



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Градиентный спуск

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 7

Даня Меркулов  
Пётр Остроухов



# Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ



# Градиентный спуск

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$



# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции  $f$ .

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции  $f$ .

Итерация метода имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab 

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)).$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab

(GF)

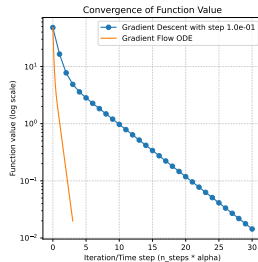


Рисунок 1. Траектория градиентного потока

# Сходимость алгоритма градиентного спуска



Код для построения анимации ниже. Сходимость существенно зависит от выбора шага  $\alpha$ :



# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$



# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)



$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

$$\nabla f(x^{k+1})^\top \nabla f(x^k) = 0$$



Рисунок 2.  
Наискорейший спуск

# **Сильно выпуклые квадратичные функции**

# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^\top(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^\top(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*)$$





# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2} (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2} (x^*)^\top A x^* \simeq \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} \end{aligned}$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1 \qquad |1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$



# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha)$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

$$\begin{aligned}\rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\&= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}\end{aligned}$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2$$

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^{2k} f(x^0)$$

# Анализ сходимости



Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью  $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$ , где  $\varkappa = \frac{L}{\mu}$  — число обусловленности квадратичной задачи.

$\varkappa$	$\rho$	Итераций до уменьшения ошибки по аргументу в	Итераций до уменьшения ошибки по функции в 10
		10 раз	раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

# Число обусловленности $\mathcal{N}$



# Случай PL-функций

# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak- Lojasiewicz condition



# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми.  Код

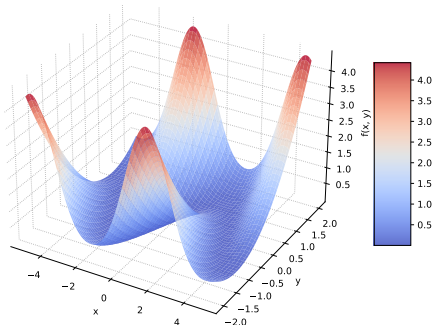
$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak-Lojasiewicz condition



$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Non-convex PL function



## i Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что  $f$  является PL-функцией с константой  $\mu$  и  $L$ -гладкой, для некоторых  $L \geq \mu > 0$ .

Рассмотрим последовательность  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , сгенерированную методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Пусть  $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ . Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$



# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha \mu (f(x^k) - f^*).$$

Вычтя  $f^*$  из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

## Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$



# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть  $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$  и  
 $b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть  $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$  и

$$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$$

Тогда  $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$  и

$$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

**Любая  $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией**

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$



# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

# Выпуклый гладкий случай

# Выпуклый гладкий случай



## i Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что  $f$  является выпуклой и  $L$ -гладкой функцией, для некоторого  $L > 0$ .

Пусть  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Пусть  $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ . Тогда для всех  $x^* \in \operatorname{argmin} f$  и всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливо:

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

(1)

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

(1)

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

(1)

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$



# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned} \tag{1}$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}\end{aligned}\tag{1}$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}\end{aligned}\tag{1}$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

(2)

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}.\end{aligned}\tag{1}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle\tag{2}$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,\end{aligned}\tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \text{где } y = x^*, x = x^k\tag{2}$$

# Анализ сходимости



- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}\end{aligned}\tag{1}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$\begin{aligned}f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \quad \text{где } y = x^*, x = x^k \\f(x^k) - f^* &\leq \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle\end{aligned}\tag{2}$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):



# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\&= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle\end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ .

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\&= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle\end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$f(x^{k+1}) \leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2]$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\&= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle\end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$\begin{aligned}f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2]\end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\ &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\ 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2 \end{aligned}$$



# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\ &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\ 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

(3)

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\ &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\ 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \quad (3)$$

# Анализ сходимости



- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a - b = 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right)$ .

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\ &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\ 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \quad (3)$$

# Анализ сходимости



- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

# Анализ сходимости



- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

# Анализ сходимости



- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

# Анализ сходимости



- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}$$

# Анализ сходимости



- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$\begin{aligned} 2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* &\leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \\ f(x^k) - f^* &\leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \leq \frac{L\|x^0 - x^*\|_2^2}{2k} \end{aligned}$$



Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\ \nabla f(x^k)\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x^k - x^*\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , clustered matrix.



# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=600$ , clustered matrix.

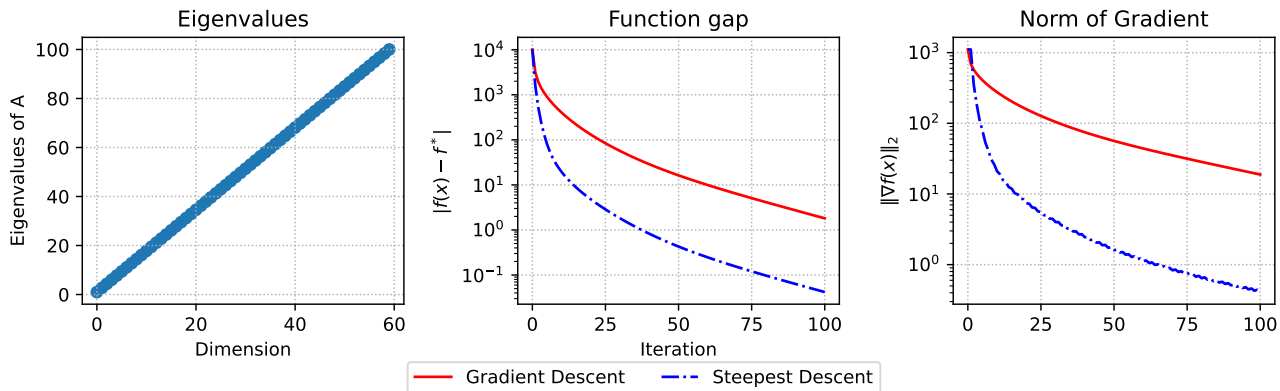


# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , uniform spectrum matrix.



# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , Hilbert matrix.



— Gradient Descent    - - - Steepest Descent





# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .

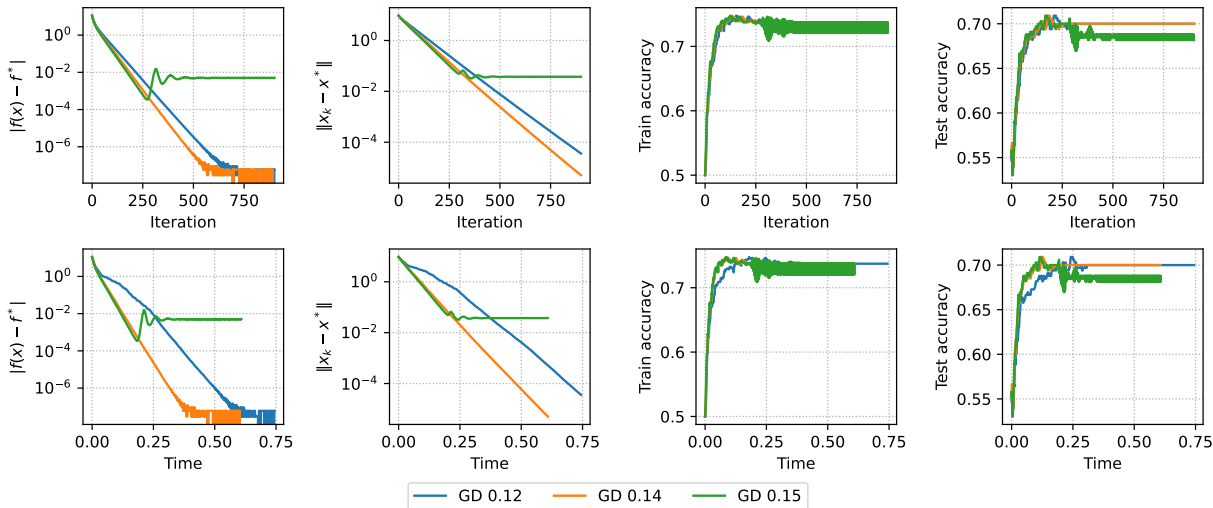


# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.1$ .

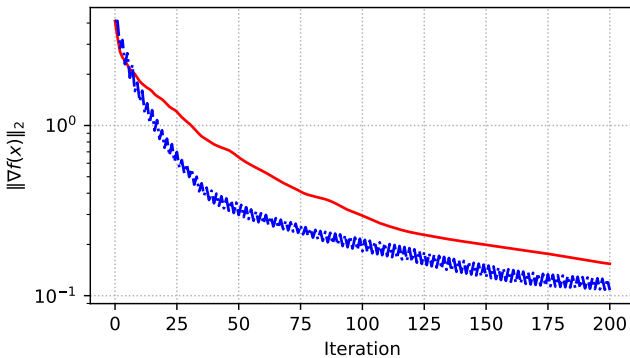


$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Regularized binary logistic regression.  $n=300$ .  $m=1000$ .  $\mu=0$



— Gradient Descent    -.- Steepest Descent



# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Regularized binary logistic regression.  $n=300$ .  $m=1000$ .  $\mu=1$



— Gradient Descent    -.- Steepest Descent

