



Метод Ньютона

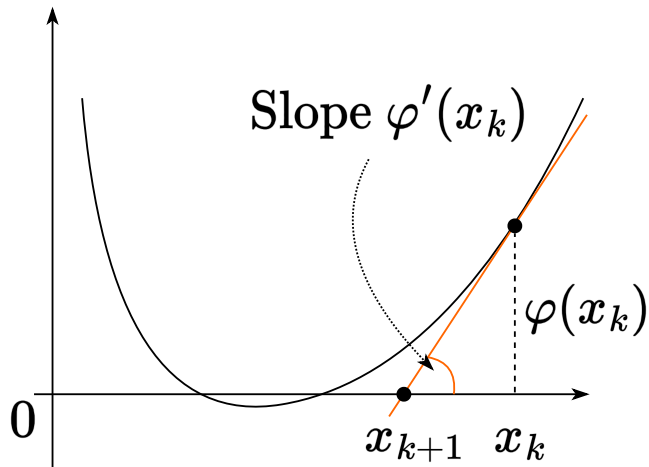
Даня Меркулов

Методы Оптимизации в Машинном Обучении. ФКН ВШЭ

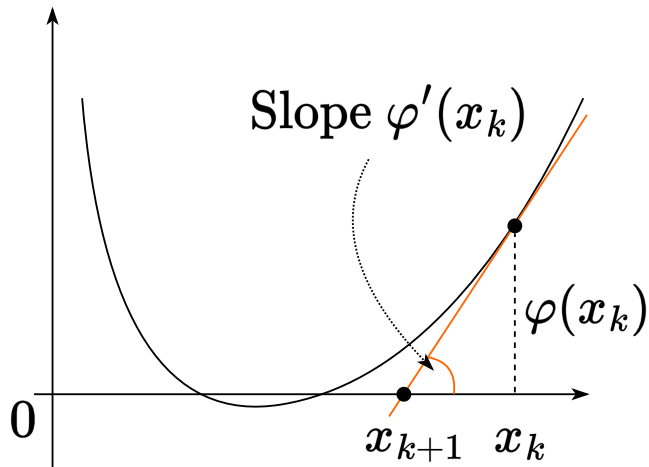
# Метод Ньютона

## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции

Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



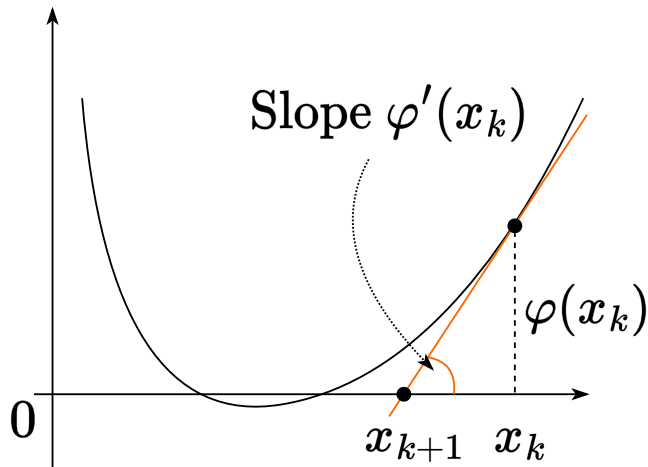
## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции

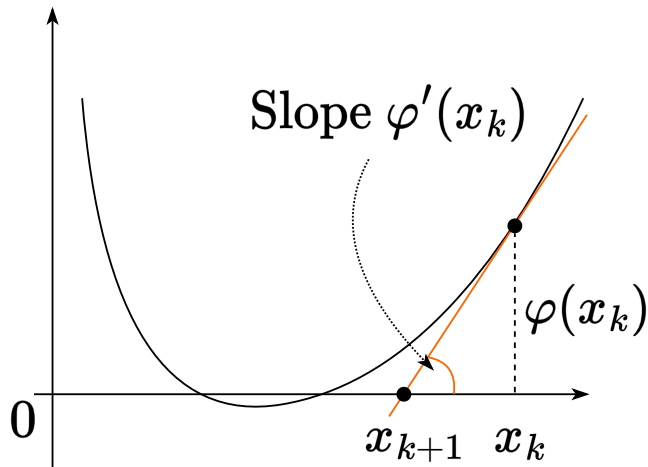


Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



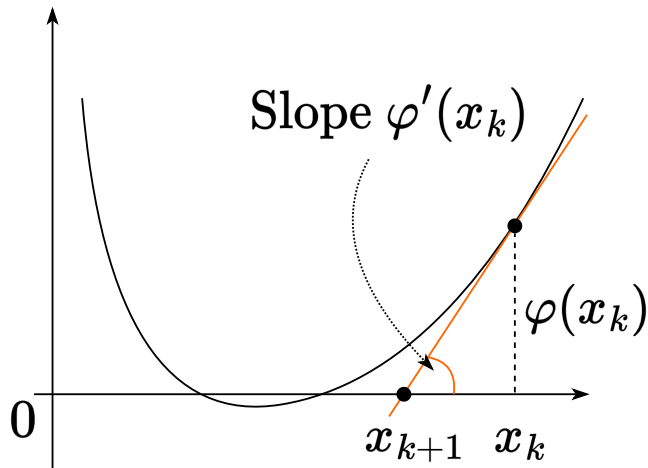
Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Мы получаем итерационную схему:

## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

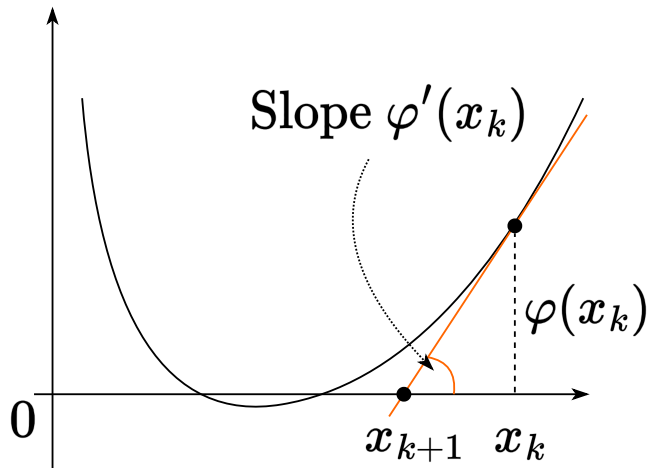
$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Мы получаем итерационную схему:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$

## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Мы получаем итерационную схему:

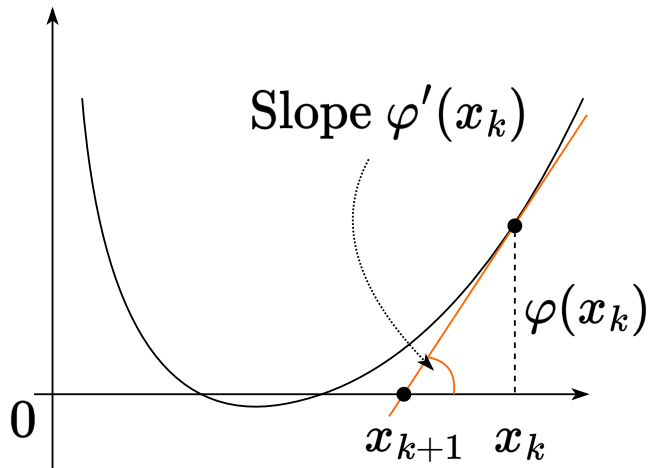
$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Этот метод станет методом оптимизации Ньютона в случае  $f'(x) = \varphi(x)$ <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$



## Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Мы получаем итерационную схему:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Этот метод станет методом оптимизации Ньютона в случае  $f'(x) = \varphi(x)^1$ :

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\begin{aligned} \nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \end{aligned}$$

## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

$$[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

$$[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).$$



## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

$$\nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

$$[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).$$

## Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

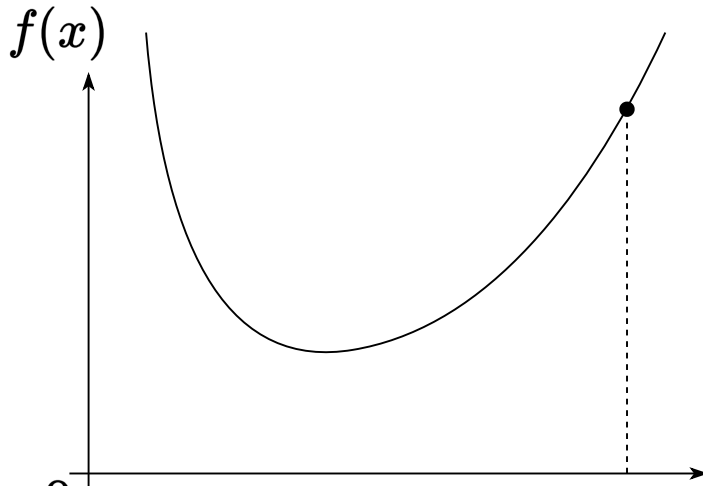
$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

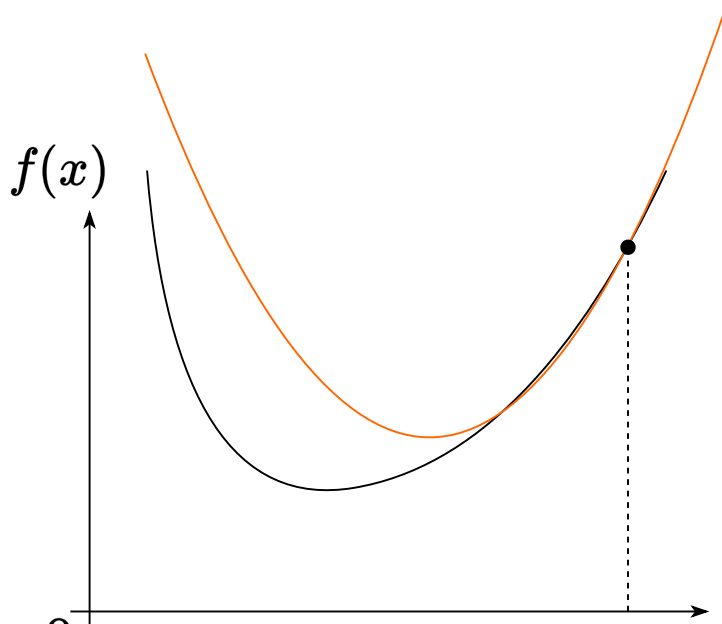
$$\begin{aligned}\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \\ [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).\end{aligned}$$

Необходимо отметить ограничения, связанные с необходимостью невырожденности (для существования метода) и положительной определенности (для гарантии сходимости) гессиана.

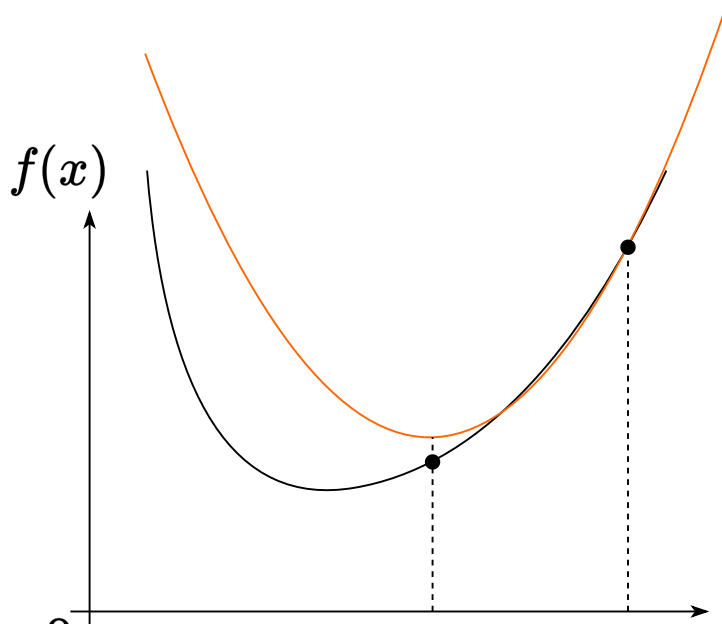
# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



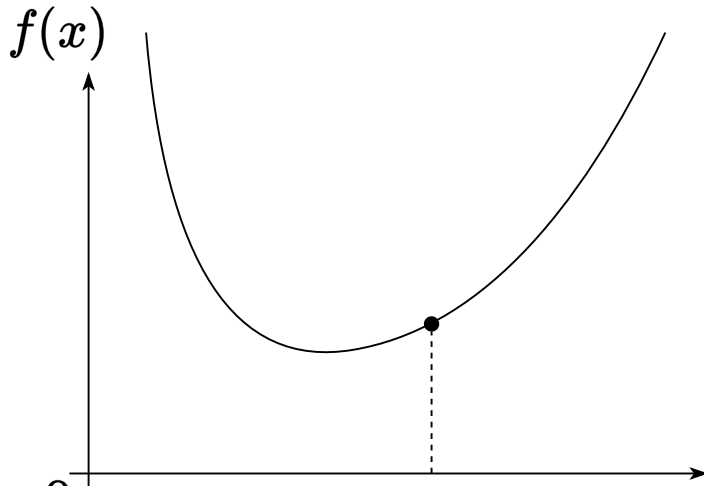
# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



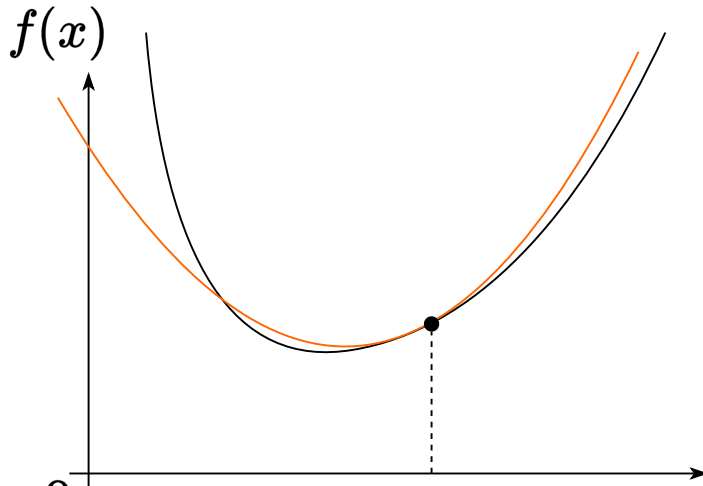
# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



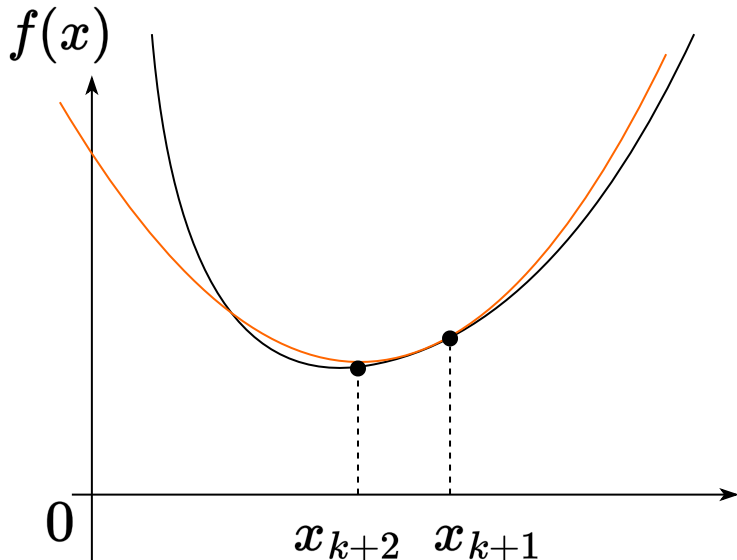
# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации





## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

# Сходимость

## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

# Сходимость

## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

# Сходимость

## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

2. Мы будем отслеживать расстояние до решения

# Сходимость

## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

2. Мы будем отслеживать расстояние до решения

$$x_{k+1} - x^* = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) - x^* = x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) =$$

# Сходимость

## i Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

2. Мы будем отслеживать расстояние до решения

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) - x^* = x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) = \\ &= x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau \end{aligned}$$

3.

$$= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) =$$

3.

$$\begin{aligned} &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \end{aligned}$$



3.

$$\begin{aligned} &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) = \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} G_k(x_k - x^*) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} G_k (x_k - x^*) \end{aligned}$$

4. Введём:

$$G_k = \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau .$$

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\|G_k\| = \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right\| \leq$$

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned}\|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad (\text{Липшицевость гессиана})\end{aligned}$$

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned}\|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad (\text{Липшицевость гессиана}) \\ &\leq \int_0^1 M \|x_k - x^* - \tau(x_k - x^*)\| d\tau = \int_0^1 M \|x_k - x^*\| (1 - \tau) d\tau = \frac{r_k}{2} M,\end{aligned}$$

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned}\|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad (\text{Липшицевость гессиана}) \\ &\leq \int_0^1 M \|x_k - x^* - \tau(x_k - x^*)\| d\tau = \int_0^1 M \|x_k - x^*\| (1 - \tau) d\tau = \frac{r_k}{2} M,\end{aligned}$$

6. Получаем:

$$r_{k+1} \leq \left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \cdot \frac{r_k}{2} M \cdot r_k$$

и нам нужно оценить норму обратного гессиана



# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

8. Из сильной выпуклости следует, что  $\nabla^2 f(x_k) \succ 0$ , i.e.  $r_k < \frac{\mu}{M}$ .

$$\left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \leq (\mu - Mr_k)^{-1}$$

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)}$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

8. Из сильной выпуклости следует, что  $\nabla^2 f(x_k) \succ 0$ , i.e.  $r_k < \frac{\mu}{M}$ .

$$\|[\nabla^2 f(x_k)]^{-1}\| \leq (\mu - Mr_k)^{-1}$$

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)}$$

9. Потребуем, чтобы верхняя оценка на  $r_{k+1}$  была меньше  $r_k$ , учитывая, что  $0 < r_k < \frac{\mu}{M}$ :

$$\frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < r_k$$

$$\frac{M}{2(\mu - Mr_k)} r_k < 1$$

$$Mr_k < 2(\mu - Mr_k)$$

$$3Mr_k < 2\mu$$

$$r_k < \frac{2\mu}{3M}$$

## Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

8. Из сильной выпуклости следует, что  $\nabla^2 f(x_k) \succ 0$ , i.e.  $r_k < \frac{\mu}{M}$ .

$$\left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \leq (\mu - Mr_k)^{-1}$$

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)}$$

9. Потребуем, чтобы верхняя оценка на  $r_{k+1}$  была меньше  $r_k$ , учитывая, что  $0 < r_k < \frac{\mu}{M}$ :

$$\frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < r_k$$

$$\frac{M}{2(\mu - Mr_k)} r_k < 1$$

$$Mr_k < 2(\mu - Mr_k)$$

$$3Mr_k < 2\mu$$

$$r_k < \frac{2\mu}{3M}$$

10. Возвращаясь к оценке невязки на  $k + 1$ -ой итерации, получаем:

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < \frac{3Mr_k^2}{2\mu}$$

Таким образом, мы получили важный результат: метод Ньютона для функции с липшицевым положительно определённым гессианом сходится **квадратично** вблизи решения.

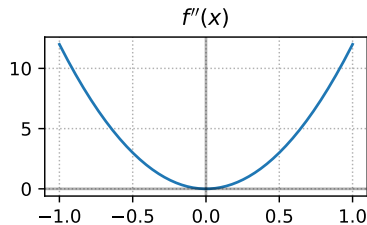
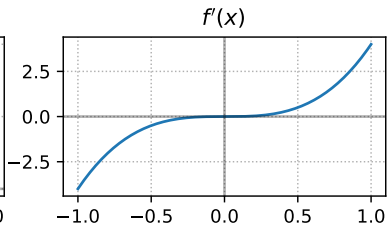
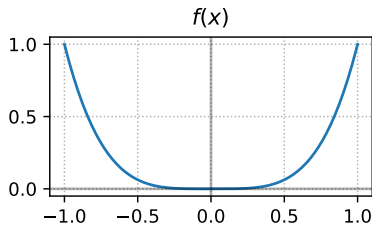


## Свойства метода Ньютона

## Отсутствие квадратичной сходимости, если некоторые предположения нарушаются

i

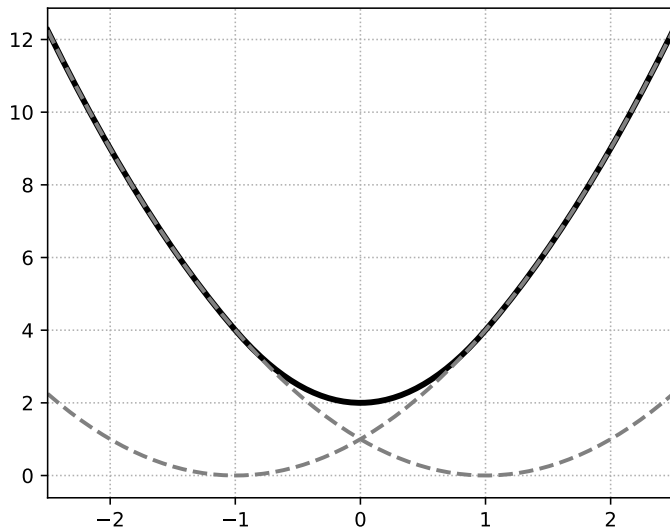
$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^3}{12x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k = \frac{2}{3}x_k,$$

сходится линейно к 0, единственному решению задачи, с линейной скоростью.

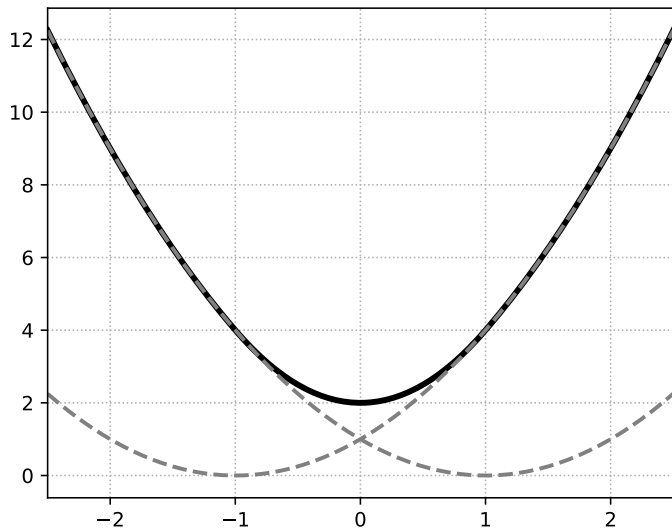
## Локальная сходимость метода Ньютона для гладкой сильно выпуклой $f(x)$



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 2, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

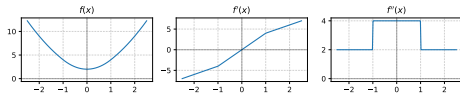
Эта функция сильно выпукла, но вторая производная не является липшицевой.

## Локальная сходимость метода Ньютона для гладкой сильно выпуклой $f(x)$

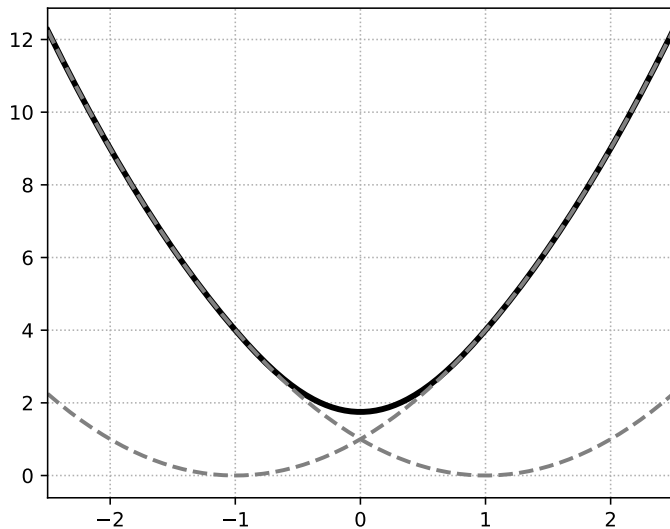


$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 2, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Эта функция сильно выпукла, но вторая производная не является липшицевой.

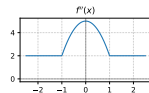
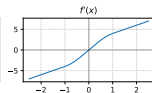
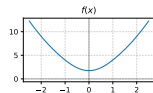


## Локальная сходимость метода Ньютона даже если $\nabla^2 f$ липшицев



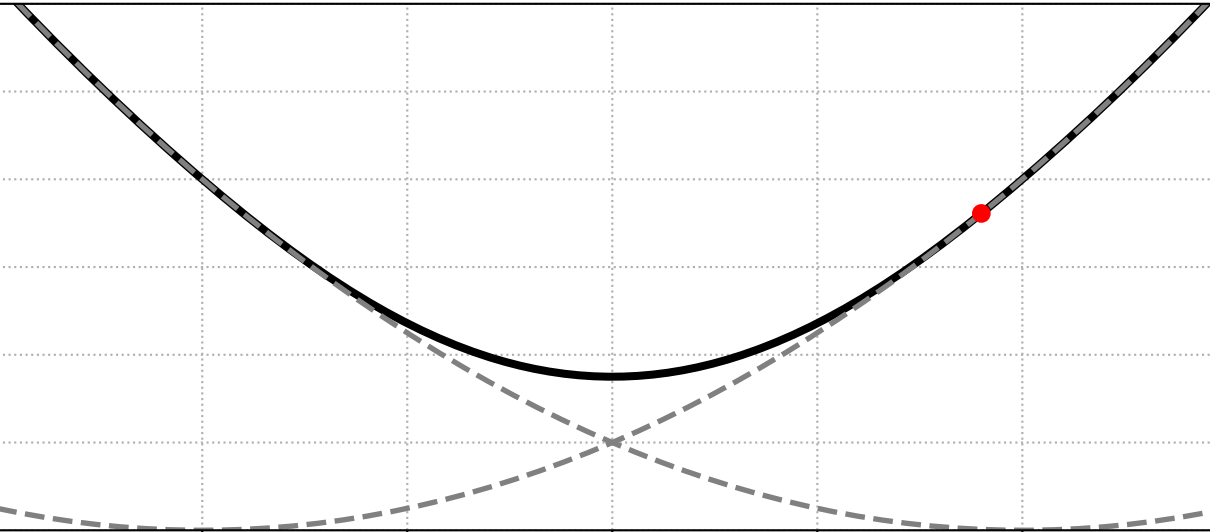
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{4}, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Эта функция сильно выпукла и вторая производная является липшицевой.



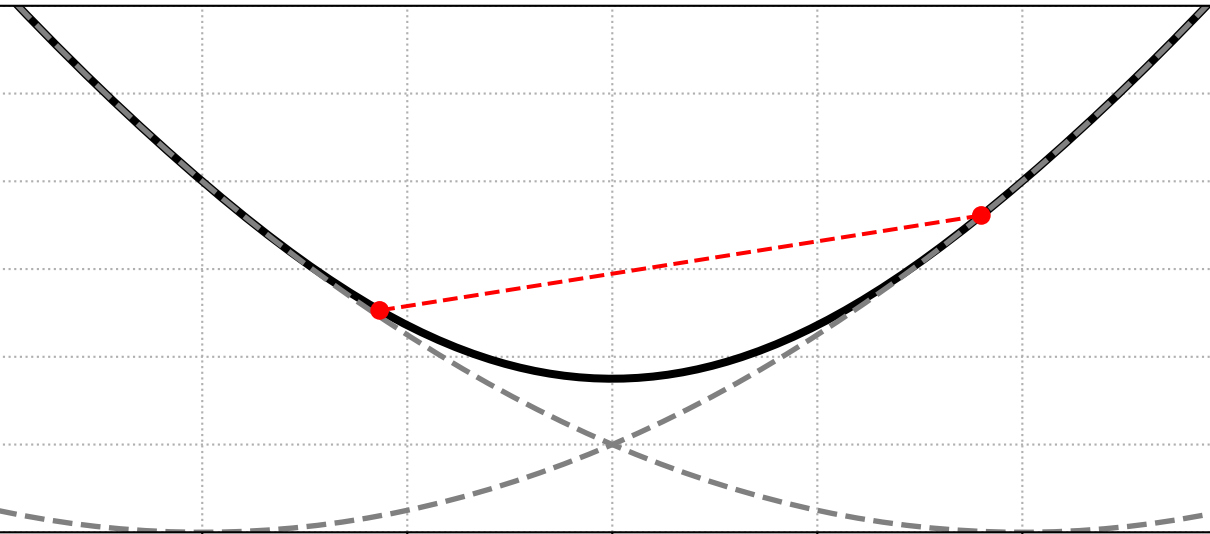
Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

Newton Method: Iteration 0



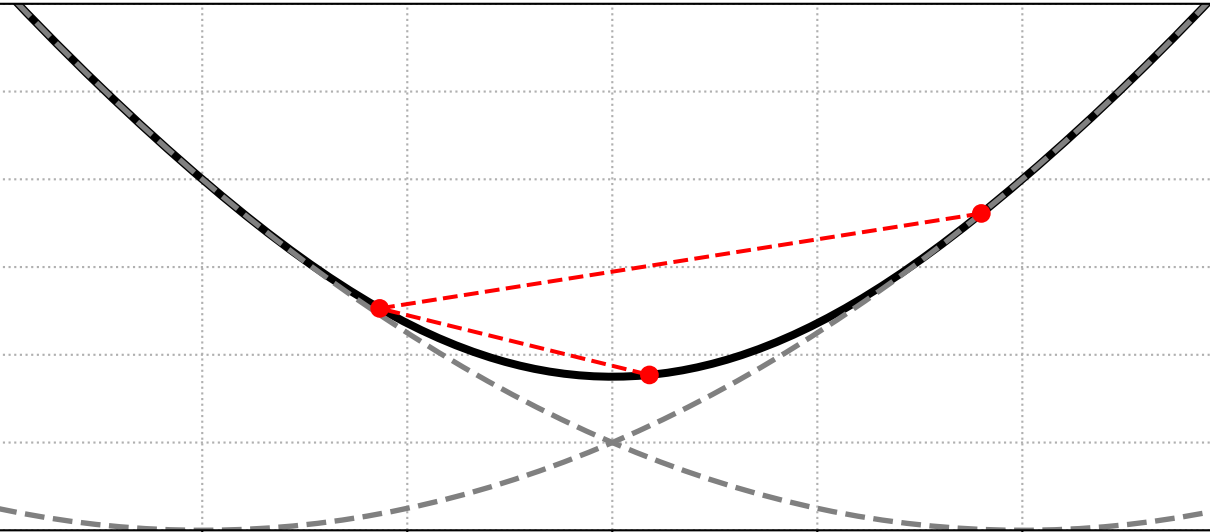
Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

Newton Method: Iteration 1



Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

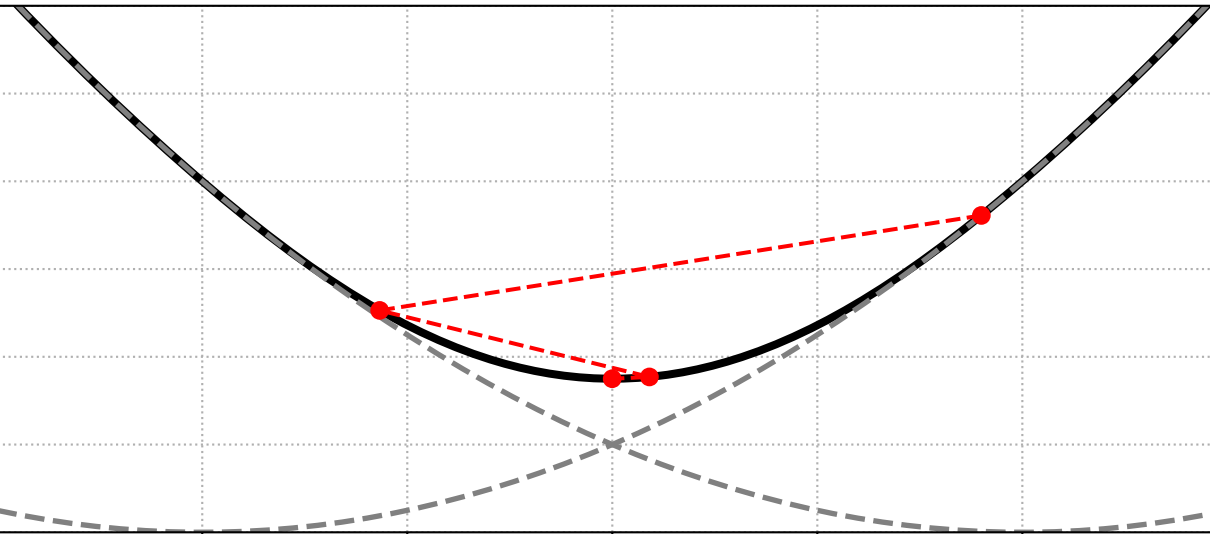
Newton Method: Iteration 2





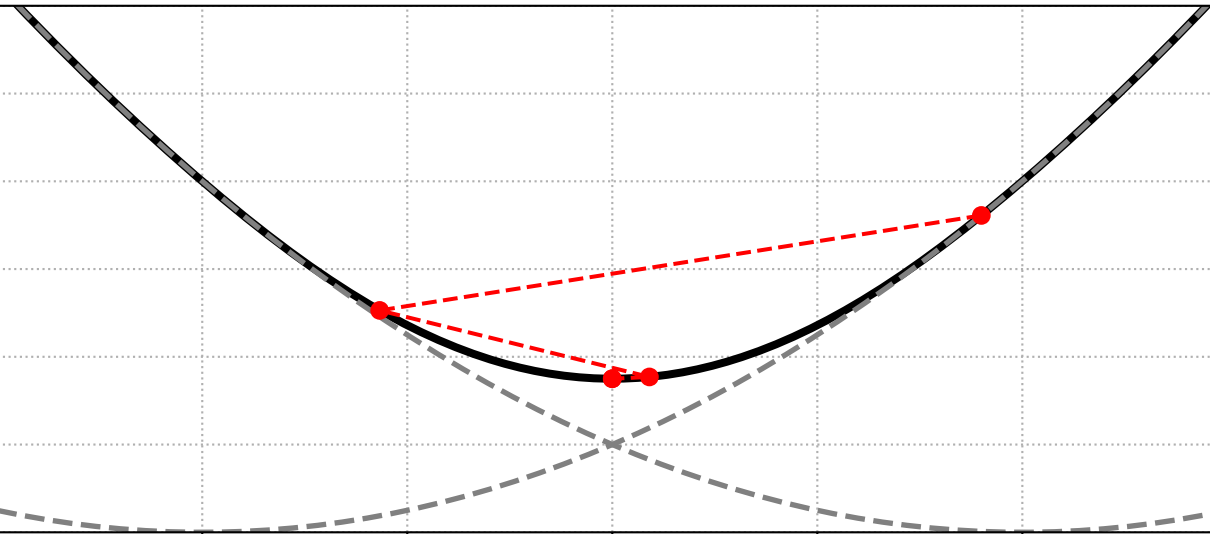
Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

Newton Method: Iteration 3



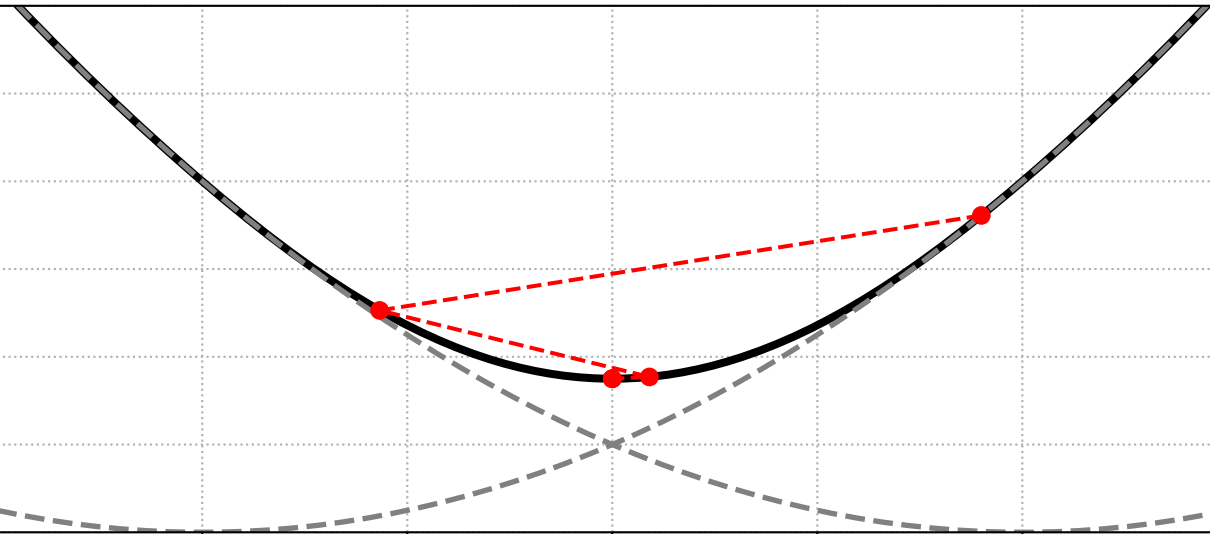
Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

Newton Method: Iteration 4



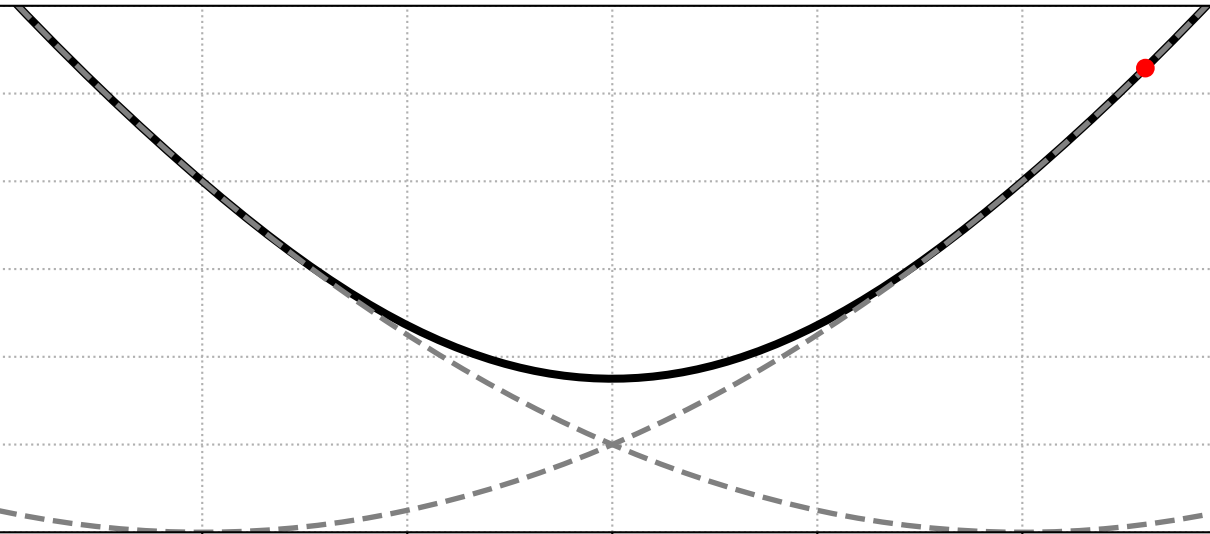
Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация

Newton Method: Iteration 5



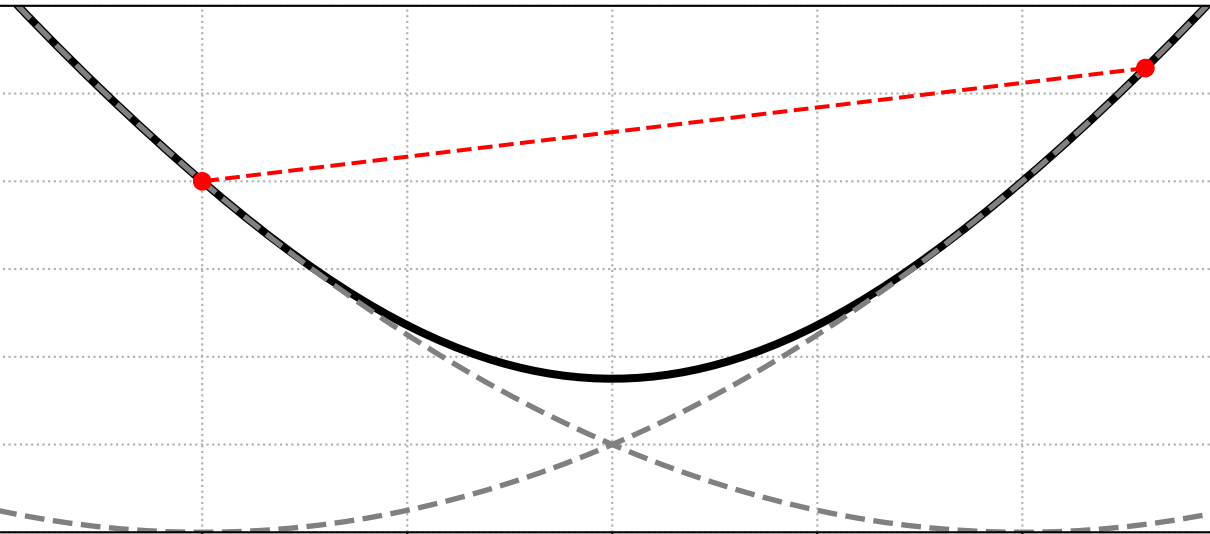
# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

Newton Method: Iteration 0



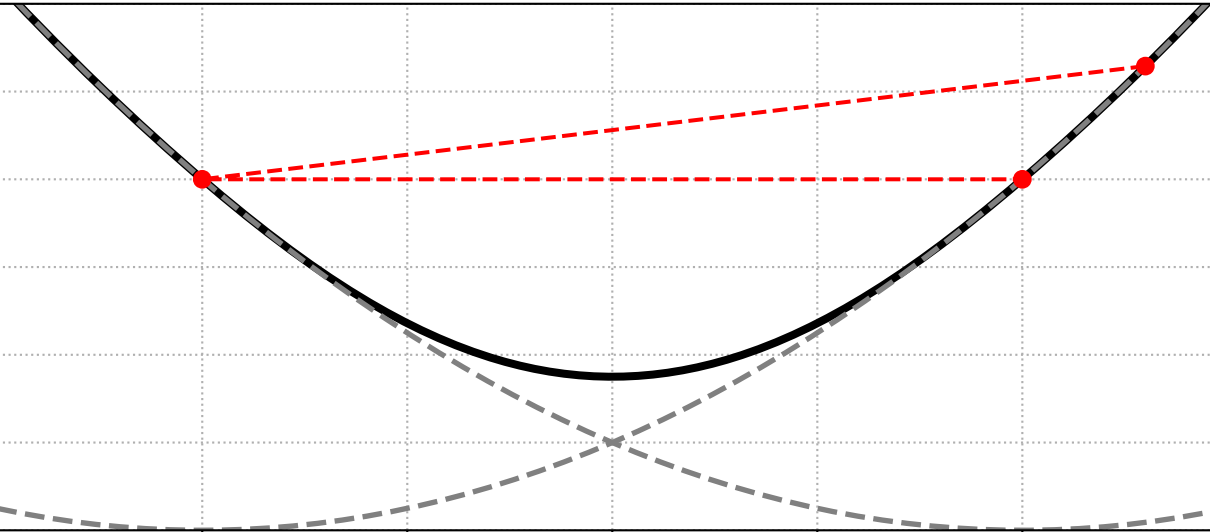
Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

Newton Method: Iteration 1



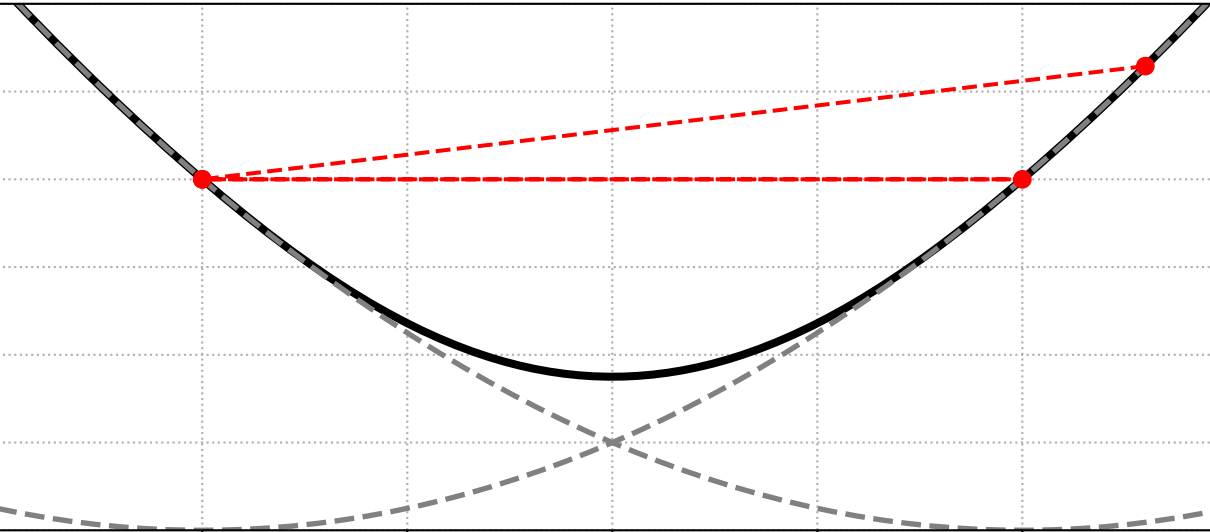
Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

Newton Method: Iteration 2



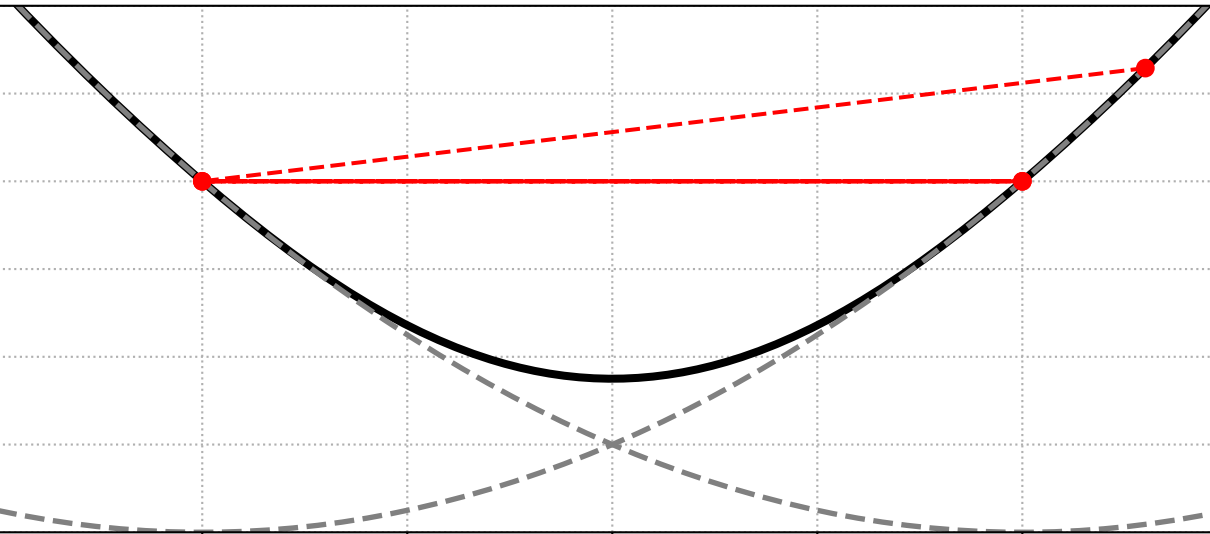
Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

Newton Method: Iteration 3



Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

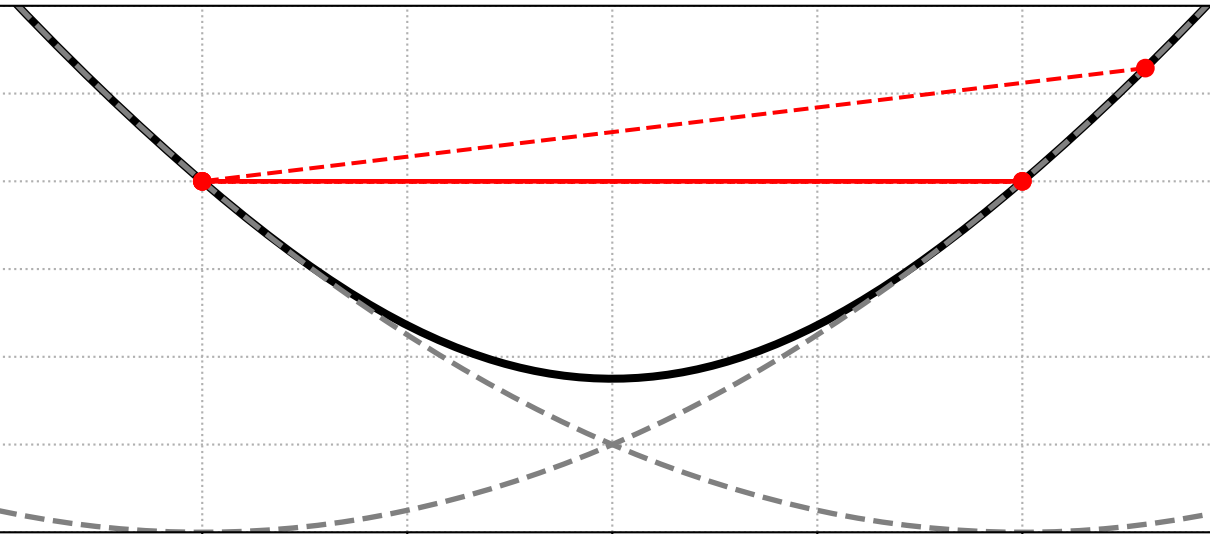
Newton Method: Iteration 4



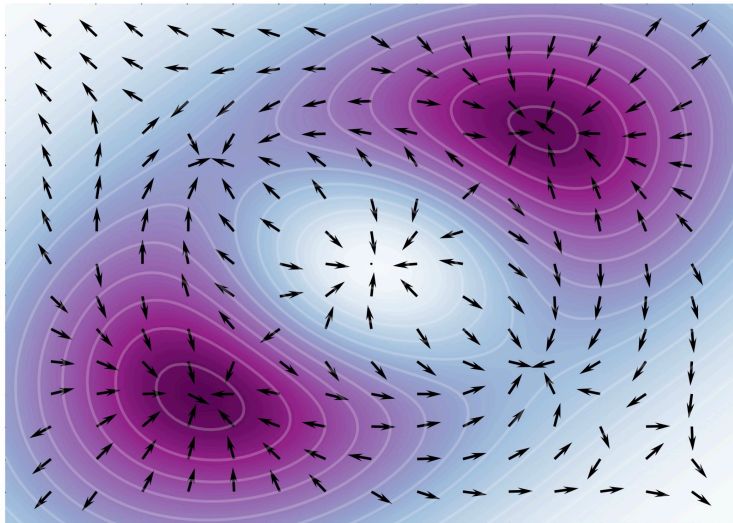


Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация

Newton Method: Iteration 5



# Newton



# Проблемы метода Ньютона

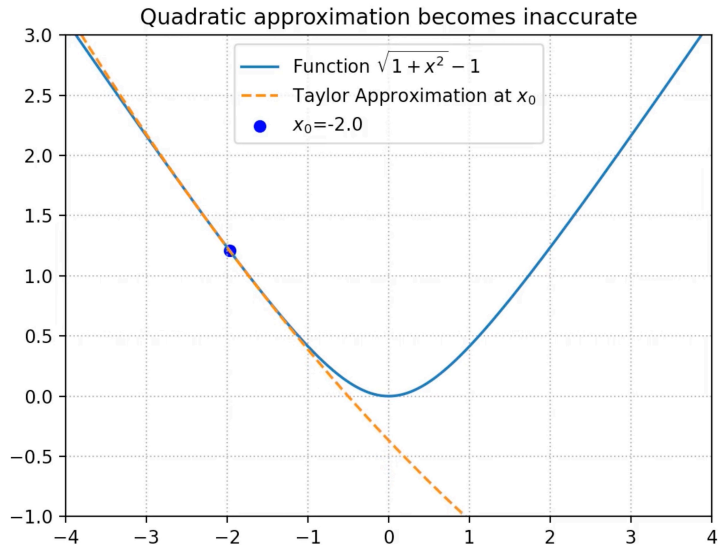


Рисунок 2: Animation

## Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=10$

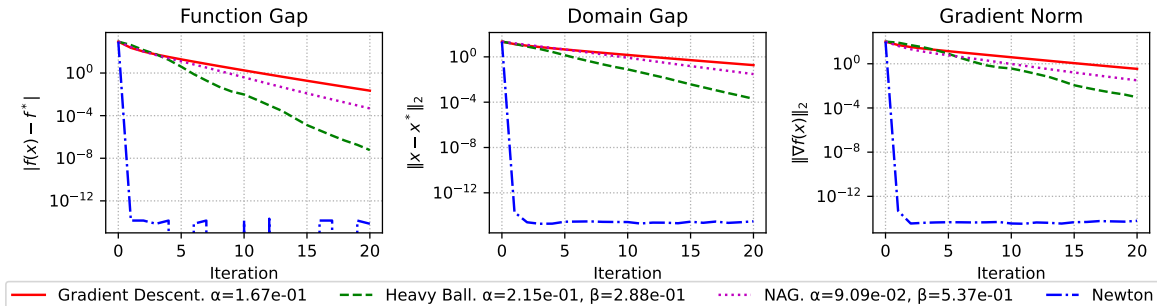


Рисунок 3: Так как задача - квадратичная, то метод Ньютона сходится за один шаг.

## Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=0$ ,  $L=10$

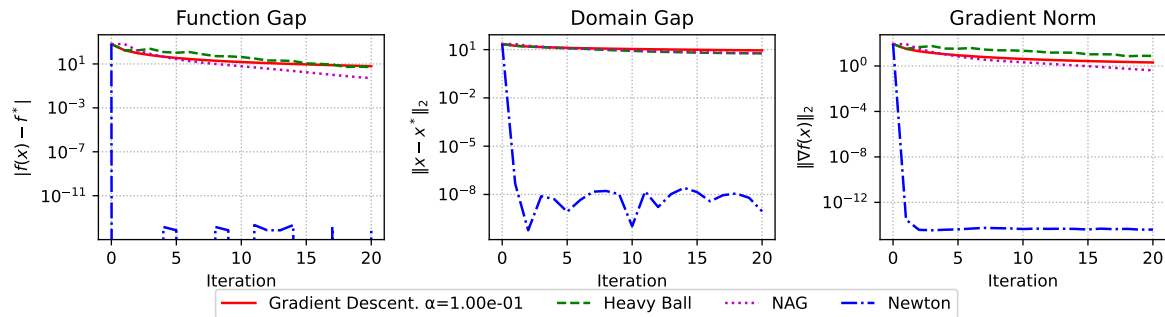


Рисунок 4: В этом случае метод Ньютона тоже крайне быстро сходится, однако, отметим, что это происходит благодаря тому, что минимальное собственное число гессиана не 0, а около  $10^{-8}$ . Если применять метод Ньютона в наивной форме с обращением матрицы, то получится ошибка, так как матрица вырождена. На практике все равно можно использовать метод, если для направления итерации решать линейную систему  $\nabla^2 f(x_k) d_k = -\nabla f(x_k)$  методом наименьших квадратов.

## Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$

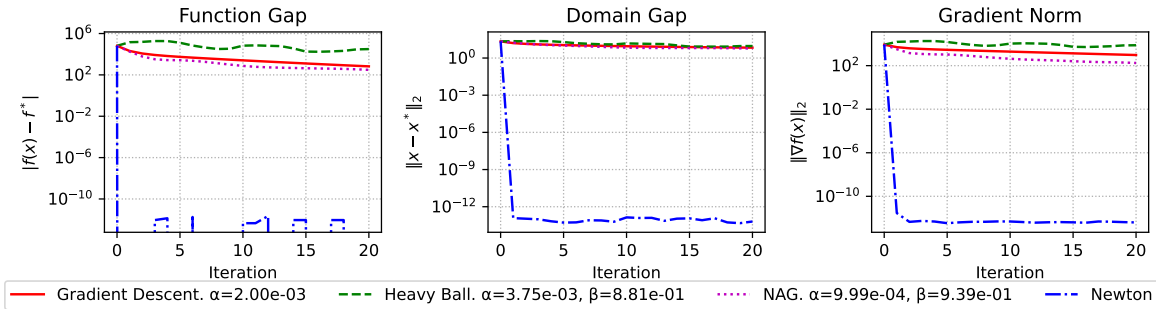


Рисунок 5: Здесь число обусловленности гессиана в 1000 раз больше, чем в предыдущем случае, и метод Ньютона сходится за 1 итерацию.

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .  $m=1000$ ,  $n=10$ .

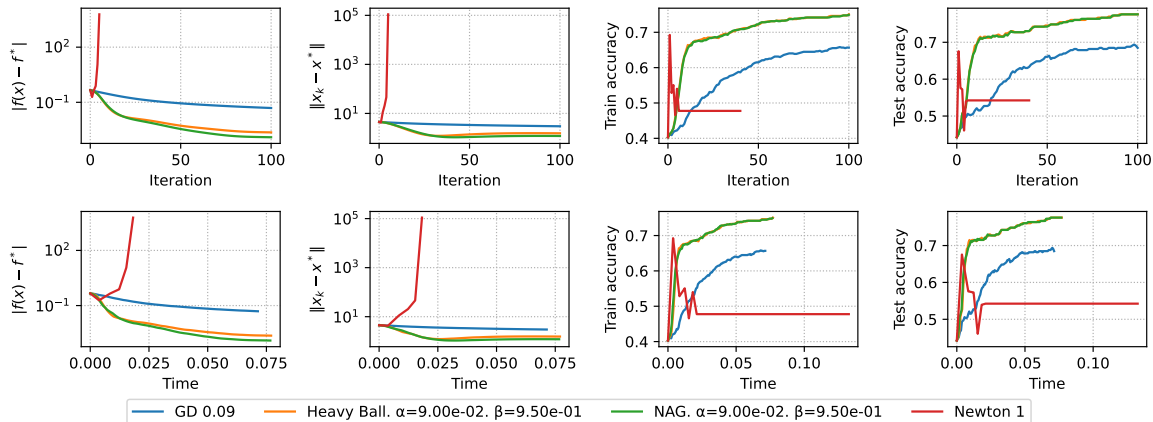


Рисунок 6: Наблюдается расходимость метода Ньютона. Сразу отметим, что в задаче нет регуляризации и гарантии сильной выпуклости. А также нет гарантий того, что мы инициализируем метод в окрестности решения.

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=10$ .

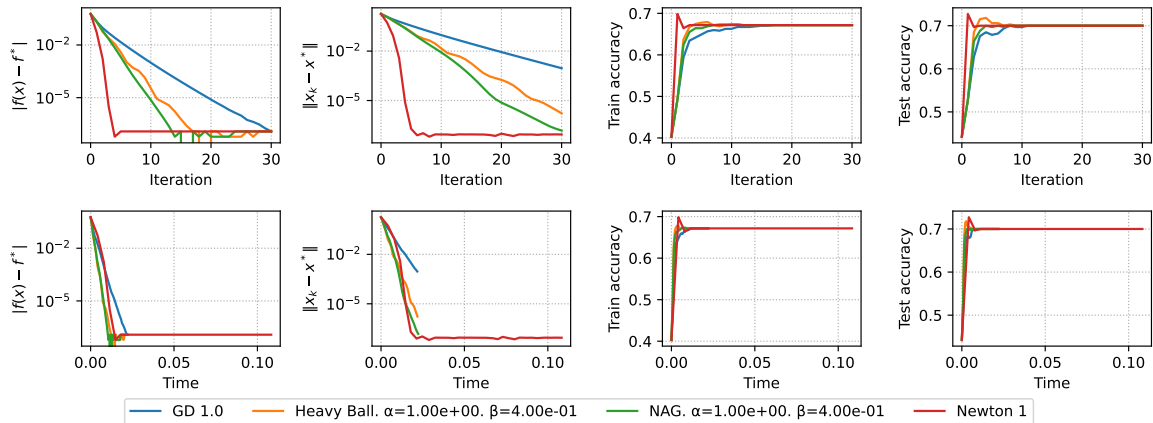


Рисунок 7: Добавление регуляризации гарантирует сильную выпуклость, наблюдается сходимость метода Ньютона.



# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=500$ .

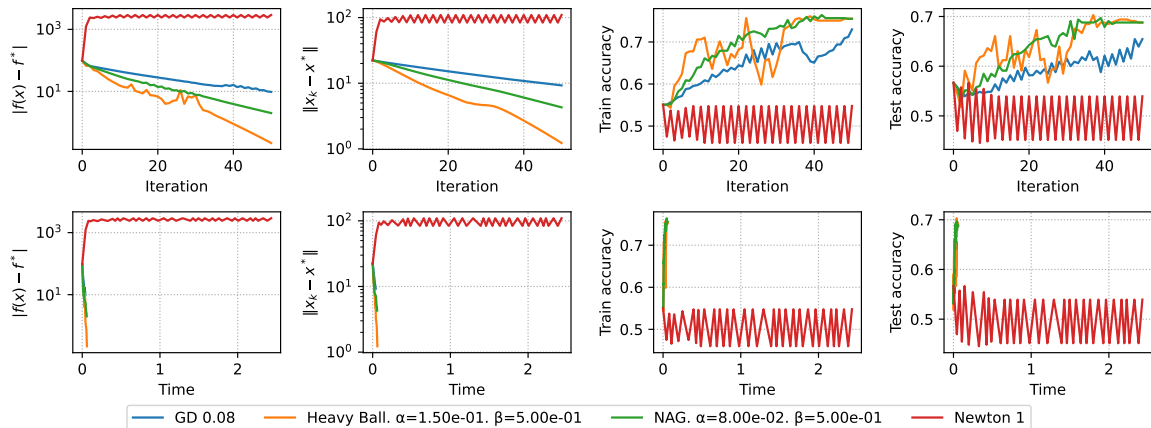


Рисунок 8: Увеличим размерность в 50 раз и наблюдаем расходимость метода Ньютона. Это можно связать с тем, что мы инициализируем метод в точке, далекой от решения

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=500$ .

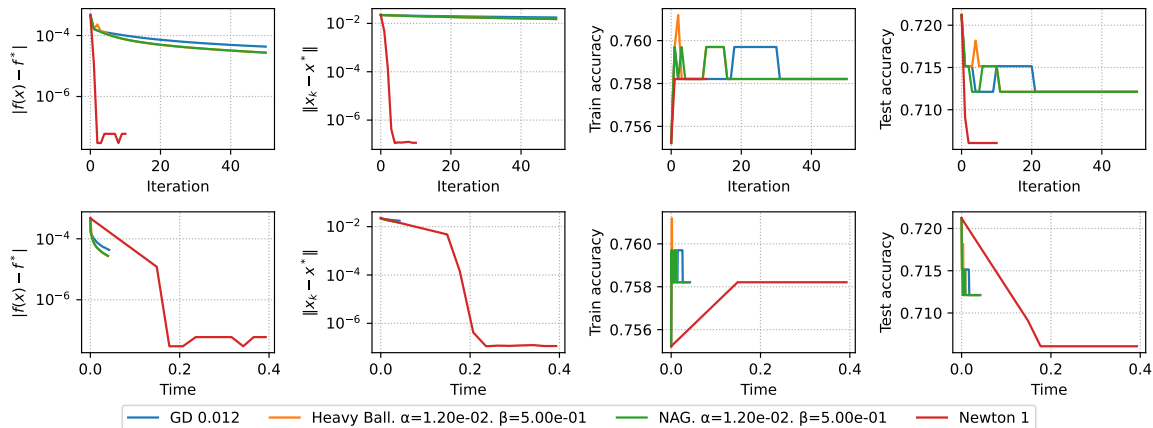


Рисунок 9: Не меняя задачу, изменим начальную точку и наблюдаем квадратичную сходимость метода Ньютона. Однако, обратите внимание на время работы. Уже при небольшой размерности, метод Ньютона работает значительно дольше, чем градиентные методы.

## Задача нахождения аналитического центра многогранника

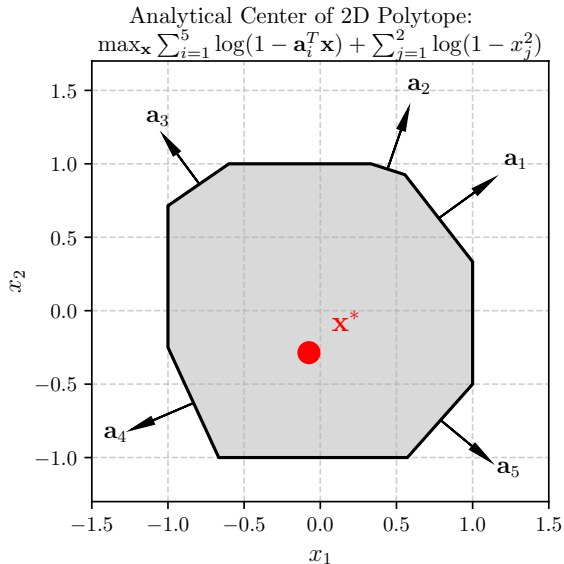
Найти точку  $x \in \mathbb{R}^n$ , которая максимизирует сумму логарифмов расстояний до границ политопа:

$$\max_x \sum_{i=1}^m \log(1 - a_i^T x) + \sum_{j=1}^n \log(1 - x_j^2)$$

или, эквивалентно, минимизирует:

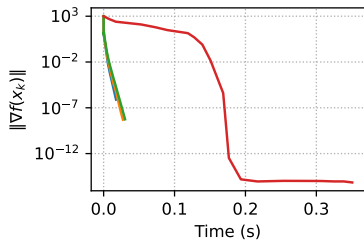
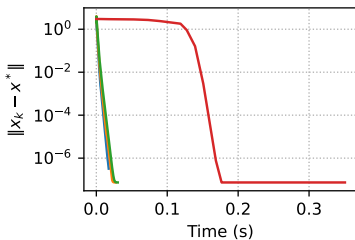
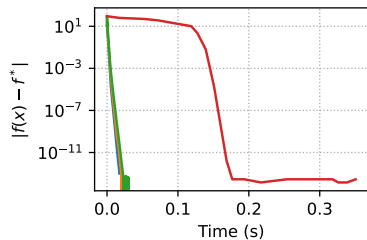
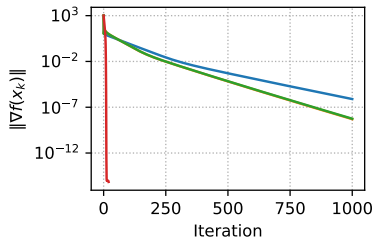
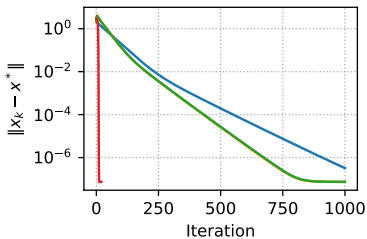
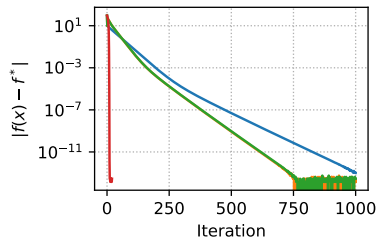
$$\min_x - \sum_{i=1}^m \log(1 - a_i^T x) - \sum_{j=1}^n \log(1 - x_j^2)$$

при ограничениях:  $-a_i^T x < 1$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , где  $a_i$  - строки матрицы  $A^T$  -  $|x_j| < 1$  для всех  $j = 1, \dots, n$ . Аналитический центр многогранника - это точка, которая максимально удалена от всех границ многогранника в смысле логарифмического барьера. Эта концепция широко используется в методах внутренней точки для выпуклой оптимизации.



# Задача нахождения аналитического центра многогранника

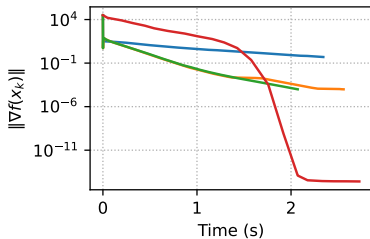
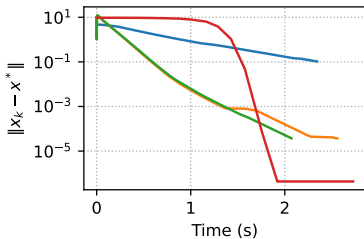
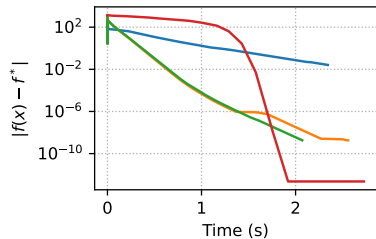
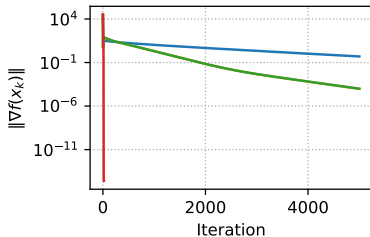
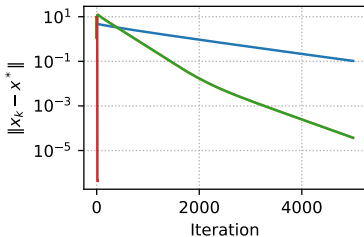
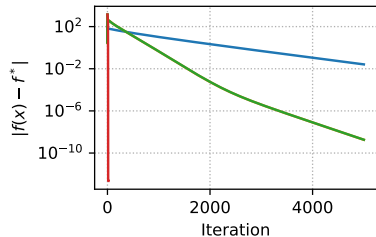
Analytical Center,  $m = 20$ ,  $n = 100$



GD,  $\alpha=0.005$    Heavy Ball,  $\alpha=0.005$ ,  $\beta=0.33$    NAG,  $\alpha=0.005$ ,  $\beta=0.33$    Newton, damping=1.0

# Задача нахождения аналитического центра многогранника

Analytical Center,  $m = 200$ ,  $n = 1000$



GD,  $\alpha=0.00015$    Heavy Ball,  $\alpha=0.00015$ ,  $\beta=0.79$    NAG,  $\alpha=0.00015$ ,  $\beta=0.79$    Newton, damping=1.0

## Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x) A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

## Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x) A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

## Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x) A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \\ Ay_{k+1} &= Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \end{aligned}$$



## Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x) A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \\ Ay_{k+1} &= Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \end{aligned}$$

Таким образом, правило обновления для  $x$  выглядит так:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

## Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x) A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \\ Ay_{k+1} &= Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k) \end{aligned}$$

Таким образом, правило обновления для  $x$  выглядит так:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Это показывает, что итерация метода Ньютона, не зависит от масштаба задачи. У градиентного спуска такого свойства нет!

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$

Минусы:

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность

Минусы:

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода

Минусы:

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти

# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций



# Summary

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций
- Гессиан может быть вырожденным в  $x^*$

# Summary

## Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

## Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций
- Гессиан может быть вырожденным в  $x^*$
- Гессиан может не быть положительно определенным  $\rightarrow$  направление  $-(f''(x))^{-1}f'(x)$  может не быть направлением спуска

## Quasi-Newton methods

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Let us assume that the distance is defined locally by some metric  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A (x - x_0)$$



## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Let us assume that the distance is defined locally by some metric  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A (x - x_0)$$

Let us also consider first order Taylor approximation of a function  $f(x)$  near the point  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Now we can explicitly pose a problem of finding  $s$ , as it was stated above.

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Let us assume that the distance is defined locally by some metric  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A (x - x_0)$$

Let us also consider first order Taylor approximation of a function  $f(x)$  near the point  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Now we can explicitly pose a problem of finding  $s$ , as it was stated above.

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Using equation (1) it can be written as:

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Let us assume that the distance is defined locally by some metric  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A (x - x_0)$$

Let us also consider first order Taylor approximation of a function  $f(x)$  near the point  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Now we can explicitly pose a problem of finding  $s$ , as it was stated above.

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Using equation (1) it can be written as:

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Using Lagrange multipliers method, we can easily conclude, that the answer is:

$$\delta x = -\frac{2\varepsilon^2}{\nabla f(x_0)^\top A^{-1} \nabla f(x_0)} A^{-1} \nabla f$$

## The idea of adaptive metrics

Given  $f(x)$  and a point  $x_0$ . Define  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  as the set of points with distance  $\varepsilon$  to  $x_0$ . Here we presume the existence of a distance function  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Then, we can define another *steepest descent* direction in terms of minimizer of function on a sphere:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Let us assume that the distance is defined locally by some metric  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A (x - x_0)$$

Let us also consider first order Taylor approximation of a function  $f(x)$  near the point  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x$$

Now we can explicitly pose a problem of finding  $s$ , as it was stated above.

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Using equation (1) it can be written as:

$$\begin{aligned} \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Using Lagrange multipliers method, we can easily conclude, that the answer is:

$$\delta x = -\frac{2\varepsilon^2}{\nabla f(x_0)^\top A^{-1} \nabla f(x_0)} A^{-1} \nabla f$$

Which means, that new direction of steepest descent is nothing else, but  $A^{-1} \nabla f(x_0)$ .

(1) . . . Indeed, if the space is isotropic and  $A = I$ , we immediately have gradient descent formula, while Newton method uses local Hessian as a metric matrix.

## Quasi-Newton methods intuition

For the classic task of unconditional optimization  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  the general scheme of iteration method is written as:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

## Quasi-Newton methods intuition

For the classic task of unconditional optimization  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  the general scheme of iteration method is written as:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

In the Newton method, the  $d_k$  direction (Newton's direction) is set by the linear system solution at each step:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

# Quasi-Newton methods intuition

For the classic task of unconditional optimization  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  the general scheme of iteration method is written as:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

In the Newton method, the  $d_k$  direction (Newton's direction) is set by the linear system solution at each step:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

i.e. at each iteration it is necessary to **compute** hessian and gradient and **solve** linear system.

## Quasi-Newton methods intuition

For the classic task of unconditional optimization  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  the general scheme of iteration method is written as:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

In the Newton method, the  $d_k$  direction (Newton's direction) is set by the linear system solution at each step:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

i.e. at each iteration it is necessary to **compute** hessian and gradient and **solve** linear system.

Note here that if we take a single matrix of  $B_k = I_n$  as  $B_k$  at each step, we will exactly get the gradient descent method.

The general scheme of quasi-Newton methods is based on the selection of the  $B_k$  matrix so that it tends in some sense at  $k \rightarrow \infty$  to the truth value of the Hessian  $\nabla^2 f(x_k)$ .



# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

**Basic Idea:** As  $B_k$  already contains information about the Hessian, use a suitable matrix update to form  $B_{k+1}$ .

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

**Basic Idea:** As  $B_k$  already contains information about the Hessian, use a suitable matrix update to form  $B_{k+1}$ .

**Reasonable Requirement for  $B_{k+1}$**  (motivated by the secant method):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = B_{k+1}d_k \\ \Delta y_k &= B_{k+1}\Delta x_k\end{aligned}$$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

**Basic Idea:** As  $B_k$  already contains information about the Hessian, use a suitable matrix update to form  $B_{k+1}$ .

**Reasonable Requirement for  $B_{k+1}$**  (motivated by the secant method):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = B_{k+1}d_k \\ \Delta y_k &= B_{k+1}\Delta x_k\end{aligned}$$

In addition to the secant equation, we want:

- $B_{k+1}$  to be symmetric



# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

**Basic Idea:** As  $B_k$  already contains information about the Hessian, use a suitable matrix update to form  $B_{k+1}$ .

**Reasonable Requirement for  $B_{k+1}$**  (motivated by the secant method):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = B_{k+1}d_k \\ \Delta y_k &= B_{k+1}\Delta x_k\end{aligned}$$

In addition to the secant equation, we want:

- $B_{k+1}$  to be symmetric
- $B_{k+1}$  to be “close” to  $B_k$

# Quasi-Newton Method Template

Let  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . For  $k = 1, 2, 3, \dots$ , repeat:

1. Solve  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Update  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Compute  $B_{k+1}$  from  $B_k$

Different quasi-Newton methods implement Step 3 differently. As we will see, commonly we can compute  $(B_{k+1})^{-1}$  from  $(B_k)^{-1}$ .

**Basic Idea:** As  $B_k$  already contains information about the Hessian, use a suitable matrix update to form  $B_{k+1}$ .

**Reasonable Requirement for  $B_{k+1}$**  (motivated by the secant method):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) = B_{k+1}d_k \\ \Delta y_k &= B_{k+1}\Delta x_k\end{aligned}$$

In addition to the secant equation, we want:

- $B_{k+1}$  to be symmetric
- $B_{k+1}$  to be “close” to  $B_k$
- $B_k \succ 0 \Rightarrow B_{k+1} \succ 0$

# Symmetric Rank-One Update

Let's try an update of the form:

$$B_{k+1} = B_k + \alpha u u^T$$

# Symmetric Rank-One Update

Let's try an update of the form:

$$B_{k+1} = B_k + a u u^T$$

The secant equation  $B_{k+1} d_k = \Delta y_k$  yields:

$$(a u^T d_k) u = \Delta y_k - B_k d_k$$

## Symmetric Rank-One Update

Let's try an update of the form:

$$B_{k+1} = B_k + a u u^T$$

The secant equation  $B_{k+1} d_k = \Delta y_k$  yields:

$$(a u^T d_k) u = \Delta y_k - B_k d_k$$

This only holds if  $u$  is a multiple of  $\Delta y_k - B_k d_k$ . Putting  $u = \Delta y_k - B_k d_k$ , we solve the above,

$$a = \frac{1}{(\Delta y_k - B_k d_k)^T d_k},$$

## Symmetric Rank-One Update

Let's try an update of the form:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T$$

The secant equation  $B_{k+1}d_k = \Delta y_k$  yields:

$$(au^T d_k)u = \Delta y_k - B_k d_k$$

This only holds if  $u$  is a multiple of  $\Delta y_k - B_k d_k$ . Putting  $u = \Delta y_k - B_k d_k$ , we solve the above,

$$a = \frac{1}{(\Delta y_k - B_k d_k)^T d_k},$$

which leads to

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(\Delta y_k - B_k d_k)(\Delta y_k - B_k d_k)^T}{(\Delta y_k - B_k d_k)^T d_k}$$

called the symmetric rank-one (SR1) update or Broyden method.

## Symmetric Rank-One Update with inverse

How can we solve

$$B_{k+1}d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}),$$

in order to take the next step? In addition to propagating  $B_k$  to  $B_{k+1}$ , let's propagate inverses, i.e.,  $C_k = B_k^{-1}$  to  $C_{k+1} = (B_{k+1})^{-1}$ .

### Sherman-Morrison Formula:

The Sherman-Morrison formula states:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^T A^{-1}}{1 + v^T A^{-1}u}$$

Thus, for the SR1 update, the inverse is also easily updated:

$$C_{k+1} = C_k + \frac{(d_k - C_k \Delta y_k)(d_k - C_k \Delta y_k)^T}{(d_k - C_k \Delta y_k)^T \Delta y_k}$$

In general, SR1 is simple and cheap, but it has a key shortcoming: it does not preserve positive definiteness.

## Davidon-Fletcher-Powell Update

We could have pursued the same idea to update the inverse  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + auu^T + bvv^T.$$



## Davidon-Fletcher-Powell Update

We could have pursued the same idea to update the inverse  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + auu^T + bvv^T.$$

Multiplying by  $\Delta y_k$ , using the secant equation  $d_k = C_k \Delta y_k$ , and solving for  $a, b$ , yields:

$$C_{k+1} = C_k - \frac{C_k \Delta y_k \Delta y_k^T C_k}{\Delta y_k^T C_k \Delta y_k} + \frac{d_k d_k^T}{\Delta y_k^T d_k}$$

## Woodbury Formula Application

Woodbury then shows:

$$B_{k+1} = \left( I - \frac{\Delta y_k d_k^T}{\Delta y_k^T d_k} \right) B_k \left( I - \frac{d_k \Delta y_k^T}{\Delta y_k^T d_k} \right) + \frac{\Delta y_k \Delta y_k^T}{\Delta y_k^T d_k}$$

This is the Davidon-Fletcher-Powell (DFP) update. Also cheap:  $O(n^2)$ , preserves positive definiteness. Not as popular as BFGS.

# Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno update

Let's now try a rank-two update:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T + bvv^T.$$

# Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno update

Let's now try a rank-two update:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T + bvv^T.$$

The secant equation  $\Delta y_k = B_{k+1}d_k$  yields:

$$\Delta y_k - B_k d_k = (au^T d_k)u + (bv^T d_k)v$$

# Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno update

Let's now try a rank-two update:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T + bvv^T.$$

The secant equation  $\Delta y_k = B_{k+1}d_k$  yields:

$$\Delta y_k - B_k d_k = (au^T d_k)u + (bv^T d_k)v$$

Putting  $u = \Delta y_k$ ,  $v = B_k d_k$ , and solving for a, b we get:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k d_k d_k^T B_k}{d_k^T B_k d_k} + \frac{\Delta y_k \Delta y_k^T}{d_k^T \Delta y_k}$$

called the Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) update.

# Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno update with inverse

## Woodbury Formula

The Woodbury formula, a generalization of the Sherman-Morrison formula, is given by:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

# Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno update with inverse

## Woodbury Formula

The Woodbury formula, a generalization of the Sherman-Morrison formula, is given by:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

Applied to our case, we get a rank-two update on the inverse  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + \frac{(d_k - C_k \Delta y_k) d_k^T}{\Delta y_k^T d_k} + \frac{d_k (d_k - C_k \Delta y_k)^T}{\Delta y_k^T d_k} - \frac{(d_k - C_k \Delta y_k)^T \Delta y_k}{(\Delta y_k^T d_k)^2} d_k d_k^T$$

$$C_{k+1} = \left( I - \frac{d_k \Delta y_k^T}{\Delta y_k^T d_k} \right) C_k \left( I - \frac{\Delta y_k d_k^T}{\Delta y_k^T d_k} \right) + \frac{d_k d_k^T}{\Delta y_k^T d_k}$$

This formulation ensures that the BFGS update, while comprehensive, remains computationally efficient, requiring  $O(n^2)$  operations. Importantly, BFGS update preserves positive definiteness. Recall this means  $B_k \succ 0 \Rightarrow B_{k+1} \succ 0$ . Equivalently,  $C_k \succ 0 \Rightarrow C_{k+1} \succ 0$

# Code

- Open In Colab

# Code

- Open In Colab
- Comparison of quasi Newton methods



# Code

- Open In Colab
- Comparison of quasi Newton methods
- Some practical notes about Newton method