



# Градиентные методы в условных задачах оптимизации - метод проекции градиента. Метод Франк - Вульфа.

Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ

## Методы оптимизации в условных задачах

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества  $S$ .

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества  $S$ .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества  $S$ .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества  $S$ .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

Градиентный спуск - хороший способ решать безусловные задачи

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad (\text{GD})$$

Можно ли его скорректировать для решения условных задач?

# Условная оптимизация

## Безусловная оптимизация

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

- Любая точка  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  является допустимой и может быть решением.

## Условная оптимизация

$$\min_{x \in S} f(x)$$

- Не все точки  $x \in \mathbb{R}^n$  являются допустимыми и могут быть решением.
- Решение должно быть внутри множества  $S$ .
- Пример:

$$\frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min_{\|x\|_2^2 \leq 1}$$

Градиентный спуск - хороший способ решать безусловные задачи

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad (\text{GD})$$

Можно ли его скорректировать для решения условных задач?

**Да.** Нужно использовать проекции, чтобы обеспечить допустимость на каждой итерации.

## Идея метода проекции градиента



Рис. 1: Предположим, что мы начинаем с точки  $x_k$ .

## Идея метода проекции градиента

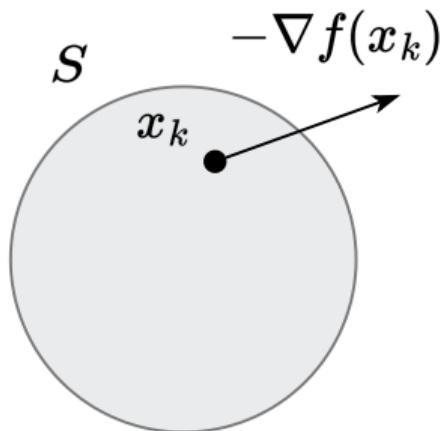


Рис. 2: И идем в направлении  $-\nabla f(x_k)$ .

## Идея метода проекции градиента

$$y_k = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

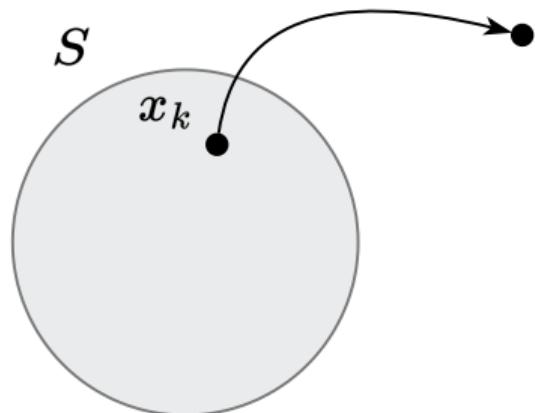


Рис. 3: Иногда мы можем оказаться вне допустимого множества.

## Идея метода проекции градиента



Рис. 4: Решим эту небольшую проблемку с помощью проекции!

## Идея метода проекции градиента

$$x_{k+1} = \text{proj}_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= \text{proj}_S(y_k) \end{aligned}$$

$$y_k = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

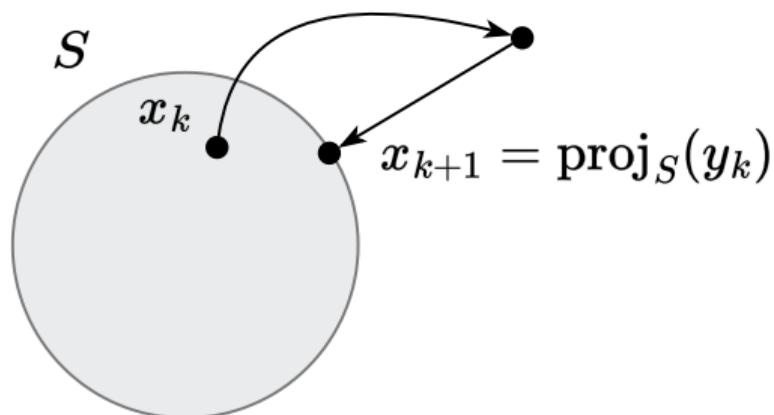


Рис. 5: Иллюстрация алгоритма проекции градиента

## Пример: White-box Adversarial Attacks



‘Duck’



$\times 0.07$



‘Horse’

- Математически, нейронная сеть - это функция  $f(w; x)$



‘How are you?’



$\times 0.01$



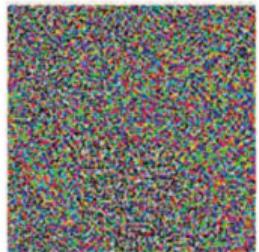
‘Open the door’

Рис. 6: Источник

## Пример: White-box Adversarial Attacks



‘Duck’



$\times 0.07$



‘Horse’



‘How are you?’



$\times 0.01$



‘Open the door’

- Математически, нейронная сеть - это функция  $f(w; x)$
- Обычно, вход  $x$  задается, а оптимизируются веса сети  $w$

Рис. 6: Источник

## Пример: White-box Adversarial Attacks



- Математически, нейронная сеть - это функция  $f(w; x)$
- Обычно, вход  $x$  задается, а оптимизируются веса сети  $w$
- Можно наоборот: зафиксировать веса  $w$  и оптимизировать вход  $x$  враждебным образом:

$$\min_{\delta} \text{size}(\delta) \quad \text{s.t.} \quad \text{pred}[f(w; x + \delta)] \neq y$$

или

$$\max_{\delta} l(w; x + \delta, y) \quad \text{s.t.} \quad \text{size}(\delta) \leq \epsilon, 0 \leq x + \delta \leq 1$$

Рис. 6: Источник

## Проекция

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - это точка  $\text{proj}_S(y) \in S$ :

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \operatorname{argmin}_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - это точка  $\text{proj}_S(y) \in S$ :

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \operatorname{argmin}_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое множество, то проекция на множество  $S$  существует для любой точки.

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - это точка  $\text{proj}_S(y) \in S$ :

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \operatorname{argmin}_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое множество, то проекция на множество  $S$  существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество  $S$  единственна для любой точки.

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - это точка  $\text{proj}_S(y) \in S$ :

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \operatorname{argmin}_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое множество, то проекция на множество  $S$  существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество  $S$  единственна для любой точки.
- Если множество открыто, и точка вне этого множества, то ее проекция на это множество может не существовать.

## Проекция

Расстояние  $d$  от точки  $y \in \mathbb{R}^n$  до замкнутого множества  $S \subset \mathbb{R}^n$ :

$$d(y, S, \|\cdot\|) = \inf\{\|x - y\| \mid x \in S\}$$

Мы будем фокусироваться на евклидовой проекции (возможны другие варианты) точки  $y \in \mathbb{R}^n$  на множество  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - это точка  $\text{proj}_S(y) \in S$ :

$$\text{proj}_S(y) = \Pi_S(y) = \operatorname{argmin}_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2$$

- **Достаточное условия существования проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое множество, то проекция на множество  $S$  существует для любой точки.
- **Достаточное условия единственности проекции.** Если  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое выпуклое множество, то проекция на множество  $S$  единственна для любой точки.
- Если множество открыто, и точка вне этого множества, то ее проекция на это множество может не существовать.
- Если точка лежит внутри множества, то ее проекция - это сама точка.

## Оператор проекции является нерастягивающим

- Функция  $f$  называется нерастягивающей, если она  $L$ -Липшицева с  $L \leq 1$ <sup>1</sup>. То есть, для любых двух точек  $x, y \in \text{dom } f$ ,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ where } L \leq 1.$$

Это означает, что расстояние между образами точек не больше, чем расстояние между исходными точками.

---

<sup>1</sup>Нерастягивающая становится сжимающей, если  $L < 1$ .

## Оператор проекции является нерастягивающим

- Функция  $f$  называется нерастягивающей, если она  $L$ -Липшицева с  $L \leq 1$ <sup>1</sup>. То есть, для любых двух точек  $x, y \in \text{dom } f$ ,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ where } L \leq 1.$$

Это означает, что расстояние между образами точек не больше, чем расстояние между исходными точками.

- Оператор проекции является нерастягивающим:

$$\|\text{proj}(x) - \text{proj}(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2.$$

---

<sup>1</sup>Нерастягивающая становится сжимающей, если  $L < 1$ .

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y-x_0}{\|y-x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$
$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R (y - x_0)) =$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R(y - x_0)) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left( (y - x_0)^T (x - x_0) - R \|y - x_0\| \right) =$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R(y - x_0)) = \\ & \frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left( (y - x_0)^T (x - x_0) - R \|y - x_0\| \right) = \\ & (R - \|y - x_0\|) \left( \frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right) \end{aligned}$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R(y - x_0)) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left( (y - x_0)^T (x - x_0) - R \|y - x_0\| \right) =$$

$$(R - \|y - x_0\|) \left( \frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right)$$

Первый множитель отрицателен для выбора точки  $y$ . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:

$$(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$$

Первый множитель отрицателен для выбора точки  $y$ . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$(y - x_0)^T(x - x_0) \leq \|y - x_0\|\|x - x_0\|$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R(y - x_0)) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left( (y - x_0)^T (x - x_0) - R\|y - x_0\| \right) =$$

$$(R - \|y - x_0\|) \left( \frac{(y - x_0)^T(x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right)$$

## Пример: проекция на шар

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq R\}$ ,  $y \notin S$

Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = x_0 + R \cdot \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|}$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  
 $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\left( x_0 - y + R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( x - x_0 - R \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right) =$$

$$\left( \frac{(y - x_0)(R - \|y - x_0\|)}{\|y - x_0\|} \right)^T \left( \frac{(x - x_0)\|y - x_0\| - R(y - x_0)}{\|y - x_0\|} \right) =$$

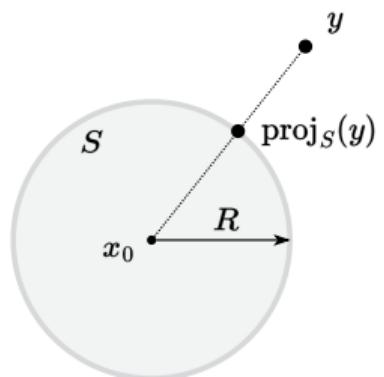
$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|^2} (y - x_0)^T ((x - x_0) \|y - x_0\| - R(y - x_0)) =$$

$$\frac{R - \|y - x_0\|}{\|y - x_0\|} \left( (y - x_0)^T (x - x_0) - R \|y - x_0\| \right) =$$

$$(R - \|y - x_0\|) \left( \frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \right)$$

Первый множитель отрицателен для выбора точки  $y$ . Второй множитель тоже отрицателен, что следует из неравенства КБШ:

$$\frac{(y - x_0)^T (x - x_0)}{\|y - x_0\|} - R \leq \frac{\|y - x_0\| \|x - x_0\|}{\|y - x_0\|} - R =$$



## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:

$$c^T x = b$$

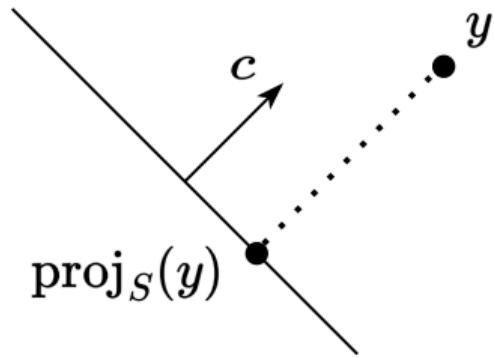


Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

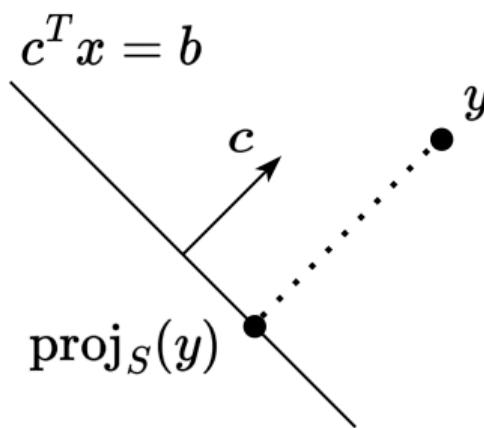
Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:

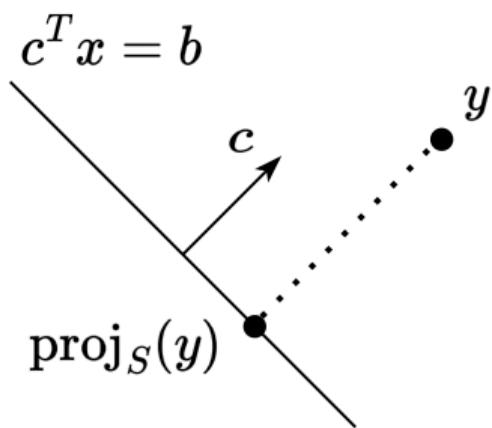


$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

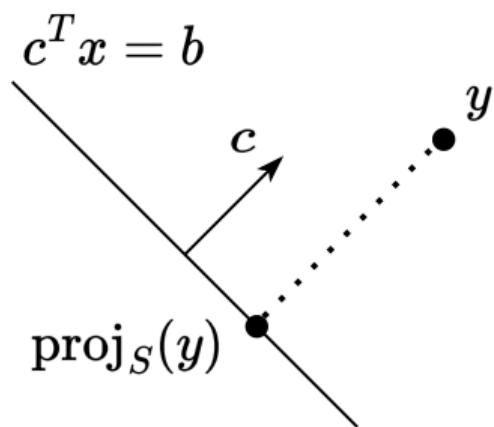
Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) =$$

Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned}(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha c^T(x - y - \alpha c) &= \end{aligned}$$

Рис. 8: Гиперплоскость

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



Рис. 8: Гиперплоскость

$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned}(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha c^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) &= 0\end{aligned}$$

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



Рис. 8: Гиперплоскость

$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned}(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha c^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) &= \\ ab - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c &= \end{aligned}$$

## Пример: проекция на гиперплоскость

Найти  $\pi_S(y) = \pi$ , если  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = b\}$ ,  $y \notin S$ . Построим гипотезу из рисунка:  $\pi = y + \alpha c$ . Коэффициент  $\alpha$  выбирается так, чтобы  $\pi \in S$ :  $c^T \pi = b$ , поэтому:



Рис. 8: Гиперплоскость

$$\begin{aligned}c^T(y + \alpha c) &= b \\c^T y + \alpha c^T c &= b \\c^T y &= b - \alpha c^T c\end{aligned}$$

Проверим неравенство для выпуклого замкнутого множества:  $(\pi - y)^T(x - \pi) \geq 0$

$$\begin{aligned}(y + \alpha c - y)^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha c^T(x - y - \alpha c) &= \\ \alpha(c^T x) - \alpha(c^T y) - \alpha^2(c^T c) &= \\ \alpha b - \alpha(b - \alpha c^T c) - \alpha^2 c^T c &= \\ \alpha b - \alpha b + \alpha^2 c^T c - \alpha^2 c^T c &= 0 \geq 0\end{aligned}$$

## Метод проекции градиента (PGD)

## Идея

$$x_{k+1} = \text{proj}_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} y_k &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= \text{proj}_S(y_k) \end{aligned}$$

$$y_k = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

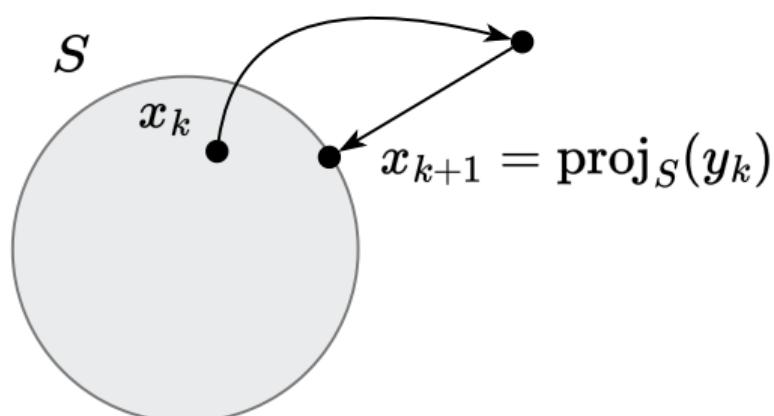


Рис. 9: Иллюстрация алгоритма метода проекции градиента

# Скорость сходимости для гладких выпуклых функций

## ■ Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

# Скорость сходимости для гладких сильно выпуклых функций

## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mu$ -сильно выпуклой. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\alpha \leq \frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после  $k > 0$ :

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

# Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента:  $\min_{x \in S} f(x) \quad x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

## Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента:  $\min_{x \in S} f(x) \quad x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Обратите внимание, что характер сходимости метода по итерациям в точности совпадает с безусловным случаем (градиентным спуском).

# Результаты сходимости метода проекции градиента для гладких функций

Метод проекции градиента:  $\min_{x \in S} f(x) \quad x_{k+1} = \Pi_S(x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$$
$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Обратите внимание, что характер сходимости метода по итерациям в точности совпадает с безусловным случаем (градиентным спуском).
- Однако, стоимость итерации может быть **сильно** больше. Иногда, стоимость одной итерации может по порядку совпадать со стоимостью решения всей задачи.

## Метод Франк-Вульфа



Рис. 10: Маргарет Штраус Франк (1927-2024)



Рис. 11: Филипп Вульф (1927-2016)

# Идея



Рис. 12: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

# Идея



Рис. 13: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

# Идея



Рис. 14: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

## Идея

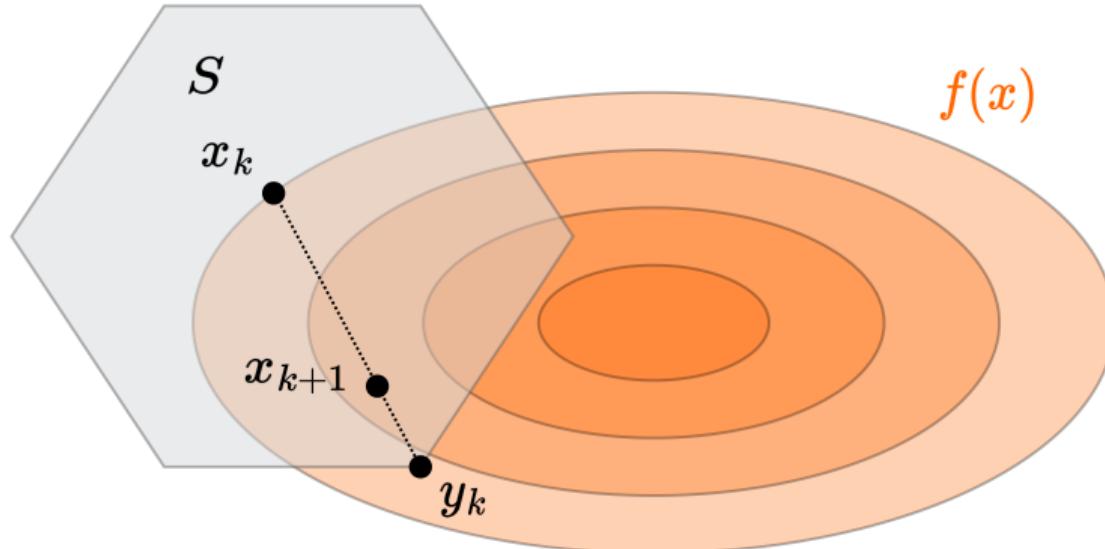


Рис. 15: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

## Идея



Рис. 16: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

## Идея



Рис. 17: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

## Идея



Рис. 18: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

# Идея

$$y_k = \arg \min_{x \in S} f_{x_k}^I(x) = \arg \min_{x \in S} \langle \nabla f(x_k), x \rangle$$

$$x_{k+1} = \gamma_k x_k + (1 - \gamma_k) y_k$$



Рис. 19: Иллюстрация метода Франк-Вульфа (метод условного градиента)

# Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции

## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и дифференцируемой. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Метод Франк-Вульфа с шагом  $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$  достигает следующей сходимости после  $k > 0$  итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где  $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$  является диаметром множества  $S$ .

# Нижняя граница для метода Франк-Вульфа<sup>2</sup>

## Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который использует только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества  $S$  равен  $R$ . Существует  $L$ -гладкая сильно выпуклая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min\left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon}\right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки  $\hat{x} \in S$  с  $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$ . Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.

<sup>2</sup>The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически

## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически
- Глобальная скорость сходимости равна  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO

## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически
- Глобальная скорость сходимости равна  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной

## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически
- Глобальная скорость сходимости равна  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  ( paper)

## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически
- Глобальная скорость сходимости равна  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  ( paper)
- Если мы позволяем steps away, сходимость становится линейной ( paper) в сильно выпуклом случае

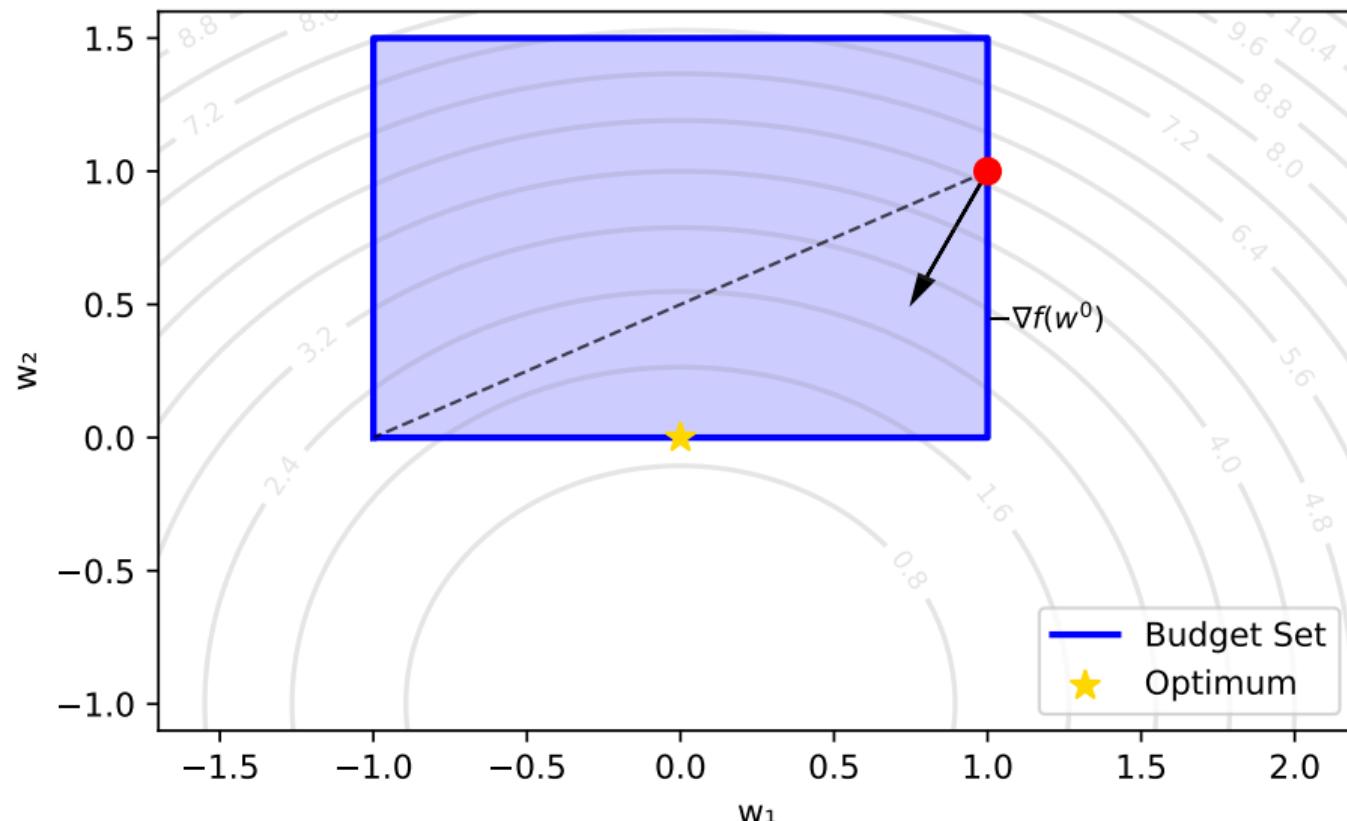
## Summary по методу Франк-Вульфа

- Метод не требует проекций, в некоторых специальных случаях позволяет вычислять итерации аналитически
- Глобальная скорость сходимости равна  $O\left(\frac{1}{k}\right)$  для гладких и выпуклых функций. Сильная выпуклость не улучшает скорость - это нижняя граница для LMO
- В сравнении с методом проекции градиента, скорость хуже, но итерация может быть дешевле и более разреженной
- Недавно было показано, что для сильно выпуклых множеств, скорость может быть улучшена до  $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$  ( paper)
- Если мы позволяем steps away, сходимость становится линейной ( paper) в сильно выпуклом случае
- Недавняя работа показала расширение на негладкий случай ( paper) с скоростью сходимости  $O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

## Численные эксперименты

## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 0



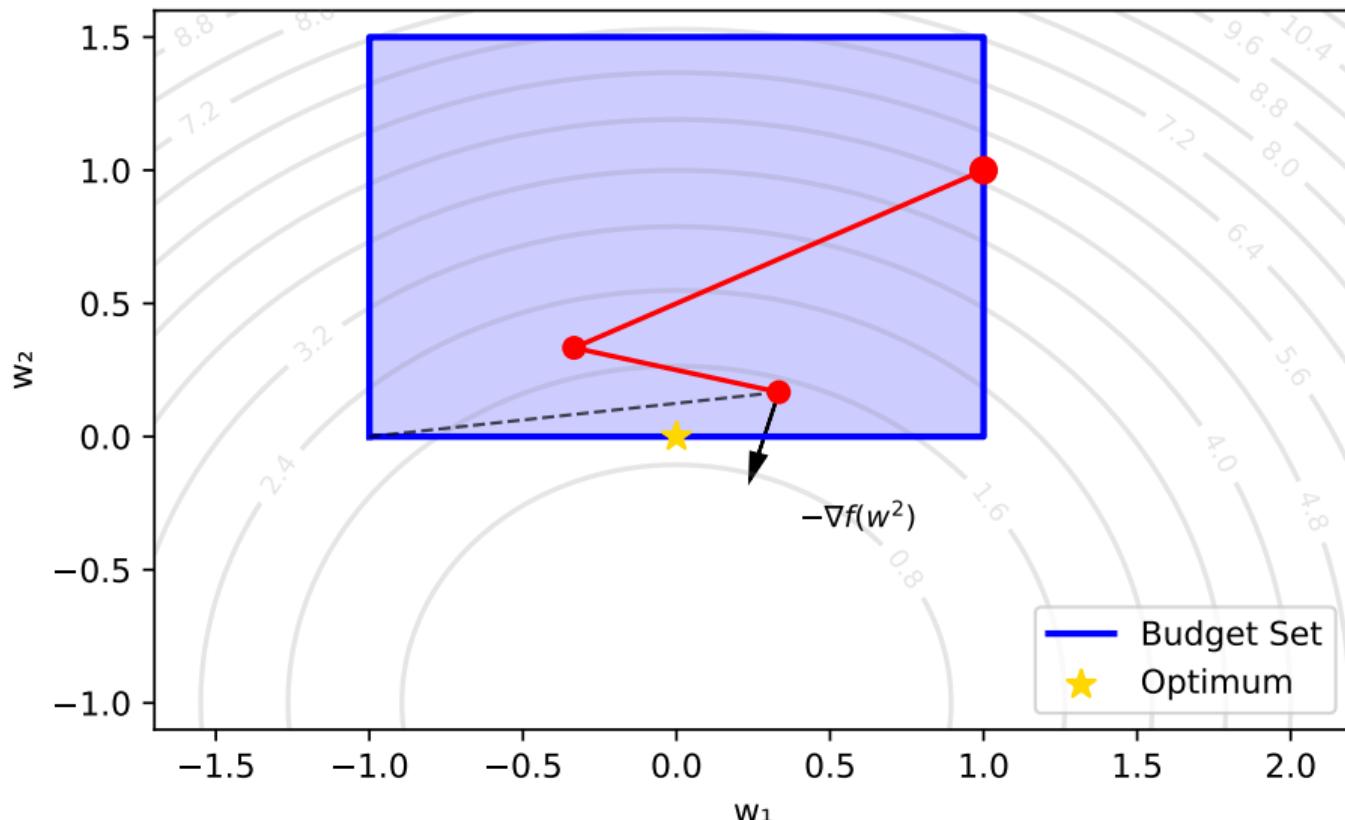
## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 1



## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 2



## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 3



## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 4



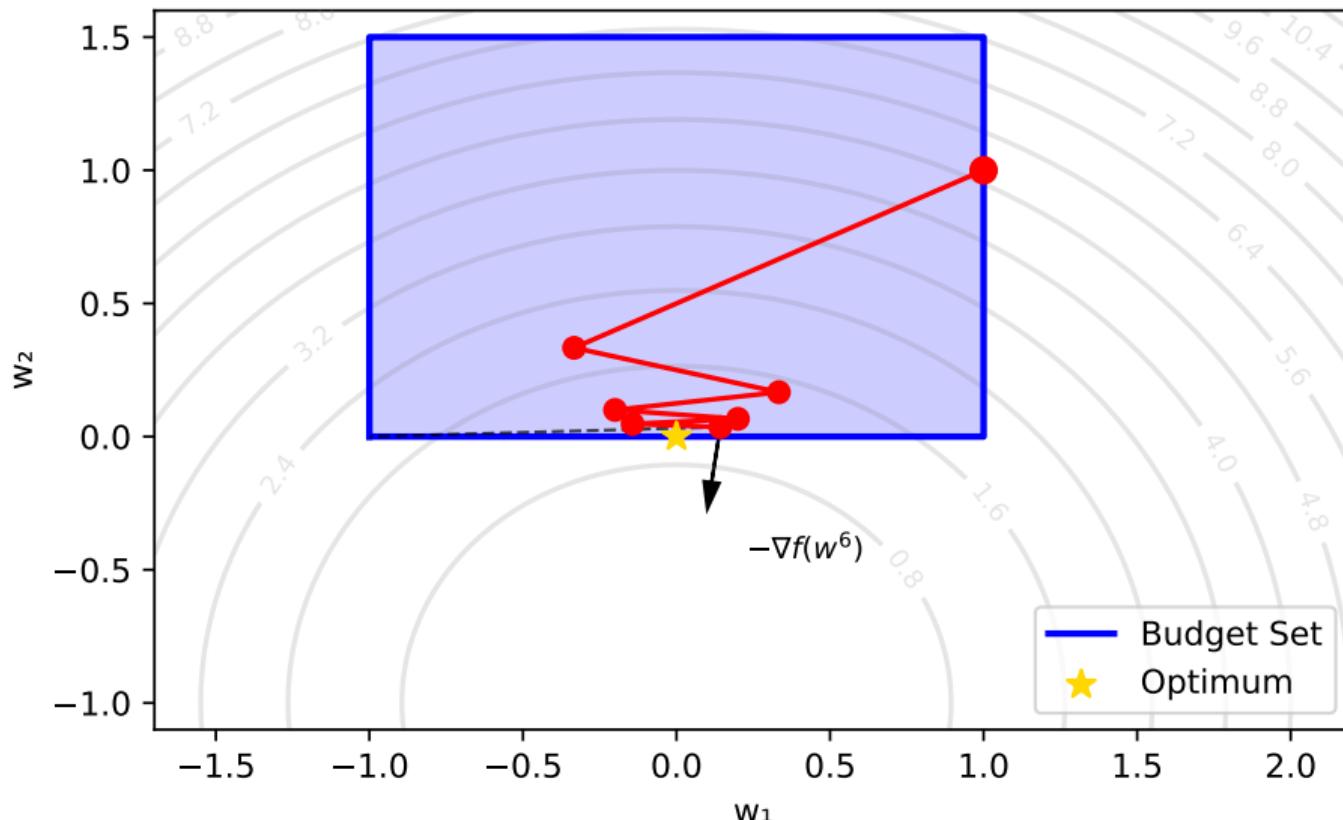
## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 5



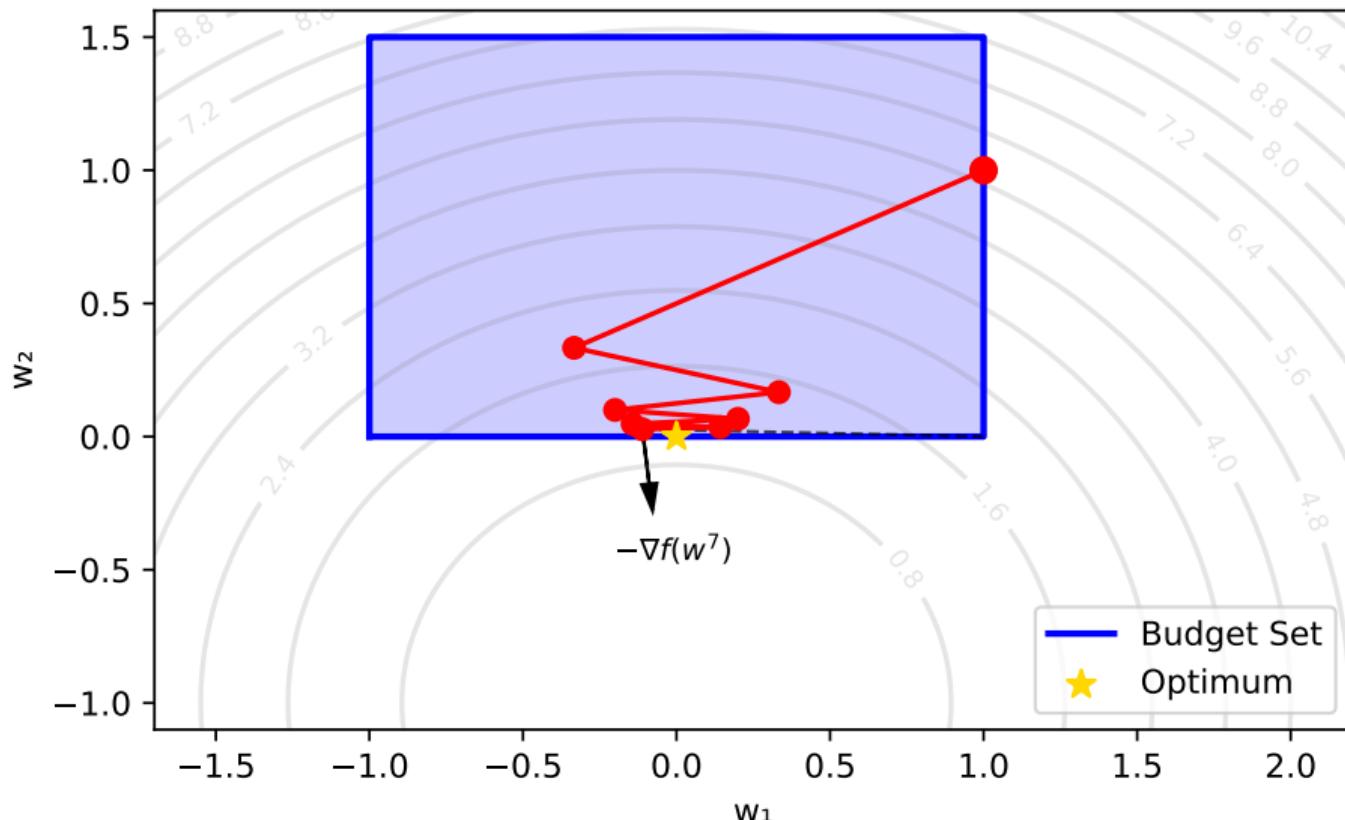
## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 6



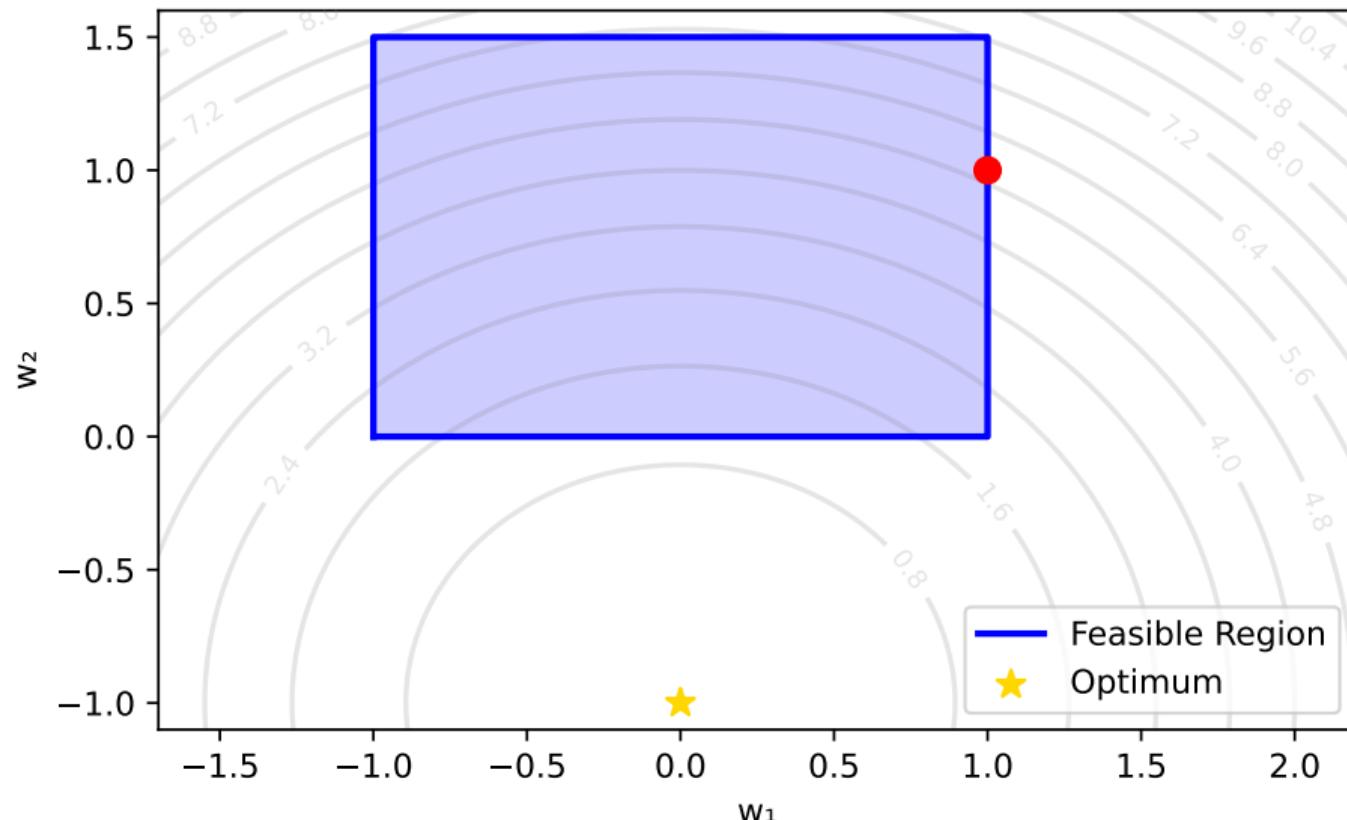
## 2d пример. Метод Франк-Вульфа

Frank-Wolfe Method: Iteration 7



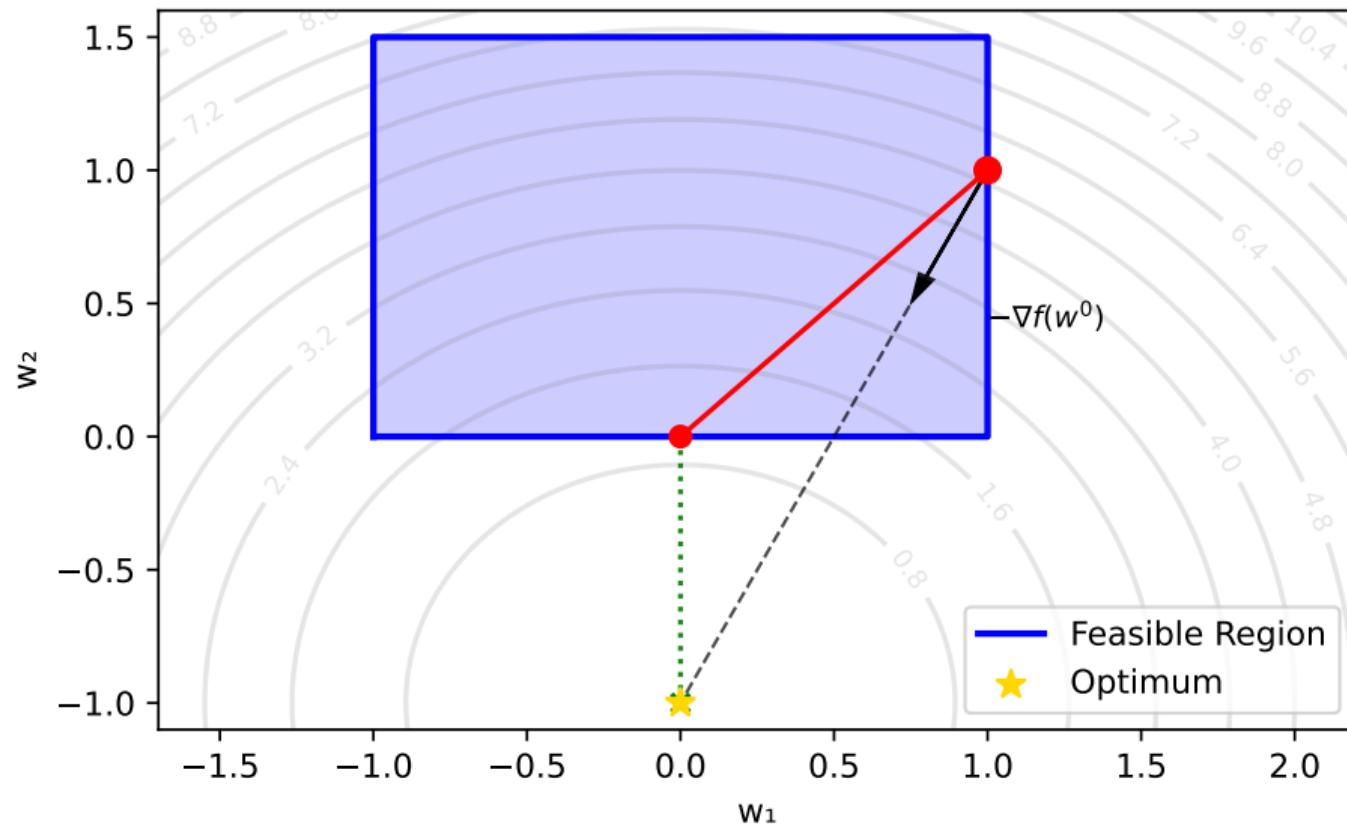
## 2d пример. Метод проекции градиента

Projected Gradient Descent: Iteration 0



## 2d пример. Метод проекции градиента

Projected Gradient Descent: Iteration 1



## 2d пример. Метод проекции градиента

Projected Gradient Descent: Iteration 2



## Квадратичная функция на кубе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ -1 \leq x \leq 1}} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Проекция простая:

$$\pi_S(x) = \text{clip}(x, -1, 1).$$

или

$$\pi_S(x) = \max(-1, \min(1, x)).$$

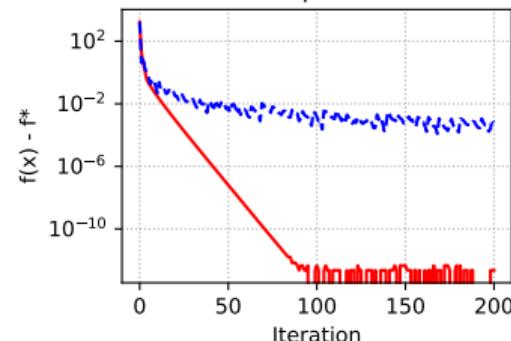
Линейный минимизатор (LMO) равен  
 $y = \underset{z \in S}{\operatorname{argmin}} \langle g, z \rangle.$

Поскольку множество допустимых значений  
разделяется по координатам, решение  
вычисляется покоординатно как

$$y_i = \begin{cases} -1, & \text{if } g_i > 0, \\ 1, & \text{if } g_i \leq 0. \end{cases}$$

Constrained convex quadratic problem:  $n=80$ ,  $\mu=0$ ,  $L=10$

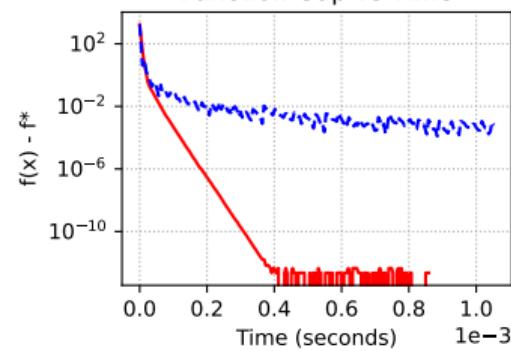
Function Gap vs Iterations



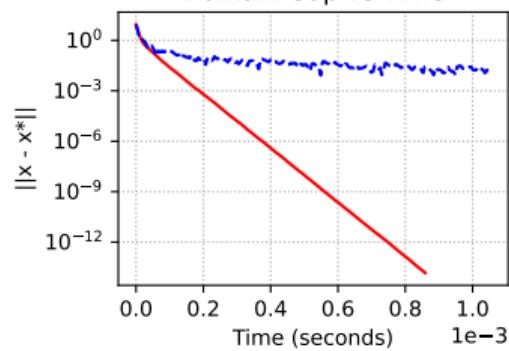
Domain Gap vs Iterations



Function Gap vs Time



Domain Gap vs Time



Projected Gradient Descent    Frank-Wolfe

# Квадратичная функция на кубе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ -1 \leq x \leq 1}} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x,$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Проекция простая:

$$\pi_S(x) = \text{clip}(x, -1, 1).$$

или

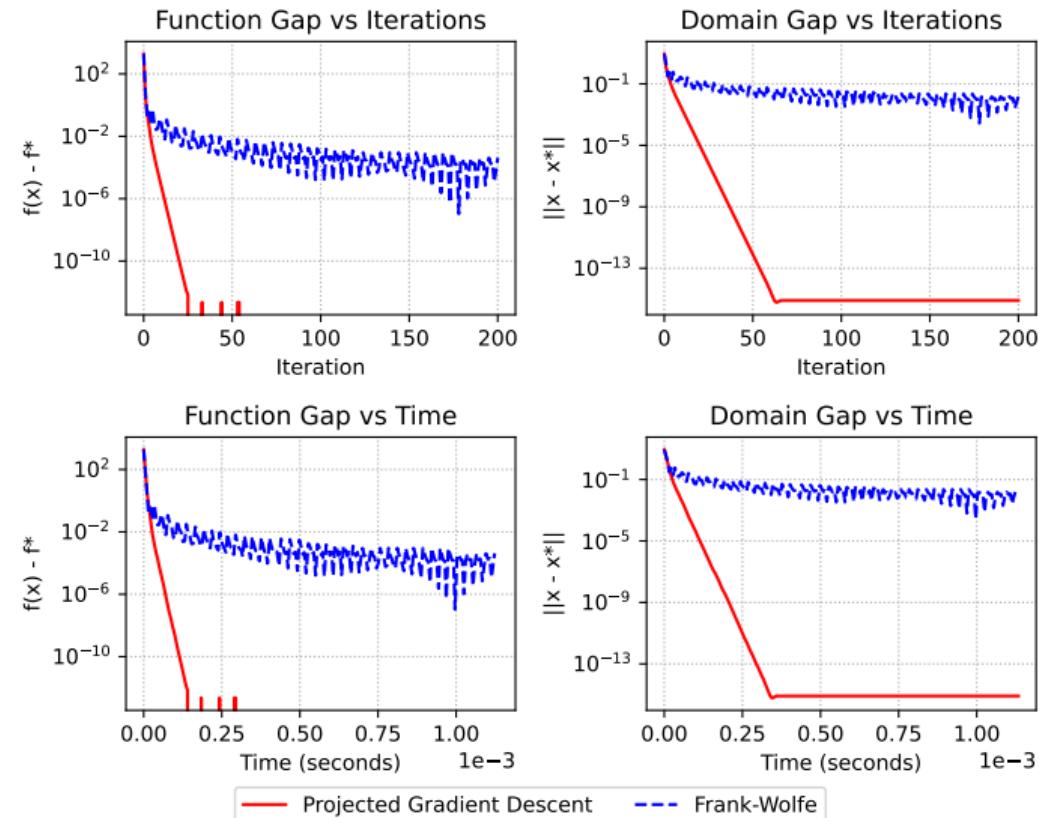
$$\pi_S(x) = \max(-1, \min(1, x)).$$

Линейный минимизатор (LMO) равен  
 $y = \underset{z \in S}{\operatorname{argmin}} \langle g, z \rangle.$

Поскольку множество допустимых значений  
разделяется по координатам, решение  
вычисляется покоординатно как

$$y_i = \begin{cases} -1, & \text{if } g_i > 0, \\ 1, & \text{if } g_i \leq 0. \end{cases}$$

Constrained strongly Convex quadratic problem:  $n=80$ ,  $\mu=1$ ,  $L=10$



# Квадратичная функция на симплексе (Диагональная матрица)

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

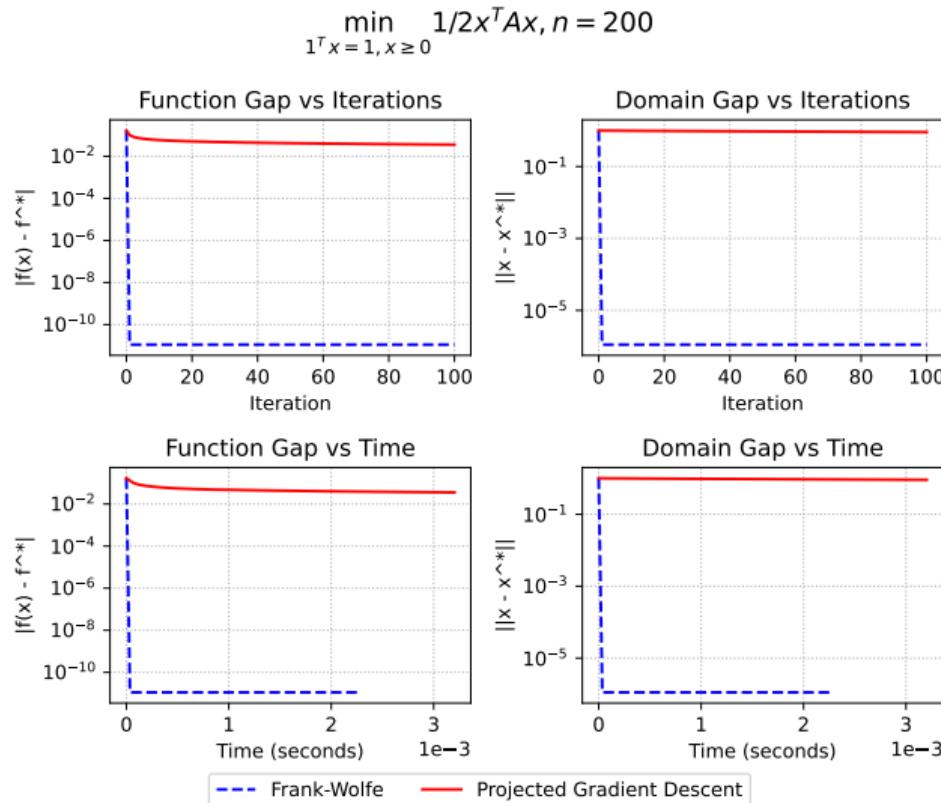
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda(A) \in [0; 100]$ .

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0069	0.0167
FW	0.0070	0.0066

Проекция на единичный симплекс  $\pi_S(x)$  может быть выполнена за  $\mathcal{O}(n \log n)$  или в среднем за  $\mathcal{O}(n)$  операций.<sup>3</sup>

Линейный минимизатор (LMO) равен  $y = \operatorname{argmin}_{z \in S} \langle g, z \rangle$ . Решение соответствует вершине симплекса:

$$y = e_j \quad \text{where} \quad j = \operatorname{argmin}_i g_i.$$



<sup>3</sup> Efficient Projections onto the  $\ell_1$ -Ball for Learning in High Dimensions

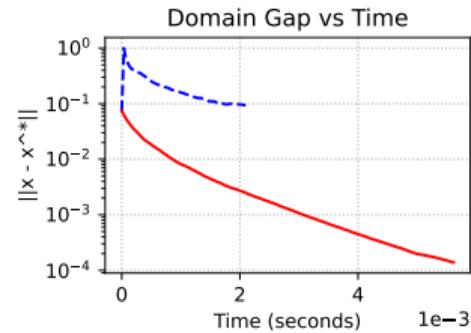
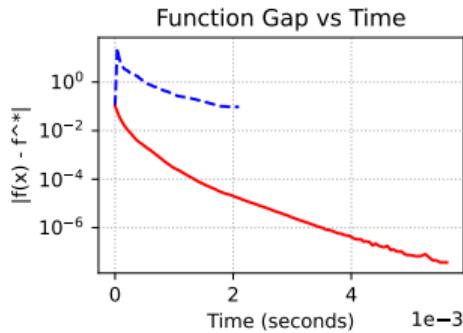
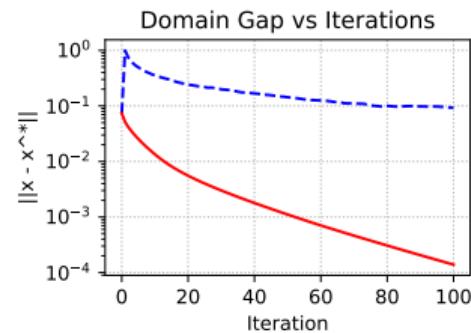
# Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda(A) \in [0; 100]$ .

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0069	0.0420
FW	0.0069	0.0066

$$\min_{\substack{\mathbf{1}^T x = 1, x \geq 0}} 1/2 x^T A x, n = 200$$



— Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

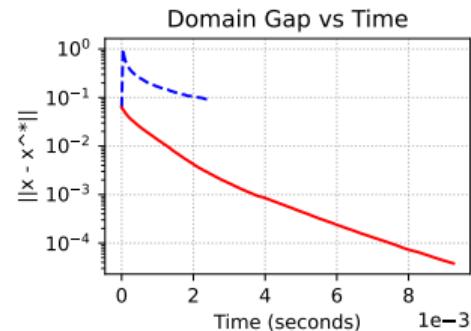
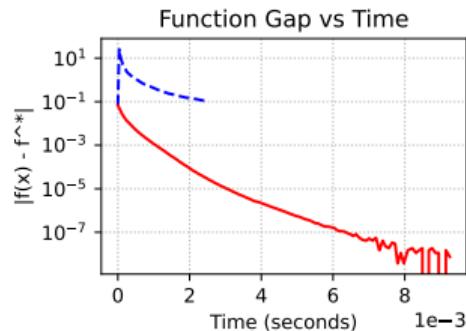
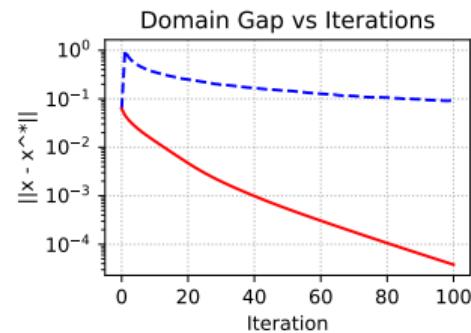
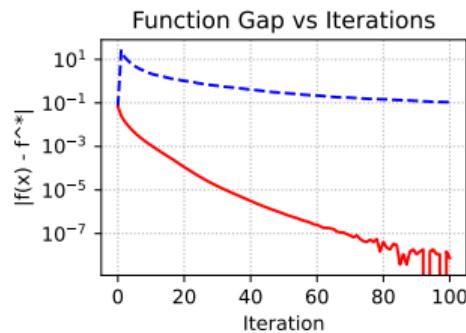
# Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda(A) \in [0; 100]$ .

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0068	0.0761
FW	0.0069	0.0070

$$\min_{\substack{\mathbf{1}^T x = 1, x \geq 0}} \frac{1}{2} x^T A x, n = 300$$



— Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

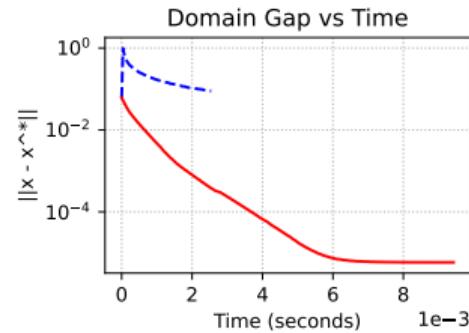
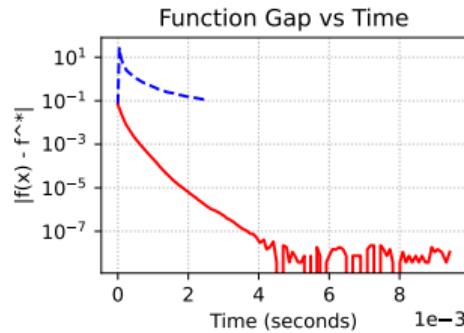
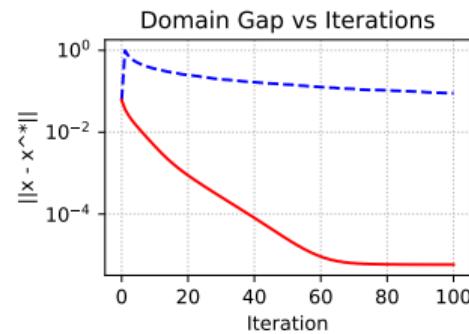
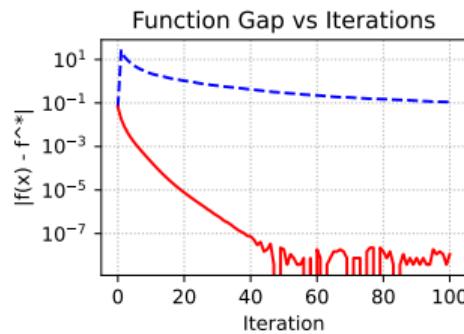
# Квадратичная функция на симплексе

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ x \geq 0, \mathbf{1}^T x = 1}} \frac{1}{2} x^T A x,$$

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda(A) \in [1; 100]$ .

Метод	Обновление, мс	LMO/проекция, мс
PGD	0.0068	0.0752
FW	0.0067	0.0068

$$\min_{\substack{\mathbf{1}^T x = 1, x \geq 0}} 1/2 x^T A x, n = 300$$



— Frank-Wolfe — Projected Gradient Descent

## Метод проекции градиента vs метод Франк-Вульфа

Основное отличие между методами заключается в том, что метод проекции градиента требует проекцию, в то время как метод Франк-Вульфа требует только линейный минимизатор (LMO).

В недавней книге авторы представили следующую таблицу сравнения сложности линейных минимизаций и проекций на некоторые выпуклые множества с точностью до аддитивной ошибки  $\epsilon$  в евклидовой норме.

Множество	Линейный минимизатор	Проекция
$n$ -мерный $\ell_p$ -шар, $p \neq 1, 2, \infty$	$\mathcal{O}(n)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)$
Ядро нормы матрицы $n \times m$	$\mathcal{O}\left(\nu \ln(m+n) \frac{\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\epsilon}}\right)$	$\mathcal{O}(m n \min\{m, n\})$
Потоковый многогранник на графе с $m$ вершинами и $n$ ребрами (ограничение на пропускную способность ребер)	$\mathcal{O}\left((n \log m)(n + m \log m)\right)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n}{\epsilon^2}\right)$ or $\mathcal{O}(n^4 \log n)$
Многогранник Биркгофа ( $n \times n$ дважды стохастических матриц)	$\mathcal{O}(n^3)$	$\tilde{\mathcal{O}}\left(\frac{n^2}{\epsilon^2}\right)$

Когда  $\epsilon$  отсутствует, нет аддитивной ошибки.  $\tilde{\mathcal{O}}$  скрывает полилогарифмические факторы в размерностях и полиномиальные факторы в константах, связанных с расстоянием до оптимума. Для ядерной нормы шара,  $\nu$  обозначает количество ненулевых элементов, а  $\sigma_1$  обозначает наибольшее сингулярное значение проекции матрицы.

## Бонус: Доказательства

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

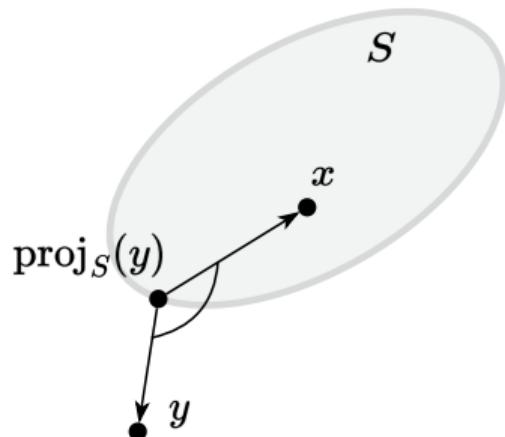


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## i Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

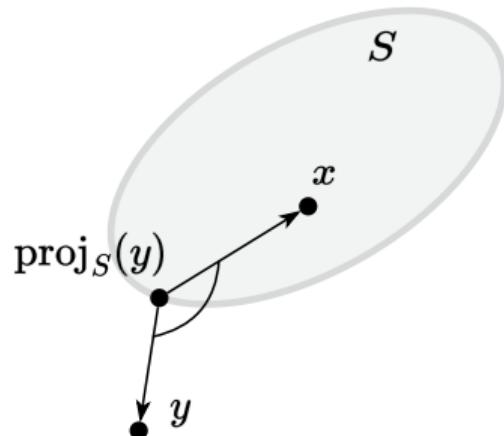


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2(\text{proj}_S(y) - y)^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

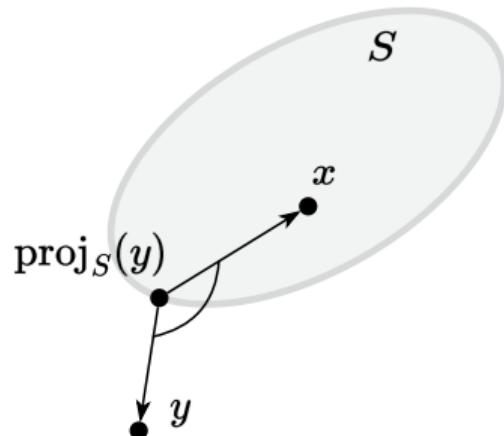


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2 (\text{proj}_S(y) - y)^T (x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T (x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

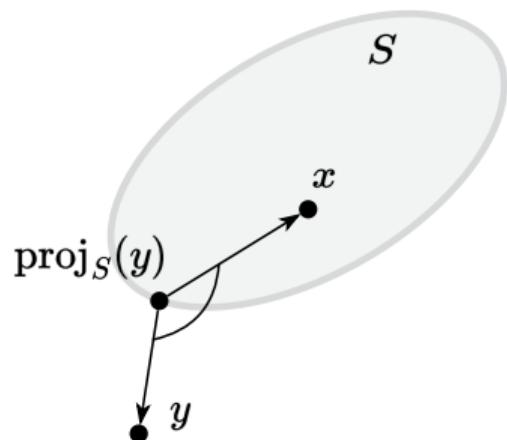


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2(\text{proj}_S(y) - y)^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$  с  $x = x - \text{proj}_S(y)$  и  $y = y - \text{proj}_S(y)$ . По первому свойству теоремы:

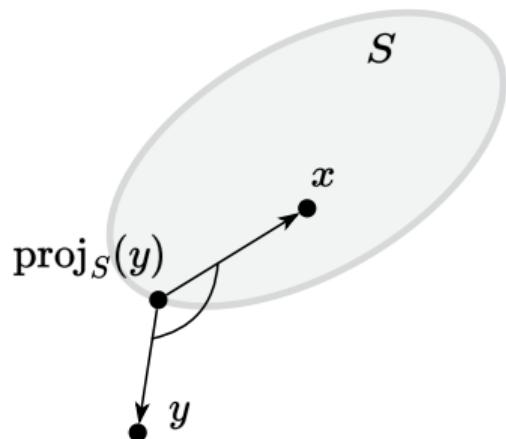


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2(\text{proj}_S(y) - y)^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$  с  $x = x - \text{proj}_S(y)$  и  $y = y - \text{proj}_S(y)$ . По первому свойству теоремы:

$$0 \geq 2x^T y = \|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 - \|x - y\|^2$$



Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

# Критерий проекции (неравенство Бурбаки-Чейни-Гольдштейна)

## Theorem

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  - замкнутое и выпуклое,  $\forall x \in S, y \in \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$\langle y - \text{proj}_S(y), x - \text{proj}_S(y) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 \quad (2)$$

1.  $\text{proj}_S(y)$  - минимизатор дифференцируемой выпуклой функции  $d(y, S, \|\cdot\|) = \|x - y\|^2$  на  $S$ . По условию оптимальности первого порядка:

$$\nabla d(\text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$2(\text{proj}_S(y) - y)^T(x - \text{proj}_S(y)) \geq 0$$

$$(y - \text{proj}_S(y))^T(x - \text{proj}_S(y)) \leq 0$$

2. Используем правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$  с  $x = x - \text{proj}_S(y)$  и  $y = y - \text{proj}_S(y)$ . По первому свойству теоремы:

$$0 \geq 2x^T y = \|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y + \text{proj}_S(y)\|^2 - \|x - y\|^2$$

$$\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y + \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$$

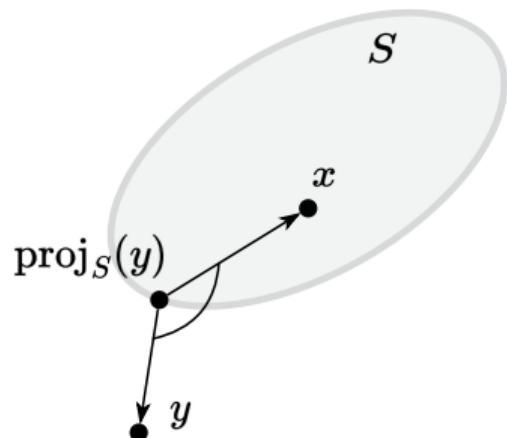


Рис. 20: Геометрическая иллюстрация первого утверждения. Для любой точки  $x \in S$  угол между векторами  $x - \text{proj}_S(y)$  и  $y - \text{proj}_S(y)$  должен быть не острый

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

$$\langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0$$

$$\langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle$$

$$\langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

$$\|(y - x)^\top (\pi(y) - \pi(x))\|_2 \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$$

## Оператор проекции является нерастягивающим

Сокращенная запись: пусть  $\pi = \text{proj}$  и  $\pi(x)$  обозначает  $\text{proj}(x)$ .

Начнём с важного свойства проекции:

$$\langle y - \pi(y), x - \pi(y) \rangle \leq 0 \quad \forall x \in S. \quad (3)$$

Заменим  $x$  на  $\pi(x)$  в (3)

$$\langle y - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (4)$$

Заменим  $y$  на  $x$  и  $x$  на  $\pi(y)$  в (3)

$$\langle x - \pi(x), \pi(y) - \pi(x) \rangle \leq 0. \quad (5)$$

(4)+(5) сократило  $\pi(y) - \pi(x)$ , что не хорошо. Поэтому перевернем знак в (5), что даст нам

$$\langle \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \langle y - \pi(y) + \pi(x) - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq 0 \\ & \langle y - x, \pi(x) - \pi(y) \rangle \leq -\langle \pi(x) - \pi(y), \pi(x) - \pi(y) \rangle \\ & \langle y - x, \pi(y) - \pi(x) \rangle \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2 \\ & \|y - x\|^T (\pi(y) - \pi(x)) \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2 \end{aligned}$$

По неравенству КБШ, левая часть ограничена сверху  $\|y - x\|_2 \|\pi(y) - \pi(x)\|_2$ , получаем  $\|y - x\|_2 \|\pi(y) - \pi(x)\|_2 \geq \|\pi(x) - \pi(y)\|_2^2$ . Деление на  $\|\pi(x) - \pi(y)\|_2$  даёт требуемое неравенство.



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  -  $L$ -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , выполняется следующее неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ or, equivalently,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

# Инструменты сходимости



## Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ . Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она  $L$ -гладкая по определению, так как  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$  и  $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ .



## Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ . Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она  $L$ -гладкая по определению, так как  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$  и  $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ .
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции  $\varphi(y)$ :



## Доказательство

1. Для доказательства этого рассмотрим другую функцию  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ . Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она  $L$ -гладкая по определению, так как  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$  и  $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ .
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции  $\varphi(y)$ :

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$



## Доказательство

- Для доказательства этого рассмотрим другую функцию  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ . Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она  $L$ -гладкая по определению, так как  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$  и  $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ .
- Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции  $\varphi(y)$ :

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$x:=y, y:=y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$



## Доказательство

- Для доказательства этого рассмотрим другую функцию  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ . Она очевидно выпукла (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она  $L$ -гладкая по определению, так как  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$  и  $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$ .
- Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции  $\varphi(y)$ :

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$\begin{aligned} & \underset{x=y, y=y-\frac{1}{L}\nabla\varphi(y)}{\varphi\left(y-\frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right)} \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla\varphi(y), -\frac{1}{L}\nabla\varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla\varphi(y)\|_2^2 \\ & \varphi\left(y-\frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L} \|\nabla\varphi(y)\|_2^2 \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять  $x$  и  $y$        $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять  $x$  и  $y$        $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

## Инструменты сходимости



3. Из условий оптимальности первого порядка для выпуклой функции  $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$ . Мы можем заключить, что для любого  $x$ , минимум функции  $\varphi(y)$  находится в точке  $y = x$ . Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь заменим  $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$ :

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять  $x$  и  $y$      $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

Лемма доказана. С первого взгляда она не имеет много геометрического смысла, но мы будем использовать ее как удобный инструмент для оценки разницы между градиентами.



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда функция  $f$  является  $\mu$ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда для любых  $x, y \in \mathbb{R}^d$  выполняется следующее:

$$\text{Strongly convex case } \mu > 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$$

$$\text{Convex case } \mu = 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

## Доказательство

- Мы дадим доказательство только для сильно выпуклого случая, выпуклый случай следует из него с установкой  $\mu = 0$ . Начнем с необходимости. Для сильно выпуклой функции

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

сумма  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\quad \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ y + t(x - y) - y &= t(x - y) \\ &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

## Инструменты сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что  $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$ . Используя теорему Ньютона-Лейбница  $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$ :

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
 \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
 y + t(x - y) - y = t(x - y) &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
 &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем выполнение критерия сильной выпуклости

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

$$\text{поменять } x \text{ и } y \quad - \langle \nabla f(x), x - y \rangle \leq - \left( f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \right)$$



### Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$



### Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$  и правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ :



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$  и правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ :

Гладкость: 
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$  и правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ :

Гладкость: 
$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод: 
$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

1. Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$  и правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ :

Гладкость:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод:

$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Правило косинусов:

$$= f(x_k) - \frac{L}{2} (\|y_k - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпуклая и дифференцируемая. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после итерации  $k > 0$ :

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

- Докажем лемму о достаточном убывании, предполагая, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L}\nabla f(x_k)$  и правило косинусов  $2x^T y = \|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2$ :

Гладкость:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Метод:

$$= f(x_k) - L\langle y_k - x_k, x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Правило косинусов:

$$\begin{aligned} &= f(x_k) - \frac{L}{2} (\|y_k - x_k\|^2 + \|x_{k+1} - x_k\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции:  $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  с  $x = x^*, y = y_k$ :

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции:  $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  с  $x = x^*, y = y_k$ :

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$

$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции:  $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  с  $x = x^*, y = y_k$ :

$$\begin{aligned} \|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 &\leq \|x^* - y_k\|^2 \\ \|y_k - x^*\|^2 &\geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2 \end{aligned}$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$

$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции:  $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  с  $x = x^*, y = y_k$ :

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$

$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$

$$\leq \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \right)$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Теперь на каждом шаге прогресс не гарантирован. Снова используем формулу косинусов:

$$\left\langle \frac{1}{L} \nabla f(x_k), x_k - x^* \right\rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_k - x^* - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)\|^2 \right)$$
$$\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle = \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|y_k - x^*\|^2 \right)$$

3. Теперь используем свойство проекции:  $\|x - \text{proj}_S(y)\|^2 + \|y - \text{proj}_S(y)\|^2 \leq \|x - y\|^2$  с  $x = x^*, y = y_k$ :

$$\|x^* - \text{proj}_S(y_k)\|^2 + \|y_k - \text{proj}_S(y_k)\|^2 \leq \|x^* - y_k\|^2$$
$$\|y_k - x^*\|^2 \geq \|x^* - x_{k+1}\|^2 + \|y_k - x_{k+1}\|^2$$

4. Теперь, используя выпуклость и предыдущую часть:

Выпуклость:

$$f(x_k) - f^* \leq \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle$$

$$\leq \frac{L}{2} \left( \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 - \|y_k - x_{k+1}\|^2 \right)$$

Просуммируем для  $i = 0, k-1$

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_i)\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[ f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[ f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[ f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[ f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) - kf^* &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



5. Оценим градиенты с помощью неравенства о достаточном убывании Уравнение 7:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \left[ f(x_i) - f(x_{i+1}) + \frac{L}{2} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \right] + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 - \frac{L}{2} \sum_{i=0}^{i-1} \|y_i - x_{i+1}\|^2 \\ &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i) - kf^* &\leq f(x_0) - f(x_k) + \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \\ \sum_{i=1}^k [f(x_i) - f^*] &\leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что  $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$ . По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что  $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$ . По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$  указывает на  $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$ . Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что  $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$ . По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$  указывает на  $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$ . Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Заменим обратно в (\*):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 = f(x_k).$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Из неравенства о достаточном убывании

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2,$$

используем факт, что  $x_{k+1} = \text{proj}_S(y_k)$ . По определению проекции,

$$\|y_k - x_{k+1}\| \leq \|y_k - x_k\|,$$

и вспомним, что  $y_k = x_k - \frac{1}{L} \nabla f(x_k)$  указывает на  $\|y_k - x_k\| = \frac{1}{L} \|\nabla f(x_k)\|$ . Следовательно,

$$\frac{L}{2} \|y_k - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{L}{2} \|y_k - x_k\|^2 = \frac{L}{2} \frac{1}{L^2} \|\nabla f(x_k)\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Заменим обратно в (\*):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 = f(x_k).$$

Следовательно,

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) \quad \text{для каждого } k,$$

$\{f(x_k)\}$  является монотонно неубывающей последовательностью.

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Поскольку  $f(x_i)$  убывает в  $i$ , в частности  $f(x_k) \leq f(x_i)$  для всех  $i \leq k$ . Следовательно,

$$k [f(x_k) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2,$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



7. Финальная оценка сходимости Из шага 5, мы уже установили

$$\sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2.$$

Поскольку  $f(x_i)$  убывает в  $i$ , в частности  $f(x_k) \leq f(x_i)$  для всех  $i \leq k$ . Следовательно,

$$k [f(x_k) - f^*] \leq \sum_{i=0}^{k-1} [f(x_i) - f^*] \leq \frac{L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2,$$

которое сразу дает

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}.$$

Это завершает доказательство скорости сходимости  $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$  для выпуклой и  $L$ -гладкой  $f$  с ограничениями на проекцию.

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mu$ -сильно выпуклой. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть есть минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Алгоритм проекции градиента с шагом  $\alpha \leq \frac{1}{L}$  достигает следующей сходимости после  $k > 0$ :

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

## Доказательство

- Сначала докажем свойство стационарной точки:  $\text{proj}_S(x^* - \alpha\nabla f(x^*)) = x^*$ .

Это следует из критерия проекции и условия оптимальности первого порядка для  $x^*$ . Пусть  $y = x^* - \alpha\nabla f(x^*)$ . Мы должны показать, что  $\langle y - x^*, x - x^* \rangle \leq 0$  для всех  $x \in S$ .

$$\langle (x^* - \alpha\nabla f(x^*)) - x^*, x - x^* \rangle = -\alpha \langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \leq 0$$

Неравенство выполняется, потому что  $\alpha > 0$  и  $\langle \nabla f(x^*), x - x^* \rangle \geq 0$  является условием оптимальности для  $x^*$ .

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

## Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



- Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

$$\text{Свойство стационарной точки} = \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2\end{aligned}$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



- Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

- Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



- Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

- Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

$$\text{гладкость } \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



1. Учитывая расстояние до решения и используя свойство стационарной точки:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{Свойство стационарной точки} &= \|\text{proj}_S(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{proj}_S(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - (x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

2. Теперь используем гладкость из инструментов сходимости и сильную выпуклость:

$$\text{гладкость } \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)$$

$$\text{сильная выпуклость } -\langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \leq -\left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2\right) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle$$

# Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



3. Заменим:

## Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции ⚡⚡⚡

3. Заменим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left( f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &+ \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



3. Заменим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left( f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\ &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой сильно выпуклой функции



3. Заменим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left( f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\ &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

4. В силу выпуклости  $f$ :  $f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0$ . Следовательно, при выборе  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2,$$

что и дает линейную сходимость метода со скоростью не хуже  $1 - \frac{\mu}{L}$ .

# Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



## Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и дифференцируемой. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Метод Франк-Вульфа с шагом  $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$  достигает следующей сходимости после  $k > 0$  итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где  $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$  является диаметром множества  $S$ .

# Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



## i Theorem

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и дифференцируемой. Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  замкнутое выпуклое множество, и пусть существует минимизатор  $x^*$  функции  $f$  на  $S$ ; кроме того, пусть  $f$  гладкая на  $S$  с параметром  $L$ . Метод Франк-Вульфа с шагом  $\gamma_k = \frac{k-1}{k+1}$  достигает следующей сходимости после  $k > 0$  итераций:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

где  $R = \max_{x,y \in S} \|x - y\|$  является диаметром множества  $S$ .

1. Благодаря  $L$ -гладкости функции  $f$ , имеем:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Благодаря выпуклости функции  $f$ , для любой точки  $x \in S$ , включая  $x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для  $x = x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Благодаря выпуклости функции  $f$ , для любой точки  $x \in S$ , включая  $x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для  $x = x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению  $y_k$ , имеем  $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$ , следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Благодаря выпуклости функции  $f$ , для любой точки  $x \in S$ , включая  $x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для  $x = x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению  $y_k$ , имеем  $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$ , следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

4. Объединяя неравенства:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_k) (f(x^*) - f(x_k)) + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} R^2 \end{aligned}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



2. Благодаря выпуклости функции  $f$ , для любой точки  $x \in S$ , включая  $x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \leq f(x) - f(x_k)$$

В частности, для  $x = x^*$ :

$$\langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

3. По определению  $y_k$ , имеем  $\langle \nabla f(x_k), y_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* \rangle$ , следовательно:

$$\langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle \leq \langle \nabla f(x_k), x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$$

4. Объединяя неравенства:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) - f(x_k) &\leq (1 - \gamma_k) \langle \nabla f(x_k), y_k - x_k \rangle + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} \|y_k - x_k\|^2 \\ &\leq (1 - \gamma_k) (f(x^*) - f(x_k)) + \frac{L(1 - \gamma_k)^2}{2} R^2 \end{aligned}$$

5. Перегруппируем слагаемые:

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \gamma_k (f(x_k) - f(x^*)) + (1 - \gamma_k)^2 \frac{LR^2}{2}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Обозначим  $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$ , получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Обозначим  $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$ , получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$  индукцией.

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Обозначим  $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$ , получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$  индукцией.

- База:  $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Обозначим  $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$ , получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$  индукцией.

- База:  $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
- Предположение:  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$

## Скорость сходимости для гладкой и выпуклой функции



6. Обозначим  $\delta_k = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{LR^2}$ , получим:

$$\delta_{k+1} \leq \gamma_k \delta_k + \frac{(1 - \gamma_k)^2}{2} = \frac{k-1}{k+1} \delta_k + \frac{2}{(k+1)^2}$$

7. Докажем, что  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$  индукцией.

- База:  $\delta_2 \leq \frac{1}{2} < \frac{2}{3}$
- Предположение:  $\delta_k \leq \frac{2}{k+1}$
- Тогда  $\delta_{k+1} \leq \frac{k-1}{k+1} \cdot \frac{2}{k+1} + \frac{2}{(k+1)^2} = \frac{2k}{k^2+2k+1} < \frac{2}{k+2}$

что дает нам желаемый результат:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2LR^2}{k+1}$$



## Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который использует только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества  $S$  равен  $R$ . Существует  $L$ -гладкая сильно выпуклая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min\left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon}\right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки  $\hat{x} \in S$  с  $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$ . Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.

<sup>4</sup> The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle



## Theorem

Рассмотрим любой алгоритм, который использует только линейный минимизатор (LMO). Пусть диаметр множества  $S$  равен  $R$ . Существует  $L$ -гладкая сильно выпуклая функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что этот алгоритм требует по крайней мере

$$\min\left(\frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon}\right)$$

итераций (т.е. вызовов LMO) для построения точки  $\hat{x} \in S$  с  $f(\hat{x}) - \min_{x \in S} f(x) \leq \varepsilon$ . Нижняя граница применима как для выпуклых, так и для сильно выпуклых функций.

**Схема доказательства.** Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\min_{x \in S} f(x) = \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x\|_2^2$$

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}$$

Обратим внимание, что:

- $f$  является 1-гладкой;
- диаметр  $S$  равен  $R = 2$ ;
- $f$  сильно выпукла.

<sup>4</sup> The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle



## 1. Оптимальное решение равно

$$x^* = \frac{1}{n} \mathbf{1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad \text{и} \quad f(x^*) = \frac{1}{2n},$$

где  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ая позиция}}{1}, 0, \dots, 0)^\top$  является  $i$ -м стандартным базисным вектором.



## 1. Оптимальное решение равно

$$x^* = \frac{1}{n} \mathbf{1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i, \quad \text{и} \quad f(x^*) = \frac{1}{2n},$$

где  $e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-ая позиция}}{1}, 0, \dots, 0)^\top$  является  $i$ -м стандартным базисным вектором.

## 2. Линейный минимизатор (LMO) на $S$ возвращает вершину $e_i$ . После $k$ итераций, метод обнаружит не более $k$ различных базисных векторов $e_{i_1}, \dots, e_{i_k}$ . Лучшая выпуклая комбинация, которую можно сформировать, равна

$$\hat{x} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e_{i_j}.$$

<sup>5</sup> The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle

## Нижняя граница для метода Франк-Вульфа<sup>6</sup>

1. Оценивая функцию в  $\hat{x}$ , получаем:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\min\{k, n\}} - \frac{1}{n} \right).$$



1. Оценивая функцию в  $\hat{x}$ , получаем:

$$f(\hat{x}) - f(x^*) \geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\min\{k, n\}} - \frac{1}{n} \right).$$

2. Чтобы гарантировать, что  $f(\hat{x}) - f(x^*) \leq \varepsilon$ , необходимо, чтобы (полное доказательство приведено в статье):

$$k \geq \min \left\{ \frac{n}{2}, \frac{1}{4\varepsilon} \right\} = \min \left\{ \frac{n}{2}, \frac{LR^2}{16\varepsilon} \right\}.$$

<sup>6</sup> The Complexity of Large-scale Convex Programming under a Linear Optimization Oracle