Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Введение.

Структура курса и семинаров

- Годовой курс. Осенний семестр теоретический. Весенний - практический.
- Экзамен после обоих семестров.
- *Лекции* по средам в 10.45; *Семинары* по вторникам в 17.05 907 КПМ
- На семинаре: краткий письменный опрос по материалам предыдущего семинара, обзор необходимой теории, решение задач, сдача домашнего задания

Расписание (примерное)

- Неделя 1. Введение
- Неделя 2. Выпуклость. Выпуклое множество
- Неделя 3. Проекция точки на множество. Отделимость
- Неделя 4. Сопряженные множества. Лемма Фаркаша
- Неделя 5. Векторное дифференцирование
- Неделя 6. Выпуклые функции. Задачи выпуклого программирования
- Неделя 7. Субдифференциал
- Неделя 8. Промежуточная контрольная
- Неделя 9. Конус возможных направлений, касательный конус, острый экстремум
- Неделя 10. Сопряжённые функции
- Неделя 11. Условия оптимальности
- Неделя 12. Двойственная задача
- Неделя 13. Задача аппроксимации
- Неделя 14. Задачи линейной алгебры
- Неделя 15. Контрольная/ сдачи/ резерв

Приём домашнего задания

- Домашнее задание оформляется в $\LaTeX$ или `jupyter`. Другие формы (листочки, сканы тетрадки и пр.) не принимаются :(
- Задание отправляется **единым** файлом (форматы: `.pdf`, `.ipynb`, `.zip`, `.rar`) боту в telegram: https://t.me/optimization_hw_bot
- Возможно внесение исправлений/правок в отправленное дз. Тогда оно будет датироваться **последней** отправкой
- Каждое дз необходимо защитить устно, после чего за него будет выставлена оценка. Возможности для устной сдачи: Вторник 18.30 - 20.00. В любой другой день в Skoltech по предварительной договоренности.
- Дедлайны по каждой домашке: 1-ый до начала следующего семинара, 2-ой до конца следующей недели. После 1-ого и до 2-го дедлайнов дз стоит 80 % исходной цены, после 2-ого дедлайна дз стоит 50% исходной цены.

Система оценивания

Система анонимного фидбека

- После каждого семинара в канале публикуется ссылка с опросом о прошедшем семинаре. Это очень важно, оставьте пару комментариев - это анонимно. https://t.me/mipt_optimization

Материалы

Оптимизация

1. Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe. Convex Optimization
2. Курс по выпуклой оптимизации в Stanford'e
3. Курс по оптимизации L. Vandenberghe в UCLA
4. Материалы по оптимизации А.Катруцы ФУПМ МФТИ
5. Ю.Е. Нестеров. Методы выпуклой оптимизации
6. Б.Т. Поляк. Введение в оптимизацию
7. Видео лекций S. Boyd'a по курсу Convex Optimization в Stanford'e
8. Миникурс по выпуклой оптимизации от S. Boyd'a
9. Convex Optimization: Algorithms and Complexity by S. Bubeck
10. Matrix Cookbook

Материалы семинаров

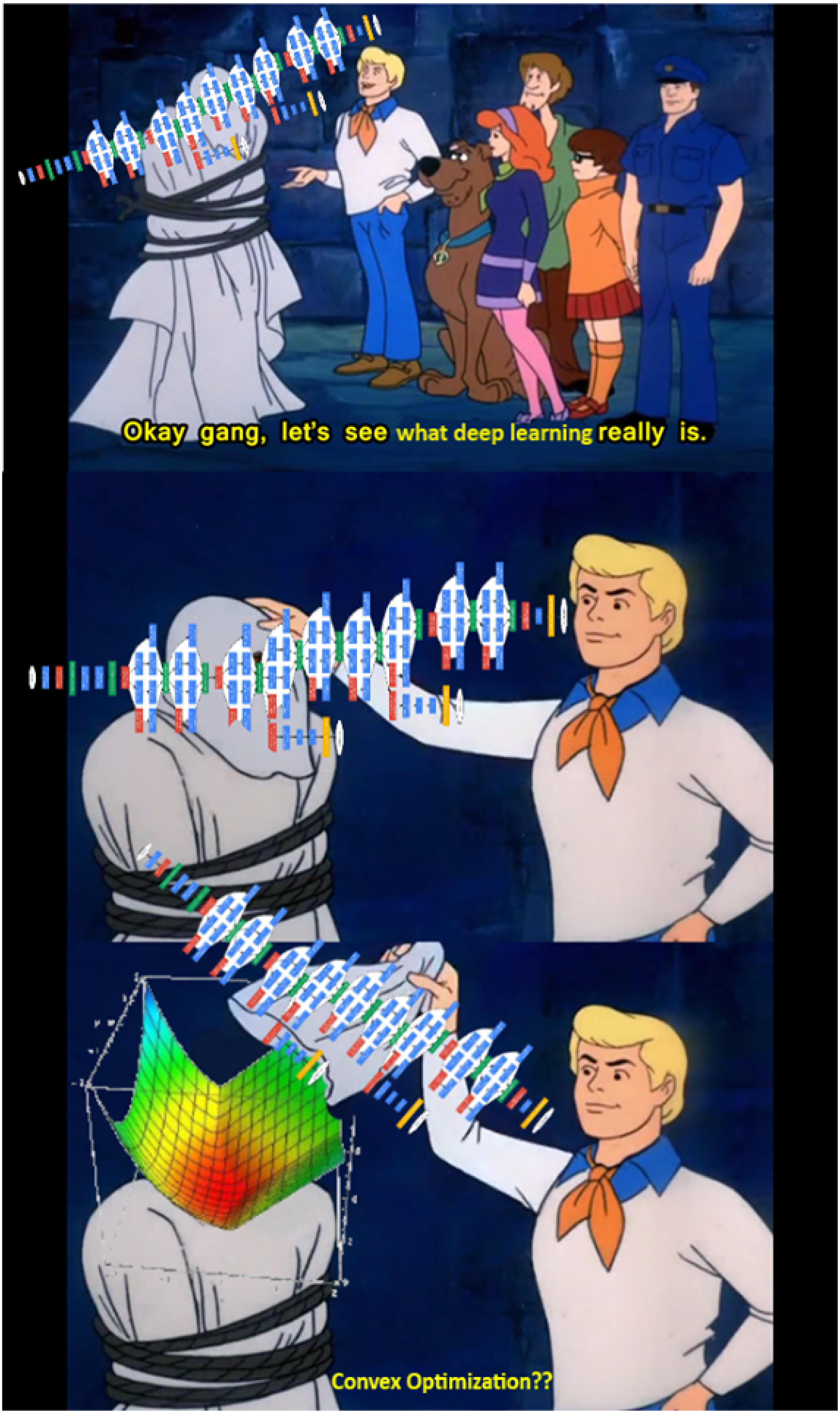
2. Быстрый просмотр семинаров
3. Репозиторий на github
4. Канал в telegram; Бот для сдачи дз в telegram

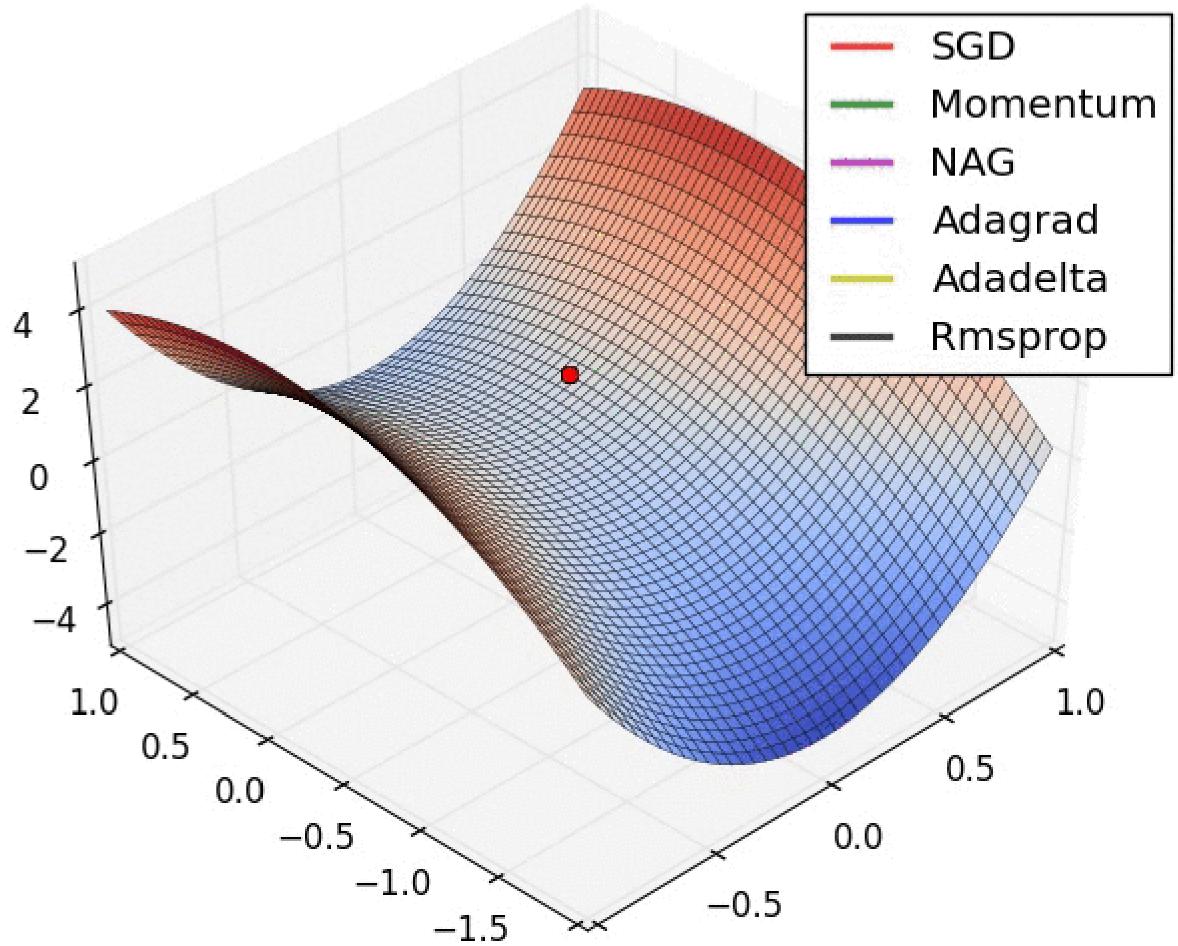
LaTeX

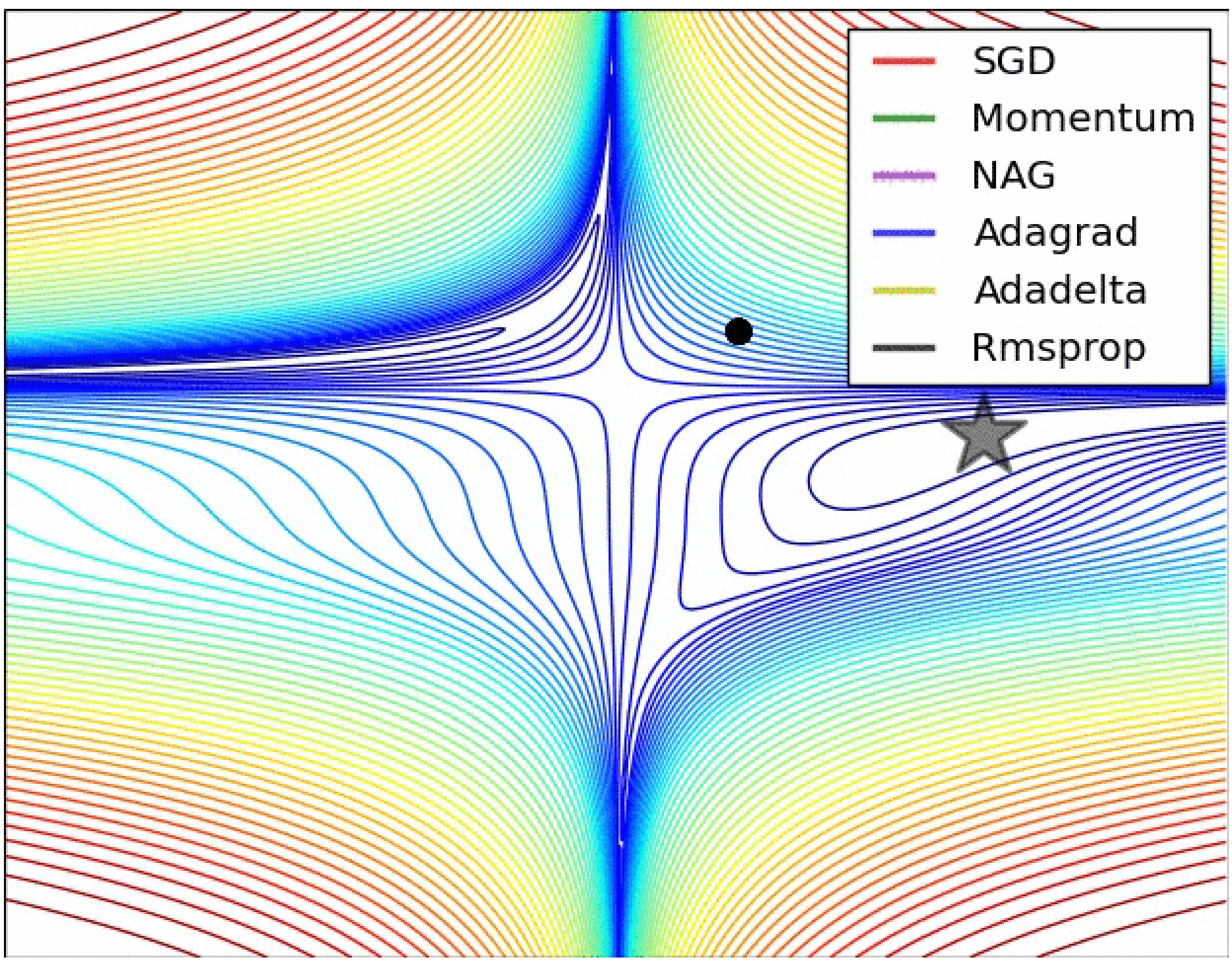
1. [Ссылка на шаблон sharelatex для дз]
2. [Лекция "Latex для начинающих"]
3. [Литература] - Настольная книга, шпоргалка и краткое введение.

Примеры задач оптимизации или чего можно достичь, изучая этот дивный мир

Искусственный интеллект. Машинное обучение


Okay gang, let's see what deep learning really is.
Convex Optimization??


SGD
Momentum
NAG
Adagrad
Adadelta
Rmsprop
4
2
0
−2
−4
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5


SGD
Momentum
NAG
Adagrad
Adadelta
Rmsprop

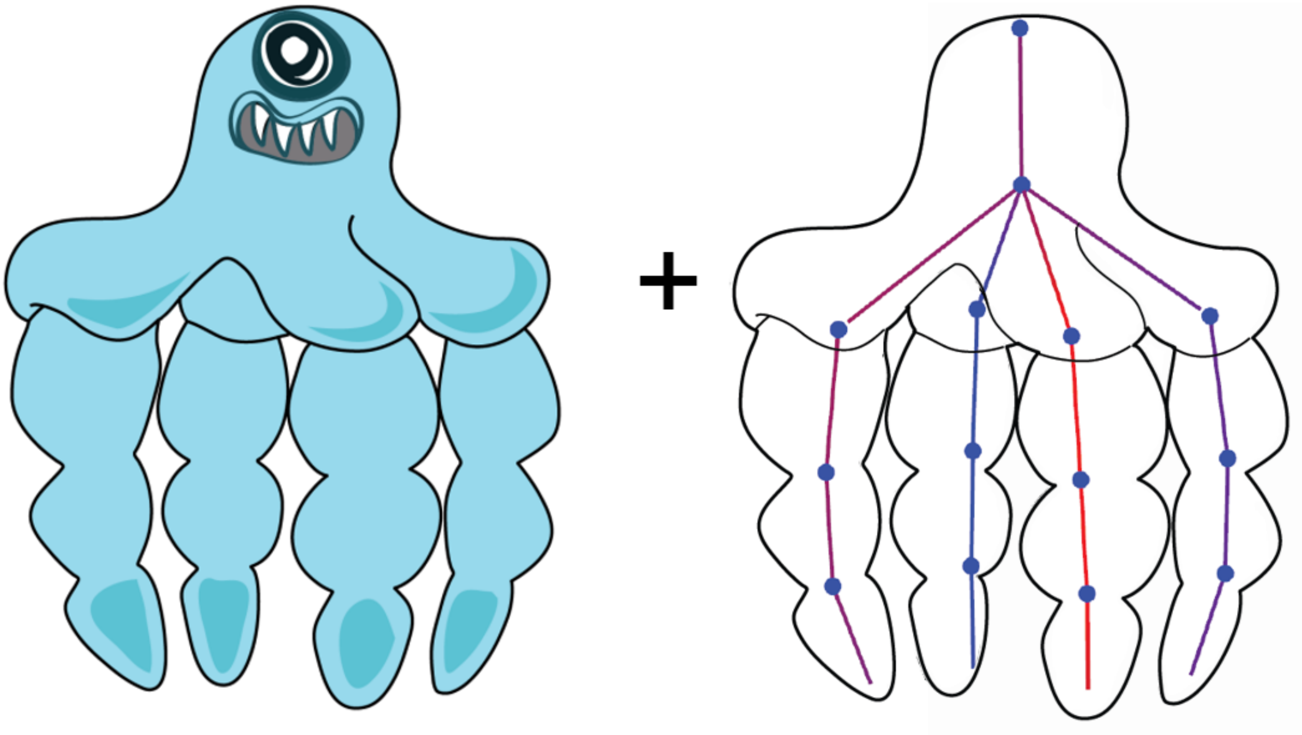
Задача выбора портфолио

- Переменные - количество денег, инвестируемых в конкретный актив
- Ограничения - бюджет, min/max необходимое количество инвестиций в актив(ы)
- Минимизируемый функционал: общий риск или дисперсия оценки возвращенных средств

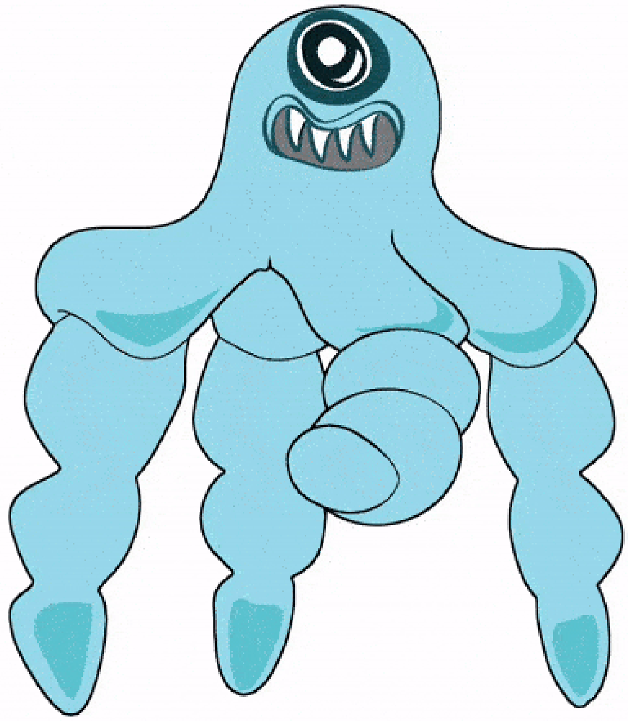
Индустрия мультипликации

[Статья]

Вход: рисунок, скелет.



Выход: 3d модель, подобранная с помощью алгоритмов выпуклой оптимизации и корректно поставленной задачи оптимизации.



Общая математическая формулировка

$$\text{minimize } f_0(x) \quad (1) \;\; \text{subject to } f_i(x) \le b_i, i = 1, \ldots, m \quad (2)$$

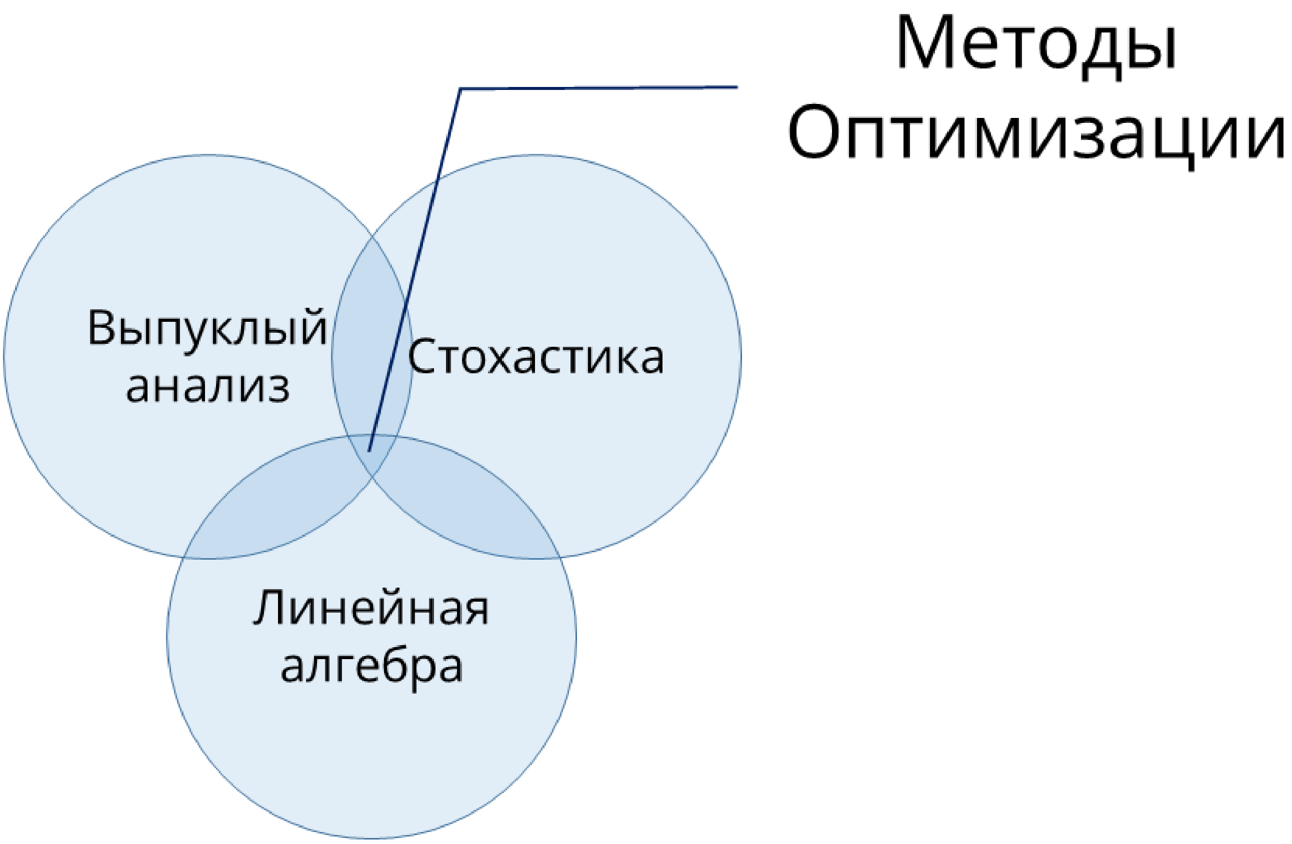
- $x = (x_1, \ldots, x_n)$: оптимизируемые параметры (переменные)
- $f_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$: целевая функция
- $f_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, i = 1, \ldots, m$: ограничения

Решение x^* доставляет наименьшее значение функции $f_0(x)$ среди всех x, удовлетворяющих ограничениям

История и текущее положение дел

Теория

- 1900 - 1970: выпуклый анализ
- 1933+ : теория вероятностей, математическая статистика



Методы

- 1947: Симплексный метод решения задач линейного программирования (Данциг)
- 1960-ые: Методы внутренней точки
- 1970-ые: Метод эллипоидов. Субградиентные методы
- 1980-ые: Методы внутренней точки, работающие за полиномиальное время для линейного программирования
- 1987+ : Методы внутренней точки для нелинейной выпуклой оптимизации (Немировский, Нестеров)
- 2000+ : Стохастические алгоритмы невыпуклой оптимизации

Приложения

- до 1990: в основном, исследование операций
- после 1990: бурное развитие приложений, обработка сигналов, разработка схем
- 2007+ : нейронные сети

Пример решения задачи оптимизации с помощью геометрической интерпретации

Пример 1

$\text{extr}\,(x_1 + x_2)$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4$

Решение:

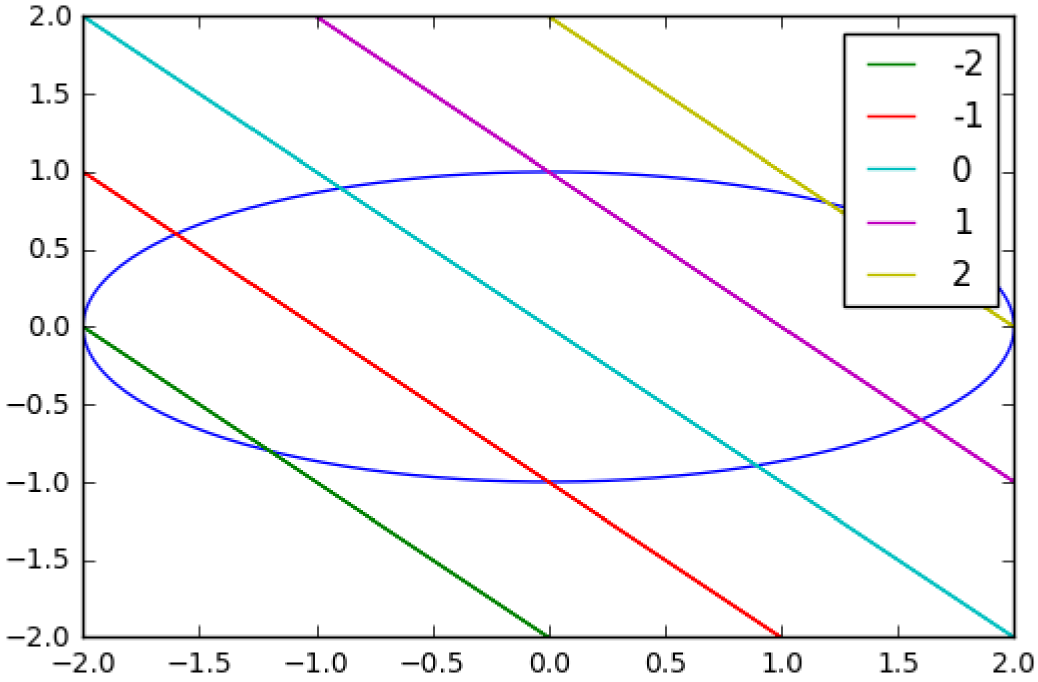
- Не обязательно, но полезно посмотреть на иллюстрацию ниже, чтобы представить картину полностью (иллюстрацию можно двигать и увеличивать). На ней построена целевая функция во всех точках допустимого множества

Для столь простого примера экстремумы ясны сразу, тем не менее, воспользуемся стандартной геометрической процедурой поиска:

- Задача поиска экстремума заключается в поиске всех *инфимумов* (обратите внимание на написание), *супремумов*, *максимумов* и *минимумов* целевой функции из допустимого множества.
- Для того, чтобы найти точки максимума и минимума имеет смысл нарисовать линии уровня целевой функции в проекции на допустимое множество:

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
%matplotlib inline

r = 1                 # radius
phi = np.linspace(0, 2*np.pi, 240)        # angle

r, phi = np.meshgrid(r, phi)              # computational grid

x1 = 2 * r * np.cos(phi)                         # parametrization
x2 = r * np.sin(phi)

plt.plot(x1,x2)
plt.plot(x1, -2-x1, label='-2')
plt.plot(x1, -1-x1, label='-1')
plt.plot(x1, -x1, label='0')
plt.plot(x1, 1-x1, label='1')
plt.plot(x1, 2-x1, label='2')
plt.ylim([-2,2])

plt.legend()
```

```
<matplotlib.legend.Legend at 0x1bf4bd436a0>
```



Ясно, что максимум и минимум достигается на границе целевого множества, т.е. на пересечении прямой $x_2 = c - x_1$ и эллипса $x_1^2 + 4x_2^2 = 4$. Решение задачи, доступное любому школьнику состоит в том, чтобы решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_2 = c - x_1, \\ x_1^2 + 4x_2^2 = 4. \end{cases} \quad (3)$$

При максимальном и минимальном допустимом значении c.

$$\begin{cases} x_2 = c - x_1, \\ 5x_1^2 - 8cx_1 + 4c^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$D = 64c^2 - 80c^2 + 80 = 80 - 16c^2 \quad (5)$$

$$x_1 = \frac{8c \pm \sqrt{80 - 16c^2}}{10} \quad (6)$$

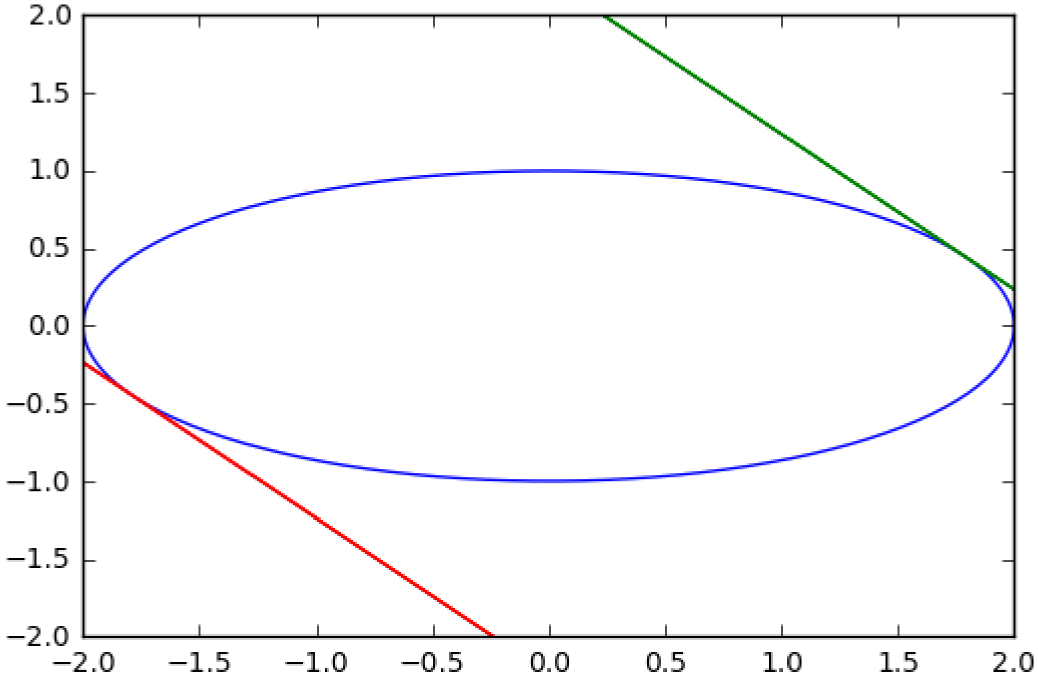
Очевидно, что $c^2 \le 5 \to c_{min} = -\sqrt{5}, c_{max} = \sqrt{5}$

Значит, $x_1 = \frac{4}{5}c,\ x_2 = \frac{1}{5}c$, тогда $\left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - max, $\left(-\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ - min

В данной задаче супремум совпадает с точкой максимума, а инфимум с точкой минимума. Действительно:

```
plt.plot(x1,x2)
plt.plot(x1, np.sqrt(5)-x1, label='sqrt(5)')
plt.plot(x1, -np.sqrt(5)-x1, label='-sqrt(5)')
plt.ylim([-2,2])
```

```
(-2, 2)
```



- Искомые точки так же можно было найти, приравняв уравнение касательной к кривой второго порядка к -1 (угловому коэффициенту прямой уровней).
- Отметим так же, что ситуация, когда решение оптимизационной задачи лежат на границе допустимого множества - частое явление.

Пример 2

$\text{extr}\left(|x_1|^\lambda + 2|x_2|^\lambda\right)$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 \leq 4, \quad \lambda \neq 0$

Решение:

- Эта задача - с параметром λ, поэтому здесь очень важно рассмотреть все случаи. Для начала ограничимся положительными значениями λ.
- Взгляните на рисунки при $\lambda < 1, \lambda = 1, \lambda > 1$.

По хорошему, задача решается абсолютно так же - рисованием линий уровней $f(x_1, x_2) = const$ и приравниванием уравнений касательных. Однако, в этой задаче ясно, что $(0, 0)$ - точка min (она же инфимум этой задачи). Что же касается максимумов, давайте посмотрим:

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 = 4, \\ |x_1|^\lambda + 2|x_2|^\lambda = c \end{cases} \tag{7}$$

В силу симметрии, можем рассмотреть лишь положительные значения x_1, x_2:

$$\begin{cases} x_1^2 + 4x_2^2 = 4, \\ x_1^\lambda + 2x_2^\lambda = c \end{cases} \tag{8}$$

Вообще говоря, надо решить эту систему для всех λ и максимального значения c, т.е. можно выразить $x_2 = x_2(x_1)$ и приравнять производные по x_1 первого и второго уравнений (условие касания). Особый интерес вызывает поведение решений при $\lambda \in (1, 2)$, при всех остальных положительных значениях решения совпадают с теми, что указаны на рисунке выше. Читателю предлагается придумать способ найти аналитическое решение в этом случае.

В случае же $\lambda < 0$ точка $(0, 0)$ является супремумом целевой функции на заданном множестве. И эту точку стоит включить в ответ. Графики ниже.

Домашнее задание 1

Используя геометрические интерпретации, решить следующие экстремальные задачи:

1. $\mathbf{extr} \left(|x_1|^\lambda + 2|x_2|^\lambda \right)$ при условии $x_1^2 + 4x_2^2 = 4, \quad \lambda \neq 0$
2. $\mathbf{extr} \left(x_1^2 + 4x_2^2 \right)$ при условии $|x_1|^\lambda + 2|x_2|^\lambda \leq 1, \quad \lambda \neq 0$
3. $\mathbf{extr} \left(x_1^2 + 4x_2^2 \right)$ при условии $|x_1|^\lambda + 2|x_2|^\lambda = 1, \quad \lambda \neq 0$

В качестве решения необходимо предоставить либо:

- `jupyter notebook` с построенными графиками целевой функции и бюджетного множества, описывающие различные параметры λ. Для построения графиков можно использовать код указанный в этом семинаре, но будет проще рабоать с библиотекой `matplotlib`
- Аналитическое решение при $\lambda \in Z \neq 0$ с рассмотрением всех случаев

Плюсом будут отмечены те решения, что рассмотрят $\lambda \in R \backslash \{0\}$