# Методы Оптимизации. Даниил Меркулов. Отделимость. Проекция. Опорная гиперплоскость

## Interior

### Внутренность множества

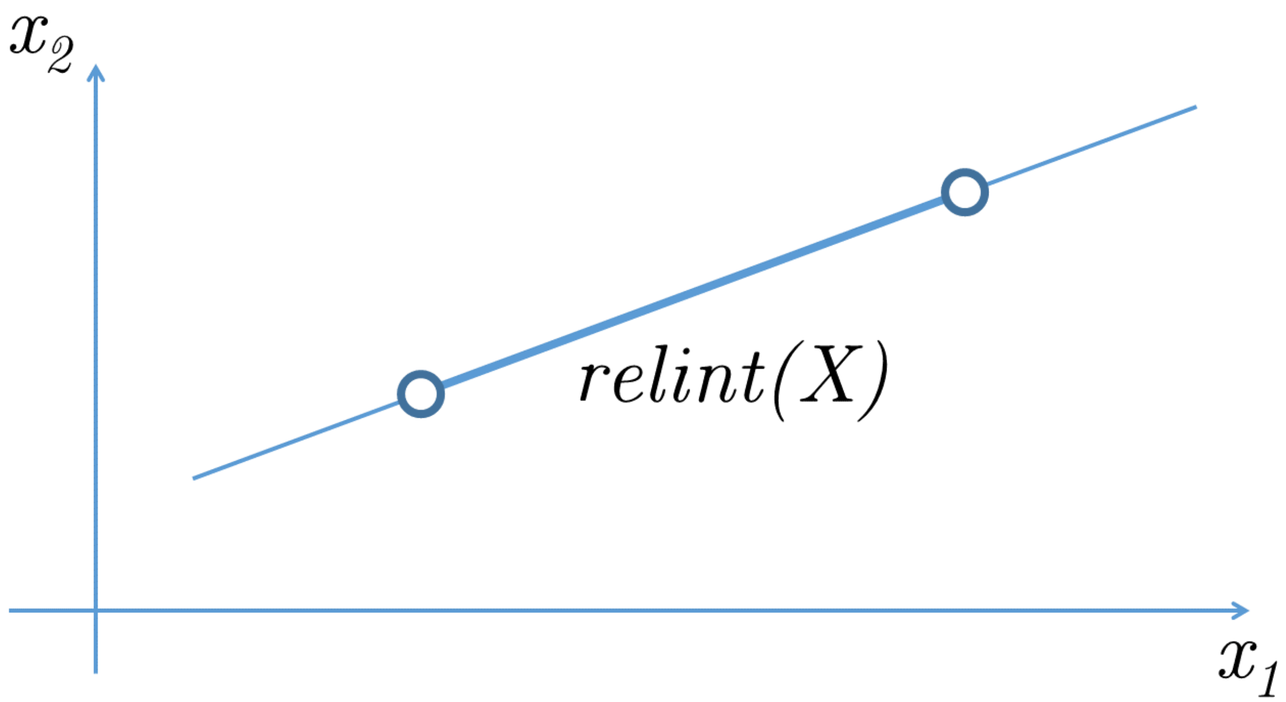
Внутренностью множества $S$ называется следующее множество:

$\mathbf{int}(S) = \{\mathbf{x} \in S \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \subset S\}$ где $B(\mathbf{x}, \varepsilon) = \mathbf{x} + \varepsilon B$ - шар с центром в т.$\mathbf{x}$ и радиусом $\varepsilon$

### Относительная внутренность множества

Относительной внутренностью множества $S$ называется следующее множество:

$\mathbf{relint}(S) = \{\mathbf{x} \in S \mid \exists \varepsilon > 0, B(\mathbf{x}, \varepsilon) \cap \mathbf{aff}(S) \subseteq S\}$




- Любое непустое выпуклое множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ имеет непустую относительную внутренность $\mathbf{relint}(S)$

## Projection

### Расстояние между точкой и множеством

Расстоянием $d$ от точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $S \subset \mathbb{R}^n$ является:

$$d(\mathbf{y}, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

## Проекция точки на множество

Проекцией точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ на множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ называется точка $\pi_S(\mathbf{y}) \in S$:

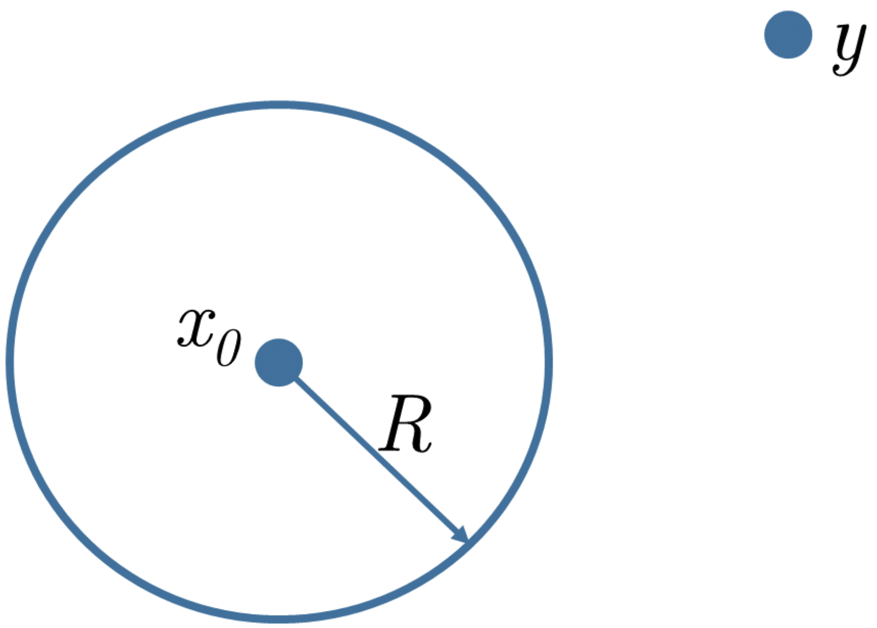
$$\|\pi_S(\mathbf{y}) - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x} \in S$$

- Если множество - открыто, и точка в нем не лежит, то её проекции на это множество не существует
- Если точка лежит в множестве, то её проекция - это сама точка
- $\pi_S(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{y}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - выпуклое замкнутое множество. Пусть так же имеются точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\pi \in S$. Тогда если для всех $\mathbf{x} \in S$ справедливо неравенство: $\langle \pi - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \pi \rangle \geq \mathbf{0}$, то $\pi$ является проекцией точки $\mathbf{y}$ на $S$, т.е. $\pi_S(\mathbf{y}) = \pi$
- Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ - афинное множество. Пусть так же имеются точки $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ и $\pi \in S$. Тогда $\pi$ является проекцией точки $\mathbf{y}$ на $S$, т.е. $\pi_S(\mathbf{y}) = \pi$ тогда и только тогда, когда для всех $\mathbf{x} \in S$ справедливо равенство: $\langle \pi - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \pi \rangle = 0$

### Пример 1

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c\| \leq R\}$, $y \notin S$

Решение:




- Из рисунка строим гипотезу: $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$
- Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\left(x_0 - y + R\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(x - x_0 - R\frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}\right) =$$

$$\left(\frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|}\right)^T \left(\frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|}\right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2}(y - x_0)^T \left((x - x_0)\|y - x_0\| - R\left(y - x_0\right)\right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|}\left((y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\|\right) =$$

$$(R - \|y - x_0\|)\left(\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R\right)$$

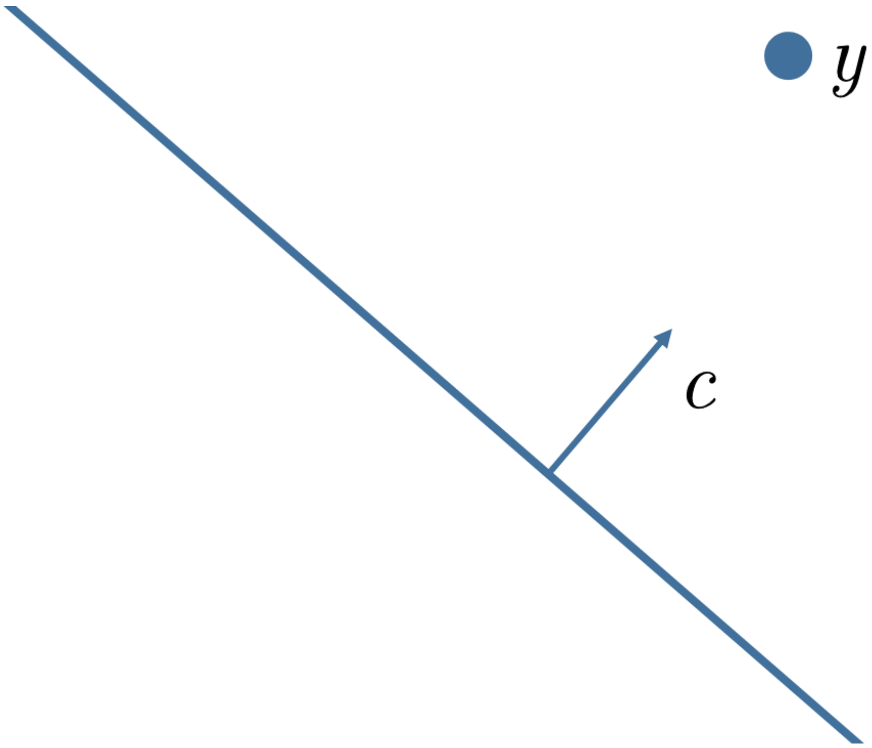
Первый сомножитель отрицателен по выбору точки $y$. Второй сомножитель так же отрицателен, если применить к его записи теорему Коши - Буняковского: $(y - x_0)^T (x - x_0) \leq \|y - x_0\|\|x - x_0\|$

$$\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \leq \frac{\|y - x_0\|\|x - x_0\|}{\|y - x_0\|} - R = \|x - x_0\| - R \leq 0$$

### Пример 2

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$, $y \notin S$

Решение:

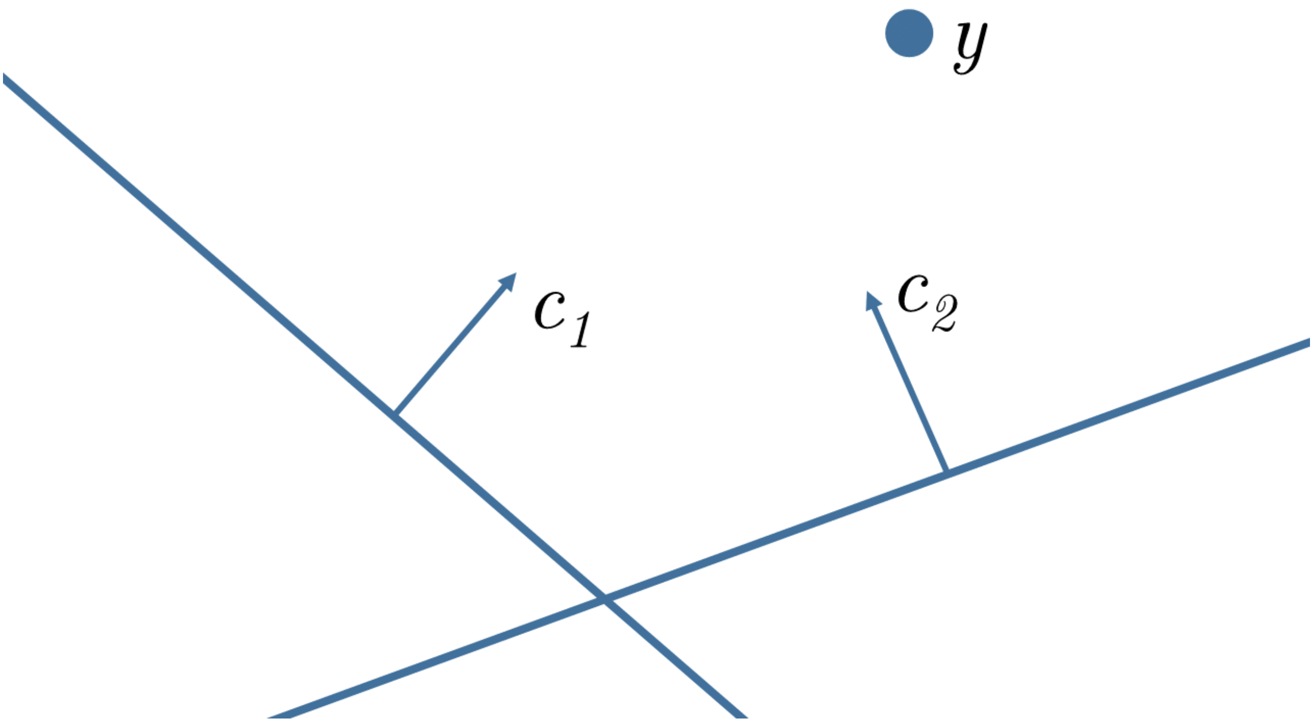


- Из рисунка строим гипотезу: $\pi = y + \alpha c$. Коэффициент $\alpha$ подбирается так, чтобы $\pi \in S$: $c^T\pi = b$, т.е.: $c^T(y + \alpha c) = b$
  $c^Ty + \alpha c^Tc = b$
  $c^Ty = b - \alpha c^Tc$
- Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$
  $(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$
  $\alpha c^T(x - y - \alpha c) =$
  $\alpha(c^Tx) - \alpha(c^Ty) - \alpha^2 c^Tc) =$
  $\alpha b - \alpha(b - \alpha c^Tc) - \alpha^2 c^Tc =$
  $\alpha b - \alpha b + \alpha^2 c^Tc - \alpha^2 c^Tc = 0 \geq 0$

### Пример 3

Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m\}$, $y \notin S$

Решение:



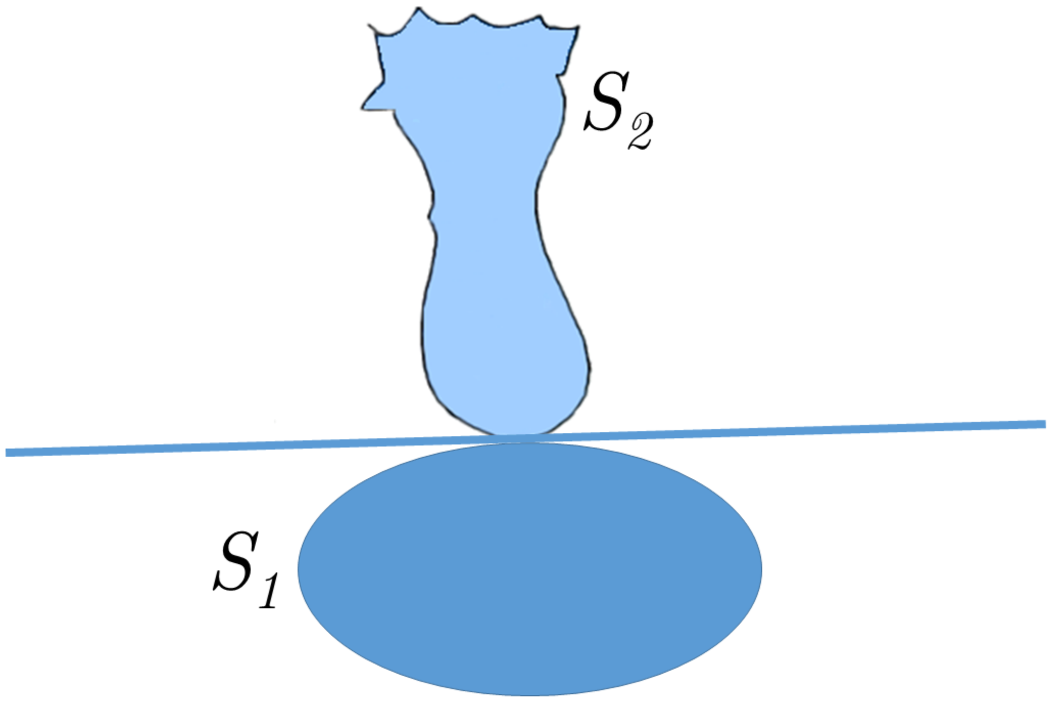

- Из рисунка строим гипотезу: $\pi = y + \sum\limits_{i=1}^m \alpha_i A_i = y + A^T\alpha$. Коэффициент $\alpha$ подбирается так, чтобы $\pi \in S$: $A\pi = b$, т.е.: $c^T(y + A^T\alpha) = b$
  $A(y + A^T\alpha) = b$
  $Ay = b - AA^T\alpha$
- Проверяем неравенство для выпуклого замкнутого множества: $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$
  $(y + A^T\alpha - y)^T(x - y - A^T\alpha) =$
  $\alpha^T A(x - y - A^T\alpha) =$
  $\alpha^T(Ax) - \alpha^T(Ay) - \alpha^T AA^T\alpha) =$
  $\alpha^T b - \alpha^T(b - AA^T\alpha) - \alpha^T AA^T\alpha =$
  $\alpha^T b - \alpha^T b + \alpha^T AA^T\alpha - \alpha^T AA^T\alpha = 0 \geq 0$

## Separation

## Отделимые множества

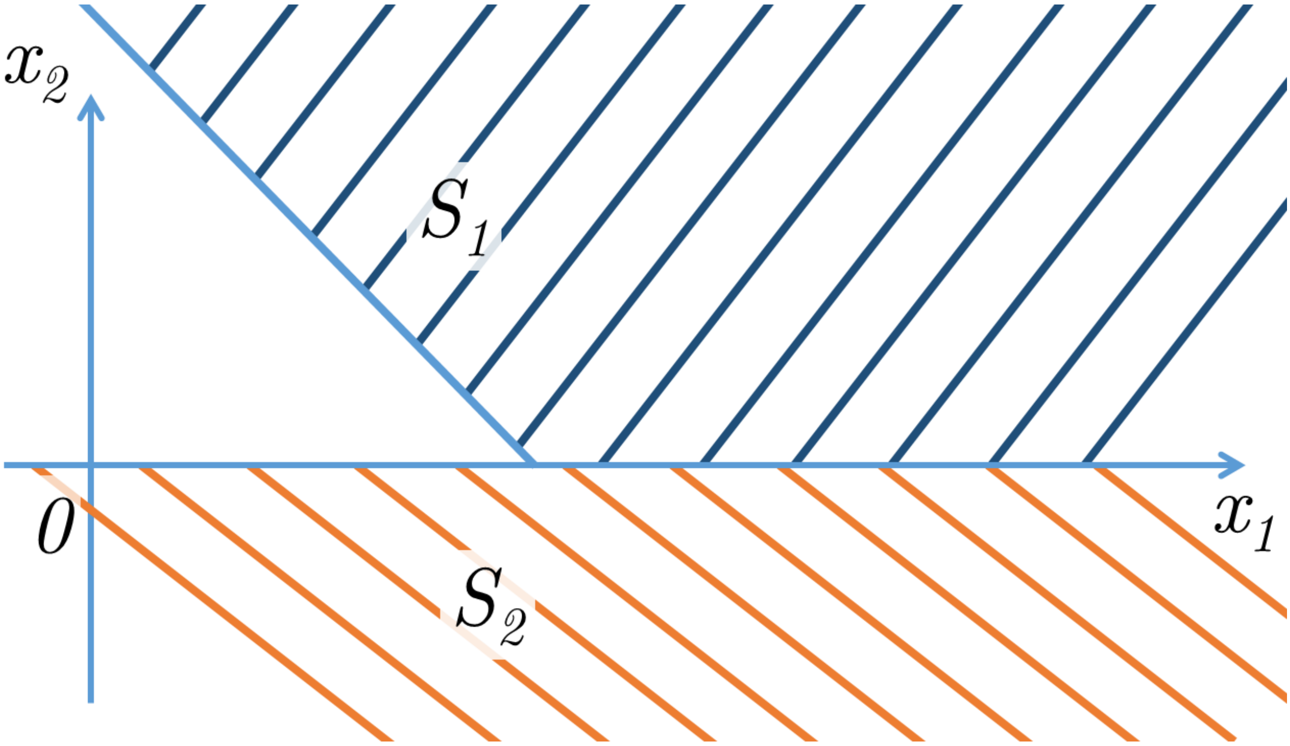
Множества $S_1$ и $S_2$ называются отделимыми, если существуют $\mathbf{p} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что:

$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x_1} \rangle \leq \beta \leq \langle \mathbf{p}, \mathbf{x_2} \rangle, \;\; \forall \mathbf{x_1} \in S_1, \;\; \forall \mathbf{x_2} \in S_2$




## Собственно отделимые множества

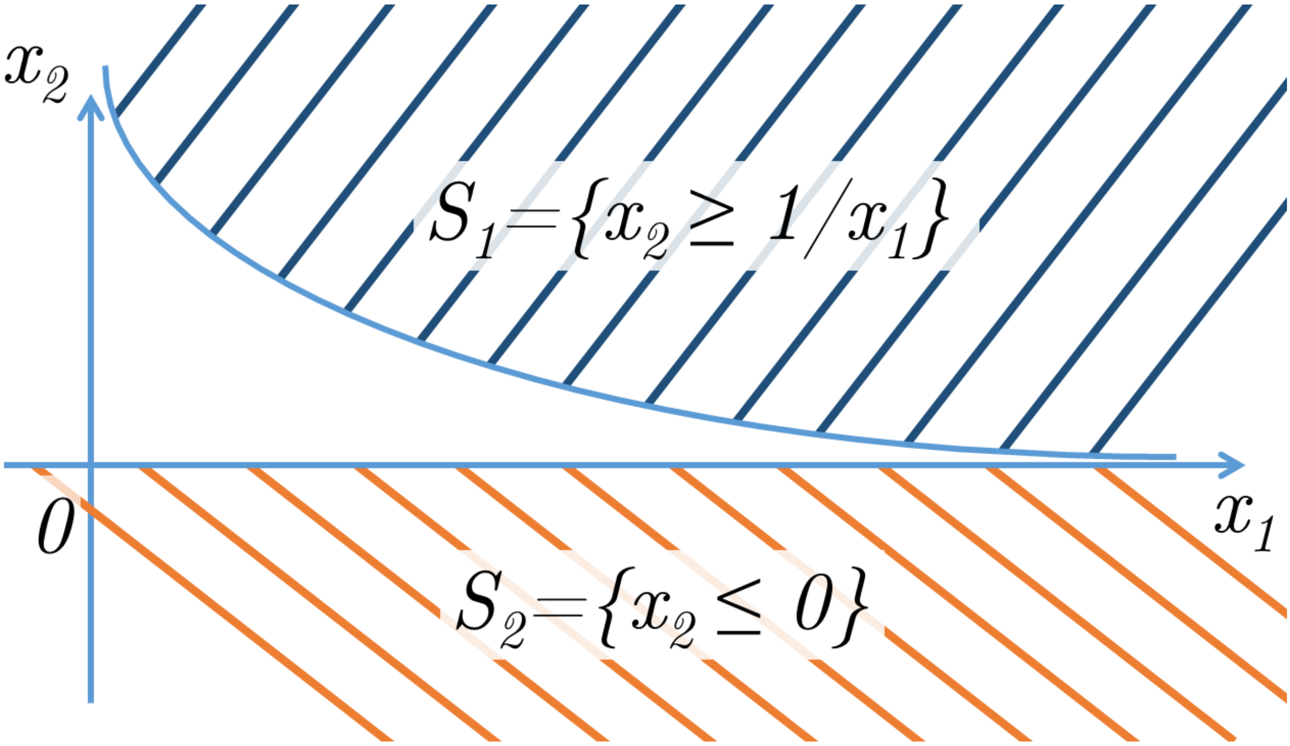
Множества $S_1$ и $S_2$ называются собственно отделимыми, если они отделимы и дополнительно можно указать такие $\mathbf{x_1} \in S_1, \mathbf{x_2} \in S_2$ $\langle \mathbf{p}, \mathbf{x_1} \rangle < \langle \mathbf{p}, \mathbf{x_2} \rangle$




## Строго отделимые множества

Множества $S_1$ и $S_2$ называются строго отделимыми, если существует $\mathbf{p} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$, что:

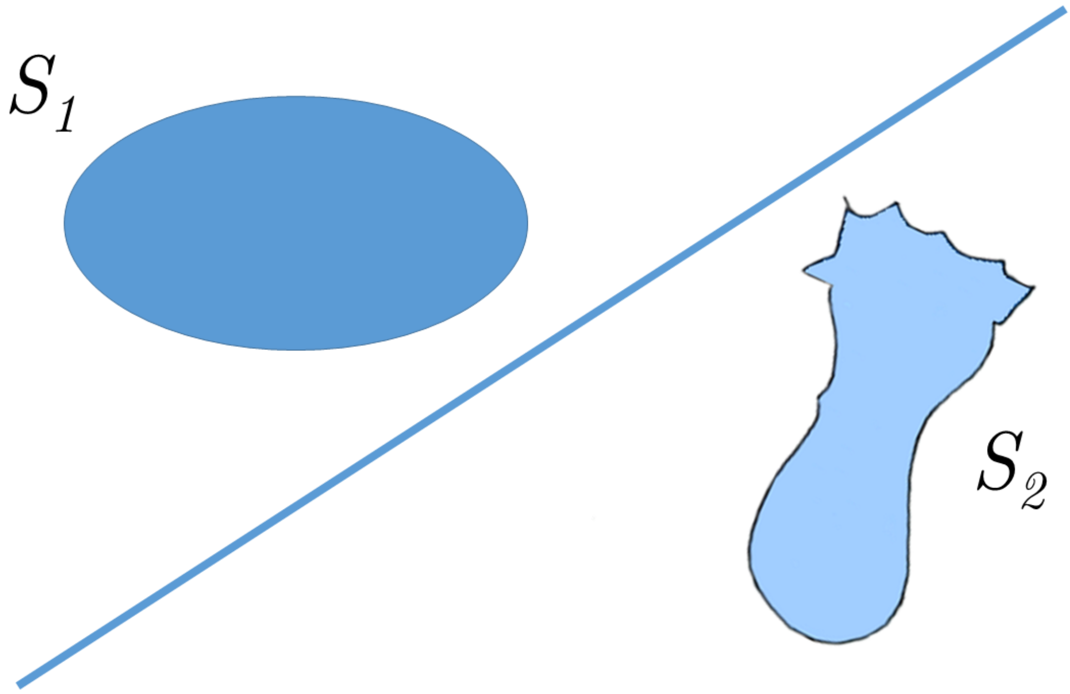
$\langle \mathbf{p}, \mathbf{x_1} \rangle < \langle \mathbf{p}, \mathbf{x_2} \rangle, \;\; \forall \mathbf{x_1} \in S_1, \;\; \forall \mathbf{x_2} \in S_2$

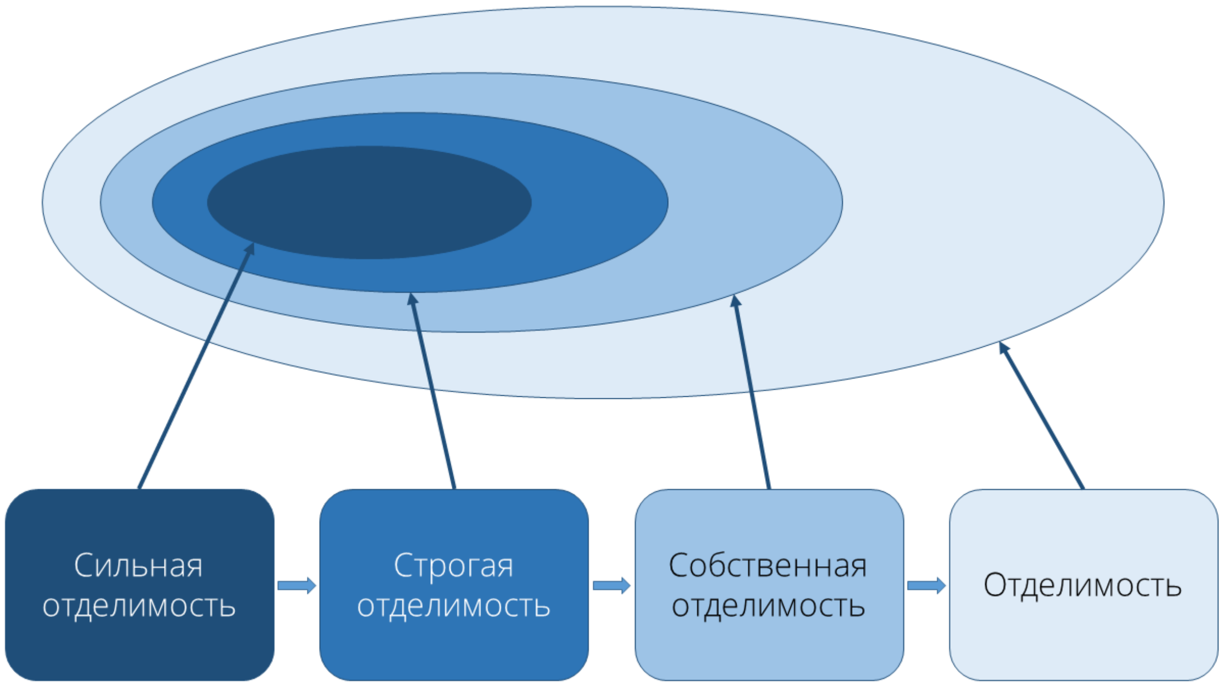



## Сильно отделимые множества

Множества $S_1$ и $S_2$ называются сильно отделимыми, если существуют $\mathbf{p} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$, что:

$$\sup_{\mathbf{x_1} \in S_1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x_1} \rangle < \beta < \inf_{\mathbf{x_2} \in S_2} \langle \mathbf{p}, \mathbf{x_2} \rangle, \quad \forall \mathbf{x_1} \in S_1, \quad \forall \mathbf{x_2} \in S_2$$




## Расстояние между множествами

Расстоянием между множествами $S_1$ и $S_2$ называется число: $d(S_1, S_2, \|\cdot\|) = \inf_{\mathbf{x_1} \in S_1, \mathbf{x_2} \in S_2} \|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}\|$

- Если $X$ и $Y$ - непустые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и $X \cap Y = \emptyset$, тогда $X$ и $Y$ - отделимы.

- Если $X$ - непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbf{y} \notin X$, тогда точку $\mathbf{y}$ можно строго отделить от множества $X$.

# Supporting hyperplane

## Опорная гиперплоскость

Гиперплоскость $\Gamma_{p,\beta} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle p, \mathbf{x} \rangle > \beta\}$ называется опорной к множеству $S$ в граничной точке $\mathbf{a} \in \partial S$, если $\langle p, \mathbf{x} \rangle \geq \beta = \langle p, \mathbf{a} \rangle \;\; \forall \mathbf{x} \in S$

Опорная гиперплоскость называется *собственно опорной*, если, кроме того, можно указать $\mathbf{x_0} \in S : \langle p, \mathbf{x_0} \rangle > \beta$

- В любой граничной (относительно граничной) точке выпуклого множества существует опорная (собственно опорная) гиперплоскость.
- Касательная плоскость к поверхности $F(x) = 0$, где $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ в точке $x_0$ определяется уравнением: $\nabla F(x_0)^T(x - x_0) = 0$
- Касательная плоскость к графику функции $f(x)$, где $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ в точке $x_0$ определяется уравнением: $\phi(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^T(x - x_0) = 0$

### Пример 4

Построить гиперплоскость, разделяющую $S_1$ и $S_2$:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x_1 > 0\right\}, \quad S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \leq \frac{4}{x_1 - 1} + 9\right\}$$

Решение:

- Найдем $\partial S_1 \cap \partial S_2$:

$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1 \\ x_2 = \frac{4}{x_1 - 1} + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

т.е. множества пересекаются в точке $x_0 = (\frac{1}{3}, 3)$

- Построим касательные плоскости к обеим поверхностям в точке пересечения:

$$\begin{cases} \nabla F_1(x_0)^T(x - x_0) = 0 \\ \nabla F_2(x_0)^T(x - x_0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + \frac{1}{3}x_2 - 2 = 0 \\ -6x_1 - \frac{2}{3}x_2 + 4 = 0 \end{cases}$$

Итого, получаем: $9x_1 + x_2 = 6$, т.е. $p = (9, 1), \beta = 6$

### Пример 5

Построить опорную гиперплоскость для множества $S = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\right\}$ в граничной точке $x_0 = (0, 1)$

Решение:

- Имеем поверхность $F(x_1, x_2) = e^{x_1} - x_2, \quad \nabla F = (e^{x_1}, -1), \quad \nabla F(x_0) = (1, -1)$
- Тогда $\nabla F(x_0)^T (x - x_0) = 0$
  $(1, -1)^T (x_1, x_2 - 1) = 0$
- Искомая опорная гиперплоскость: $x_1 - x_2 + 1 = 0$

### Пример 6

Построить опорную гиперплоскость для множества $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 \geq x_1^2 + x_2^2\right\}$ так, чтобы она отделяла его от точки $x_0 = \left(-\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \frac{15}{16}\right)$

Решение:

- Заметим, что здесь $x_0 \notin \partial S$. А значит, таких гиперплоскостей много. Возможный вариант: искать опорную гиперплоскость в точке $\pi_S(x_0) = \pi \in S$. Значит, $\Gamma_{p,\beta} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid p^T x = \beta, p^T \pi = \beta\right\}$
- Будем искать $\pi$, решая задачу минимизации:

$$\min_{x \in \partial S} \|x - x_0\|^2 \ \min_{x \in \partial S} (x - x_0)^T (x - x_0)$$

Учитывая структуру множества $\partial S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = x_1^2 + x_2^2\}$, можем перейти к задаче безусловной минимизации.

$$\left(x_1 + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(x_2 - \frac{5}{16}\right)^2 + \left(x_1^2 + x_2^2 - \frac{15}{16}\right)^2 \to \min$$

Единственным решением которой является точка $\pi = \left(-1, \frac{1}{4}, \frac{17}{16}\right)$.

- Тогда $p = x_0 - \pi = \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{8}\right), \quad \beta = p^T \pi = \frac{17}{128}$

# Домашнее задание 3

1. Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x \geq b\}$
2. Найти $\pi_S(y) = \pi$, если $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + X\alpha, X \in \mathbb{R}^{n \times m}, \alpha \in \mathbb{R}^m\}$, $y \notin S$
3. Построить гиперплоскость, разделяющую $S_1$ и $S_2$:
   $S_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1\right\}, \quad S_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + 1 \leq x_n\right\}$
4. Построить опорную гиперплоскость для множества $S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{8} + \frac{x_3^2}{25} \leq 1\right\}$ в граничной точке $x_0 = \left(-1, \frac{12}{5}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
5. Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ - замкнутое выпуклое множество, $\mathbf{x} \in S$. Найти множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\forall \mathbf{y} \in Y$ выполнено $\mathbf{x} = \pi_S(\mathbf{y})$
6. Пусть даны $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ и выпуклый конус $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Пусть $Y = \mathbf{x} + K$, $\mathbf{y} \in Y$. Найти множество $X \subset \mathbb{R}^n$, такое, что $\mathbf{x} \in X, \forall \mathbf{y} \in Y : x = \pi_X(\mathbf{y})$

В качестве решения необходимо предоставить либо:

- `.pdf` файл, сверстанный с помощью $\LaTeX$ с решениями задач
- `.ipynb` с оформленным решением