Условия оптимальности. Функция Лагранжа. Условия Каруша-Куна-Таккера

Даня Меркулов

> В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному алгоритму.

—*Предисловие к "Аналитической механике"*

Рисунок 1: Жозеф Луи Лагранж

1 Условия оптимальности

1.1 Теория

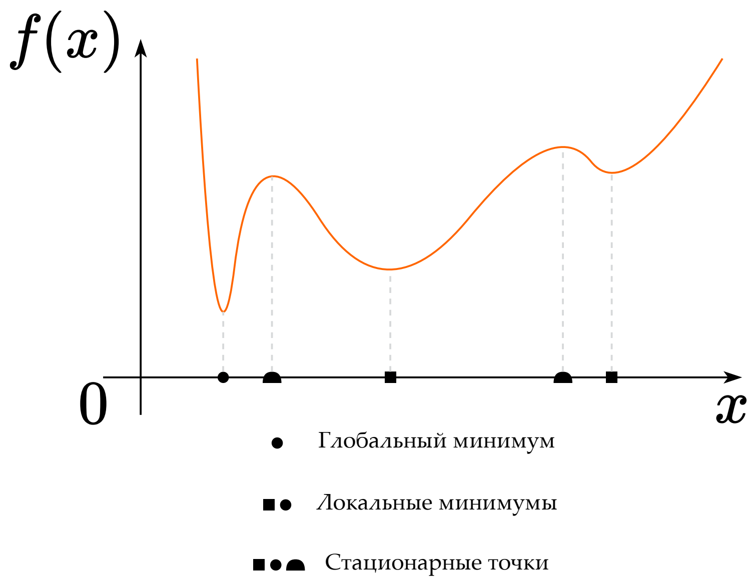


Рисунок 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

$$
f(x) \to \min_{x \in S}
$$

Множество S обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**: $x^* \in S$.

- Точка x^* является **глобальным минимумом**, если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in S$.
- Точка x^* является **локальным минимумом**, если существует окрестность N точки x^* такая, что $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in N \cap S$.
- Точка x^* является **строгим локальным минимумом**, если существует окрестность N точки x^* такая, что $f(x^*) < f(x)$ для всех $x \in N \cap S$ с $x \neq x^*$.
- Мы называем точку x^* **стационарной точкой** (или критической точкой), если $\nabla f(x^*) = 0$. Любой локальный минимум дифференцируемой функции должен быть стационарной точкой.

1.2 Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

> **Theorem**
>
> Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$ - компактное множество и $f(x)$ - непрерывная функция на S. Тогда точка глобального минимума функции $f(x)$ на S существует.

Рисунок 3: Многие практические задачи теоретически разрешимы

Теорема Тейлора

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируемая функция и $p \in \mathbb{R}^n$. Тогда мы имеем:

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x+tp)^T p \quad \text{для некоторого } t \in (0,1)$$

Кроме того, если f дважды непрерывно дифференцируема, то мы имеем:

$$\nabla f(x+p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x+tp)p\,dt$$

$$f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp) p$$

для некоторого $t \in (0,1)$.

2 Безусловная оптимизация

2.1 Необходимые условия

Необходимое условие оптимальности первого порядка

Если x^* - локальный минимум и f непрерывно дифференцируема в открытой окрестности, то

$$\nabla f(x^*) = 0$$

Доказательство
Предположим от противного, что $\nabla f(x^*) \neq 0$. Определим вектор $p = -\nabla f(x^*)$ и заметим, что

$$p^T \nabla f(x^*) = -\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$$

Поскольку ∇f непрерывна в окрестности x^*, существует скаляр $T > 0$ такой, что

$$p^T \nabla f(x^* + tp) < 0, \text{ для всех } t \in [0, T]$$

Для любого $\bar{t} \in (0, T]$, мы имеем по теореме Тейлора, что

$$f(x^* + \bar{t}p) = f(x^*) + \bar{t}\, p^T \nabla f(x^* + tp), \text{ для некоторого } t \in (0, \bar{t})$$

Следовательно, $f(x^* + \bar{t}p) < f(x^*)$ для всех $\bar{t} \in (0, T]$. Мы нашли направление из x^* вдоль которого f убывает, поэтому x^* не является локальным минимумом, что приводит к противоречию.

2.2 Достаточные условия

Достаточные условия оптимальности второго порядка

Пусть $\nabla^2 f$ непрерывна в открытой окрестности x^*, и выполнено

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \nabla^2 f(x^*) \succ 0.$$

Тогда x^* является строгим локальным минимумом функции f.
Доказательство
Поскольку гессиан непрерывен и положительно определен в x^*, мы можем выбрать радиус $r > 0$ такой, что $\nabla^2 f(x)$ остается положительно определенным для всех x в открытом шаре $B = \{z \mid \|z - x^*\| < r\}$. Возьмем любой ненулевой вектор p с $\|p\| < r$, тогда $x^* + p \in B$ и поэтому

$$f(x^* + p) = f(x^*) + p^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z) p$$

$$= f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z) p$$

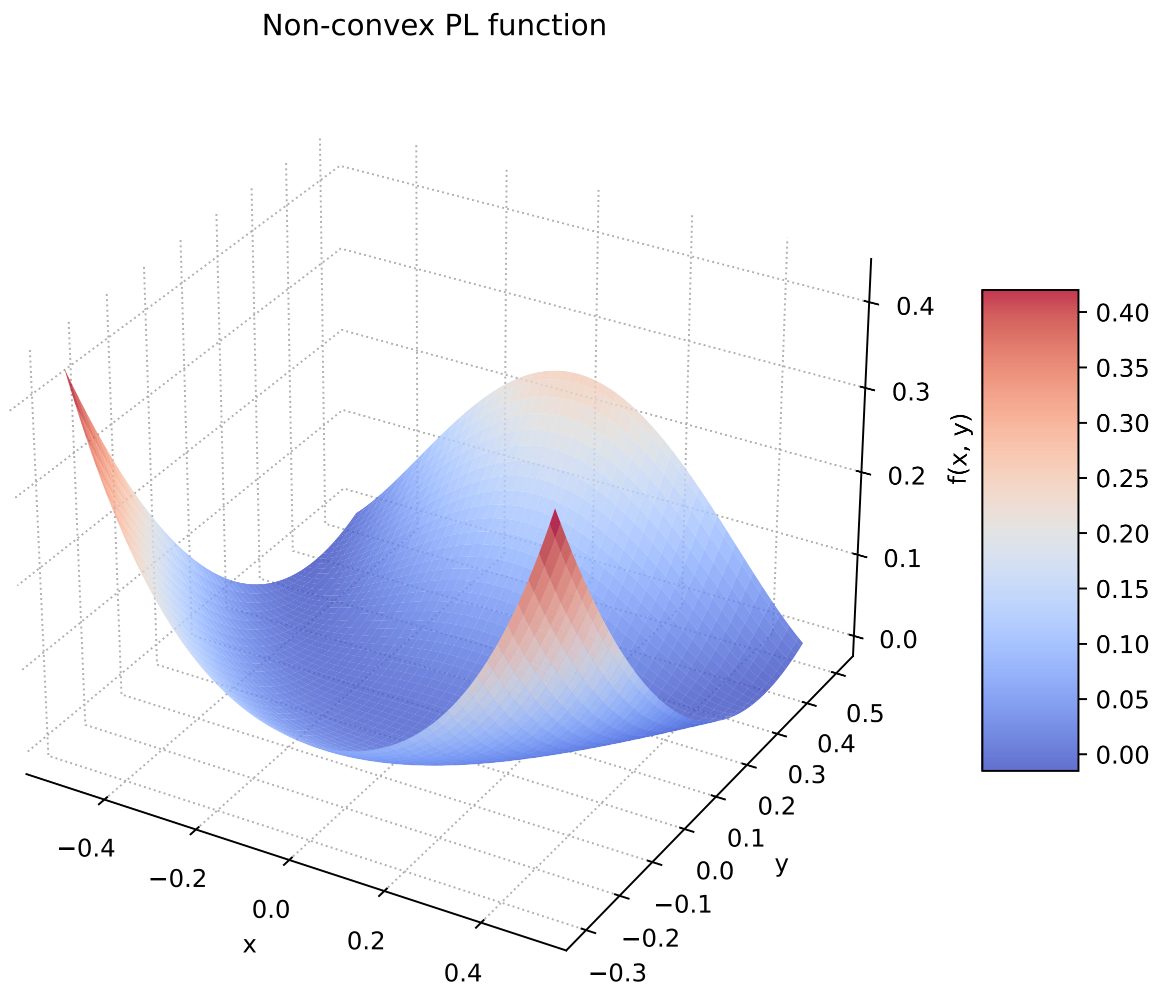
где $z = x^* + tp$ для некоторого $t \in (0, 1)$. Поскольку $z \in B$, то $p^T \nabla^2 f(z) p > 0$, и поэтому $f(x^* + p) > f(x^*)$, что доказывает утверждение.

2.3 Контрпример Пеано

Заметим, что если $\nabla f(x^*) = 0$, $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$ (гессиан положительно полуопределён), то мы не можем быть уверены, что x^* является локальным минимумом.

$$f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$$

Хотя поверхность не имеет локального минимума в начале координат, ее пересечение с любой вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат (плоскость с уравнением $y = mx$ или $x = 0$) является кривой, которая имеет локальный минимум в начале координат. Другими словами, если точка начинает движение в начале координат $(0, 0)$ вдоль любой прямой линии, то значение $(2x^2 - y)(x^2 - y)$ будет увеличиваться в начале движения. Тем не менее, $(0, 0)$ не является локальным минимумом функции, потому что движение вдоль параболы, такой как $y = \sqrt{2}x^2$, приведет к уменьшению значения функции.



3 Условная оптимизация

3.1 Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор $d \in \mathbb{R}^n$ является допустимым направлением в точке $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$, если малые шаги вдоль d не выводят нас за пределы S.

Пусть $S \subseteq \mathbb{R}^n$ и функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Предположим, что $x^* \in S$ является точкой локального минимума для f над S, и предположим далее, что f непрерывно дифференцируема в окрестности x^*.

1. Тогда для любого допустимого направления $d \in \mathbb{R}^n$ в x^* выполняется $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$.
2. Если, кроме того, S выпукло, то

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \forall x \in S.$$

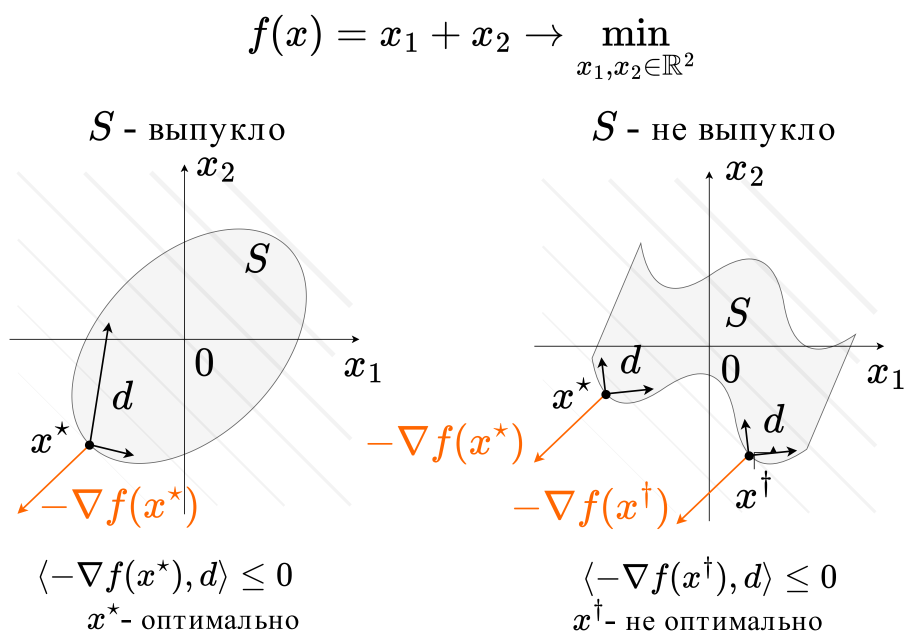


Рисунок 4: Общее условие локальной оптимальности первого порядка

3.2 Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых f и S) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если $f(x) : S \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве S, то:

- Любой локальный минимум является глобальным.
- Множество локальных минимумов S^* выпукло.
- Если $f(x)$ — строго или сильно выпуклая функция, то S^* содержит только одну точку: $S^* = \{x^*\}$.

3.3 Задачи с ограничениями-равенствами

В задачах без ограничений всё довольно интуитивно. В этом разделе мы добавим одно ограничение-равенство, то есть:

$$
\begin{aligned}
f(x) &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } h(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Мы попробуем проиллюстрировать подход к решению этой задачи через простой пример с $f(x) = x_1 + x_2$ и $h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2$.

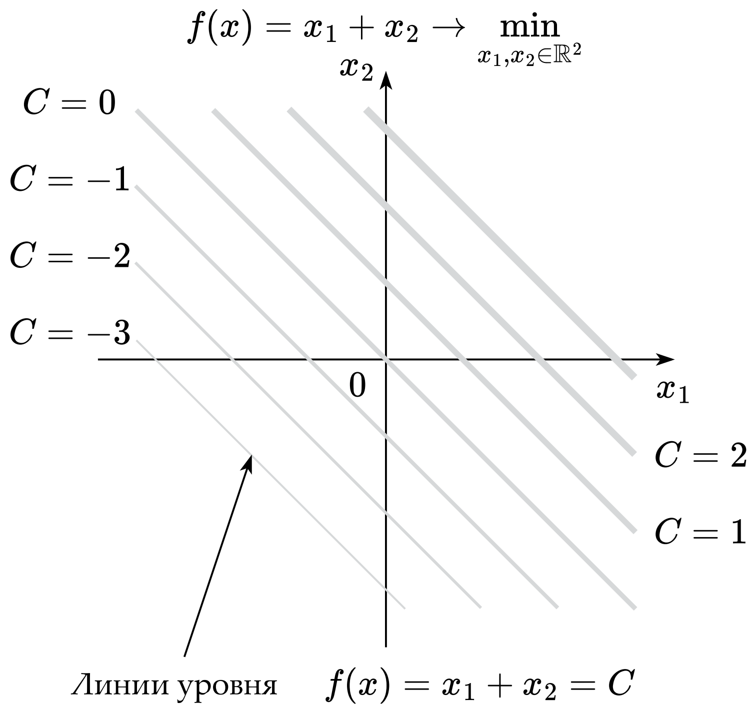


Рисунок 5: Иллюстрация ККТ

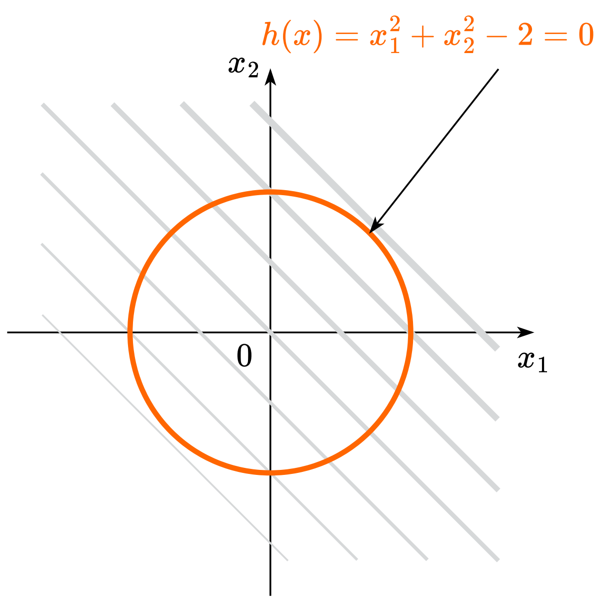


Рисунок 6: Иллюстрация ККТ

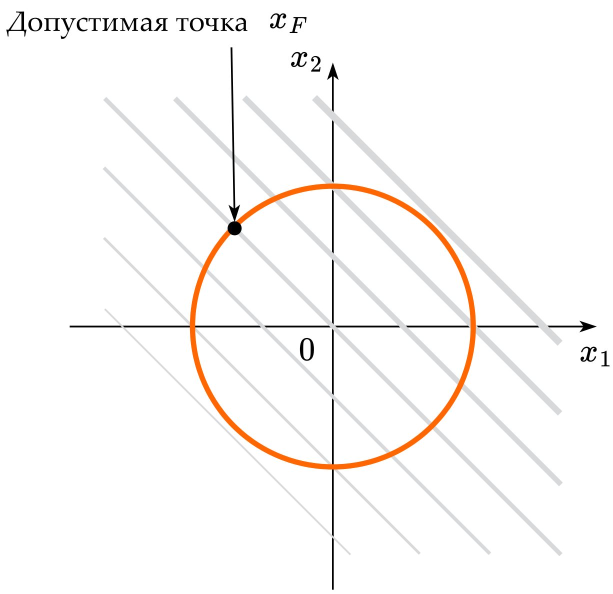


Рисунок 7: Иллюстрация ККТ

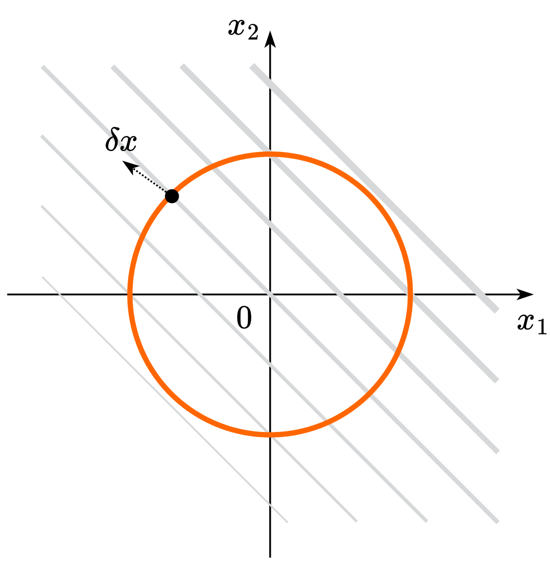


Рисунок 8: Иллюстрация ККТ

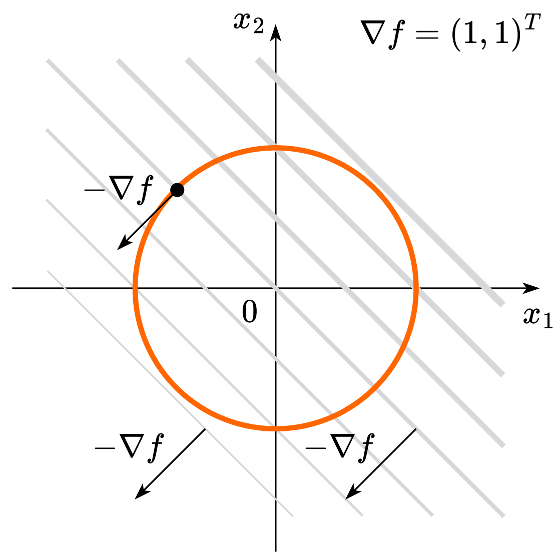


Рисунок 9: Иллюстрация ККТ

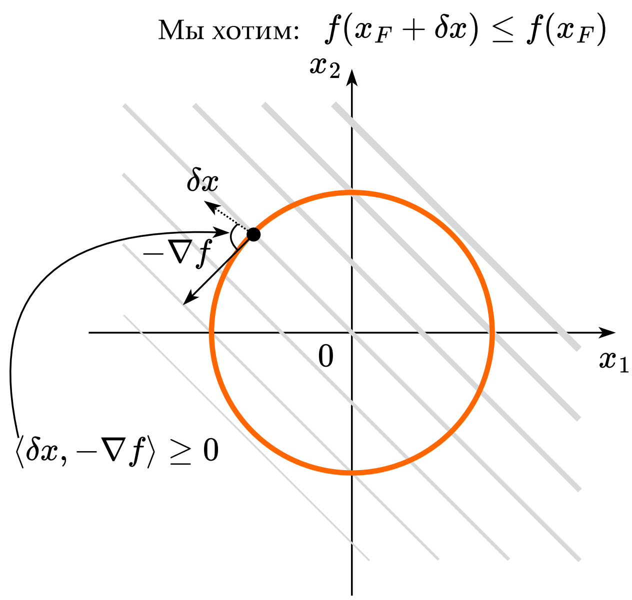


Рисунок 10: Иллюстрация ККТ

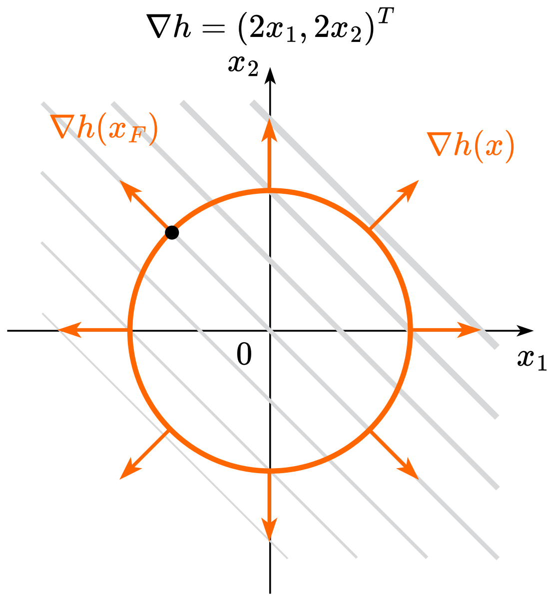


Рисунок 11: Иллюстрация ККТ

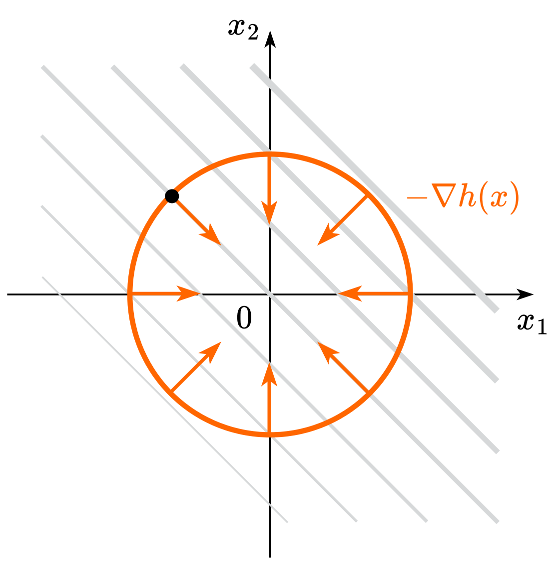


Рисунок 12: Иллюстрация ККТ

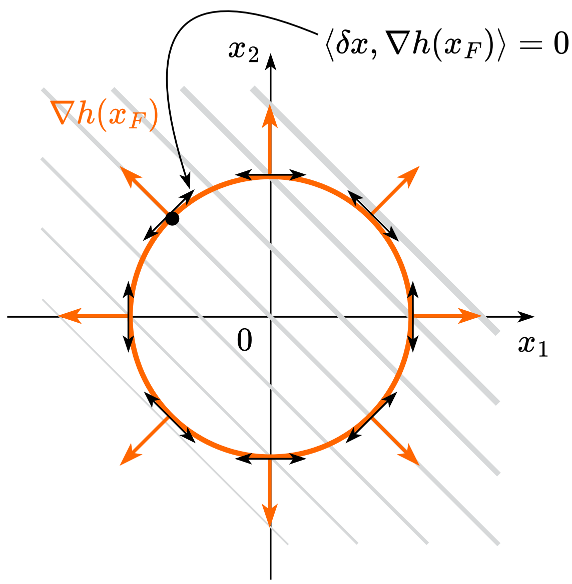


Рисунок 13: Иллюстрация ККТ

В общем случае, чтобы двигаться от x_F вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

$$-\nabla f(x) = \nu \nabla h(x)$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x) \rangle = \langle \delta x, \nu \nabla h(x) \rangle = 0$$

Тогда мы достигли такой точки допустимого множества, из которой нельзя уменьшить значение функции при допустимых малых сдвигах. Это и есть условие локального минимума в задаче с ограничением.

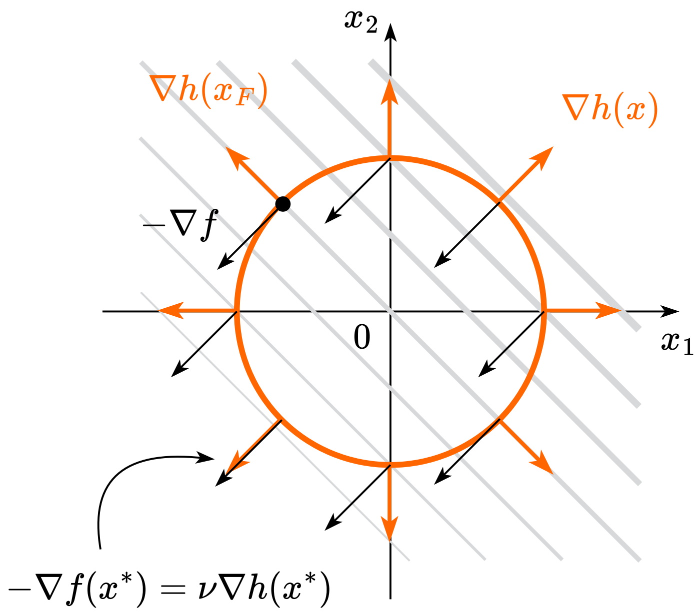


Рисунок 14: Иллюстрация ККТ

3.4 Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$
L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)
$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка x^* является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует ν^*:

$$
\begin{aligned}
&\text{Необходимые условия} \\
\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0 &\text{ это мы уже написали выше} \\
\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0 &\text{ бюджетное ограничение}
\end{aligned}
$$

Важно отметить, что $L(x^*, \nu^*) = f(x^*)$.

$$
\begin{split}
& f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split} \tag{ECP}
$$

$$
L(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{p} \nu_i h_i(x) = f(x) + \nu^\top h(x)
$$

Пусть $f(x)$ и $h_i(x)$ дважды дифференцируемы в точке x^* и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности x^*. Условия локального минимума для $x \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{R}^p$ записываются как

$$
\begin{aligned}
&\text{Необходимые условия} \\
&\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0 \\
&\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0
\end{aligned}
$$

3.5 Задача наименьших квадратов

Example

Поставим задачу оптимизации и решим ее для линейной системы $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ для трех случаев (предполагая, что матрица имеет полный ранг):

- $m < n$
- $m = n$
- $m > n$

4 Задачи с ограничениями-неравенствами

4.1 Пример задачи с ограничениями-неравенствами

$$
f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } g(x) &\leq 0
\end{aligned}
$$

4.2 Задачи с ограничениями-неравенствами

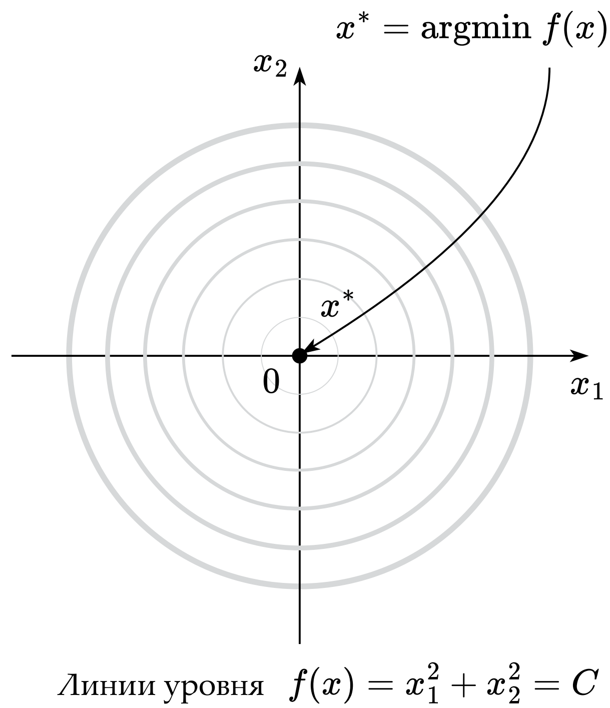


Рисунок 15: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

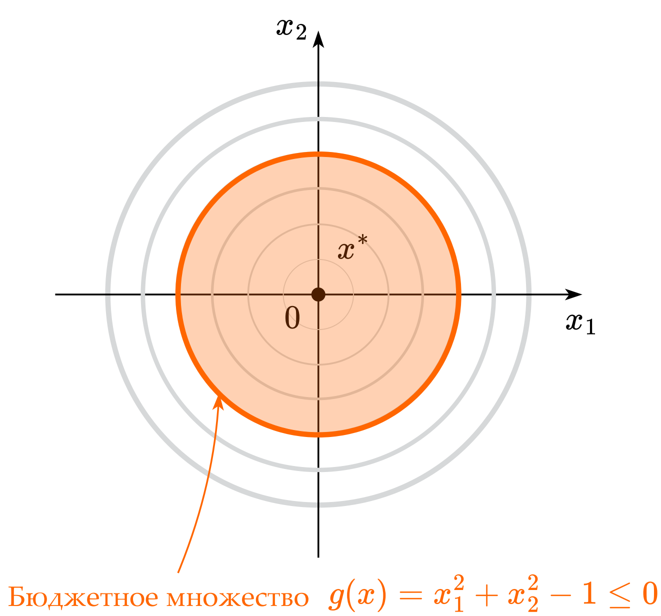


Рисунок 16: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

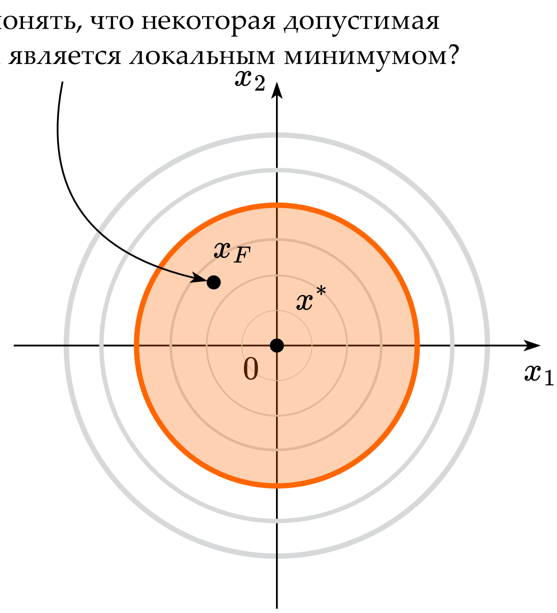


Рисунок 17: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Рисунок 18: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Таким образом, если ограничения типа неравенства неактивны в условной задаче, то мы можем решать задачу без ограничений. Однако так бывает не всегда. Рассмотрим второй простой пример.

$$
f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \qquad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } g(x) &\leq 0
\end{aligned}
$$

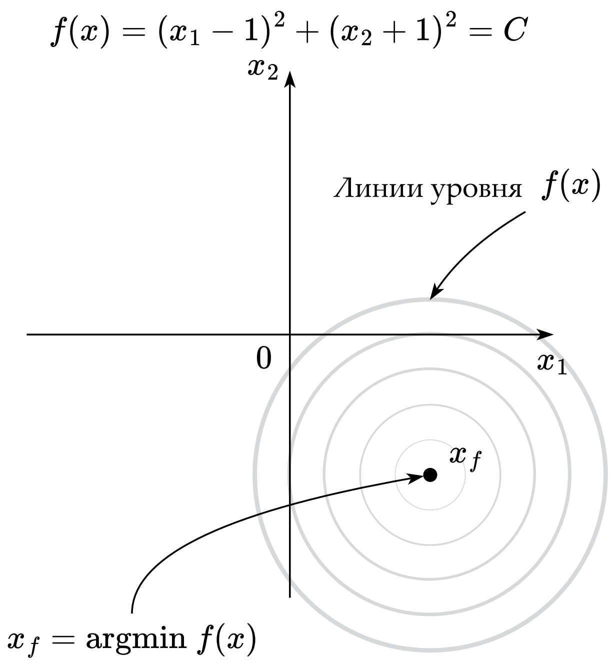


Рисунок 19: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

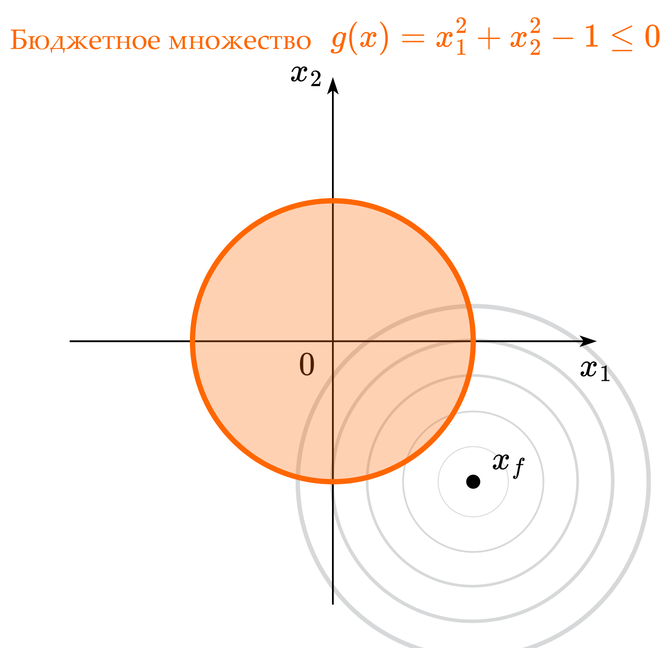


Рисунок 20: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Рисунок 21: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Рисунок 22: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

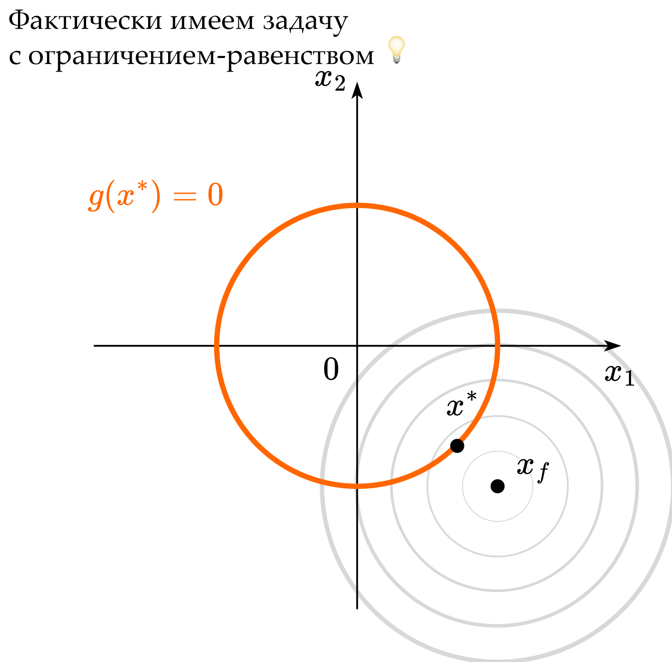


Рисунок 23: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

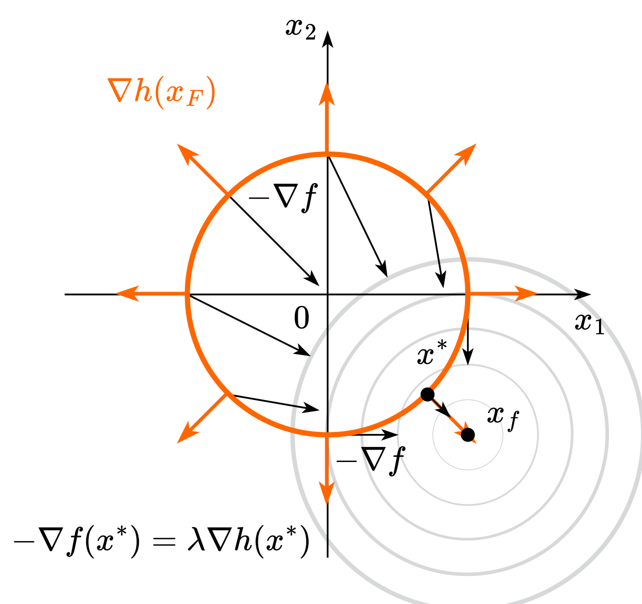


Рисунок 24: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

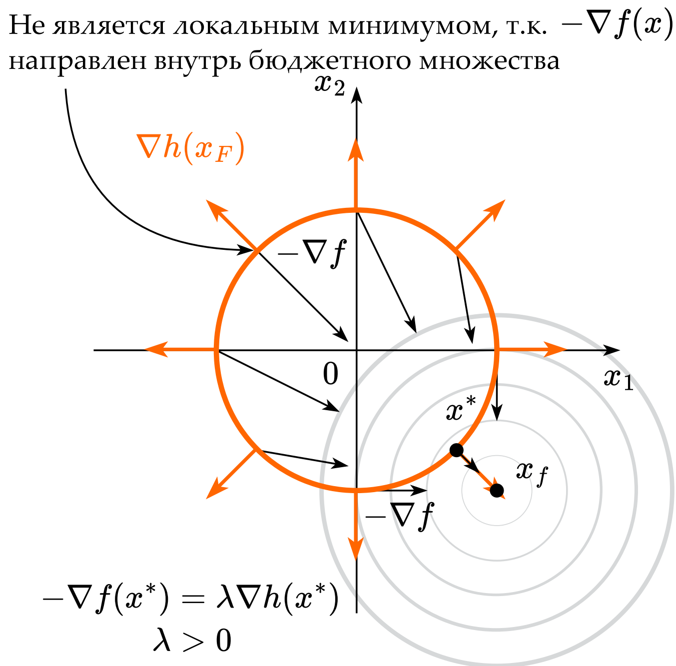


Рисунок 25: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Итак, у нас есть задача:

$$
\begin{split}
& f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & g(x) \leq 0
\end{split}
$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$ неактивно. $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

$g(x) \leq 0$ активно. $g(x^*) = 0$

- $g(x^*) = 0$
- Необходимые условия: $-\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$, $\lambda > 0$

4.3 Лагранжиан для задач с ограничениями-неравенствами

Объединяя два возможных случая, мы можем записать общие условия для задачи:

$$
\begin{split}
& f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & g(x) \leq 0
\end{split}
$$

Определим функцию Лагранжа:

$$
L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)
$$

Классические условия Каруша-Куна-Таккера для локального минимума x^*, сформулированные при некоторых условиях регулярности, можно записать следующим образом.

Если x^* является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует единственный множитель Лагранжа λ^* такой, что:

$$
\begin{aligned}
&(1)\ \nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0 \\
&(2)\ \lambda^* \geq 0 \\
&(3)\ \lambda^* g(x^*) = 0 \\
&(4)\ g(x^*) \leq 0
\end{aligned}
$$

4.4 Общая формулировка

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \dots, m \\
& h_i(x) = 0, \ i = 1, \dots, p
\end{split}
$$

Данная формулировка является общей задачей математического программирования.

Решение включает в себя построение лагранжиана:

$$
L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)
$$

4.5 Необходимые условия

Пусть x^*, (λ^*, ν^*) является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи p^* равно оптимальному значению для двойственной задачи d^*). Пусть также функции f_0, f_i, h_i дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\lambda^*_i \geq 0, i = 1, \dots, m$
- $\lambda^*_i f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- $f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$

4.6 Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша-Куна-Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми f_0, f_i и аффинными h_i) существует точка x такая, что $h(x) = 0$ и $f_i(x) < 0$ (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша—Куна—Таккера становятся необходимыми и достаточными.
- **Условие линейной квалификации ограничений.** Если f_i и h_i являются аффинными функциями, то никаких других условий не требуется.

- **Условие линейной независимости ограничений.** Градиенты активных ограничений неравенства и градиенты ограничений равенства линейно независимы в точке x^*.

- Для других примеров см. wiki.

4.7 Проекция на гиперплоскость

$$
\min \frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T\mathbf{x} = b.
$$

Решение

Лагранжиан:

$$
L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2}\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T\mathbf{x} - b)
$$

Производная L по $\mathbf{x}$:

$$
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \nu\mathbf{a} = 0, \qquad \mathbf{x} = \mathbf{y} - \nu\mathbf{a}
$$

$$
\mathbf{a}^T\mathbf{x} = \mathbf{a}^T\mathbf{y} - \nu\mathbf{a}^T\mathbf{a} \qquad \nu = \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2}
$$

$$
\mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{a}^T\mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a}
$$

4.8 Проекция на единичный симплекс

$$
\min \frac{1}{2}\|x-y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.
$$

4.8.0.1 Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$
L = \frac{1}{2}\|x-y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)
$$

Взяв производную L по x_i и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0$

> **Question**
>
> Решите систему выше за $O(n \log n)$.

Question

Решите систему выше за $O(n)$.

4.9 Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе "Элементы статистического обучения" @ KTH.
- Однострочное доказательство ККТ
- О втором порядке оптимальности для задач оптимизации с ограничениями неравенства
- О втором порядке оптимальности в нелинейной оптимизации
- Численная оптимизация by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright.

5 Задачи

Задача 1

Функция $f : E \to \mathbb{R}$ определена как

$$f(x) = \ln(-Q(x))$$

где $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0\}$ и

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x + c$$

с $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$.

Найдите точку максимума x^* функции f.

Задача 2

Найдите явное решение следующей задачи.

$$\begin{aligned} f(x, y) = x + y &\to \min \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

где $x, y \in \mathbb{R}$.

Задача 3

Найдите явное решение следующей задачи.

$$\begin{aligned} \langle c, x\rangle + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n x_i &= 1, \end{aligned}$$

где $x \in \mathbb{R}^n_{++}, c \neq 0$.

Задача 4

Пусть $A \in \mathbb{S}^n_{++}, b > 0$ покажите, что:

$$\det(X) \to \max_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \text{s.t.} \langle A, X \rangle \leq b$$

Имеет единственное решение и найдите его.

Задача 5

Пусть $y \in \{-1, 1\}$, и $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$, задача опорных векторов (Support Vector Machine) задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||w||_2^2 + C\sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min_{w, w_0, \xi_i} \\
\text{s.t. } & \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\
& y_i(x_i^T w + w_0) \geq 1 - \xi_i, i = 1, \dots, n
\end{aligned}$$

найдите условие стационарности ККТ.

Задача 6

Покажите, что следующая задача оптимизации с ограничениями имеет единственное решение и найдите его.

$$\langle C^{-1}, X \rangle - \log\det(X) \to \min_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \text{s.t. } a^T X a \leq 1$$

$C \in \mathbb{S}^n_{++}, a \neq 0$

В ответе следует избежать явного обращения матрицы C.

Задача 7 (БОНУС)

Для некоторых $\Sigma, \Sigma_0 \in \mathbb{S}^n_{++}$ определим KL-расхождение между двумя гауссовыми распределениями как:

$$D(\Sigma, \Sigma_0) = \frac{1}{2}(\langle \Sigma_0^{-1}, \Sigma \rangle - \log\det(\Sigma_0^{-1}\Sigma) - n)$$

Теперь пусть $H \in \mathbb{S}^n_{++}$ и $y, x \in \mathbb{R}^n : \langle y, s \rangle > 0$

Мы хотим решить следующую задачу минимизации с ограничениями.

$$\min_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \{D(X^{-1}, H^{-1}) | Xy = s\}$$

Покажите, что она имеет единственное решение и оно равно:

$$(I_n - \frac{sy^T}{y^T s})H(I_n - \frac{ys^T}{y^T s}) + \frac{ss^T}{y^T s}$$

Задача 8 (БОНУС)

Пусть $e_1, \dots, e_n$ будет стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что:

$$
\max_{X \in \mathbb{S}^n_{++}} \det(X) : ||Xe_i|| \leq 1 \forall i \in 1, \ldots, n
$$

Имеет единственное решение I_n, и выведите неравенство Гильберта:

$$
\det(X) \leq \prod_{i=1}^{n} ||Xe_i|| \forall X \in \mathbb{S}^n_{++}
$$

6 Задачи на дом

В этом разделе вы можете рассматривать произвольную норму или евклидову норму, если не указано иное.

1. **Простой пример** [10 баллов]

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &\to \min_{x \in \mathbb{R}} \\
\text{s.t. } (x-2)(x-4) &\leq 0
\end{aligned}
$$

   1. Найдите допустимое множество, оптимальное значение и оптимальное решение.
   2. Постройте график функции x^2+1 в зависимости от x. На том же графике покажите допустимое множество, оптимальную точку и значение, а также постройте график лагранжиана $L(x, \mu)$ в зависимости от x для нескольких положительных значений μ. Проверьте свойство нижней границы ($p^* \geq \inf_x L(x, \mu)$ для $\mu \geq 0$). Выведите и нарисуйте функцию Лагранжа g.
   3. Пусть $p^*(u)$ обозначает оптимальное значение следующей задачи:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &\to \min_{x \in \mathbb{R}} \\
\text{s.t. } (x-2)(x-4) &\leq u
\end{aligned}
$$

   как функции параметра u. Постройте график $p^*(u)$. Проверьте, что $\dfrac{dp^*(0)}{du} = -\mu^*$

2. Рассмотрим гладкую выпуклую функцию $f(x)$ в некоторой точке x_k. Её разложение Тейлора первого порядка имеет вид:

$$
f^I_{x_k}(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top (x - x_k),
$$

   где мы можем определить $\delta x = x - x_k$ и $g = \nabla f(x_k)$. Таким образом, разложение можно переписать как:

$$
f^I_{x_k}(\delta x) = f(x_k) + g^\top \delta x.
$$

   Предположим, мы хотим построить семейство методов оптимизации, которое будет определяться следующим образом:

$$
x_{k+1} = \arg\min_x \left\{ f^I_{x_k}(\delta x) + \frac{\lambda}{2} \|\delta x\|^2 \right\},
$$

   где $\lambda > 0$ является параметром.

   1. [5 баллов] Покажите, что этот метод эквивалентен методу градиентного спуска с выбором евклидовой нормы вектора $\|\delta x\| = \|\delta x\|_2$. Найдите соответствующий коэффициент обучения.

2. [5 баллов] Докажите, что следующее утверждение верно:

$$\arg\min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \left\{ g^T \delta x + \frac{\lambda}{2} \|\delta x\|^2 \right\} = -\frac{\|g\|_*}{\lambda} \arg\max_{\|t\|=1} \left\{ t^T g \right\},$$

где $\|g\|_*$ является двойственной нормой g.

3. [3 балла] Рассмотрим другую векторную норму $\|\delta x\| = \|\delta x\|_\infty$. Запишите явное выражение для соответствующего метода.
4. [2 балла] Рассмотрим индуцированную операторную матричную норму для любой матрицы $W \in \mathbb{R}^{d_{out} \times d_{in}}$

$$\|W\|_{\alpha \to \beta} = \max_{x \in \mathbb{R}^{d_{in}}} \frac{\|Wx\|_\beta}{\|x\|_\alpha}.$$

Обычно, когда мы решаем оптимизационные задачи в глубоком обучении, мы складываем матрицы весов для всех слоев $l = [1, L]$ в один вектор.

$$w = \text{vec}(W_1, W_2, \dots, W_L) \in \mathbb{R}^n,$$

Можете ли вы записать явное выражение, которое связывает

$$\|w\|_\infty \qquad \text{and} \qquad \|W_l\|_{\alpha \to \beta},\ l = [1, L]?$$

3. [10 баллов] Найдите явное решение следующей задачи линейного программирования.

$$\begin{aligned} c^\top x &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } 1^\top x &= 1, \\ x &\succeq 0 \end{aligned}$$

Эта задача может быть рассмотрена как самый простой пример задачи оптимизации портфеля.

4. [20 баллов] Покажите, что следующая задача имеет единственное решение и найдите его:

$$\begin{aligned} \langle C^{-1}, X \rangle - \log\det X &\to \min_{x \in \mathbb{R}^{n \times n}} \\ \text{s.t. } \langle Xa, a \rangle &\le 1, \end{aligned}$$

где $C \in \mathbb{S}^n_{++}$, $a \in \mathbb{R}^n \neq 0$. Ответ не должен включать обращение матрицы C.

5. [20 баллов] Найдите явное решение следующей задачи квадратичного программирования.

$$\begin{aligned} c^\top x &\to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } (x - x_c)^\top A (x - x_c) &\le 1, \end{aligned}$$

где $A \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \neq 0$, $x_c \in \mathbb{R}^n$.

6. [10 баллов] Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями равенства.

$$
\begin{aligned}
&\|Ax - b\|_2^2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &Cx = d,
\end{aligned}
$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с $\textbf{rank}A = n$, и $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$ с $\textbf{rank}C = k$. Запишите условия ККТ, и выведите выражения для решения x^*.

7. **Интерпретация условий ККТ в терминах опорной гиперплоскости**. [10 баллов] Рассмотрим **выпуклую** задачу без ограничений равенства.

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m]
\end{aligned}
$$

Предположим, что $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}^m$ удовлетворяют условиям ККТ

$$
\begin{aligned}
&\nabla_x L(x^*, \mu^*) = \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i(x^*) = 0 \\
&\mu_i^* \geq 0, \quad i = [1, m] \\
&\mu_i^* f_i(x^*) = 0, \quad i = [1, m] \\
&f_i(x^*) \leq 0, \quad i = [1, m]
\end{aligned}
$$

Покажите, что

$$
\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0
$$

для всех допустимых x. Другими словами, условия ККТ подразумевают простой критерий оптимальности или $\nabla f_0(x^*)$ определяет опорную гиперплоскость к допустимому множеству в точке x^*.

8. **Метод штрафов для ограничений равенства.** [10 баллов] Рассмотрим задачу минимизации

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &Ax = b,
\end{aligned}
$$

где $f_0(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ выпукла и дифференцируема, и $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с $\textbf{rank}A = m$. В методе квадратичных штрафов мы формируем вспомогательную функцию

$$
\phi(x) = f_0(x) + \alpha \|Ax - b\|_2^2,
$$

где $\alpha > 0$ является параметром. Эта вспомогательная функция состоит из целевой функции плюс штрафное слагаемое $\alpha \|Ax - b\|_2^2$. Идея состоит в том, что минимизатор вспомогательной функции,

$\tilde{x}$, должен быть приближенным решением исходной задачи. Интуиция подсказывает, что чем больше вес штрафа α, тем лучше приближение $\tilde{x}$ к решению исходной задачи. Предположим, что $\tilde{x}$ является минимизатором $\phi(x)$. Найдите соответствующую нижнюю границу для оптимального значения исходной задачи.