

# Выпуклость множеств и функций

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 4

Даня Меркулов  
Пётр Остроухов



**Выпуклость. Сильная выпуклость.**

**Семинар**

**Оптимизация для всех! ЦУ**



# Напоминание с лекции

# Выпуклые множества

# Отрезок

Пусть  $x_1, x_2$  два вектора в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда отрезок, проходящий через них, определяется следующим образом:

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \quad \theta \in [0, 1]$$



Рисунок 1. Иллюстрация отрезка между точками  $x_1, x_2$

# Выпуклое множество

Множество  $S$  называется **выпуклым**, если для любых  $x_1, x_2$  из  $S$  отрезок между ними также лежит в  $S$ , т.е.

$$\forall \theta \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in S : \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$$

## Example

Любое аффинное множество, луч, отрезок – все они являются выпуклыми множествами.



Рисунок 2. Вверх: примеры выпуклых множеств. Низ: примеры невыпуклых множеств.

# Задача 1

## Question

Докажите, что шар в  $\mathbb{R}^n$  (т.е. множество  $\{\mathbf{x} \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| \leq r\}$ ) - является выпуклым.

## Задача 2

 Question

Является ли полоса  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^\top x \leq \beta\}$  выпуклой?

## Задача 3

### Question

Пусть  $S$  такое, что  $\forall x, y \in S \rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in S$ . Является ли это множество выпуклым?

## Задача 4

 Question

Является ли множество  $S = \{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ , где  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  с выпуклым  $S_1$ , выпуклым?

# Функции

# Выпуклая функция

Функция  $f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , называется **выпуклой** на  $S$ , если:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

для любых  $x_1, x_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Если вышеуказанное неравенство выполняется как строгое неравенство  $x_1 \neq x_2$  и  $0 < \lambda < 1$ , то функция называется **строго выпуклой** на  $S$ .

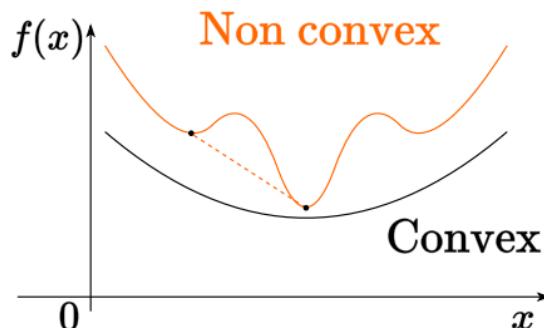


Рисунок 3. Разница между выпуклой и невыпуклой функцией

# Сильная выпуклость

$f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , называется  $\mu$ -сильно выпуклой (сильно выпуклой) на  $S$ , если:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$

для любых  $x_1, x_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  для некоторого  $\mu > 0$ .



Рисунок 4. Сильно выпуклая функция больше или равна квадратичной аппроксимации Тейлора в любой точке

# Критерии выпуклости

# Дифференциальный критерий выпуклости первого порядка

Дифференцируемая функция  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  является выпуклой тогда и только тогда, когда  $\forall x, y \in S$ :

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y - x)$$

Пусть  $y = x + \Delta x$ , тогда критерий станет более удобным:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) + \nabla f^T(x)\Delta x$$



Рисунок 5. Выпуклая функция больше или равна линейной аппроксимации Тейлора в любой точке

# Дифференциальный критерий выпуклости второго порядка

Дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  является  $\mu$ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда  $\forall x \in \text{int}(S) \neq \emptyset$ :

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I$$

Другими словами:

$$\langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle \geq \mu \|y\|^2$$



# Эксперимент с JAX

Почему выпуклость и сильная выпуклость важны? Проверьте простой код.

## Задача 5

### Question

Докажите, что  $f(x) = \|x\|$  является выпуклой на  $\mathbb{R}^n$ .

### Question

Докажите, что  $f(x) = x^\top Ax$ , где  $A \succeq 0$  - является выпуклой на  $\mathbb{R}^n$ .

## Задача 6

### Question

Докажите, что если  $f(x)$  является выпуклой на  $\mathbb{R}^n$ , то  $\exp(f(x))$  является выпуклой на  $\mathbb{R}^n$ .

## Задача 7

### Question

Докажите, что если  $f(x)$  является выпуклой неотрицательной функцией и  $p \geq 1$ , то  $g(x) = f(x)^p$  является выпуклой.

## Задача 8

### Question

Докажите, что если  $f(x)$  является вогнутой положительной функцией над выпуклым  $S$ , то  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  является выпуклой.

### Question

Докажите, что следующая функция является выпуклой на множестве всех положительных знаменателей

$$f(x) = \frac{1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \frac{1}{x_3 - \dots}}}, x \in \mathbb{R}^n$$

## Задача 9

### Question

Пусть  $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \succ 0, \|x\|_\infty \leq M\}$ . Докажите, что  $f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i$  является  $\frac{1}{M}$ -сильно выпуклой.

# Условие Поляка - Лоясиевича

# Условие Поляка - Лоясиевича

Условие Поляка - Лоясиевича выполняется, если выполняется следующее условие для некоторого  $\mu > 0$ ,

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq \mu(f(x) - f^*) \forall x$$

Пример функции, которая удовлетворяет условию Поляка - Лоясиевича, но не является выпуклой.

$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Пример невыпуклой функции, удовлетворяющей условию Поляка - Лоясиевича  [Open in Colab](#).

# Практические примеры

# Логистическая регрессия

 Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{0, 1\}^n.$$

# Логистическая регрессия

**i** Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{0, 1\}^n.$$

**!** Найти

Найти функцию, которая переводит объект  $x$  в вероятность  $p(y = 1|x)$ :

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, 1), p(x) \equiv \sigma(x^T w) = \frac{1}{1 + \exp(-x^T w)}$$

# Логистическая регрессия

! Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{0, 1\}^n.$$

! Найти

Найти функцию, которая переводит объект  $x$  в вероятность  $p(y = 1|x)$ :

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, 1), p(x) \equiv \sigma(x^T w) = \frac{1}{1 + \exp(-x^T w)}$$

! Критерий

Двоичная кросс-энтропия (лог-потери):  $L(p, X, y) = -\sum_{i=1}^n y_i \log p(X_i) + (1 - y_i) \log(1 - p(X_i))$ , которая минимизируется относительно  $w$ .

# Логистическая регрессия

**!** Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{0, 1\}^n.$$

**!** Найти

Найти функцию, которая переводит объект  $x$  в вероятность  $p(y = 1|x)$ :

$$p : \mathbb{R}^m \rightarrow (0, 1), p(x) \equiv \sigma(x^T w) = \frac{1}{1 + \exp(-x^T w)}$$

**!** Критерий

Двоичная кросс-энтропия (лог-потери):  $L(p, X, y) = - \sum_{i=1}^n y_i \log p(X_i) + (1 - y_i) \log(1 - p(X_i)),$  которая минимизируется относительно  $w.$

Рассмотрите  эксперименты по логистической регрессии.



Мы можем сделать эту задачу  $\mu$ -сильно выпуклой, если рассмотрим регуляризованную логистическую потерю как критерий:  
 $L(p, X, y) + \frac{\mu}{2} \|w\|_2^2.$

# Метод опорных векторов (SVM)

 Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{-1, 1\}^n.$$

# Метод опорных векторов (SVM)

 Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{-1, 1\}^n.$$

 Найти

Найти гиперплоскость, которая максимизирует маржу между двумя классами:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \{-1, 1\}, f(x) = \text{sign}(w^T x + b).$$

# Метод опорных векторов (SVM)

■ Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{-1, 1\}^n.$$

! Найти

Найти гиперплоскость, которая максимизирует маржу между двумя классами:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \{-1, 1\}, f(x) = \text{sign}(w^T x + b).$$

💡 Критерий

Шарнирная функция потерь:

$$L(w, X, y) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + C \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(X_i^T w + b)),$$
 которая минимизируется относительно  $w$  и  $b$ .

Эта задача является сильно выпуклой из-за квадратичной евклидовой нормы.

Рассмотрите  эксперименты по SVM в том же ноутбуке.

# Метод опорных векторов (SVM)

**!** Дано

$$X \in \mathbb{R}^{m \times n}, y \in \{-1, 1\}^n.$$

**!** Найти

Найти гиперплоскость, которая максимизирует маржу между двумя классами:

$$f : \mathbb{R}^m \rightarrow \{-1, 1\}, f(x) = \text{sign}(w^T x + b).$$

**!** Критерий

Шарнирная функция потерь:

$$L(w, X, y) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + C \sum_{i=1}^n \max(0, 1 - y_i(X_i^T w + b)),$$

которая минимизируется относительно  $w$  и  $b$ .

Эта задача является сильно выпуклой из-за квадратичной евклидовой нормы.

Рассмотрите эксперименты по SVM в том же ноутбуке.



Рисунок 6. Метод опорных векторов



Рисунок 7.  $L_2$ -регуляризованная шарнирная потеря в пространстве параметров для  $x = (1, 1), y = 1$

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$



Является ли это выпуклым?

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

## Question

Является ли это выпуклым?

По теореме Эккарта-Янга это можно решить с помощью SVD:  $X^* = U_k \Sigma_k V_k^T$ , где  $A = U \Sigma V^T$ .

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

## Question

Является ли это выпуклым?

По теореме Эккарта-Янга это можно решить с помощью SVD:  $X^* = U_k \Sigma_k V_k^T$ , где  $A = U \Sigma V^T$ .

- Выпуклая релаксация через ядерную норму

$$\min_X \text{rank}(X), \text{ s.t. } X_{ij} = M_{ij}, (i, j) \in I.$$

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

## Question

Является ли это выпуклым?

По теореме Эккарта-Янга это можно решить с помощью SVD:  $X^* = U_k \Sigma_k V_k^T$ , где  $A = U \Sigma V^T$ .

- Выпуклая релаксация через ядерную норму

$$\min_X \text{rank}(X), \text{ s.t. } X_{ij} = M_{ij}, (i, j) \in I.$$

# Некоторые любопытные примеры

- Приближение низкоранговой матрицы

$$\min_X \|A - X\|_F^2 \text{ s.t. } \text{rank}(X) \leq k.$$

## Question

Является ли это выпуклым?

По теореме Эккарта-Янга это можно решить с помощью SVD:  $X^* = U_k \Sigma_k V_k^T$ , где  $A = U \Sigma V^T$ .

- Выпуклая релаксация через ядерную норму

$$\min_X \text{rank}(X), \text{ s.t. } X_{ij} = M_{ij}, (i, j) \in I.$$

NP-сложная задача, но  $\|A\|_* = \text{trace}(\sqrt{A^T A}) = \sum_{i=1}^{\text{rank}(A)} \sigma_i(A)$  является выпуклой оболочкой ранга матрицы.