)$ есть выпуклый многогранник, порожденный точками $x_{j,\delta}$, то любая точка x из этой окрестности представима в виде выпуклой комбинации точек $x_{j,\delta}$, $1 \leq 1 \leq 2n$. Поэтому в силу неравенства Йенсена и (3.1.12)

$$f(x) = f\left(\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j x_{j,\delta}\right) \leq \sum_{j=1}^{2n} \lambda_j f\left(x_{j,\delta}\right) \leq \delta c, \qquad (3.1.13)$$

где $\lambda_j \geq 0$, $1 \leq j \leq 2n$, и $\sum_{j=1}^{2n} \lambda_j = 1$.

С другой стороны, так как окрестность $\Delta_\delta(0_n)$ наряду с точкой x также содержит и точку $-x$, получаем

$$0 = f(0_n) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)\right) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(-x) \leq \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}\delta c.$$

Откуда

$$f(x) \geq -\delta c. \tag{3.1.14}$$

Из (3.1.13) и (3.1.14) видно, что какое бы $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, за счет выбора $0 < \delta \leq \bar{\delta}$ можно добиться того, что $|f(x)| \leq \varepsilon$ для всех $x \in \Delta_\delta(0_n)$. Но это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в нуле.

Если $\mathrm{int}X = \emptyset$, то следует обратиться к относительной внутренности $\mathrm{ri}X$, которая согласно утверждению теоремы 2.2.2 обязательно является непустым множеством. По-прежнему, не ограничивая общности, можно считать, что $0_n \in \mathrm{ri}X$ и $f(0_n) = 0$. При этом предположении $\mathrm{ri}X = \mathrm{Lin}X$ и рассмотрение на функции $f(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ следует заменить на ее рассмотрение на подпространстве $\mathrm{Lin}X$. Взяв в этом подпространстве соответствующий ортонормированный базис, задаваемый столбцами некоторой матрицы Q, и сделав соответствующую замену переменных $x = Qy$, получаем вместо $f(x)$ выпуклую функцию $\tilde{f}(y) = f(Qy)$. Выпуклое множество Y, на котором эта функция определена, уже имеет внутренность и начало координат принадлежит этой внутренности. Тогда после проведения рассуждений, аналогичных вышесказанным, приходим к выводу, что функция $\tilde{f}(y)$ непрерывна в начале координат. Следовательно, и исходная функция $f(x)$ также будет непрерывна в начале координат. ■

Следующий пример (см. рис. 3.4)

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & -1 < x < 1, \\ 2, & x = \pm 1, \end{cases} \qquad X = [-1, 1]$$

показывает, что в относительно граничных точках выпуклая функция может терпеть разрывы.

Чтобы исключить такие разрывы на границе, вводят понятие *замкнутой функции.*

Определение 3.1.6. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется замкнутой, если ее надграфик $\mathrm{epi}f$ является замкнутым множеством.*

Можно показать, что замкнутые выпуклые функции уже непрерывны на своих областях определения. Кроме того, все множества

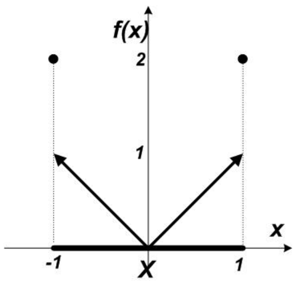

Рис. 3.4. Пример разрывной выпуклой функции

подуровня у таких функций замкнуты. Это следует из следующего утверждения, справедливого и для не обязательно выпуклых функций.

Теорема 3.1.6. *Функция $f(x)$, определенная на множестве X из $\mathbb{R}^n$, является замкнутой тогда и только тогда, когда все множества подуровня*

$$\mathcal{L}_\beta = \{x \in X : \ f(x) \le \beta\}$$

замкнуты.

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что последовательность точек $\{x_k\}$ такова, что $x_k \in X$ и $x_k \to \bar{x}$. Кроме того, пусть $f(x_k) \le \beta$. Так как $f(x)$ — замкнутая функция, то обязательно $\bar{x} \in X$. Действительно, в противном случае, взяв точки $[x_k, \beta + \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$ — произвольное число, получили бы: $[x_k, \beta + \varepsilon] \in \mathrm{epi} f$ и $[x_k, \beta + \varepsilon] \to [\bar{x}, \beta + \varepsilon]$. Но $[\bar{x}, \beta + \varepsilon] \notin \mathrm{epi} f$, что противоречит замкнутости функции $f(x)$. Таким образом, $\bar{x} \in X$ и $f(\bar{x})$ конечно.

Не умаляя общности, можно считать, что $f(x_k) \to \mu$, где $\mu \le \beta$. В силу конечности значения функции f в точке $\bar{x}$ и в силу замкнутости надграфика $f(x)$ должно выполняться неравенство: $f(\bar{x}) \le \mu \le \beta$. Следовательно, μ — конечная величина и, более того, $\mathcal{L}_\beta$ — замкнутое множество.

Достаточность. Пусть все множества подуровня замкнуты. Если теперь взять сходящуюся к $\bar{x}$ последовательность точек $\{x_k\}$ из X, для которой $f(x_k) \to \beta$, то $f(x_k) \le \beta + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и k достаточно больших. Но множество $\mathcal{L}_{\beta+\varepsilon}$ замкнуто. Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что $f(\bar{x}) \le \beta$. Поэтому, беря последовательность точек $[x_k, \mu_k] \in \mathrm{epi} f$, сходящуюся к точке $[\bar{x}, \bar{\mu}]$, получаем в силу вышесказанного

$$\bar{\mu} = \lim_{k\to\infty} \mu_k \geq \lim_{k\to\infty} \inf f(x_k) \geq f(\bar{x}).$$

Таким образом, $[\bar{x}, \bar{\mu}] \in \mathrm{epi} f$ и, стало быть, $\mathrm{epi} f$ — замкнутое множество. ■

В дальнейшем, как правило, будут рассматриваться лишь замкнутые выпуклые функции и нигде это специальным образом не оговариваться. Обратим внимание, что у замкнутой функции эффективная область может оказаться незамкнутой, например, если взять выпуклую функцию $f(x) = 1/x$, определенную на положительной части прямой, то для нее $\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$.

3.2. Дифференциальные критерии выпуклости функций

Далее будем предполагать, что $f(x)$ является дифференцируемой или дважды дифференцируемой функцией на выпуклом множестве X. В этом случае имеется возможность проверить выпуклость $f(x)$, привлекая ее производные (градиент и гессиан).

Теорема 3.2.1. (Критерий 1-го порядка.) *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x)$ сильно выпукла на X с константой $\theta > 0$ в том и только в том случае, когда*

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle + \theta \|x - x_0\|^2 \tag{3.2.1}$$

для любых $x, \ x_0 \in X$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $0 < \lambda \leq 1$. Согласно определению сильно выпуклой функции

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x - x_0\|^2$$

или

$$\begin{gathered} f(x) - f(x_0) - \theta(1-\lambda)\|x - x_0\|^2 \geq \lambda^{-1}\left[f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) - f(x_0)\right] = \\ = \lambda^{-1}\left[f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)\right] = \lambda^{-1}\left[\lambda\langle f_x(x_0), x - x_0\rangle + o(\lambda)\right] = \\ = \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle + \lambda^{-1} o(\lambda). \end{gathered}$$

Отсюда, устремляя $\lambda \downarrow 0$, приходим к (3.2.1).

Достаточность. Пусть для любых $x,\ x_0 \in X$ выполнено (3.2.1). Возьмем $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, где $x_1,\ x_2 \in X$, $0 \le \lambda \le 1$. Согласно (3.2.1) имеют место неравенства

$$f(x_1) - f(x_0) \ge \langle f_x(x_0), x_1 - x_0\rangle + \theta\|x_1 - x_0\|^2,$$

$$f(x_2) - f(x_0) \ge \langle f_x(x_0), x_2 - x_0\rangle + \theta\|x_2 - x_0\|^2.$$

Умножим первое неравенство на λ, а второе — на $1-\lambda$ и сложим их. Учитывая, что

$$x_1 - x_0 = (1-\lambda)\,(x_1 - x_2)\,, \quad x_2 - x_0 = \lambda\,(x_2 - x_1)$$

и

$$\lambda(1-\lambda)^2 + (1-\lambda)\lambda^2 = \lambda(1-\lambda),$$

получаем

$$\begin{aligned}\lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) - f(x_0) - \theta\lambda(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|^2 \ge \\ \ge \langle f_x(x_0), \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 - x_0\rangle = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, выполняется неравенство (3.1.2) из определения сильно выпуклой функции. ■

Поскольку сильно выпуклая функция при константе $\theta = 0$ становится просто выпуклой функцией, то в качестве следствия из теоремы 3.2.1 получаем следующий результат.

Теорема 3.2.2. *Дифференцируемая функция $f(x)$, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, выпукла тогда и только тогда, когда*

$$f(x) - f(x_0) \ge \langle f_x(x_0), x - x_0\rangle \tag{3.2.2}$$

для любых $x,\ x_0 \in X$.

Если рассмотреть линейную функцию

$$g(x) = f(x_0) + \langle f_x(x_0), x - x_0\rangle,$$

то её график, являющийся аффинным множеством в $\mathbb{R}^{n+1}$, касается графика дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 (см. рис. 3.5). Неравенство (3.2.2) означает, что $f(x) \ge g(x)$, т.е. график $f(x)$ лежит выше графика $g(x)$.

Для сильно выпуклых функций наряду с теоремой 3.2.1 имеет место также следующее утверждение.

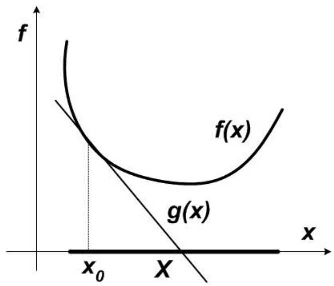

Рис. 3.5. График $f(x)$ лежит выше графика функции $g(x)$

Теорема 3.2.3. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x)$ сильно выпукла на X с константой $\theta > 0$ в том и только в том случае, когда*

$$\langle f_x(x) - f_x(x_0), x - x_0 \rangle \geq 2\theta \|x - x_0\|^2 \tag{3.2.3}$$

для любых $x,\ x_0 \in X$.

Доказательство. *Необходимость.* Для доказательства необходимости неравенства (3.2.3) можно воспользоваться теоремой 3.2.1. Имеем

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle + \theta \|x - x_0\|^2,$$
$$f(x_0) - f(x) \geq \langle f_x(x), x_0 - x \rangle + \theta \|x - x_0\|^2.$$

Складывая эти два неравенства, приходим к (3.2.3).

Достаточность. Пусть выполнено (3.2.3). По теореме Ньютона–Лейбница

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \langle f_x\left(x_0 + \alpha(x - x_0)\right), x - x_0 \rangle d\alpha$$

для любых x и x_0 из X. Поэтому в силу (3.2.3)

$$\begin{aligned}
&f(x) - f(x_0) - \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle = \\
&\quad = \textstyle\int_0^1 \langle f_x\left(x_0 + \alpha(x - x_0)\right), x - x_0 \rangle d\alpha - \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle = \\
&\quad = \textstyle\int_0^1 \alpha^{-1} \langle f_x\left(x_0 + \alpha(x - x_0)\right) - f_x(x_0), \alpha(x - x_0) \rangle d\alpha \geq \\
&\quad \geq \textstyle\int_0^1 \alpha^{-1} 2\theta \|\alpha(x - x_0)\|^2 d\alpha = \theta \|x - x_0\|^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, выполняется неравенство (3.2.1), которое в силу теоремы 3.2.1 достаточно, чтобы $f(x)$ была сильно выпуклой функцией с константой θ. ■

Приведем теперь аналогичный результат для просто выпуклых функций. Он получается из (3.2.3) при $\theta = 0$.

Теорема 3.2.4. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда $f(x)$ выпукла на X в том и только в том случае, когда*

$$\langle f_x(x) - f_x(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$$

для любых $x,\ x_0 \in X$.

Обратимся теперь к дважды дифференцируемым функциям и рассмотрим критерии их выпуклости и сильной выпуклости.

Теорема 3.2.5. (Критерий 2-го порядка.) *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество, причем $intX \neq \emptyset$. Пусть, кроме того, $f(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на X. Тогда $f(x)$ сильно выпукла на X с константой $\theta > 0$ в том и только в том случае, когда*

$$\langle y, f_{xx}(x)y \rangle \geq 2\theta \|y\|^2 \tag{3.2.4}$$

для любых $x \in X$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство. Неравенство (3.2.4) тривиально, когда $y = 0_n$, поэтому в дальнейшем считаем, что $y \neq 0_n$.

Необходимость. Предположим сначала, что x — внутренняя точка X. Тогда $x + \alpha y \in X$ для всех $y \in \mathbb{R}^n$ и α достаточно малых. Так как $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция, то

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \langle f_x(x), y \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle y, f_{xx}(x)y \rangle + o(\alpha^2).$$

Отсюда, на основании теоремы 3.2.1, получаем

$$\frac{\alpha^2}{2} \langle y, f_{xx}(x)y \rangle + o(\alpha^2) = f(x+\alpha y) - f(x) - \alpha \langle f_x(x), y \rangle \geq \theta \alpha^2 \|y\|^2. \tag{3.2.5}$$

Неравенство (3.2.5) сводится к неравенству (3.2.4) после деления левой и правой частей на α^2 и перехода к пределу при $\alpha \downarrow 0$.

Если $x \in X$, но $x \notin \mathrm{int}X$, то возьмем последовательность $\{x_k\}$ такую, что $x_k \in \mathrm{int}X$ и $x_k \to x$ при $k \to \infty$. Тогда после предельного перехода приходим к (3.2.4).

Достаточность. Используя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, а также неравенство (3.2.4), получаем для $x + y \in X$:

$$f(x+y) - f(x) - \langle f_x(x), y \rangle = \frac{1}{2} \langle y, f_{xx}(x + \alpha y)y \rangle \geq \theta \|y\|^2,$$

где $0 \le \alpha \le 1$. Поэтому

$$f(x+y) - f(x) \ge \langle f_x(x), y\rangle + \theta\|y\|^2.$$

Следовательно, по теореме 3.2.1 функция $f(x)$ сильно выпукла с константой θ. ■

В качестве следствия из этой теоремы при $\theta = 0$ получаем следующее утверждение.

Теорема 3.2.6. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, имеющем непустую внутренность. Тогда $f(x)$ выпукла на X в том и только в том случае, когда*

$$\langle y, f_{xx}(x)y\rangle \ge 0 \tag{3.2.6}$$

для всех $x \in X$ и $y \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 3.2.6 дает сравнительно простой критерий проверки выпуклости дважды непрерывно дифференцируемой функции, а именно, достаточно убедиться в том, что ее матрица вторых производных положительно полуопределена на X.

Упражнение 17. *С помощью критерия второго порядка покажите, что* геометрическое среднее

$$f(x) = \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^{1/n}$$

является вогнутой функцией на $X = \mathbb{R}^n_{++}$.

Упражнение 18. *Покажите, что следующая дробная квадратично-линейная функция $f(x) = x_1^2/x_2$ является выпуклой на множестве $X = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x_2 > 0\right\}$.*

3.3. Дифференцируемость по направлениям и субдифференциал

В предыдущем разделе мы дополнительно предполагали, что выпуклая функция является дифференцируемой, чтобы получить условия (3.2.2) и (3.2.6). Однако выпуклость — это такое замечательное свойство, что оно само по себе обеспечивает некоторую гладкость функции, в частности, ее дифференцируемость по направлениям.

Лемма 3.3.1. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathrm{ri}X$. Тогда для любого ненулевого направления $s \in \mathrm{Lin}X$ функция*

$$\psi(\alpha) = \frac{f(x_0 + \alpha s) - f(x_0)}{\alpha} \tag{3.3.1}$$

является неубывающей на множестве

$$A_+ = \{\alpha > 0 : \; x_0 + \alpha s \in X\}.$$

Кроме того, $\psi(\alpha_1) \geq \psi(\alpha_2)$ для всех $\alpha_1 \in A_+$ и $\alpha_2 \in A_-$, где

$$A_- = \{\alpha < 0 : \; x_0 + \alpha s \in X\}.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что множество A_+ заведомо непустое, поскольку $x_0 \in \mathrm{ri}X$ и $s \in \mathrm{Lin}X$. Имеем $\Delta_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{aff}X \subseteq$ $\subseteq X$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$. Кроме того, $x_0 + \alpha s \in \mathrm{aff}X$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому $x_0 + \alpha s \in \Delta_\varepsilon(x_0) \cap \mathrm{aff}X \subseteq X$ при α достаточно малом. По той же самой причине множество A_- также непустое.

Проверим сначала, что функция $\psi(\alpha)$ является неубывающей на A_+. Пусть $\alpha_1 \in A_+$, $\alpha_2 \in A_+$ и $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Обозначим $\lambda = \alpha_1/\alpha_2$. Имеем $0 < \lambda \leq 1$. Поэтому в силу выпуклости функции $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x_0 + \alpha_1 s) = f\left((1-\lambda)\, x_0 + \lambda\,(x_0 + \alpha_2 s)\right) \leq \\ \leq (1-\lambda)\, f(x_0) + \lambda f\left(x_0 + \alpha_2 s\right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{array}{rcl} \psi(\alpha_1) & = & \alpha_1^{-1}\left[f(x_0 + \alpha_1 s) - f(x_0)\right] \leq \\ & \leq & \alpha_1^{-1}\left[(1-\lambda)\, f(x_0) + \lambda f\left(x_0 + \alpha_2 s\right) - f(x_0)\right] = \\ & = & \alpha_1^{-1}\lambda\left[f(x_0 + \alpha_2 s) - f(x_0)\right] = \\ & = & \alpha_2^{-1}\left[f(x_0 + \alpha_2 s) - f(x_0)\right] = \psi(\alpha_2). \end{array}$$

Таким образом, $\psi(\alpha)$ — неубывающая на A_+ функция.

Возьмем теперь любые $\alpha_1 \in A_+$, $\alpha_2 \in A_-$ и обозначим

$$\lambda_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Имеем $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Так как

$$x_0 = \lambda_1(x_0 + \alpha_2 s) + \lambda_2(x_0 + \alpha_1 s),$$

то в силу выпуклости функции $f(x)$:

$$\begin{array}{rcl} f(x_0) & = & f\left(\lambda_1(x_0 + \alpha_2 s) + \lambda_2(x_0 + \alpha_1 s)\right) \leq \\ & \leq & \lambda_1 f(x_0 + \alpha_2 s) + \lambda_2 f(x_0 + \alpha_1 s). \end{array}$$

Откуда, если переписать данное неравенство как

$$(\lambda_1 + \lambda_2)\, f(x_0) \leq \lambda_1 f(x_0 + \alpha_2 s) + \lambda_2 f(x_0 + \alpha_1 s),$$

получаем

$$\lambda_1 \left[f(x_0 + \alpha_2 s) - f(x_0)\right] \geq -\lambda_2 \left[f(x_0 + \alpha_1 s) - f(x_0)\right]$$

или

$$\alpha_1 \left[f(x_0 + \alpha_2 s) - f(x_0)\right] \geq \alpha_2 \left[f(x_0 + \alpha_1 s) - f(x_0)\right].$$

Поэтому после деления данного неравенства на $\alpha_1\alpha_2 < 0$ приходим к выводу, что $\psi(\alpha_1) \geq \psi(\alpha_2)$. ■

Ниже под *направлением* s в $\mathbb{R}^n$ понимается любой ненулевой вектор из $\mathbb{R}^n$. Если, кроме того, его норма равна единице, то такое направление s называется *единичным направлением.*

Теорема 3.3.1. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in \mathrm{ri}X$. Тогда в x_0 существует производная $f(x)$ по любому направлению $s \in \mathrm{Lin}X$:*

$$f'(x_0; s) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \frac{f(x_0 + \alpha s) - f(x_0)}{\alpha}. \tag{3.3.2}$$

Кроме того, $f'(x_0; s) \leq \psi(\alpha)$ для всех достаточно малых $\alpha > 0$, где $\psi(\alpha)$ — функция (3.3.1).

Доказательство. Согласно лемме 3.3.1 функция $\psi(\alpha)$, имеющая вид (3.3.1), является неубывающей и ограниченной снизу на множестве A_+. Поэтому существует предел $\psi(\alpha)$ при $\alpha \downarrow 0$, который и есть $f'(x_0; s)$. Справедливость неравенства $f'(x_0; s) \leq \psi(\alpha)$ следует опять же из-за монотонности функции $\psi(\alpha)$. ■

Замечание. *Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то, как известно из анализа, ее производная по любому направлению $s \in \mathbb{R}^n$ существует и имеет место формула*

$$f'(x_0; s) = \langle f_x(x_0), s\rangle, \tag{3.3.3}$$

где $f_x(x_0)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x_0.

Рассмотрим вопрос о поведении производной $f'(x_0; s)$ как функции второго аргумента s. Напомним, функция $f(x)$ называется *положительно однородной*, если $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для $\lambda > 0$. Выпуклые положительно однородные функции удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} f(x_1 + x_2) &= f\left(2\left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right)\right) = 2f\left(\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right) \leq \\ &\leq f(x_1) + f(x_2), \end{aligned}$$

из которого, полагая, в частности, $x_1 = 0_n$ и $x_2 = x$, получаем неравенство: $f(x) \leq f(0_n) + f(x)$ или $f(0_n) \geq 0$, причем для замкнутых выпуклых положительно однородных функций обязательно $f(0_n) = 0$, поскольку в этом случае справедливо и противоположное неравенство:

$$f(0_n) \leq \lim_{\lambda \downarrow 0} f(\lambda x) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda f(x) = f(x) \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda = 0.$$

Теорема 3.3.2. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in riX$. Тогда $f'(x_0; s)$ есть положительно однородная выпуклая функция от второго аргумента s на множестве* $\mathrm{Lin}X$.

Доказательство. Положительная однородность функции $f'(x_0; s)$ по s следует непосредственно из определения (3.3.2), так как

$$\begin{aligned} f'(x_0; \lambda s) = \lim_{\alpha \downarrow 0} \tfrac{f(x_0 + \alpha\lambda s) - f(x_0)}{\alpha} &= \\ = \lambda \lim_{\alpha \downarrow 0} \tfrac{f(x_0 + \alpha\lambda s) - f(x_0)}{(\alpha\lambda)} &= \lambda f'(x_0; s). \end{aligned}$$

Далее, в силу выпуклости функции $f(x)$ для $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ и $s_1 \in \mathrm{Lin}X$, $s_2 \in \mathrm{Lin}$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\tfrac{f(x_0 + \alpha(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2)) - f(x_0)}{\alpha} = \\ &= \tfrac{f(\lambda_1(x_0 + \alpha s_1) + \lambda_2(x_0 + \alpha s_2)) - (\lambda_1 + \lambda_2) f(x_0)}{\alpha} \leq \\ &\leq \lambda_1 \tfrac{f(x_0 + \alpha s_1) - f(x_0)}{\alpha} + \lambda_2 \tfrac{f(x_0 + \alpha s_2) - f(x_0}{\alpha}. \end{aligned}$$

Отсюда после перехода к пределу по $\alpha \downarrow 0$ получаем

$$f'(x_0; \lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) \leq \lambda_1 f'(x_0; s_1) + \lambda_2 f'(x_0; s_2).$$

Таким образом, $f'(x_0; s)$ выпукла по s. ■

По теореме 3.3.1 выпуклая функция имеет производные по направлениям во всех точках, принадлежащих относительной внутренности множества своего определения, но, вообще говоря, не обязательно должна иметь в этих точках частные производные и, следовательно, градиент. Однако можно ввести понятие *субградиента*, которое заменяет в некотором смысле понятие градиента.

Определение 3.3.1. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда вектор $a \in \mathbb{R}^n$ называется субградиентом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$, если*

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle \quad \forall\ x \in X. \tag{3.3.4}$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется ее субдифференциалом в x_0 и обозначается $\partial_X f(x_0)$. Если множество X совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, то пишем просто $\partial f(x_0)$.

Здесь понятия субградиента и субдифференциала введены для произвольной функции $f(x)$ и произвольного множества X. Однако наиболее содержательны они для выпуклых функций и выпуклых множеств. Действительно, если выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то согласно теореме 3.2.2 имеет место неравенство

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle \quad x \in X. \tag{3.3.5}$$

Таким образом, градиент всегда является и субградиентом выпуклой функции. Покажем, что на самом деле даже негладкие выпуклые функции обладают субградиентами во всех относительно внутренних точках множества X.

Теорема 3.3.3. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и точка $x_0 \in riX$. Тогда*

1) *если $f(x)$ — выпуклая функция на X, то $\partial_X f(x_0) \neq \emptyset$ и $\partial_X f(x_0)$ является выпуклым замкнутым множеством,*

2) *если $\partial_X f(x) \neq \emptyset$ для всех $x \in X$, то $f(x)$ — выпуклая функция на X.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на X. В этом случае ее надграфик $\mathrm{epi}f$ является выпуклым множеством. Возьмем точку $[x_0, f(x_0)] \in \mathrm{epi}f$. Понятно, что $[x_0, f(x_0)] \notin \mathrm{ri}(\mathrm{epi}f)$. Тогда по теореме 2.4.3 точка $[x_0, f(x_0)]$ собственно отделима от $\mathrm{epi}f$, т.е. существуют такие $[a, \alpha] \in \mathbb{R}^{n+1}$, не равные нулевому вектору в совокупности, что

$$\langle [a, \alpha], [x, \mu] \rangle \geq \langle [a, \alpha], [x_0, f(x_0)] \rangle \tag{3.3.6}$$

для всех $[x, \mu] \in \mathrm{epi} f$. Кроме того, можно указать такое $[\bar{x}, \bar{\mu}] \in \mathrm{epi} f$, что

$$\langle [a, \alpha], [\bar{x}, \bar{\mu}] \rangle > \langle [a, \alpha], [x_0, f(x_0)] \rangle. \tag{3.3.7}$$

Если $\alpha = 0$, то $a \neq 0_n$ и неравенства (3.3.7) и (3.3.6) переходят соответственно в $\langle a, \bar{x} \rangle > \langle a, x_0 \rangle$ и

$$\langle a, x \rangle \geq \langle a, x_0 \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Но это означает собственную отделимость точки $x_0 \in \mathrm{ri} X$ от самого множества X, чего быть не может.

Предположим теперь, что $\alpha \neq 0$. Тогда обязательно $\alpha > 0$, так как если $\alpha < 0$, то, устремляя $\mu \to +\infty$, приходим к нарушению неравенства (3.3.6). Положим, не умаляя общности, $\alpha = 1$. Неравенство (3.3.6) в этом случае перепишется как

$$\langle a, x \rangle + \mu \geq \langle a, x_0 \rangle + f(x_0) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, \mu \geq f(x).$$

В частности, беря $\mu = f(x)$, получаем

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle -a, x - x_0 \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Откуда следует, что $-a \in \partial_X f(x_0)$. Таким образом, субдифференциал $\partial_X f(x_0)$ содержит по крайней мере вектор $-a$ и, стало быть, не является пустым множеством. Его замкнутость и выпуклость следует непосредственно из определения 3.3.1 субдифференциала.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ произвольны и пусть $0 \leq \lambda \leq 1$. Положим $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Так как $x \in X$ и $\partial_X f(x) \neq \emptyset$, то существует $a \in \partial_X f(x)$, для которого

$$f(x_1) - f(x) \geq \langle a, x_1 - x \rangle, \quad f(x_2) - f(x) \geq \langle a, x_2 - x \rangle.$$

Умножим первое неравенство на λ, второе — на $1 - \lambda$ и сложим

$$\begin{aligned}
&\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x) \geq \\
&\qquad \geq \lambda \langle a, x_1 - x \rangle + (1-\lambda)\langle a, x_2 - x \rangle = \\
&\qquad = \lambda \langle a, x_1 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 \rangle + \\
&\qquad + (1-\lambda)\langle a, x_2 - \lambda x_1 - (1-\lambda)x_2 \rangle = \\
&\qquad = \lambda(1-\lambda)\langle a, x_1 - x_2 \rangle - \lambda(1-\lambda)\langle a, x_1 - x_2 \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Следовательно, $f(x)$ — выпуклая функция на X. ■

Можно дополнительно показать, что в случае, когда выпуклое множество X обладает непустой внутренностью, субдифференциал $\partial_X f(x)$ выпуклой функции $f(x)$ в любой точке $x \in \mathrm{int}X$ оказывается ограниченным множеством.

Теорема 3.3.4. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in intX$. Тогда $\partial_X f(x_0)$ — выпуклое компактное множество.*

Доказательство. Замкнутость и выпуклость $f(x)$ следуют из предыдущей теоремы. Поэтому остается доказать только ограниченность $\partial_X f(x_0)$. Пусть $a \in \partial_X f(x_0)$ и пусть $a \neq 0_n$. Так как $x_0 \in \mathrm{int}X$, то можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что $\Delta_\varepsilon(x_0) = x_0 + \varepsilon B \subseteq X$, где B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле. Обозначим $f^* = \max_{x \in \Delta_\varepsilon(x_0)} f(x)$. Из непрерывности выпуклой функции $f(x)$ на $\Delta_\varepsilon(x_0)$ следует, что максимум достигается и $f^* < +\infty$.

Согласно определению субградиента для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\langle a, x - x_0 \rangle \leq f(x) - f(x_0)$. В частности, если взять $x = x_0 + \varepsilon \|a\|^{-1} a \in \Delta_\varepsilon(x_0)$, то имеем

$$f(x_0 + \varepsilon \|a\|^{-1} a) - f(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle = \varepsilon \|a\|.$$

Отсюда, поскольку $f(x_0 + \varepsilon \|a\|^{-1} a) \leq f^*$, получаем

$$\|a\| \leq \varepsilon^{-1}(f^* - f(x_0)) < +\infty,$$

что в силу произвольности субградиента a означает ограниченность $\partial_X f(x_0)$. ■

Если взять выпуклую функцию $f(x) = |x|$, определенную на действительной прямой $\mathbb{R}$, то для нее субдифференциал $\partial f(0)$ совпадает с отрезком $[-1, 1]$ (см. рис. 3.6). Во всех остальных точках $\mathbb{R}$ данная функция дифференцируема.

В относительно граничных точках множества X субдифференциал может быть пустым. Приведем пример такой функции

$$f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad X = [-1, 1] \subset \mathbb{R}.$$

В точках ± 1 касательные к графику выпуклой функции $f(x)$ принимают вертикальное положение.

Можно привести также пример выпуклой функции, у которой субдифференциал в граничных точках множества X не пуст. Пусть $\delta(x|X)$ — индикаторная функция непустого выпуклого замкнутого множества

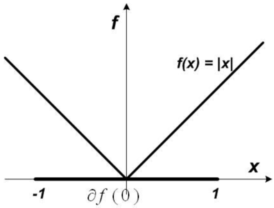

Рис. 3.6. Субдифференциал функции $f(x) = |x|$ в нуле

$X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in X$. Согласно определению вектор $a \in \mathbb{R}^n$ будет субградиентом $\delta(x|X)$ в точке x_0, если

$$\langle a, x - x_0 \rangle \le \delta(x|X) - \delta(x_0|X) = 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{3.3.8}$$

В случае, когда x_0 — граничная точка X, о векторе a, удовлетворяющем неравенству (3.3.8), говорят как о *нормали* к множеству X в точке x_0. Совокупность всех нормалей в точке $x_0 \in X$ образует конус, называемый *нормальным конусом* к X в этой точке и обозначаемый $\mathcal{N}(x_0|X)$. Таким образом, субдифференциал индикаторной функции множества X в граничной точке $x_0 \in X$ совпадает с нормальным конусом $\mathcal{N}(x_0|X)$ к X в этой точке.

Рассмотрим теперь связь между производными выпуклой функции по направлениям и ее субградиентами.

Теорема 3.3.5. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $x_0 \in \mathrm{ri}X$. Тогда*

1) *имеет место следующая формула для субдифференциала:*

$$\partial_X f(x_0) = \Big\{ a \in \mathbb{R}^n : \ \langle a, s \rangle \le f'(x_0; s) \quad \forall\, s \in \mathrm{Lin}X, \ s \ne 0_n \Big\}; \tag{3.3.9}$$

2) *для любого ненулевого $s \in \mathrm{Lin}X$*

$$f'(x_0; s) = \max_{a \in \partial_X f(x_0)} \langle a, s \rangle. \tag{3.3.10}$$

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости формулы (3.3.9). Обозначим через Y правую часть (3.3.9), и пусть $a \in Y$. Беря любую точку $x \in X$, получаем, что $s = x - x_0 \in \mathrm{Lin}X$. Поэтому согласно неравенству из утверждения теоремы 3.3.1

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) = f(x_0 + s) - f(x_0) = \psi(1) \ge \\ \ge f'(x_0; s) \ge \langle a, s \rangle = \langle a, x - x_0 \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод, что $a \in \partial_X f(x_0)$.

С другой стороны, пусть $a \in \partial_X f(x_0)$. Тогда, поскольку $x_0 \in \mathrm{ri} X$, то для любого $s \in \mathrm{Lin} X$ и достаточно малого $\alpha > 0$ точка $x = x_0 + \alpha s \in X$. Следовательно, в силу определения субградиента,

$$f(x_0 + \alpha s) - f(x_0) = f(x) - f(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle = \alpha \langle a, s \rangle.$$

Деля данное неравенство на $\alpha > 0$ и переходя к пределу при $\alpha \downarrow 0$, приходим с учетом определения (3.3.2) производной по направлению к неравенству: $\langle a, s \rangle \leq f'(x_0; s)$. Таким образом, $s \in Y$.

Докажем теперь равенство (3.3.10). Поскольку для субдифференциала имеет место представление (3.3.9), то для этого достаточно показать, что найдется по крайней мере один элемент $a \in \partial_X f(x_0)$, для которого

$$\langle a, s \rangle \geq f'(x_0; s) \quad \forall\ s \in \mathrm{Lin} X. \tag{3.3.11}$$

Пусть $s \in \mathrm{Lin} X$ и $s \neq 0_n$. Введем в рассмотрение в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ два множества:

$$Y_1 = \left\{ [x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in X,\ \mu > f(x) \right\},$$

$$Y_2 = \left\{ [x, \mu] \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x = x_0 + \alpha s,\ \mu = f(x_0) + \alpha f'(x_0; s),\ \alpha \geq 0 \right\}.$$

Первое из этих множеств Y_1 является незамкнутым надграфиком функции $f(x)$, а второе — луч, выпущенный их точки $[x_0, f(x_0)]$ в направлении $[s, f'(x_0; s)]$.

Множества Y_1 и Y_2 не пересекаются, тем более не пересекаются их относительные внутренности. Поэтому по теореме 2.4.4 они могут быть собственно отделимы. Это означает, что найдется вектор $[a, b] \in \mathbb{R}^{n+1}$, обе компоненты которого $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$ не равны нулю в совокупности, и такой, что

$$\langle [a, b], [x_1, \mu_1] \rangle \geq \langle [a, b], [x_2, \mu_2] \rangle \quad \forall\ [x_1, \mu_1] \in Y_1,\ \forall\ [x_2, \mu_2] \in Y_2, \tag{3.3.12}$$

при этом можно указать $[\bar{x}_1, \bar{\mu}_1] \in Y_1$ и $[\bar{x}_2, \bar{\mu}_2] \in Y_2$, для которых неравенство (3.3.12) строгое.

Так как величина μ во множестве Y_1 может принимать бесконечно большие значения, то вторая компонента b в векторе $[a, b]$ обязательно должна быть неотрицательной, чтобы не привести к нарушению (3.3.12). Если $b = 0$, то $a \neq 0_n$ и (3.3.12) переходит в неравенство

$$\langle a, x_1 \rangle \geq \langle a, x_2 \rangle, \tag{3.3.13}$$

справедливое для любых $x_1 \in X$ и любых

$$x_2 \in X_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x = x_0 + \alpha s, \ \alpha \geq 0\right\},$$

причем для некоторых $\bar{x}_1 \in X$ и $\bar{x}_2 \in X_2$ неравенство (3.3.13) строгое. Выполнение этих двух неравенств означает собственную отделимость множеств X и X_2. Последнее на основании теоремы 2.4.4 невозможно, поскольку из предположений $x_0 \in \mathrm{ri}X$ и $s \in \mathrm{Lin}X$ следует, что относительные внутренности множеств X и X_2 пересекаются. Поэтому обязательно $b > 0$ и можно положить $b = 1$.

Тогда неравенство (3.3.12) с учетом вида множеств Y_1 и Y_2 принимает вид

$$\langle a, x\rangle + \mu \geq \langle a, x_0 + \alpha s\rangle + f(x_0) + \alpha f'(x_0; s) \tag{3.3.14}$$

для всех $x \in X$, $\mu > f(x)$ и $\alpha \geq 0$. В силу непрерывности данное неравенство сохраняется и для $\mu = f(x)$, т.е. имеем

$$f(x) + \langle a, x\rangle \geq f(x_0) + \alpha f'(x_0; s) + \langle a, x_0 + \alpha s\rangle \quad \forall\, x \in X, \ \forall\, \alpha \geq 0. \tag{3.3.15}$$

Полагая в (3.3.15) $\alpha = 0$, приходим к неравенству

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle -a, x - x_0\rangle \quad \forall\, x \in X,$$

на основании которого заключаем, что $-a \in \partial_X f(x_0)$. Но если в (3.3.15) взять $x = x_0$ и $\alpha > 0$, то получаем $\langle -a, s\rangle \geq f'(x_0; s)$, т.е. данный вектор $-a \in \partial_X f(x_0)$ удовлетворяет условию (3.3.11). Таким образом, равенство (3.3.10) действительно имеет место. ■

Замечание. *Формулу (3.3.10) можно рассматривать как обобщение формулы (3.3.3) на случай негладких выпуклых функций.*

Определение 3.3.1 субдифференциала, по существу, нелокальное, так как основано на нелокальном определении (3.3.4) субградиента (требуется знать вид функции $f(x)$ на всем множестве X). Однако, как следует из теоремы 3.3.5, оно становится локальным в случае выпуклой функции $f(x)$. Тогда субдифференциал в точке x_0 полностью определяется поведением $f(x)$ в некоторой окрестности этой точки.

Как уже отмечалось, в случае, когда выпуклая функция дифференцируема, её градиент является субградиентом и, следовательно, содержится в субдифференциале. Следующее утверждение показывает, что на самом деле для дифференцируемых функций субдифференциал состоит только из одного элемента, а именно градиента.

Теорема 3.3.6. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и пусть $x_0 \in \mathrm{int}X$. Тогда*

1) если $f(x)$ дифференцируема в x_0, то субдифференциал в точке x_0 состоит только из градиента функции $f(x)$ в этой точке, т.е. $\partial_X f(x_0) = \{f_x(x_0)\}$;

2) если субдифференциал в точке x_0 состоит из единственного вектора a, то $f(x)$ дифференцируема в x_0 и $f_x(x_0) = a$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то согласно (3.3.5) $f_x(x_0) \in \partial_X f(x_0)$. Кроме того, из $x_0 \in \mathrm{int}X$ вытекает, что производная $f'(x_0; s)$ определена для любого направления $s \in \mathbb{R}^n$ и опять же в силу дифференцируемости $f(x)$ для нее справедливо представление $f'(x_0; s) = \langle f_x(x_0), s\rangle$.

Предположим теперь, что $a \in \partial_X f(x_0)$. Тогда на основании формулы (3.3.9) для любого $s \in \mathbb{R}^n$ должно выполняться неравенство: $\langle a, s\rangle \leq f'(x_0; s) = \langle f_x(x_0), s\rangle$. Отсюда, полагая $s = a - f_x(x_0)$, получаем: $\langle a - f_x(x_0), s\rangle = \|a - f_x(x_0)\|^2 \leq 0$, что возможно, только когда $a = f_x(x_0)$. Таким образом, субдифференциал состоит из единственного элемента, а именно градиента $f_x(x_0)$.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Пусть $U_\alpha = x_0 + \alpha B$, где $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| \leq 1\}$ — единичный шар с центром в начале координат. Поскольку $x_0 \in \mathrm{int}X$, можно указать $0 < \bar{\alpha} \leq 1$ такое, что $U_{\bar{\alpha}} \subset \mathrm{int}X \subseteq X$. Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(\alpha, s) = \frac{f(x_0 + \alpha s) - f(x_0)}{\alpha} - \langle a, s\rangle, \tag{3.3.16}$$

определенную при $s \in B$ и $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$. Так как a — единственный элемент в $\partial_X f(x_0)$, то в силу равенства (3.3.10): $\langle a, s\rangle = f'(x_0; s)$ для любого ненулевого s. Поэтому, как следует из теоремы 3.3.2, $\phi(\alpha, s) \geq 0$ и при фиксированном s существует предел функции $\phi(\alpha, s)$ при $\alpha \downarrow 0$, равный нулю. Более того, поскольку $x_0 + \alpha s \in \mathrm{int}X$ для $s \in B$ и $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$, функция $\phi(\alpha, s)$ непрерывна по s на компактном множестве B. В этом случае сходимость относительно α является равномерной по s. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать $0 < \hat{\alpha} \leq \bar{\alpha}$ такое, что $0 \leq \phi(\alpha, s) \leq \varepsilon$ для $0 \leq \alpha \leq \hat{\alpha}$ и всех $s \in B$.

Если взять $s \in B$, для которого $\|s\| \leq \hat{\alpha}^2$, и положить $\beta = \hat{\alpha}^{-1}\|s\|$, $h = \hat{\alpha}\|s\|^{-1}s$, то $0 < \beta \leq \hat{\alpha}$ и $\|h\| = \hat{\alpha} \leq 1$. Поэтому $0 \leq \phi(\beta, h) \leq \varepsilon$. Данное неравенство после подстановки β и h в (3.3.16) переписывается в виде

$$0 \leq \frac{f(x_0 + s) - f(x_0) - \langle a, s\rangle}{\|s\|} \leq \hat{\alpha}\varepsilon.$$

Отсюда следует существование предела

$$\lim_{s\to 0_n} \frac{f(x_0+s)-f(x_0)-\langle a,s\rangle}{\|s\|}=0,$$

означающего дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0. При этом существует и градиент $f_x(x_0)$, причем $f_x(x_0)=a$. ■

В общем случае, когда выпуклая функция $f(x)$ не дифференцируема, точкам из X может сопоставляться целое множество субградиентов, т.е. субдифферециальное отображение $x\to\partial_X f(x)\subset\mathbb{R}^n$. Данное отображение, аргументами которого являются точки $x\in X$, а значениями — множества $\partial_X f(x)$, относится к так называемым *точечно-множественным отображениям*, причем *выпуклозначным* точечно-множественным отображением, поскольку $\partial_X f(x)$ есть выпуклое множество для любого $x\in X$. Субдифференциальное отображение для выпуклых функций обладает рядом примечательных свойств.

Определение 3.3.2. *Пусть $x\in X\subseteq\mathbb{R}^n$. Точечно-множественное отображение $x\to F(x)\subset\mathbb{R}^n$, определенное на X, называется:*

1) замкнутым, если из условий $x_k\in X$, $y_k\in F(x_k)$ и $x_k\to x\in X$, $y_k\to y\in\mathbb{R}^n$, следует, что $y\in F(x)$;

2) монотонным, если для всех $x_1\in X$, $x_2\in X$ и всех $y_1\in F(x_1)$, $y_2\in F(x_2)$ выполняется неравенство: $\langle y_2-y_1,x_2-x_1\rangle\geq 0$;

3) локально ограниченным, если из условий $x_k\in X$, $y_k\in F(x_k)$ и $x_k\to x$, где $x\in X$, следует, что последовательность $\{y_k\}$ ограничена.

Теорема 3.3.7. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на открытом выпуклом множестве $X\subseteq\mathbb{R}^n$. Тогда субдифференциальное отображение $x\to\partial_X f(x)$ является замкнутым, монотонным и локально ограниченным.*

Доказательство. Убедимся сначала, что субдифференциальное отображение замкнуто. Предположим, что $x_k\in X$, $a_k\in\partial_X f(x_k)$ и $x_k\to x\in X$, $a_k\to a$. Имеем для всех $k\geq 1$:

$$f(y)-f(x_k)\geq\langle a_k,y-x_k\rangle\quad\forall\ y\in X. \tag{3.3.17}$$

Отсюда, так как выпуклая функция непрерывна в точке x, после перехода к пределу приходим к неравенству $f(y)-f(x)\geq\langle a,y-x\rangle$, справедливому для всех $y \in X$. Следовательно, $\partial_X f(x)$ — замкнутое отображение.

Пусть теперь $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $a_1 \in \partial_X f(x_1)$, $a_2 2 \in \partial_X f(x_2)$. Тогда согласно определению субградиента

$$f(x_1) - f(x_2) \geq \langle a_2, x_1 - x_2 \rangle, \quad f(x_2) - f(x_1) \geq \langle a_1, x_2 - x_1 \rangle.$$

Складывая эти два неравенства, получаем: $\langle a_2 - a_1, x_2 - x_1 \rangle \geq 0$, что означает монотонность отображения $\partial_X f(x)$.

Докажем, наконец, локальную ограниченность субдифференциального отображения. Возьмем последовательность точек $\{x_k\}$ из X такую, что $x_k \to x$. Пусть $a_k \in \partial_X f(x_k)$ выбраны произвольным образом. Тогда для этих x_k и a_k выполняется (3.3.17). Предположим, что последовательность $\{a_k\}$ не ограничена. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{a_{k_s}\}$, что $\|a_{k_s}\| \to \infty$. Будем считать, не умаляя общности, что для самой последовательности $\|a_k\|$ выполняется: $\|a_k\| \to \infty$ и, кроме того, $a_k/\|a_k\| \to \bar{a}$. Понятно, что $\|\bar{a}\| = 1$. Если разделить неравенства (3.3.17) на $\|a_k\|$, то после перехода к пределу получим: $\langle \bar{a}, y - x \rangle \leq 0$ для всех $y \in X$. Но множество X открытое, и, следовательно, точка $y = x + \alpha\bar{a} \in X$ для достаточно малых положительных α. Подставляя эту точку в предыдущее неравенство, приходим к выводу, что $\bar{a} = 0_n$. Мы пришли к противоречию, и, стало быть, последовательность $\{a_k\}$ ограничена. ■

Нетрудно видеть, что если $g(x)$ — выпуклая функция и $\partial_X g(x_0)$ — ее субдифференциал в точке $x_0 \in X$, то у функции $f(x) = \alpha g(x)$, где $\alpha > 0$, которая также выпукла, субдифференциал в этой точке равен $\partial_X f(x_0) = \alpha \partial_X g(x_0)$. Но и такие операции, как сложение двух выпуклых функций или взятие максимума от нескольких выпуклых функций, также сохраняют их выпуклость. Выясним, как можно вычислить субдифференциал результирующей функции при этих операциях, зная субдифференциалы исходных функций. Начнем с операции сложения двух функций.

Теорема 3.3.8. (Моро–Рокафеллара.) *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — выпуклые функции, определенные соответственно на множествах X_1 и X_2, и пусть $X_0 = riX_1 \cap riX_2 \neq \emptyset$. Тогда в любой точке $x_0 \in X_0$ субдифференциал функции $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ относительно множества $X = X_1 \cap X_2$ существует и равен*

$$\partial_X f(x_0) = \partial_{X_1} f_1(x_0) + \partial_{X_2} f_2(x_0). \tag{3.3.18}$$

Доказательство. Так как $x_0 \in \mathrm{ri} X_1$ и $x_2 \in \mathrm{ri} X_2$, то по теореме 3.3.3 существуют субдифференциалы $\partial_{X_1} f_1(x_0)$ и $\partial_{X_2} f_2(x_0)$. Пусть $a_1 \in \partial_{X_1} f_1(x_0)$, $a_2 \in \partial_{X_2} f_2(x_0)$ и $a = a_1 + a_2$. Тогда

$$\langle a_1, x - x_0 \rangle \le f_1(x) - f_1(x_0) \quad \forall\, x \in X_1,$$

$$\langle a_2, x - x_0 \rangle \le f_2(x) - f_2(x_0) \quad \forall\, x \in X_2.$$

Складывая эти два неравенства, получаем для $x \in X$

$$\langle a, x - x_0 \rangle \le f(x) - f(x_0).$$

Таким образом, $a \in \partial_X f(x_0)$, и, следовательно, справедливо включение $\partial_{X_1} f_1(x_0) + \partial_{X_2} f_2(x_0) \subseteq \partial_X f(x_0)$.

Докажем обратное включение. С целью упрощения записи предположим, что $x_0 = 0_n$ и $f_1(0_n) = f_2(0_n) = 0$. Этого несложно добиться, проведя сдвиг координат и добавив соответствующие константы к функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Пусть $a \in \partial_X f(0_n)$. Согласно определению субградиента, а также с учетом сделанных предположений $\langle a, x \rangle \le f_1(x) + f_2(x)$ для всех $x \in X$. Перепишем это неравенство в виде

$$f_1(x) - \langle a, x \rangle \ge -f_2(x) \quad \forall\, x \in X \tag{3.3.19}$$

и введем в рассмотрение два множества

$$Y_1 = \left\{ [x, \mu] \in X_1 \times \mathbb{R} : \ \mu > f_1(x) - \langle a, x \rangle \right\},$$

$$Y_2 = \left\{ [x, \mu] \in X_2 \times \mathbb{R} : \ \mu < -f_2(x) \right\}.$$

Из выпуклости функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и линейности функции $\langle a, x \rangle$ следует, что оба эти множества выпуклые. В силу (3.3.19) они не пересекаются. По теореме 2.4.4 их можно собственно отделить друг от друга, т.е. найдется ненулевой вектор $[b, \beta] \in \mathbb{R}^{n+1}$ такой, что

$$\langle [b, \beta], [x_1, \mu_1] \rangle \ge \langle [b, \beta], [x_2, \mu_2] \rangle \quad \forall\, [x_1, \mu_1] \in Y_1, \ [x_2, \mu_2] \in Y_2, \tag{3.3.20}$$

причем для некоторых $[\bar{x}_1, \bar{\mu}_1]$ и $[\bar{x}_2, \bar{\mu}_2]$ неравенство строгое.

Из-за того, что μ_1 в множестве Y_1 принимает бесконечно большие значения, вторая компонента β у вектора $[b, \beta]$ не может быть отрицательной, чтобы не нарушалось неравенство (3.3.20). Она не может равняться нулю, так как иначе вектор $b \in \mathbb{R}^n$ ненулевой и в силу 3.3.20 выполняется неравенство $\langle b, x_1 \rangle \ge \langle b, x_2 \rangle$ для всех $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, причем для некоторых $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ неравенство строгое. Это означает, что выпуклые множества X_1 и X_2 можно собственно отделить. Но это противоречит утверждению теоремы 2.4.4, поскольку согласно сделанным предположениям относительные внутренности множеств X_1 и X_2 пересекаются. Поэтому обязательно $\beta > 0$ и можно взять $\beta = 1$.

Если теперь в (3.3.20) положить $\mu_1 = f_1(x_1) - \langle a, x_1\rangle$, $\mu_2 = -f_2(x_2)$, то это неравенство примет вид

$$f_1(x_1) + \langle b - a, x_1\rangle \geq \langle b, x_2\rangle - f_2(x_2) \quad \forall\, x_1 \in X_1,\ x_2 \in X_2. \tag{3.3.21}$$

Беря в (3.3.21) $x_2 = x_0 = 0_n$, получаем: $f(x_1) \geq \langle a - b, x_1\rangle$ для любой точки $x_1 \in X_1$, что означает: $a - b \in \partial_{X_1} f_1(0_n)$. С другой стороны, беря в (3.3.21) $x_1 = x_0 = 0_n$, приходим к неравенству $\langle b, x_2\rangle \leq f(x_2)$, справедливому для всех $x_2 \in X_2$. Поэтому $b \in \partial_{X_2} f_2(0_n)$ и, стало быть,

$$a = (a - b) + b \in \partial_{X_1} f_1(0_n) + \partial_{X_2} f_2(0_n).$$

Сопоставляя данное включение с полученным ранее противоположным включением, убеждаемся в справедливости (3.3.18). ■

Замечание. *Как показывает анализ доказательства, результат теоремы сохраняется и для точек $x_0 \in X_1 \cap X_2$. Важно только, чтобы в этих точках существовали субдифференциалы $\partial_{X_1} f_1(x_0)$ и $\partial_{X_2} f_2(x_0)$.*

Рассмотрим теперь вопрос о вычислении субдифференциала функции, представимого в виде поточечного максимума нескольких выпуклых функций на множестве X, т.е. функции вида

$$f(x) = \max_{1\leq i\leq m} f_i(x).$$

Как следует из теоремы 3.1.2, функция $f(x)$ также выпукла на X.

Теорема 3.3.9. *Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ для всех $1 \leq i \leq m$ и пусть $x_0 \in X$. Тогда*

$$\partial_X f(x_0) = conv Y(x_0), \quad Y(x) = \cup_{i\in I(x)} \partial_X f_i(x), \tag{3.3.22}$$

где $I(x) = \{i \in [1 : m] :\ f_i(x) = f(x)\}$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что отображение $Y(x)$, входящее в выражение (3.3.22), является точечно-множественным. Кроме того, согласно теореме 3.3.4 все субдифференциалы $\partial_X f_i(x)$ при $i \in I(x)$ — компактные множества, поэтому и множество $Y(x)$ компактно для любого $x \in X$.

Обратимся к точке $x_0 \in X$. Всегда можно указать $\varepsilon > 0$ такое, что для всех $x \in \Delta_\varepsilon(x_0)$ выполняется включение: $I(x) \subseteq I(x_0)$. Действительно, если это не так, то найдется последовательность точек

$x_k \to x_0$, для которой существуют индексы $i_k \in I(x_k)$ такие, что $i_k \notin I(x_0)$. Так как общее число индексов конечно, то, не умаляя общности, можно считать, что все i_k равны одному и тому же индексу $\bar{i}_*$. Но тогда $f(x_k) = f_{i_*}(x_k)$, и, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем в силу непрерывности выпуклой функции $f_{i_*}(x)$ равенство: $f_{i_*}(x_0) = f(x_0)$. Следовательно, $i_* \in I(x_0)$, что противоречит сделанному предположению.

Покажем, что из этого свойства индексного множества $I(x)$ вытекает *замкнутость* отображения $Y(x)$ в точке x_0, т.е. из $x_k \in X$, $a_k \in Y(x_k)$ и $x_k \to x_0 \in X$, $a_k \to a$ следует, что $a \in Y(x_0)$. В самом деле, тогда $a_k \in \partial_X f_{i_k}(x_k)$, где $i_k \in I(x_k) \subseteq I(x_0)$ для x_k, достаточно близких к x_0. Опять же без ограничения общности можно считать, что индекс i_k здесь один и тот же, равный i_*. Иначе следует просто взять соответствующую подпоследовательность. Имеем

$$f_{i_*}(x) - f_{i_*}(x_k) \geq \langle a_k, x - x_k \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Отсюда после перехода к пределу при $k \to \infty$ получаем, что

$$f_{i_*}(x) - f_{i_*}(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Поэтому $a \in \partial_X f_{i_*}(x_0)$, и, поскольку $i_* \in I(x_0)$, приходим к выводу, что $a \in Y(x_0)$.

Принадлежность $a \in Y(x_0)$ означает принадлежность a некоторому субдифференциалу $\partial_X f_i(x_0)$, где $i \in I(x_0)$. Но тогда, учитывая неравенство $f_i(x) \leq f(x)$, получаем

$$f(x) - f(x_0) \geq f_i(x) - f_i(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Таким образом, $a \in \partial_X f(x_0)$ и, стало быть, $Y(x_0) \subseteq \partial_X f(x_0)$. Более того, поскольку $\partial_X f(x_0)$ — выпуклое множество, $\mathrm{conv} Y(x_0) \subseteq \partial_X f(x_0)$, причем в силу того, что все субдифференцилы $\partial_X f_i(x_0)$, $i \in I(x_0)$, являются компактными множествами, множество $\mathrm{conv} Y(x_0)$ также компактно. Отметим, что в силу произвольности точки $x_0 \in X$ можно утверждать также, что $\mathrm{conv} Y(x) \subseteq \partial_X f(x)$.

Покажем, что на самом деле вместо включения имеет место равенство $\mathrm{conv} Y(x_0) = \partial_X f(x_0)$. От противного, пусть это не так. Тогда найдется субградиент $a \in \partial_X f(x_0)$ такой, что $a \notin \mathrm{conv} Y(x_0)$. В этом случае по теореме 2.4.2 точка a может быть сильно отделена от множества $\mathrm{conv} Y(x_0)$, т.е. можно указать ненулевой вектор $b \in \mathbb{R}^n$ такой, что $\langle b, a \rangle > \langle b, y \rangle$ для всех $y \in \mathrm{conv} Y(x_0)$.

Пусть последовательность $\{\alpha_k\}$ такова, что $\alpha_k \downarrow 0$. Пусть, кроме того, $x_k = x_0 + \alpha_k b$. В силу того, что множество X открытое, $x_k \in X$

для достаточно больших k. Так как $Y(x_k) \subseteq \partial_X f(x_k)$, а отображение $\partial_X f(x)$ согласно теореме 3.3.7 локально ограниченное, то найдутся $y_k \in Y(x_k)$ такие, что последовательность $\{y_k\}$ ограничена. Предположим без потери общности, что $y_k \to \bar{y}$. Из замкнутости отображения $Y(x)$ следует, что $\bar{y} \in Y(x_0)$ и, стало быть, $\bar{y} \in \partial_X f(x_0)$. Но отображение $\partial_X f(x)$ опять же на основании теоремы 3.3.7 монотонное, поэтому $\langle y_k - a, x_k - x_0 \rangle \geq 0$. Переходя здесь к пределу, получаем: $\langle \bar{y} - a, b \rangle \geq 0$ или $\langle b, a \rangle \leq \langle b, \bar{y} \rangle$. Мы пришли к противоречию. Следовательно, не существует вектора $a \in \partial_X(x_0)$ такого, что $a \notin \mathrm{conv} Y(x_0)$. Отсюда заключаем, что справедлива формула (3.3.22). ■

Условный субдифференциал. Пусть $f(x)$ — функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, и пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — непустое множество. Под условным субдифференциалом функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ понимают следующее множество:

$$\partial_X f(x_0) = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \ f(x) - f(x_0) \geq \langle a, x - x_0 \rangle \quad \forall\, x \in X \right\}.$$

Таким образом, понятие условного субдифференциала совпадает с понятием обычного субдифференциала, если считать функцию $f(x)$, определенной только на множестве X.

В случае, когда функция $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ и X — выпуклое множество, следующая функция:

$$g(x) = f(x) + \delta(x|X), \tag{3.3.23}$$

также будет выпуклой функцией на $\mathbb{R}^n$, причем ее эффективная область совпадает с множеством X. Для функции (3.3.23) применима теорема Моро–Рокафеллара, и согласно вышесказанному получаем, что

$$\partial g(x) = \partial f(x) + \partial \delta(x|X) \quad \forall\, x \in X.$$

Условный субдифференциал функции $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ совпадает с субдифференциалом функции $g(x)$ в этой точке, т.е. справедливо следующее представление для условного субдифференциала:

$$\partial_X f(x_0) = \partial f(x) + \mathcal{N}(x_0|X), \tag{3.3.24}$$

где $\mathcal{N}(x_0|X)$ — нормальный конус к множеству X в точке x_0. Формула (3.3.24) позволяет достаточно просто вычислять условный субдифференциал для разных множеств X.

Если точка x_0 принадлежит внутренности множества X, то, поскольку в этом случае $\mathcal{N}(x_0|X) = \{0_n\}$, условный субдифференциал $\partial_X f(x_0)$ совпадает с обычным субдифференциалом $\partial f(x_0)$.

3.4. Сопряженные и полярные функции

Сопряженные и полярные функции являются весьма удобным средством получения разного рода оценок в методах оптимизации. Поэтому дадим определение таких функций и рассмотрим их основные свойства. Начнем с понятия сопряженной функции.

Определение 3.4.1. *Пусть $f(x)$ — функция, определенная на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$, и пусть $y \in \mathbb{R}^n$. Функция $f_X^*(y)$, задаваемая условием*

$$f_X^*(y) = \sup_{x \in X} \left[\langle x, y\rangle - f(x)\right], \tag{3.4.1}$$

называется сопряженной функцией к $f(x)$ на множестве X.

В тех случаях, когда множество X в определении (3.4.1) совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, будем писать просто $f^*(y)$ вместо $f_{R^n}^*(y)$.

Предположим, что сопряженная функция определена на некотором множестве $Y \subseteq \mathbb{R}^n$, т.е. принимает на нем конечные значения. Непосредственно из определения сопряженной функции получаем, что для любых $x \in X$ и $y \in Y$ имеет место неравенство

$$\langle x, y\rangle \le f(x) + f_X^*(y), \tag{3.4.2}$$

которое носит название *неравенства Юнга–Фенхеля.*

Если рассмотреть сопряженную функцию к функции, которая сама является сопряженной функцией, то приходим к понятию *второй сопряженной функции*:

$$f_Y^{**}(x) = \sup_{y \in Y}[\langle y, x\rangle - f_X^*(y)]. \tag{3.4.3}$$

Как и для функции (3.4.1), будем опускать в обозначении второй сопряженной функции нижний символ Y, если $Y = \mathbb{R}^n$.

Дадим геометрическую интерпретацию значений сопряженной функции $f_X^*(y)$. Пусть $y \in Y$ задано и фиксировано. Равенство (3.4.1) можно переписать в следующем виде:

$$\inf_{x \in X}[f(x) - \langle x, y\rangle] = -f_X^*(y),$$

из которого следует, что разница между значениями функции $f(x)$ и линейной функции $\langle x, y\rangle$, вычисленными в любой точке $x \in X$, всегда не меньше, чем $-f_X^*(y)$. Это означает, что для всех $x \in X$ имеет место оценка $f(x) - \langle x, y\rangle \ge -f_X^*(y)$. Таким образом, $-f_X^*(y)$ указывает на ту величину, на которую надо сдвинуть по вертикали вверх

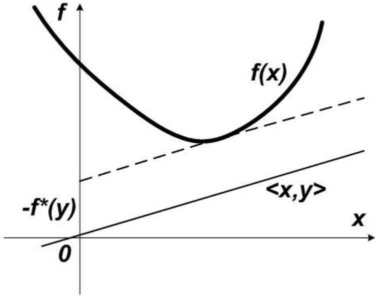

Рис. 3.7. Значение сопряженной функции в точке y

график линейной функции $\langle x, y\rangle$, чтобы он стал "подпирать" снизу график функции $f(x)$ на множестве X. Если значение функции $f_X^*(y)$ положительно, то это означает, что на самом деле график линейной функции $\langle x, y\rangle$ следует опустить (см. рис. 3.7).

Непосредственно из определения (3.4.1) следует, что

$$\inf_{x\in X} f(x) = -f^*(0_n). \tag{3.4.4}$$

Кроме того, опять же из определения (3.4.1) вытекает, что сопряженная функция $f_X^*(y)$ является *неубывающей функцией* относительно множества X, т.е. для любых подмножеств $X_1 \subset X_2 \subseteq X$ выполнено $f_{X_1}^*(y) \le f_{X_2}^*(y)$. Приведем некоторые другие свойства сопряженных функций.

Утверждение 3.4.1. *Для любой функции $f(x)$ и любого $X \subseteq \mathbb{R}^n$ сопряженная функция $f_X^*(y)$ выпукла на множестве Y, являющимся выпуклым множеством.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in Y$ и $0 \le \lambda \le 1$. Тогда

$$\begin{aligned} f_X^*(\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2) &= \sup_{x\in X}\left[\langle x, \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\rangle - f(x)\right] \le \\ &\le \lambda \sup_{x\in X}[\langle x, y_1\rangle - f(x)] + (1-\lambda)\sup_{x\in X}[\langle x, y_2\rangle - f(x)] = \\ &= \lambda f_X^*(y_1) + (1-\lambda) f_X^*(y_2). \end{aligned}$$

Таким образом, отрезок $[y_1, y_2]$ принадлежит области определения функции $f_X^*(y)$, и она на нем выпукла. ■

Следствие 3.4.1. *Вторая сопряженная функция к любой функции всегда выпукла на своем множестве определения.*

Рассмотрим теперь вопрос о том, как вторая сопряженная функция $f_Y^{**}(x)$ связана с исходной функцией $f(x)$.

Утверждение 3.4.2. *Для любой функции $f(x)$ и $x \in X$ справедливо неравенство*

$$f_Y^{**}(x) \leq f(x). \tag{3.4.5}$$

Доказательство. Перепишем неравенство Юнга–Фенхеля в следующем виде: $\langle y, x\rangle - f_X^*(y) \leq f(x)$. Это неравенство имеет место для любых $x \in X$ и $y \in Y$. Правая часть зависит только от x. Взяв супремум по $y \in Y$ от левой части, получим

$$f_Y^{**}(x) = \sup_{y \in Y}[\langle y, x\rangle - f_X^*(y)] \leq f(x).$$

■

Из утверждения 3.4.2 вытекает также, что независимо от множества Y множество X всегда входит в область определения второй сопряженной функции.

Утверждение 3.4.3. *Пусть функции $f(x)$, $f^*(y)$ и $f^{**}(x)$ определены на $\mathbb{R}^n$. Тогда $f^{**}(x) = f(x)$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ — выпуклая функция.*

Доказательство. Предположим сначала, что $f^{**}(x) = f(x)$. Тогда, согласно следствию к утверждению 3.4.1, функция $f^{**}(x)$ выпуклая и, следовательно, функция $f(x)$ также выпуклая.

Пусть теперь $f(x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$. Представим $f^{**}(x)$ в виде

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_{y \in R^n}\left[\langle y, x\rangle - f^*(y)\right] = \\ &= \sup_{y \in R^n} \inf_{x_1 \in R^n}\left[\langle y, x\rangle + f(x_1) - \langle y, x_1\rangle\right] = \\ &= \sup_{y \in R^n} \inf_{x_1 \in R^n}\left[f(x_1) + \langle y, x - x_1\rangle\right]. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Из выпуклости функции $f(x)$ следует, что

$$f(x_1) \geq f(x) + \langle a, x_1 - x\rangle, \qquad a \in \partial f(x).$$

Если подставить это неравенство в (3.4.6), то получим

$$f^{**}(x) \geq f(x) + \sup_{y \in R^n} \inf_{x_1 \in R^n} \langle a - y, x_1 - x\rangle.$$

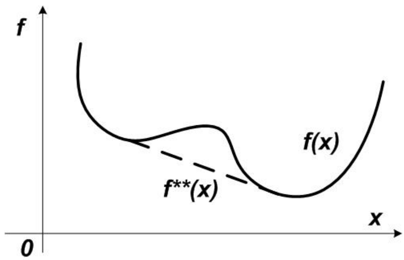

Рис. 3.8. Вторая сопряженная функция к невыпуклой функции

Так как

$$\inf_{x_1\in R^n}\langle a-y, x_1-x\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } y=a, \\ -\infty, & \text{если } y\neq a, \end{cases}$$

то

$$\sup_{y\in R^n}\ \inf_{x_1\in R^n}\langle a-y, x_1-x\rangle = 0.$$

Поэтому $f^{**}(x)\geq f(x)$. Отсюда, учитывая неравенство (3.4.5), приходим к требуемому результату: $f^{**}(x)=f(x)$. ■

Из утверждений 3.4.2 и 3.4.3 следует, что для произвольной функции $f(x)$, даже не обязательно выпуклой на $\mathbb{R}^n$, функция $f^{**}(x)$ есть максимально возможная по значениям выпуклая функция, аппроксимирующая $f(x)$ снизу (см. рис. 3.8). Если же $f(x)$ — выпуклая функция на $\mathbb{R}^n$, то в этом случае согласно утверждению 3.4.3 и формуле (3.4.3)

$$f(x)=\sup_{y\in Y}\left[\langle y,x\rangle - f^*(y)\right].$$

Таким образом, значение выпуклой функции $f(x)$ в каждой точке $x\in\mathbb{R}^n$ совпадает с верхней гранью значений семейства аффинных функций $l_y(x)=\langle y,x\rangle - f^*(y)$ в этой точке. Здесь $y\in Y$ выступает как параметр, определяющий конкретную аффинную функцию $l_y(x)$ из семейства. Данное свойство выпуклых функций может служить основой для их определения, а также позволяет строить обобщенные выпуклые функции.

Утверждение 3.4.4. *Пусть $f(x)\leq g(x)$ на X. Пусть, кроме того, функции $g_X^*(y)$, $f_X^*(y)$ определены на Y. Тогда $f_X^*(y)\geq g_X^*(y)$, $f_Y^{**}(x)\leq g_Y^{**}(x)$ для любых $x\in X$ и $y\in Y$.*

Доказательство. Согласно (3.4.1),

$$g_X^*(y) = \sup_{x \in X} [\langle x, y \rangle - g(x)] \le \sup_{x \in X} [\langle x, y \rangle - f(x)] = f_X^*(y).$$

Второе неравенство доказывается аналогично. ■

Рассмотрим задачу минимизации:

$$f_* = \min_{x \in R^n} f(x), \tag{3.4.7}$$

где $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если эта задача имеет решение, то согласно (3.4.4) выполняется равенство $f_* = -f^*(0_n)$. Более того, множество точек минимума, т.е. множество

$$X_* = \mathrm{Arg} \min_{x \in R^n} f(x),$$

также связано с сопряженной функцией $f^*(y)$, а именно справедлив следующий результат.

Утверждение 3.4.5. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и пусть существует решение задачи (3.4.7). Тогда $X_* = \partial f^*(0_n)$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если точка $x_* \in X_*$, то обязательно $x_* \in \partial f^*(0_n)$. Действительно, из неравенства Юнга–Фенхеля (3.4.2) следует, что

$$\langle x_*, y \rangle \le f(x_*) + f^*(y) \tag{3.4.8}$$

для любого $y \in \mathbb{R}^n$, принадлежащего области определения сопряженной функции $f^*(y)$. Но $f(x_*) = f_* = -f^*(0_n)$. Поэтому неравенство (3.4.8) может быть переписано, как

$$\langle x_*, y \rangle \le f^*(0_n + y) - f^*(0_n). \tag{3.4.9}$$

Таким образом, x_* есть субградиент функции $f^*(y)$ в нуле.

С другой стороны, предположим, что $x_* \in \partial f^*(0_n)$. Представим неравенство (3.4.9) как

$$\langle x_*, y \rangle - f^*(y) \le -f^*(0_n) = \langle x_*, 0_n \rangle - f^*(0_n). \tag{3.4.10}$$

Так как правая часть этого неравенства не зависит от y, то, используя определение второй сопряженной функции, получаем

$$f^{**}(x_*) = \sup_{y \in R^n} [\langle x_*, y \rangle - f^*(y)] \le -f^*(0_n).$$

На самом деле, как видно из (3.4.10), здесь супремум по y достигается, причем достигается он в точке 0_n. Поэтому имеет место равенство $f^{**}(x_*) = -f^*(0_n)$.

Учтем теперь, что в силу утверждения 3.4.3 вторая сопряженная функция к выпуклой функции совпадает с ней самой, откуда $f^{**}(x_*) = f(x_*)$. Учтем также, что $f_* = -f^*(0_n)$. Тогда справедливо равенство $f(x_*) = f_*$, на основании которого заключаем, что $x_* \in X_*$. ■

Приведем простейшие *примеры сопряженных функций.* Пусть x и y — неотрицательные скаляры, $X = Y = \mathbb{R}$ и $p > 1$. Тогда следующие две функции представляют собой пару выпуклых сопряженных друг к другу функций:

$$f(x) = \frac{|x|^p}{p}, \qquad f^*(y) = \frac{|y|^{p_*}}{p_*}. \tag{3.4.11}$$

Здесь $p_* > 1$ и $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$.

Покажем, что действительно имеет место (3.4.11). Обозначим

$$g(x, y) = xy - \frac{|x|^p}{p}, \quad x(y) = \arg\max_{x \in R} g(x, y).$$

Тогда $f^*(y) = g(x(y), y)$. Нетрудно видеть, что $x(0) = 0_n$ и $f^*(0) = 0$. Предположим далее, что $y > 0$. В этом случае, поскольку значение произведения xy при положительных x всегда превышает значение этого произведения при отрицательных x, обязательно $x(y) > 0$. Отсюда следует, что $g(x, y) = g_+(x, y) = xy - x^p/p$ при этих x и y. Дифференцируя функцию $g_+(x, y)$ по x и приравнивая производную нулю, получаем, что

$$y - x^{p-1} = 0, \quad x(y) = y^{\frac{1}{p-1}} > 0$$

и, следовательно,

$$f^*(y) = yy^{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}y^{\frac{p}{p-1}} = (1 - \frac{1}{p})y^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p_*}y^{p_*}. \tag{3.4.12}$$

Аналогично, из этих же соображений следует, что $x(y) < 0$, когда $y < 0$. Тогда $g(x, y) = g_-(x, y) = xy - (-x)^p/p$ при x и y отрицательных. Теперь после дифференцирования функции $g_-(x, y)$ по x и приравнивания производной нулю получаем

$$y + (-x)^{p-1} = 0, \quad x(y) = -(-y)^{\frac{1}{p-1}} < 0.$$

Отсюда

$$f^*(y) = -y(-y)^{\frac{1}{p-1}} - \frac{1}{p}(-y)^{\frac{p}{p-1}} = (1 - \frac{1}{p})(-y)^{\frac{p}{p-1}} = \frac{1}{p_*}(-y)^{p_*}. \tag{3.4.13}$$

Объединяя (3.4.12) и (3.4.13), приходим к (3.4.11).

Другая пара выпуклых сопряженных друг к другу функций получается, если взять $p < 1$, $p \neq 0$ и $X = \mathbb{R}_{--}$, $Y = \mathbb{R}_{++}$:

$$f(x) = -\frac{|x|^p}{p}, \qquad f^*_{R_{--}}(y) = -\frac{y^{p_*}}{p_*}. \tag{3.4.14}$$

Здесь, как и в случае (3.4.11), $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$. Таким образом, $p_* < 1$.

Пусть теперь $x \in \mathbb{R}^n$. Обратимся к параметрическому семейству функций

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x^i|^p \right)^{1/p}, \quad p \neq 0. \tag{3.4.15}$$

Если $p \geq 1$, то функция (3.4.15) является l_p-нормой в $\mathbb{R}^n$ (нормой Гельдера). При $p < 1$ она перестает быть нормой, однако для единообразия мы сохраним это обозначение и для данных p. Кроме того, доопределим функцию (3.4.15) в случае $p = 0$, положив

$$\|x\|_0 \quad = \quad \sqrt{n} \left(\prod_{i=1}^{n} |x^i| \right)^{1/n}.$$

При $p < 1$ считается, что $\|x\|_p = 0$, если $x^i = 0$ хотя бы для одного индекса $i \in [1 : n]$.

Возьмем $p > 1$. Используя покомпонентно соотношение (3.4.11), приходим к паре сопряженных между собой функций:

$$f(x) = \frac{1}{p} \|x\|_p^p, \qquad f^*(y) = \frac{1}{p_*} \|y\|_{p_*}^{p_*}, \tag{3.4.16}$$

определенных на $X = Y = \mathbb{R}^n$. Неравенство Юнга–Фенхеля для данной пары функций примет вид

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{p_*} \|y\|_{p_*}^{p_*}, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.17}$$

Отметим, что $f(x)$ и $f^*(y)$ совпадают, если $p = p_* = 2$. Другими словами, квадратичная функция $f(x) = \langle x, x \rangle / 2$ является *самосопряженной.*

Можно рассмотреть также случай, когда $p < 1$, $p \neq 0$. Пусть $x \in X = \mathbb{R}^n_{--}$, $y \in Y = \mathbb{R}^n_{++}$. Тогда, применяя покомпонентно соотношения (3.4.14), получаем еще одну пару сопряженных функций:

$$f(x) = -\frac{1}{p} \|x\|_p^p, \qquad f^*_{R^n_{--}}(y) = -\frac{1}{p_*} \|y\|_{p_*}^{p_*}. \tag{3.4.18}$$

Неравенство Юнга–Фенхеля для функций (3.4.18) преобразуется к виду

$$\langle x, y\rangle \le -\frac{1}{p}\|x\|_p^p - \frac{1}{p_*}\|y\|_{p_*}^{p_*}, \quad x \in \mathbb{R}^n_{--}, \quad y \in \mathbb{R}^n_{++}.$$

Отсюда, взяв $x \in \mathbb{R}^n_{++}$, получаем

$$\langle x, y\rangle \ge \frac{1}{p}\|x\|_p^p + \frac{1}{p_*}\|y\|_{p_*}^{p_*}, \qquad x \in \mathbb{R}^n_{++}, \quad y \in \mathbb{R}^n_{++}. \qquad (3.4.19)$$

Таким образом, неравенство (3.4.17) при $p < 1$ переходит в обратное и оказывается справедливым только при $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$.

В частном случае, когда $p = 0$, можно положить

$$f(x) = -\ln\|x\|_0 - 0.5, \quad x \in X = \mathbb{R}^n_{--}. \qquad (3.4.20)$$

Сопряженной к данной функции, как несложно проверить, будет функция

$$f^*_{R^n_{--}}(y) = -\ln\|y\|_0 - 0.5, \quad y \in Y = \mathbb{R}^n_{++}. \qquad (3.4.21)$$

Для нее выполняется: $f^*_{R^n_{--}}(y) = f(-y)$, т.е. опять имеет место некоторая самосопряженность. Аналогом (3.4.19) для пары функций (3.4.20), (3.4.21) является следующее неравенство:

$$\langle x, y\rangle \ge \ln\|x\|_0 + \ln\|y\|_0 + 1.$$

Как и (3.4.19), оно справедливо для всех $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$.

Рассмотрим еще один важный пример сопряженной функции, связанный с индикаторной функцией множества $X \subset \mathbb{R}^n$:

$$\delta(x|X) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ +\infty, & x \notin X. \end{cases} \qquad (3.4.22)$$

Тогда

$$f^*(y) = \sup_{x \in R^n}\{\langle x, y\rangle - \delta(x|X)\} = \sup_{x \in X}\langle x, y\rangle.$$

Данная функция носит название *опорной функции* множества X и обозначается $\delta^*(y|X)$. Как и любая сопряженная функция, она всегда выпукла. Если множество X ограничено, то $\delta^*(y|X)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и принимает конечные значения. Как следует из определения, сопряженная функция к функции $f(x)$ на множестве X есть, по существу, опорная функция к ее надграфику, а именно

$$f^*_X(y) = \delta^*([y, 1] \mid \mathrm{epi} f).$$

Опорная функция выпуклого ограниченного множества всегда является положительно однородной выпуклой функцией, равной нулю в начале координат, т.е. обладает свойствами: $f(0) = 0$ и $f(cx) = cf(x)$ для $c > 0$. Более того, множество всех положительно однородных выпуклых функций на $\mathbb{R}^n$ совпадает с множеством опорных функций непустых замкнутых выпуклых множеств. Другими словами, выполняется равенство

$$f(x) = \delta^*(x|C^0) \tag{3.4.23}$$

для некоторого выпуклого множества C^0. Можно получить выражение для множества C^0 с помощью функции, сопряженной к $f(x)$. Действительно, сопряженная функция к $f(x)$ совпадает с индикаторной функцией множества C^0, т.е. $f^*(y) = \delta(y|C^0)$. Поэтому

$$C^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : f^*(y) \le 0\}.$$

Отсюда, с учетом определения сопряженной функции, получаем

$$C^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \le f(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n\}. \tag{3.4.24}$$

Для положительно однородной функции $f(x)$ определение (3.4.24) множества C^0 можно переписать в виде

$$C^0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \le 1 \quad \forall\, x \in C\}, \tag{3.4.25}$$

где

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \le 1\}. \tag{3.4.26}$$

Множество C^0 называется *полярой* множества C.

Двойственные операции. Как было отмечено, операции сложения двух выпуклых функций и операция умножения выпуклой функции на неотрицательную константу оставляют их выпуклыми. Укажем еще две операции над выпуклыми функциями, которые также не нарушают их выпуклости.

Умножение справа на константу. Умножение справа выпуклой функции $f(x)$ на положительную константу $\alpha > 0$ определяется следующим образом:

$$(f\alpha)(x) := \alpha f\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{3.4.27}$$

Покажем, что $(f\alpha)(x)$ — выпуклая функция. Действительно, пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на $\mathbb{R}^n$, и пусть $x_1 \in \mathbb{R}^n$,

$x_2 \in \mathbb{R}^n$. Тогда для любых $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, таких, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, выполняется

$$(f\alpha)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha f\left(\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\alpha}\right) \leq$$
$$\leq \alpha\left[\lambda_1 f(\frac{x_1}{\alpha}) + \lambda_2 f(\frac{x_2}{\alpha})\right] = \lambda_1 (f\alpha)(x_1) + \lambda_2 (f\alpha)(x_2).$$

Отсюда следует, что $(f\alpha)(x)$ также является выпуклой функцией.

Инфимальная конволюция. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(x) = \inf_{x_1+x_2=x} \left[f_1(x_1) + f_2(x_2)\right], \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.4.28}$$

Функция $f(x)$ называется *инфимальной конволюцией* пары функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и обозначается $(f_1 \oplus f_2)(x)$ (используются также другие обозначения, например, $(f_1 \Box f_2)(x)$). Убедимся, что определенная таким образом функция является выпуклой. Возьмем произвольные $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$ и любые $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, такие, что $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Положим $x_\lambda = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$. Тогда имеем

$$(f_1 \oplus f_2)(x_\lambda) = \inf_{y_1+y_2=x_\lambda} \{f_1(y_1) + f_2(y_2)\} =$$

$$= \inf_{\substack{\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = y_1 \\ \lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4 = y_2 \\ y_1 + y_2 = x_\lambda}} \{f_1(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + f_2(\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4)\} =$$
$$= \inf_{\substack{z_1 + z_3 = x_1 \\ z_2 + z_4 = x_2}} \{f_1(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + f_2(\lambda_1 z_3 + \lambda_2 z_4)\} \leq$$
$$\leq \inf_{\substack{z_1 + z_3 = x_1 \\ z_2 + z_4 = x_2}} \{\lambda_1 f_1(z_1) + \lambda_2 f_1(z_2) + \lambda_1 f_2(z_3) + \lambda_2 f_2(z_4)\} =$$
$$= \lambda_1 \inf_{z_1+z_3=x_1} \{f_1(z_1) + f_2(z_3)\} + \lambda_2 \inf_{z_2+z_4=x_2} \{f_1(z_2) + f_2(z_4)\} =$$
$$= \lambda_1 (f_1 \oplus f_2)(x_1) + \lambda_2 (f_1 \oplus f_2)(x_2).$$

Таким образом, инфимальная конволюция двух выпуклых функций есть выпуклая функция.

Рассмотрим инфимальную конволюцию произвольной выпуклой на $\mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ и функции $g(x) = \delta(x|a)$, где $\delta(x|a)$ — индикаторная функция точки $a \in \mathbb{R}^n$. Согласно (3.4.28) и (3.4.22), она равна

$$(f \oplus g)(x) = \inf_{y \in R^n} [f(x-y) + \delta(y|a)] = f(x-a).$$

Итак, при инфимальной конволюции индикаторной функции $\delta(x|a)$ с функцией $f(x)$ график последней сдвигается на вектор a в пространстве переменных.

Возьмем теперь в качестве $f(x)$ евклидову норму, а в качестве $g(x)$ — индикаторную функцию выпуклого множества X. Тогда получим

$$(f \oplus g)(x) = \inf_{y \in R^n} \{\|x - y\| + \delta(y|X)\} = \inf_{y \in X} \|x - y\| = \rho(x|X),$$

где $\rho(x|X)$ — расстояние от точки x до множества X.

Операция инфимальной конволюции двух выпуклых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствует тому, что по этим двум функциям строится новая функция $(f_1 \oplus f_2)(x)$, у которой надграфик есть сумма надграфиков функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Этот надграфик, будучи суммой двух выпуклых множеств, есть выпуклое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$.

При операции умножения справа выпуклой функции $f(x)$ на положительную константу $\alpha > 0$ надграфик результирующей функции $(f\alpha)(x)$ получается путем умножения на константу α надграфика функции $f(x)$.

Операция умножения справа функции на константу $\alpha > 0$ и операция инфимальной конволюции с точки зрения построения сопряженных функций являются двойственными к обычным операциям умножения функций на константу и их сложения.

Утверждение 3.4.6. *Для любой выпуклой на $\mathbb{R}^n$ функции $f(x)$ и константы $\alpha > 0$ имеет место равенство*

$$(\alpha f)^*(y) = (f^*\alpha)(y). \tag{3.4.29}$$

Доказательство. Имеем, согласно определениям (3.4.1) и (3.4.27),

$$(\alpha f)^*(y) = \sup_{x \in R^n} [\langle x, y\rangle - \alpha f(x)] = \sup_{x \in R^n} \alpha \left[\left\langle x, \frac{y}{\alpha}\right\rangle - f(x)\right] = \alpha f^*(\frac{y}{\alpha}).$$

Отсюда делаем вывод, что выполнено (3.4.29). ■

Утверждение 3.4.7. *Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$. Тогда*

$$(f_1 + f_2)^*(y) = (f_1^* \oplus f_2^*)(y). \tag{3.4.30}$$

Доказательство. По определению сопряженной функции

$$
\begin{aligned}
(f_1 \oplus f_2)^*(y) = \sup_{x \in R^n} & \left\{ \langle x, y\rangle - \inf_{x_1+x_2=x} [f_1(x_1) + f_2(x_2)] \right\} = \\
&= \sup_{x \in R^n} \sup_{x_1+x_2=x} [\langle x, y\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)] = \\
&= \sup_{x_1 \in R^n,\ x_2 \in R^n} [\langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle - f_1(x_1) - f_2(x_2)] = \\
&= \sup_{x_1 \in R^n} [\langle x_1, y\rangle - f_1(x_1)] + \sup_{x_2 \in R^n} [\langle x_2, y\rangle - f_1(x_2)] = \\
&= f_1^*(y) + f_2^*(y).
\end{aligned}
$$

Отсюда, используя утверждение 3.4.3, заключаем, что

$$
(f_1^* \oplus f_2^*)^*(x) = f_1^{**}(x) + f_2^{**}(x) = f_1(x) + f_2(x).
$$

Поэтому, применяя к обеим частям этого равенства операцию сопряжения, приходим к выводу, что

$$
(f_1 + f_2)^*(y) = (f_1^* \oplus f_2^*)^{**}(y) = (f_1^* \oplus f_2^*)(y),
$$

т.е. выполнено (3.4.30). ■

Пусть на $\mathbb{R}^n$ задана выпуклая функция $f(x)$. Рассмотрим функцию $f_1(x) = f(x_+)$. Здесь $x_+ = [x_+^1, \ldots, x_+^n]$ — «положительная срезка» вектора $x \in \mathbb{R}^n$, т.е. вектор с компонентами $x_+^i = \max[0, x^i]$, $1 \le i \le n$. Из утверждения 3.4.4 вытекает, что если $f(x) \ge f_1(x)$ всюду на $\mathbb{R}^n$, то для сопряженных функций имеет место обратное неравенство $f^*(y) \le f_1^*(y)$. Покажем, что для $y \in \mathbb{R}_+^n$ на самом деле имеет место совпадение значений сопряженных функций.

Утверждение 3.4.8. *Пусть функции $f(x)$ и $f_1(x)$ таковы, что $f(x) \ge f_1(x) = f(x_+)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $y \in \mathbb{R}_+^n$, то*

$$
f_1^*(y) = f^*(y). \tag{3.4.31}
$$

Доказательство. Как уже отмечалось, из $f(x) \ge f_1(x)$ следует $f_1^*(y) \ge f^*(y)$. С другой стороны, на основании определения (3.4.1) имеем для $y \in \mathbb{R}_+^n$:

$$
\begin{aligned}
f_1^*(y) &= \sup_{x \in R^n} [\langle x, y\rangle - f_1(x)] = \sup_{x \in R^n} [\langle x, y\rangle - f(x_+)] \le \\
&\le \sup_{x \in R^n} [\langle x_+, y\rangle - f(x_+)] = \sup_{x \in R_+^n} [\langle x, y\rangle - f(x)] \le \\
&\le \sup_{x \in R^n} [\langle x, y\rangle - f(x)] = f^*(y).
\end{aligned} \tag{3.4.32}
$$

Сравнивая (3.4.32) с предыдущим неравенством $f_1^*(y) \geq f^*(y)$, приходим к (3.4.31). ■

Используя утверждение 3.4.8, из (3.4.16) получаем, что

$$f(x) = \frac{1}{p}\|x_+\|_p^p, \qquad f^*(y) = \frac{1}{p_*}\|y\|_{p_*}^{p_*}.$$

Здесь $1 < p < \infty$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$.

Полярные функции. Неравенство Юнга–Фенхеля дает аддитивную оценку сверху на скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ через сумму значений самой функции $f(x)$ и сопряженной к ней. Хотелось бы получить также оценку мультипликативного вида. Это можно сделать, если воспользоваться понятием *полярной функции*.

Заметим, что определение сопряженной функции можно переписать как

$$f_X^*(y) = \inf\left\{\mu \in \mathbb{R} : \; \langle x, y\rangle \leq \mu + f(x) \quad \forall\, x \in X\right\}.$$

Видоизменим теперь это определение таким образом, чтобы оно приводило к мультипликативной оценке сверху.

Определение 3.4.2. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $f(x) \geq 0$ всюду на X. Тогда функция*

$$f_X^0(y) = \inf\left\{\mu \geq 0 : \; \langle x, y\rangle \leq \mu f(x) \; \forall\, x \in X\right\} \tag{3.4.33}$$

называется полярной к функции $f(x)$ на X. При этом, как это обычно принято, считаем, что инфимум по пустому множеству равен $+\infty$.

В случае, когда множество X содержит начало координат и функция $f(x)$ всюду положительна на X, кроме начала координат, определение (3.4.33) можно переписать как

$$f_X^0(y) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\langle x, y\rangle}{f(x)}. \tag{3.4.34}$$

Пусть функция $f_X^0(y)$ принимает конечные значения на множестве $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. Непосредственно из определения (3.4.33) следует *неравенство Минковского–Малера*:

$$\langle x, y\rangle \leq f(x) f_X^0(y), \qquad x \in X, \quad y \in Y. \tag{3.4.35}$$

Предположим, что множество Y выпуклое. Тогда, как несложно проверить, полярная функция $f_X^0(y)$ будет выпуклой на Y.

Зная $f_X^0(y)$ и считая, что $f_X^0(y) \geq 0$ при $y \in Y$, можно определить *вторую полярную функцию* к $f(x)$:

$$f_Y^{00}(x) = \inf\left\{\mu \geq 0 : \langle x, y\rangle \leq \mu f_X^0(y) \ \forall\, y \in Y\right\}.$$

Непосредственно из неравенства Минковского–Малера следует, что если $x \in X$, то $f_Y^{00}(x) \leq f(x)$, т.е. вторая полярная функция $f_Y^{00}(x)$ не превосходит саму функцию $f(x)$ на X.

Ниже, в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ или $Y = \mathbb{R}^n$, будем писать просто $f^0(y)$ и $f^{00}(x)$ вместо соответственно $f_{R^n}^0(y)$ или $f_{R^n}^{00}(x)$.

Наиболее интересные примеры полярных функций могут быть получены в том случае, когда $f(x)$ является неотрицательной положительно однородной выпуклой функцией на $\mathbb{R}^n$, равной нулю в начале координат. Такие функции называются *калибрами*, или *функциями Минковского*. Любой калибр $f(x)$ может быть задан с помощью непустого выпуклого множества C, содержащего начало координат, а именно:

$$f(x) = \gamma(x|C) = \inf\{\mu \geq 0 : \ x \in \mu C\}. \tag{3.4.36}$$

Функцию $\gamma(x|C)$ принято называть *калибровочной функцией* множества C. Верно и обратное: по любому калибру $f(x)$ можно определить множество C, например, следующим образом:

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq 1\}. \tag{3.4.37}$$

Тогда калибр совпадает с калибровочной функцией этого множества.

Предположим теперь, что калибр $f(x)$ положителен всюду, кроме начала координат. В этом случае полярная функция $f^0(y)$ будет калибром, положительным всюду, кроме начала координат. Вторая полярная функция $f^{00}(x)$, как полярная к калибру, также является калибром. Для такой функции $f(x)$ вместо неравенства $f^{00}(x) \leq f(x)$ выполняется равенство

$$f^{00}(x) = f(x). \tag{3.4.38}$$

Действительно, калибр полностью определяется замкнутым выпуклым множеством C через посредство калибровочной функции $\gamma(x|C)$ вида (3.4.36). Пусть множество C имеет вид (3.4.37). Обозначим дополнительно

$$C_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : f^0(y) \leq 1\}, \quad C_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : f^{00}(x) \leq 1\}.$$

Равенство (3.4.38) имеет место в том и только в том случае, если совпадают множества C и C_2. Убедимся в этом.

Определение функции, полярной к калибру, можно переписать в виде

$$f^0(y) = \sup_{x \in X_1} \langle x, y \rangle, \tag{3.4.39}$$

где $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = 1\}$. Следовательно, для выполнения включения $y \in C_1$ необходимо и достаточно, чтобы $\langle x, y \rangle \leq 1$ для всех $x \in X_1$. Так как множество C есть выпуклая оболочка множества X_1, это неравенство должно выполняться и для всех $x \in C$. Таким образом,

$$C_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \quad \forall\, x \in C\}$$

и, согласно (3.4.25), множество C_1 есть не что иное, как поляра C^0 множества C. Отсюда делаем вывод, что

$$f^0(y) = \gamma(y|C^0). \tag{3.4.40}$$

Кроме того, вновь используя тот факт, что C есть выпуклая оболочка множества X_1, из (3.4.39) получаем

$$f^0(y) = \sup_{x \in X_1} \langle x, y \rangle = \sup_{x \in C} \langle x, y \rangle = \delta^*(y|C).$$

Отсюда и из (3.4.40) приходим к равенству $\gamma(y|C^0) = \delta^*(y|C)$.

Аналогичная двойственная связь имеет место и для калибровочной функции множества C. В силу (3.4.23) и (3.4.26) калибровочная функция множества C является одновременно опорной функцией поляры C^0 множества C, т.е.

$$\gamma(y|C) = \delta^*(y|C^0). \tag{3.4.41}$$

Воспользуемся этим свойством применительно к калибровочной функции $\gamma(y|C)$ и найдем поляру C^{00} к множеству C^0. Имеем на основании (3.4.25) и (3.4.41):

$$\begin{aligned} C^{00} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall\, y \in C^0\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \delta^*(x|C^0) \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \gamma(x|C) \leq 1\}. \end{aligned}$$

Таким образом, $C_2 = C^{00} = C$.

Важным частным случаем калибров являются нормы в векторном пространстве. Фактически норма есть симметричный и положительный всюду, кроме начала координат, калибр. Возьмем в качестве $f(x)$ p-ю гельдеровскую норму, задаваемую формулой (3.4.15) при $p > 1$. Проводя соответствующие вычисления, получаем, что

$$f(x) = \|x\|_p, \qquad f^0(y) = \|y\|_{p_*},$$

где $p^{-1} + p_*^{-1} = 1$ при $p > 1$ и $p_* = +\infty$, если $p = 1$. Неравенство Минковского–Малера переходит в неравенство Гельдера:

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|_p \|y\|_{p_*}.$$

Для полярных функций также имеет место результат, аналогичный утверждению 3.4.8 для сопряженных функций.

Утверждение 3.4.9. *Пусть неотрицательная функция $f(x)$ и функция $f_1(x)$ таковы, что $f(x) \geq f_1(x) = f(x_+)$ для любых $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда если $y \in \mathbb{R}^n_+$, то $f_1^0(y) = f^0(y)$.*

Доказательство. Так как функция $f(x)$ является неотрицательной на $\mathbb{R}^n$, то функция $f_1(x) = f(x_+)$ также неотрицательна на $\mathbb{R}^n$. Поэтому из неравенства $f(x) \geq f_1(x)$, в силу определения (3.4.34) полярной функции, получаем, что $f_1^0(y) \geq f^0(y)$.

Покажем, что обратное неравенство $f_1^0(y) \leq f^0(y)$ также имеет место. Действительно, поскольку, по предположению, $y \in \mathbb{R}^n_+$, то

$$f_1^0(y) = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle x, y\rangle}{f_1(x)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\langle x, y\rangle}{f(x_+)} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\langle x_+, y\rangle}{f(x_+)} =$$
$$= \sup_{x\in R^n_+\setminus\{0\}} \frac{\langle x, y\rangle}{f(x)} \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\langle x, y\rangle}{f(x)} = f^0(y).$$

Сравнивая это неравенство с предыдущим противоположным неравенством, приходим к выводу, что $f_1^0(y) = f^0(y)$. ■

Пусть $y \in \mathbb{R}^n_+$ и $p \geq 1$. Тогда с помощью утверждения 3.4.9 получаем

$$f(x) = \|x_+\|_p, \qquad f^0(y) = \|y\|_{p_*}. \tag{3.4.42}$$

3.5. Рецессивные конусы и функции

Выпуклые замкнутые неограниченные множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ обладают замечательным свойством, характеризующим их поведение «на бесконечности». Дело в том, что в случае неограниченности множества X какую бы точку $x \in X$ ни взять, всегда можно указать луч

$$l_s = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \lambda s, \ \lambda \geq 0\},$$

задаваемый ненулевым направлением $s \in \mathbb{R}^n$, для которого $x + l_s \in \in X$, т.е. этот луч, выпущенный из точки x, полностью принадлежит

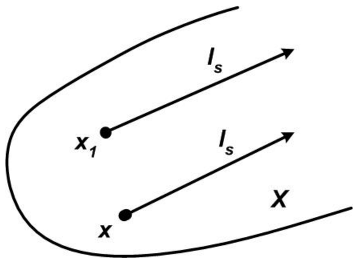

Рис. 3.9. К понятию рецессивного конуса

множеству X. Более того, беря другую точку $x_1 \in X$ и выпуская из нее тот же самый луч l_s, опять получаем, что он не выходит за пределы множества X (см. рис. 3.9). Дадим строгое обоснование этих фактов.

Утверждение 3.5.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое неограниченное множество и пусть x — произвольная точка из X. Тогда найдется по крайней мере один луч l_s такой, что $x + l_s \in X$.*

Доказательство. Так как X — неограниченное множество, то можно указать последовательность точек $\{x_k\}$ такую, что каждая точка $x_k \in X$ и при этом $\|x_k\| \to \infty$, когда $k \to \infty$. Возьмем задаваемые точками x_k единичные направления

$$s_k = \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|}.$$

Поскольку все s_k принадлежат единичной сфере, то у последовательности $\{s_k\}$ существуют предельные точки. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{s_k\}$ является сходящейся. Пусть $\bar{s} = \lim_{k\to\infty} s_k$.

Убедимся, что $x + l_{\bar{s}} \in X$. Действительно, возьмем произвольную точку $y \in x + l_{\bar{s}}$. Ее можно записать как $y = x + \lambda\bar{s}$ для некоторого $\lambda \geq 0$. Но тогда точки $y_k = x + \lambda s_k$ принадлежат лучам, выпущенным из точки x и проходящим через точки x_k. Более того, для достаточно больших номеров k они принадлежат отрезкам, соединяющим точку x и точки x_k. Следовательно, в силу выпуклости множества X эти точки y_k также принадлежат X. Так как множество X замкнуто, то предельная точка $\bar{y} = \lim_{k\to\infty} y_k = x + \lambda\bar{s}$ принадлежит X. Отсюда в силу фактической произвольности λ делаем вывод, что $x + l_{\bar{s}} \in X$. ■

Утверждение 3.5.2. *Пусть X — выпуклое замкнутое неограниченное множество и пусть $x + l_s \in X$ для некоторой точки $x \in X$*

и некоторого луча l_s, задаваемых ненулевым направлением s. Тогда $y + l_s \in X$ для любой другой точки $y \in X$.

Доказательство. Возьмем произвольное $\lambda \geq 0$ и покажем, что $y + \lambda s \in X$. Пусть $\alpha_k > 1$ для всех $k \geq 1$ и $\alpha_k \to \infty$. Рассмотрим точки $x_k = x + \alpha_k \lambda s$. Так как $x + l_s \in X$, то $x_k \in X$. Если взять точки

$$y_k = \left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) y + \frac{1}{\alpha_k} x_k,$$

то в силу выпуклости множества X все они принадлежат X. Но y_k можно представить в виде

$$y_k = \left(1 - \frac{1}{\alpha_k}\right) y + \frac{1}{\alpha_k} x + \lambda s,$$

из которого следует, что $y_k \to y + \lambda s$ при $k \to \infty$. Так как $y_k \in X$ и множество X замкнуто, отсюда делаем вывод, что $y + \lambda s \in X$. Поскольку λ взято произвольным, это означает, что $y + l_s \in X$. ■

Определение 3.5.1. *Ненулевое направление $s \in \mathbb{R}^n$ называется рецессивным относительно выпуклого множества X, если $x + l_s \in X$ для всех точек $x \in X$.*

Совокупность всех рецессивных относительно выпуклого множества X направлений, пополненная началом координат, называется *рецессивным конусом* X. Будем его обозначать как $K_{rec}(X)$. Из данного определения следует, что конус $K_{rec}(X)$ состоит из таких векторов $s \in \mathbb{R}^n$, для которых выполняется включение: $X + s \subset X$.

Рецессивный конус $K_{rec}(X)$ для любого выпуклого множества X является непустым, так как всегда содержит, по крайней мере, начало координат. Однако если множество X ограничено, то он состоит только из нулевого элемента. Если же множество X неограничено, то рецессивный конус может оказаться гораздо более «богатым». Как следует из утверждений 3.5.1 и 3.5.2, в случае замкнутых выпуклых неограниченных множеств рецессивный конус обязательно содержит ненулевые элементы.

Убедимся, что конус $K_{rec}(X)$ является выпуклым. Действительно, пусть $s_1 \in K_{rec}(X)$, $s_2 \in K_{rec}(X)$ и пусть $0 \leq \lambda \leq 1$. Обозначая $s_\lambda = \lambda s_1 + (1 - \lambda) s_2$, имеем

$$\begin{array}{rcl} X + s_\lambda & = & \lambda(X + s_1) + (1 - \lambda)(X + s_2) \subset \\ & \subset & \lambda X + (1 - \lambda) X = X. \end{array}$$

Таким образом, для «промежуточного» направления s_λ выполняется включение: $X + s_\lambda \subset X$, что означает принадлежность данного направления рецессивному конусу. Подчеркнем, что здесь мы воспользовались дистрибутивным законом (2.1.2):

$$(\lambda_1 + \lambda_2)X = \lambda_1 X + \lambda_2 X, \quad \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,$$

справедливым для выпуклых множеств X и неотрицательных чисел λ_1 и λ_2. Его выполнение фактически эквивалентно выпуклости множества X.

Можно также показать, что рецессивный конус $K_{rec}(X)$ замкнут, если замкнуто выпуклое множество X.

В качестве примера выпуклого множества и его рецессивного конуса рассмотрим множество

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^2_{++} :\ x_1 x_2 \geq 1 \right\},$$

у которого $K_{rec}(X) = \mathbb{R}^2_+$.

В качестве второго примера обратимся к множеству решений системы линейных неравенств, т.е. к множеству

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \leq b \right\},$$

где A — $(m \times n)$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$. Рецессивный конус X совпадает с множеством решений соответствующей однородной системы:

$$K_{rec}(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n :\ Ax \leq 0_m \right\}.$$

Возьмем теперь выпуклую функцию $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Ее надграфик, как выпуклое множество в $\mathbb{R}^{n+1}$, имеет рецессивный конус. Согласно вышесказанному,

$$s = [y, \mu] \in K_{rec}(\text{epi } f)$$

тогда и только тогда, когда

$$[x, \beta] + [y, \mu] = [x + y, \beta + \mu] \in \text{epi } f$$

для любого $[x, \beta] \in \text{epi } f$. Но это означает, что $\beta + \mu \geq f(x + y)$ или, в силу произвольности $\beta \geq f(x)$,

$$f(x + y) \leq f(x) + \mu. \tag{3.5.1}$$

Данное неравенство должно выполняться для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Из (3.5.1) видно, что если при данном y неравенство (3.5.1) имеет место при некотором конечном значении μ, то оно обязательно будет выполняться и при всех больших значениях вплоть до бесконечности. Таким образом, $K_{rec}(\mathrm{epi} f)$ представляет собой надграфик некоторой функции, зависящей от y. Данная функция носит название *рецессивной функции* функции $f(x)$ и обозначается $(f0^+)(y)$. Так как ее надграфик есть выпуклый конус, то рецессивная функция выпукла и положительно однородна, т.е. $(f0^+)(\lambda y) = \lambda(f0^+)(y)$ для любого $\lambda \geq 0$.

Опять же в силу того, что рецессивная функция определяется через рецессивный конус надграфика функции $f(x)$, наряду с (3.5.1) должно выполняется неравенство

$$f(x + \lambda y) \leq f(x) + \lambda\mu \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, \lambda \geq 0. \tag{3.5.2}$$

Отсюда следует, что

$$\mu \geq \sup_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5.3}$$

Но рецессивный конус надграфика не должен зависеть от выбора конкретной точки $[x, f(x)] \in \mathrm{epi} f$, поэтому в (3.5.2) можно взять произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$ и зафиксировать ее. Тогда на основании (3.5.3) получаем, что

$$(f0^+)(y) = \sup_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Но функция

$$\psi(\lambda) = \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda},$$

как было установлено ранее, является неубывающей по λ для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda > 0$. Поэтому

$$(f0^+)(y) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Данная формула справедлива для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Беря теперь $x = 0_n$ и заменяя λ на $1/\lambda$, получаем, что

$$\begin{array}{rcl} (f0^+)(y) & = & \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda \left[f(\frac{y}{\lambda}) - f(0_n) \right] = \\ & = & \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda f(\frac{y}{\lambda}) = \lim_{\lambda \downarrow 0} (f\lambda)(y), \end{array} \tag{3.5.4}$$

где $(f\lambda)$ — операция умножения выпуклой функции f на положительную константу λ справа. Равенство (3.5.4) проясняет, в частности, смысл принятого обозначения для рецессивной функции.

Если ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n$ такой, что $(f0^+)(y) \leq 0$, то задаваемое им направление называется *рецессивным направлением* выпуклой функции $f(x)$. Совокупность всех таких направлений, как можно проверить, образует конус в $\mathbb{R}^n$, который обозначим $K_{rec}(f)$. Данный конус называется *рецессивным конусом* функции $f(x)$, его не следует путать с рецессивным конусом надграфика функции $f(x)$, который принадлежит пространству $\mathbb{R}^{n+1}$. Рецессивный конус функции $f(x)$ является одновременно рецессивным конусом всех непустых множеств подуровня $f(x)$.

В качестве простейшего примера рассмотрим выпуклую функцию $f(x) = e^x$. Для этой функции, определенной на $\mathbb{R}$, как нетрудно видеть, $(f0^+)(y) = \delta(y|\mathbb{R}_-)$ и $K_{rec}(f) = \mathbb{R}_-$.

Упражнение 19. *Найдите рецессивную функцию и рецессивный конус следующей выпуклой функции:*

$$f(x) = \ln\left(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим теперь выпуклую квадратичную функцию

$$f(x) = \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c, \tag{3.5.5}$$

где A — симметричная положительно полуопределенная матрица порядка n, $b \in \mathbb{R}^n$ и $c \in \mathbb{R}$. Для данной функции, применяя формулу (3.5.4), получаем

$$(f0^+)(y) = \lim_{\lambda \downarrow 0}\left[\frac{1}{\lambda}\langle y, Ay\rangle + \langle b, y\rangle + \lambda c\right] = \begin{cases} \langle b, y\rangle, & Ay = 0_n, \\ +\infty, & Ay \neq 0_n. \end{cases}$$

Таким образом, рецессивная функция принимает конечные значения только тогда, когда y принадлежит нуль-пространству матрицы A. Рецессивный конус $K_{rec}(f)$ также принадлежит этому подпространству и определяется формулой

$$K_{rec}(f) = \left\{y \in \mathbb{R}^n : \ Ay = 0_n, \ \langle b, y\rangle \leq 0\right\}.$$

Если матрица A положительно определена, то рецессивная функция квадратичной функции (3.5.5) принимает следующий вид:

$$(f0^+)(y) = \delta(y \mid \{0_n\}), \tag{3.5.6}$$

т.е. совпадает с индикаторной функцией начала координат. Выпуклая функция $f(x)$, для которой выполняется равенство (3.5.6), называется *кофинитной функцией*.

Рецессивные функции существуют и у выпуклых функций $f(x)$, у которых эффективная область $\mathrm{dom} f$ (множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$, на котором она задана) не совпадает со всем пространством. Если эффективная область ограничена, то такая выпуклая функция всегда является кофинитной.

3.6. Обобщения выпуклых функций

Выпуклые функции, как было выяснено, обладают многими полезными свойствами. Например, множества подуровня у выпуклых функций выпуклы. Если выпуклая функция, определенная на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, дифференцируема, то равенство нулю градиента функции в некоторой точке гарантирует, что эта точка является точкой минимума функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Но и другие функции, не будучи выпуклыми, также могут обладать какими-то свойствами (одним или несколькими), присущими выпуклым функциям. Это приводит к понятию обобщения выпуклых функций. Ниже мы рассмотрим некоторые из таких простейших обобщений выпуклых функций.

Квазивыпуклые функции. Дадим определение квазивыпуклой функции. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество.

Определение 3.6.1. *Функция $f(x)$ называется квазивыпуклой на X, если для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $0 \le \lambda \le 1$ справедливо неравенство*

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \le \max\left\{f(x_1), f(x_2)\right\}. \tag{3.6.1}$$

Если неравенство (3.6.1) выполняется как строгое для всех $x_1 \ne x_2$ и $0 < \lambda < 1$, то такая функция называется строго квазивыпуклой.

По аналогии с выпуклыми функциями функция $f(x)$ называется *квазивогнутой*, если функция $-f(x)$ квазивыпукла. О функции, которая одновременно является квазивыпуклой и квазивогнутой, говорят как о *квазилинейной* функции.

Имеет место следующее утверждение, фактически эквивалентное определению квазивыпуклой функции.

Утверждение 3.6.1. *Функция $f(x)$ квазивыпукла на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда для любого $\beta \in \mathbb{R}$ множество подуровня*

$$\mathcal{L}_\beta = \{x \in X : \ f(x) \le \beta\}$$

выпукло.

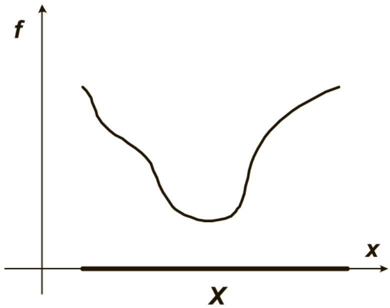

Рис. 3.10. Квазивыпуклая функция

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что $f(x)$ — квазивыпуклая функция на X. Предположим также, что для некоторого β множество $\mathcal{L}_\beta$ непустое. Возьмем две точки $x_1 \in \mathcal{L}_\beta$ и $x_2 \in \mathcal{L}_\beta$, для них выполняется $f(x_1) \leq \beta$, $f(x_2) \leq \beta$. Тогда для произвольного $0 \leq \lambda \leq 1$ на основании (3.6.1) получаем

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \max\left\{f(x_1), f(x_2)\right\} \leq \beta.$$

Отсюда делаем вывод, что точка $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ принадлежит множеству $\mathcal{L}_\beta$ и, следовательно, множество $\mathcal{L}_\beta$ выпуклое.

Достаточность. Пусть теперь множество $\mathcal{L}_\beta$ выпуклое для любого β и пусть $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ — две любые точки, причем считаем для определенности, что $f(x_1) \leq f(x_2)$. Беря $\beta = f(x_2)$, в силу выпуклости множества $\mathcal{L}_\beta$ заключаем, что весь отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2, принадлежит этому множеству. Но это может быть в том и только в том случае, когда для любого $0 \leq \lambda \leq 1$ справедливо неравенство

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) \leq \beta = \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Таким образом, согласно (3.6.1) функция $f(x)$ квазивыпуклая. ■

Нетрудно видеть, что выпуклая функция является одновременно и квазивыпуклой функцией. Но обратное неверно. На рис. 3.10 приведен пример квазивыпуклой функции, которая, очевидно, не выпукла.

Из других примеров квазивыпуклых и квазивогнутых функций укажем следующие:

1) функция $f(x) = \ln x$ квазивыпукла (и квазивогнута, т.е. квазилинейна) на $X = \mathbb{R}_{++}$;

2) функция $f(x) = x_1 x_2$ квазивогнута на $X = \mathbb{R}^2_+$;

3) дробно-линейная функция

$$f(x) = \frac{a^T x + b}{c^T x + d}, \quad a, c \in \mathbb{R}^n, \quad b, d, \tag{3.6.2}$$

квазивыпукла на множестве $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x + d > 0\}$. Действительно, чтобы убедиться в этом, рассмотрим множество подуровня

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\beta = \{x \in X : \ f(x) \le \beta\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x + d > 0, \ a^T x + b \le \beta(c^T x + d)\right\} = \\ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ c^T x + d > 0, \ (a - \beta c)^T x + b - \beta d \le 0\right\}, \end{aligned}$$

которое, будучи пересечением двух полупространств (открытого и замкнутого), выпукло. Аналогичным образом получаем, что и множество надуровня

$$\mathcal{U}_\beta = \{x \in X : \ f(x) \ge \beta\}$$

также является выпуклым. Поэтому дробно-линейная функция (3.6.2) оказывается не только квазивыпуклой, но и квазивогнутой на X, следовательно, квазилинейной.

Упражнение 20. *Под* мощностью *или* размером *вектора* $x \in \mathbb{R}^n$ *понимают число его ненулевых компонент и обозначают* $\operatorname{card} x$. *Убедитесь, что функция* $f(x) = \operatorname{card} x$ *является квазивогнутой на* $\mathbb{R}^n_+$. *Будет ли она квазивогнутой на всем пространстве* $\mathbb{R}^n$*?*

Предположим дополнительно, что $f(x)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Можно показать, что $f(x)$ будет квазивыпуклой на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ функцией в том и только в том случае, когда она удовлетворяет следующему свойству:

$$\langle f_x(x_1), x_2 - x_1 \rangle \le 0, \quad \text{если } f(x_2) \le f(x_1), \quad \forall\, x_1, x_2 \in X. \tag{3.6.3}$$

Геометрически данное свойство означает, что градиент $f_x(x_1)$, если он ненулевой, должен определять опорную гиперплоскость к множеству подуровня $\{x : f(x) \le f(x_1)\}$.

Как и для выпуклых функций, операция взятия поточечного максимума

$$f(x) = \max\{f_1(x), \ldots, f_m(x)\}$$

от квазивыпуклых функций $f_1(x)$, …, $f_m(x)$ снова приводит к квазивыпуклой функции. Кроме того, суперпозиция $f(x) = g(h(x))$ двух квазивыпуклых функций $g(y)$ и $h(x)$, из которых функция $g(y)$ является неубывающей на $\mathbb{R}$, опять дает квазивыпуклую функцию.

Упражнение 21. *Покажите, что дробная функция расстояний*

$$f(x) = \frac{\|x-a\|_2}{\|x-b\|_2}, \quad a, b \in \mathbb{R}^n,$$

квазивыпукла на множестве $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x-a\|_2 \le \|x-b\|_2\}$, *которое является полупространством.*

Упражнение 22. *Пусть функция двух аргументов* $g(x,y)$ *квазивыпукла на* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *и пусть* $Y \subset \mathbb{R}^m$ *— выпуклое множество. Покажите, что следующая функция:*

$$f(x) = inf_{y \in Y} g(x,y)$$

квазивыпукла. Сравните это утверждение с формулой (3.1.9) для выпуклых функций $g(x,y)$.

Псевдовыпуклые функции. Далее рассмотрим функции, которые обладают свойством, обратным в некотором смысле по отношению к свойству (3.6.3), и которые являются другим обобщением выпуклых функций. При этом считаем, что $f(x)$ — дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Согласно критерию выпуклости 3.2.2 данная функция $f(x)$ выпукла тогда и только тогда, когда

$$f(x_2) \ge f(x_1) + \langle f_x(x_1), x_2 - x_1 \rangle$$

для любых $x_1 \in \mathbb{R}^n$, $x_2 \in \mathbb{R}^n$. Отсюда сразу вытекает, что

$$f(x_2) \ge f(x_1), \qquad \text{если} \quad \langle f_x(x_1), x_2 - x_1 \rangle \ge 0. \tag{3.6.4}$$

Свойство (3.6.4) служит основой для введения понятия *псевдовыпуклой функции.*

Определение 3.6.2. *Пусть* $f(x)$ *— дифференцируемая на* $\mathbb{R}^n$ *функция. Тогда* $f(x)$ *называется псевдовыпуклой на* $\mathbb{R}^n$ *функцией, если из условия* $\langle f_x(x_1), x_2 - x_1 \rangle \ge 0$ *следует, что* $f(x_2) \ge f(x_1)$.

Непосредственно из определения псевдовыпуклой функции вытекает важный результат.

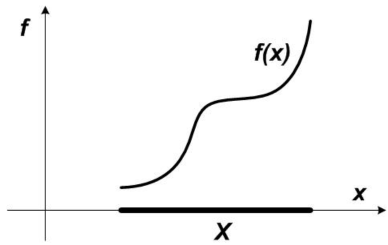

Рис. 3.11. Квазивыпуклая функция, не являющаяся псевдовыпуклой

Утверждение 3.6.2. *Пусть $f(x)$ — псевдовыпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда, для того чтобы x_* была точкой минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы $f_x(x_*) = 0_n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что x_* есть точка минимума функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Тогда она является и точкой локального минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Так как функция $f(x)$ дифференцируема, то из необходимых условий следует, что $f_x(x_*) = 0_n$.

Достаточность. Если $f_x(x_*) = 0_n$, то $\langle f_x(x_*), x - x_*\rangle = 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Поэтому в силу определения псевдовыпуклой функции $f(x) \geq f(x_*)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда делаем вывод, что функция $f(x)$ достигает в точке x_* своего минимума на $\mathbb{R}^n$. ■

Любая выпуклая дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция является одновременно и псевдовыпуклой функцией. Обратное, разумеется, неверно. На упоминавшемся уже рис. 3.10 приведен пример псевдовыпуклой функции, которая не выпукла. Можно показать, что псевдовыпуклая функция всегда квазивыпукла. Однако, как демонстрирует пример функции, показанной на рис. 3.11, данная квазивыпуклая функция не псевдовыпукла (она содержит точку перегиба, в которой $f_x(x) = 0$). Дифференцируемая квазивыпуклая функция $f(x)$ не обладают свойством, что точка x_* обязательно является точкой ее минимума на $\mathbb{R}^n$, если $f_x(x_*) = 0_n$.

Возрастающие выпуклые вдоль лучей функции. Еще одно обобщение выпуклых функций можно получить, используя следующее их свойство, а именно, любая выпуклая функция является поточечным максимумом аффинных функций, которые не превосходят данную выпуклую функцию. Убедимся в этом. Для простоты предположим, что выпуклая функция $f(x)$ определена на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Для произвольного $l \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $l(x)$ *линейную функцию*, определенную на $\mathbb{R}^n$:

$$l(x) = \langle l, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} l^i x^i. \tag{3.6.5}$$

Пусть, кроме того, $g(x) = l(x) + c$ есть аффинные функции на $\mathbb{R}^n$, т.е. всевозможные сдвиги линейных функций на константу $c \in \mathbb{R}$.

Обозначим через $\mathcal{L}(f)$ совокупность таких аффинных функций $g(x)$, значения которых не превышают значения функции $f(x)$, т.е. множество

$$\mathcal{L}(f) = \left\{ g(x) = \langle l, x \rangle + c : \ g(x) \leq f(x) \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Тогда

$$f(x) = \max_{g \in \mathcal{L}(f)} g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6.6}$$

Чтобы проверить равенство (3.6.6), обратимся к надграфику epi$f$ функции $f(x)$, которое является выпуклым замкнутым множеством (напомним, что мы условились рассматривать только замкнутые функции). В каждой граничной точке $[x_0, f(x_0)] \in \mathbb{R}^{n+1}$ надграфика epi$f$ согласно утверждению теоремы 2.4.3 существует опорная гиперплоскость. Пусть $[a, b] \in \mathbb{R}^{n+1}$, где $a \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}$, — направляющий вектор этой гиперплоскости (он обязательно должен быть ненулевым). Тогда

$$\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x - x_0 \\ \beta - f(x_0) \end{bmatrix} \right\rangle \geq 0 \quad \forall \ [x, \beta] \in \mathrm{epi} f.$$

Отсюда, беря, в частности, $\beta = f(x) + \alpha$, где $\alpha \geq 0$, получаем

$$\langle a, x - x_0 \rangle + b(f(x) + \alpha - f(x_0)) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.6.7}$$

Так как $\alpha \geq 0$, то неравенство (3.6.7) возможно в том и только в том случае, когда $b \geq 0$. Покажем, что b положительно. Действительно, если $b = 0$, то неравенство (3.6.7) переходит в $\langle a, x - x_0 \rangle \geq 0$, которое в силу произвольности $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо, только если $a = 0_n$. Мы приходим к тому, что направляющий вектор $[a, b]$ опорной гиперплоскости оказывается нулевым. Это противоречит определению направляющего вектора гиперплоскости. Поэтому $b > 0$. Более того, поскольку длина направляющего вектора не столь существенна, то, не умаляя общности, можно считать, что этот вектор отнормирован так, что $b = 1$.

Беря теперь в (3.6.7) $\alpha = 0$, получаем неравенство

$$\langle a, x - x_0 \rangle + f(x) - f(x_0) \geq 0 \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n,$$

которое, полагая $l = -a$, $c = f(x_0) + \langle a, x_0 \rangle$ и вводя в рассмотрение с этими l и c аффинную функцию $g(x) = \langle l, x \rangle + c$ (подчеркнем, что здесь как точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$, так, разумеется, и значение функции $f(x_0)$ фиксированы), принимает вид: $g(x) \leq f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Отсюда делаем вывод, что функция $g(x) \in \mathcal{L}(f)$. Чтобы прийти к равенству (3.6.6), остается только заметить, что $g(x_0) = f(x_0)$. О множестве функций $\mathcal{L}(f)$ говорят как об *опорном множестве* функции f.

Обобщение выпуклых функций на основании приведенного свойства строится следующим образом. Берут некоторый класс функций, которые объявляются аффинными (абстрактными аффинными функциями), а затем функцию $f(x)$ называют абстрактной выпуклой, если она удовлетворяет условию (3.6.6). Поясним такое построение на примере одного возможного класса абстрактных аффинных функций.

Введем в рассмотрение множество *абстрактных линейных функций* на $\mathbb{R}^n_+$, положив вместо (3.6.5)

$$l(x) = \min_{i \in J_+(l)} l^i x^i, \tag{3.6.8}$$

где $l \in \mathbb{R}^n_+$ и $J_+(l) = \{i \in J^n : \ l^i > 0\}$. Пусть $g(x) = l(x) + c$ — соответствующие *абстрактные аффинные функции*. Совокупность всех абстрактных аффинных на $\mathbb{R}^n_+$ функций $g(x)$ образует некоторый класс функций $\mathcal{L}$.

Определение 3.6.3. *Функция $f(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n_+$ и принимающая значения из $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, называется абстрактной выпуклой по отношению к классу $\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}$-выпуклой, если существует множество функций $\mathcal{L}(f) \subseteq \mathcal{L}$ такое, что*

$$f(x) = \sup_{g \in \mathcal{L}(f)} g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.6.9}$$

Оказывается, непрерывная функция $f(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n_+$, будет $\mathcal{L}$-выпуклой в смысле определения 3.6.3 в том и только в том случае, когда она является *возрастающей выпуклой вдоль лучей функцией*. Такие функции называют еще ICAR-функциями (от английского названия increasing convex-along-rays function). Под возрастающей функцией здесь будем понимать такую функцию $f(x)$, для которой $f(x_1) \geq f(x_2)$, если только $x_1 \geq x_2$.

Определение 3.6.4. *Функция $f(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n_+$ и принимающая значения из $\bar{\mathbb{R}}_+$, называется выпуклой вдоль лучей, если* *для любого фиксированного $x \geq 0_n$ функция $\tilde{f}(\lambda) = f(\lambda x)$ выпукла при $\lambda > 0$.*

Примером ICAR-функции является следующая функция, определенная на $\mathbb{R}^m_+$:

$$f(x) = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n},$$

где $m_1 + \cdots + m_n \geq 1$. К числу ICAR-функций относится также полином с неотрицательными коэффициентами на $\mathbb{R}^n_+$.

Важным частным случаем ICAR-функции является IPH-функция (от английского названия increasing positively homogeneous function). Как следует из этого названия, она является возрастающей функцией на $\mathbb{R}^n_+$ и положительно однородной, т.е. $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $\lambda > 0$.

Для IPH-функций $f(x)$ в качестве семейства $\mathcal{L}(f)$ можно взять саму совокупность линейных функций (3.6.8), а не привлекая дополнительно аффинные функции $g(x)$ (сдвиги на константы линейных функций). Обозначим класс всех линейных функций (3.6.8) через $\mathcal{L}_0$. Справедливо следующее равенство, аналогичное (3.6.9), т.е. функция $f(x)$, определенная на $\mathbb{R}^n_+$, является IPH-функцией в том и только в том случае, когда существует подмножество $\mathcal{L}(f) \subset \mathcal{L}_0$ такое, что выполнено (3.6.9).

Отметим, что сами линейные функции $l(x)$ являются IPH-функциями на $\mathbb{R}^n_+$. Несложно указать ту функцию $l(x)$, для которой в (3.6.9) достигается максимум. Пусть $c \in \mathbb{R}$. Обозначим через c/l вектор с компонентами $(c/l)^i$, который вычисляется по следующему правилу:

$$\left(\frac{c}{l}\right)^i = \begin{cases} c/l^i, & \text{если } i \in J_+(l), \\ 0, & \text{если } i \notin J_+(l). \end{cases}$$

Тогда если точка $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$ такова, что $f(x_0) > 0$, то, беря $l = f(x_0)/x_0$, получаем, что $f(x_0) = l(x_0)$ и $f(x) \geq l(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Вектор l при этом называют *опорным вектором* к функции $f(x)$ в точке x_0.

Глава 4

Общие условия оптимальности

4.1. Нелокальные критерии оптимальности

Рассмотрим задачу оптимизации в общем виде:

$$f_* = \min_{x \in X} f(x) \tag{4.1.1}$$

с допустимым множеством $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и с целевой функцией $f(x)$, определенной в некоторой области, содержащей множество X. Частным случаем (4.1.1) является задача *безусловной минимизации*:

$$f_* = \min_{x \in R^n} f(x). \tag{4.1.2}$$

Если функция $f(x)$ и множество X выпуклы, то задачу (4.1.1) будем называть задачей *выпуклой минимизации*. Соответственно (4.1.2) — задачей *безусловной выпуклой минимизации*.

Нас будут интересовать вопросы, связанные с разрешимостью задач вида (4.1.1) или (4.1.2), а также с теми условиями, которые должны выполняться в решениях этих задач. При этом способ задания множества X пока не конкретизируется.

Основной результат, касающийся существования у задачи (4.1.1) решения, хорошо известен из анализа и дается теоремой Веерштрасса.

Теорема 4.1.1. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное множество и пусть $f(x)$ — непрерывная функция на X. Тогда точка глобального* *минимума функции $f(x)$ на X, являющаяся решением задачи (4.1.1), существует.*

Можно ослабить требования как к функции $f(x)$, так и к множеству X в условиях теоремы 4.1.1, сохранив ее утверждение. Ослабим сначала требования к функции $f(x)$, заменяя условие ее непрерывности на условие *полунепрерывности снизу.*

Определение 4.1.1. *Функция $f(x)$, определенная на $X \subseteq \mathbb{R}^n$, называется полунепрерывной снизу в точке $x \in X$, если из условий $x_k \in X$, $x_k \to x$ следует, что*

$$f(x) \leq \varliminf_{k\to\infty} f(x_k).$$

Если функция $f(x)$ полунепрерывна снизу в каждой точке множества X, то она называется полунепрерывной снизу на X.

Можно показать, что функция $f(x)$ является полунепрерывной снизу на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ в том и только в том случае, когда она *замкнута*, т.е. ее надграфик есть замкнутое множество.

В качестве примера приведем следующую функцию:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in (0,1], \\ 0, & \quad x = 0. \end{array} \right. , \qquad X = [0,1].$$

Она полунепрерывна снизу в точке $x = 0$.

Дадим теперь другую формулировку теоремы Веерштрасса.

Теорема 4.1.2. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное множество и пусть $f(x)$ — полунепрерывная снизу на X функция. Тогда решение задачи минимизации (4.1.1) существует.*

Доказательство. Возьмем произвольную минимизирующую последовательность $\{x_k\}$ для функции $f(x)$ на X. Согласно ее определению $x_k \in X$, $f(x_k) \geq f_*$ и $f(x_k) \to f_*$. Здесь f_* — нижняя грань $f(x)$ на X. Но множество X компактно, поэтому последовательность $\{x_k\}$ имеет хотя бы одну предельную точку. Предположим, что подпоследовательность $\{x_{k_l}\}$ является сходящейся и $\lim_{l\to\infty} x_{k_l} = x_*$. Так как X — компактное множество, $x_* \in X$. Имеем в силу непрерывности снизу функции $f(x)$:

$$f_* \leq f(x_*) \leq \varliminf_{l\to\infty} f(x_{k_l}) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) = f_*.$$

Отсюда следует, что $f(x_*) = f_*$, т.е. нижняя грань достигается и, стало быть, задача (4.1.1) имеет решение. ■

Ослабим теперь требования к множеству X.

Теорема 4.1.3. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество, на котором функция $f(x)$ непрерывна. Пусть, кроме того, при некотором $x_0 \in X$ множество $\mathcal{L}_X(x_0) = \{x \in X : \ f(x) \le f(x_0)\}$ ограничено. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на X существует.*

Доказательство. Из замкнутости множества X и непрерывности функции $f(x)$ следует, что множество $\mathcal{L}_X(x_0)$ является замкнутым и, следовательно, компактным. Поэтому по теореме Веерштрасса 4.1.1 существует глобальный минимум функции $f(x)$ на $\mathcal{L}_X(x_0)$, он же является глобальным минимумом функции $f(x)$ на всем множестве X. ■

Условия теоремы 4.1.3 заведомо выполняются, если непрерывная функция $f(x)$ является *бесконечно возрастающей* на замкнутом множестве X, т.е. для любой последовательности $\{x_k\} \subset X$ такой, что $\|x_k\| \to \infty$, выполняется $\overline{\lim}_{k\to\infty} f(x_k) = +\infty$.

Из теоремы 4.1.3 вытекает следующий результат, касающийся сильно выпуклых функций.

Теорема 4.1.4. *Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и пусть $f(x)$ сильно выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда решение задачи (4.1.1) существует.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и положим $\beta = f(x_0)$. Так как согласно теореме 3.1.4 множество подуровня $\mathcal{L}_\beta = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \le \beta\right\}$ для сильно выпуклой функции всегда ограничено, то тем более будет ограничено множество $\mathcal{L}_X(x_0)$. Поэтому по теореме 4.1.3 существует глобальный минимум функции $f(x)$ на X, являющийся решением задачи (4.1.1). ■

Приведем теперь критерии, которые должны выполняться в точках решения общей задачи (4.1.1). Их принято называть *условиями оптимальности.* Данные условия сравнительно просто можно получить, по крайней мере, с формальной точки зрения, если воспользоваться понятием субдифференциала или формулой условного субдифференциала.

Теорема 4.1.5. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда:*

1) если x_* есть точка минимума $f(x)$ на X, то $\partial_X f(x_*) \neq \emptyset$ и $0_n \in \partial_X f(x_*)$;

2) если для некоторой точки $x_* \in X$ существует субдифференциал $\partial_X f(x_*)$ и $0_n \in \partial_X f(x_*)$, то x_* — точка минимума функции $f(x)$ на X.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть x_* — точка минимума функции $f(x)$ на X. Тогда $f(x) - f(x_*) \geq 0$ для всех $x \in X$. Это неравенство можно переписать в виде

$$f(x) - f(x_*) \geq 0 = \langle 0_n, x - x_* \rangle \quad \forall\, x \in X.$$

Отсюда следует, что субдифференциал $\partial_X f(x_*)$ не пуст и $0_n \in \partial_X f(x_*)$.

Обратно, предположим, что точка $x_* \in X$ такова, что $\partial_X f(x_*) \neq \emptyset$ и $0_n \in \partial_X f(x_*)$. В этом случае по определению субградиента

$$f(x) - f(x_*) \geq \langle 0_n, x - x_* \rangle = 0 \quad \forall\, x \in X.$$

Таким образом, x_* есть точка минимума функции $f(x)$ на X. ■

Приведенные в теореме 4.1.5 условия оптимальности оказываются мало полезными в случае произвольной функции $f(x)$ и произвольного множества X. Это связано с трудностью вычисления субдифференциала $\partial_X f(x)$ или вообще его отсутствия для многих точек из X. Однако если сделать дополнительные предположения, касающиеся либо дифференцируемости функции $f(x)$, либо выпуклости $f(x)$ и X, то можно получить гораздо более содержательные условия оптимальности.

Условия оптимальности для выпуклых задач. Обратимся теперь к выпуклой задаче (4.1.1). Используя формулу условного субдифференциала (3.3.24), в качестве следствия к теореме 4.1.5 получаем, что для выпуклой функции, определенной на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1.6. *Пусть $f(x)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция и пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in X$ была решением задачи выпуклой минимизации (4.1.1), необходимо и достаточно, чтобы*

$$0_n \in \partial f(x_*) + \mathcal{N}(x_*|X), \tag{4.1.3}$$

где $\mathcal{N}(x_*|X)$ — нормальный конус к множеству X в точке $x_* \in X$.

Данному результату можно придать несколько другой вид. Но перед тем как его сформулировать, введем важное понятие, связанное с характеризацией множества X.

Направление $s \in \mathbb{R}^n$ называется *возможным относительно множества* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *в точке* $x_0 \in X$, если существует такое $\bar{\alpha}(s) > 0$, что $x_0 + \alpha s \in X$, когда $0 \le \alpha \le \bar{\alpha}(s)$. Совокупность возможных направлений образует конус, который будем называть *конусом возможных направлений* и обозначать $\Gamma(x_0|X)$. Если $x_0 \in X$ является внутренней точкой множества X, то в такой точке $\Gamma(x_0|X) = \mathbb{R}^n$.

Для выпуклого множества $X \subseteq \mathbb{R}^n$ конус возможных направлений может быть записан в виде

$$\Gamma(x_0|X) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \ s = \lambda(x - x_0), \quad \lambda > 0, \ x \in X \right\}, \tag{4.1.4}$$

а сопряженный к нему как

$$\Gamma^*(x_0|X) = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : \langle a, x - x_0 \rangle \ge 0 \quad \forall \ x \in X \right\}, \tag{4.1.5}$$

т.е. он является обратным к нормальному конусу $\mathcal{N}(x_0|X)$. Поэтому наряду с (4.1.3) в этом случае имеем

$$0_n \in \partial f(x_*) - \Gamma^*(x_*|X). \tag{4.1.6}$$

Данная формула позволяет переформулировать теорему 4.1.6 в несколько ином виде.

Теорема 4.1.7. *Пусть $f(x)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Пусть, кроме того, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in X$ была решением выпуклой задачи (4.1.1), необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой вектор $a \in \partial f(x_*)$, что*

$$\langle a, x - x_* \rangle \ge 0 \quad x \in X. \tag{4.1.7}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (4.1.6), эквивалентной в данном случае (4.1.3). Согласно (4.1.6), включение $0_n \in \partial_X f(x_*)$ означает, что найдется вектор $a \in \mathbb{R}^n$, который одновременно принадлежит и $\partial f(x_*)$, и сопряженному конусу $\Gamma^*(x_*|X)$. Отсюда, используя представление (4.1.5) для сопряженного конуса $\Gamma^*(x_*|X)$, приходим к (4.1.7). ■

Если $X = \mathbb{R}^n$, то конус возможных направлений $\Gamma(x|\mathbb{R}^n)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, а сопряженный конус состоит только из начала координат, т.е. $\Gamma^*(x|\mathbb{R}^n) = \{0_n\}$. Тогда из включения (4.1.6) приходим к основному условию оптимальности для выпуклой задачи безусловной минимизации (4.1.2).

Теорема 4.1.8. *Пусть $f(x)$ — выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда, для того чтобы точка x_* была решением задачи безусловной минимизации (4.1.2), необходимо и достаточно, чтобы $0_n \in \partial f(x_*)$.*

В качестве простейшего следствия из теоремы 4.1.8 немедленно получаем следующий результат.

Теорема 4.1.9. *Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in \mathbb{R}^n$ была решением выпуклой задачи безусловной минимизации (4.1.2), необходимо и достаточно, чтобы $f_x(x_*) = 0_n$.*

Рассмотрим теперь другой важный частный случай, когда X есть неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$. Пусть $x \in \mathbb{R}^n_+$. Обозначим через $J_0(x)$ и $J_+(x)$ индексные множества

$$J_0(x) = \left\{1 \le i \le n : \ x^i = 0\right\}, \quad J_+(x) = \left\{1 \le i \le n : \ x^i > 0\right\}.$$

Тогда, как нетрудно видеть,

$$\Gamma(x|\mathbb{R}^n_+) = \left\{s \in \mathbb{R}^n : \ s^i \ge 0, \ i \in J_0(x)\right\}.$$

Покажем, что сопряженный конус имеет вид

$$\Gamma^*(x|\mathbb{R}^n_+) = \left\{y \in \mathbb{R}^n_+ : \ \langle x, y\rangle = 0\right\},$$

предварительно отметив, что для $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $y \in \mathbb{R}^n_+$ равенство $\langle x, y\rangle = 0$ равносильно системе из n покомпонентных равенств:

$$x^i y^i = 0, \quad 1 \le i \le n. \tag{4.1.8}$$

Пусть x — внутренняя точка ортанта $\mathbb{R}^n_+$, т.е. $x \in \mathbb{R}^n_{++}$. Тогда конус $\Gamma(x|\mathbb{R}^n_+)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, $\Gamma^*(x|\mathbb{R}^n_+)$ состоит только из единственного вектора y, который есть нулевой вектор 0_n. Имеем для этого вектора: $\langle x, y\rangle = \langle x, 0_n\rangle = 0$.

Предположим далее, что x — граничная точка $\mathbb{R}^n_+$. Тогда $J_0(x) \ne \emptyset$. Возьмем $i \in J_0(x)$. В этом случае обязательно $y^i \ge 0$ для любого вектора $y \in \Gamma^*(x|\mathbb{R}^n_+)$. Действительно, иначе, беря i-й единичный орт e_i в качестве направления $s \in \Gamma(x|\mathbb{R}^n)$, получаем, что $\langle s, y\rangle = \langle e_i, y\rangle = y^i < 0$, что невозможно в силу определения сопряженного конуса. Для индекса $i \in J_+(x)$, проводя аналогичные рассуждения, убеждаемся, что $y^i = 0$. В самом деле, если компонента y^i отлична от нуля, то, беря в качестве направления $s \in \Gamma(x|\mathbb{R}^n)$ либо $s = e_i$, либо $s = -e_i$, в любом случае приходим к неравенству $\langle s, y\rangle < 0$. В результате делаем вывод, что независимо от того, является ли точка $x \in \mathbb{R}^n_+$ внутренней или граничной, обязательно $y \geq 0_n$ и выполняются равенства (4.1.8).

Опять в качестве следствия из теоремы 4.1.6 с учетом включения (4.1.6) получаем, что имеет место следующий результат.

Теорема 4.1.10. *Пусть $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая на $\mathbb{R}^n$ функция. Тогда, для того чтобы функция $f(x)$ в точке $x_* \in \mathbb{R}^n_+$ достигала своего минимума на $\mathbb{R}^n_+$, необходимо и достаточно, чтобы градиент $f_x(x_*)$ в этой точке удовлетворял неравенству $f_x(x_*) \geq 0_n$ и равенствам $x^i_* f^i_x(x_*) = 0$, $1 \leq i \leq n$.*

Можно ослабить требования к функции $f(x)$ в условиях теоремы 4.1.10, а именно достаточно предположить, что $f(x)$ — выпуклая и дифференцируемая функция на некоторой выпуклой области, содержащей ортант $\mathbb{R}^n_+$.

Обозначим через X_* множество решений задачи (4.1.1), т.е.

$$X_* = \mathrm{Argmin}_{x \in X} f(x),$$

и укажем свойства, которыми оно обладает в случае задачи выпуклой минимизации.

Теорема 4.1.11. *Пусть функция $f(x)$ выпукла на $\mathbb{R}^n$ и пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое множество. Тогда:*

1) *всякий локальный минимум функции $f(x)$ на X является одновременно и ее глобальным минимумом на X;*

2) *множество точек минимума X_* выпукло;*

3) *если $f(x)$ — строго выпуклая на $\mathbb{R}^n$ функция, то X_* может состоять только из единственной точки.*

Доказательство. Пусть x_* — локальный минимум функции $f(x)$ на X. Это означает, что найдется такая окрестность

$$\Delta_\varepsilon(x_*) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x - x_*\| \leq \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0,$$

в которой $f(x) \geq f(x_*)$ для всех $x \in X \cap \Delta_\varepsilon(x_*)$. Но тогда, если взять произвольную точку $x \in X$, то в силу выпуклости множества X получаем, что для любого $0 < \lambda < 1$ выполняется

$$x_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)x_* = x_* + \lambda(x - x_*) \in X.$$

Поэтому для λ достаточно малых имеет место включение

$$x_\lambda = x_* + \lambda(x - x_*) \in X \cap \Delta_\varepsilon(x_*).$$

Тогда, используя выпуклость функции $f(x)$, получаем

$$f(x_*) \le f(x_\lambda) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_*).$$

Так как $\lambda > 0$, то отсюда следует, что $f(x) \ge f(x_*)$. Таким образом, x_* — точка глобального минимума функции $f(x)$ на X.

Докажем второе утверждение. Если множество X_* пусто, то по принятому соглашению относительно пустых множеств оно выпукло. Пусть теперь X_* — непустое множество и пусть x_1 и x_2 — две произвольные точки из X_*. Возьмем

$$x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \tag{4.1.9}$$

где $0 \le \lambda \le 1$. Так как X — выпуклое множество, то $x_\lambda \in X$. Имеем в силу определения оптимальности: $f(x_1) = f_*$ и $f(x_2) = f_*$. Кроме того, на основании выпуклости функции $f(x)$

$$f_* \le f(x_\lambda) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = f_*.$$

Отсюда заключаем, что $f(x_\lambda) = f_*$. Следовательно, X_* — выпуклое множество.

Наконец, предположим, что $f(x)$ — строго выпуклая функция. Предположим также, что во множестве X_* имеются две отличные друг от друга точки x_1 и x_2. Тогда для точки $x_\lambda \in X$ вида (4.1.9), в которой $0 < \lambda < 1$, выполняется неравенство

$$f_* = f(x_\lambda) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = f_*,$$

что невозможно. Таким образом, для строго выпуклой функции $f(x)$ множество X состоит из единственной точки. ■

Замечание. *Поскольку для сильно выпуклой функции множество подуровня $\mathcal{L}_\beta$ для любого $\beta \in \mathbb{R}$ ограничено, то согласно теореме 4.1.4 решение задач минимизации (4.1.1) с такими функциями и с замкнутыми выпуклыми множествами всегда существует, причем множество оптимальных решений X_* содержит лишь единственную точку.*

4.2. Локальные критерии оптимальности

Полученные ранее условия минимума функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ существенным образом использовали понятие субдифференциала функции. Но понятие субдифференциала опирается на знание значений функции на всем множестве X и дает, следовательно, глобальные критерии минимума функции $f(x)$ на X. Было показано, что для выпуклых задач минимизации данные глобальные критерии являются одновременно и локальными критериями. Но в случае общей невыпуклой задачи применение глобальных критериев к локальным решениям становится невозможным и требуется иной более конкретный подход, который учитывал бы специфику локальных решений. Данный подход по-прежнему должен опираться на информацию о целевой функции $f(x)$, но не на всем множестве X, а лишь из некоторой окрестности рассматриваемого локального решения.

Определение 4.2.1. *Последовательность $\{x_k\}$, сходящаяся к точке $x \in \mathbb{R}^n$, называется направленно сходящейся к x (сходящейся к x в направлении $s \in \mathbb{R}^n$), если*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|} = s, \quad \|s\| = 1. \tag{4.2.1}$$

При выполнении условия (4.2.1) будем писать $x_k \xrightarrow{s} x$.

Понятно, что у всякой сходящейся к x последовательности $\{x_k\}$ такой, что $x_k \neq x$ для бесконечно больших номеров k, существует направленно сходящаяся подпоследовательность. Действительно, пусть $x_k \neq x$ при $k \geq k_*$. Тогда если обозначить

$$s_k = \frac{x_k - x}{\|x_k - x\|},$$

то $\|s_k\| = 1$ и, следовательно, все такие векторы s_k принадлежат единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Поэтому из них можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Пусть теперь $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — некоторое множество. Определим *касательный конус* к X в точке $x_0 \in X$:

$$\mathcal{T}(x_0|X) = \left\{\lambda s : \ \|s\| = 1, \ \exists \ \{x_k\} \subseteq X, \ x_k \xrightarrow{s} x_0; \ \lambda \geq 0\right\}.$$

Элементы этого конуса называются *касательными направлениями*. Для любой внутренней точки x_0 множества X конус $\mathcal{T}(x_0|X)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Считаем также, что $\mathcal{T}(x_0|X) = \{0_n\}$, если x_0 — изолированная точка из X. Пример касательного конуса для случая, когда множество X является четвертью окружности, приводится на рис. 4.1.

Утверждение 4.2.1. *Для любой точки $x_0 \in X$ касательный конус $\mathcal{T}(x_0|X)$ замкнут.*

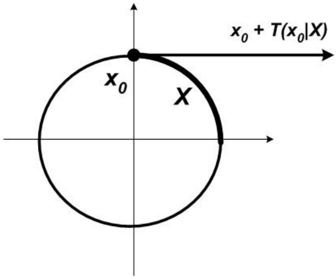

Рис. 4.1. Касательный конус

Доказательство. Достаточно показать, что для любой последовательности $s_l \to s$ такой, что $s_l \in \mathcal{T}(x_0|X)$ и $\|s_l\| = 1$, справедливо включение $s \in \mathcal{T}(x_0|X)$.

Согласно определению касательного конуса, для любого направления $s_l \in \mathcal{T}(x_0|X)$ существует последовательность точек $\{x_{k,l}\}$ из X такая, что $x_{k,l} \stackrel{s_l}{\to} x_0$ при $k \to \infty$. Поэтому для любого натурального числа m можно найти номера l_m и k_m такие, что

$$\|x_{k_m,l_m} - x_0\| < \frac{1}{m}, \quad \|s_{l_m} - s\| < \frac{1}{2m}$$

и

$$\left\| \frac{x_{k_m,l_m} - x_0}{\|x_{k_m,l_m} - x_0\|} - s_{l_m} \right\| < \frac{1}{2m}.$$

Следовательно,

$$\left\| \tfrac{x_{k_m,l_m} - x_0}{\|x_{k_m,l_m} - x_0\|} - s \right\| \leq \left\| \tfrac{x_{k_m,l_m} - x_0}{\|x_{k_m,l_m} - x_0\|} - s_{l_m} \right\| + \|s_{l_m} - s\| < \\ < \tfrac{1}{2m} + \tfrac{1}{2m} = \tfrac{1}{m}.$$

Отсюда приходим к выводу, что если взять последовательность $\{x_m\}$, где $x_m = x_{k_m,l_m}$, то $x_m \stackrel{s}{\to} x_0$. Таким образом, конус $\mathcal{T}(x_0|X)$ замкнут. ■

Предположим, что $X \subseteq \mathbb{R}^n$ — произвольное множество и точка $x_0 \in X$. Предположим также, что в точке x_0 существует нетривиальный (отличный от нулевого) касательный конус $\mathcal{T}(x_0|X)$. Как следует из приведенного определения, в этом случае $\mathcal{T}(x_0|X)$ полностью определяется касательными направлениями единичной длины, т.е. элементами множества $\mathcal{T}_1(x_0|X) = \{s \in \mathcal{T}(x_0|X) : \ \|s\| = 1\}$, являющегося пересечением конуса $\mathcal{T}(x_0|X)$ с единичной сферой. Ниже элементы $\mathcal{T}_1(x_0|X)$ будем называть *единичными касательными направлениями.*

Определение 4.2.2. *Тангенциальной производной по касательному направлению $s \in \mathcal{T}_1(x_0|X)$ в точке $x_0 \in X$ называется предел*

$$f'_T(x_0; s) = \lim_{x_k \xrightarrow{s} x_0} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|},$$

если он существует.

Приведем теперь необходимое условие локального минимума функции $f(x)$ на множестве X, выраженное посредством тангенциальных производных $f(x)$ по касательным направлениям.

Теорема 4.2.1. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и точка $x_* \in X$. Пусть, кроме того, существует отличный от нулевого непустой касательный конус $\mathcal{T}(x_*|X)$, а также тангенциальные производные $f(x)$ по всем касательным направлениям $s \in \mathcal{T}_1(x_*|X)$. Тогда, для того чтобы x_* была точкой локального минимума функции $f(x)$ на X, необходимо, чтобы*

$$f'_T(x_*; s) \geq 0 \quad \forall\ s \in \mathcal{T}_1(x_*|X).$$

Доказательство. По определению тангенциальной производной по касательному направлению, так как $f(x_k) \geq f(x_*)$ для всех $x_k \in X$ и k достаточно больших, получаем

$$f'_T(x_*; s) = \lim_{x_k \xrightarrow{s} x_0} \frac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} \geq 0.$$

Остается только заметить, что в силу сделанных предположений данные производные существуют для всех $s \in \mathcal{T}_1(x_*|X)$. ■

Согласно теореме 4.2.1, проверка выполнения необходимых условий локального минимума функции $f(x)$ на множестве X сводится к проверке неотрицательности ее тангенциальных производных по единичным касательным направлениям. Для некоторых функций $f(x)$ такие производные вычисляются сравнительно просто.

Лемма 4.2.1. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая в точке $x_0 \in X$ функция и пусть $s \in \mathcal{T}_1(x_0|X)$. Тогда*

$$f'_T(x_0; s) = \langle f_x(x_0), s \rangle, \tag{4.2.2}$$

где $f_x(x_0)$ — градиент функции $f(x)$ в точке x_0.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \langle f_x(x_0), x - x_0 \rangle}{\|x - x_0\|} = 0. \tag{4.2.3}$$

Кроме того, поскольку $s \in \mathcal{T}_1(x_0|X)$, существует предел

$$\lim_{x_k \xrightarrow{s} x_0} \left\langle f_x(x_0), \frac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} \right\rangle = \langle f_x(x_0), s \rangle$$

для некоторой последовательности $\{x_k\} \subset X$ такой, что $x_k \xrightarrow{s} x_0$.

Отсюда, беря в (4.2.3) предел по $x_k \xrightarrow{s} x_0$, получим

$$\begin{aligned} f'_T(x_0; s) &= \lim\nolimits_{x_k \xrightarrow{s} x_0} \tfrac{f(x_k) - f(x_0)}{\|x_k - x_0\|} = \\ &= \lim\nolimits_{x_k \xrightarrow{s} x_0} \left\langle f_x(x_0), \tfrac{x_k - x_0}{\|x_k - x_0\|} \right\rangle = \langle f_x(x_0), s \rangle. \end{aligned}$$

Мы пришли к равенству (4.2.2). ■

Теорема 4.2.2. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_* \in X$ и касательный конус $\mathcal{T}(x_*|X)$ не пуст. Тогда если $f(x)$ достигает в точке x_* своего локального минимума на X, то*

$$\langle f_x(x_*), s \rangle \geq 0 \quad \forall\, s \in \mathcal{T}(x_*|X). \tag{4.2.4}$$

Доказательство. Если $s = 0_n$, то неравенство (4.2.4) очевидно. Предположим теперь, что $s \neq 0_n$. В этом случае $s = \lambda \bar{s}$ для некоторого $\lambda > 0$ и $\bar{s} \in \mathcal{T}_1(x_*|X)$. Тогда по теореме 4.2.1 и лемме 4.2.1 $f'_T(x_*; \bar{s}) = \langle f_x(x_*), \bar{s} \rangle \geq 0$. Отсюда приходим к (4.2.4). ■

Обратимся к выпуклой задаче (4.1.1), в которой как функция $f(x)$, так и допустимое множество X выпуклы. Для такой задачи были получены необходимые условия минимума (4.1.7), выраженные через субградиенты целевой функции в этой точке. Данные условия одновременно являются и достаточными. Но для выпуклых задач (4.1.1), разумеется, справедливы и условия, выраженные через тангенциальные производные по касательным направлениям. Более того, выпуклость множества X позволяет перейти от тангенциальных к обычным производным по направлениям и получить тем самым другие более простые условия оптимальности. Приведем их.

Теорема 4.2.3. *Пусть $f(x)$ — выпуклая функция, определенная на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in X$*

была решением задачи минимизации (4.1.1), необходимо и достаточно, чтобы

$$f'(x_*; s) \geq 0 \quad \forall\, s \in \Gamma(x_*|X), \quad s \neq 0_n, \tag{4.2.5}$$

где $f'(x_*; s)$ — производная по направлению s и

$$\Gamma(x_*|X) = \{s:\ s = \lambda(x - x_*),\ \lambda > 0,\ x \in X\} \tag{4.2.6}$$

есть конус возможных направлений в точке x_* относительно X.

Доказательство. *Необходимость.* Для выпуклого множества X касательный конус $\mathcal{T}(x_*|X)$ совпадает с замыканием конуса $\Gamma(x_*|X)$. Возьмем произвольное единичное направление s из конуса $\Gamma(x_*|X)$, положив

$$s = \frac{x - x_*}{\|x - x_*\|}, \quad x \in X, \quad x \neq x_*.$$

Имеем $\|s\| = 1$. Кроме того, $s \in \Gamma(x_*|X) \subseteq \mathcal{T}(x_*|X)$. Согласно определению тангенциальной производной по единичному касательному направлению

$$f'_T(x_*; s) = \lim_{x_k \xrightarrow{s} x_*} \frac{f(x_k) - f(x_*)}{\|x_k - x_*\|}. \tag{4.2.7}$$

Выберем последовательность $\{x_k\}$ следующим образом: $x_k = x_* + \alpha_k s$, где $\alpha_k > 0$ и $\alpha_k \to 0$. При таком выборе $x_k \in X$ для α_k достаточно малых. Кроме того, $\|x_k - x_*\| = \alpha_k$. Подставляя данные x_k в (4.2.7), приходим к равенству

$$f'_T(x_*; s) = \lim_{\alpha_k \downarrow 0} \frac{f(x_* + \alpha_k s) - f(x_*)}{\alpha_k} = f'(x_*; s), \tag{4.2.8}$$

т.е. тангенциальная производная по касательному направлению s совпадает с обычной производной по направлению (3.3.2), причем последняя из-за того, что $f(x_*) \leq f(x)$ для всех $x \in X$, обязательно определена, даже если точка x_* не принадлежит относительной внутренности множества X. В самом деле, в этом случае функция

$$\phi(\alpha) = \frac{f(x_* + \alpha s) - f(x_*)}{\alpha} \tag{4.2.9}$$

неотрицательна при $\alpha > 0$. Кроме того, согласно утверждению леммы 3.3.1, она является неубывающей функцией. Поэтому предел в (4.2.8) существует, причем $f'(x_*; s) \geq 0$, т.е. имеет место (4.2.5), что также согласуется с утверждением теоремы 4.2.1. Очевидно, что неравенство (4.2.5) будет выполняться и для произвольного ненулевого направления s из конуса $\Gamma(x_*|X)$.

Достаточность. Предположим, что $f'(x_*; s) \geq 0$ для любого направления $s \in \Gamma(x_*|X)$. Тогда на основании теоремы 3.3.1 для любого $\alpha > 0$ справедливо неравенство $\phi(\alpha) \geq f'(x_*; s)$, где $\phi(\alpha)$ — функция (4.2.9). Поэтому

$$f(x_* + \alpha s) - f(x_*) \geq \alpha f'(x_*; s) \geq 0. \tag{4.2.10}$$

Беря теперь в (4.2.10) $\alpha = 1$ и $s = x - x_*$, где $x \in X$, получаем: $f(x) \geq f(x_*)$. Отсюда делаем вывод, что функция $f(x)$ достигает в x_* своего минимального значения на X. ■

Условия оптимальности для дифференцируемых целевых функций. Рассмотрим теперь задачу (4.1.1), предполагая, что множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло и функция $f(x)$ дифференцируема на нем. В этом случае, согласно лемме 4.2.1,

$$f'_T(x_*; s) = \langle f_x(x_*), s \rangle \tag{4.2.11}$$

для всех единичных касательных направлений.

Теорема 4.2.4. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на выпуклом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Тогда:*

1) если x_* — решение задачи (4.1.1), то

$$\langle f_x(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\ x \in X; \tag{4.2.12}$$

2) если функция $f(x)$ выпукла на X и в точке $x_* \in X$ выполняется (4.2.12), то x_* — решение выпуклой задачи (4.1.1).

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. В силу теоремы 4.2.2 и (4.2.11)

$$\langle f_x(x_*), s \rangle \geq 0 \quad \forall\ s \in \mathcal{T}(x_*|X). \tag{4.2.13}$$

Но множество X выпукло, поэтому в данном случае $\mathcal{T}(x_*|X) = \bar{\Gamma}(x_*|X)$, где $\Gamma(x_*|X)$ — конус возможных направлений (4.2.6), а $\bar{\Gamma}(x_*|X)$ — его замыкание.

Пусть $s = \lambda(x - x_*)$, где $x \in X$ и $\lambda > 0$. Тогда $s \in \Gamma(x_*|X)$ и, следовательно, $s \in \mathcal{T}(x_*|X)$. Поэтому на основании (4.2.13) имеет место неравенство $\lambda \langle f_x(x_*), x - x_* \rangle \geq 0$. Отсюда, так как x — произвольная точка из X, приходим к (4.2.12).

Убедимся теперь в справедливости второго утверждения. Пусть функция $f(x)$ выпукла на X и выполнено (4.2.12). Но тогда, используя

критерий выпуклости (3.2.2) для дифференцируемых функций, получаем
$$f(x) - f(x_*) \geq \langle f_x(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in X.$$
Таким образом, точка x_* есть решение задачи (4.1.1). ■

Сделаем пару замечаний относительно условия (4.2.12). Во-первых, из (4.2.12) следует, что антиградиент $-f_x(x_*)$ должен быть опорным вектором к множеству X в точке $x_* \in X$. Это можно выразить и другими словами, а именно, поскольку конус возможных направлений $\Gamma(x_*|X)$ относительно выпуклого множества X в точке $x_* \in X$ имеет вид (4.2.6), то неравенство (4.2.12) означает, что
$$f_x(x_*) \in \Gamma^*(x_*|X), \tag{4.2.14}$$
где $\Gamma^*(x_*|X)$ — сопряженный конус к конусу $\Gamma(x_*|X)$.

Во-вторых, условие (4.2.12) можно представить еще в одном виде:
$$\pi_X\left(x_* - \alpha f_x(x_*)\right) = x_*, \tag{4.2.15}$$
где $\pi_X(x)$ — проекция точки x на множество X, α — произвольное положительное число. В самом деле, перепишем неравенство (4.2.12) следующим образом: $\langle x_* - (x_* - \alpha f_x(x_*))\,, x - x_* \rangle \geq 0$, где $x \in X$. Отсюда на основании неравенства (2.3.1), справедливого для проекции точки на выпуклое замкнутое множество, заключаем, что x_* есть проекция вектора $x_* - \alpha f_x(x_*)$ на множество X, т.е. имеет место (4.2.15). Верно и обратное, если выполняется (4.2.15), то в силу (2.3.1) выполняется и неравенство (4.2.12). Мы приходим к следующей эквивалентной формулировке теоремы 4.2.4.

Теорема 4.2.5. *Пусть выполнены предположения теоремы 4.2.4. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in X$ была решением задачи (4.1.1), необходимо, а в случае, когда $f(x)$ — выпуклая функция, и достаточно, чтобы выполнялось включение (4.2.14) или равенство (4.2.15).*

Отметим также, что условие (4.2.12) имеет форму так называемого *вариационного неравенства*, общий вид которого следующий:
$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in X, \tag{4.2.16}$$
где $F(x)$ — некоторое отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Под решением вариационного неравенства понимается нахождение такой точки $x_* \in X$, для которой выполняется (4.2.16). В полученном условии (4.2.13) в качестве отображения $F(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ используется градиентное отображение $F(x) = f_x(x)$. Таким образом, для выпуклой задачи мини-

мизации (4.1.1), в которой $f(x)$ — дифференцируемая функция, отыскание точек минимума $f(x)$ на X сводится к решению вариационного неравенства с градиентным отображением на X.

Если неравенство (4.2.12) заменить на более сильное неравенство

$$\langle f_x(x_*), x - x_* \rangle \geq \theta \|x - x_*\| \quad \forall\, x \in X, \quad x \in \Delta_\varepsilon(x_*), \tag{4.2.17}$$

где $\theta > 0$ и $\Delta_\varepsilon(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_*\| \leq \varepsilon\}$ — ε-окрестность точки x_*, то приходим к достаточным условиям локального минимума в задаче (4.1.1), где требование выпуклости функции $f(x)$ уже отсутствует.

Теорема 4.2.6. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на выпуклом замкнутом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ и пусть для $x_* \in X$ при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\theta > 0$ выполняется неравенство (4.2.17). Тогда x_* — точка изолированного локального минимума функции $f(x)$ на X.*

Доказательство. Возьмем $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon$ такое, что

$$|f(x) - f(x_*) - \langle f_x(x_*), x - x_* \rangle| \leq \theta \|x - x_*\|/2$$

для $\|x - x_*\| \leq \varepsilon_1$. Тогда, беря $x \in X \cap \Delta_{\varepsilon_1}(x_*)$, получаем на основании (4.2.17)

$$f(x) \geq f(x_*) + \langle f_x(x_*), x - x_* \rangle - \theta \|x - x_*\|/2 \geq f(x_*) + \theta \|x - x_*\|/2.$$

Отсюда следует, что точка x_* является изолированным локальным минимумом функции $f(x)$ на X. ■

Если обратиться к простейшей задаче минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$, то неравенство $f'(0) > 0$ гарантирует, что начало координат является изолированным локальным минимумом $f(x)$ на $\mathbb{R}_+$.

Критерии оптимальности для задач безусловной минимизации. Из полученных результатов в качестве следствия могут быть получены условия оптимальности для задач безусловной минимизации (4.1.2) с дифференцируемыми целевыми функциями.

Теорема 4.2.7. *Пусть $f(x)$ — дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$. Тогда, для того чтобы точка x_* была решением задачи (4.1.2), необходимо, а в случае, когда $f(x)$ — выпуклая функция, и достаточно, чтобы $f_x(x_*) = 0_n$.*

Доказательство. Для множества X, совпадающим со всем пространством $\mathbb{R}^n$, конус возможных направлений $\Gamma(x_* | \mathbb{R}^n)$ также есть все пространство $\mathbb{R}^n$. Поэтому неравенство (4.2.12) может выполняться в том и только в том случае, когда $f_x(x_*) = 0_n$.

Достаточность условия $f_x(x_*) = 0_n$ для оптимальности точки x_* опять же следует из теоремы 4.2.4, так как в этом случае неравенство (4.2.12) тождественно выполняется как равенство. ■

Сделаем два замечания. Во-первых, полученное необходимое условие $f_x(x_*) = 0_n$ переносится также и на случай локальных минимумов. Во-вторых, можно ослабить требования к функции $f(x)$, считая, что она дифференцируема только в точке x_*. Обратим также внимание, что в случае выпуклой задачи безусловной минимизации (4.1.2) утверждение теоремы 4.2.7 совпадает с утверждением теоремы 4.1.9.

Полученные в этом и в предыдущих пунктах условия — это условия первого порядка. Точки, в которых они выполняются, принято называть *стационарными*. Приведем теперь условие второго порядка для задачи безусловной минимизации (4.1.1).

Теорема 4.2.8. (Достаточные условия второго порядка.) *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, точка x_* такова, что $f_x(x_*) = 0_n$. Тогда если*

$$\langle s, f_{xx}(x_*)s\rangle > 0 \quad \forall\ s \in \mathbb{R}^n,\ s \neq 0_n, \tag{4.2.18}$$

то x_* — точка строгого локального минимума функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Доказательство от противного. Предположим, что это не так. Тогда найдется последовательность $x_k \to x_*$ такая, что $f(x_k) \le f(x_*)$. Представим точки этой последовательности в следующем виде: $x_k = x_* + \alpha_k s_k$, где $\|s_k\| = 1$, $\alpha_k \to 0$. Имеем в силу дифференцируемости функции $f(x)$:

$$f(x_k) - f(x_*) = \alpha_k\langle f_x(x_*), s_k\rangle + \frac{\alpha_k^2}{2}\langle s_k, f_{xx}(x_*)s_k\rangle + o(\alpha^2)$$

или, поскольку $f_x(x_*) = 0_n$,

$$\frac{\alpha_k^2}{2}\langle s_k, f_{xx}(x_*)s_k\rangle + o(\alpha^2) = f(x_k) - f(x_*) \le 0. \tag{4.2.19}$$

Так как $\|s_k\| = 1$ для всех k, то из последовательности $\{s_k\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности считаем, что сходится сама последовательность $\{s_k\}$. Пусть $s_k \to \bar{s}$, где $\|\bar{s}\| = 1$. Тогда после деления левой и правой частей неравенства (4.2.19) на α_k и переходу к пределу при $k \to \infty$ получаем неравенство $\langle \bar{s}, f_{xx}(x_*)\bar{s}\rangle \le 0$, противоречащее (4.2.18). ■

Глава 5

Условия оптимальности для задач математического программирования

5.1. Необходимые условия первого порядка

В данном разделе мы продолжим исследование задач условной минимизации вида (4.1.1), однако теперь будет конкретизирован способ, с помощью которого задается допустимое множество X. Пусть имеются целевая функция $f(x)$ и две вектор-функции:

$$g(x) = [g^1(x), \ldots, g^l(x)] \quad \text{и} \quad h(x) = [h^1(x), \ldots, h^k(x)].$$

Вектор-функции $g(x)$ и $h(x)$, осуществляющие соответственно отображения: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ и $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, используются для задания ограничений в n-мерном пространстве переменных $x = [x^1, \ldots, x^n]$. Требуется найти

$$\min f(x) \quad \text{при условии, что} \quad g(x) = 0_l, \quad h(x) \leq 0_k. \tag{5.1.1}$$

Такую задачу оптимизации, подчеркивая, что ограничения в ней описываются функциональным образом, принято называть задачей *математического программирования.* Множество

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0_l, \ h(x) \leq 0_k\right\}$$

называется *допустимым.* Частными случаями задачи математического программирования (5.1.1) являются *классическая задача*, в которой присутствуют только ограничения типа равенства

$$\min f(x) \quad \text{при условии, что} \quad g(x) = 0_l, \tag{5.1.2}$$

и *задача с ограничениями-неравенствами*

$$\min f(x) \quad \text{при условии, что} \quad h(x) \le 0_k. \tag{5.1.3}$$

Напомним также, что если имеется некоторое допустимое базовое множество $\Pi \subset \mathbb{R}^n$ и в задаче (5.1.1) дополнительно требуется, чтобы $x \in \Pi$, то такая задача называется *общей задачей математического программирования.* В ней допустимое множество X имеет вид

$$X = \{x \in \Pi : \ g(x) = 0_l, \ h(x) \le 0_k\},$$

а сама задача (5.1.1) переписывается как

$$\min f(x) \quad \text{при условии, что} \quad g(x) = 0_l, \quad h(x) \le 0_k \quad x \in \Pi. \tag{5.1.4}$$

В качестве множества Π обычно берется выпуклое замкнутое множество *простой структуры*, например, неотрицательный ортант пространства или множество “параллелепипедного вида”, заключающееся в двусторонних ограничениях на переменные.

Рассмотрим условия оптимальности для задач математического программирования, т.е. соотношения, которые могут выполняться в точке $x_* \in X$ между значениями функций, входящими в постановку задачи, а также, быть может, их производными, если данная точка x_* является решением задачи (быть может, локальным). Понятно, что эти условия будут в сильной степени зависеть от свойств функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, определяющих конкретную задачу математического программирования, а именно являются ли эти функции линейными или выпуклыми, гладкие ли они или нет и т.д. Для разных типов функций и задач оптимизации условия принимают разный вид. Кроме того, здесь, как и для задач безусловной оптимизации, выделяют отдельно *необходимые* и *достаточные условия* оптимальности. Также эти условия могут носить *локальный* или *глобальный* характер и быть условиями *первого* или *второго порядка* в зависимости от того, какие производные используются при их формулировке. Разумеется, в этом случае функции, входящие в постановку задачи математического программирования, должны быть дифференцируемыми или дважды дифференцируемыми. Есть и отличие от задач безусловной оптимизации. Для задач с ограничениями могут быть получены и условия оптимальности *нулевого порядка*, т.е. условия, в которые не входят производные функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, а только их значения. Такие простейшие условия будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же нас будут интересовать условия первого порядка для задачи математического программирования (5.1.1). По существу, они являются развитием известных из анализа классических условий оптимальности для задачи с ограничениями-равенствами (5.1.2). Для их получения нам понадобится ряд вспомогательных результатов.

Утверждение 5.1.1. *Пусть* Π *— выпуклое множество в* $\mathbb{R}^n$ *и пусть* $\varphi_1(x), \ \ldots \ \varphi_m(x)$ *— выпуклые функции, определенные на* $\mathbb{R}^n$*. Тогда если система неравенств*

$$\varphi_1(x) < 0, \ \ldots \ \varphi_m(x) < 0 \tag{5.1.5}$$

не имеет решения в Π*, то найдутся не равные нулю в совокупности числа* $u^1 \geq 0, \ldots, u^m \geq 0$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} u^i \varphi_i(x) \geq 0 \quad \textit{для всех } x \in \Pi. \tag{5.1.6}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение множество

$$F = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ y = \varphi(x), \ x \in \Pi \right\},$$

которое является не чем иным, как образом множества Π при отображении $\varphi : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Данное множество может оказаться невыпуклым даже для выпуклых функции $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ и выпуклого множества Π, однако если заменить множество F на множество $F_+ = F + \mathbb{R}^m_+$, то оно, как несложно проверить, оказывается уже выпуклым.

Пусть $\mathbb{R}^m_{--} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ y^i < 0, \ i = 1, \ldots, m \right\}$ — отрицательный ортант $\mathbb{R}^m$, который, разумеется, является выпуклым множеством. Условие отсутствия в Π решения системы (5.1.5) означает, что два выпуклых множества F_+ и $\mathbb{R}^m_{--}$ не пересекаются между собой (см. рис. 5.1). Тем более не пересекаются между собой их относительные внутренности. Тогда согласно теореме о собственной отделимости выпуклых множеств 2.4.4 найдется ненулевой вектор $u \in \mathbb{R}^m$ такой, что

$$\langle u, y_1 \rangle \geq \langle u, y_2 \rangle, \tag{5.1.7}$$

когда $y_1 \in F_+$ и $y_2 \in \mathbb{R}^m_{--}$.

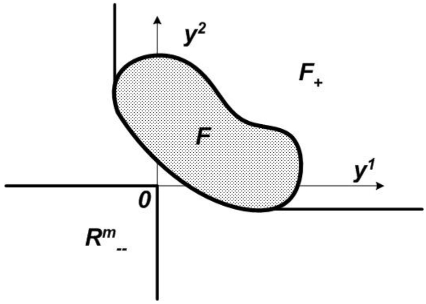

Рис. 5.1. Отсутствие пересечения у множества F_+ и отрицательного ортанта

Неравенство (5.1.7) должно выполняться для любых y_2 из ортанта $\mathbb{R}^m_{--}$. Поэтому, фиксируя все компоненты вектора y_2, кроме одной компоненты y_2^i, и устремляя эту компоненту к $-\infty$, убеждаемся, что неравенство (5.1.7) может иметь место только в том случае, когда $u^i \geq 0$, иначе правая часть стремится к $+\infty$. Отсюда, в силу произвольности выбора y_2^i, заключаем, что все компоненты вектора u должны быть неотрицательными. Кроме того, если устремить вектор y_2 к началу координат 0_m, то приходим к выводу, что для всех $y_1 \in F_+$ должно выполняться неравенство $\langle u, y_1 \rangle \geq 0$. Беря теперь $y_1 = \varphi(x)$, где $x \in \Pi$, получаем требуемое неравенство (5.1.6). ■

Если вместо системы неравенств (5.1.5) имеется система равенств

$$\varphi_1(x) = 0, \ \ldots \ \varphi_m(x) = 0, \tag{5.1.8}$$

то утверждение 5.1.1 заменяется на следующее.

Утверждение 5.1.2. *Пусть* Π *— выпуклое множество в* $\mathbb{R}^n$ *и пусть* $\varphi_1(x), \ \ldots \ \varphi_m(x)$ *— линейные функции, определенные на* $\mathbb{R}^n$. *Тогда если система равенств (5.1.8) не имеет решения в* Π, *то найдутся не равные нулю в совокупности числа* $u^1, \ldots, u^m$ *такие, что*

$$\sum_{i=1}^{m} u^i \varphi_i(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \Pi. \tag{5.1.9}$$

Доказательство аналогично доказательству предыдущего утверждения. Только теперь вместо множества F_+ берется образ выпуклого множества Π при линейном отображении $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, т.е. множество

$F = \{y \in \mathbb{R}^m : \ y = \varphi(x), x \in \Pi\}$. Данное множество является выпуклым. Вместо $\mathbb{R}^m_{--}$ берется множество $Y = \{0_m\}$, состоящее из единственной точки — начала координат в $\mathbb{R}^m$. ■

Результаты утверждений 5.1.1 и 5.1.2 можно объединить в более общее утверждение, называемое теоремой Фана.

Теорема 5.1.1. *Пусть* Π *— выпуклое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть, кроме того,* $\varphi_1(x)$, …, $\varphi_l(x)$ *— линейные функции, а* $\varphi_{l+1}(x)$, …, $\varphi_m(x)$ *— выпуклые функции. Тогда если система равенств и неравенств*

$$\varphi_1(x) = 0, \ldots, \varphi_l(x) = 0, \quad \varphi_{l+1}(x) < 0, \ldots, \varphi_m(x) < 0 \tag{5.1.10}$$

не имеет решения в Π, *то найдутся не равные нулю в совокупности числа* u^1, …, u^m *такие, что* $u^{l+1} \geq 0$, …, $u^m \geq 0$ *и*

$$\sum_{i=1}^{m} u^i \varphi_i(x) \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \Pi. \tag{5.1.11}$$

Замечание. *В частном случае, когда* Π *совпадает со всем пространством* $\mathbb{R}^n$, *а каждая из функции* $\varphi_i(x)$, …, $\varphi_m(x)$ *является линейной и однородной, т.е. функцией вида:* $\varphi^i(x) = \langle a_i, x\rangle$, *где* $a_i \in \mathbb{R}^n$, *неравенство (5.1.11) сводится к следующему:*

$$\sum_{i=1}^{m} u^i \langle a_i, x\rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} u^i a_i, x\rangle \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \mathbb{R}^n.$$

В силу произвольности вектора x *данное неравенство может выполняться только как равенство, при этом обязательно*

$$\sum_{i=1}^{m} u^i a_i = 0_n. \tag{5.1.12}$$

Приведенные условия (5.1.11) или (5.1.12) позволяют получить важные результаты, касающиеся задач оптимизации при наличии функциональных ограничений типа равенства и неравенства.

Принцип Лагранжа для задач математического программирования. Составим для задачи (5.1.1) *функцию Лагранжа* следующего вида:

$$L(x, q, u, v) = qf(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle, \tag{5.1.13}$$

где $q \geq 0$, $u \in \mathbb{R}^l$ и $v \in \mathbb{R}^k_+$. Если функции, входящие в постановку задачи (5.1.1), дифференцируемы, то частную производную функции Лагранжа по x будем обозначать через $L_x(x, q, u, v)$. Таким образом,

$$L_x(x, q, u, v) = qf_x(x) + g_x^T(x)u + h_x^T(x)v, \tag{5.1.14}$$

где $g_x(x)$ и $h_x(x)$ — матрицы Якоби для дифференцируемых отображений $g(x)$ и $h(x)$. Частные производные функции $L(x, q, u, v)$ по u и v всегда существуют и равны соответственно

$$L_u(x, q, u, v) = g(x), \quad L_v(x, q, u, v) = h(x).$$

Принцип Лагранжа является одним из основных результатов для задач математического программирования. Приведем сначала его формулировку.

Теорема 5.1.2. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Тогда, если точка $x_* \in X$ есть локальное решение задачи математического программирования* (5.1.1)*, то найдутся не равные нулю в совокупности число $q \geq 0$ и векторы $u_* \in \mathbb{R}^l$ и $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ такие, что*

$$L_x(x_*, q, u_*, v_*) = 0, \tag{5.1.15}$$

$$v_*^j h^j(x_*) = 0, \quad j = 1, \ldots, k. \tag{5.1.16}$$

Доказательство теоремы 5.1.2 мы проведем несколько позже, а предварительно обсудим ее утверждение и попутно дадим несколько используемых в дальнейшем определений. Точка $x_* \in X$, удовлетворяющая (5.1.15) при некоторых q, u_* и v_*, называется *стационарной*. Принцип Лагранжа гласит, что любое локальное решение задачи (5.1.1) является стационарной точкой. При этом числа q, $u_*^1, \ldots, u_*^l$ и $v_*^1, \ldots, v_*^k$ называются *множителями Лагранжа*. Множители, соответствующие ограничениям типа неравенства, согласно принципу Лагранжа должны быть неотрицательными.

Ограничение типа неравенства $h^j(x) \leq 0$ называется *активным* в точке $x_* \in X$, если $h^j(x_*) = 0$, т.е. оно выполняется как равенство. Условие (5.1.16) называется *условием дополняющей нежесткости* (или, в более простом, хотя не общепринятом варианте, *условием дополнительности*). Согласно нему $v_*^j = 0$, если ограничение $h^j(x) \leq 0$ не является активным в точке x_*, т.е. $h^j(x_*) < 0$. Введем обозначения:

$$J_0(x) = \left\{1 \leq j \leq k : \ h^j(x) = 0\right\}, \quad J_-(x) = \left\{1 \leq j \leq k : \ h^j(x) < 0\right\},$$

которые будем называть соответственно *множествами индексов активных и неактивных ограничений типа неравенства* в точке $x \in X$.

Заметим также, что утверждение теоремы тривиально, если x_* есть точка локального минимума функции $f(x)$ на всем пространстве, т.е. когда в ней выполняется необходимое условие безусловного минимума $f_x(x_*) = 0_n$. В этом случае достаточно положить $q = 1$, $u_* = 0_l$ и $v_* = 0_k$. Поэтому далее рассматриваем только нетривиальный случай, когда $f_x(x_*) \neq 0_n$. Точно так же предполагаем, что среди активных ограничений нет ограничения $h^j(x) \leq 0$, $j \in J_0(x_*)$, такого, что $h^j_x(x_*) = 0_n$, иначе в качестве ненулевого множителя опять можно взять множитель $v^j_* > 0$, полагая все остальные множители равными нулю.

Доказательство принципа Лагранжа в случае линейных ограничений-равенств. Для простоты проведем его сначала при дополнительном предположении, что $g(x)$ — линейная вектор-функция, т.е. все ее компоненты — линейные функции. Напомним, что $s \in \mathbb{R}^n$ называется *направлением убывания* функции $f(x)$ в точке $x \in \mathbb{R}^n$, если $f(x + \alpha s) < f(x)$ для всех достаточно малых $\alpha > 0$. Пусть $U_f(x)$ — множество всех направлений убывания функции $f(x)$ в точке x. Если функция $f(x)$ дифференцируема в x и $\langle f_x(x), s\rangle < 0$, то обязательно $s \in U_f(x)$.

Рассмотрим следующую линейную систему равенств и неравенств:

$$
\begin{array}{rcll}
\langle f_x(x_*), x - x_*\rangle & < & 0, & \\
\langle g^i_x(x_*), x - x_*\rangle & = & 0, & i = 1, \ldots, l, \\
\langle h^j_x(x_*), x - x_*\rangle & < & 0, & j \in J_0(x_*).
\end{array}
\qquad (5.1.17)
$$

Убедимся сначала, что поскольку точка x_* есть локальное решение задачи (5.1.1), то данная система не имеет решения. От противного, пусть это не так и можно указать $x \in \mathbb{R}^n$ отличное от x_*, которое удовлетворяет системе (5.1.17). Обозначим $s = x - x_*$. Из первого и последнего неравенств (5.1.17) следует, что s является направлением убывания для функций $f(x)$ и $h^j(x)$, $j \in J_0(x_*)$, в точке x_*. Кроме того, так как точка x_* допустима, то для $j \in J_-(x_*)$ выполняется $h^j(x_*) < 0$. Поэтому в силу непрерывности $h^j(x)$ для достаточно малых по модулю α имеет место неравенство $h^j(x_* + \alpha s) < 0$. Для ограничений типа равенства из-за предположения о линейности функций $g^i(x)$ получаем

$$
g^i(x_* + \alpha s) = g^i(x_*) + \alpha\langle g^i_x(x_*), s\rangle = \alpha\langle g^i_x(x_*), s\rangle = 0
$$

для всех $\alpha \in \mathbb{R}$ и всех $i = 1, \ldots, l$.

Из вышесказанного делаем вывод, что s является *возможным направлением* относительно допустимого множества X в точке $x_* \in X$.

Более того, s есть направление убывания целевой функции $f(x)$ в этой точке. Это означает, что для достаточно малого положительно α выполняется

$$x_* + \alpha s \in X, \quad f(x_* + \alpha s) < f(x_*),$$

что противоречит оптимальности точки x_*. Следовательно, сделанное предположение о существовании решения у системы (5.1.17) неверно. Она не имеет решения или, что то же самое, не имеет решения относительно $s \in \mathbb{R}^n$ система равенств и неравенств

$$\begin{array}{rcll} \langle f_x(x_*), s\rangle & < & 0, & \\ \langle g_x^i(x_*), s\rangle & = & 0, & i = 1, \dots, l, \\ \langle h_x^j(x_*), s\rangle & < & 0, & j \in J_0(x_*) \end{array} \tag{5.1.18}$$

с линейными однородными функциями. Тогда по теореме Фана, точнее, по формуле (5.1.12), следующей из ее утверждения, должны найтись число $q \geq 0$, а также числа u_*^i, $1 \leq i \leq l$ и $v_*^j \geq 0$, $j \in J_0(x_*)$, такие, что в совокупности они не равны нулю, и оказывается справедливым равенство

$$q f_x(x_*) + \sum_{i=1}^{l} u_*^i g_x^i(x_*) + \sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j h_x^j(x_*) = 0_n. \tag{5.1.19}$$

Введенное условие дополняющей нежесткости (5.1.16) позволяет включить во вторую сумму и неактивные ограничения типа неравенства, так как соответствующие множители Лагранжа v_*^j, $j \in J_-(x_*)$, согласно этому условию равняются нулю. Равенство (5.1.19) от этого не изменится, следовательно, выполняется первое условие (5.1.15).

Доказательство принципа Лагранжа в случае нелинейных ограничений-равенств. Для таких ограничений оно несколько сложнее. Один из возможных способов заключается в использовании теоремы о неявной функции.

Прежде всего отметим, что утверждение теоремы тривиально, когда градиенты ограничений-равенств линейно зависимы в точке x_*. Тогда можно указать ненулевой вектор $u_* \in \mathbb{R}^l$ такой, что $g_x^T(x_*) u_* = 0_n$. Полагая все остальные множители $v_*^1, \dots, v_*^k$, соответствующие ограничениям-неравенствам, а также множитель q, равными нулю, приходим к (5.1.15), (5.1.16).

Рассмотрим далее более интересный случай, когда градиенты $g_x^1(x_*)$, $\dots, g_x^l(x_*)$ линейно независимы. При этом предположении ранг матрицы $g_x(x_*)$ равен l и среди всех ее квадратных подматриц порядка l

можно выделить неособую подматрицу. Не умаляя общности, считаем, что это последние l столбцов матрицы $g_x(x_*)$.

Разобьем переменную x на пару переменных $y \in \mathbb{R}^{n-l}$ и $z \in \mathbb{R}^l$, т.е. считаем, что $x = [y, z]^T$. Функцию $g(x)$ также представим в виде функции, зависящей от пары переменных $g(y, z)$. В силу сделанного предположения в точке $x_* = [y_*, z_*]$ выполняется: $\det g_z(y_*, z_*) \neq 0$. Поэтому по теореме о неявной функции можно указать окрестность $\Delta_\varepsilon(y_*)$ точки y_* и непрерывную функцию $z(y)$ такие, что

$$g(y, z(y)) \equiv 0_l \tag{5.1.20}$$

при $y \in \Delta_\varepsilon(y_*)$ и $z(y_*) = z_*$.

Функция $z(y)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки y_*. Дифференцируя тождество (5.1.20) по y, получаем

$$g_y(y, z(y)) + g_z(y, z(y))z_y(y) = 0_{n-l},$$

откуда следует

$$z_y(y) = -g_z^{-1}(y, z(y))g_y(y, z(y)). \tag{5.1.21}$$

Подставим функцию $z(y)$ в целевую функцию $f(x)$ и в вектор-функцию $h(x)$, с помощью которой задаются ограничения-неравенства. Тогда они становятся функциями, зависящими только от переменной y, т.е. $\tilde{f}(y) = f(y, z(y))$, $\tilde{h}(y) = h(y, z(y))$. Если x_* есть точка локального минимума функции $f(x)$ на X, то y_* есть точка локального минимума функции $\tilde{f}(y)$ на множестве $Y = \{y \in \mathbb{R}^{n-l} : \ \tilde{h}(y) \leq 0_k\}$.

Используя доказательство принципа Лагранжа в случае линейных ограничений-равенств (фактически считая, что ограничений-равенств вообще нет), приходим к выводу, что найдутся не равные нулю в совокупности числа $q \geq 0$ и $v_*^1 \geq 0, \ldots, v_*^k \geq 0$ такие, что имеют место равенства

$$q\tilde{f}_y(y_*) + \sum_{j=1}^{k} v_*^j \tilde{h}_y^j(y_*) = 0_{n-l}, \tag{5.1.22}$$

$$v_*^j \tilde{h}^j(y_*) = 0, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{5.1.23}$$

Возвращаясь обратно к записи $[y_*, z_*] = x_*$, получаем согласно (5.1.21):

$$\begin{aligned}\tilde{f}_y(y_*) = f_y(y_*, z_*) + z_y^T(y_*) f_z(y_*, z_*) = \\ = f_y(x_*) - g_y^T(x_*) \left(g_z^T(x_*)\right)^{-1} f_z(x_*),\end{aligned}$$

$$\tilde{h}_y^T(y_*) = h_y^T(y_*, z_*) + z_y^T(y_*) h_z^T(y_*, z_*) = \\ = h_y^T(x_*) - g_y^T(x_*) \left(g_z^T(x_*)\right)^{-1} h_z^T(x_*).$$

Поэтому равенство (5.1.22) может быть переписано как

$$q f_y(x_*) + h_y^T(x_*) v_* + g_y^T(x_*) u_* = 0_{n-l}, \tag{5.1.24}$$

где

$$\begin{array}{rcl} u_* & = & -\left[q\left(g_z^T(x_*)\right)^{-1} f_z(x_*) + \left(g_z^T(x_*)\right)^{-1} h_z^T(x_*) v_*\right] = \\ & = & -\left(g_z^T(x_*)\right)^{-1}\left[q f_z(x_*) + h_z^T(x_*) v_*\right]. \end{array} \tag{5.1.25}$$

Остается только заметить, что если воспользоваться функцией Лагранжа (5.1.13), то равенство (5.1.24) можно представить как требование равенства нулю градиента этой функции по части переменных x, а именно по переменным y:

$$L_y(x_*, q, u_*, v_*) = 0_{n-l}. \tag{5.1.26}$$

К выражению (5.1.25) для множителей Лагранжа $u_* = [u_*^1, \ldots, u_*^l]$ можно прийти, если приравнять нулю градиент функции Лагранжа (5.1.13) по оставшейся части переменных:

$$L_z(x_*, q, u_*, v_*) = 0_l. \tag{5.1.27}$$

Действительно, тогда u_* удовлетворяет уравнению

$$q f_z(x_*) + h_z^T(x_*) v_* + g_z^T(x_*) u_* = 0_l.$$

Поскольку матрица $g_z(x_*)$ неособая, то разрешая это уравнение относительно u_*, получаем (5.1.25).

Объединение равенств (5.1.26) и (5.1.27) дает (5.1.15). Условие дополняющей нежесткости (5.1.23) переписывается очевидным образом в виде (5.1.16). ■

Замечание. *Требования к дифференцируемости функций $f(x)$ и $h(x)$ в условиях теоремы 5.1.2 могут быть несколько ослаблены, а именно достаточно потребовать их обычной дифференцируемости, а не непрерывной.*

Условия типа (5.1.15), (5.1.16) были получены Ф. Джоном в 1948 году при решении одной геометрической задачи. В 1951 году они были вновь переполучены Х. Куном и А. Таккером при несколько других предположениях о задаче и долгое время их называли условиями

Куна–Таккера. В дальнейшем выяснилось, что близкие условия впервые были сформулированы в 1939 году В. Карушем. Поэтому сейчас их принято называть условиями Каруша–Куна–Таккера, причем часто сохраняется и прежнее название — условия Куна–Таккера. Мы будем пользоваться в дальнейшем последним названием.

Отметим, что множители q, u_* и v_* в условиях (5.1.15), (5.1.16) определены с точностью до постоянной положительной константы. Действительно, если тройка $[q, u_*, v_*]$ удовлетворяет условиям (5.1.15) и (5.1.16), то для произвольного $\lambda > 0$ тройка $[\lambda q, \lambda u_*, \lambda v_*]$ также удовлетворяет этим условиям. Важный случай, когда $q > 0$. Тогда, взяв $\lambda = q^{-1}$, мы приходим к тому, что равенства (5.1.15) и (5.1.16) можно записать с использованием только множителей u_* и v_*, а множитель q считать равным единице. Таким образом, все сводится, по существу, к рассмотрению только двух случаев: $q = 0$ и $q = 1$. Любое дополнительное предположение, которое обеспечивает в рамках теоремы 5.1.2 случай $q = 1$, называется *условием регулярности*, а сама задача математического программирования, в которой оно выполняется, *регулярной*. Для такой задачи рассматривают функцию Лагранжа, зависящую лишь от трех переменных:

$$L(x, u, v) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle. \tag{5.1.28}$$

Чтобы подчеркнуть ее отличие от функции (5.1.14), будем называть (5.1.28) *регулярной функцией Лагранжа*, а (5.1.14) — *общей функцией Лагранжа*. Функцию (5.1.14) называют также *функцией Джона* или *функцией Лагранжа–Джона*.

Если воспользоваться теоремой Моцкина 2.6.12 об альтернативах, то анализ доказательства принципа Лагранжа 5.1.2 показывает, что в случае линейных ограничений типа равенства $g(x) = 0_l$ множители q и v_*^j, $j \in J_0(x_*)$, должны быть в совокупности отличны от нуля. Более того, если ограничения типа неравенства $h(x) \le 0_k$ также линейные, то строгие неравенства $\langle h_x^j(x_*), s\rangle < 0$, $j \in J_0(x_*)$, в системе (5.1.18) могут быть заменены на нестрогие неравенства $\langle h_x^j(x_*), s\rangle \le 0$. Опять же по теореме Моцкина 2.6.12 это приводит к тому, что только множитель q заведомо должен быть положительным. Следовательно, для задач с линейными ограничениями можно пользоваться регулярной функцией Лагранжа, не вводя условий регулярности.

В случае, когда среди ограничений в задаче (5.1.1) имеются нелинейные, без дополнительных условий регулярности уже не обойтись. Приведем одно из таких условий. В нем от функций $g(x)$ и $h(x)$, определяющих допустимое множество в задаче (5.1.1), требуется, чтобы они были дифференцируемы.

Условие регулярности ограничений. *Градиенты ограничений* $g^i_x(x_*)$, $1 \le i \le l$, *и* $h^j_x(x_*)$, $j \in J_0(x_*)$, *линейно независимы.*

При выполнении данного условия регулярности ограничений в точке x_* случай $q = 0$ в условии (5.1.15) теоремы 5.1.2 невозможен. Действительно, тогда вместо (5.1.15) для u_* и v^j_*, $j \in J_0(x_*)$, не равных нулю в совокупности, выполнялось бы равенство

$$g^T_x(x_*)u_* + \sum_{i \in J_0(x_*)} v^j_* h^j_x(x_*) = 0_n.$$

Данное равенство противоречит предположению о линейной независимости градиентов ограничений в данной точке.

Другим возможным условием регулярности ограничений в точке x_*, опять же требующим дифференцируемости функций $f(x)$ и $g(x)$, является следующее условие.

Условие регулярности ограничений Мангасариана–Фромовица. *Ранг матрицы* $g_x(x_*)$ *равен* l *и существует такое* $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$, *что* $g_x(x_*)\bar{s} = 0_l$ *и*

$$\langle h^j_x(x_*), \bar{s} \rangle < 0, \quad j \in J_0(x_*). \tag{5.1.29}$$

При выполнении условия Мангасариана–Фромовица снова получаем, что случай, когда $q > 0$, не возможен. В самом деле, если предположить противное, что $q = 0$, то тогда вектор $[u_*, v_*] \in \mathbb{R}^{l+k}$ должен быть ненулевым. При этом обязательно $v^j_* > 0$ хотя бы для одного индекса $j \in J_0(x_*)$, ибо иначе $u_* \neq 0_l$ и из (5.1.19) следовало бы равенство $g^T_x(x_*)u_* = 0_n$, противоречащее условию rank $g_x(x_*) = l$. Далее, беря ненулевой вектор $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий (5.1.29) и такой, что $g_x(x_*)\bar{s} = 0_l$, получаем, с одной стороны,

$$\langle g^T_x(x_*)u_*, \bar{s} \rangle + \sum_{j \in J_0(x_*)} v^j_* \langle h_x(x_*), \bar{s} \rangle = \sum_{j \in J_0(x_*)} v^j_* \langle h_x(x_*), \bar{s} \rangle < 0.$$

С другой стороны, согласно (5.1.19)

$$\begin{aligned} &\langle g^T_x(x_*)u_*, \bar{s} \rangle + \textstyle\sum_{j \in J_0(x_*)} v^j_* \langle h^j_x(x_*), \bar{s} \rangle = \\ &\qquad = \langle \textstyle\sum_{i=1}^l u^i_* g^i_x(x_*) + \textstyle\sum_{j \in J_0(x_*)} v^j_* h^j_x(x_*), \bar{s} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Мы пришли к противоречию, поэтому обязательно $q > 0$.

Для задач, содержащих только ограничения типа равенства, условие Мангасариана–Фромовица переходит в требование линейной независимости градиентов ограничений $g^i_x(x_*)$, $1 \le i \le l$. Для задач же,

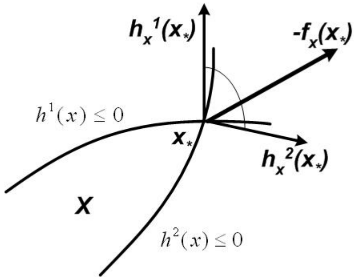

Рис. 5.2. Принадлежность антиградиента целевой функции конусу, порожденному градиентами активных ограничений

содержащих только ограничения типа неравенства, оно сводится к существованию вектора $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$, для которого имеет место (5.1.29).

В регулярном случае условия (5.1.15), (5.1.16), пополненные требованиями, что $x_* \in X$ и $v_* \ge 0_k$, записываются в виде

$$\begin{array}{rcl} L_x(x_*, u_*, v_*) & = & 0_n, \\ L_u(x_*, u_*, v_*) & = & g(x_*) = 0_l, \\ L_v(x_*, u_*, v_*) & = & h(x_*) \le 0_k, \quad v_* \ge 0_k, \\ \langle L_v(x_*, u_*, v_*), v_* \rangle & = & 0. \end{array} \tag{5.1.30}$$

Такие условия, наряду с (5.1.15), (5.1.16), также называются условиями Каруша–Куна–Таккера или Куна–Таккера, а тройка $[x_*, u_*, v_*]$, состоящая из основной переменной x_* и множителей Лагранжа u_* и v_*, — *точками Каруша–Куна–Таккера.* Отметим, что теперь от множителей u_* и v_* не требуется, чтобы, по крайней мере, один из них был ненулевым вектором. Например, если $f_x(x_*) = 0_n$, то первое равенство в (5.1.30) выполняется и когда $u_* = 0_l$, $v_* = 0_k$.

Геометрически первое равенство в (5.1.30) означает, что антиградиент целевой функции $-f_x(x_*)$ должен принадлежать пересечению линейного подпространства, натянутого на градиенты ограничений типа равенства, и конуса, порожденного градиентами активных ограничений типа неравенства. Для случая, когда в задаче присутствуют только ограничения типа неравенства и лишь два из них являются активными в точке x_*, данная ситуация иллюстрируется рис. 5.2.

Обратим также внимание, что последняя пара условий в определении точки Каруша–Куна–Таккера, а именно условие допустимости $h(x_*) \le 0_k$ и условие дополняющей нежесткости $\langle h(x_*), v_* \rangle = 0$, вместе с требованием $v_* \ge 0_k$ распадаются на k равенств: $h^j(x_*)v_*^j = 0$,

$1 \le j \le k$. Данная пара условий может быть записана также и в виде одного равенства:

$$\pi_{R^k_+}(v_* + \alpha L_v(x_*, u_*, v_*)) = v_*, \tag{5.1.31}$$

где $\pi_{R^k_+}(z)$ — проекция вектора $z \in \mathbb{R}^k$ на неотрицательный ортант $\mathbb{R}^k_+$, α — произвольное положительное число.

Действительно, предположим, что выполнено (5.1.31). Так как проекция произвольного вектора $z \in \mathbb{R}^k$ на неотрицательный ортант R^k_+ имеет вид $\pi_{R^k_+}(z) = z_+$, то (5.1.31) можно представить как

$$(v_* + \alpha h(x_*))_+ = v_*. \tag{5.1.32}$$

Поэтому если для некоторого $j \in [1 : k]$ выполняется неравенство $v^j_* + \alpha h^j(x_*) \ge 0$, то из (5.1.32) следует равенство $v^j_* + \alpha h^j(x_*) = v^j_*$ и, стало быть, $h^j(x_*) = 0$, $h^j(x_*)v^j_* = 0$. Если $v^j_* + \alpha h^j(x_*) < 0$, то для данного j согласно (5.1.32) обязательно $v^j_* = 0$. Таким образом, $h^j(x_*) < 0$ и опять $h^j(x_*)v^j_* = 0$.

Упражнение 23. *Покажите, что равенство (5.1.31) эквивалентно выполнению включения*

$$-L_v(x_*, u_*, v_*) = -h(x_*) \in \Gamma^*(v_*|\mathbb{R}^k_+),$$

где $\Gamma(v|\mathbb{R}^k_+)$ — конус возможных направлений относительно множества $\mathbb{R}^k_+$ в точке $v \in \mathbb{R}^k_+$, $\Gamma^*(v|\mathbb{R}^k_+)$ — сопряженный конус к конусу $\Gamma(v|\mathbb{R}^k_+)$.

Для общей задачи математического программирования (5.1.4) принцип Лагранжа записывается следующим образом.

Теорема 5.1.3. *Пусть в общей задаче математического программирования (5.1.4) множество Π выпукло и замкнуто, а функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ определены и непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Тогда если $x_* \in X$ есть локальное решение (5.1.4), то найдутся не равные нулю в совокупности число $q \ge 0$ и векторы $u_* \in \mathbb{R}^l$, $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ такие, что*

$$\langle L_x(x_*, q, u_*, v_*), x - x_* \rangle \ge 0 \quad \forall\, x \in \Pi, \tag{5.1.33}$$

$$v^j_* h^j(x_*) = 0, \quad 1 \le j \le k. \tag{5.1.34}$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1.2. Заметим только, что неравенство (5.1.33) переходит в равенство (5.1.15), если в качестве множества Π берется все пространство $\mathbb{R}^n$. Отметим также, что в обеих теоремах 5.1.2 и 5.1.3 можно ослабить требования к дифференцируемости функций, определяющих поставленную задачу, а именно достаточно предположить, что функции $f(x)$ и $h(x)$ дифференцируемы только в точке x_*, а функция $g(x)$ непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности x_*.

В заключение данного раздела обратим внимание на связь множителей Лагранжа с решениями параметрического семейства задач условной оптимизации. Попутно укажем на полезность использования формализма Лагранжа для вычисления производных функций со связанными переменными.

Рассмотрим задачу условной оптимизации с ограничениями-равенствами

$$\min_{x \in X} f(x), \quad X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; g(x) = 0_l \right\}, \tag{5.1.35}$$

где $l < n$. Относительно функции $f(x)$ и вектор-функции $g(x)$ считаем, что они непрерывно дифференцируемы. Считаем также, что в решении этой задачи — точке x_* — выполняются необходимые условия Каруша–Куна–Таккера для классической функции Лагранжа. Обозначим $d = n - l$.

Разобьем вектор x на две компоненты: $y \in \mathbb{R}^l$ и $z \in \mathbb{R}^d$. Для простоты считаем, что вектор y состоит из первых l компонент вектора x, а вектор z — из последующих d компонент. Тогда $x = [y, z]$, $f(x) = f(x, y)$ и $g(x) = g(x, y)$.

Выделим теперь некоторую точку $x_* = [y_*, z_*]$. Если матрица Якоби $g_y(y_*, z_*)$ неособая, то по теореме о неявной функции можно указать некоторую окрестность $\Delta(z_*)$ точки z_*, в которой существует непрерывно дифференцируемая функция $y(z)$ такая, что

$$g(y(z), z) \equiv 0_l, \tag{5.1.36}$$

причем $y(z_*) = y_*$. Поэтому если точка x_* является решением задачи (5.1.35), то точка z_* является минимумом функции $\tilde{f}(z) = f(y(z), z)$.

Вычислим градиент функции $\tilde{f}(z)$. Дифференцируя сложную функцию, приходим к

$$\tilde{f}_z(z) = f_z(y(z), z) + y_z^T(z) f_y(y(z), z).$$

Из тождества (5.1.36) после его дифференцирования получаем

$$g_y(y(z), z) y_z(z) + g_z(y(z), z) = 0_l.$$

Так как по предположению матрица $g_y(y(z),z)$ неособая в точке z_*, то в силу непрерывности она будет оставаться неособой и в окрестности $\Delta(z_*)$. Поэтому

$$y_z(z) = -g_y^{-1}(y(z),z)g_z(y(z),z).$$

После подстановки имеем

$$\tilde{f}_z(z) = f_z(y(z),z) - g_z^T(y(z),z)(g_y^{-1}(y(z),z))^T f_y(y(z),z). \qquad (5.1.37)$$

К выражению (5.1.37) для производной функции $\tilde{f}(z)$ можно прийти, используя функцию Лагранжа:

$$L(y,z,u) = f(y,z) + \langle u, g(y,z)\rangle, \quad u \in \mathbb{R}^l.$$

Если продифференцировать $L(y,z,u)$ по z и y соответственно и приравнять производную по y нулю, то имеем

$$L_z(y,z,u) = f_z(y,z) + g_z^T(y,z)u, \qquad (5.1.38)$$

$$L_y(y,z,u) = f_y(y,z) + g_y^T(y,z)u = 0_l. \qquad (5.1.39)$$

Вычислим на основании второго равенства (5.1.39) множитель u и подставим его в (5.1.38). Тогда получаем то же самое выражение (5.1.37) для производной $\tilde{f}_z(z)$, если положить $y = y(z)$. Таким образом,

$$\tilde{f}_z(z) = L_z(y(z),z,u), \quad L_y(y(z),z,u) = 0_l, \qquad (5.1.40)$$

т.е. подсчитывать производную функции, переменные в которой связаны между собой, можно по формуле (5.1.40), применяя формализм Лагранжа.

Отметим, что вектор u есть фактически функция от z. В решении задачи (5.1.35) — точке $x_* = [y_*, z_*]$, где $y_* = y(z_*)$, — дополнительно выполняется равенство $\tilde{f}_z(z_*) = L_z(y_*, z_*, u_*) = 0_d$.

Рассмотрим далее параметрическое семейство задач

$$f_*(b) = \min_{x \in X} f(x), \quad X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = b \right\}. \qquad (5.1.41)$$

Исходная задача (5.1.35) входит в это семейство при $b = 0_l$.

Обозначим через $x_*(b)$ решение задачи (5.1.41). Нас будет интересовать вопрос, как решение задачи (5.1.41) зависит от b, а точнее, как изменяется оптимальное значение целевой функции при малом изменении параметра b, т.е. когда b принадлежит к некоторой окрестности начала координат.

Если опять, учитывая связь $g(x) = b$, перейти к задаче с меньшим числом переменных, то теперь вместо зависимости $y(z)$ у нас появится зависимость $y(z, b)$ и будет выполняться тождество

$$g(y(z,b), z) - b \equiv 0_l.$$

Функция $\tilde{f}$ становится функцией двух параметров, а именно z и b, т.е. $\tilde{f}(z,b) = f(y(z,b), z)$. Используя примененный выше формализм Лагранжа для подсчета производной функции, аргументы которой связаны равенством, мы можем также подсчитать и производную функции $\tilde{f}(z,b)$ по b. Имеем теперь

$$\tilde{f}_b(z,b) = L_b(y, z, b, u), \tag{5.1.42}$$

где

$$L(y,z,b,u) = f(y,z) + \langle u, g(y,z) - b\rangle, \quad u \in \mathbb{R}^l.$$

Вектор u в (5.1.42) удовлетворяет системе $L_y(y,z,b,u) = 0_l$. Из (5.1.42) следует, что $\tilde{f}_b(z,b) = -u = -u(y,z)$.

Если для каждого b из окрестности 0_l найти решение задачи (5.1.41), то получим точки $z_* = z_*(b)$ и $y_* = y_*(b) = y(z_*, b)$. Кроме того, поскольку $f_*(b) = f(y_*(b), z_*(b))$, имеет место равенство

$$\frac{d\ f_*(0_m)}{d\ b} = -u_*, \quad u_* = u(y_*(0_m), z_*(0_m)). \tag{5.1.43}$$

Функция $f_*(b)$, определяемая согласно (5.1.41), носит название *функции чувствительности*. Она указывает на влияние правой части в равенстве $g(x) = b$, задающем допустимое множество, на решение задач оптимизации (5.1.41). Из необходимого условия $L_x(x_*, b_*, u_*) = 0_n$ вытекает, в частности, что $L_y(y_*, z_*, 0_m, u_*) = 0_l$. Поэтому множитель Лагранжа u_* в (5.1.43) на самом деле является тем же самым множителем Лагранжа, который входит в систему условий Каруша–Куна–Таккера для задачи (5.1.35). Формула (5.1.43) показывает, что данный множитель u_* есть антиградиент функции чувствительности. Таким образом, любая компонента u_*^i вектора u_* указывает на влияние соответствующей компоненты вектора-возмущения b^i на решение задачи (5.1.41).

Аналогичную интерпретацию множителей Лагранжа можно получить для задачи с ограничениями типа неравенства $g(x) \le b$. Понятно, что если решение x_* таково, что для какой-то компоненты $g^i(x)$ имеет место строгое неравенство $g^i(x_*) < b_*^i$, то для соответствующего множителя u_*^i в силу условия дополняющей нежесткости выполняется

$u_*^i = 0$. С точки зрения вышесказанного это означает, что изменение i-го ресурса (компоненты b^i) совершенно не существенно для решения задачи.

5.2. Условия оптимальности для задач выпуклого программирования

Обратимся теперь к выпуклой задаче математического программирования

$$\min_{x\in X} f(x) \quad X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \; g(x) = 0_l, \quad h(x) \leq 0_k, \quad x \in \Pi\right\}, \tag{5.2.1}$$

в которой предполагается, что $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество и что $f(x)$ и все компоненты $h^1(x), \ldots, h^k(x)$ вектор-функции $h(x)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$. Относительно компонент $g^1(x), \ldots, g^l(x)$ вектор-функции $g(x)$ считается, что они линейные функции на $\mathbb{R}^n$. Данную задачу, как уже отмечалось, принято называть задачей *выпуклого программирования*. Важно, что если она регулярная, то условия теоремы 5.1.3 оказываются не только необходимыми, но и достаточными для того, чтобы точка x_* оказалась ее глобальным решением. Составим для задачи (5.2.1) регулярную функцию Лагранжа:

$$L(x, u, v) = f(x) + \langle g(x), u\rangle + \langle h(x), v\rangle.$$

Теорема 5.2.1. *Пусть в выпуклой задаче математического программирования (5.2.1) функции $f(x)$ и $h(x)$ дифференцируемы. Тогда если в точке $x_* \in X$ при некоторых $u_* \in \mathbb{R}^l$ и $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ выполнены условия*

$$\langle L_x(x_*, u_*, v_*), x - x_*\rangle \geq 0 \quad \forall\; x \in \Pi, \tag{5.2.2}$$

$$v_*^j h^j(x_*) = 0, \quad 1 \leq j \leq k, \tag{5.2.3}$$

то x_* — глобальное решение задачи (5.2.1).

Доказательство. При сделанных предположениях функция Лагранжа $L(x, u_*, v_*)$, где u_* и v_* фиксированы, выпукла по x на Π. Более того, согласно (5.2.2), точка x_* есть решение вариационного неравенства (4.2.16) с отображением $F(x) = L_x(x, u_*, v_*)$. Поэтому в силу необходимых и достаточных условий теоремы 4.2.4 x_* есть точка минимума функции $L(x, u_*, v_*)$ на множество Π, т.е.

$$L(x_*, u_*, v_*) \leq L(x, u_*, v_*) \quad \forall\; x \in \Pi. \tag{5.2.4}$$

Так как $g(x_*) = 0_l$, то $\langle g(x_*), u_* \rangle = 0$. Кроме того, поскольку для активных ограничений $h^j(x_*) = 0$, а для неактивных ограничений $v_*^j = 0$, то на основании (5.2.3) имеем $\langle v_*, h(x_*) \rangle = 0$. Тогда неравенство (5.2.4) переписывается в более подробном виде как

$$f(x_*) = L(x_*, u_*, v_*) \le f(x) + \langle u_*, g(x) \rangle + \langle v_*, h(x) \rangle \quad \forall\, x \in \Pi. \quad (5.2.5)$$

Учтем теперь, что $g(x) = 0_l$ и $h(x) \le 0_k$ для всех $x \in X$, а также, что $v_* \ge 0_k$. Тогда $\langle u_*, g(x) \rangle = 0$, $\langle v_*, h(x) \rangle \le 0$, если $x \in X$. Поскольку $X \subseteq \Pi$, то из (5.2.5) получаем

$$f(x_*) \le f(x) + \langle u_*, g(x) \rangle + \langle v_*, h(x) \rangle \le f(x) \quad \forall\, x \in X.$$

Таким образом, точка x_* является глобальным решением задачи (5.2.1). ■

Утверждение теоремы 5.2.1 сохраняется и при более слабых требованиях относительно функций $f(x)$ и $h(x)$. Приведем его для случая, когда $\Pi = \mathbb{R}^n$, т.е. когда дополнительное ограничение $x \in \Pi$ фактически отсутствует.

Теорема 5.2.2. *Пусть в задаче (5.2.10), в которой $\Pi = \mathbb{R}^n$, функция $f(x)$ и вектор-функция $h(x)$ дифференцируемы, а вектор-функция $g(x)$ линейная. Пусть, кроме того, $f(x)$ является псевдовыпуклой функцией на $\mathbb{R}^n$ и все компоненты вектор-функции $h(x)$ квазивыпуклы. Тогда если в точке*

$$x_* \in X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = 0_l, \ h(x) \le 0_k \right\}$$

при некоторых $u_* \in \mathbb{R}^l$ и $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ выполнены условия

$$L_x(x_*, u_*, v_*) = 0_n, \quad (5.2.6)$$

$$v_*^j h^j(x_*) = 0, \quad 1 \le j \le k, \quad (5.2.7)$$

то x_* — глобальное решение задачи (5.2.1).

Доказательство. Из квазивыпуклости всех компонент вектор-функции $h(x)$ следует, что допустимое множество X выпукло. Поэтому если взять любую точку $x \in X$, то отрезок, соединяющий x с x_*, целиком принадлежит этому множеству и, следовательно, вектор $s = x - x_*$ является возможным направлением в точке $x_* \in X$ относительно множества X. Но тогда, как несложно убедиться от противного, обязательно

$$\langle h_x^j(x_*), x - x_* \rangle \le 0, \quad j \in J_0(x_*),$$

и поскольку $v_*^j \geq 0$, $j \in J_0(x_*)$, то

$$\sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j \langle h_x^j(x_*), x - x_* \rangle \leq 0. \tag{5.2.8}$$

Кроме того, из-за линейности вектор-функции $g(x)$ вытекает равенство

$$g_x(x_*)(x - x_*) = g(x) - g(x_*) = 0_m. \tag{5.2.9}$$

На основании (5.2.6) справедливо представление

$$f_x(x_*) = -g_x^T(x_*)u_* - \sum_{j=1}^{k} v_*^j h_x^j(x_*),$$

которое с учетом условия дополняющей нежесткости (5.2.7) можно переписать как

$$f_x(x_*) = -g_x^T(x_*)u_* - \sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j h_x^j(x_*).$$

Отсюда и из (5.2.8) и (5.2.9) приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\langle f_x(x_*), x - x_* \rangle = \\
&\quad = -\langle u_*, g_x(x_*)(x - x_*) \rangle - \textstyle\sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j \langle h_x^j(x_*), x - x_* \rangle = \\
&\quad = -\textstyle\sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j \langle h_x^j(x_*), x - x_* \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Так как функция $f(x)$ псевдовыпуклая, то выполнение данного неравенства означает, что $f(x) \geq f(x_*)$. Таким образом, x_* — точка глобального минимума функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. ■

Для выпуклой задачи математического программирования можно сформулировать другое условие регулярности ограничений, которое более просто проверяется и не требует дифференцируемости от функций, задающих ограничения. Приведем его для задачи выпуклого программирования, в которой присутствуют только ограничения типа неравенства

$$\min_{x \in X} f(x) \quad X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ h(x) \leq 0_k, \quad x \in \Pi \right\}, \tag{5.2.10}$$

где $f(x)$ и все компоненты $h(x)$ — выпуклые функции, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество.

Условие регулярности ограничений Слейтера. *Существует такая точка* $\bar{x} \in \Pi$, *что* $h(\bar{x}) < 0_k$.

Использование этого условия позволяет получить для выпуклой задачи минимизации (5.2.10) не только достаточные, но и необходимые условия оптимальности.

Теорема 5.2.3. *Пусть в задаче выпуклого программирования (5.2.10) функции $f(x)$ и $h(x)$ дифференцируемы. Пусть, кроме того, выполнено условие регулярности ограничений Слейтера. Тогда если точка $x_* \in X$ есть решение задачи (5.2.10), то можно указать вектор $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ такой, что для функции Лагранжа*

$$L(x, v) = f(x) + \langle v, h(x) \rangle$$

выполняется

$$\langle L_x(x_*, v_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \Pi, \tag{5.2.11}$$

$$v_*^j h^j(x_*) = 0, \quad 1 \leq j \leq k. \tag{5.2.12}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $J_0(x_*) \neq \emptyset$. Так как точка x_* есть решение задачи (5.2.10), то система

$$\begin{array}{rcl} \langle f_x(x_*), x - x_* \rangle & < & 0, \\ \langle h_x^j(x_*),\ x - x_* \rangle & < & 0, \quad j \in J_0(x_*), \\ x & \in & \Pi \end{array}$$

не имеет решения. Поэтому по одному из вариантов теоремы Фана найдутся числа $q \geq 0$ и $v_*^j \geq 0$, $j \in J_0(x_*)$, такие, что они не равны нулю в совокупности и

$$\langle q f_x(x_*) + \sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j h_x^j(x_*),\ x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \Pi. \tag{5.2.13}$$

Допустим, что $q = 0$. Тогда хотя бы один из множителей v_*^j, где $j \in J_0(x_*)$, должен быть строго положительным. Неравенство (5.2.13) переходит в следующее:

$$\langle \sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j h_x^j(x_*),\ x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall\, x \in \Pi.$$

В частности, оно должно быть справедливым и для точки $\bar{x} \in \Pi$ из условия регулярности ограничений Слейтера:

$$\langle \sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j h_x^j(x_*),\ \bar{x} - x_* \rangle \geq 0. \tag{5.2.14}$$

С другой стороны, в силу критерия выпуклости дифференцируемых функции $h^j(x)$,

$$\langle h^j_x(x_*),\ \bar{x} - x_* \rangle \le h^j(\bar{x}) - h^j(x_*) = h^j(\bar{x}) < 0, \quad j \in J_0(x_*). \quad (5.2.15)$$

Складывая неравенства (5.2.15), предварительно их умножив на соответствующие множители v^j_*, получаем с учетом того, что хотя бы один из множителей v^j_*, $j \in J_0(x_*)$, строго положителен:

$$\langle \sum_{j \in J_0(x_*)} v^j_* h^j_x(x_*),\ \bar{x} - x_* \rangle < 0. \quad (5.2.16)$$

Неравенство (5.2.16) противоречит (5.2.14). Таким образом, $q > 0$ и этот множитель в (5.2.13) можно взять равным единице. Введение условия дополняющей нежесткости (5.2.12) позволяет пополнить сумму в (5.2.13) градиентами $h^j_x(x_*)$ неактивных в точке x_* ограничений со множителями $v^j_* = 0$, $j \in J_-(x_*)$. Тогда (5.2.13) переходит в неравенство (5.2.11).

Если $J_0(x_*) = \emptyset$, то точка $x_* \in \Pi$ оказывается внутренней относительно множества $X_1 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ h(x) \le 0_k\}$. Задача (5.2.10) становится задачей минимизации выпуклой дифференцируемой функции на выпуклом множестве $X = X_1 \cap \Pi$, причем в точке минимума x_* конус возможных направлений относительно множества X совпадает с конусом возможных направлений относительно выпуклого множества Π. Тогда по теореме 4.2.4 $\langle f_x(x_*), x - x_* \rangle \ge 0$ для всех $x \in \Pi$. Данное условие совпадает с неравенством (5.2.11), если в нем положить $v_* = 0_k$. ■

5.3. Достаточные условия второго порядка

Нами были получены условия оптимальности первого порядка для задач математического программирования (5.1.1) и (5.1.4). Условия (5.1.15), (5.1.16), как и в случае задачи безусловной минимизации (4.1.2), не зависят от того, какая из задач — на минимимум или максимум — рассматривается. Если бы в (5.1.1) вместо минимума целевой функции искался бы ее максимум, то условия оптимальности для этой задачи оказались бы фактически теми же самыми (поменялись бы только знаки у множителей Лагранжа, соответствующих ограничениям типа неравенства). Выделить те точки, где действительно реализуется миниминум целевой функции на допустимом множестве, а не максимум, позволяют условия второго порядка. Мы рассмотрим здесь только *достаточные условия второго порядка*, причем для задачи математического программирования (5.1.1). Как правило, при обосновании сходимости численных методов решения задач оптимизации обычно используются именно более сильные достаточные условия.

Далее будем предполагать, что функции, определяющие задачу (5.1.1), по меньшей мере дважды непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Через $L_{xx}(x,u,v)$ будем обозначать матрицу вторых производных функции Лагранжа (5.1.28) относительно переменной x, которая составлена для задачи (5.1.1).

Ниже нам потребуются также следующее разбиение множества индексов активных ограничений $J_0(x)$ на два подмножества:

$$J_0^+(x,v) = \left\{ j \in J_0(x): \; v^j > 0 \right\}, \; J_0^0(x,v) = \left\{ j \in J_0(x): \; v^j = 0 \right\}$$

и дополнительное определение, касающееся условия дополняющей нежесткости.

Условие строгой дополняющей нежесткости. *Мы скажем, что в точке $[x,v]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, если в точке $[x,v]$ выполнено условие дополняющей нежесткости и множество $J_0^0(x,v)$ пусто, т.е. $J_0(x) = J_0^+(x,v)$.*

Введем в рассмотрение конус $K(x,v)$, который есть пересечение двух линейных подпространств и конуса, а именно,

$$K(x,v) = K_1(x) \cap K_2(x,v) \cap K_3(x,v),$$

где

$$\begin{array}{rcl} K_1(x) & = & \left\{ s \in \mathbb{R}^n : g_x^T(x)s = 0_l \right\}, \\ K_2(x,v) & = & \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \; \langle h_x^j(x), s \rangle = 0, \; j \in J_0^+(x,v) \right\}, \\ K_3(x,v) & = & \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \; \langle h_x^j(x), s \rangle \leq 0, \; j \in J_0^0(x,v) \right\}. \end{array}$$

Если в точке $[x,v]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, то $K(x,v) = K_1(x) \cap K_2(x,v)$ и фактически конус $K(x,v)$ оказывается линейным подпространством, зависящим только от x.

Теорема 5.3.1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Тогда, для того чтобы точка $x_* \in \mathbb{R}^n$ была строгим локальным решением задачи математического программирования (5.1.1), достаточно, чтобы нашлись $u_* \in \mathbb{R}^l$ и $v_* \in \mathbb{R}^k$ такие, что тройка $[x_*, u_*, v_*]$ образует точку Каруша–Куна–Таккера,*

т.е.
$$\begin{array}{rcl} L_x(x_*,u_*,v_*) & = & 0_n, \\ L_u(x_*,u_*,v_*) & = & 0_l, \\ L_v(x_*,u_*,v_*) & \le & 0_k, \quad v_* \ge 0_k, \\ \langle L_v(x_*,u_*,v_*), v_* \rangle & = & 0 \end{array} \tag{5.3.1}$$

и для любого ненулевого вектора $s \in K(x_*, v_*)$ *выполняется неравенство*
$$\langle s, L_{xx}(x_*,u_*,v_*)s \rangle > 0. \tag{5.3.2}$$

Доказательство. Для простоты проведем его при дополнительном предположении, что в точке $[x_*, v_*]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. В этом случае $v_*^j > 0$, $j \in J_0(x_*)$.

От противного, пусть x_* не есть точка строгого локального минимума. Тогда найдется последовательность точек $x_k \in X$ такая, что $x_k \to x_*$ и $f(x_k) \le f(x_*)$. Представим x_k как $x_k = x_* + \delta_k s_k$, где $\|s_k\| = 1$ и $\delta_k > 0$, и рассмотрим любую предельную точку последовательности $\{[s_k, \delta_k]\}$. Она существует, так как все направления s_k принадлежат единичной сфере, являющейся компактным множеством, и $\delta_k \to 0$. Не умаляя общности, считаем, что сходится сама последовательность $\{[s_k, \delta_k]\}$. Пусть $s_k \to \bar{s}$ и $\delta_k \to \bar{\delta} = 0$. Имеем $\|\bar{s}\| = 1$ и
$$\begin{array}{rcl} f(x_k) - f(x_*) & \le & 0, \\ g^i(x_k) - g^i(x_*) & = & 0, \quad 1 \le i \le l, \\ h^j(x_k) - h^j(x_*) & \le & 0, \quad j \in J_0(x_*). \end{array} \tag{5.3.3}$$

С учетом дифференцируемости всех функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ эти равенства и неравенства можно переписать как
$$\begin{array}{rcl} \delta_k \langle f_x(x_*), s_k \rangle + o(\delta_k) & \le & 0, \\ \delta_k \langle g_x^i(x_*), s_k \rangle + o(\delta_k) & = & 0, \quad 1 \le i \le l, \\ \delta_k \langle h_x^j(x_*), s_k \rangle + o(\delta_k) & \le & 0, \quad j \in J_0(x_*). \end{array}$$

Разделив их на δ_k и устремив $k \to \infty$, приходим к
$$\begin{array}{rcl} \langle f_x(x_*), \bar{s} \rangle & \le & 0, \\ \langle g_x^i(x_*), \bar{s} \rangle & = & 0, \quad 1 \le i \le l, \\ \langle h_x^j(x_*), \bar{s} \rangle & \le & 0, \quad j \in J_0(x_*). \end{array} \tag{5.3.4}$$

Умножим в (5.3.4) вторые равенства на u_*^i, а третьи неравенства — на $v_*^j > 0$ и сложим их все вместе. Учтем, кроме того, что $v_*^j = 0$, когда $j \notin J_0(x_*)$. Тогда получаем

$$\langle f_x(x_*) + \sum_{i=1}^{l} u_*^i g_x^i(x_*) + \sum_{j=1}^{k} v_*^j h_x^j(x_*), \bar{s}\rangle \le 0$$

или, что то же самое,

$$\langle L_x(x_*, u_*, v_*), \bar{s}\rangle \le 0. \tag{5.3.5}$$

Покажем, что $\bar{s} \in K(x_*, v_*) = K_1(x_*) \cap K_2(x_*, v_*)$. Действительно, из (5.3.4) следует, что $\bar{s} \in K_1(x_*)$. Далее, если хотя бы для одного индекса $j \in J_0(x_*) = J_0^+(x_*, v_*)$ имело место строгое неравенство $\langle h_x^j(x_*), \bar{s}\rangle < 0$, то из-за того, что $v_*^j > 0$ для этого индекса, неравенство (5.3.5) также выполнялось бы как строгое, т.е.

$$\langle L_x(x_*, u_* v_*), \bar{s}\rangle < 0. \tag{5.3.6}$$

Но строгое неравенство (5.3.6) не может иметь места, поскольку согласно (5.3.1) $L_x(x_*, u_*, v_*) = 0_n$. Таким образом, $\bar{s} \in K(x_*, v_*)$.

Воспользуемся снова разложениями левых частей равенств и неравенств (5.3.3) в ряды Тейлора, но уже до членов второго порядка малости:

$$f(x_k) - f(x_*) = \delta_k \langle f_x(x_*), s_k\rangle + \frac{\delta_k^2}{2}\langle s_k, f_{xx}(x_*) s_k\rangle + o(\delta_k^2) \le 0, \tag{5.3.7}$$

$$g^i(x_k) - g^i(x_*) = \delta_k \langle g_x^i(x_*), s_k\rangle + \frac{\delta_k^2}{2}\langle s_k, g_{xx}^i(x_*) s_k\rangle + o(\delta_k^2) = 0, \tag{5.3.8}$$

$$h^j(x_k) - h^j(x_*) = \delta_k \langle h_x^j(x_*), s_k\rangle + \frac{\delta_k^2}{2}\langle s_k, h_{xx}^j(x_*) s_k\rangle + o(\delta_k^2) \le 0, \tag{5.3.9}$$

где $1 \le i \le l$, $j \in J_0(x_*)$. Умножим опять равенства (5.3.8) на соответствующие множители u_*^i, а неравенства (5.3.9) — на множители v_*^j, и сложим их вместе с неравенством (5.3.7). Учтем, что $L_x(x_*, u_*, v_*) = 0_n$. Тогда после деления получившейся суммы на $\delta_k^2/2$ приходим к неравенствам

$$\langle \bar{s}_k, \left(f_{xx}(x_*) + \sum_{i=1}^{l} u_*^i g_{xx}^i(x_*) + \sum_{j \in J_0(x_*)} v_* j h_{xx}^j(x_*) \right) \bar{s}_k\rangle + \frac{o(\delta_k^2)}{\delta_k^2} \le 0.$$

Добавим во вторую сумму нулевые слагаемые $v_*^j h_{xx}^j(x_*)$, $j \in J_-(x_*)$, и перейдем к пределу при $k \to \infty$, в результате получим неравенство

$$\langle \bar{s}, L_{xx}(x_*, u_*, v_*)\bar{s}\rangle \le 0.$$

Но, как было выяснено, $\bar{s} \in K(x_*, v_*)$. Поэтому данное неравенство противоречит условию (5.3.2). ■

Для задач без ограничений конус $K(x_*, v_*)$ есть $\mathbb{R}^n$ и условия теоремы 5.3.1 переходят в обычное достаточное условие второго порядка (4.2.18) локального минимума функции $f(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$.

Достаточные условия оптимальности (5.3.1) – (5.3.2) можно представить в более симметричном виде, если от функции Лагранжа (5.1.28) перейти к ее простейшей модификации. Данная модификация позволяет также единым образом учитывать как ограничения типа равенства, так и ограничения типа неравенства.

Пусть $m = l + k$ — общее число ограничений в задаче математического программирования (5.1.1). Перепишем ее, используя единые обозначения и единую нумерацию для равенств и неравенств. Требуется найти

$$\min_{x \in X} f(x), \tag{5.3.10}$$

где

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ g^i(x) = 0, \ 1 \leq i \leq l; \quad g^i(x) \leq 0, \ l < i \leq m \right\}.$$

Таким образом, первые l компонент вектор-функции

$$g(x) = \left[g^1(x), g^2(x), \ldots, g^m(x) \right]$$

соответствуют ограничениям-равенствам, а последующие $k = m - l$ компонент — ограничениям-неравенствам.

Введем вектор $u \in \mathbb{R}^m$ и m-мерную вектор-функцию

$$p(u) = \left[p^1(u), p^2(u), \ldots, p^m(u) \right] \tag{5.3.11}$$

с компонентами

$$p^i(u) = \begin{cases} u^i, & 1 \leq i \leq l, \\ (u^i)^2/2, & l < i \leq m. \end{cases}$$

Для любого $u \in \mathbb{R}^m$ все компоненты $p^i(u)$, $l < i \leq m$ являются неотрицательными. Используя (5.3.11), составим функцию Лагранжа:

$$L(x, u) = f(x) + \langle p(u), g(x) \rangle. \tag{5.3.12}$$

В случае задачи (5.1.2), содержащей только ограничения типа равенства, данная функция полностью совпадает с классической функцией Лагранжа $L(x, u) = f(x) + \langle u, g(x) \rangle$.

Применительно к функции (5.3.12) условие дополняющей нежесткости и условие строгой дополняющей нежесткости могут быть переформулированы следующим образом.

Определение 5.3.1. *В точке* $[x_*, u_*]$ *выполнено условие дополняющей нежесткости, если* $g^i(x_*)p^i(u_*) = 0$, $l < i \leq m$. *Если, помимо того,* $p^i(u_*) > 0$ *при* $i \in J_0(x_*)$, *то в точке* $[x_*, u_*]$ *выполнено условие строгой дополняющей нежесткости.*

Предположим теперь, что все функции $f(x)$ и $g^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, непрерывно дифференцируемы. Введем понятие *стационарной точки* функции Лагранжа (5.3.12).

Определение 5.3.2. *Точка* $[x_*, u_*]$ *называется стационарной точкой функции Лагранжа* (5.3.12), *если*

$$L_x(x_*, u_*) = 0_n, \qquad L_u(x_*, u_*) = p_u(u_*)g(x_*) = 0_m. \qquad (5.3.13)$$

Так как матрица $p_u(u)$ имеет диагональный вид

$$p_u(u) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & u^{l+1} & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & u^m \end{bmatrix}, \qquad (5.3.14)$$

то любая стационарная точка $[x_*, u_*]$ такова, что в ней имеет место условие дополняющей нежесткости и, кроме того, точка x_* удовлетворяет ограничениям типа равенства. Стационарную точку $[x_*, u_*]$ назовем *точкой Куна–Таккера*, если $x_* \in X$.

Ниже нам потребуются два линейных подпространства:

$$K_1(x_*, u_*) = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : p_u(u_*)g_x(x_*)y = 0_m \right\},$$

$$K_2(u_*) = \left\{ z \in \mathbb{R}^m : p_u(u_*)z = 0_m \right\}.$$

Приведем достаточные условия второго порядка изолированного локального минимума в задаче (5.3.10). Эти условия являются переформулировкой соответствующих условий теоремы 5.3.1 с помощью функции Лагранжа (5.3.12). В них используются матрицы $L_{xx}(x_*, u_*)$

и $L_{uu}(x_*, u_*)$ вторых производных функции Лагранжа (5.3.12) по x и u соответственно.

Теорема 5.3.2. *Пусть $f(x)$ и $g^i(x)$, $1 \le i \le m$, являются дважды непрерывно дифференцируемыми функциями. Пусть, кроме того, точка x_* с некоторым $u_* \in \mathbb{R}^m$ образует стационарную точку функции Лагранжа, в которой выполняются следующие два условия:*

$$\begin{array}{lcll} \langle y, L_{xx}(x_*, u_*)y\rangle & > & 0 & \forall\, y \in K_1(x_*, u_*), \quad y \neq 0_n, \quad (5.3.15)\\ \langle z, L_{uu}(x_*, u_*)z\rangle & < & 0 & \forall\, z \in K_2(u_*), \qquad z \neq 0_m. \quad (5.3.16) \end{array}$$

Тогда в точке $[x_*, u_*]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, а точка x_* является изолированным локальным решением задачи (5.3.10).

Доказательство. Покажем сначала, что при сделанных предположениях точка x_* является допустимой и в паре $[x_*, u_*]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости. С этой целью воспользуемся равенством $L_u(x_*, u_*) = 0$, следующим из определения стационарной точки. Согласно данному равенству, $p_u(u_*)g(x_*) = 0$. Отсюда, с учетом представления (5.3.14) матрицы $p_u(u_*)$, получаем

$$g^i(x_*) = 0, \qquad i = 1, \ldots, l, \qquad (5.3.17)$$
$$u_*^i g^i(x_*) = 0, \qquad i = l+1, \ldots, m. \qquad (5.3.18)$$

Таким образом, точка x_* удовлетворяет ограничениям типа равенства и в паре $[x_*, u_*]$ выполнено условие дополняющей нежесткости. Что касается ограничений типа неравенства, то, согласно (5.3.18), $g^i(x_*) = 0$, если $u_*^i \neq 0$, т.е. любое такое ограничение не только выполняется, но и является активным в точке x_*.

Далее, для любого $z \in K_2(u_*)$, $z \neq 0_m$, выполнено неравенство (5.3.16). Но диагональная матрица $p_u(u_*)$ имеет вид (5.3.14), матрица $L_{uu}(x_*, u_*)$ также является диагональной:

$$L_{uu}(x_*, u_*) = \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 0 & & & \\ & & & g^{l+1}(x_*) & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & g^m(x_*) \end{bmatrix}.$$

Пусть $u_*^i = 0$ для некоторого индекса $i \in [l+1, m]$. Возьмем в этом случае в качестве ненулевого вектора $z \in K_2(u_*)$ единичный орт e_i, у которого все компоненты, кроме i-й, равны нулю, а i-я компонента равна единице. Тогда, на основании (5.3.16),

$$\langle e_i, L_{uu}(x_*, u_*)e_i\rangle = g^i(x_*) < 0.$$

Отсюда делаем вывод, что для тех индексов $i \in [l+1, m]$, для которых $u_*^i = 0$, соответствующее ограничение типа неравенства также выполняется, причем как строгое. Поэтому точка x_* является допустимой, и, более того, в точке $[x_*, u_*]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости.

Оптимальность точки x_* проверяется так же, как это делается в теореме 5.3.1. ■

Достаточные условия второго порядка, задаваемые теоремой 5.3.1, могут быть перенесены и на случай общей задачи математического программирования, в которой присутствует дополнительное требование принадлежности решения множеству простой структуры П. Приведем их, предполагая для простоты, что в задаче (5.1.4) допустимое множество X, помимо простого ограничения, определяется только ограничениями-равенствами:

$$f_* = \min_{x\in X} f(x), \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0_l, \;\; x \in \Pi\}, \tag{5.3.19}$$

где Π — выпуклое замкнутое множество, имеющее непустую внутренность. Функция Лагранжа (6.1.4) для такой задачи принимает вид

$$L(x, u) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle.$$

Ее частную производную относительно первой переменной обозначим через $L_x(x, u)$.

Сведем (5.3.19) к более простой задаче вида (5.1.2), в которой уже отсутствует требование $x \in \Pi$. Введем новое n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ с координатами $[y^1, \ldots, y^n]$. Осуществим переход от этого пространства к исходному с помощью преобразования $x = \xi(y)$. Это преобразование построим так, чтобы оно было *сюръекцией* из $\mathbb{R}^n$ в Π или, по крайней мере, из $\mathbb{R}^n$ во внутренность Π — множество $\mathrm{int}\,\Pi$. Тогда каждый элемент из Π (или $\mathrm{int}\,\Pi$) есть образ не менее чем одного элемента из $\mathbb{R}^n$ и замыкание образа $\mathbb{R}^n$ совпадает с Π. Исходную задачу (5.3.19) заменим следующей: найти

$$\tilde{f}_* = \inf_{y\in Y} \tilde{f}(y), \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \tilde{g}(y) = 0_m\}. \tag{5.3.20}$$

Здесь $\tilde{f}(y) = f(\xi(y))$, $\tilde{g}(y) = g(\xi(y))$, причем $\tilde{f}_* = f_*$. Если точка y_* является решением задачи (5.3.20), то точка $x_* = \xi(y_*)$ будет решением задачи (5.3.19).

Предположим, что отображение $\xi(y)$ непрерывно дифференцируемо всюду на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\tilde{J}(y)$ обозначает матрицу Якоби для этого отображения:

$$\tilde{J}(y) = \frac{d\xi(y)}{dy} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi^1(y)}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial \xi^1(y)}{\partial y^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial \xi^n(y)}{\partial y^1} & \dots & \dfrac{\partial \xi^n(y)}{\partial y^n} \end{bmatrix}.$$

В неособых точках преобразования $x = \xi(y)$, где якобиан отличен от нуля, существует обратное преобразование $y = \xi^{-1}(x)$. Если воспользоваться этим преобразованием и взять в качестве аргумента у матрицы Якоби вектор x, то получим матрицу $J(x) = \tilde{J}(\xi^{-1}(x))$, зависящую уже от x.

Пусть $\tilde{L}(y, u)$ есть функция Лагранжа, составленная для задачи (5.3.20):

$$\tilde{L}(y, u) = \tilde{f}(y) + \langle u, \tilde{g}(y) \rangle.$$

Согласно определению, пара $[y_*, u_*]$ будет точкой Куна–Таккера для задачи (5.3.20), если

$$\tilde{L}_y(y_*, u_*) = 0_n, \qquad \tilde{L}_u(y_*, u_*) = \tilde{g}(y_*) = 0_m. \tag{5.3.21}$$

Производные функций $\tilde{f}(y)$, $\tilde{g}(y)$ и $f(x)$, $g(x)$ связаны соотношениями

$$\tilde{f}_y(y) = \tilde{J}^T(y) f_x(\xi(y)), \qquad \tilde{g}_y^T(y) = \tilde{J}^T(y) g_x^T(\xi(y)), \tag{5.3.22}$$

поэтому равенства (5.3.21) могут быть переписаны как

$$\tilde{J}^T(y_*) L_x(\xi(y_*), u_*) = 0_n, \qquad g(\xi(y_*)) = 0_m,$$

и если y_* есть неособая точка преобразования $\xi(y)$, то в x-пространстве получаем

$$J^T(x_*) L_x(x_*, u_*) = 0_n, \qquad g(x_*) = 0_m, \tag{5.3.23}$$

где $x_* = \xi^{-1}(y_*)$. Первое равенство (5.3.23) показывает, что вектор $L_x(x_*, u_*)$ принадлежит нуль-пространству матрицы $J^T(x_*)$. Приведенные соотношения (5.3.23) позволяют переформулировать понятие точки Куна–Таккера для задачи (5.3.19).

Пусть $\Gamma(x|\Pi)$ — конус допустимых направлений в точке x относительно множества Π, а $\Gamma^*(x|\Pi)$ — конус, двойственный к $\Gamma(x|\Pi)$. Пусть, кроме того, $\operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$ — линейная оболочка конуса $\Gamma^*(x|\Pi)$ (в данном случае она совпадает с аффинной оболочкой $\operatorname{aff}\Gamma^*(x|\Pi)$ этого конуса). Наложим на преобразование $\xi(y)$ следующее условие.

Условие A. *Преобразование $\xi(y)$ таково, что матрица $J(x)$ определена и непрерывна в некоторой области, содержащей множество Π, и в каждой точке $x \in \Pi$ нуль-пространство матрицы $J^T(x)$ совпадает с $\operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$.*

Из этого условия, в частности, следует, что во всех внутренних точках $x \in \operatorname{int}\Pi$ матрица $J(x)$ не вырождена, она становится особой только на границе множества Π. Отметим также, что, согласно условию A, ортогональное к $\operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$ подпространство $(\operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi))^\perp$ совпадает с пространством столбцов матрицы $J(x)$.

Определение 5.3.3. *Пусть пара $[x_*, u_*] \in \Pi \times \mathbb{R}^m$ является допустимой в задаче (5.3.19). Тогда она называется:*

- *слабой точкой Куна–Таккера, если $L_x(x_*, u_*) \in \operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$;*
- *точкой Куна–Таккера, если $L_x(x_*, u_*) \in \Gamma^*(x_*|\Pi)$;*
- *сильной точкой Куна–Таккера, если $L_x(x_*, u_*) \in \operatorname{ri}\Gamma^*(x_*|\Pi)$.*

Непосредственно из определения 5.3.3 следует, что каждая точка Куна–Таккера является слабой точкой Куна–Таккера, но не наоборот. Точно так же сильная точка Куна–Таккера одновременно будет просто точкой Куна–Таккера. Из допустимости пары $[x_*, u_*]$ следует также, что $L_u(x_*, u_*) = g(x_*) = 0_m$.

Если преобразование $\xi(y)$ удовлетворяет условию A, то включение $L_x(x_*, u_*) \in \operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$ имеет место в том и только в том случае, когда выполняется равенство $J^T(x_*)L_x(x_*, u_*) = 0_n$. Следовательно, условия $L_x(x_*, u_*) \in \operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$ и $J^T(x_*)L_x(x_*, u_*) = 0_n$ оказываются эквивалентными для определения слабой точки Куна–Таккера.

Отметим также, что если множество Π совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, то в качестве $\xi(y)$ можно взять тождественное преобразование $x = y$. Матрица $J(x)$ в этом случае не зависит от точки x, она постоянна и равна единичной матрице I_n. Конус допустимых направлений $\Gamma(x|\mathbb{R}^n)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ есть все пространство $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, двойственный конус $\Gamma^*(x|\mathbb{R}^n)$ состоит лишь из нулевого вектора. Поэтому $\operatorname{lin}\Gamma^*(x|\Pi)$ является нулевым подпространством. Определения точки Куна–Таккера и слабой точки Куна–Таккера в этом случае совпадают и переходят в обычное определение точки Куна–Таккера (5.1.30) для задачи, содержащей только ограничения-равенства.

Предположим теперь, что все функции $f(x)$, $g^i(x)$, $1 \le i \le m$, дважды непрерывно дифференцируемы. Обозначим также через $K(x)$ подпространство

$$K(x) = \{z \in \mathbb{R}^n : g_x(x)J(x)z = 0_m\}.$$

Достаточные условия второго порядка, задаваемые теоремой 5.3.1, для задачи (5.3.19) могут быть переформулированы следующим образом.

Теорема 5.3.3. *Пусть отображение $\xi(y)$ удовлетворяет условию A. Пусть, кроме того, пара $[x_*, u_*]$ является сильной точкой Куна–Таккера для задачи* (5.3.19) *и*

$$\langle z,\, J^T(x_*)L_{xx}(x_*, u_*)J(x_*)\ z\rangle > 0 \tag{5.3.24}$$

для любых $z \in K(x_*)$ таких, что $J(x_*)z \ne 0_n$. Тогда x_* является точкой изолированного локального минимума в задаче (5.3.19).

Доказательство. Если x_* не является точкой изолированного локального минимума в задаче (5.3.19), то найдется такая последовательность допустимых точек $\{x_k\}$, сходящаяся к x_*, что $x_k \in \Pi$, $g(x_k) = 0_m$ и $f(x_k) \le f(x_*)$. Представим x_k в виде $x_k = x_* + \delta_k s_k$, где $\|s_k\| = 1$, $\delta_k > 0$, $\delta_k \to 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $s_k \to s_*$, $\|s_*\| = 1$. Так как $s_k \in \Gamma(x_*|\Pi)$ для всех $k > 0$, то $s_* \in \mathrm{cl}\,\Gamma(x_*|\Pi)$. При этом выполняются неравенства

$$\delta_k\langle f_x(x_*), s_k\rangle + \mathrm{o}(\delta_k) \le 0 \tag{5.3.25}$$

и равенства

$$\delta_k\langle g^i_x(x_*), s_k\rangle + \mathrm{o}(\delta_k) = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{5.3.26}$$

Умножая равенства (5.3.26) на u^i_* и складывая их с (5.3.25), получаем после деления на δ_k и перехода к пределу: $\langle L_x(x_*, u_*), s_*\rangle \le 0$. Но по предположению $[x_*, u_*]$ является сильной точкой Куна–Таккера, что согласно определению означает: $L_x(x_*, u_*) \in \mathrm{ri}\Gamma^*(x_*|\Pi)$. Поэтому из-за того, что $s_* \in \mathrm{cl}\,\Gamma(x_*|\Pi)$, имеем $\langle L_x(x_*, u_*), s_*\rangle \ge 0$, причем $L_x(x_*, u_*) \ne 0_n$. Сопоставляя это неравенство с полученным ранее противоположным неравенством, делаем вывод, что $\langle L_x(x_*, u_*), s_*\rangle = 0$, т.е. вектор s_* ортогонален ненулевому вектору $L_x(x_*, u_*)$.

Далее, сокращая запись, линейную оболочку конуса $\Gamma^*(x_*|\Pi)$ обозначаем через $S(x_*|\Pi)$, т.е. $S(x_*|\Pi) = \mathrm{lin}\Gamma^*(x_*|\Pi)$. Так как имеет место включение $L_x(x_*, u_*) \in \mathrm{ri}\Gamma^*(x_*|\Pi)$ и линейная оболочка $\mathrm{ri}\,\Gamma^*(x_*|\Pi)$ совпадает с линейной оболочкой самого конуса $\Gamma^*(x_*|\Pi)$, то обязательно $L_x(x_*, u_*) \in S(x_*|\Pi)$.

Покажем, что вектор s_* принадлежит ортогональному подпространству $S^{\perp}(x_*|\Pi)$. В самом деле, если это не так, то вектор s_* можно представить в виде $s_* = a + b$, где $a \in S(x_*|\Pi)$, $b \in S^{\perp}(x_*|\Pi)$, $a \neq 0_n$. Имеем

$$\langle L_x(x_*, u_*), s_* \rangle = \langle L_x(x_*, u_*), a \rangle = 0. \tag{5.3.27}$$

Таким образом, ненулевые векторы $L_x(x_*, u_*)$ и a расположены в одном и том же подпространстве и ортогональны друг другу. Но если произвольный n-мерный вектор p такой, что $p \in \mathrm{ri}\,\Gamma^*(x_*|\Pi)$, то любой вектор из подпространства $S(x_*|\Pi)$, лежащий в некоторой окрестности вектора p, также будет принадлежать $\mathrm{ri}\,\Gamma^*(x_*|\Pi)$. Отсюда в силу (5.3.27) можно указать вектор $q \in \mathrm{ri}\,\Gamma^*(x_*|\Pi)$, близкий к $L_x(x_*, u_*)$, для которого $\langle s_*, q \rangle < 0$, что противоречит включению $s_* \in \mathrm{cl}\,\Gamma(x_*|\Pi)$. Таким образом, $s_* \in S^{\perp}(x_*|\Pi)$. Из условия A следует, что $S^{\perp}(x_*|\Pi)$ совпадает с пространством столбцов матрицы $J(x_*)$. Поэтому $s_* = J(x_*) z_*$ для некоторого ненулевого вектора $z_* \in \mathbb{R}^n$.

Далее, как и при доказательстве теоремы 5.3.1, разлагая функции $f(x)$ и $g^i(x)$ в ряд Тейлора до второго члена включительно, приходим к неравенствам (5.3.7) и равенствам (5.3.8), в которых $l = m$. Умножая равенства (5.3.8) на множители u_*^i и складывая их с (5.3.7), имеем

$$\delta_k \langle L_x(x_*, u_*), s_k \rangle + \frac{\delta_k^2}{2} \langle s_k, L_{xx}(x_*, u_*) s_k \rangle + \mathrm{o}(\delta_k^2) \leq 0. \tag{5.3.28}$$

Из включений

$$s_k \in \Gamma(x_*|\Pi), \qquad L_x(x_*, u_*) \in \Gamma^*(x_*|\Pi)$$

следует, что $\langle L_x(x_*, u_*), s_k \rangle \geq 0$. Поэтому наряду с (5.3.28) выполняются неравенства

$$\langle s_k, L_{xx}(x_*, u_*) s_k \rangle + \frac{\mathrm{o}(\delta_k^2)}{\delta_k^2} \leq 0.$$

Переходя в них к пределу, получаем $\langle s_*, L_{xx}(x_*, u_*) s_* \rangle \leq 0$, или

$$\langle z_*, J^T(x_*) L_{xx}(x_*, u_*) J(x_*) z_* \rangle \leq 0, \tag{5.3.29}$$

где $z_* \in K(x_*)$, $J(x_*) z_* \neq 0_n$. Неравенство (5.3.29) противоречит (5.3.24). ■

В частном случае, когда множество Π совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, беря в качестве $\xi(y)$ тождественное преобразование $x = y$, получаем, что утверждение теоремы сводится к утверждению теоремы 5.3.1 о достаточных условиях изолированного локального минимума для задачи (5.1.2).

Глава 6

Двойственность для задач оптимизации

6.1. Седловые точки функции Лагранжа

В предыдущей главе были рассмотрены необходимые условия первого и второго порядков локального минимума в задаче математического программирования, в которых использовались производные функций, входящих в постановку задачи. Возможны также условия оптимальности, в которых присутствуют только значения этих функций. Такие условия, по существу, являются условиями оптимальности нулевого порядка и, как правило, они носят глобальный характер, т.е. выполняются для глобальных решений задач условной оптимизации. Рассмотрим некоторые из этих условий, причем для общей задачи математического программирования (5.1.4). Составим для этой задачи функцию Лагранжа (регулярную):

$$L(x,u,v) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle, \tag{6.1.1}$$

где $u \in \mathbb{R}^l$, $v \in \mathbb{R}^k_+$.

Введем определение.

Определение 6.1.1. *Тройка* $[x_*, u_*, v_*]$, *где* $x_* \in \Pi$, $u_* \in \mathbb{R}^l$ *и* $v_* \in \mathbb{R}^k$, *называется седловой точкой функции Лагранжа* $L(x,u,v)$ *на* $\Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k_+$, *если*

$$L(x_*, u, v) \le L(x_*, u_*, v_*) \le L(x, u_*, v_*) \tag{6.1.2}$$

для всех $x \in \Pi$ *и* $[u, v] \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k_+$.

С помощью понятия седловой точки функции Лагранжа могут быть сформулированы сравнительно простые достаточные условия для глобального решения в общей задаче математического программирования.

Теорема 6.1.1. *Пусть* $[x_*, u_*, v_*]$ *— седловая точка функции Лагранжа (6.1.1) на* $\Pi \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k_+$. *Тогда* x_* *есть глобальное решение общей задачи математического программирования (5.1.1). Более того, в точке* $[x_*, v_*]$ *выполнено условие дополняющей нежесткости для ограничений типа неравенства*

$$v_*^j h^j(x_*) = 0, \quad 1 \le j \le k. \tag{6.1.3}$$

Доказательство. Обратимся сначала к левому неравенству из определения седловой точки (6.1.2). Его можно переписать как

$$\langle u - u_*, g(x_*)\rangle + \langle v - v_*, h(x_*)\rangle \le 0, \tag{6.1.4}$$

и оно выполняется для любых $[u, v] \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k_+$.

Покажем от противного, что из (6.1.4) следует допустимость точки x_* , т.е. $x_* \in X$. Начнем с ограничений типа равенства. Если $g^{i_1}(x_*) \ne 0$ для некоторого индекса $i_1 \in [1 : l]$, например, $g^{i_1}(x_*) > 0$, то, полагая все множители Лагранжа u^i и v^j равными соответственно множителям u^i_* и v^j_*, кроме множителя u^{i_1}, и устремляя последний к $+\infty$, получаем противоречие с (6.1.4). В случае, когда $g^{i_1}(x_*) < 0$, множитель u^{i_1} следует стремить, напротив, к $-\infty$. В силу произвольности индекса i_1 из $[1 : l]$, отсюда делаем вывод, что должно выполняться равенство: $g(x_*) = 0_l$. Аналогичным способом проверяется выполнение неравенства $h(x_*) \le 0_k$.

Покажем теперь, что в точке $[x_*, v_*]$ имеет место условие дополняющей нежесткости (6.1.3). Так как $g(x_*) = 0_l$, то (6.1.4) принимает вид

$$\langle v - v_*, h(x_*)\rangle \le 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^k_+. \tag{6.1.5}$$

Если в (6.1.5) взять $v = 0_k$, то приходим к неравенству $\langle v_*, h(x_*)\rangle \ge 0$. С другой стороны, из $h(x_*) \le 0_k$ и $v_* \ge 0_k$ следует, что $\langle v_*, h(x_*)\rangle \le 0$. На основании этих двух противоположных неравенств заключаем, что на самом деле имеет место равенство $\langle v_*, h(x_*)\rangle = 0$, и опять из-за того, что $h(x_*) \le 0_k$ и $v_* \ge 0_k$, для каждого индекса $j \in [1 : k]$ должно выполняться (6.1.3).

Проверим наконец, что x_* есть точка минимума целевой функции $f(x)$ на допустимом множестве X. Обратимся теперь к правому неравенству в определении (6.1.2) седловой точки. С учетом только что установленных равенств $\langle u_*, g(x_*)\rangle = 0$ и $\langle v_*, h(x_*)\rangle = 0$ оно принимает вид

$$L(x_*, u_*, v_*) = f(x_*) \leq f(x) + \langle u_*, g(x)\rangle + \langle v_*, h(x)\rangle \quad \forall\, x \in \Pi. \quad (6.1.6)$$

В частности, для $x \in X$, так как тогда $g(x) = 0_l$ и $h(x) \leq 0_k$, из (6.1.6) получаем

$$f(x_*) \leq f(x) + \langle u_*, g(x)\rangle + \langle v_*, h(x)\rangle \leq f(x),$$

что подтверждает оптимальность точки x_*. ■

Двойственные переменные u_* и v_*, входящие в седловую точку $[x_*, u_*, v_*]$, по-прежнему будем называть множителями Лагранжа.

В приведенной теореме 6.1.1 не делается никаких предположений о функциях $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$, даже о множестве Π, все они как функции, так и множество, могут быть произвольными. Понятно, что для общей задачи трудно ожидать, что составленная для нее функция Лагранжа обладает седловой точкой. Однако важный факт состоит в том, что если мы имеем дело с выпуклой регулярной задачей, то это действительно так. Существование у функции Лагранжа седловой точки является не только достаточным условием, но и необходимым. Приведем этот результат для выпуклой задачи математического программирования, причем для простоты предположим, что она содержит только ограничения типа неравенства.

Пусть требуется найти

$$\min f(x) \quad \text{при условии, что} \quad h(x) \leq 0_k, \quad x \in \Pi, \quad (6.1.7)$$

где $f(x)$ и все $h^1(x), \ldots, h^k(x)$ — выпуклые функции на $\mathbb{R}^n$, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество. Предположим, что задача (6.1.7) имеет решение и обозначим

$$f_* = \min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in \Pi : \; h(x) \leq 0_k\}. \quad (6.1.8)$$

В силу сделанных предположений допустимое множество X в задаче (6.1.8) выпукло и замкнуто.

Составим для задачи (6.1.7) функцию Лагранжа (регулярную):

$$L(x, v) = f(x) + \langle v, h(x)\rangle, \quad x \in \Pi, \quad v \in \mathbb{R}^k_+. \quad (6.1.9)$$

Пара $[x_*, v_*] \in \Pi \times \mathbb{R}^k_+$ будет седловой точкой функции Лагранжа (6.1.9) на $\Pi \times \mathbb{R}^m_+$, если

$$L(x_*, v) \le L(x_*, v_*) \le L(x, v_*)$$

для всех $x \in \Pi$ и $v \in \mathbb{R}^k_+$.

Теорема 6.1.2. (Куна–Таккера о седловой точке.) *Пусть в задаче выпуклого программирования (6.1.7) выполнено условие регулярности ограничений Слейтера. Тогда если точка x_* является решением задачи, то найдется такое $v_* \in \mathbb{R}^k_+$, что x_* вместе с v_* образуют седловую точку $[x_*, v_*]$ функции Лагранжа (6.1.9) на $\Pi \times \mathbb{R}^k_+$.*

Доказательство. Рассмотрим образ задачи (6.1.7) в пространстве $\mathbb{R}^{1+k}$, объединяющем значение целевой функции $f(x)$ со значениями всех компонент вектор-функции $h(x)$:

$$\mathcal{W} = \left\{ [\phi, \psi] \in \mathbb{R}^{1+k} : \ \phi = f(x), \ \psi = h(x), \ x \in \Pi \right\}.$$

Через $\mathcal{W}_\eta$ обозначим сдвиг этого множества по первой переменной ϕ на величину η, т.е. множество $\mathcal{W}_\eta = \mathcal{W} - \eta e_0$, где вектор $e_0 \in \mathbb{R}^{1+k}$ и имеет вид $e_0 = [1, 0, \ldots, 0]^T$. Рассмотрим также в пространстве $\mathbb{R}^{1+k}$ множество

$$\mathcal{H}_- = \left\{ [\phi, \psi] \in \mathbb{R}^{1+k} : \ \phi < 0, \ \psi \le 0_k \right\}.$$

Множество $\mathcal{H}_-$ не является замкнутым, но выпукло.

Пересечение этих двух множеств $\mathcal{W}_\eta$ и $\mathcal{H}_-$ пусто тогда и только тогда, когда η не превосходит оптимальное значение f_* целевой функции в задаче (6.1.7), другими словами, когда η является оценкой снизу оптимального значения f_*. Само значение f_* есть в этом случае максимально возможная величина для η. Положим $\eta = f_*$ и далее будем рассматривать только множество $\mathcal{W}_{f_*}$. Для задачи выпуклого программирования (6.1.7) множество $\mathcal{W}$ может оказаться не выпуклым, однако, как нетрудно проверить, всегда выпукло множество $\mathcal{W}^+ = \mathcal{W} + \mathbb{R}^{1+k}_+$. Понятно, что и его сдвиг — множество $\mathcal{W}^+_{f_*} = \mathcal{W}_{f_*} + \mathbb{R}^{1+k}_+$ — также будет выпуклым.

Множество $\mathcal{W}_{f_*}$ не пересекается с $\mathcal{H}_-$ тогда и только тогда, когда с $\mathcal{H}_-$ не пересекается множество $\mathcal{W}^+_{f_*}$. Более того, у этих двух выпуклых множеств $\mathcal{H}_-$ и $\mathcal{W}^+_{f_*}$ не пересекаются их относительные внутренности.

Поэтому по теореме об отделимости (собственной) найдется ненулевой вектор $[q, v_*] \in \mathbb{R}^{1+k}$ такой, что

$$q\phi_1 + \langle v_*, \psi_1 \rangle \geq q\phi_2 + \langle v_*, \psi_2 \rangle \tag{6.1.10}$$

для любых $[\phi_1, \psi_1] \in \mathcal{W}^+_{f_*}$, $[\phi_2, \psi_2] \in \mathcal{H}_-$.

Учтем, что второе множество $\mathcal{H}_-$ содержит внутренность неположительного ортанта $\mathbb{R}^{1+k}_-$. Тогда, чтобы имело место (6.1.10), обязательно должны выполнятся неравенства: $q \geq 0$ и $v_* \geq 0_k$. Кроме того, если положить в (6.1.10) $\psi_2 = 0_k$, а ϕ_2 устремить к нулю слева, то получаем

$$q\phi_1 + \langle v_*, \psi_1 \rangle \geq 0 \tag{6.1.11}$$

для всех $[\phi_1, \psi_1] \in \mathcal{W}^+_{f_*}$.

Покажем, что при выполнении условия регулярности ограничений Слейтера случай, когда $q = 0$, невозможен. Действительно, если $q = 0$, то вектор v_* обязательно должен быть ненулевым и неравенство (6.1.11) переходит в следующее: $\langle v_*, \psi_1 \rangle \geq 0$, которое должно выполняться для всех ψ_1 таких, что ψ_1 вместе с некоторым ϕ_1 принадлежат множеству $\mathcal{W}^+_{f_*}$. Но, с другой стороны, если взять точку $\bar{x}$, входящую в условие регулярности ограничений Слейтера, то $\psi_1 = h(\bar{x}) < 0_k$. Поэтому в силу того, что v_* — ненулевой вектор с неотрицательными компонентами, для данного ψ_1 должно выполняться строгое противоположное неравенство $\langle v_*, \psi_1 \rangle < 0$. Мы пришли к противоречию. Таким образом, $q > 0$ и можно считать, что $q = 1$.

Теперь неравенство (6.1.11) принимает вид

$$\phi_1 + \langle v_*, \psi_1 \rangle \geq 0 \quad \forall\ [\phi_1, \psi_1] \in \mathcal{W}^+_{f_*}. \tag{6.1.12}$$

Далее рассматриваем такие точки $[\phi_1, \psi_1]$, у которых $\phi_1 = f(x) - f_*$ и $\psi_1 = h(x)$, где $x \in \Pi$. Так как все эти точки принадлежат $\mathcal{W}^+_{f_*}$, то из (6.1.12) следует, что

$$f(x) + \langle v_*, h(x) \rangle \geq f_* \quad \forall\ x \in \Pi. \tag{6.1.13}$$

Возьмем в (6.1.13) в качестве x решение задачи (6.1.7) — точку x_*. Поскольку $f(x_*) = f_*$, то приходим к неравенству $\langle v_*, h(x_*) \rangle \geq 0$. С другой стороны, так как $h(x_*) \leq 0_k$ и $v_* \geq 0_k$, должно выполняться и обратное неравенство: $\langle v_*, h(x_*) \rangle \leq 0$. Поэтому $\langle v_*, h(x_*) \rangle = 0$ и на основании (6.1.13)

$$L(x_*, v_*) = f(x_*) + \langle v_*, h(x_*) \rangle = f_* \leq f(x) + \langle v_*, h(x) \rangle = L(x, v_*)$$

для всех $x \in \Pi$.

Наконец, из-за того, что $h(x_*) \le 0_k$, для любых $v \in \mathbb{R}^k_+$ справедливо неравенство $\langle v, h(x_*)\rangle \le 0$. Отсюда следует, что

$$L(x_*, v) = f(x_*) + \langle v, h(x_*)\rangle \le f(x_*) = L(x_*, v_*) \quad \forall\ v \in \mathbb{R}^k_+.$$

Таким образом, пара $[x_*, v_*]$ является седловой точкой функции Лагранжа на $\Pi \times \mathbb{R}^k_+$. ■

Замечание. *В теореме 6.1.2 можно не требовать выполнения условия регулярности ограничений Слейтера, если все компоненты* $h(x)$ *— линейные функции, а множество* Π *— полиэдр.*

Замечание. *Для задачи выпуклого программирования* (6.1.7)*, как следует из теорем 3.3.8 и 4.1.7, неравенство* $L(x_*, v_*) \le L(x, v_*)$ *из определения седловой точки выполняется тогда и только тогда, когда существуют субградиенты* $a_0 \in \partial f(x_*)$ *и* $a_j \in \partial h^j(x_*)$, $1 \le j \le k$, *такие, что*

$$\langle a_0 + \sum_{j=1}^{k} v_*^j a_j, x - x_*\rangle \ge 0 \quad \forall\ x \in \Pi.$$

Данное неравенство переходит в неравенство (5.2.11)*, когда функции* $f(x)$ *и* $h(x)$ *дифференцируемы.*

Наличие седловой точки у функции Лагранжа $L(x, v)$ для задачи выпуклого программирования (6.1.7) оказывается очень полезным свойством — оно позволяет строить численные методы для решения этой задачи и обосновывать их сходимость. Но доказательство теоремы 6.1.1 существенным образом опиралось на выпуклость множества $\mathcal{W}^+_{f_*}$ и на возможность отделить в пространстве образов задачи $\mathbb{R}^{1+k}$ два выпуклых непересекающихся множества $\mathcal{W}^+_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$. Делалось это с помощью линейной функции

$$Q(z) = \langle w_*, z\rangle, \tag{6.1.14}$$

где $w_* = [1, v_*] \in \mathbb{R}^{1+k}$, $z = [\phi, \psi] \in \mathbb{R}^{1+k}$. Фактически было установлено, что $Q(z_1) \ge Q(z_2)$ для любых $z_1 \in \mathcal{W}^+_{f_*}$ и $z_2 \in \mathcal{H}_-$. Множества $\mathcal{W}^+_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$ отделялись друг от друга гиперплоскостью $Q(z) = 0$ (см. рис. 6.1).

Если (6.1.7) не является задачей выпуклого программирования, то множество $\mathcal{W}^+_{f_*}$ может оказаться невыпуклым. Отделить два множества $\mathcal{W}_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$ с помощью гиперплоскости в этом случае не всегда представляется возможным — это скорее исключение, чем правило.

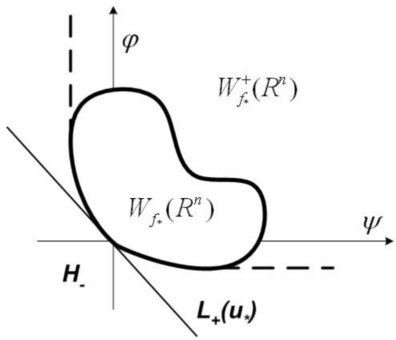

Рис. 6.1. Линейная отделимость множеств $\mathcal{W}^+_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$

Поэтому идут по пути расширения класса функций $Q(z)$, рассматривая вместо линейных функций $Q(z)$, соответствующих классической функции Лагранжа (6.1.9), также нелинейные. Понятно, что это должны быть такие функции $Q(z)$, у которых лебеговские множества $\Lambda_- = \{z \in \mathbb{R}^{1+m} : Q(z) < 0\}$ содержат множество $\mathcal{H}_-$.

Рассмотрим вместо (6.1.14) разделяющую функцию

$$Q(z) = \max\left[\langle w_0, z\rangle, \langle w_1, z\rangle, \ldots, \langle w_m, z\rangle\right],$$

где $w_i = [1, v_i]$, $v_i \in \mathbb{R}^k_+$, $0 \le i \le k$. Этой функции соответствует функция Лагранжа:

$$L(x, v) = f(x) + \max\left[\langle v_0, h(x)\rangle, \langle v_1, h(x)\rangle, \ldots, \langle v_k, h(x)\rangle\right], \qquad (6.1.15)$$

в которой $v = [v_0, v_1, \ldots, v_k]$, $v_i \in \mathbb{R}^k_+$, $0 \le i \le k$. Как и для классической функции Лагранжа (6.1.9), для функции Лагранжа (6.1.15) имеет место результат, аналогичный утверждению теоремы 6.1.1.

Теорема 6.1.3. *Пусть у функции Лагранжа* (6.1.15) *существует седловая точка* $[x_*, v_*]$ *на множестве* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(1+k)k}_+$. *Тогда точка* x_* *является решением задачи* (6.1.7).

Доказательство данной теоремы незначительно отличается от доказательства теоремы 6.1.1. ■

Можно также показать, причем при весьма слабых предположениях относительно задачи (6.1.7), что функция Лагранжа (6.1.15) обязательно обладает седловой точкой на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{(1+k)k}_+$. Пусть $\mathcal{K}$

— выпуклый открытый конус в $\mathbb{R}^{(1+k)k}$. Будем говорить, что *конус* $\mathcal{K}$ *разделяет* $\mathcal{H}_-$ *и* $\mathcal{W}_{f_*}$, если $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{K}$ и пересечение $\mathcal{W}_{f_*} \cap \mathcal{K}$ пусто. В случае, когда функция Лагранжа (6.1.15) имеет седловую точку $[x_*, v_*]$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{(1+k)k}$, существует открытый конус $\mathcal{K}$, который разделяет $\mathcal{H}_-$ и $\mathcal{W}_{f_*}$. Действительно, в качестве такого конуса $\mathcal{K}$ можно взять открытый конус

$$\mathcal{K} = \bigcap_{i=0}^{k} \mathcal{K}_i, \qquad \mathcal{K}_i = \{z \in \mathbb{R}^{1+k} : \langle w_i, z\rangle < 0\},$$

где $w_i = [1, (v_*)_i] \in \mathbb{R}_+^{1+k}$, $0 \le i \le k$. Покажем, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 6.1.4. (Обобщение теоремы о седловой точке на невыпуклый случай.) *Пусть существует открытый конус* $\mathcal{K}$, *который разделяет множества* $\mathcal{H}_-$ *и* $\mathcal{W}_{f_*}$. *Тогда функция Лагранжа* (6.1.15) *имеет седловую точку* $[x_*, v_*]$ *на множестве* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^{(1+k)k}$.

Доказательство. Возьмем $\varepsilon > 0$. Рассмотрим единичные векторы $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^{1+k}$, $0 \le i \le k$, с компонентами

$$\bar{e}_i^j = \begin{cases} -1, & j = i, \\ 0, & j \ne i, \end{cases} \qquad 0 \le j \le k,$$

а также векторы $\bar{e}_{i,\varepsilon} \in \mathbb{R}^{1+k}$, $0 \le i \le k$, с компонентами

$$\bar{e}_{i,\varepsilon}^j = \begin{cases} -1, & j = i, \\ \varepsilon, & j \ne i, \end{cases} \qquad 0 \le j \le k.$$

Положим

$$s_{i,\varepsilon} = \begin{cases} \bar{e}_{i,\varepsilon}, & \bar{e}_i \in \mathcal{K}, \\ \bar{e}_i, & \bar{e}_i \notin \mathcal{K}, \end{cases} \qquad 0 \le i \le k,$$

и обозначим через $\mathcal{K}_\varepsilon$ коническую оболочку векторов $s_{0,\varepsilon}, s_{1,\varepsilon}, \dots, s_{k,\varepsilon}$, а через $\mathcal{K}_\varepsilon^0$ — ее внутренность. Предположим, что ε достаточно мало. Тогда $\mathcal{K}_\varepsilon^0 \subset \mathcal{K}$ и векторы $s_{i,\varepsilon}$, $(i = 0, \dots, k)$ линейно независимы. Поэтому $\mathcal{K}_\varepsilon$ является *симплициальным конусом.*

Из симплициальности конуса $\mathcal{K}_\varepsilon$ следует существование таких $k+1$ линейно независимых векторов $[\bar{q}_i, \bar{v}_i] \in \mathbb{R}^{1+k}$, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{[\phi, \psi] : \bar{q}_i\phi + \langle \bar{v}_i, \psi\rangle \le 0\}.$$

Нетрудно проверить, что $H_- \subset \mathcal{K}_\varepsilon^0$. Из этого включения следует, что $\bar{q}_i > 0$ и $\bar{v}_i \ge 0_k$ для всех $i = 0, 1, \dots, k$. Действительно, для произвольных $\phi < 0$ и $\psi \le 0_k$ выполняется неравенство $\bar{q}_i\phi + \langle \bar{v}_i, \psi\rangle \le 0$.

Устремляя ϕ к нулю, получаем $\langle \bar{v}_i, \psi \rangle \le 0$ для всех $\psi \le 0_k$. Таким образом, $\bar{v}_i \ge 0_k$. Имеем также $\langle [\bar{q}_i, \bar{v}_i], \bar{e}_0 \rangle = -\bar{q}_i \le 0$, поэтому $\bar{q}_i \ge 0$.

Если $\bar{q}_i = 0$ для некоторого индекса i, то $\langle [\bar{q}_i, \bar{v}_i], \bar{e}_0 \rangle = 0$. Так как

$$\mathcal{K}^0_\varepsilon = \{[\phi, \psi] : \ \bar{q}_i\phi + \langle \bar{v}_i, \psi \rangle < 0, \ \ 0 \le i \le k\}, \tag{6.1.16}$$

то отсюда следует, что $\bar{e}_0$ является граничной точкой конуса $\mathcal{K}_\varepsilon$. Это противоречит включению $\bar{e}_0 \in H_- \subset \mathcal{K}^0_\varepsilon$. Поэтому $\bar{q}_i > 0$.

Допустим, не умаляя общности, что $\bar{q}_i = 1$ для всех i. Положим $u_* = [\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k]$. Тогда определение (6.1.16) конуса $\mathcal{K}^0_\varepsilon$ перепишется как

$$\mathcal{K}^0_\varepsilon = \{[\phi, \psi] : \phi + \langle \bar{v}_i, \psi \rangle < 0, \ \ 0 \le i \le k\}.$$

Так как $\mathcal{K}^0_\varepsilon \subset \mathcal{K}$ и пересечение $\mathcal{K} \cap \mathcal{W}_{f_*}$ пусто, то пересечение $\mathcal{K}^0_\varepsilon \cap \mathcal{W}_{f_*}$ также пусто. Учитывая теперь, что $\mathcal{H}_- \subset \mathcal{K}^0_\varepsilon$, делаем вывод, что конус $\mathcal{K}^0_\varepsilon$ разделяет множества $\mathcal{W}_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$.

Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{L}_+(v_*) = \bigcup_{i=0}^{k} \mathcal{L}^i_+(\bar{u}_i), \tag{6.1.17}$$

являющееся объединением полупространств

$$\mathcal{L}^i_+(\bar{u}_i) = \left\{[\phi, \psi] \in \mathbb{R}^{1+k} : \ \phi + \langle \bar{v}_i, \psi \rangle \ge 0\right\}.$$

Это множество есть дополнение открытого конуса $\mathcal{K}^0_\varepsilon$ до всего пространства и, следовательно, само является конусом.

Так как $\mathcal{K}^0_\varepsilon$ разделяет множества $\mathcal{H}_-$ и $\mathcal{W}_{f_*}(\mathbb{R}^n)$, то $W_{f_*} \subseteq \mathcal{L}_+(v_*)$. Из этого включения следует, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ найдется такой индекс $i \in [0 : k]$ (зависящий, вообще говоря, от x), что

$$f(x) - f_* + \langle \bar{v}_i, h(x) \rangle \ge 0.$$

Поэтому и подавно

$$f(x) + \max_{0 \le i \le k} \langle \bar{v}_i, h(x) \rangle \ge f_*. \tag{6.1.18}$$

Точно так же для точки $x_* \in X_*$ найдется индекс $i_* \in [0 : k]$, для которого $f(x_*) + \langle \bar{v}_{i_*}, h(x_*) \rangle \ge f_*$. Отсюда, поскольку $f(x_*) = f_*$, получаем

$$\langle \bar{v}_{i_*}, h(x_*) \rangle = 0. \tag{6.1.19}$$

Так как $h(x_*) \le 0_k$ и, следовательно, $\langle \bar{v}_i, h(x_*)\rangle \le 0$ для всех $0 \le i \le k$, то из (6.1.19) вытекает, что

$$\max_{0\le i\le k} \langle \bar{v}_i, h(x_*)\rangle = 0.$$

Таким образом, $L(x_*, v_*) = f_*$ и, стало быть, неравенство (6.1.18) может быть переписано в виде

$$L(x, v_*) \ge L(x_*, v_*) = f_*. \qquad (6.1.20)$$

С другой стороны, из $h(x_*) \le 0_k$ следует, что $\langle v_i, h(x_*)\rangle \le 0$ для любых $v_i \in \mathbb{R}^k_+$. Поэтому

$$\max_{0\le i\le k} \langle v_i, h(x_*)\rangle \le 0.$$

Отсюда приходим к другому неравенству:

$$L(x_*, v) = f_* + \max_{0\le i\le k} \langle v_i, h(x_*)\rangle \le f_*. \qquad (6.1.21)$$

На основании (6.1.20) и (6.1.21) делаем вывод, что $[x_*, v_*]$ является седловой точкой функции Лагранжа (6.1.15). ■

Согласно утверждению теоремы 6.1.4, седловые точки у функции Лагранжа (6.1.15) существуют не только для выпуклых задач, но и для задач с функциями $f(x)$ и $h(x)$ произвольного вида. Платой за такую общность здесь является расширение числа двойственных переменных. Можно рассмотреть и другие модификации функции Лагранжа, обладающие подобным свойством.

Отметим также, что, как следует из доказательства теоремы 6.1.4, в невыпуклом случае множество W_{f_*} теперь принадлежит множеству $\mathcal{L}_+(u_*)$ вида (6.1.17) (см. рис. 6.2), которое существенно больше соответствующего множества, показанного на рис. 6.1.

Замечание. *Можно показать, что если множество* Π *в задаче (6.1.7) компактно, а функции* $f(x)$ *и* $h(x)$ *непрерывны, то в этой задаче обязательно существует открытый конус* $\mathcal{K}$*, который разделяет множества* $\mathcal{H}_-$ *и* $\mathcal{W}_{f_*}$*, т.е. предположение теоремы 6.1.3 выполнено.*

6.2. Прямые и двойственные задачи

С задачей математического программирования, используя функцию Лагранжа, можно связать пару оптимизационных задач, одна из которых фактически совпадает с исходной.

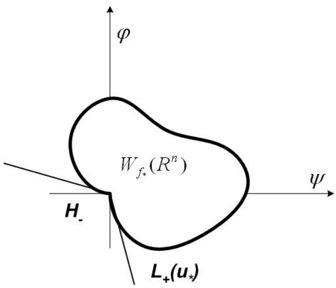

Рис. 6.2. Нелинейная отделимость множеств $\mathcal{W}^+_{f_*}$ и $\mathcal{H}_-$

Рассмотрим общую задачу математического программирования:

$$\min_{x\in X} f(x), \quad X = \{x \in \Pi : \ g(x) = 0_l,\, h(x) \le 0_k\}\,, \tag{6.2.1}$$

где Π — выпуклое замкнутое множество.

Прямая задача. Пусть $W = \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k_+$. Воспользуемся функцией Лагранжа (регулярной), составленной для задачи (6.2.1):

$$L(x,u,v) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle, \quad [u,v] \in W, \tag{6.2.2}$$

и введем в рассмотрение функцию, определенную на множестве Π:

$$\psi(x) = \sup_{[u,v]\in W} L(x,u,v) = \begin{cases} f(x), & x \in X, \\ +\infty, & x \notin X. \end{cases} \tag{6.2.3}$$

Будем искать

$$\psi_* = \inf_{x\in\Pi} \psi(x). \tag{6.2.4}$$

Имеем согласно (6.2.3)

$$\psi_* = \inf_{x\in\Pi} \psi(x) = \inf_{x\in\Pi} \sup_{[u,v]\in W} L(x,u,v) = \inf_{x\in X} f(x). \tag{6.2.5}$$

Задачу (6.2.4) принято называть *прямой задачей*, порождаемой функцией Лагранжа. Как следует из (6.2.5), по существу, она является исходной общей задачей математического программирования (6.2.1).

Двойственная задача. Воспользуемся опять функцией Лагранжа (6.2.2). Пусть

$$\phi(u,v) = \inf_{x\in\Pi} L(x,u,v). \tag{6.2.6}$$

Данная функция, называемая *двойственной*, определена на множестве W, хотя, быть может, в некоторых точках и принимает бесконечные значения, равные $-\infty$. Поэтому мы вправе поставить задачу

$$\phi^* = \sup_{[u,v]\in W} \phi(u,v) = \sup_{[u,v]\in W} \inf_{x\in\Pi} L(x,u,v). \tag{6.2.7}$$

Задача (6.2.7) в отличие от (6.2.4) называется *двойственной задачей*, порождаемой функцией Лагранжа $L(x,u,v)$, или *двойственной задачей* к (6.2.1). О переменных u и v, от которых зависит целевая функция в (6.2.7), принято говорить как о *двойственных переменных*.

Приведем ряд результатов, касающихся свойств функции $\phi(u,v)$. Положим

$$W_0 = \{[u,v] \in W : \ \phi(u,v) > -\infty\}.$$

Лемма 6.2.1. *В двойственной задаче (6.2.7) множество W_0 выпукло, а функция $\phi(u,v)$ вогнута на W_0.*

Доказательство. Объединим для сокращения записи пару переменных u и v в единую переменную $w = [u,v]$. Пусть $w_1 \in W_0$, $w_2 \in W_0$ и $0 \le \lambda \le 1$. Имеем согласно определению функции $\phi(w)$ и линейности функции Лагранжа $L(x,w)$ по переменной w:

$$\begin{aligned}\phi\left(\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2\right) = \inf\nolimits_{x\in\Pi} L\left(x, \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2\right) \ge \\ \ge \lambda \inf\nolimits_{x\in\Pi} L\left(x, w_1\right) + (1-\lambda)\inf\nolimits_{x\in\Pi} L\left(x, w_2\right) = \\ = \lambda\phi(w_1) + (1-\lambda)\phi(w_2).\end{aligned}$$

Таким образом, $\phi(w)$ — вогнутая функция. Отсюда также следует, что множество W_0 должно быть выпуклым, поскольку из $\phi(w_1) > -\infty$ и $\phi(w_2) > -\infty$ следует, что $\phi\left(\lambda w_1 + (1-\lambda w_2)\right) > -\infty$. ■

Лемма 6.2.2. *Для любых $x \in X$ и любых $[u,v] \in W_0$ имеет место неравенство $\psi(x) = f(x) \ge \phi(u,v)$.*

Доказательство. Для любых $x \in X$ и $[u,v] \in W_0$ выполняется: $\langle u, g(x)\rangle = 0$ и $\langle v, h(x)\rangle \le 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}\psi(x) = f(x) \ge f(x) + \langle u, g(x)\rangle + \langle v, h(x)\rangle = \\ = L(x,u,v) \ge \inf\nolimits_{x\in\Pi} L(x,u,v) = \phi(u,v).\end{aligned}$$

■

Результат леммы 6.2.2 позволяет получать нижние оценки для значений целевой функции $f(x)$ в исходной задаче (6.2.1) на допустимом множестве X через значения двойственной функции. Если ограничения в (6.2.1) линейные, то двойственная функция выражается явным образом с помощью сопряженной функции к функции $f(x)$. В самом деле, пусть имеется задача

$$\min_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in \Pi : \ A_1 x = b_1, \, A_2 x \geq b_2\}, \tag{6.2.8}$$

где A_1 и A_2 — матрицы размером соответственно $m_1 \times n$ и $m_2 \times n$. Составим для (6.2.8) функцию Лагранжа:

$$L(x, u, v) = f(x) + \langle u, b_1 - A_1 x \rangle + \langle v, b_2 - A_2 x \rangle,$$

где $x \in \Pi$, $u \in \mathbb{R}^{m_1}$ и $v \in \mathbb{R}^{m_2}_+$. На основании определения (6.2.6) двойственной функции получаем

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \inf\nolimits_{x \in \Pi} \left[f(x) + \langle u, b_1 - A_1 x \rangle + \langle v, b_2 - A_2 x \rangle \right] = \\ &= \langle b_1, u \rangle + \langle b_2, v \rangle + \inf\nolimits_{x \in \Pi} \left[f(x) - \langle A_1^T u, x \rangle - \langle A_2^T v, x \rangle \right] = \\ &= \langle b_1, u \rangle + \langle b_2, v \rangle - \sup\nolimits_{x \in \Pi} \left[\langle A_1^T u + A_2^T v, \, x \rangle - f(x) \right] = \\ &= \langle b_1, u \rangle + \langle b_2, v \rangle - f^*_\Pi \left(A_1^T u + A_2^T v \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для задачи (6.2.8) всегда выполняется неравенство

$$f(x) \geq \langle b_1, u \rangle + \langle b_2, v \rangle - f^*_\Pi \left(A_1^T u + A_2^T v \right), \tag{6.2.9}$$

справедливое для любых $x \in X$ и любых $[u, v] \in \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}_+$, удовлетворяющих включению $A_1^T u + A_2^T v \in Y$, где Y — область определения функции $f^*_\Pi(y)$.

Упражнение 24. *Выпишите нижнюю оценку (6.2.9) для* задачи о наименьших квадратах

$$\min \frac{1}{2} \|x\|_2^2, \quad Ax = b,$$

где A — $(m \times n)$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$.

Упражнение 25. *Найдите нижнюю оценку (6.2.9) для* задачи максимизации энтропии

$$\min \sum_{i=1}^{n} x^i \ln x^i, \quad Ax \leq b, \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \quad \sum_{i=1}^{n} x^i = 1, \tag{6.2.10}$$

где по-прежнему A — $(m \times n)$-матрица, $b \in \mathbb{R}^m$. Постройте для (6.2.10) двойственную задачу.

Из утверждения леммы 6.2.2 немедленно вытекает следующий результат.

Лемма 6.2.3. *Если x_* — решение прямой задачи, $[u_*, v_*]$ — решение двойственной задачи, то $\psi_* = f(x_*) \geq \phi(u_*, v_*) = \phi^*$.*

Согласно лемме 6.2.3 всегда оптимальное значение двойственной задачи не превосходит оптимального значения прямой задачи, т.е. справедливо неравенство $f_* \geq \phi^*$. Это свойство пары двойственных задач называется *слабой двойственностью*. Если $f_* = \phi^*$, то говорят, что прямая и двойственная задачи связаны соотношением *совершенной двойственности*. Совершенную двойственность называют также *строгой двойственностью*, когда решения прямой и двойственных задач существуют, т.е. соответствующие инфинум и супремум достигаются. Возникает вопрос: в каких случаях строгая двойственность обязательно имеет место? Оказывается, что для задач выпуклого программирования для этого достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие регулярности ограничений Слейтера.

Рассмотрим для простоты задачу выпуклого программирования (6.1.7), содержащую только ограничения типа неравенства. В такой задаче функция Лагранжа имеет вид (6.1.9) и $\phi(v) = \inf_{x\in\Pi} L(x, v)$.

Теорема 6.2.1. *Для того чтобы точка $x_* \in X$ была решением задачи (6.1.7), достаточно, а при выполнении условия регулярности ограничений Слейтера и необходимо, чтобы нашелся вектор $v_* \in \mathbb{R}^k$, для которого имеет место соотношение двойственности:*

$$f(x_*) = \phi(v_*). \tag{6.2.11}$$

При этом вектор v_* является решением двойственной задачи к задаче (6.1.7).

Доказательство. *Необходимость*. При сделанных предположениях по теореме 6.1.2 у функции Лагранжа существует седловая точка, т.е. для $x_* \in X$ вместе с некоторым вектором $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ выполняются неравенства

$$L(x_*, v) \leq L(x_*, v_*) \leq L(x, v_*) \quad \forall\, x \in \Pi, \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^k_+. \tag{6.2.12}$$

Более того, при доказательстве упомянутой теоремы было установлено, что имеет место условие дополняющей нежесткости: $v^j_* h^j(x_*) = 0$, $j \in [1 : k]$. Поэтому правое неравенство в (6.2.12) на самом деле записывается как

$$f(x_*) = L(x_*, v_*) \leq L(x, v_*) \quad \forall\, x \in \Pi.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_*) \le \inf_{x \in \Pi} L(x, v_*) = \phi(v_*), \tag{6.2.13}$$

причем $v_* \in W_0 = \{v \in \mathbb{R}^k_+ : \phi(v) > -\infty\}$. Но согласно лемме 6.2.2 $f(x_*) \ge \phi(v)$ для любого $v \in W_0$. Сравнивая это неравенство с (6.2.13), приходим к выводу, что имеет место равенство (6.2.11). При этом v_* действительно является решением двойственной задачи, поскольку выполняется цепочка неравенств и равенств $\phi(v) \le \phi^* \le f(x_*) = \phi(v_*)$, справедливая для любого $v \in \mathbb{R}^k_+$. Следовательно, $\phi(v_*) = \phi^*$.

Достаточность. Пусть существуют точки $x_* \in X$ и $v_* \in \mathbb{R}^k_+$ такие, что выполнено равенство (6.2.11). Имеем в силу определений функций $\psi(x)$, $\phi(v)$ и (6.2.3):

$$\phi(v_*) = \inf_{x \in \Pi} L(x, v_*) \le L(x_*, v_*) \le \sup_{v \in R^k_+} L(x_*, v) = f(x_*).$$

Сравнивая с (6.2.11), приходим к выводу, что

$$L(x_*, v_*) = \inf_{x \in \Pi} L(x, v_*) = \sup_{v \in R^k_+} L(x_*, v).$$

Данные соотношения означают, что пара $[x_*, v_*]$ является седловой точкой функции Лагранжа на $\Pi \times \mathbb{R}^k_+$. Поэтому по теореме 6.1.1 точка x_* есть решение задачи выпуклого программирования (6.1.7). ■

Результат леммы 6.2.1, несмотря на свою простоту, представляется весьма замечательным. Действительно, при ее доказательстве не использовались никакие предположения о множестве Π и вообще о допустимом множестве X в прямой задаче. Это означает, что оно в принципе может иметь любой вид — быть несвязным, невыпуклым и т.д. Более того, сама исходная задача (6.2.1) может даже быть задачей дискретной оптимизации, например, задачей булевого программирования, в которой от переменных требуется, чтобы они принимали значения либо ноль, либо единица. Формально ее можно записать как задачу (6.2.1), добавив ограничения типа равенства $x^i(1 - x^i) = 0$, $1 \le i \le n$. Лемма 6.2.1 утверждает, что даже для такой задачи двойственная к ней задача имеет весьма хороший вид, а именно является задачей максимизации вогнутой функции на выпуклом множестве. Лемма 6.2.3 говорит, что, решив эту сравнительно несложную двойственную задачу, мы можем получить оценку снизу на оптимальное значение в исходной задаче булевого программирования. Разумеется, все трудности решения задач дискретной оптимизации при переходе к решению непрерывной двойственной задачи никуда не пропадают, они просто переходят в проблему вычисления значений двойственной функции.

В заключение данного раздела отметим, что наряду с двойственной задачей (6.2.7) рассматривают и другие типы двойственных задач. Например, предположим, что у нас есть задача: найти

$$\begin{gathered} f(x) \to \min, \\ Ax = b, \qquad x \geq 0_n, \end{gathered} \tag{6.2.14}$$

где $f(x)$ — выпуклая дифференцируемая функция и A — $(m \times n)$-матрица с $m \leq n$. Про ограничения задачи (6.2.14) говорят, что они заданы в *стандартной форме.*

Составим для задачи (6.2.14) функцию Лагранжа (регулярную):

$$L(x, u, v) = f(x) + \langle u, Ax - b \rangle - \langle v, x \rangle, \tag{6.2.15}$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n_+$. Так как $L(x, u, v)$ выпукла относительно первой переменной x, то в точках ее минимума по x в силу необходимых условий должно выполняться

$$f_x(x) + A^T u - v = 0_n. \tag{6.2.16}$$

Проводя теперь максимизацию функции Лагранжа (6.2.15) по всем переменным при ограничении (6.2.16), приходим к задаче: найти

$$\max_{x,u,v} L(x, u, v) \tag{6.2.17}$$

при ограничениях: $v = f_x(x) + A^T u,\ v \geq 0_n$. Такая задача называется *двойственной по Вулфу* для задачи (6.2.14).

6.3. Несобственные задачи математического программирования

Практика решения прикладных оптимизационных задач, особенно экономических, показывает, что многие из них в своей первоначальной постановке не обладают решением. Причинами этого обстоятельства могут служить разные факторы. Это и сложность модели, и неточность данных, и упрощение связей, и абсолютизация некоторых требований и т.д. Все это приводит к тому, что задача становится *противоречивой*, т.е. допустимое множество оказывается пустым, либо целевая функция может принимать бесконечные значения. Таким образом, чтобы добиться реального результата, процесс построения оптимизационной модели должен быть многошаговым с постепенным уточнением ряда параметров и ограничений. Теория решения несобственных задач призвана помочь в этом процессе.

Вообще говоря, под *несобственными задачами* понимаются задачи, которые в силу тех или иных причин не имеют решений. В случае *несобственных задач математического программирования* можно уточнить данное общее понятие — это задачи, в которых по крайней мере у одной из соответствующих задач — прямой или двойственной — отсутствуют решения либо, если они имеются, нет совпадения их оптимальных значений.

Среди несобственных задач математического программирования различают задачи с различными типами несобственности. Поясним это на примере задачи выпуклого программирования следующего вида: найти

$$f_* = \inf_{x \in X} f(x), \quad X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ h(x) \leq 0_k\}, \tag{6.3.1}$$

где $f(x)$ и $g_i(x)$, $1 \leq i \leq k$, — выпуклые функции. Здесь ввиду того, что возможен случай, когда задача не имеет решения, операция взятия минимума заменена на операцию взятия инфимума.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, u) = f(x) + \langle u, h(x) \rangle, \quad x \geq 0_n, \ u \geq 0_k,$$

и определим двойственную функцию:

$$\phi(u) = \inf_{x \in R^n_+} L(x, u),$$

а также множество $U = \{u \in \mathbb{R}^k_+ : \phi(u) > -\infty\}$. Согласно вышесказанному, двойственная задача к (6.3.1) имеет вид

$$\phi^* = \sup_{u \in U} \phi(u).$$

Задача (6.3.1) называется *собственной*, если

$$-\infty < \phi^* = f_* < +\infty.$$

В противном случае, *несобственной*. Если $-\infty < \phi^*$ и $f_* < +\infty$, но $\phi^* < f_*$, то такую задачу принято называть *полусобственной*.

В случае несобственной задачи (6.3.1) возможны три ситуации:

1) $X = \emptyset,\ U \neq \emptyset$;

2) $X \neq \emptyset,\ U = \emptyset$;

3) $X = \emptyset,\ U = \emptyset$.

В зависимости от выполнения указанных соотношений будем называть (6.3.1) несобственной задачей соответственно 1-*го*, 2-*го* или 3-*го рода*.

Как поступать с несобственными задачами? Ведь основным источником несобственных задач является плохая формализуемость, неточность данных. Поэтому добиться наличия решения у несобственной задачи можно путем проведения ее коррекции. Другими словами, попытаться аппроксимировать исходную поставленную задачу некоторой другой задачей, у которой решение уже существует. Общий подход здесь заключается в следующем. Исходную задачу (6.3.1) погружают в семейство параметрических задач:

$$f_*(y_0, \ldots, y_k) = \inf_{x \in X} f(x; y_0), \tag{6.3.2}$$

где

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ h^i(x; y_i) \leq 0,\ 1 \leq i \leq k\}.$$

Здесь y_i, $0 \leq i \leq k$, — некоторые векторы параметров, причем существуют такие их значения $\bar{y}_i$, что при $y_i = \bar{y}_i$ задача (6.3.2) полностью совпадает с исходной задачей (6.3.1), т.е.

$$f(x) = f(x; \bar{y}_0), \quad h_i(x) = h_i(x; \bar{y}_i),\ 1 \leq i \leq k.$$

Следует так подобрать векторы параметров y_i, $0 \leq i \leq k$, чтобы добиться разрешимости задачи (6.3.2) или даже сделать ее собственной. Понятно, что как построение аппроксимирующего параметрического семейства задач (6.3.2), так и выбор конкретных значений параметров y_i можно осуществлять разными способами и исходя из разных соображений.

Объединим все векторы y_i, $0 \leq i \leq k$, в единый вектор y. Следует выбрать некоторую *критериальную функцию* $p(y)$, с помощью которой будем оценивать качество аппроксимации. После этого решаем задачу

$$\min_{y \in \mathcal{Y}} p(y), \tag{6.3.3}$$

где $\mathcal{Y}$ — множество значений параметра y, при которых задача (6.3.2) разрешима. Пусть $\bar{y}$ есть решение (6.3.3). Тогда задачей, которая аппроксимирует исходную несобственную задачу (6.3.1) по критерию качества $p(y)$, является следующая задача:

$$\min_{x \in X} f(x; \bar{y}_0), \quad X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ h^i(x; \bar{y}_i) \leq 0,\ 1 \leq i \leq k\right\}. \tag{6.3.4}$$

Обычно объединяют решение задачи (6.3.3) с решением *аппроксимирующей задачи* (6.3.2).

Поясним вышесказанное на простейшем примере аппроксимирующей задачи:

$$f_*(y) = \inf_{x \in X(y)} f(x), \quad X(y) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ h(x) \leq y\}. \tag{6.3.5}$$

Здесь $y \in \mathbb{R}^k$. Если компоненты вектора y интерпретировать как затрачиваемые ресурсы, то целесообразно брать их неотрицательными. При $y = 0_k$ задача (6.3.5) совпадает с исходной задачей выпуклого программирования (6.3.1). В этом случае $X(0) = X$.

Предположим, что задача (6.3.1) является несобственной 1-го рода, т.е. $X = \emptyset$, $U \neq \emptyset$. Если при некотором $y \geq 0_k$ получаем, что $X(y) \neq \emptyset$, то обязательно $f_*(y) > -\infty$. Действительно, двойственная функция для задачи (6.3.5) имеет вид

$$\phi(u; y) = \inf_{x \in R^n_+} \left[f(x) + \langle u, h(x) - y \rangle \right], \quad u \in \mathbb{R}^k_+,$$

а допустимое множество $U(y) = \{u \in \mathbb{R}^k_+ \ : \ \phi(u; y) > -\infty\}$. Отсюда видно, что при $U = U(0_k) \neq \emptyset$ выполняется: $U(y) \neq \emptyset$. Поэтому из двойственного соотношения $f_*(y) \geq \phi^*(u; y) \geq \phi(u; y)$ для некоторого $u \in U(y)$ следует, что $f_*(y) > -\infty$.

Верно и обратное, если $X \neq \emptyset$ и для некоторого y получаем, что $X(y) \neq \emptyset$ и $f_*(y) > -\infty$, то обязательно $U \neq \emptyset$. Это следует из того, что если для некоторого $y > 0_k$ система ограничений $h(x) \leq y$ удовлетворяет условию Слейтера и при этом $f_*(y) > -\infty$, то в задаче (6.3.5) существует седловая точка функции Лагранжа:

$$L(x, u; y) = f(x) + \langle u, h(x) - y \rangle,$$

т.е.

$$\min_{x \in R^n_+} \sup_{u \in R^k_+} L(x, u; y) = \max_{u \in R^k_+} \inf_{x \in R^n_+} L(x, u; y). \tag{6.3.6}$$

Но левая часть соотношения (6.3.6) равна $f_*(u) > -\infty$. Поэтому функция $\phi(u; y) = \inf_{x \in R^n_+} L(x, u; y)$ не может равняться тождественно $-\infty$. Отсюда заключаем, что $U(y) \neq \emptyset$. Кроме того, так как $U(0_k) = U(y)$, приходим к выводу, что $U = U(0_k) \neq \emptyset$.

В качестве критериальной функции $p(y)$ можно взять какую-либо норму вектора y, например $p(y) = \|y\|_1$ или $p(y) = \|y\|_2$.

Если функции $f(x)$ и $h(x)$ линейные, т.е.

$$f(x) = \langle c, x \rangle, \quad h(x) = Ax - b, \tag{6.3.7}$$

где A — $(k \times n)$-матрица, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^k$, то появляется возможность варьировать не только правую часть в ограничениях задачи, а также матрицу коэффициентов A и вектор c, задающий целевую функцию. Другими словами, можно положить

$$y = [\Delta c, \Delta A, \Delta b]$$

или, в более простом варианте, когда нет варьирования матрицы коэффициентов A, $y = [\Delta c, \Delta b]$. Аппроксимирующая задача в последнем случае принимает следующий вид: найти

$$f_*(y) = \min_{x \in X(\Delta b)} \langle c + \Delta c, x \rangle, \quad X(\Delta b) = \left\{ x \in \mathbb{R}^k_+ : \ Ax \le b + \Delta b \right\}, \tag{6.3.8}$$

где $\Delta c \ge 0_n$, $\Delta b \ge 0_k$. Теперь в качестве критериальной функции $p(y)$ целесообразно взять, например, функцию

$$p(y) = \|\Delta c\|_1 + \|\Delta b\|_1. \tag{6.3.9}$$

Наша цель, как и ранее, сделать задачу (6.3.8) разрешимой, т.е. добиться, чтобы множество $X(\Delta b)$ было непустым, а оптимальное значение целевой функции $f_*(y)$ конечным, причем чтобы при этом параметр y минимизировал функцию (6.3.9). Из-за линейности целевой функции $\langle c + \Delta c, x \rangle$ на полиэдральном допустимом множестве $X(\Delta b)$ следует, что ее оптимальное значение конечно в том и только в том случае, когда $\langle c + \Delta c, z \rangle \ge 0$ для любого $z \in \mathbb{R}^n_+$ такого, что $Az \le 0_k$. Обозначим

$$K = \mathbb{R}^n_+ \cap K_1, \quad K_1 = \{ z \in \mathbb{R}^n : \ Az \le 0_k \}.$$

Множество K есть не что иное, как рецессивный конус для допустимого множества $X(\Delta b)$. Неравенство $\langle c + \Delta c, z \rangle \ge 0$ для любого $z \in K$ означает, что $c + \Delta c \in K^*$. Имеем согласно утверждению 2.5.4: $K^* = \mathbb{R}^n_+ + K_1^*$. Но, как было показано ранее, $K_1^* = -\mathrm{pos} A^T$. Поэтому приходим к выводу, что должно выполняться неравенство

$$c + \Delta c + A^T u \ge 0_n$$

для некоторого $u \ge 0_k$. Таким образом, задача минимизации функции (6.3.9) сводится к следующей: найти

$$\min \left(\|\Delta b\|_1 + \|\Delta c\|_1 \right) \tag{6.3.10}$$

при условиях:

$$\begin{array}{rcll} Ax & \le & b + \Delta b, & x \ge 0_n, \ \Delta b \ge 0_k, \\ A^T u & \ge & -c - \Delta c, & u \ge 0_k, \ \Delta c \ge 0_n. \end{array} \tag{6.3.11}$$

Из-за того, что условия на пары переменных не зависят друг от друга, задача (6.3.10), (6.3.11) разбивается на две самостоятельные подзадачи:

$$\min\left\{\|\Delta b\|_1 : \ Ax - b - \Delta b \le 0_k, \ x \ge 0_n, \ \Delta b \ge 0_k\right\}, \tag{6.3.12}$$

$$\min\left\{\|\Delta c\|_1 : \ A^T u + c + \Delta c \ge 0_n, \ u \ge 0_k, \ \Delta c \ge 0_n\right\}. \tag{6.3.13}$$

Если исходная задача (6.3.1), (6.3.7) является несобственной задачей 1-го рода, то в задаче (6.3.13) минимум равен нулю. Напротив, если задача (6.3.1), (6.3.7) есть несобственная задача 2-го рода, то равен нулю минимум в задаче (6.3.12). В случае несобственной задачи 3-го рода оба минимума положительны.

Приведенный подход к аппроксимации несобственной задачи принято называть *моделью прямой аппроксимации.* Возможны также и другие подходы, например, использование ранжирования ограничений по важности, т.е. разбиение ограничений на две группы, обязательные и необязательные для выполнения. При этом коррекции подвергаются только необязательные ограничения.

Глава 7

Оптимизационные задачи специального вида

7.1. Линейное программирование

Задачи линейного программирования (ЛП) — это один из основных классов задач математического программирования, в котором как целевая функция, так и ограничения задаются линейными функциями. Существуют много различных постановок задач линейного программирования. Надо только иметь в виду, что всегда от одной формальной постановки можно перейти к другой. Здесь мы рассмотрим лишь некоторые из них.

Пусть имеются матрица A размером $m \times n$, а также n-мерный вектор c и m-мерный вектор b. Приведем три постановки задач линейного программирования (ЛП) с указанием их названия, принятого в отечественной литературе.

1. **Задача ЛП в канонической форме**:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ Ax & = & b, \\ x & \geq & 0_n. \end{array} \tag{7.1.1}$$

2. **Задача ЛП в стандартной форме**:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ Ax & \geq & b, \\ x & \geq & 0_n. \end{array} \tag{7.1.2}$$

3. Задача ЛП в основной форме:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ Ax & \geq & b. \end{array} \tag{7.1.3}$$

Возможны также другие постановки задач ЛП, в которых присутствуют как равенства, так и неравенства, а к переменным либо не предъявляется никаких требований (они свободны, т.е. принадлежат всему пространству), либо, напротив, на них накладываются двусторонние ограничения, т.е. ограничения как справа, так и слева. Однако, как уже говорилось, всегда одну задачу можно свести к другой. Делается это с помощью простых приемов. Например, ограничения типа неравенства $Ax \geq b$ сводятся к равенствам введением дополнительной векторной переменной $y \geq 0_m$. Тогда вместо $Ax \geq b$ получаем $Ax - y = b$. Равенство $Ax = b$ всегда формально можно записать как два неравенства: $Ax \geq b$ и $Ax \leq b$. Свободную переменную $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде разности $x = y - z$ двух других переменных $y \geq 0_n$ и $z \geq 0_n$ и т.д.

Рассмотрим задачу ЛП в канонической форме (7.1.1). Она является частным случаем задачи выпуклого программирования, в которой имеется линейная целевая функция и линейные ограничения как типа равенства $Ax = b$, так и типа неравенства $-x \leq 0_n$. При теоретическом исследовании этой задачи можно использовать два подхода. Первый подход заключается в том, что вводится базовое допустимое множество Π, в качестве которого берется ортант $\mathbb{R}^n_+$. Это приводит к тому, что функциональные ограничения в задаче состоят только из равенств $Ax = b$. При втором подходе базовое допустимое множество Π не вводится или, что одно и то же, считается, что Π совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Тогда среди функциональных ограничений задачи помимо равенств содержатся и неравенства $-x \leq 0_n$ и их надо включать в функцию Лагранжа. Здесь мы придерживаемся второго подхода, согласно которому функция Лагранжа строится следующим образом:

$$\begin{array}{rcl} L(x, u, v) & = & \langle c, x\rangle + \langle u, b - Ax\rangle - \langle v, x\rangle = \\ & = & \langle c - A^T u - v, x\rangle + \langle b, u\rangle, \end{array} \tag{7.1.4}$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \geq 0_n$.

Найдем минимум функции Лагранжа по переменной x при фиксированных u и v, т.е. вычислим двойственную функцию $\phi(u, v)$:

$$\phi(u, v) = \min_{x \in R^n} L(x, u, v). \tag{7.1.5}$$

В силу линейности функции $L(x, u, v)$ по x конечный минимум может достигаться в том и только в том случае, когда

$$L_x(x, u, v) = c - A^T u - v = 0_n. \tag{7.1.6}$$

Это означает, что множество W_0, на котором двойственная функция имеет конечные значения, обязано иметь вид

$$W_0 = \left\{ [u, v] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n_+ : c - A^T u - v = 0_n \right\}.$$

С учетом условия (7.1.6) из (7.1.4) и (7.1.5) получаем, что

$$\phi(u, v) = \langle b, u \rangle, \tag{7.1.7}$$

при этом двойственная функция фактически не зависит от переменной v, называемой иногда *слабой двойственной переменной* или *двойственной невязкой*. Сама двойственная задача заключается в максимизации функции (7.1.7) при дополнительном учете равенства (7.1.6) и требования неотрицательности всех компонент вектора v. Другими словами, она имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u \rangle & \to & \max, \\ v + A^T u & = & c, \\ v & \geq & 0_n, \end{array} \tag{7.1.8}$$

т.е. опять является задачей ЛП. Двойственную задачу можно представить в более простом виде, если исключить переменную v:

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u \rangle & \to & \max, \\ A^T u & \leq & c. \end{array} \tag{7.1.9}$$

Задача (7.1.9) является задачей ЛП в основной форме. Если построить двойственную задачу к ней (как, впрочем, и к задаче (7.1.8)), то придем к исходной задаче ЛП (7.1.1).

Аналогичным образом можно получить (проделайте это!), что двойственная задача для ЛП в стандартной форме (7.1.2) имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u \rangle & \to & \max, \\ A^T u & \leq & c, \\ u & \geq & 0_m, \end{array} \tag{7.1.10}$$

а для ЛП в основной форме (7.1.3) —

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u \rangle & \to & \max, \\ A^T u & = & c, \\ u & \geq & 0_m. \end{array} \tag{7.1.11}$$

Опять подчеркнем, что если построить двойственные задачи к двойственным задачам (7.1.10), (7.1.11), то получим соответственно исходные задачи (7.1.2), (7.1.3). Поэтому о таких задачах говорят как о парах *взаимодвойственных задач*. Кроме того, пары взаимодвойственных задач всегда можно представить в симметричном виде, т.е. сделать так, чтобы исходная и двойственная задачи имели одинаковую форму. Поясним это на примере пары взаимодвойственных задач (7.1.1) и (7.1.8). Одна из них имеет каноническую форму, другая — стандартную.

Предположим, что матрица A имеет полный ранг, равный m. Возьмем произвольный вектор $\bar{c} \in \mathbb{R}^n$ такой, что $A\bar{c} = b$ (при этом некоторые компоненты вектора $\bar{c}$ могут быть даже отрицательными). Тогда $\langle b, u\rangle = \langle A\bar{c}, u\rangle = \langle \bar{c}, A^T u\rangle$. Но из равенства $c - A^T u = v$ следует, что $A^T u = c - v$. Поэтому $\langle b, u\rangle = \langle \bar{c}, c\rangle - \langle \bar{c}, v\rangle$.

Обозначим далее через $\mathcal{L}$ пространство строк матрицы A, через $\mathcal{L}^\perp$ — его ортогональное дополнение. Так как A — матрица полного ранга, то размерность $\mathcal{L}^\perp$ равна $d = n - m$. Пусть $\bar{A}$ — произвольная $(d \times n)$-матрица, строки которой определяют некоторый базис в пространстве $\mathcal{L}^\perp$. Тогда после умножения обеих частей равенства $c - A^T u = v$ справа на матрицу $\bar{A}$ получаем: $\bar{A}v = \bar{b}$, где обозначено $\bar{b} = \bar{A}c$.

Переходя теперь в двойственной задаче от максимизации к минимизации и опуская в целевой функции константу $\langle \bar{c}, c\rangle$, получаем двойственную задачу в канонической форме:

$$\begin{array}{rcl} \langle \bar{c}, v\rangle & \to & \min, \\ \bar{A}v & = & \bar{b}, \\ v & \geq & 0_n. \end{array} \tag{7.1.12}$$

Задача (7.1.12) полностью эквивалентна двойственной задаче (7.1.8) в том смысле, что их решения совпадают, точнее, совпадает оптимальный вектор v_*, входящий в пару $[u_*, v_*]$. Оптимальный вектор u_* может быть восстановлен по v_* с помощью связи $A^T u_* = c - v_*$. Оптимальные значения целевых функций в (7.1.8) и (7.1.12), конечно, не совпадают, но отличаются на константу $\langle \bar{c}, c\rangle$.

Обратим также внимание на геометрическую взаимосвязь допустимых множеств в исходной задаче (7.1.1) и в задаче (7.1.12). Допустимое множество в исходной задаче есть пересечение ортанта $\mathbb{R}^n_+$ с аффинным множеством, задаваемым через множество решений системы линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. Линейным подпространством, параллельным этому аффинному множеству, является подпространство $\mathcal{L}^\perp$. В задаче (7.1.12) допустимое множество также образуется путем пересечения ортанта $\mathbb{R}^n_+$ с аффинным множеством, но которое уже задается множеством решений системы уравнений $\bar{A}v = \bar{b}$. У данного аффинного множества параллельное линейное подпространство теперь $\mathcal{L}$. Таким образом, несущие линейные подпространства у аффинных множеств оказываются взаимно ортогональными.

Упражнение 26. *Постройте задачу, двойственную к задаче линейного программирования:*

$$\langle c, x\rangle \to \min, \quad Ax = b, \quad 0_n \le x \le d,$$

где $d > 0_n$.

Сформулируем далее необходимые и достаточные условия оптимальности, а также теорему двойственности для задач линейного программирования на примере прямой задачи в канонической форме (7.1.1) и двойственной к ней задачи (7.1.9). Обозначим через X и U допустимые множества в этих задачах:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ Ax = b\right\}, \quad U = \left\{u \in \mathbb{R}^m :\ A^T u \le c\right\}.$$

Прежде всего, установим следующий важный результат, касающийся существования решения у задачи (7.1.1).

Теорема 7.1.1. *Пусть допустимое множество X в прямой задаче линейного программирования* (7.1.1) *непусто. Пусть, кроме того, целевая функция $f(x) = \langle c, x\rangle$ ограничена снизу на X. Тогда решение задачи* (7.1.1) *существует.*

Доказательство. Так как целевая функция ограничена снизу на X, то

$$\inf_{x\in X}\langle c, x\rangle = f_* > -\infty.$$

Допустим, что точная нижняя грань f_* не достигается. Тогда система равенств и неравенств

$$\langle c, x\rangle = f_*, \quad Ax = b, \quad x \ge 0_n \tag{7.1.13}$$

не имеет решения. Обозначим

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} c^T \\ A \end{bmatrix}, \qquad \tilde{b} = \begin{bmatrix} f_* \\ b \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}$ имеет размер $(m+1)\times n$ и является не чем иным, как матрицей A, к которой добавлен в качестве первой строки вектор c. Соответственно $\tilde{b} \in \mathbb{R}^{m+1}$. Отсутствие решения у системы (7.1.13) означает, что $\tilde{b} \notin \text{pos}\tilde{A}$. Так как выпуклый конус $\text{pos}\tilde{A}$ замкнут, то в этом случае вектор $\tilde{b}$ строго отделим от $\text{pos}\tilde{A}$. Поэтому найдется ненулевой вектор $\tilde{p}^T = [p_0, p^T] \in \mathbb{R}^{m+1}$ такой, что

$$\langle \tilde{p}, \tilde{b} \rangle > \langle \tilde{p}, \tilde{y} \rangle \qquad \forall\, \tilde{y} \in \text{pos}\tilde{A}$$

или с учетом того, что $\tilde{y} = \tilde{A}x$,

$$p_0 f_* + \langle p, b \rangle > p_0 \langle c, x \rangle + \langle A^T p, x \rangle \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{7.1.14}$$

Так как неравенство (7.1.14) справедливо для любого $x \in \mathbb{R}^n_+$, то, полагая в нем $x = 0_n$, получаем

$$p_0 f_* + \langle p, b \rangle > 0. \tag{7.1.15}$$

С другой стороны, устремляя $x^i \to +\infty$, $1 \le i \le n$, убеждаемся, что

$$p_0 c + A^T p \le 0_n. \tag{7.1.16}$$

Покажем, что $p_0 \neq 0$. Действительно, если $p_0 = 0$, то $p \neq 0_m$ и неравенства (7.1.15) и (7.1.16) переходят в

$$\langle p, b \rangle > 0, \qquad A^T p \le 0_n. \tag{7.1.17}$$

Если теперь взять $x \in X$ и умножить второе неравенство из (7.1.17) на x^T, то получим

$$0 \ge \langle A^T p, x \rangle = \langle p, Ax \rangle = \langle p, b \rangle,$$

что противоречит первому неравенству из (7.1.17).

Таким образом, $p_0 \neq 0$ и, не умаляя общности, можно положить $p_0 = 1$. Неравенства (7.1.15) и (7.1.16) тогда перепишутся соответственно как

$$f_* + \langle p, b \rangle > 0, \quad c + A^T p \le 0_n. \tag{7.1.18}$$

Из правого неравенства (7.1.18) имеем для всех $x \in X$:

$$0 \ge \langle c + A^T p, x \rangle = \langle c, x \rangle + \langle p, Ax \rangle = \langle c, x \rangle + \langle p, b \rangle.$$

Отсюда, беря последовательность $\{x_k\} \subseteq X$ такую, что $\langle c, x_k \rangle \to f_*$, приходим к

$$\lim_{k \to \infty} [\langle c, x_k \rangle + \langle p, b \rangle] = f_* + \langle p, b \rangle \le 0.$$

Данное неравенство противоречит левому неравенству (7.1.18). Следовательно, исходное предположение, что точная нижняя грань f_* не достигается, неверно. Поэтому задача (7.1.1) имеет решение. ■

Теорема 7.1.2. *Пусть допустимые множества X и U непусты. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Для любых $x \in X$ и $u \in U$ имеет место слабая двойственность, т.е. выполняется неравенство $\langle c, x\rangle \geq \langle b, u\rangle$.

2) Точки $x_* \in X$ и $u_* \in U$ являются решениями соответственно прямой и двойственной задач (7.1.1) и (7.1.9) тогда и только тогда, когда

$$\langle c, x_*\rangle = \langle b, u_*\rangle. \tag{7.1.19}$$

Доказательство. Утверждение пункта 1 следует из леммы 6.2.2. Утверждение пункта 2 фактически есть утверждение теоремы 6.2.1, которое для линейных задач справедливо и без предположения о выполнении условия регулярности ограничений Слейтера. ■

Заметим, что равенство (7.1.19) равносильно выполнению условию *дополняющей нежесткости*:

$$\langle x_*, v_*\rangle = 0, \quad v_* = c - A^T u_*, \tag{7.1.20}$$

поскольку из допустимости точки x_* получаем

$$\langle b, u_*\rangle = \langle Ax_*, u_*\rangle = \langle A^T u_*, x_*\rangle.$$

Следовательно,

$$\langle x_*, v_*\rangle = \langle x_*, c - A^T u_*\rangle = \langle c, x_*\rangle - \langle A^T u_*, x_*\rangle = \langle c, x_*\rangle - \langle b, u_*\rangle = 0.$$

В силу того, что все компоненты векторов x_* и v_* неотрицательны, условие (7.1.20) распадается на n равенств: $x_*^i v_*^i = 0$, $1 \leq i \leq n$.

Используя утверждение теоремы 7.1.2, можно сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности сразу для пары задач линейного программирования (7.1.1) и (7.1.9).

Теорема 7.1.3. (Необходимые и достаточные условия для пары взаимодвойственных задач ЛП.) *Для того чтобы точки $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $u_* \in \mathbb{R}^m$ были бы решениями соответственно задач* (7.1.1) *и* (7.1.9), *необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли следующей системе равенств и неравенств:*

$$\begin{array}{rcl} D(x_*)v_* & = & 0_n, \\ Ax_* & = & b, \\ v_* & = & c - A^T u_*, \\ x_* \geq 0_n, & & v_* \geq 0_n, \end{array} \tag{7.1.21}$$

где $D(x_*)$ — диагональная матрица с вектором x_* на диагонали.

Доказательство. Первое равенство в (7.1.21), как уже отмечалось, равносильно выполнению равенства (7.1.19). Второе и третье равенства совместно с неравенствами $x_* \geq 0_n$ и $v_* \geq 0_n$ показывают, что точки x_* и u_* должны быть допустимыми, т.е. $x_* \in X$, $u_* \in U$. Утверждение теоремы тогда есть следствие утверждения теоремы 7.1.2. ■

Возникает вопрос: в каких случаях решение задач (7.1.1) и (7.1.9) заведомо существует? Частично на этот вопрос дают ответ утверждения теорем 7.1.1 и 7.1.3. Здесь важный результат состоит в том, что решения взаимодвойственных задач могут существовать только одновременно у обеих задач.

Теорема 7.1.4. (Двойственность для задач ЛП.) *Имеют место следующие утверждения.*

1) *Прямая задача (7.1.1) имеет решение в том и только в том случае, когда имеет решение двойственная задача (7.1.9) и наоборот.*

2) *Если допустимые множества в прямой и двойственной задачах непусты, то обе задачи (7.1.1) и (7.1.9) имеют решения.*

3) *Если допустимое множество в прямой задаче (7.1.1) не пусто, а в двойственной задаче пусто, то оптимальное значение целевой функции в прямой задаче бесконечно и наоборот.*

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости утверждения второго пункта. В самом деле, если X и U — непустые множества, то в силу первого утверждения теоремы 7.1.2 $\langle c, x\rangle \geq \langle b, u\rangle$, где $x \in X$ и $u \in U$ — произвольные точки. Поэтому целевая функция в прямой задаче (7.1.1) ограничена снизу на X. Следовательно, решение прямой задачи (7.1.1) существует. Проводя аналогичные рассуждения, можно удостовериться, что и у двойственной задачи (7.1.9) также существует решение.

Докажем теперь утверждение первого пункта. Пусть двойственная задача (7.1.9) имеет решение — точку u_*. Составим для задачи (7.1.9) функцию Лагранжа:

$$L(u, x) = -\langle b, u\rangle + \langle x, A^T u - c\rangle, \qquad x \geq 0_n.$$

Здесь от задачи на максимум мы перешли к задаче на минимум, а вектор x играет роль вектора двойственных переменных для ограничения неравенства $A^T u \leq c$. Так как u_* — решение (7.1.9), то в силу необходимых условий оптимальности, следующих из теоремы 5.2.3, должен найтись такой вектор $x_* \geq 0_n$, что u_* месте с x_* удовлетворяет соотношениям

$$L_u(u_*, x_*) = -b + Ax_* = 0, \quad \langle x_*, A^T u_* - c\rangle = 0, \tag{7.1.22}$$

второе из которых есть просто условие дополняющей нежесткости.

Первое соотношение в (7.1.22) указывает на то, что допустимое множество X в прямой задаче (7.1.1) непусто. Кроме того, согласно теореме 7.1.2 $\langle c, x\rangle \geq \langle b, u_*\rangle$ для всех $x \in X$, т.е. целевая функция в прямой задаче ограничена снизу на X. Поэтому по теореме 7.1.1 решение прямой задачи также существует. Обратное утверждение, что у двойственной задачи имеется решение, когда оно имеется у прямой, доказывается аналогично.

Наконец, предположим, что допустимое множество X в прямой задаче непустое, а допустимое множество U в двойственной задаче пустое. Тогда система $A^T u \leq c$ не имеет решения, причем обязательно $c \neq 0_n$. В этом случае по теореме об альтернативах Гейла 2.6.8 система

$$Ax = 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad \langle c, x\rangle < 0 \tag{7.1.23}$$

совместна, т.е. имеет решение. Пусть $\bar{x}$ — произвольное ненулевое решение (7.1.23) и пусть $x_0 \in X$. Тогда $\lambda\bar{x}$ также является решением системы (7.1.23) для любого $\lambda \geq 0$. Кроме того, $x = x_0 + \lambda\bar{x} \in X$ для этих $\lambda \geq 0$ и

$$\langle c, x\rangle = \langle c, x_0\rangle + \lambda\langle c, \bar{x}\rangle.$$

Отсюда, устремляя $\lambda \to +\infty$, получаем: $\langle c, x\rangle \to -\infty$. Отметим, что взятое нами ненулевое решение $\bar{x}$ системы (7.1.23) является рецессивным направлением относительно множества X.

Обратное утверждение о том, что целевая функция в двойственной задаче принимает бесконечное значение (равное $+\infty$) на допустимом множестве U, когда множество X пусто, доказывается схожим образом. ∎

Важным частным случаем задач линейного программирования является *транспортная задача по критерию стоимости.* Часто ее называют просто *транспортной задачей.* Пусть имеются пункты отправления в количестве m штук, в каждом из которых находятся соответственно $a_1, \ldots, a_m$ единиц однородного груза. Нужно этот груз развести по n пунктам назначения потребителям, причем так, чтобы в каждом из этих пунктов оказалось соответственно $b_1, \ldots, b_n$ единиц груза. Пусть стоимость перевозки единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения равняется $c_{ij} \geq 0$. Надо так выбрать количество груза $x_{ij} \geq 0$, перевозимого из пункта i в пункт j, чтобы суммарная стоимость перевозок оказалась минимальной. Формально эта задача записывается в виде

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} & \to & \min, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} & = & a_i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} & = & b_j, \quad 1 \leq j \leq n, \\ x_{ij} \geq 0, & & 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n. \end{array}$$

Таким образом, переменная в этой задаче линейного программирования есть фактически матричная переменная, а именно неотрицательная $(m \times n)$-матрица X с элементами x_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Если суммарные запасы груза в пунктах отправления совпадают с суммарными запросами потребителей, т.е.

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = d > 0, \tag{7.1.24}$$

то говорят, что мы имеем дело с *замкнутой моделью* транспортной задачи. Всегда можно перейти к замкнутой модели, даже когда равенство (7.1.24) не выполняется. Делается это путем введения фиктивных пунктов назначения или фиктивных пунктов отправления с нулевыми стоимостями перевозок.

В замкнутой модели допустимое множество непустое. В самом деле, беря $x_{ij} = (a_i b_j)/d$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, получаем, что для матрицы X с данными элементами выполняются все ограничения. Кроме того, значение целевой функции в этой задаче неотрицательно для любых допустимых точек X. Поэтому по теореме 7.1.1 транспортная задача всегда разрешима.

7.2. Квадратичное программирование

Задачи *квадратичного программирования* являются другим очень важным специальным классом задач математического программирования. Известно, какую особую роль играют квадратичные формы в физике и, в частности, в механике. Кроме того, задачи квадратичного программирования часто используются как вспомогательные подзадачи в численных методах оптимизации. Имеются несколько постановок задач квадратичного программирования. Далее под задачей квадратичного программирования понимается задача минимизации квадратичной целевой функции на допустимом множестве, задаваемым линейными ограничениями типа неравенства, т.е. требуется найти

$$\min_{x\in X}\ f(x),\ f(x)=\frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle+\langle d, x\rangle,\ X=\{x\in\mathbb{R}^n:\ Ax\le b\}. \quad (7.2.1)$$

Здесь C — ненулевая симметричная матрица порядка n, A — $(m\times n)$-матрица, $d\in\mathbb{R}^n$, $b\in\mathbb{R}^m$. То, что линейные ограничения в задаче заданы в виде неравенств, не очень существенно. Согласно сказанному в предыдущем разделе, всегда другие линейные ограничения можно представить в такой форме.

Ниже предполагается, что симметричная матрица C положительно полуопределена. В этом случае целевая функция $f(x)$ выпукла и, стало быть, (7.2.1) может быть отнесена к классу задач выпуклого программирования. Если матрица C не является положительно полуопределенной, то задача (7.2.1), вообще говоря, становится *многоэкстремальной* и ее решение существенно усложняется.

Особенно привлекательный вид задача (7.2.1) принимает, когда матрица C положительно определена. При этом предположении функция $f(x)$ сильно выпукла и по теореме 4.1.11 и замечанию к ней задача (7.2.1) обязательно имеет решение, причем единственное. Для существования решения в общем случае, когда матрица C только положительно полуопределенная, приходится накладывать дополнительные требования, например, ограниченность функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$.

Лемма 7.2.1. *Пусть положительно полуопределенная матрица C не является положительно определенной и $d\neq 0_n$. Пусть, кроме того, целевая функция $f(x)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$. Тогда множество ее минимумов на $\mathbb{R}^n$ не пусто.*

Доказательство. Градиент выпуклой квадратичной целевой функции $f(x)$ равен $f_x(x)=Cx+d$. Поэтому, согласно теореме 4.2.7, если существует точка $x_*\in\mathbb{R}^n$ такая, что

$$Cx_*+d=0_n, \quad (7.2.2)$$

то в x_* функция $f(x)$ достигает своего минимального значения на $\mathbb{R}^n$.

Чтобы равенство (7.2.2) выполнялось, необходимо, чтобы вектор d принадлежал пространству столбцов матрицы C. Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{C})$ обозначает пространство столбцов C, $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ — ее нуль-пространство. Согласно сделанным предположениям оба пространства отличны от нулевого пространства. Возьмем произвольный ненулевой вектор $\bar{y}\in\mathcal{N}(\mathcal{C})$. Для него $C\bar{y}=0_n$. Кроме того, имеем $\langle d,\bar{y}\rangle=0$. Действительно, в противном случае, например, когда $\langle d,\bar{y}\rangle<0$, беря $y(\lambda)=\lambda\bar{y}$ и устремляя λ

к $+\infty$, получили
$$f(y(\lambda)) = \lambda\langle d, \bar{y}\rangle \to -\infty,$$
что противоречит ограниченности снизу функции $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. Если $\langle d, \bar{y}\rangle > 0$, то надо, напротив, стремить λ к $-\infty$. В силу произвольности вектора $\bar{y}$ из $\mathcal{N}(\mathcal{C})$ отсюда делаем вывод, что $d \in \mathcal{R}(\mathcal{C})$. Таким образом, уравнение (7.2.2) обязательно имеет решение. Любое решение (7.2.2) есть точка минимума $f(x)$ на $\mathbb{R}^n$. ■

Утверждение леммы 7.2.1 сохранится, если от всего пространства $\mathbb{R}^n$ перейти к полиэдральному множеству X из (7.2.1). Обозначим через X_* множество решений задачи (7.2.1).

Теорема 7.2.1. (Франка–Вулфа.) *Пусть квадратичная функция $f(x)$ ограничена снизу на допустимом множестве X. Тогда множество X_* не пусто.*

Доказательство. Утверждение теоремы тривиально, если множество X ограничено. Поэтому в дальнейшем считаем, что полиэдральное множество X является неограниченным.

Последующее доказательство проведем, используя индукцию по размерности $\dim X$ множества X. Если она равна единице, то утверждение теоремы очевидно.

Допустим теперь, что утверждение теоремы справедливо, когда $1 \leq \dim X \leq k$, и покажем, что оно сохраняется при $\dim X = k+1$. Так как по предположению полиэдральное множество X неограниченное, то его можно представить в виде $X = X_1 + K$, где X_1 — выпуклый многогранник, а K — отличный от нулевого многогранный конус (совпадает с рецессивным конусом множества X). Пусть $X_2 = \{x \in K : \|x\| = 1\}$. Тогда для любой точки x множества X имеет место разложение
$$x = x_1 + \lambda y, \tag{7.2.3}$$
где $x_1 \in X_1$, $y \in X_2$, $\lambda \geq 0$. Обозначим $f_* = \inf_{x\in X} f(x)$. Согласно условиям теоремы $f_* > -\infty$. Имеем с использованием разложения (7.2.3):
$$f(x) = f(x_1 + \lambda y) = f(x_1) + \lambda\langle Cx_1 + d, y\rangle + \frac{\lambda^2}{2}\langle y, Cy\rangle \geq f_*. \tag{7.2.4}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\langle y, Cy\rangle > 0$ для всех $y \in X_2$. Так как множества X_1 и X_2 компактные, то можно указать константы $c_1 > -\infty$ и $c_2 > 0$ такие, что
$$\langle Cx_1 + d, y\rangle \geq c_1, \quad \langle y, Cy\rangle \geq c_2 \quad \forall\, x_1 \in X_1, \quad \forall\, y \in X_2.$$

Для квадратичных функций

$$
\begin{aligned}
\phi_1(\lambda; x_1, y) &= \langle Cx_1 + d, y\rangle\lambda + \langle y, Cy\rangle \tfrac{\lambda^2}{2}, \\
\phi_2(\lambda) &= c_1\lambda + c_2\tfrac{\lambda^2}{2},
\end{aligned}
$$

в первой из которых параметры x_1 и y фиксированы, получаем, что $\phi_1(\lambda; x_1, y) \geq \phi_2(\lambda)$ для всех $\lambda \geq 0$. Кроме того, их минимумы по $\lambda \geq 0$ всегда достигаются в конечных точках:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1^* &= \arg\min_{\lambda\geq 0} \phi_1(\lambda; x_1, y) = \max\{0, -\tfrac{\langle Cx_1+d, y\rangle}{\langle y, Cy\rangle}\}, \\
\lambda_2^* &= \arg\min_{\lambda\geq 0} \phi_2(\lambda) = \max\{0, -\tfrac{c_1}{c_2}\}.
\end{aligned}
$$

Понятно, что $0 \leq \lambda_2^* \leq \lambda_1^*$, причем величина λ_2^* не зависит ни от x_1, ни от y. Так как согласно (7.2.4)

$$
\min_{x\in X} f(x) = \min_{x_1\in X_1, y\in X_2} \min_{\lambda\geq 0} \left[f(x_1) + \phi_1(\lambda; x_1, y)\right],
$$

то отсюда делаем вывод, что всегда данный минимум достигается. Следовательно, X_* — непустое множество.

Предположим теперь, что найдется $\bar{y} \in X_2$ такое, что $\langle \bar{y}, C\bar{y}\rangle = 0$. Для симметричной положительно полуопределенной матрицы C это возможно только тогда, когда $C\bar{y} = 0_n$, т.е. когда вектор $\bar{y}$ принадлежит нуль-пространству матрицы C. Для такого $\bar{y}$ для всех $x \in X$ и $\lambda \geq 0$ точка $x + \lambda\bar{y}$ принадлежит X и, следовательно, выполняется неравенство

$$
f(x + \lambda\bar{y}) = f(x) + \lambda\langle Cx + d, \bar{y}\rangle \geq f_*. \tag{7.2.5}
$$

Данное неравенство может иметь место тогда и только тогда, когда $\langle Cx + d, \bar{y}\rangle \geq 0$ для любого $x \in X$.

В принципе возможны две ситуации.

Случай 1. Существует такое $x \in X$, что $x + \lambda\bar{y} \in X$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ (а не только при $\lambda \geq 0$). Но тогда из неравенства $A(x + \lambda\bar{y}) \leq b$, справедливого для любых $\lambda \in \mathbb{R}$, следует равенство: $A\bar{y} = 0_n$. Мы получаем, что не только вектор $\bar{y}$ принадлежит рецессивному конусу множества X, но и вся прямая, задаваемая этим вектором. Более того, какую бы другую точку $x \in X$ мы ни взяли, точка $x + \lambda\bar{y}$ остается в пределах множества X для любого $\lambda \in \mathbb{R}$. Но тогда неравенство (7.2.5) оказывается справедливым для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, что возможно лишь когда $\langle Cx + d, \bar{y}\rangle \equiv 0$ для всех $x \in X$. Следовательно, $f(x + \lambda\bar{y}) \equiv f(x)$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Данное равенство означает, что множество X можно спроектировать на подпространство, ортогональное вектору $\bar{y}$, и искать минимум функции $f(x)$ на этой проекции. Так как размерность спроектированного допустимого множества X на единицу меньше, чем размерность самого множества X, то по предположению индукции минимум $f(x)$ достигается.

Случай 2. Для любого $x \in X$ найдется конечное $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что точка $x + \lambda\bar{y}$ не принадлежит X. Пусть

$$\lambda_x = \min\{\lambda \in \mathbb{R} : \ x + \lambda\bar{y} \in X\}.$$

Так как $(x + \lambda\bar{y}) \in X$ для всех $\lambda \geq 0$, то обязательно $\lambda_x \leq 0$. Поэтому из (7.2.5) с учетом неравенства $\langle Cx + d, \bar{y}\rangle \geq 0$ получаем

$$f(x + \lambda_x\bar{y}) = f(x) + \lambda_x\langle Cx + d, \bar{y}\rangle \geq f(x).$$

Но любая точка $x + \lambda_x\bar{y}$ принадлежит границе полиэдрального множества X. Поэтому вместо того, чтобы искать минимальное значение функции $f(x)$ на X, можно искать его среди граничных точек X. Любая грань, принадлежащая границе X, также оказывается полиэдральным множеством, но меньшей размерности по сравнению с X. По предположению индукции минимум $f(x)$ на таких гранях достигается. Поэтому он достигается и на X. ■

Построим задачу, двойственную к (7.2.1). С этой целью составим функцию Лагранжа (регулярную):

$$L(x, u) = \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle d, x\rangle + \langle u, Ax - b\rangle,$$

определенную на множестве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$. Пусть

$$\phi(u) = \inf_{x \in R^n} L(x, u), \quad U_0 = \{u \in \mathbb{R}^m_+ : \phi(u) > -\infty\}.$$

Согласно своему определению множество U_0 совпадает со множеством тех точек из $\mathbb{R}^m_+$, при которых $L(x, u)$, рассматриваемая как функция от x, ограничена снизу на $\mathbb{R}^n$. Для любой точки $u \in U_0$ можно указать точку $x = x(u)$ такую, что $L_x(x(u), u) = 0_n$, или, в более подробной записи,

$$Cx(u) + d + A^T u = 0_n. \tag{7.2.6}$$

Подставляя данную точку $x(u)$ в функцию Лагранжа, приходим с учетом (7.2.6) к двойственной функции:

$$\phi(u) = L(x(u), u) = -\frac{1}{2}\langle x(u), C\,x(u)\rangle - \langle b, u\rangle,$$

а сама двойственная задача состоит в

$$\max_{u \in U_0} \phi(u).$$

Ее можно записать в эквивалентной форме с привлечением переменной x из $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle b, u\rangle & \to & \min, \\ Cx + A^T u & = & -d, \\ u & \geq & 0_m, \end{array} \tag{7.2.7}$$

т.е. представить в виде двойственной задачи по Вулфу.

В случае, когда матрица C положительно определена, от переменной x можно освободиться. Действительно, если воспользоваться равенством $Cx + A^T u = -d$, то получаем: $x = -C^{-1}(A^T u + d)$, что после подстановки данного x в целевую функцию в (7.2.7) приводит к задаче

$$\min_{u \in R^m_+} \left[\frac{1}{2}\langle u, \tilde{C}u\rangle + \langle \tilde{d}, u\rangle + \tilde{c} \right],$$

где

$$\tilde{C} = AC^{-1}A^T, \quad \tilde{d} = AC^{-1}d + b, \quad \tilde{c} = \frac{1}{2}\langle d, C^{-1}d\rangle. \tag{7.2.8}$$

Двойственная задача (7.2.8) также оказывается задачей квадратичного программирования, но имеющей более простой вид по сравнению с исходной задачей (7.2.1), так как допустимое множество в двойственной задаче есть просто ортант $\mathbb{R}^m_+$. Из общих свойств двойственных задач вытекает следующий результат.

Теорема 7.2.2. *Пусть в задаче квадратичного программирования (7.2.1) матрица C положительно определена и допустимое множество X непусто. Тогда двойственная задача (7.2.8) имеет решение и для любых $x \in X$ и $u \in \mathbb{R}^m_+$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{2}\langle x, Cx\rangle + \langle d, x\rangle \geq -\left[\frac{1}{2}\langle u, \tilde{C}u\rangle + \langle \tilde{d}, u\rangle + \tilde{c} \right]. \tag{7.2.9}$$

Если x_* и u_* — решения соответственно задач (7.2.1) и (7.2.8), то неравенство (7.2.9) переходит в равенство. Точки x_* и u_* связаны между собой соотношением

$$Cx_* + A^T u_* + d = 0_n. \tag{7.2.10}$$

Отметим, что при сделанных предположениях относительно матрицы C и допустимого множества X задача квадратичного программирования (7.2.1) обязательно имеет решение. Если множество X пустое, то обе задачи (7.2.1) и (7.2.8) не имеют решения.

Рассмотрим частный случай задачи (7.2.1), когда требуется найти точку x_* из многогранного множества $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \le b\}$, где A — $(m \times n)$-матрица, ближайшую к заданной точке $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Используя евклидову норму, ее можно записать в виде задачи квадратичного программирования: найти

$$\min \frac{1}{2}\|x - \bar{x}\|^2 \qquad \text{при условии } Ax \le b. \tag{7.2.11}$$

В этом случае $C = I_n$, $d = -\bar{x}$, и, используя соотношение (7.2.10), получаем, что

$$x_* = \bar{x} - A^T u_*, \tag{7.2.12}$$

где u_* — решение задачи

$$\min_{u \in R^m_+} \left[\frac{1}{2}\langle u, A^T A\, u\rangle + \langle b - A\bar{x}, u\rangle \right]. \tag{7.2.13}$$

Если точка $\bar{x}$ принадлежит множеству X, то $b - A\bar{x} \ge 0_m$. Поэтому единственным решением задачи (7.2.13) является точка $u_* = 0_m$, и согласно (7.2.12) имеем: $x_* = \bar{x}$, что очевидно.

Наряду с задачами вида (7.2.1) интерес представляют также задачи квадратичного программирования, заключающиеся в минимизации квадратичных функций при квадратичных ограничениях:

$$\min_{x \in X} \ f(x), \qquad X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g_i(x) \le b_i, \ 1 \le i \le m\}, \tag{7.2.14}$$

где

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \frac{1}{2}\langle x, A_0 x\rangle + \langle d_0, x\rangle, \\ g_i(x) & = & \frac{1}{2}\langle x, A_i x\rangle + \langle d_i, x\rangle, \quad 1 \le i \le m. \end{array}$$

Если все матрицы A_i, $0 \le i \le m$, положительно полуопределенные, то данная задача относится к классу задач выпуклого программирования.

7.3. Коническое и полуопределенное программирование

В задаче линейного программирования (7.1.1) имелось требование, чтобы все компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ были неотрицательны, т.е. чтобы $x \in \mathbb{R}^n_+$. Ортант $\mathbb{R}^n_+$ является выпуклым замкнутым полиэдральным конусом. Пусть теперь у нас имеется произвольный выпуклый замкнутый конус $K \subset \mathbb{R}^n$. Заменяя в (7.1.1) неравенство $x \ge 0_n$

на требование $x \in K$, мы приходим к обобщению задачи линейного программирования (7.1.1), которое носит название *задачи конического программирования*:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ Ax & = & b, \\ x & \in & K. \end{array} \qquad (7.3.1)$$

Подобным образом могут быть обобщены и другие постановки задач линейного программирования.

Несмотря на формальную близость задачи конического программирования (7.3.1) к задаче линейного программирования (7.1.1), первая задача по своим свойствам может существенно отличаться от второй, особенно когда конус K не является полиэдральным. Например, для задач конического программирования может нарушаться результат теоремы 7.1.1, а именно в задаче, в которой целевая функция ограничена снизу на допустимом множестве, ее инфимум может не достигаться.

Построим задачу, двойственную к (7.3.1). Для этого прежде всего нам надо составить функцию Лагранжа. Вопрос состоит в том, откуда и каким образом брать вектор множителей v, который отвечал бы за ограничение $x \in K$. В случае линейного программирования, когда $K = \mathbb{R}^n_+$, вектор множителей v брался также из $\mathbb{R}^n_+$. Но конус $\mathbb{R}^n_+$ является самосопряженным, поэтому можно считать, что v брался из конуса, сопряженного к $\mathbb{R}^n_+$. Поступим аналогичным образом и в случае задачи конического программирования (7.3.1), взяв v из конуса K^*, сопряженного к K. Тогда функция Лагранжа примет вид

$$\begin{array}{rcl} L(x, u, v) & = & \langle c, x\rangle + \langle u, b - Ax\rangle - \langle v, x\rangle = \\ & = & \langle c - A^T u - v, x\rangle + \langle b, u\rangle, \end{array} \qquad (7.3.2)$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in K^*$.

Объединим обе двойственные переменные u и v в одну общую переменную $w = [u, v]$. Положим также

$$W = \left\{[u, v] : \; u \in \mathbb{R}^m, \; v \in K^*\right\}.$$

Пусть $X = \{x \in K : \; Ax = b\}$ — допустимое множество в задаче (7.3.1). Построенная функция Лагранжа (7.3.2) обладает свойством

$$\langle c, x\rangle \geq L(x, u, v) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, w \in W. \qquad (7.3.3)$$

Вычислим двойственную функцию:

$$\phi(w) = \min_{x \in R^n} L(x, w) = \begin{cases} \langle b, u\rangle, & c - A^T u - v = 0_n, \\ -\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому соответствующее множество $W_0 = \{w \in W : \ \phi(w) > -\infty\}$ имеет вид

$$W_0 = \left\{[u, v] : \ u \in \mathbb{R}^m, \ v \in K^*, \ c - A^T u - v = 0_n\right\},$$

а сама двойственная задача заключается в следующем:

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u\rangle & \to & \max, \\ c - A^T u & = & v, \\ v & \in & K^*. \end{array} \qquad (7.3.4)$$

Двойственной к (7.3.4) является исходная задача конического программирования (7.3.1). Из неравенства (7.3.3) следует, что

$$\langle c, x\rangle \geq L(x, w) \geq \min_{x \in R^n} L(x, w) = \phi(w) \quad \forall \ x \in X, \quad \forall \ w \in W_0.$$

Таким образом, прямая (исходная) задача (7.3.1) и двойственная задача (7.3.4) связаны между собой соотношением слабой двойственности. Выясним теперь, когда имеет место строгая двойственность.

Мы скажем, что прямая задача (7.3.1) *строго допустима*, если конус K имеет непустую внутренность $K_0 = \mathrm{int} K$ и существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $\bar{x} \in K_0$. Обозначим также через

$$f_* = \inf_{x \in X} \langle c, x\rangle, \quad \phi^* = \sup_{w \in W_0} \langle b, u\rangle.$$

Теорема 7.3.1. *Пусть задача (7.3.2) строго допустима и целевая функция $f(x)$ ограничена снизу на X. Тогда двойственная задача* (7.3.4) *имеет решение $w_* \in W_0$ и $\phi(w_*) = \phi^* = f_*$.*

Доказательство. Покажем, что при сделанных предположениях множество W_0 непустое и найдется точка $w_* \in W_0$ такая, что $\phi(w_*) \geq f_*$. Из слабой двойственности тогда немедленно следует, что w_* — решение двойственной задачи (7.3.4) и $\phi(w_*) = \phi^* = f_*$.

Рассмотрим сначала случай, когда вектор c не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{L}$, порожденному строками матрицы A. Введем в рассмотрение множество $M = M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax = b\right\}, \quad M_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \langle c, x\rangle \leq f_*\right\}.$$

Множество M выпуклое. Используя теорему 2.6.9 об альтернативах, приходим к выводу, что оно непустое.

Покажем, что $M \cap K_0 = \emptyset$. Действительно, если это не так, то найдется точка $x_1 \in M$ такая, что $x_1 \in K_0$. Но тогда можно указать

$\varepsilon > 0$, при котором целая окрестность $\Delta_\varepsilon(x_1)$ точки x_1 принадлежит K_0. При этом $M_1 \cap \Delta_\varepsilon(x_1) \subset X$.

Учтем далее, что вектор c не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{L}$ и что $\langle c, x_1 \rangle \leq f_*$. Тогда обязательно должна найтись другая точка $x_2 \in M_1 \cap \Delta_\varepsilon(x_1)$, для которой справедливо неравенство: $\langle c, x_2 \rangle < \langle c, x_1 \rangle \leq f_*$. В силу того, что $x_2 \in X$, данное неравенство не может иметь места.

Таким образом, выпуклые множества M и K_0 не пересекаются. Более того, не пересекаются их относительные внутренности. Поэтому по теореме 2.4.3 они собственно отделимы друг от друга и можно указать такой ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что

$$\langle v, x_1 \rangle \leq \langle v, x_2 \rangle \quad \forall\, x_1 \in M, \quad \forall\, x_2 \in K_0. \tag{7.3.5}$$

Поскольку K_0 — выпуклый конус, то наряду с (7.3.5) для любого $\lambda > 0$ и всех $x_2 \in K_0$ выполняется неравенство: $\langle v, x_2 \rangle \geq \lambda^{-1} \langle v, x_1 \rangle$. Отсюда сразу следует, что $\langle v, x_2 \rangle \geq 0$ для всех $x_2 \in K_0$ и, стало быть, $v \in K_0^* = K^*$. Кроме того, взяв последовательность точек x_2^k, принадлежащих конусу K_0 и таких, что $x_2^k \to 0_n$ при $k \to \infty$, из (7.3.5) приходим также к неравенству

$$\langle x, v \rangle \leq 0 \quad \forall\, x \in M. \tag{7.3.6}$$

Но M есть пересечение аффинного множества и сдвинутого линейного полупространства. Поэтому для выполнения неравенства (7.3.6) необходимо, чтобы вектор v был бы опорным к множеству M. Для неограниченного множества M это возможно только тогда, когда существует ненулевой вектор $\tilde{u} = [u^0, u] \in \mathbb{R}^{m+1}$ такой, что $u \in \mathbb{R}^m$ и

$$v = u^0 c + A^T u, \tag{7.3.7}$$

причем $u^0 \geq 0$.

Покажем, что $u^0 \neq 0$. От противного, предположим, что $u^0 = 0$. Тогда $u \neq 0_m$ и $v = A^T u$. Поскольку $Ax = b$ для $x \in M$, то согласно (7.3.6) имеем

$$\langle v, x \rangle = \langle A^T u, x \rangle = \langle u, Ax \rangle = \langle u, b \rangle \leq 0. \tag{7.3.8}$$

С другой стороны, в силу строгой допустимости найдется точка $\bar{x} \in X$ такая, что $\bar{x} \in K_0 = \mathrm{int} K$. Но для конуса K, имеющего непустую внутренность, для любого ненулевого $v \in K^*$ и любого $x \in \mathrm{int} K$ должно выполняться строгое неравенство $\langle v, x \rangle > 0$. Отсюда следует, что $\langle A^T u, \bar{x} \rangle = \langle u, A\bar{x} \rangle = \langle u, b \rangle > 0$. Полученное противоречие с (7.3.8) показывает, что $u^0 > 0$.

Так как длина вектора v в (7.3.7) не столь важна, то, не умаляя общности, можно считать, что $u^0 = 1$. Кроме того, компоненты вектора u могут иметь произвольный знак, поэтому, заменяя u на $-u$, получаем из (7.3.7), что $v = c - A^T u$. Подставляя данное v в (7.3.8) и учитывая, что $Ax = b$ для всех $x \in M$, приходим к неравенству

$$\langle c - A^T u, x\rangle = \langle c, x\rangle - \langle u, Ax\rangle = \langle c, x\rangle - \langle u, b\rangle \le f_* - \langle b, u\rangle \le 0.$$

Таким образом, u и v принадлежат допустимому множеству двойственной задачи (7.3.4) и $\langle b, u\rangle \ge f_*$. Следовательно, $w = [u, v]$ есть решение двойственной задачи (7.3.4). Для задач (7.3.1) и (7.3.4) имеет место совершенная двойственность, т.е. $f_* = \phi^*$.

Осталось рассмотреть случай, когда $c \in \mathcal{L}$. Но тогда $c = A\lambda$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Поэтому для любого $x \in X$ имеем

$$\langle c, x\rangle = \langle A^T\lambda, x\rangle = \langle \lambda, Ax\rangle = \langle \lambda, b\rangle \equiv c_* \quad \forall\, x \in X,$$

где c_* — константа. Понятно, что в этом случае $f_* = c_*$ и $X_* = X$.

Возьмем в качестве u вектор λ. Тогда $v = c - A^T u = c - A^T\lambda = 0_n$. Поэтому тривиальным образом $v \in K^*$. Кроме того, справедливо равенство

$$\langle b, u\rangle = \langle b, \lambda\rangle = \langle Ax, \lambda\rangle = \langle x, A^T\lambda\rangle = \langle c, x\rangle = c,$$

где $x \in X$. Отсюда приходим к выводу, что $u = \lambda$ вместе с $v = 0_n$ являются оптимальными решениями двойственной задачи (7.3.4). ■

Аналогом теоремы 7.3.1 для прямой задачи конического программирования (7.3.1) является следующий результат, в котором приводятся достаточные условия существования ее решения. Как и в случае прямой задачи, мы скажем, что двойственная задача (7.3.4) *строго допустима*, если $\mathrm{int} K^* \ne \emptyset$ и существуют такие $u \in \mathbb{R}^m$ и $v \in \mathrm{int} K^*$, что $v = c - A^T u$.

Теорема 7.3.2. *Пусть двойственная задача (7.3.4) строго допустима и двойственная функция $\phi(w)$ ограничена сверху на W_0. Тогда прямая задача имеет решение $x_* \in X$ и $\langle c, x_*\rangle = f_* = \phi^*$.*

Наряду с задачей конического программирования в канонической форме (7.3.1) можно рассмотреть также задачу конического программирования в основной форме:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ Ax - b & \in & K, \end{array} \tag{7.3.9}$$

где K — заостренный замкнутый выпуклый конус в $\mathbb{R}^m$, имеющий непустую внутренность. Отметим, что полученная ранее двойственная задача (7.3.4) также может быть представлена в такой форме. Исключая переменную v, приходим к

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u\rangle & \to & \max, \\ c - A^T u & \in & K^*. \end{array}$$

Для задачи (7.3.9) и двойственной к ней

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u\rangle & \to & \max, \\ A^T u & = & c, \\ u & \in & K^* \end{array} \tag{7.3.10}$$

остаются справедливыми достаточные условия, гарантирующие существование решения. Например, если двойственная задача строго допустима, т.е. $A^T u = c$ для некоторого $u \in \mathrm{int} K^*$, и целевая функция $\langle b, u\rangle$ ограничена сверху на допустимом множестве, то прямая задача (7.3.9) обязательно имеет решение, при этом прямая и двойственная задачи связаны соотношением совершенной двойственности.

Одним из важнейших примеров задач конического программирования (7.3.9) являются задачи, в которых в качестве конуса K в $\mathbb{R}^m$ используется квадратичный конус (конус Лоренца):

$$K = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ y_m \geq \ \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2} \right\}.$$

Для такого конуса задачу (7.3.9) можно представить в несколько ином виде. Пусть a_i — i-я строка матрицы A. Тогда (7.3.9) сводится к следующей:

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ \left(\langle a_m, x\rangle - b^m\right)^2 & \geq & \sum_{i=1}^{m-1} \left(\langle a_i, x\rangle - b^i\right)^2, \\ \langle a_m, x\rangle - b^m & \geq & 0. \end{array} \tag{7.3.11}$$

Так как квадратичный конус является самосопряженным, то двойственная задача к (7.3.11) заключается в нахождении

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u\rangle & \to & \max, \\ A^T u & = & c, \\ u & \in & K \end{array}$$

или в более подробной записи

$$\begin{array}{rcl} \langle b, u\rangle & \to & \max, \\ A^T u & = & c, \\ u_m^2 & \geq & \sum_{i=1}^{m-1} u_i^2, \\ u_m & \geq & 0. \end{array}$$

Задачи вида (7.3.9) или более общего вида

$$\begin{array}{rcl} \langle c, x\rangle & \to & \min, \\ A_i x - b_i & \in & K_i, \quad 1 \le i \le s, \end{array}$$

где A_i — $(m_i \times n)$-матрицы, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, K_i — квадратичный конус в $\mathbb{R}^{m_i}$, называются задачами *конического квадратичного программирования.* Следует подчеркнуть, что класс таких задач весьма обширен.

Наряду с коническим квадратичным программированием другим весьма важным классом задач конического программирования являются задачи *полуопределенного программирования.* Это задачи в матричных пространствах, а именно в пространстве *симметричных вещественных матриц* $\mathbb{S}^n$ *порядка* n. Размерность такого пространства конечная и равняется «треугольному числу» $n_\triangle = n(n+1)/2$. В качестве конуса в $\mathbb{S}^n$ берется *конус положительно полуопределенных матриц* $\mathbb{S}^n_+$. Конус $\mathbb{S}^n_+$ самосопряженный, его внутренностью является *конус положительно определенных матриц* $\mathbb{S}^n_{++}$. Для того чтобы указать на положительную полуопределенность матрицы M, используют запись в виде нестрогого неравенства $M \succeq 0$. Соответственно, когда матрица M положительно определенная, применяют строгое неравенство $M \succ 0$.

Введем в пространстве $\mathbb{S}^n$ скалярное произведение между двумя матрицами A и B по Фробениусу (на самом деле оно может быть введено и в более общих пространствах прямоугольных матриц одного размера). Пусть $A, B \in \mathbb{S}^n$. Тогда под скалярным произведением матриц A и B понимается следующая величина:

$$A \bullet B = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij},$$

где a_{ij} и b_{ij} — (ij)-е элементы соответственно матриц A и B.

Задача полуопределенного программирования состоит в нахождении матрицы $X \in \mathbb{S}^n$ такой, что

$$\begin{array}{rcl} C \bullet X & \to & \min, \\ A_i \bullet X & = & b_i, \quad 1 \le i \le m, \\ X & \succeq & 0, \end{array} \tag{7.3.12}$$

где все матрицы C, A_i, $1 \le i \le m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$. Двойственная задача к (7.3.12) заключается в

$$\begin{array}{c} \langle b, u\rangle \to \max, \\ C - \sum_{i=1}^m u_i A_i \succeq 0, \end{array}$$

где $u = [u_1, \ldots, u_m] \in \mathbb{R}^m$. Обратим внимание, что допустимое множество в двойственной задаче задается с помощью линейного матричного неравенства.

7.4. Геометрическое программирование

Рассмотрим специальный класс задач нелинейного программирования, получивший название *геометрического программирования.* Пусть $c_s^i \geq 0$, $1 \leq i \leq k_s$, $0 \leq s \leq m$, и пусть $x_j > 0$, $1 \leq j \leq n$. Функция вида

$$f_s(x) = \sum_{i=1}^{k_s} c_s^i \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_s^{ij}}$$

называется *позиномом.* Задача геометрического программирования заключается в нахождении

$$\min_{x \in X} f_0(x), \quad X = \{x > 0_n : \ f_s(x) \leq 1, \ 1 \leq s \leq m\}, \tag{7.4.1}$$

где целевая функция $f_0(x)$ и все ограничения $f_s(x)$, $1 \leq s \leq m$, — полиномы. Такие задачи могут появиться, в частности, при проектировании технических изделий, когда некоторые зависимости и характеристики аппроксимируются полиномами. Иногда вместо требования $x > 0_n$ накладываются двусторонние ограничения на x, а именно, $a \leq x \leq b$, где a и b — некоторые заданные n-мерные векторы: $b > a > 0_n$.

Задача геометрического программирования (7.4.1) не обязательно является задачей выпуклого программирования, однако она может быть сведена к последней. Сделаем замену переменных: $y_i = \ln x_i$, $1 \leq i \leq n$. Тогда задача (7.4.1) принимает вид

$$\min_{y \in Y} \tilde{f}_0(y), \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \tilde{f}_s(y) \leq 1, \ 1 \leq s \leq m\}, \tag{7.4.2}$$

где

$$\tilde{f}_s(y) = \sum_{i=1}^{k_s} c_s^i \exp\left(\sum_{j=1}^{n} a_s^{ij} y_j\right), \quad 0 \leq s \leq m. \tag{7.4.3}$$

Все функции $\tilde{f}_s(y)$, $0 \leq s \leq m$ теперь выпуклые. Это следует из того, что экспонента является выпуклой функцией. Поэтому (7.4.2) — задача выпуклого программирования.

Возможен также другой подход сведения задачи (7.4.1) к задаче выпуклого программирования. Он основан на переходе к двойственной задаче. Чтобы ее построить, преобразуем сначала задачу (7.4.2). С этой целью упростим вид функций $\tilde{f}_s(y)$. Положим

$$c_s = \begin{bmatrix} c_s^1 \\ \vdots \\ c_s^{k_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{b_s^1} \\ \vdots \\ e^{b_s^{k_s}} \end{bmatrix}, \quad b_s = \begin{bmatrix} b_s^1 \\ \vdots \\ b_s^{k_s} \end{bmatrix} \quad 0 \le s \le m.$$

Тогда функции (7.4.3) могут быть переписаны как

$$\tilde{f}_s(y) = \sum_{i=1}^{k_s} \exp^{\sum_{j=1}^{n} a_s^{ij} y_j + b_s^i}, \quad 0 \le s \le m.$$

Введем новые переменные:

$$z_s = A_s y + b_s, \quad 0 \le s \le m,$$

где A_s — $(k_s \times n)$-матрицы, составленные из элементов a_s^{ij}. В переменных z_s функции $\tilde{f}_s(y)$ принимают вид

$$\bar{f}_s(z_s) = \sum_{i=1}^{k_s} e^{z_s^i}, \quad 0 \le s \le m, \tag{7.4.4}$$

а сама задача (7.4.2) может быть записана в следующем виде: найти

$$\min \bar{f}_0(z_0), \qquad \bar{f}_0(z_0) = \sum_{i=1}^{k_0} e^{z_0^i}, \tag{7.4.5}$$

при условиях

$$\begin{array}{rcl} \bar{f}_s(z_s) & \le & 1, \qquad \bar{f}_s(z_s) = \sum_{i=1}^{k_s} e^{z_s^i} \quad 1 \le s \le m, \\ z_s & = & A_s y + b_s, \quad\ 0 \le s \le m. \end{array} \tag{7.4.6}$$

Переменными в ней являются вектор $y \in \mathbb{R}^n$ и вектор $z = [z_0, \ldots, z_m]^T$, составленный из векторов z_s, $0 \le s \le m$. Размерность вектора z равна $N = k_0 + \cdots + k_m$. Число ограничений в задаче (7.4.5) – (7.4.6) равняется $N + m$, причем N из них линейные. Зная решение (7.4.5) – (7.4.6), можно восстановить решение исходной задачи (7.4.2).

Построим задачу, двойственную к (7.4.5) – (7.4.6). Для этого составим функцию Лагранжа:

$$L(y, z, u, v) = \bar{f}_0(z_0) + \sum_{s=0}^{m} \langle u_s, A_s y + b_s - z_s \rangle + \sum_{s=1}^{m} v_s \left(\bar{f}_s(z_s) - 1 \right), \tag{7.4.7}$$

где $u_s \in \mathbb{R}^{k_s}$, $u = [u_0, \ldots, u_m]$ и $v = [v_1, \ldots, v_m] \in \mathbb{R}^m$, причем $v_s \geq 0$, $1 \leq s \leq m$. Объединим множители u и v в переменную $w = [u, v]$ и обозначим $W = \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^m_+$. Согласно определению, двойственная задача заключается в нахождении

$$\sup_{w \in W} \phi(w), \quad \phi(w) = \inf_{y,z} L(y, z, w),$$

причем для двойственной функции $\phi(w)$ в силу ее специального вида справедливо представление:

$$\begin{aligned} \phi(w) = \inf\nolimits_{z_0} &\left[\bar{f}_0(z_0) - \langle u_0, z_0 \rangle\right] + \\ &+ \textstyle\sum_{s=1}^m \inf\nolimits_{z_s} \left[v_s \bar{f}_s(z_s) - \langle u_s, z_s \rangle\right] + \\ &+ \textstyle\sum_{s=0}^m \langle u_s, b_s \rangle + \sum_{s=0}^m \langle u_s, A_s y \rangle - \sum_{s=1}^m v_s, \end{aligned}$$

которое перепишем как

$$\begin{aligned} \phi(w) = \textstyle\sum_{s=0}^m \langle b_s, u_s \rangle - \sum_{s=1}^m v_s - \sup\nolimits_{z_0} \left[\langle u_0, z_0 \rangle - \bar{f}_0(z_0)\right] - \\ - \textstyle\sum_{s=1}^m \sup\nolimits_{z_s} \left[\langle u_s, z_s \rangle - v_s \bar{f}_s(z_s)\right] + \sum_{s=0}^m \langle u_s, A_s y \rangle. \end{aligned} \tag{7.4.8}$$

Пусть $W_0 = \{w \in W : \ \phi(w) > -\infty\}$ и пусть $w \in W_0$. Как следует из (7.4.8), точка $w \in W_0$ в том и только в том случае, когда выполняется равенство

$$\sum_{s=0}^m (A_s)^T u_s = 0_n. \tag{7.4.9}$$

С учетом данного равенства при $w \in W_0$ получаем

$$\begin{aligned} \phi(w) = \textstyle\sum_{s=0}^m \langle b_s, u_s \rangle - \sum_{s=1}^m v_s - \sup\nolimits_{z_0} \left[\langle u_0, z_0 \rangle - \bar{f}_0(z_0)\right] - \\ - \textstyle\sum_{s=1}^m \sup\nolimits_{z_s} \left[\langle u_s, z_s \rangle - v_s \bar{f}_s(z_s)\right]. \end{aligned}$$

Обратим теперь внимание, что

$$\sup_{z_0} \left[\langle u_0, z_0 \rangle - \bar{f}_0(z_0)\right] = \bar{f}_0^*(u_0), \tag{7.4.10}$$

$$\sup_{z_s} \left[\langle u_s, z_s \rangle - v_s \bar{f}_s(z_s)\right] = (v_s \bar{f}_s)^*(u_s), \quad 1 \leq s \leq m. \tag{7.4.11}$$

Здесь $\bar{f}_0^*(u_0)$ и $(v_s \bar{f}_s)^*(u_s)$ — сопряженные функции к соответственно функциям $\bar{f}_0(z_0)$ и $v_s \bar{f}_s(z_s)$.

Если $v_s > 0$, то, как следует из утверждения 3.4.6, имеет место связь:

$$(v_s \bar{f}_s)^*(u_s) = (\bar{f}_s^* v_s)(u_s) = v_s \bar{f}_s^* \left(\frac{u_s}{v_s}\right).$$

В случае же, когда $v_s = 0$, как нетрудно видеть, $(v_s \bar{f}_s)^*(u_s) = +\infty$ для любого $u_s \in \mathbb{R}^{k_s}$. Поэтому должно выполняться: $v_s > 0$ при $w \in W_0$, причем для всех $1 \leq s \leq m$.

Таким образом, для $w \in W_0$ имеем

$$\phi(w) = \sum_{s=0}^{m} \langle b_s, u_s \rangle - \bar{f}_0^*(u_0) - \sum_{s=1}^{m} v_s - \sum_{s=1}^{m} v_s \bar{f}_s^* \left(\frac{u_s}{v_s} \right). \qquad (7.4.12)$$

Вычислим теперь сопряженные функции $\bar{f}_s^*(z_s)$ с учетом того, что для самих функций $\bar{f}_s(z_s)$ справедливы выражения (7.4.4). Используя их сепарабельный вид, получаем

$$\bar{f}_s^*(u_s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \left(\ln u_s^i - 1 \right), & u_s \geq 0_{k_s}, \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases} \qquad 0 \leq s \leq m. \quad (7.4.13)$$

Здесь, как обычно, полагается: $u_s^i \ln u_s^i = 0$, когда $u_s^i = 0$. Из (7.4.12) и (7.4.13), в частности, следует, что если $w \in W_0$, то обязательно $u \geq 0_N$, т.е. имеет место включение $W_0 \subseteq \mathbb{R}_+^N \times \mathbb{R}_{++}^m$.

Проведем максимизацию функции $\phi(w)$ по $v \in \mathbb{R}_{++}^m$. Она разбивается на отдельные операции по максимизации функций одного аргумента:

$$\gamma_s(v_s) = \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \cdot \ \ln v_s - v_s + \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \left(1 - \ln u_s^i \right).$$

Данная функция вогнутая. Дифференцируя ее и приравнивая производную нулю, находим точку максимума $v_s^* = \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i$, после подстановки которой в $\gamma_s(v_s)$ получаем

$$\gamma_s(v_s^*) = \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \cdot \ln \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i - \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \ln u_s^i.$$

Поэтому в двойственной задаче вместо максимизации двойственной функции $\phi(w)$ по w можно перейти к максимизации по $u \geq 0_N$ функции

$$\bar{\phi}(u) = \sum_{s=0}^{m} \langle b_s, u_s \rangle + \sum_{i=1}^{k_0} u_0^i \left(1 - \ln u_0^i \right) + \sum_{s=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i \left[\ln \sum_{i=1}^{k_s} u_s^i - \ln u_s^i \right].$$

Сама двойственная задача заключается в нахождении

$$\max_u \bar{\phi}(u) \qquad (7.4.14)$$

при условиях

$$u \geq 0_N, \quad \sum_{s=0}^{m} (A_s)^T u_s = 0_n. \qquad (7.4.15)$$

Она содержит только линейные ограничения.

К двойственной задаче (7.4.14) – (7.4.15) можно также прийти, применяя другой подход, основанный на использовании неравенства между арифметическим и геометрическим средним. Отсюда и объясняется название задач вида (7.4.2).

Глава 8

Задачи многокритериальной оптимизации

8.1. Условия оптимальности для задач с несколькими критериями

Предположим, что у нас имеется не один, а несколько критериев

$$f^1(x), f^2(x), \ldots, f^r(x),$$

минимумы которых нам хотелось бы найти одновременно на некотором допустимом множестве $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Формально данная задача может быть записана как

$$\min_{x \in X} f(x), \quad f(x) = [f^1(x), \ldots, f^r(x)]^T. \tag{8.1.1}$$

Вектор-функцию $f(x)$ принято называть *векторным критерием*, а саму задачу (8.1.1) — *задачей многокритериальной минимизации*.

Понятно, что в большинстве случаев найти такую точку $x_* \in X$, в которой все критерии $f^1(x)$, ..., $f^r(x)$ достигали бы на X своего минимального значения, не представляется возможным. Поэтому приходится изменять само понятие оптимальности для задач вида (8.1.1). Сделать это надо таким образом, чтобы отбросить заведомо неприемлемые решения.

Определение 8.1.1. *Точка $x_* \in X$ называется оптимальной по Слейтеру или слабо оптимальной по Парето, если*

$$\max_{1 \le i \le r} \left[f^i(x) - f^i(x_*) \right] \ge 0 \quad \forall\, x \in X. \tag{8.1.2}$$

Определение 8.1.2. *Точка $x_* \in X$ называется оптимальной по Парето, если*

$$\max_{1 \le i \le r} \left[f^i(x) - f^i(x_*) \right] > 0 \quad \forall\, x \in X,\ f(x) \ne f(x_*). \tag{8.1.3}$$

Согласно приведенным определениям любая оптимальная по Парето точка является одновременно оптимальной и по Слейтеру, но не наоборот. Если неравенства (8.1.2) или (8.1.2) выполняются только для x из некоторой окрестности $\Delta_\varepsilon(x_*) \cap X$ точки x_*, то тогда приходим к локальным оптимальным соответственно по Парето или по Слейтеру решениям.

Обозначим через $F \subset \mathbb{R}^r$ *образ задачи* (8.1.1) в пространстве критериев (его называют *множеством достижимых оценок*)

$$F = \left\{ f \in \mathbb{R}^r :\ f = f(x),\ x \in X \right\}.$$

Если допустимое множество X выпукло и все функции $f^1(x)$, …, $f^r(x)$ также выпуклы, то множество F оказывается *эффективно выпуклым*, что означает выпуклость множества $F_+ = F + \mathbb{R}^r_+$. На рис. 8.1 и 8.2 показаны множества F и F_+ как в случае выпуклых критериев, так и в в общем случае. Пространство $\mathbb{R}^r$, которому принадлежит множество F, называется *критериальным пространством* или *пространством оценок*, а сами векторы $f(x) \in F$ называют также *векторными оценками* допустимого решения $x \in X$. Множество F_+ принято называть *оболочкой Эджворта–Парето* множества F.

Пусть X^S_* — множество точек из X, оптимальных по Слейтеру, и пусть X^P_* — множество точек из X, оптимальных по Парето. Этим двум множествам соответствуют пара подмножеств в F, а именно $F^S_* = f(X^S_*)$ и $F^P_* = f(X^P_*)$. Множество F^S_* является *множеством значений критериев, оптимальных по Слейтеру*. Аналогично, F^P_* является *множеством значений критериев, оптимальных по Парето.* Векторы $f_* \in F^P_*$ при этом называют *парето-оптимальными критериями или парето-оптимальными оценками.*

Если $f_* \in F^P_*$, то не существует такой векторной оценки $f \in F$, что $f \ne f_*$ и $f \le f_*$. Соответственно если $f \in F^S_*$, то не существует

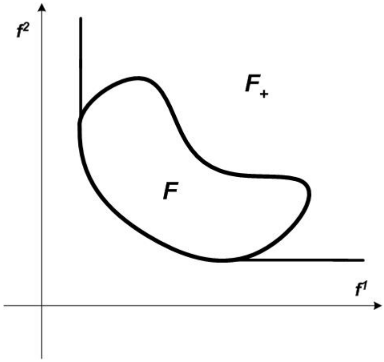

Рис. 8.1. Множества F и F_+ для выпуклых критериев

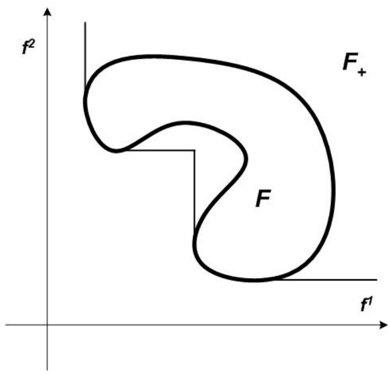

Рис. 8.2. Множества F и F_+ для невыпуклых критериев

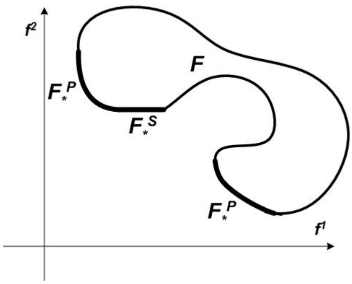

Рис. 8.3. Множества оптимальных оценок по Парето и по Слейтеру

оценки $f \in F$ такой, что $f < f_*$. Часто эти неравенства используются в качестве определений оптимальных оценок (по Парето или по Слейтеру). На рис. 8.3 показаны множества F_*^P и F_*^S. Оба эти множества, находясь в F, принадлежат "юго-западной" границе F_+. Имеет место включение $F_*^P \subseteq F_*^S$.

Приведем условия оптимальности для задачи (8.1.1). Для простоты предполагаем, что допустимое множество X в задаче (8.1.1) задается функциональным образом только с помощью ограничений-неравенств:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ h^j(x) \le 0, \quad 1 \le j \le m\right\}. \tag{8.1.4}$$

Предполагаем также, что все функции, как критерии $f^i(x)$, $1 \le i \le r$, так и ограничения $h^j(x)$, $1 \le j \le m$, непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$.

Возьмем вероятностный симплекс в пространстве $\mathbb{R}^r$:

$$\Lambda^r = \left\{\lambda \in \mathbb{R}^r_+ : \ \sum_{i=1}^{r} \lambda^i = 1\right\}$$

и составим для задачи (8.1.1) функцию Лагранжа:

$$L(x, u, v, \eta) = \langle u, f(x) - \eta\rangle + \langle h(x), v\rangle, \tag{8.1.5}$$

где $u \in \Lambda^r$, $v \in \mathbb{R}^m_+$, $\eta \in \mathbb{R}^r$. Функция (8.1.5) является обобщением регулярной функции Лагранжа на задачу многокритериальной минимизации (8.1.1). Если $r = 1$, то функция (8.1.5) переходит в обычную функцию Лагранжа для задачи с одной целевой функцией и с ограничениями-неравенствами. Векторный параметр η введен для того, чтобы иметь возможность выделять среди множества Y_*^S отдельные оптимальные оценки $y_* \in Y_*^S$.

Аналогично задачам с одним критерием можно было бы получить условия оптимальности нулевого порядка (типа наличия у функции Лагранжа седловых точек). Разным решениям из множества F_*^S соответствуют разные векторы η из границы оболочки Эджворта-Парето (хотя, быть может, не единственные). Мы здесь приведем только условия первого и второго порядков.

Чтобы получить необходимые условия первого порядка, для произвольной точки $x_* \in X_*^S$ рассмотрим *линеаризованную задачу многокритериальной минимизации*:

$$\min_{s \in K(x_*)} \langle f_x^i(x_*), s \rangle, \quad K(x_*) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \langle h_x^j(x_*), s \rangle \le 0, \quad j \in J_0(x_*) \right\}, \tag{8.1.6}$$

где $i \in J^r$ и $J_0(x_*)$ — множество индексов активных ограничений в точке x_*. Множеством ее достижимых оценок является образ множества $K(x_*)$ при отображении $\phi(s) = f_x(x_*)s$. Обозначим данное множество через $\Phi(x_*)$. Пусть $\Phi_+(x_*) = \Phi(x_*) + \mathbb{R}_+^r$ — оболочка Эджворта–Парето множества $\Phi(x_*)$ и пусть $\partial\Phi_+(x_*)$ — его граница. Положим

$$Y^1(x_*) = f(x_*) + \left[\partial\Phi_+(x_*) \cap \mathbb{R}_+^r \right].$$

Согласно своему определению всегда $Y^1(x_*) \subseteq \left(f(x_*) + \mathbb{R}_+^r \right)$.

Заметим, что множество $\Phi(x_*)$, как образ выпуклого конуса $K(x_*)$ при линейном отображении $\phi(s)$, также является выпуклым конусом. Предположим, что множество $K(x_*)$ есть все пространство, например, когда в задаче отсутствуют ограничения или нет активных ограничений. Если градиенты $f_x^i(x_*)$, $i \in J^r$, линейно независимы, то $\Phi(x_*)$ совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^r$ и, следовательно, оболочка Эджворта–Парето $\Phi(x_*)$ также есть все пространство $\mathbb{R}^r$, у нее нет границы. Считаем, что в этом случае множество $Y_1(x_*)$ состоит из единственной точки $f(x_*)$. Напротив, если $f_x^i(x_*) = 0_n$, $i \in J^r$, т.е. в точке x_* выполнены необходимые условия локального минимума для всех критериев одновременно, то множество $\Phi(x_*) = \{0_r\}$ и, стало быть $Y_1(x_*) = f(x_*) + \partial\mathbb{R}_+^r$, где $\partial\mathbb{R}_+^r$ — граница ортанта $\mathbb{R}_+^r$.

В общем случае множество $Y_1(x_*)$, помимо точки $f(x_*)$, может содержать другие точки. Например, когда $\langle f_x^i(x_*), s \rangle \ge 0$ для любого $s \in K$, т.е. когда вектор $f_x^i(x_*)$ принадлежит сопряженному конусу K^* к конусу K. Тогда среди векторов множества $Y_1(x_*)$ находится вектор η такой, что $\eta^i > f^i(x_*)$.

Аналогом принципа Лагранжа 5.1.2 для задачи многокритериальной минимизации (8.1.1) с допустимым множеством (8.1.4) являются необходимые условия оптимальности Да Канха–Полака, которые здесь приводятся в несколько отличном от общепринятого виде.

Теорема 8.1.1. *Пусть в точке* $x_* \in X_*^S$ *выполнено условие регулярности ограничений Мангасариана–Фромовица. Тогда для любого* $\eta_* \in Y^1(x_*)$ *найдутся* $u_* \in \Lambda^r$ *и* $v_* \in \mathbb{R}^m_+$ *такие, что в точке* $z_* = [x_*, u_*, v_*, \eta_*]$ *имеют место равенства*

$$L_x(z_*) = 0_n, \tag{8.1.7}$$

$$\pi_{\Lambda^r}\left(u_* + \alpha L_u(z_*)\right) = u_*, \quad \pi_{R^m_+}\left(v_* + \beta L_v(z_*)\right) = v_*, \tag{8.1.8}$$

$$L(z_*) = 0, \tag{8.1.9}$$

где α *и* β *— произвольные положительные константы.*

Доказательство. Прежде всего рассмотрим тривиальный случай, когда существование множителей u_* и v_* достаточно очевидно. Обозначим $I_0 = \{i \in J^r : \ f^i_x(x_*) = 0_n\}$. Если множество индексов I_0 непустое, то в точке x_* для всех критериев $f^i(x)$, $i \in I_0(x_*)$, выполняется необходимое условие локального минимума на всем пространстве. Утверждение теоремы в этом случае тривиально. Действительно, пусть η_* — некоторый вектор из $Y_1(x_*)$ такой, что $\eta^i_* = f^i(x_*)$ для некоторого индекса i из непустого индексного множества $I_0^+ \subseteq I_0(x_*)$. Тогда, беря $v_* = 0_m$ и $u_* \in \Lambda^r$, для которого $u^i_* = 0$ при $i \notin I_0^+$, получаем, что равенства (8.1.7) – (8.1.9) выполняются.

Предполагаем теперь, что $f^i_x(x_*) \neq 0_n$ для всех $1 \le i \le m$. Так как $x_* \in X_*^S$, то, как и при доказательстве принципа Лагранжа (теорема 5.1.2), убеждаемся, что линейная однородная система

$$\begin{array}{lcl} \langle f^i_x(x_*), s\rangle & < & 0, \quad 1 \le i \le r, \\ \langle h^j_x(x_*), s\rangle & < & 0, \quad j \in J_0(x_*) \end{array}$$

не имеет решения. Отсюда согласно замечанию к теореме Фана или по теореме Моцкина найдутся такие неотрицательные числа $u^1_*, \ldots, u^r_*$ и v^j_*, $j \in J_0(x_*)$, не равные нулю в совокупности, что

$$\sum_{i=1}^r u^i_* f^i_x(x_*) + \sum_{j\in J_0(x_*)} v^j_* h^j_x(x_*) = 0_n, \tag{8.1.10}$$

где $J_0(x_*) = \left\{j \in J^m : \ h^j(x_*) = 0\right\}$ — множество индексов активных ограничений в точке x_*.

Допустим, что $u_* = 0_r$. Тогда (8.1.10) переходит в

$$\sum_{j\in J_0(x_*)} v^j_* h^j_x(x_*) = 0_n, \tag{8.1.11}$$

причем среди множителей v_*^j, $j \in J_0(x_*)$ найдется, по крайней мере, один строго положительный. Но это противоречит условию регулярности ограничений Мангасариана–Фромовица, так как, беря $\bar{s}$ такое, что $\langle h_x^j, \bar{s}\rangle < 0$, $j \in J_0(x_*)$, мы получаем неравенство

$$\sum_{j \in J_0(x_*)} v_*^j \langle h_x^j(x_*), \bar{s}\rangle < 0,$$

что противоречит равенству (8.1.11). Таким образом, $u_* \neq 0_r$, и можно считать, что $u_* \in \Lambda^r$.

Если ввести условие дополняющей нежесткости $v_*^j h^j(x_*) = 0$, где $1 \leq j \leq k$, то, как и в случае обычной оптимизационной задачи с одним критерием, во вторую сумму в (8.1.10) можно добавить градиенты неактивных ограничений $h_x^j(x_*)$ с нулевыми множителями Лагранжа $v_*^j = 0$. Следовательно, наряду с (8.1.10) справедливо

$$\sum_{i=1}^{r} u_*^i f_x^i(x_*) + \sum_{j=1}^{k} v_*^j h_x^j(x_*) = 0_n.$$

Данное равенство можно записать в виде условия (8.1.7), причем оно будет выполняться для любого $\eta_* \in \mathbb{R}^r$, так как явно от η_* не зависит.

Второе равенство в (8.1.8), как уже отмечалось, при $v_* \geq 0_k$ равносильно одновременному выполнению двух условий, а именно условия допустимости $h(x_*) \leq 0_k$ и условия дополняющей нежесткости $v_*^j h^j(x_*) = 0$, $1 \leq j \leq k$. Поэтому третье равенство (8.1.9) сводится к $\langle u_*, f(x_*) - \eta_*\rangle = 0$. Оно заведомо выполняется, если $\eta_* = f(x_*)$.

Из первого равенства (8.1.8) с учетом (8.1.9) и формулы (2.3.7) для проекции на вероятностный симплекс Λ^r следует, что $u_* \in \Lambda^r$ и что $f(x_*) - \eta_* \geq 0_r$, причем обязательно $\eta_*^i = f^i(x_*)$, если $u_*^i > 0$. Но как видно из (8.1.10), если градиент $f_x^i(x_*)$ некоторого критерия принадлежит конусу, порожденному антиградиентами активных ограничений $-h_x^j(x_*)$, $j \in J_0(x_*)$, то соответствующий множитель u_*^i можно положить равным нулю. В этом случае выполняется $f_x^i(x_*) \in K^*$ и, как уже отмечалось, можно брать $\eta_*^i > f^i(x_*)$. По-прежнему все равенства (8.1.7) – (8.1.9) сохраняются. ■

Точки $z_* = [x_*, u_*, v_*, \eta_*]$, в которых выполняются условия (8.1.7) – (8.1.9) в дальнейшем называются точками Куна–Таккера. Отметим также, что равенства (8.1.8) можно записать в эквивалентном виде:

$$-L_u(z_*) = \eta_* - f(x_*) \in \Gamma^*(u_*|\Lambda^r), \quad -L_v(z_*) = -h(x_*) \in \Gamma^*(v_*|\mathbb{R}_+^m), \tag{8.1.12}$$

где $\Gamma(u_*|\Lambda^r)$ и $\Gamma^*(v_*|\mathbb{R}^m_+)$ — конусы возможных направлений относительно симплекса Λ^r и ортанта $\mathbb{R}^m_+$ соответственно в точках u_* и v_*, звездочка означает взятие сопряженного конуса. Так как функция Лагранжа $L(z)$ дифференцируема по переменным u и v (точнее, линейна по ним), то согласно теореме 4.2.5 u_* и v_* являются точками максимума функции $L(z)$ по этим переменным на Λ^r и $\mathbb{R}^m_+$ соответственно.

Введем еще одно определение.

Определение 8.1.3. *Точка $x_* \in X$ называется строго оптимальной (по Парето) в задаче (8.1.1), если*

$$\max_{1\le i\le r}\left[f^i(x) - f^i(x_*)\right] > 0 \quad \forall\, x \in X,\ x \ne x_*. \tag{8.1.13}$$

Если неравенство (8.1.13) выполняется только для x из некоторой окрестности $\Delta_\varepsilon(x_*) \cap X$ точки x_*, то x_* называется локальным строго оптимальным решением. Любая строго оптимальная точка x_* является оптимальной по Парето.

Приведем достаточные условия второго порядка для того, чтобы точка $x_* \in X$ была локальным строго оптимальным решением в задаче (8.1.1). Для этого нам потребуется конус, аналогичный конусу $K(x_*, v_*)$, используемому в теореме 5.3.1. Введем в рассмотрение индексные множества

$$J_1(x,\eta) = \left\{i \in J^r:\ f^i(x) - \eta^i = 0\right\}, \quad J_2(x) = \left\{j \in J^m:\ h^j(x) = 0\right\},$$

а также множества

$$J_1^+(x,u,\eta) = \left\{i \in J_1(x,\eta):\ u^i > 0\right\}, \quad J_2^+(x,v) = \left\{j \in J_2(x):\ v^j > 0\right\}.$$

Множества $J_1(x,\eta)$ и $J_2(x)$ указывают на активные целевые функции и активные ограничения в точке x (с учетом вектора оценок η). Поставим в соответствие этим индексным множествам конусы

$$K_1(x,u,\eta) = K_1^-(x,\eta) \cap K_1^0(x,u,\eta),$$

$$K_2(x,v) = K_2^-(x) \cap K_2^0(x,v).$$

Здесь

$$K_1^-(x,\eta) = \left\{s \in R^n:\ \langle f^i_x(x), s\rangle \le 0,\ i \in J_1(x,\eta)\right\},$$

$$K_1^0(x,u,\eta) = \left\{s \in R^n:\ \langle f^i_x(x), s\rangle = 0,\ i \in J_1^+(x,u,\eta)\right\},$$

$$K_2^-(x) = \left\{s \in R^n:\ \langle h^j_x(x), s\rangle \le 0,\ j \in J_2(x)\right\},$$

$$K_2^0(x,v) = \left\{ s \in R^n : \ \langle h_x^j(x), s\rangle = 0, \ j \in J_2^+(x,v) \right\}.$$

Теорема 8.1.2. *Пусть вектор-функции $f(x)$ и $h(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы. Пусть, кроме того, $x_* \in X$, $\eta_* \in Y^1(x_*)$ и $u_* \in \Lambda^r$, $v_* \in \mathbb{R}^m$ образуют точку Куна–Таккера $z_* = [x_*, u_*, v_*, \eta_*]$. Тогда если*

$$\langle s, L_{xx}(z_*)s\rangle > 0 \tag{8.1.14}$$

для любого ненулевого $s \in K_1(x_*, u_*, \eta_*) \cap K_2(x_*, v_*)$, то x_* — локальное строго оптимальное решение в задаче (8.1.1).

Доказательство от противного, причем проведем его при упрощающем предположении, что в задаче нет ограничений. Пусть x_* не есть локальное строго оптимальное решение. Тогда найдется последовательность точек $\{x_k\}$, отличных от x_*, такая, что $x_k \to x_*$ и

$$f^i(x_k) - f^i(x_*) \le 0, \quad 1 \le i \le r. \tag{8.1.15}$$

Поставим $\{x_k\}$ в соответствие последовательность векторов

$$s_k = \frac{x_k - x_*}{\|x_k - x_*\|}$$

единичной длины и последовательность коэффициентов α_k, определяемых как $\alpha_k = \|x_k - x_*\|$. Так как $x_k \to x_*$, то $\alpha_k \downarrow 0$. При этом выполняется $x_k = x_* + \alpha_k s_k$.

Последовательность $\{s_k\}$ принадлежит компактному множеству, поэтому из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности, считаем, что сходится сама последовательность $\{s_k\}$ и $s_k \to s_*$, где $\|s_*\| = 1$.

В силу дифференцируемости всех функций $f^i(x)$ имеем

$$f^i(x_k) = f^i(x_*) + \alpha_k \langle f_x^i(x_*), s_k\rangle + \mathrm{o}^i(\alpha_k), \quad 1 \le i \le r.$$

Из (8.1.15) тогда следует, что

$$\langle f_x^i(x_*), s_k\rangle + \frac{\mathrm{o}^i(\alpha_k)}{\alpha_k} \le 0, \quad 1 \le i \le r.$$

Отсюда приходим к предельным неравенствам

$$\langle f_x^i(x_*), s_*\rangle \le 0, \quad 1 \le i \le r. \tag{8.1.16}$$

Учтем далее, что вектор η_* в точке Куна–Таккера z_* берется из множества $Y_1(x_*)$. В данном случае, когда нет ограничений, неравенство $\eta_*^i > f^i(x_*)$ может быть только тогда, когда $\langle f_x^i(x_*), s\rangle \ge 0$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$, т.е. когда $f^i_x(x_*) = 0_n$. Иначе обязательно $\eta^i_* = f^i(x_*)$. Возьмем поэтому, не ограничивая общности, $\eta_* = f(x_*)$. Тогда $J_1(x_*, \eta_*) = J^r$ и

$$K_1^-(x_*, \eta_*) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n :\ \langle f^i_x(x_*), s \rangle \leq 0,\ i \in J^r \right\}.$$

Таким образом, в силу (8.1.16) выполняется: $s_* \in K_1^-(x_*, \eta_*)$.

Умножая каждое из неравенств $\langle f^i_x(x_*), s_* \rangle \leq 0$ на соответствующий множитель Лагранжа u^i_* и суммируя все эти неравенства, приходим к

$$\langle L_x(x_*, u_*, \eta_*), s_* \rangle \leq 0,$$

причем неравенство будет строгое, если хотя бы для одного индекса $i \in J^r$, такого, что $u^i_* > 0$, выполняется $\langle f^i_x(x_*), s_* \rangle < 0$. Поэтому на основании равенства $L_x(z_*) = 0_n$ заключаем, что $s_* \in K_1(x_*, u_*, \eta_*)$.

Воспользуемся далее разложениями до членов второго порядка малости:

$$f^i(x_k) = f^i(x_*) + \alpha_k \langle f^i_x(x_*), s_k \rangle + \frac{\alpha_k^2}{2} \langle s_k, f^i_{xx}(x_*) s_k \rangle + \mathrm{o}^i(\alpha_k^2),$$

где $i \in J^r$. Тогда неравенства (8.1.15) могут быть переписаны как

$$\alpha_k \langle f^i_x(x_*), s_k \rangle + \frac{\alpha_k^2}{2} \langle s_k, f^i_{xx}(x_*) s_k \rangle + \mathrm{o}^i(\alpha_k^2) \leq 0.$$

Умножая их опять на множители u^i_* и складывая, получаем с учетом равенства $L_x(z_*) = 0_n$:

$$\langle s_*, L_{xx}(z_*) s_* \rangle + \frac{\mathrm{o}^i(\alpha_k^2)}{\alpha_k^2} \leq 0.$$

Отсюда приходим к предельному неравенству $\langle s_*, L_{xx}(z_*) s_* \rangle \leq 0$, что противоречит (8.1.14). ■

8.2. Многокритериальные задачи принятия решений

Под многокритериальной задачей принятия решения понимается задача выбора наилучшего варианта из множества возможных альтернатив X (для определенности считаем, что $X \subseteq \mathbb{R}^n$). При этом имеются несколько критериев $f^1(x)$, …, $f^r(x)$, оценивающих качество каждой такой альтернативы $x \in X$. Это позволяет свести выбор альтернативы x из множества X к выбору точки y в критериальном пространстве $\mathbb{R}^r$ во множестве $Y = f(X)$. Возникает вопрос, каким образом следует сравнивать точки из Y, чтобы заключить, что данная точка $y_* \in Y$ является искомым наилучшим решением? Делается это с помощью такого понятия, как *предпочтение*, когда сопоставляются две точки и говорят, что одна точка предпочтительнее другой или, быть может, они равноценны.

Один из основных способов описания предпочтений заключается в использовании «языка» *бинарных отношений*. Под бинарным отношением $\mathcal{R}$ на множестве Y понимается подмножество множества $Y \times Y$. Говорят, что пара $[y_1, y_2]$ находится в бинарном отношении $\mathcal{R}$ и обозначают это как $y_1 \mathcal{R} y_2$, если $[y_1, y_2] \in \mathcal{R}$. К бинарным отношениям как ко множествам применяются все теоретико-множественные операции: объединения, пересечения и т.д. Кроме того, вводится специальная операция обратного отношения: $y_1 \mathcal{R}^{-1} y_2$ тогда и только тогда, когда $y_2 \mathcal{R} y_1$.

Среди всех бинарных отношений выделяют ряд специальных бинарных отношений, обладающих определенными свойствами. Бинарное отношение называется:

- *рефлексивным*, если $y\mathcal{R}y$ для любого $y \in Y$, и *иррефлексивным*, если, наоборот, $y\mathcal{R}y$ не выполняется ни для одного $y \in Y$;
- *симметричным*, если из $y_1 \mathcal{R} y_2$ следует $y_2 \mathcal{R} y_1$, и *асимметричным*, если из $y_1 \mathcal{R} y_2$ следует, что $y_2 \mathcal{R} y_1$ не выполняется;
- *антисимметричным*, если из $y_1 \mathcal{R} y_2$ и $y_2 \mathcal{R} y_1$ следует, что $y_1 = y_2$;
- *транзитивным*, если из $y_1 \mathcal{R} y_2$ и $y_2 \mathcal{R} y_3$ следует $y_1 \mathcal{R} y_3$;
- *связным* (*полным*), если для любых $y_1 \in Y$ и $y_2 \in Y$ справедливо либо $y_1 \mathcal{R} y_2$, либо $y_2 \mathcal{R} y_1$, либо оба.

Любое иррефлексивное и транзитивное бинарное отношение обязательно асимметричное (проверьте это), а асимметричное отношение обязательно иррефлексивное. Если бинарное отношение не является полным, то про него говорят, что оно *частичное (несвязное)*.

Бинарным отношениям, обладающим несколькими из указанных свойств, присвоены специальные названия.

Эквивалентность — это рефлексивное, транзитивное и симметричное отношение.

Квазипорядок — это рефлексивное и транзитивное отношение. Антисимметричный квазипорядок называется *порядком*.

Строгий порядок — это иррефлексивное и транзитивное отношение.

На $\mathbb{R}^r$ можно рассмотреть, например, следующие отношения. Они определяются для любых y_1 и y_2 из $\mathbb{R}^r$.

- Отношение $\geq$. Для данного отношения $y_1 \geq y_2$ означает, что $y_1^i \geq y_2^i$ для всех $i \in [1 : r]$.
- Отношение $\geqslant$ (не путать с $\geq$). Для данного отношения $y_1 \geqslant y_2$ означает, что $y_1 \geq y_2$, но $y_1 \neq y_2$.
- Отношение $>$. Для данного отношения $y_1 > y_2$ означает, что $y_1^i > y_2^i$ для всех $i \in [1 : r]$.

Отношение $\geq$ является частичным порядком, а отношения $\geqslant$ и $>$ — строгими частичными порядками. Для приведенных отношений используются и другие обозначения.

Таким образом, для описания предпочтений можно воспользоваться бинарными отношениями. Рассматривают *отношение строгого предпочтения* $\mathcal{R}_{SP}$, *отношение нестрогого предпочтения* $\mathcal{R}_P$ и *отношение безразличия* $\mathcal{R}_E$. Эти отношения по смыслу должны обладать следующими свойствами: $\mathcal{R}_P$ рефлексивно, $\mathcal{R}_E$ рефлексивно и симметрично, а $\mathcal{R}_{SP}$ асимметрично и, стало быть, иррефлексивно. Если эти отношения еще и транзитивны, то $\mathcal{R}_P$ образует квазипорядок, $\mathcal{R}_{SP}$ и $\mathcal{R}_E$ — соответственно строгий порядок и эквивалентность.

Если задано отношение нестрогого предпочтения $\mathcal{R}_P$, то его можно разбить на две части, а именно на симметричную и асимметричную части $\mathcal{R}_P$. Симметричная часть даст нам $\mathcal{R}_E = \mathcal{R}_P \cap \mathcal{R}_P^{-1}$, а асимметричная часть $\mathcal{R}_{SP} = \mathcal{R}_P \setminus \mathcal{R}_P^{-1}$.

Пусть теперь на Y или на некотором множестве, содержащем Y, задано отношение $\mathcal{R}_P$ и из него выделены вышесказанным способом отношения $\mathcal{R}_{SP}$ и $\mathcal{R}_E$.

Определение 8.2.1. *Элемент $y_* \in Y$ называется наилучшим в Y относительно $\mathcal{R}_P$, если $y \mathcal{R}_P y_*$ для любого $y \in Y$.*

К сожалению, если отношение $\mathcal{R}_P$ не является связным квазипорядком, то такого наилучшего элемента может не оказаться. Поэтому вводят другое более слабое определение (оно уже касается отношения $\mathcal{R}_{SP}$).

Определение 8.2.2. *Элемент $y_* \in Y$ называется недоминируемым или минимальным в Y относительно $\mathcal{R}_{SP}$, если $y_* \mathcal{R}_{SP}\, y$ не имеет места ни при каком $y \in Y$.*

В многокритериальной задаче минимизации (8.1.1) множество $Y = f(X)$ принадлежит $\mathbb{R}^r$. На этом пространстве в качестве отношения строгого предпочтения $\mathcal{R}_{SP}$ берутся строгие частичные порядки: либо $\geqslant$, либо $>$. Множество $Y_*^S \subseteq Y$ оптимальных по Слейтеру оценок является множеством недоминируемых оценок относительно строгого порядка $>$. Аналогично, множество $Y_*^P \subseteq Y$ оптимальных по Парето оценок является множеством недоминируемых оценок относительно строгого порядка $\geqslant$. Строгие порядки $\geqslant$ и $>$ в $\mathbb{R}^r$ порождают соответствующие строгие порядки и на X, что дает возможность определить множества X_*^S и X_*^P.

Если на $\mathbb{R}^r$ взять частичный порядок $\geq$, то наилучшим относительно этого порядка элементом будет такой элемент $y_* \in Y$, для которого $y^i \geq y_*^i$ для любого $i \in [1:r]$ и всех $y \in Y$. Обозначим

$$f_* = [f_*^1, \ldots, f_*^r], \qquad f_*^i = \min_{x \in X} f^i(x_*).$$

Точка $f_* \in \mathbb{R}^r$ называется *идеальной* для задачи (8.1.1). Наличие наилучшего элемента $y_* \in Y$ означает, что $f_* \in Y$ и $y_* = f_*$. Понятно, что такой случай реализуется крайне редко и при решении задач многокритериальной минимизации (8.1.1) приходится довольствоваться лишь недоминируемыми решениями, множество которых, как правило, оказывается весьма обширным. Это требует дополнительных подходов и приемов для выбора одного решения из этого множества.

Существует еще один достаточно универсальный способ задания порядков на $\mathbb{R}^r$, который приводит к более общим порядкам, чем рассмотренные ранее порядки $\geq$ и $>$. Делается это с помощью так называемых *обобщенных неравенств*, которые, по сути, являются частичными порядками на $\mathbb{R}^r$.

Пусть на $\mathbb{R}^r$ задан выпуклый замкнутый заостренный конус K. Пусть, кроме того, этот конус является телесным, т.е. имеет непустую внутренность. Такой конус принято называть *собственным*. Используя телесный конус K, определим на $\mathbb{R}^r$ частичный порядок $\geq_K$, полагая $y_1 \geq_K y_2$, если $y_1 - y_2 \in K$. Аналогичным образом определяется строгий частичный порядок $>_K$, а именно $y_1 >_K y_2$, если $y_1 - y_2 \in \mathrm{int} K$. В случае, когда $K = \mathbb{R}_+^r$, порядки $\geq_K$ и $>_K$ совпадают с введенными ранее на $\mathbb{R}^r$ обычными порядками $\geq$ и $>$.

Применяя обобщенные неравенства, можно аналогично вышесказанному определить *минимальные или недоминируемые элементы* множества $Y \subset \mathbb{R}^r$. Говорят, что $y_* \in Y$ является минимальным элементом множества Y по отношению к обобщенному неравенству $\geq_K$, если из $y \in Y$, $y_* \geq_K y$ следует, что $y = y_*$.

Ссылки на литературу и комментарии

В настоящее время литература по теории и методам решения оптимизационных задач весьма обширна и крайне сложно охватить ее хотя бы в минимальном объеме. Поэтому приводятся ссылки лишь на некоторые монографии и учебные пособия, причем главным образом на русском языке. Делается это с целью предоставить возможность для более полного и детального ознакомления с материалом, включенным в данный курс. Дадим отдельно для каждого раздела краткий комментарий относительно того, где можно найти дополнительные сведения, а также более полные обзоры литературы.

Глава 1. Основные определения и понятия, касающиеся задач оптимизации, приводятся практически во всех книгах по оптимизации. Конкретные примеры из различных прикладных областей, которые могут быть поставлены как оптимизационные задачи, также рассматриваются во многих монографиях [2], [6], [54], [69], [75]. Приведенные здесь примеры задач заимствованы из этих книг.

Главы 2–3. Сведения о выпуклых множествах и выпуклых функциях, а также об их применении в теории оптимизации присутствуют во многих книгах, например, [8], [10], [11], [13], [60]. Выпуклому анализу посвящены также специальные монографии, где дается систематическое изложение материала, причем не только в конечномерных пространствах [44], [36], [41], [51], [74], [58], [55]. Полиэдральные выпуклые множества, задаваемые системами линейных неравенств, рассматривались специально в [32], [27], [42], [64]. В [7] приводятся некоторые сведения, касающиеся линейных матричных неравенств. Возможные обобщения понятия выпуклости можно найти, например, в книгах [39], [71], [73].

Глава 4. Общим условиям оптимальности для оптимизационных задач посвящены многие монографии и учебники. Отметим среди них книги и учебные пособия [10], [33], [65].

Глава 5. Различные задачи условной оптимизации с ограничениями, задаваемыми через равенства и неравенства (задачи математического программирования), представляют наибольший интерес с точки зрения появляющихся здесь разнообразных условий оптимальности, причем как локальных, так и глобальных. Главную роль при этом играет принцип Лагранжа, согласно которому проводится свертывание ограничений с целевой функцией в единую вспомогательную функцию. Использование линейной свертки, характерной для функции Лагранжа, приводит к тому, что появляются множители Лагранжа, которые подбираются для каждого решения отдельно. Условия Каруша–Куна–Таккера приводятся практически в каждой монографии, где рассматриваются нелинейные задачи оптимизации: [1], [2], [6], [10], [11], [13], [15], [16], [20], [25], [26], [28], [30], [31], [33], [36], [45], [46], [60], [49], [57], [57], [65], [66], [69]. Отдельно условия оптимальности исследуются в [56], [35]. Вырожденные случаи оптимальных решений требуют специальных подходов к получению условий оптимальности. Сведения о них можно найти, например, в [3], [34]. Для невыпуклых задач более содержательные условия получаются, когда используются модифицированные и обобщенные функции Лагранжа [9], [19]. Еще более специальные подходы используются для выделения глобальных решений [59].

Глава 6. Теория двойственности является одним из наиважнейших инструментов изучения задач оптимизации, особенно в случае выпуклых задач. Поэтому ввиду важности этой теории ее элементы затрагиваются практически во всех перечисленных выше монографиях. Отдельно следует выделить монографию [18], где дается систематическое освещение вопросов, связанных с двойственностью. Несобственные задачи математического программирования рассматривались в [29], где приводятся некоторые способы коррекции этих задач.

Глава 7. Линейное программирование — это тот класс задач оптимизации, литература по которому наиболее обширна. Практически все упомянутые выше общие монографии и учебные пособия содержат материал по теории и методам решения этих задач, сошлемся лишь на некоторые из них: [15], [37], [48]. Специально теория и методы решения задач линейного программирования, в том числе транспортных задач, рассматриваются в [4], [14], [27], [61], [75]. Задачам квадратичного программирования и главным образом методам их решения посвящены книги [22], [40]. Элементы теории квадратичного программирования приводятся, в частности, в [2]. Более подробные сведения о геометрическом программировании можно найти, например, в книгах [31], [23]. Полуопределенное программирование наряду с линейным программированием представляют собой важные частные случаи задач конического программирования. Современная общая теория таких задач излагается в книге [70], которая доступна в Интернете. Сведения о задачах полуопределенного программирования приводятся также в [69].

Глава 8. Задачам многокритериальной оптимизации уделяется большое внимание в литературе. Сведения об условиях оптимальности для таких задач можно найти, например, в [21], [50], [72]. Особый интерес вызывают вопросы выбора единственной точки из целого множества Парето-оптимальных решений. Различные процедуры, предназначенные для этой цели, рассматриваются, например, в [43], [63]. В [38] указывается на важность многокритериальной оптимизации для автоматизированного проектирования сложных технических объектов.

Укажем в заключение приведенного обзора список рекомендованной литературы, в которой дается наиболее полное и наиболее близкое к данному учебному пособию изложение материала.

1) Бирюков А.Г. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах [10].

2) Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Часть I. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование [13].

3) Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации [25].

4) Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации [33].

5) Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию [49].

6) Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию [54].

7) Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации [60].

За пределами данной книги остались многие аспекты современной теории конечномерных задач оптимизации. Например, совершенно не затрагивались задачи стохастической оптимизации, а также задачи негладкой и робастной оптимизации. Ряд сведений о последних можно найти, например, в [24], [68]. Упомянем также сборники задач и упражнений, где приводится много полезных сведений, касающихся теории различных классов задач оптимизации: [5], [12], [47], [53].

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: учебное пособие. Тверь: Тверской государственный университет, 2001. 576 с.
2. Аоки М. Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977. 344 с.
3. Арутюнов А.В. Условия экстремума. Анормальные и вырожденные задачи. М.: Факториал, 1997. 256 с.
4. Ашманов С.А. Линейное программирование: учебное пособие. М.: Наука, 1981. 340 с.
5. Ашманов С.А., Тимохов А.В. Теория оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1991. 448 с.
6. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.
7. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с.
8. Белоусов Е.Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. М.: Изд-во МГУ, 1977. 196 с.
9. Бертсекас Д. Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987. 400 с.
10. Бирюков А.Г. Методы оптимизации. Условия оптимальности в экстремальных задачах: учебное пособие. М.: МФТИ, 2010. 225 с.
11. Бирюков С.И. Оптимизация. Элементы теории и численные методы: учебное пособие. М.: МЗ-Пресс, 2003. 248 с.
12. Васильев О.В., Аргучинцев А.В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях. М.: Физматлит, 1999. 208 с.
13. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Часть I. Конечномерные задачи оптимизации. Принцип максимума. Динамическое программирование. М.: Изд-во МЦМНО, 2011. 620 с.
14. Васильев Ф.П., Иваницкий А.Ю. Линейное программирование. М.: Факториал Пресс, 2008. 347 с.
15. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. Минск: Изд-во БГУ, 1981. 352 с.
16. Галеев Э.М. Оптимизация. Теория, примеры, задачи. М.: URSS, 2006. 336.
17. Гольштейн Е.Г. Выпуклое программирование. Элементы теории. М.: Наука, 1970. 68 с.
18. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании. М.: Наука, 1971. 352 с.

19. Гольштейн Е.Г., Третьяков Н.В. Модифицированные функции Лагранжа. М.: Наука, 1989. 400 с.

20. Гороховик В.В. Конечномерные задачи оптимизации. Минск: Издательский центр БГУ, 2007. 240 с.

21. Гороховик В.В. Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. М.: URRS, 2012. 256 с.

22. Даугавет В.А. Численные методы квадратичного программирования. СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2004. 128 с.

23. Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К. Геометрическое программирование. М.: Мир, 1972. 312 с.

24. Демьянов В.Ф., Васильев Л.В. Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981. 384 с.

25. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 432 с.

26. Евтушенко Ю.Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование. М.: ВЦ РАН, 2013. 144 с.

27. Еремин И.И. Теория линейной оптимизации. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 1999. 312 с.

28. Еремин И.И., Астафьев Н.Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1976. 192 с.

29. Еремин И.И., Мазуров В.Д., Астафьев Н.Н. Несобственные задачи линейного и выпуклого программирования. М.: Наука, 1983. 336 с.

30. Жадан В.Г. Численные методы линейного и нелинейного программирования. Вспомогательные функции в условной оптимизации. М.: ВЦ РАН, 2002. 160 с.

31. Зангвилл У.И. Нелинейное программирование. Единый подход. М.: Советское радио, 1973. 312 с.

32. Зоркальцев В.И., Киселева М.А. Системы линейных неравенств: учебное пособие. Иркутск: Изд-во Иркутского гос. унив., 2007. 128 с.

33. Измаилов А.Ф., Солодов М.В. Численные методы оптимизации. М.: Физматлит, 2003. 304 с.

34. Измаилов А.Ф., Третьяков А.А. 2-регулярные решения нелинейных задач. М.: Изд. фирма «Физико-математическая литература», 1999. 326 с.

35. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

36. Ириарт-Уррути Ж.-Б. Оптимизация и выпуклый анализ. Сборник задач и упражнений. Киев: Изд. комп. “Кит”, 2004. 376 с.

37. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 286 с.

38. Краснощеков П.С., Морозов В.В., Попов Н.М. Оптимизация в автоматизированном проектировании. М.: МАКС Пресс, 2008. 323 с.

39. Кутателадзе С.С., Рубинов А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1976. 254 с.

40. Кюнци Г.П., Крелле В. Нелинейное программирование. М.: Советсткое радио, 1965. 304 с.

41. Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985. 336 с.

42. Линейные неравенства и смежные вопросы: сб. ст. / под ред. Г.У. Куна и А.У. Таккера. М.: ИЛ, 1959. 470 с.

43. Лотов А.В., Поспелова И.И. Многокритериальные задачи принятия решений. М.: МАКС Пресс, 2008. 200 с.

44. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2003. 176 с.

45. Мину М. Математическое программирование. Теория и алгоритмы. М.: Наука, 1990. 578.

46. Моисеев Н.Н., Иванилов Ю.П., Столярова Е.М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978. 352 с.

47. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1986. 287 с.

48. Мухачева Э.А., Рубинштейн Г.Ш. Математическое программирование. Новосибирск: Наука, 1977. 320 с.

49. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 280 с.

50. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.

51. Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

52. Нурминский Е.А. Численные методы выпуклой оптимизации. М.: Наука, 1991. 168 с.

53. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие. М.: Высшая школа, 2002. 544 с.

54. Поляк Б.Т. Введение в оптимизацию. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: ЛЕНАНД, 2014. 392 с.

55. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980. 320 с.

56. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 152 с.

57. Пшеничный Б.Н., Данилин Ю.М. Численные методы в экстремальных задачах. М.: Наука, 1975. 320 с.

58. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

59. Стрекаловский А.С. Элементы невыпуклой оптимизации. Новосибирск: Наука, 2003. 356 с.

60. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2008. 328 с.

61. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. Т. 1. М.: Мир, 1991. 360 с.

62. Фиакко А., Мак-Кормик Г. Нелинейное программирование. Методы последовательной безусловной минимизации. М.: Мир, 1972. 240 с.

63. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.

64. Черников С.И. Линейные неравенства. М.: Наука, 1968. 488 с.

65. Эльстер К.-Х., Рейнгардт Р., Шойбле М., Донат Г. Введение в нелинейное программирование. М.: Наука, 1985. 264 с.

66. Эрроу К.Дж., Гурвиц Л., Удзава Х.. Исследования по линейному и нелинейному программированию. М.: ИЛ, 1962. 335 с.

67. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.: Наука, 1969. 424 с.

68. Ben-Tal A., Ghaoui, Nemirovski A. Robust Optimization. Princeton: Princeton Univ., 2009.

69. Boyd S., Vandenberge L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.

70. Nemirovski A. Five lectures on modern convex optimization // CORE Summer School on Modern Convex Optimization. August 26–30, 2002. 240 p.

71. Rubinov A. Abstract Convexity and Global Optimization. Springer and Business Media, 2000. 490 p.

72. Sawaragi Yo., Nakayama H., Tanino T. Theory of multiobjective optimization. Orlando, San Diego, New-York, London: Academic Press, Inc., 1985. 291 p.

73. Singer I. Abstract Convex Analysis. New-York, Chichester, Weinheim: A Wiley-Interscience Publication, 1997. 491 p.

74. Stoer J. , Witzgall Ch. Convexity and Optimization in Finite Dimensions I. Berlin, Heidelberg, New-York: Springer-Verlag, 1970. 294 p.

75. Vanderbei R.J. Linear programming. Foundations and extensions. Boston, London, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. 418 p.

Учебное издание

Жадан Виталий Григорьевич

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ЧАСТЬ I

ВВЕДЕНИЕ В ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

И ТЕОРИЮ ОПТИМИЗАЦИИ

Редакторы: *О. П. Котова*, *Н. Е. Кобзева*. Корректор *И. А. Волкова*
Компьютерная верстка *Н. Е. Кобзева*

Подписано в печать 03.12.2014. Формат 60×84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 16,9. Уч.-изд. л. 15,3. Тираж 200 экз. Заказ № 100.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-58-22, e-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел оперативной полиграфии «Физтех-полиграф»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
Тел. (495) 408-84-30, e-mail: polygraph@mail.mipt.ru