

# Выпуклость: выпуклые множества, выпуклые функции.

## Условие Поляка - Лоясиевича. Сильная выпуклость

Даня Меркулов

### 1 Выпуклые множества

#### 1.1 Аффинные множества

Пусть  $x_1, x_2$  два вектора в  $\mathbb{R}^n$ . Тогда прямая, проходящая через них, определяется следующим образом:

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \theta \in \mathbb{R}$$

Множество  $A$  называется **аффинным**, если для любых  $x_1, x_2$  из  $A$  прямая, проходящая через них, также лежит в  $A$ , т.е.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in A : \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in A$$

#### i Example

- $\mathbb{R}^n$  - аффинное множество.
- Множество решений  $\{x \mid Ax = b\}$  также является аффинным множеством.

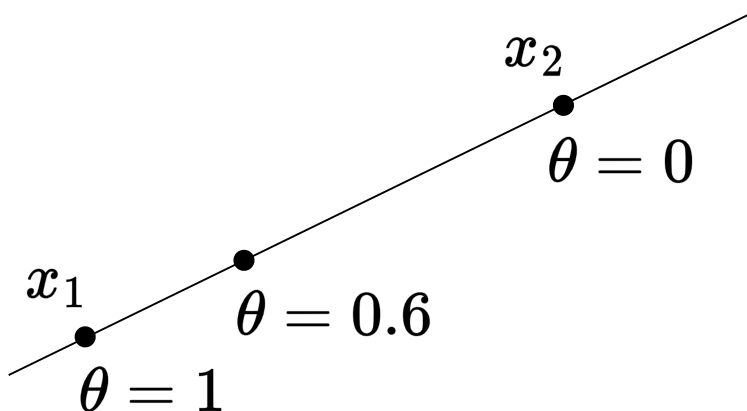


Рисунок 1: Иллюстрация прямой между двумя векторами  $x_1$  и  $x_2$

## 1.2 Конус

Множество  $S$  называется **конусом**, если:

$$\forall x \in S, \theta \geq 0 \rightarrow \theta x \in S$$

Если точка принадлежит конусу, то и весь луч, проходящий из начала координат через эту точку, также принадлежит этому конусу.

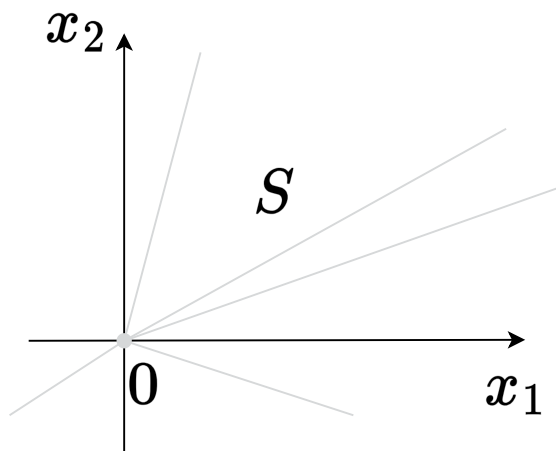


Рисунок 2: Иллюстрация конуса

## 1.3 Выпуклый конус

Множество  $S$  называется **выпуклым конусом**, если:

$$\forall x_1, x_2 \in S, \theta_1, \theta_2 \geq 0 \rightarrow \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in S$$

Выпуклый конус это конус, который также является выпуклым множеством.

### Example

- $\mathbb{R}^n$
- Аффинные множества, содержащие 0
- Луч
- $S_+^n$  - множество симметричных положительно полуопределенных матриц

Выпуклый конус является выпуклым множеством, содержащим все конические комбинации точек в множестве.



Рисунок 3: Иллюстрация выпуклого конуса

#### 1.4 Отрезок

Пусть  $x_1, x_2$  два вектора в  $\mathbb{R}^n$ .

Тогда отрезок между ними определяется следующим образом:

$$x = \theta x_1 + (1 - \theta)x_2, \theta \in [0, 1]$$

Выпуклое множество содержит отрезок между любыми двумя точками в множестве.

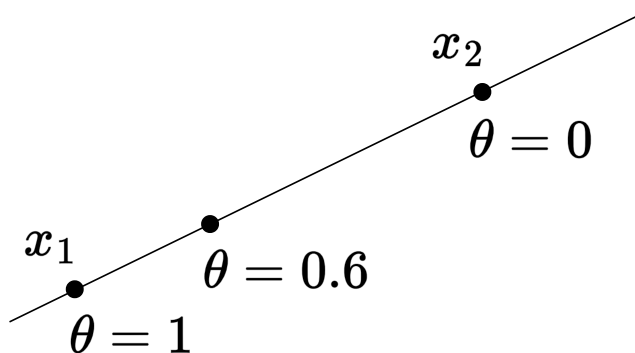


Рисунок 4: Иллюстрация отрезка между точками  $x_1, x_2$

## 1.5 Выпуклое множество

Множество  $S$  называется **выпуклым**, если для любых  $x_1, x_2$  из  $S$  отрезок между ними также лежит в  $S$ , т.е.

$$\forall \theta \in [0, 1], \forall x_1, x_2 \in S : \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$$

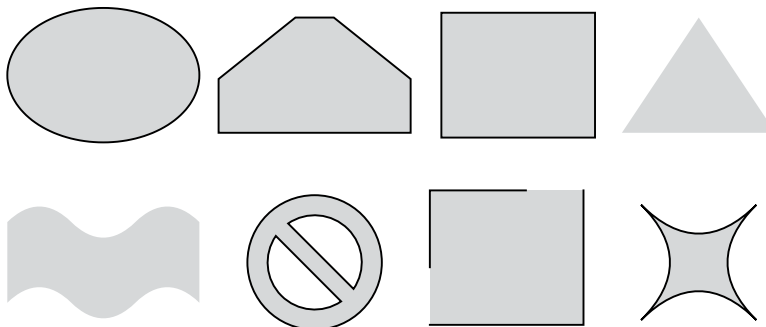


Рисунок 5: Верх: примеры выпуклых множеств. Низ: примеры невыпуклых множеств.

### i Example

Пустое множество и множество из одного вектора являются выпуклыми по определению.

### i Example

Любое аффинное множество, луч или отрезок являются выпуклыми множествами.

## 1.6 Выпуклая комбинация

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_k \in S$ , тогда точка  $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \dots + \theta_k x_k$  называется **выпуклой комбинацией** точек  $x_1, x_2, \dots, x_k$  если  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0$ .

## 1.7 Выпуклая оболочка

Множество всех выпуклых комбинаций точек из  $S$  называется **выпуклой оболочкой** множества  $S$ .

$$\text{conv}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \theta_i x_i \mid x_i \in S, \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \theta_i \geq 0 \right\}$$

\* Множество  $\text{conv}(S)$  является наименьшим выпуклым множеством, содержащим  $S$ . \* Множество  $S$  является выпуклым тогда и только тогда, когда  $S = \text{conv}(S)$ .

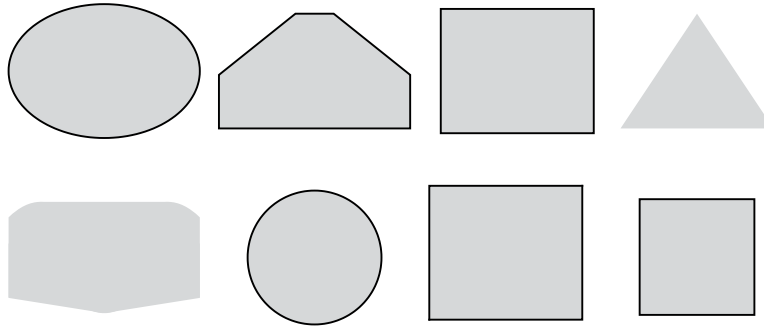


Рисунок 6: Верх: выпуклые оболочки выпуклых множеств. Низ: выпуклая оболочка невыпуклых множеств.

## 1.8 Сумма Минковского

Сумма Минковского двух множеств векторов  $S_1$  и  $S_2$  в евклидовом пространстве образуется путем сложения каждого вектора из  $S_1$  с каждым вектором из  $S_2$ .

$$S_1 + S_2 = \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$$

Также можно определить линейную комбинацию множеств.

### i Example

Рассмотрим пространство  $\mathbb{R}^2$ . Определим:

$$S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

Это единичная окружность, с центром в начале координат. И:

$$S_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : -4 \leq x_1 \leq -1, -3 \leq x_2 \leq -1\}$$

Это прямоугольник. Сумма множеств  $S_1$  и  $S_2$  образует увеличенный прямоугольник  $S_2$  с закругленными углами. Полученное множество будет выпуклым.

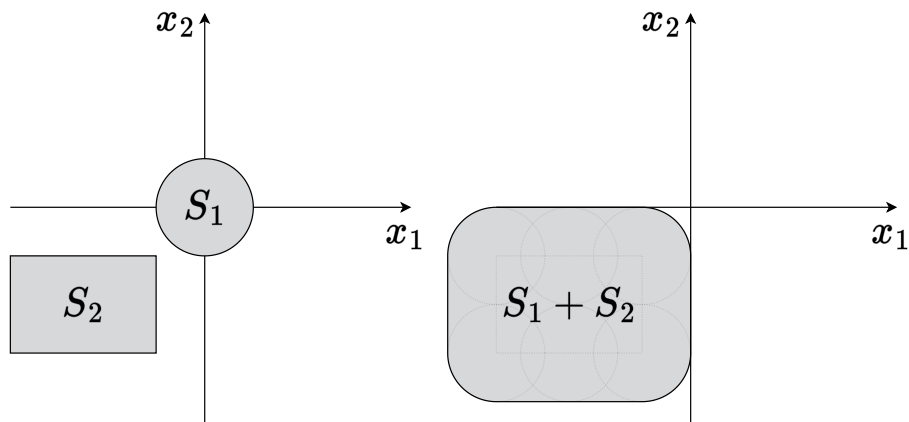


Рисунок 7:  $S = S_1 + S_2$

## 1.9 Проверка выпуклости

На практике очень важно понимать, является ли конкретное множество выпуклым или нет. Для этого используются два подхода в зависимости от контекста.

- По определению.
- Показать, что  $S$  получается из простых выпуклых множеств с помощью операций, сохраняющих выпуклость.

### 1.10 Проверка выпуклости по определению

$$x_1, x_2 \in S, 0 \leq \theta \leq 1 \rightarrow \theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in S$$

#### i Example

Доказать, что множество симметричных положительно определенных матриц  $S_{++}^n = \{X \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid X = X^T, X \succ 0\}$  является выпуклым.

### 1.11 Операции, сохраняющие выпуклость

Линейная комбинация выпуклых множеств является выпуклым множеством.

Пусть есть два выпуклых множества  $S_x, S_y$ , тогда множество

$$S = \{s \mid s = c_1x + c_2y, x \in S_x, y \in S_y, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

Возьмем два вектора из  $S$ :  $s_1 = c_1x_1 + c_2y_1, s_2 = c_1x_2 + c_2y_2$  и докажем, что отрезок между ними  $\theta s_1 + (1 - \theta)s_2, \theta \in [0, 1]$  также принадлежит  $S$

$$\theta s_1 + (1 - \theta)s_2$$

$$\theta(c_1x_1 + c_2y_1) + (1 - \theta)(c_1x_2 + c_2y_2)$$

$$c_1(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) + c_2(\theta y_1 + (1 - \theta)y_2)$$

$$c_1x + c_2y \in S$$

### 1.12 Пересечение любого (!) числа выпуклых множеств является выпуклым

Если пересечение пустое или содержит одну точку, свойство доказывается по определению. В противном случае возьмем две точки и отрезок между ними. Эти точки должны лежать во всех пересекающихся множествах, и поскольку они все выпуклые, отрезок между ними лежит во всех множествах и, следовательно, в их пересечении.

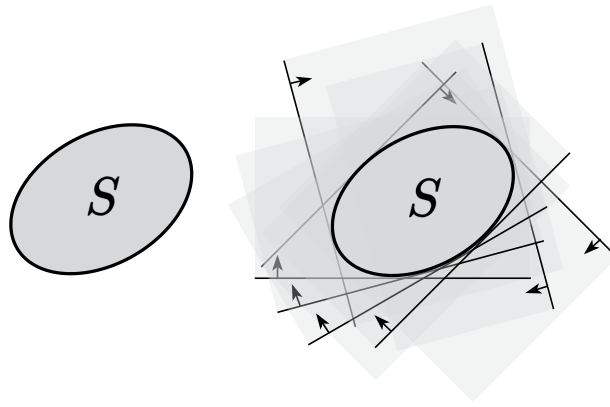


Рисунок 8: Пересечение полуплоскостей

### 1.13 Образ выпуклого множества при аффинном отображении является выпуклым

$$S \subseteq \mathbb{R}^n \text{ выпукло} \rightarrow f(S) = \{f(x) \mid x \in S\} \text{ выпукло} \quad (f(x) = Ax + b)$$

Примеры аффинных множеств: расширение, проекция, транспонирование, множество решений линейного матричного неравенства  $\{x \mid x_1 A_1 + \dots + x_m A_m \preceq B\}$ . Здесь  $A_i, B \in \mathbf{S}^p$  симметричные матрицы  $p \times p$ .

Также обратим внимание, что прообраз выпуклого множества при аффинном отображении также является выпуклым.

$$S \subseteq \mathbb{R}^m \text{ выпукло} \rightarrow f^{-1}(S) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \in S\} \text{ выпукло} \quad (f(x) = Ax + b)$$

#### Пример

Пусть  $x \in \mathbb{R}$  - случайная величина с заданным вероятностным распределением  $\mathbb{P}(x = a_i) = p_i$ , где  $i = 1, \dots, n$ , и  $a_1 < \dots < a_n$ . Тогда вектор вероятностей  $p \in \mathbb{R}^n$  принадлежит вероятностному симплексу, т.е.

$$P = \{p \mid \mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\} = \{p \mid p_1 + \dots + p_n = 1, p_i \geq 0\}.$$

Определить, являются ли следующие множества вероятностных векторов  $p$  выпуклыми:

- $\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta$
- $\mathbb{E}|x^{201}| \leq \alpha \mathbb{E}|x|$
- $\mathbb{E}|x^2| \geq \alpha \forall x \geq \alpha$

## 2 Выпуклые функции

### 2.1 Неравенство Йенсена

Функция  $f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , называется **выпуклой** на  $S$ , если:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

для любых  $x_1, x_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Если вышеуказанное неравенство выполняется строгим неравенством для  $x_1 \neq x_2$  и  $0 < \lambda < 1$ , то функция называется строго выпуклой на  $S$ .



Рисунок 9: Разница между выпуклой и невыпуклой функцией

#### Theorem

Пусть  $f(x)$  выпуклая функция на выпуклом множестве  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  и пусть  $x_i \in X, 1 \leq i \leq m$ , произвольные точки из  $X$ . Тогда

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

для любого  $\lambda = [\lambda_1, \dots, \lambda_m] \in \Delta_m$  - вероятностного симплекса.

#### Доказательство

1. Во-первых, обратим внимание, что точка  $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$  как выпуклая комбинация точек из выпуклого множества  $X$  принадлежит  $X$ .
2. Мы докажем это индукцией. Для  $m = 1$ , утверждение очевидно, и для  $m = 2$ , оно следует из определения выпуклой функции.
3. Предположим, что оно верно для всех  $m$  до  $m = k$ , и мы докажем его для  $m = k + 1$ . Пусть  $\lambda \in \Delta_{k+1}$  и

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i + \lambda_{k+1} x_{k+1}.$$

Предположим, что  $0 < \lambda_{k+1} < 1$ , иначе, оно сводится к рассмотренным ранее случаям, тогда мы имеем

$$x = \lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x},$$

где  $\bar{x} = \sum_{i=1}^k \gamma_i x_i$  и  $\gamma_i = \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0, 1 \leq i \leq k$ .



4. Поскольку  $\lambda \in \Delta_{k+1}$ , то  $\gamma = [\gamma_1, \dots, \gamma_k] \in \Delta_k$ . Следовательно,  $\bar{x} \in X$  и по выпуклости  $f(x)$  и гипотезе индукции:

$$f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i\right) = f(\lambda_{k+1} x_{k+1} + (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x}) \leq \lambda_{k+1} f(x_{k+1}) + (1 - \lambda_{k+1}) f(\bar{x}) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x_i)$$

Таким образом, исходное неравенство выполняется для  $m = k + 1$ .

### Примеры выпуклых функций

- $f(x) = x^p, p > 1, x \in \mathbb{R}_+$
- $f(x) = \|x\|^p, p > 1, x \in \mathbb{R}^n$
- $f(x) = e^{cx}, c \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = -\ln x, x \in \mathbb{R}_{++}$
- $f(x) = x \ln x, x \in \mathbb{R}_{++}$
- Сумма  $k$  наибольших координат  $f(x) = x_{(1)} + \dots + x_{(k)}, x \in \mathbb{R}^n$
- $f(X) = \lambda_{\max}(X), X = X^T$
- $f(X) = -\log \det X, X \in S_{++}^n$

## 2.2 Надграфик

Для функции  $f(x)$ , определенной на  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , множество:

$$\text{epi } f = \{[x, \mu] \in S \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\}$$

называется **надграфиком** функции  $f(x)$ .

**i** Выпуклость надграфика = выпуклость функции

Для того чтобы функция  $f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $X$ , была выпуклой на  $X$ , необходимо и достаточно, чтобы надграфик функции  $f$  был выпуклым множеством.

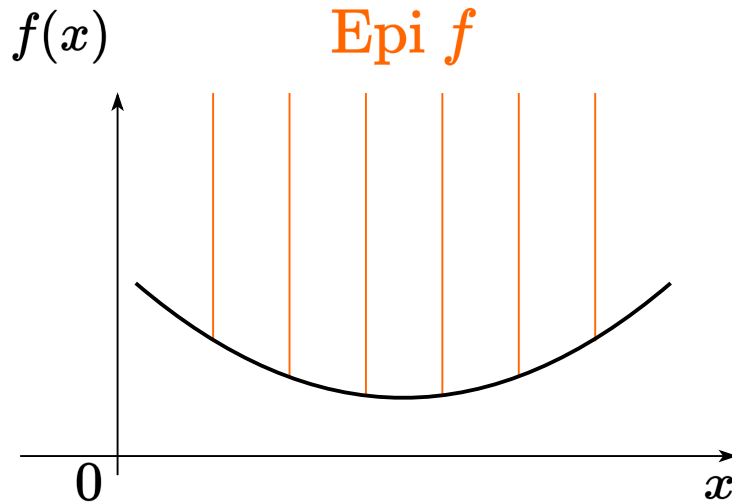


Рисунок 10: Надграфик функции

### 2.3 Выпуклость надграфика = выпуклость функции

1. **Необходимость:** Предположим, что  $f(x)$  выпукла на  $X$ . Возьмем любые две произвольные точки  $[x_1, \mu_1] \in \text{epi } f$  и  $[x_2, \mu_2] \in \text{epi } f$ . Также возьмем  $0 \leq \lambda \leq 1$  и обозначим  $x_\lambda = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ,  $\mu_\lambda = \lambda \mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ . Тогда,

$$\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\lambda \\ \mu_\lambda \end{bmatrix}.$$

Из выпуклости множества  $X$  следует, что  $x_\lambda \in X$ . Кроме того, поскольку  $f(x)$  выпуклая функция,

$$f(x_\lambda) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda \mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2 = \mu_\lambda$$

Неравенство выше означает, что  $\begin{bmatrix} x_\lambda \\ \mu_\lambda \end{bmatrix} \in \text{epi } f$ . Таким образом, надграфик функции  $f$  является выпуклым множеством.

2. **Достаточность:** Предположим, что надграфик функции  $f$ ,  $\text{epi } f$ , является выпуклым множеством. Тогда, из принадлежности точек  $[x_1, \mu_1]$  и  $[x_2, \mu_2]$  надграфику функции  $f$ , следует, что

$$\begin{bmatrix} x_\lambda \\ \mu_\lambda \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} + (1 - \lambda) \begin{bmatrix} x_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \in \text{epi } f$$

для любого  $0 \leq \lambda \leq 1$ , т.е.  $f(x_\lambda) \leq \mu_\lambda = \lambda \mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2$ . Но это верно для всех  $\mu_1 \geq f(x_1)$  и  $\mu_2 \geq f(x_2)$ , в частности, когда  $\mu_1 = f(x_1)$  и  $\mu_2 = f(x_2)$ . Следовательно, мы приходим к неравенству

$$f(x_\lambda) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Поскольку точки  $x_1 \in X$  и  $x_2 \in X$  могут быть выбраны произвольно,  $f(x)$  является выпуклой функцией на  $X$ .

## 2.4 Конус нормы

Пусть норма  $\|\cdot\|$  определена в пространстве  $U$ . Рассмотрим множество:

$$K := \{(x, t) \in U \times \mathbb{R}^+ : \|x\| \leq t\}$$

которое представляет собой надграфик функции  $x \mapsto \|x\|$ . Это множество называется конусом нормы. Согласно утверждению выше, множество  $K$  является выпуклым. [🔗Код для рисунков](#)



Рисунок 11: Конусы нормы для разных  $p$ -норм

## 2.5 Множество подуровня



Рисунок 12: Множество подуровня функции с уровнем  $\beta$

Для функции  $f(x)$ , определенной на  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , следующее множество:

$$\mathcal{L}_\beta = \{x \in S : f(x) \leq \beta\}$$

называется **множеством подуровня** или множеством Лебега функции  $f(x)$ .

Обратите внимание, что если функция  $f(x)$  выпукла, то ее множества подуровня выпуклы для любого  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Однако **обратное неверно**. (Рассмотрим функцию  $f(x) = \sqrt{|x|}$ )

## 2.6 Сведение к прямой

$f : S \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла тогда и только тогда, когда  $S$  выпукло и функция  $g(t) = f(x + tv)$  определена на  $\{t \mid x + tv \in S\}$  и выпукла для любого  $x \in S, v \in \mathbb{R}^n$ , что позволяет проверять выпуклость скалярной функции для установления выпуклости векторной функции.

Если существует направление  $v$  для которого  $g(t)$  не выпукло, то  $f$  не выпукла.

No Dropout. Plane projection of loss surface.



## 2.7 Операции, сохраняющие выпуклость

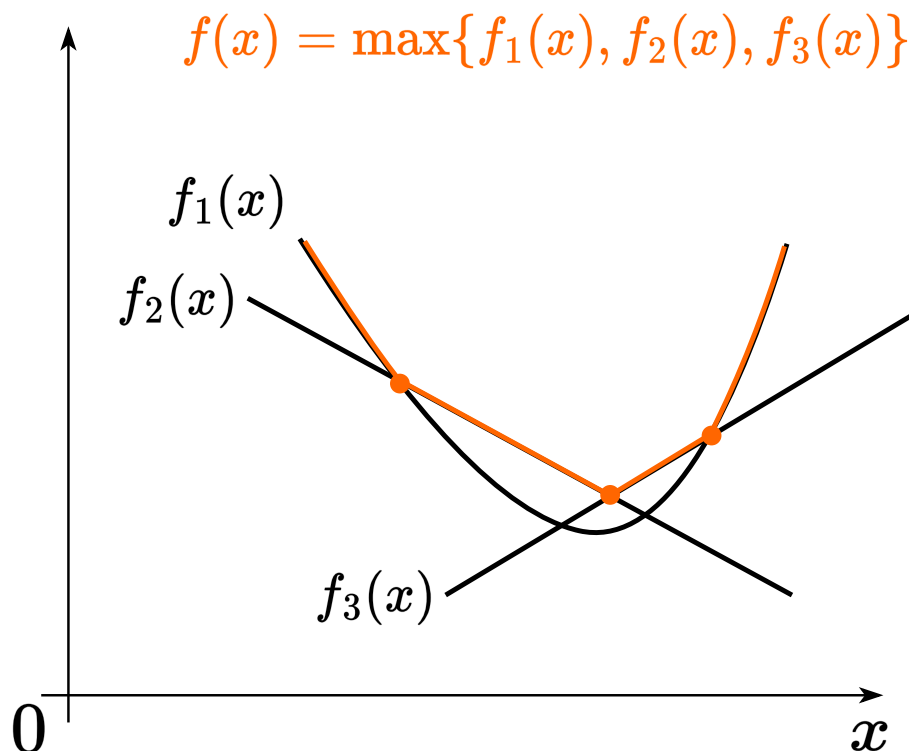


Рисунок 13: Поточечный максимум (супремум) выпуклых функций выпуклый

- Поточечный максимум (супремум) любого числа функций: Если  $f_1(x), \dots, f_m(x)$  выпуклы, то  $f(x) = \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\}$  выпукла.
- Неотрицательная сумма выпуклых функций:  $\alpha f(x) + \beta g(x)$ ,  $(\alpha \geq 0, \beta \geq 0)$ .
- Композиция с аффинной функцией  $f(Ax + b)$  выпукла, если  $f(x)$  выпукла.
- Если  $f(x, y)$  выпукла по  $x$  для любого  $y \in Y$ :  $g(x) = \sup_{y \in Y} f(x, y)$  также выпукла.
- Если  $f(x)$  выпукла на  $S$ , то  $g(x, t) = tf(x/t)$  - выпукла с  $x/t \in S, t > 0$ .
- Пусть  $f_1 : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f_2 : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\text{range}(f_1) \subseteq S_2$ . Если  $f_1$  и  $f_2$  выпуклы, и  $f_2$  возрастает, то  $f_2 \circ f_1$  выпукла на  $S_1$ .

## 2.8 Функция максимального собственного значения матрицы является выпуклой

### Example

Покажите, что  $f(A) = \lambda_{\max}(A)$  - выпукла, если  $A \in S^n$ .

### 3 Критерии сильной выпуклости

#### 3.1 Дифференциальный критерий выпуклости первого порядка

Дифференцируемая функция  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  выпукла тогда и только тогда, когда  $\forall x, y \in S$ :

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y - x)$$

Пусть  $y = x + \Delta x$ , тогда критерий запишется в виде:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) + \nabla f^T(x)\Delta x$$

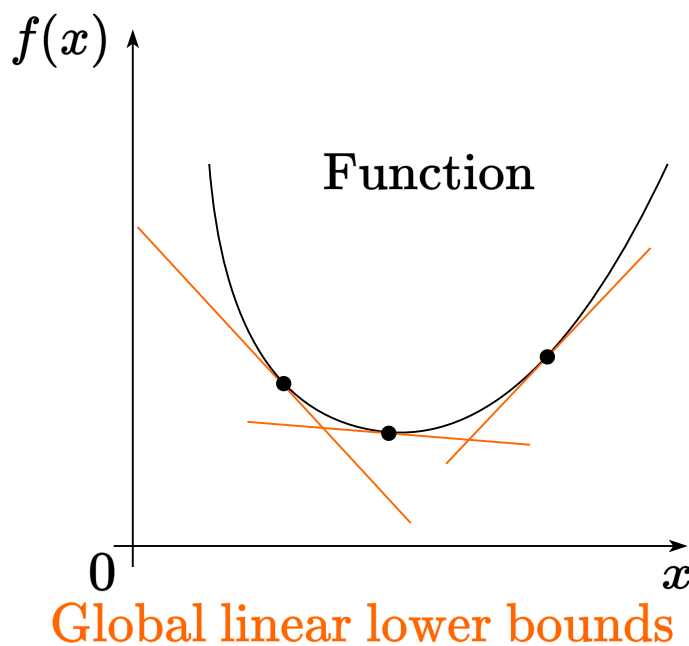


Рисунок 14: Выпуклая функция больше или равна линейной аппроксимации Тейлора в любой точке

#### 3.2 Дифференциальный критерий выпуклости второго порядка

Дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  выпукла тогда и только тогда, когда  $\forall x \in \text{int}(S) \neq \emptyset$ :

$$\nabla^2 f(x) \succeq 0$$

Другими словами,  $\forall y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle \geq 0$$

### 3.3 Сильная выпуклость

$f(x)$ , определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ , называется  $\mu$ -сильно выпуклой (сильно выпуклой) на  $S$ , если:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x_1 - x_2\|^2$$

для любых  $x_1, x_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  для некоторого  $\mu > 0$ .

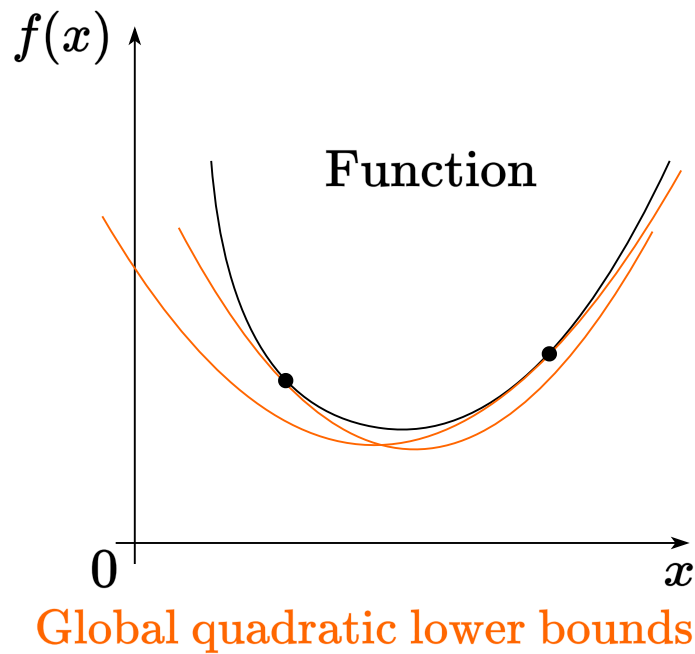


Рисунок 15: Сильно выпуклая функция не меньше некоторой параболы в любой точке

### 3.4 Дифференциальный критерий сильной выпуклости первого порядка

Дифференцируемая  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  является  $\mu$ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда  $\forall x, y \in S$ :

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f^T(x)(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|^2$$

Пусть  $y = x + \Delta x$ , тогда критерий запишется в виде:

$$f(x + \Delta x) \geq f(x) + \nabla f^T(x)\Delta x + \frac{\mu}{2}\|\Delta x\|^2$$

**i Theorem**

Пусть  $f(x)$  дифференцируемая функция на выпуклом множестве  $X \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f(x)$  сильно выпукла на  $X$  с константой  $\mu > 0$  тогда и только тогда, когда

$$f(x) - f(x_0) \geq \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - x_0\|^2$$

для всех  $x, x_0 \in X$ .

**Доказательство. Необходимость**

Пусть  $0 < \lambda \leq 1$ . Согласно определению сильно выпуклой функции,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x_0) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - x_0\|^2$$

или эквивалентно,

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - \frac{\mu}{2} (1 - \lambda) \|x - x_0\|^2 &\geq \frac{1}{\lambda} [f(\lambda x + (1 - \lambda)x_0) - f(x_0)] = \\ &= \frac{1}{\lambda} [f(x_0 + \lambda(x - x_0)) - f(x_0)] = \frac{1}{\lambda} [\lambda \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + o(\lambda)] = \\ &= \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{o(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Таким образом, переходя к пределу при  $\lambda \downarrow 0$ , мы приходим к исходному утверждению.

**Достаточность**

Предположим, что неравенство в теореме выполняется для всех  $x, x_0 \in X$ . Возьмем  $x_0 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ , где  $x_1, x_2 \in X$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Согласно неравенству, следующие неравенства выполняются:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) &\geq \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle + \frac{\mu}{2} \|x_1 - x_0\|^2, \\ f(x_2) - f(x_0) &\geq \langle \nabla f(x_0), x_2 - x_0 \rangle + \frac{\mu}{2} \|x_2 - x_0\|^2. \end{aligned}$$

Умножая первое неравенство на  $\lambda$  и второе на  $1 - \lambda$  и складывая их, учитывая, что

$$x_1 - x_0 = (1 - \lambda)(x_1 - x_2), \quad x_2 - x_0 = \lambda(x_2 - x_1),$$

и  $\lambda(1 - \lambda)^2 + \lambda^2(1 - \lambda) = \lambda(1 - \lambda)$ , мы получаем

$$\begin{aligned} \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - f(x_0) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2 &\geq \\ \langle \nabla f(x_0), \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - x_0 \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство из определения сильно выпуклой функции выполняется. Важно отметить, что  $\mu = 0$  соответствует случаю выпуклой функции и соответствующему дифференциальному критерию.



### 3.5 Дифференциальный критерий сильной выпуклости второго порядка

Дважды дифференцируемая функция  $f(x)$  определенная на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  называется  $\mu$ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда  $\forall x \in \text{int}(S) \neq \emptyset$ :

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mu I$$

Другими словами:

$$\langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle \geq \mu \|y\|^2$$

#### Theorem

Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  выпуклое множество, с  $\text{int}X \neq \emptyset$ . Кроме того, пусть  $f(x)$  дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $X$ . Тогда  $f(x)$  сильно выпукла на  $X$  с константой  $\mu > 0$  тогда и только тогда, когда

$$\langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle \geq \mu \|y\|^2$$

для всех  $x \in X$  и  $y \in \mathbb{R}^n$ .

**Доказательство. Необходимость**

Целевое неравенство тривиально, когда  $y = 0_n$ , поэтому мы предполагаем  $y \neq 0_n$ .

Предположим, что  $x$  является внутренней точкой множества  $X$ . Тогда  $x + \alpha y \in X$  для всех  $y \in \mathbb{R}^n$  и достаточно малых  $\alpha$ . Поскольку  $f(x)$  дважды дифференцируема,

$$f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{\alpha^2}{2} \langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle + o(\alpha^2).$$

На основании первого дифференциального критерия сильной выпуклости:

$$\frac{\alpha^2}{2} \langle y, \nabla^2 f(x)y \rangle + o(\alpha^2) = f(x + \alpha y) - f(x) - \alpha \langle \nabla f(x), y \rangle \geq \frac{\mu}{2} \alpha^2 \|y\|^2.$$

Это неравенство сводится к целевому неравенству после деления обеих сторон на  $\alpha^2$  и перехода к пределу при  $\alpha \downarrow 0$ .

Если  $x \in X$  но  $x \notin \text{int}X$ , рассмотрим последовательность  $\{x_k\}$  такую, что  $x_k \in \text{int}X$  и  $x_k \rightarrow x$  при  $k \rightarrow \infty$ . Тогда, мы приходим к целевому неравенству после перехода к пределу.

**Достаточность**

Используя формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа и целевое неравенство, мы получаем для  $x + y \in X$ :

$$f(x + y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y \rangle = \frac{1}{2} \langle y, \nabla^2 f(x + \alpha y)y \rangle \geq \frac{\mu}{2} \|y\|^2,$$

где  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Следовательно,

$$f(x + y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y \rangle + \frac{\mu}{2} \|y\|^2.$$

Следовательно, согласно первому дифференциальному критерию сильной выпуклости, функция  $f(x)$  сильно выпукла с константой  $\mu$ . Важно отметить, что  $\mu = 0$  соответствует случаю выпуклой функции и соответствующему дифференциальному критерию.

### 3.6 Выпуклая и вогнутая функция

#### i Example

Покажите, что  $f(x) = c^\top x + b$  выпукла и вогнута.

### 3.7 Простейшая сильно выпуклая функция

#### i Example

Покажите, что  $f(x) = x^\top Ax$ , где  $A \succeq 0$  - выпукла на  $\mathbb{R}^n$ . Является ли она сильно выпуклой?

### 3.8 Выпуклость и непрерывность

Пусть  $f(x)$  - выпуклая функция на выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда  $f(x)$  непрерывна  $\forall x \in \text{ri}(S)$ .

#### i Собственная выпуклая функция

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется **собственной выпуклой функцией**, если она никогда не принимает значения  $-\infty$  и не равна  $\infty$  тождественно.

#### i Индикаторная функция

$$\delta_S(x) = \begin{cases} \infty, & x \in S, \\ 0, & x \notin S, \end{cases}$$

является собственной выпуклой функцией.

#### i Замкнутая функция

Функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется **замкнутой**, если для каждого  $\alpha \in \mathbb{R}$ , множество подуровня замкнуто.

Эквивалентно, если надграфик замкнут, то функция  $f$  замкнута.

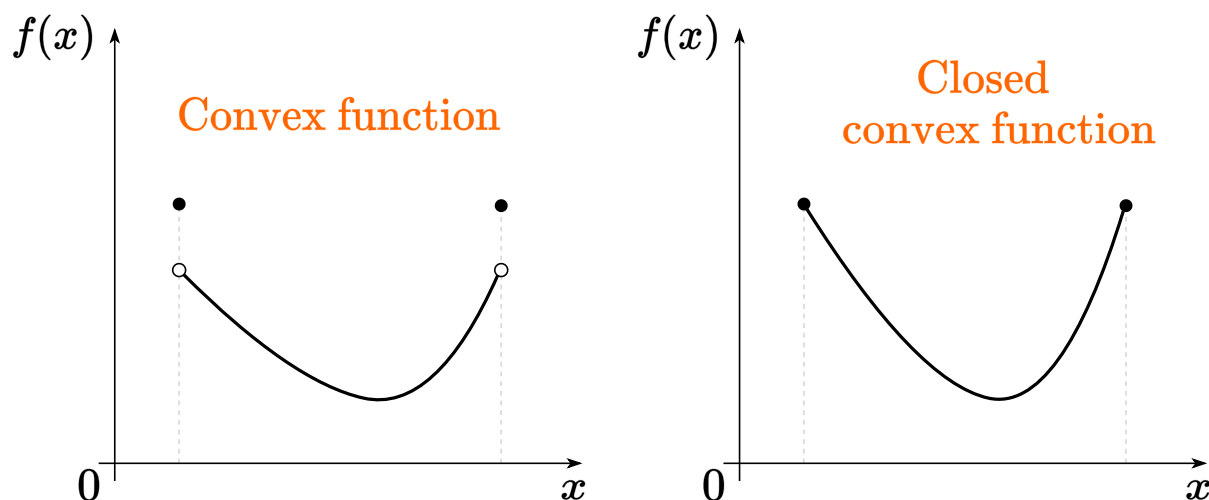


Рисунок 16: Выпуклые функции могут иметь разрывы на границе своей области определения.

### 3.9 Факты о выпуклости

- $f(x)$  называется (строго, сильно) вогнутой, если функция  $-f(x)$  - (строго, сильно) выпукла.
- Неравенство Йенсена для выпуклых функций:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

для  $\alpha_i \geq 0$ ;  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  (вероятностный симплекс)

Для непрерывного случая:

$$f\left(\int_S x p(x) dx\right) \leq \int_S f(x) p(x) dx$$

Если интегралы существуют и  $p(x) \geq 0$ ,  $\int_S p(x) dx = 1$ .

- Если функция  $f(x)$  и множество  $S$  выпуклы, то любой локальный минимум  $x^* = \arg \min_{x \in S} f(x)$  будет глобальным. Сильная выпуклость гарантирует единственность решения.

### 3.10 Другие формы выпуклости

- Логарифмическая выпуклость:  $\log f$  выпукла; Логарифмическая выпуклость влечет выпуклость.
- Логарифмическая вогнутость:  $\log f$  вогнута; **не** замкнута относительно сложения!
- Экспоненциальная выпуклость:  $[f(x_i + x_j)] \succeq 0$ , для  $x_1, \dots, x_n$
- Операторная выпуклость:  $f(\lambda X + (1 - \lambda)Y)$

- Квазивыпуклость:  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$
- Псевдовыпуклость:  $\langle \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0 \rightarrow f(x) \geq f(y)$
- Дискретная выпуклость:  $f : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ ; “выпуклость + теория матроидов.”

### 3.11 Условие Поляка-Лоясиевича. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Неравенство PL выполняется, если выполняется следующее условие для некоторого  $\mu > 0$ ,

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \forall x$$

При выполнении условия PL алгоритм градиентного спуска имеет линейную сходимость.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. [🔗Ссылка на код](#)

$$f(x) = x^2 + 3 \sin^2(x)$$

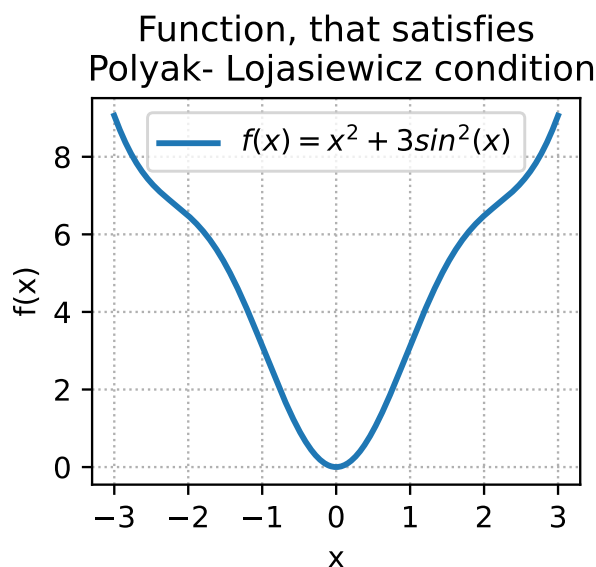


Рисунок 17: Функция PL

$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Non-convex PL function



Рисунок 18: Функция PL

## 4 Выпуклость в машинном обучении

### 4.1 Метод наименьших квадратов aka линейная регрессия<sup>1</sup>



Рисунок 19: Иллюстрация

В задаче линейной регрессии у нас есть измерения  $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$  и  $y \in \mathbb{R}^m$  и мы ищем вектор  $\theta \in \mathbb{R}^n$  такой, что  $X\theta$  близок к  $y$ . Близость определяется как сумма квадратов разностей:

$$\sum_{i=1}^m (x_i^\top \theta - y_i)^2 = \|X\theta - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}^n}$$

<sup>1</sup>Посмотрите на [пример](#) реальных данных линейной задачи метода наименьших квадратов

Например, рассмотрим набор данных, содержащий  $m$  пользователей, каждый из которых представлен  $n$  признаками. Каждая строка  $x_i^\top$  матрицы признаков  $X$  соответствует признакам пользователя  $i$ , а соответствующий элемент  $y_i$  вектора откликов  $y$  представляет собой измеряемую величину, которую мы хотим предсказать на основе  $x_i^\top$ , например, расходы на рекламу. Предсказание значения осуществляется по формуле  $x_i^\top \theta$ .

1. Является ли эта задача выпуклой? Сильно выпуклой?
2. Что вы думаете о сходимости градиентного спуска для этой задачи?

## 4.2 $l_2$ -регуляризованный метод наименьших квадратов

В случае недоопределенной задачи может возникнуть желание восстановить сильную выпуклость целевой функции, добавив  $l_2$ -штраф, также известный как регуляризация Тихонова,  $l_2$ -регуляризация или демпфирование весов.

$$\|X\theta - y\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|\theta\|_2^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}^n}$$

Примечание: С этой модификацией целевая функция снова становится  $\mu$ -сильно выпуклой.

Посмотрите на [код](#)

## 4.3 Наиболее важная разница между выпуклостью и сильной выпуклостью

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Convex least squares regression.  $m=50$ .  $n=100$ .  $\mu=0$ .

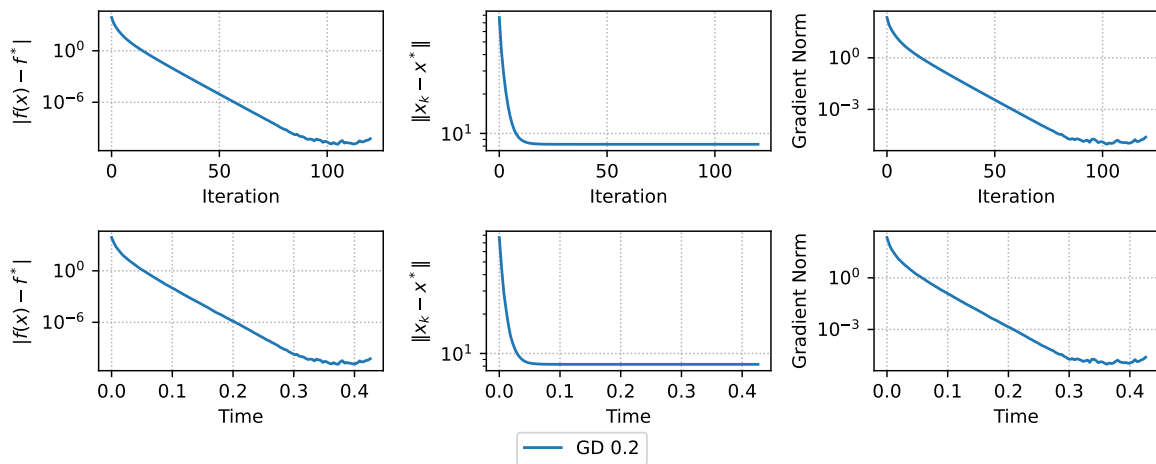


Рисунок 20: Выпуклая задача не имеет сходимости по аргументу

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Strongly convex least squares regression.  $m=50$ .  $n=100$ .  $\mu=0.1$ .

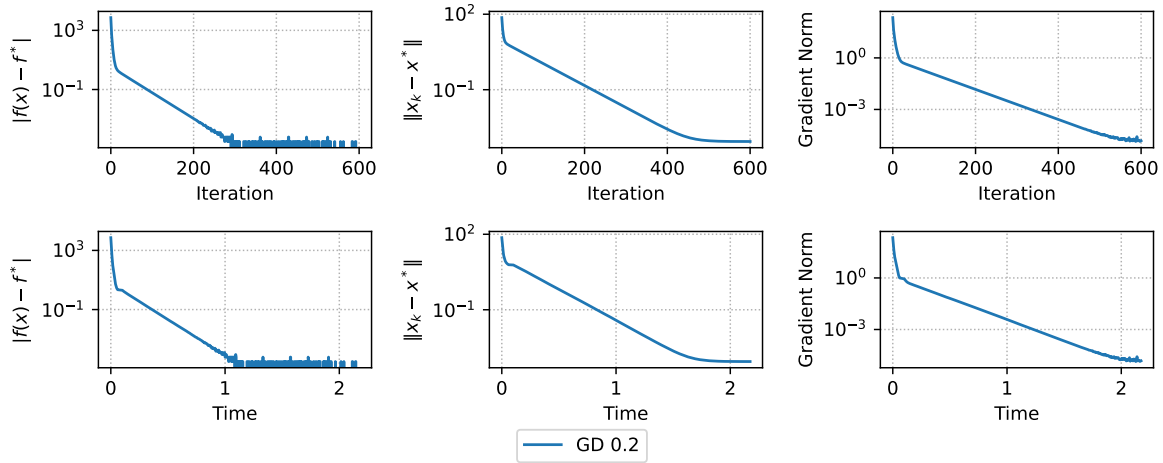


Рисунок 21: Но если добавить даже небольшую регуляризацию, вы гарантируете сходимость по аргументу

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$$

Strongly convex least squares regression.  $m=100$ .  $n=50$ .  $\mu=0$ .

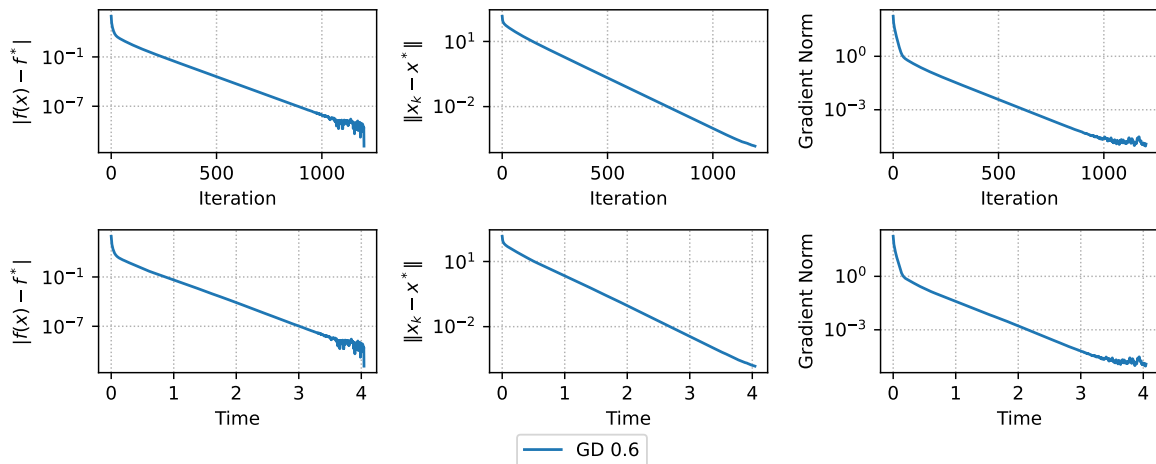


Рисунок 22: Другой способ обеспечить сходимость в предыдущей задаче - поменять местами значения размерности задачи

#### 4.4 Для сходимости к решению с высокой точностью необходима сильная выпуклость (или выполнение условия Поляка-Лоясевича).

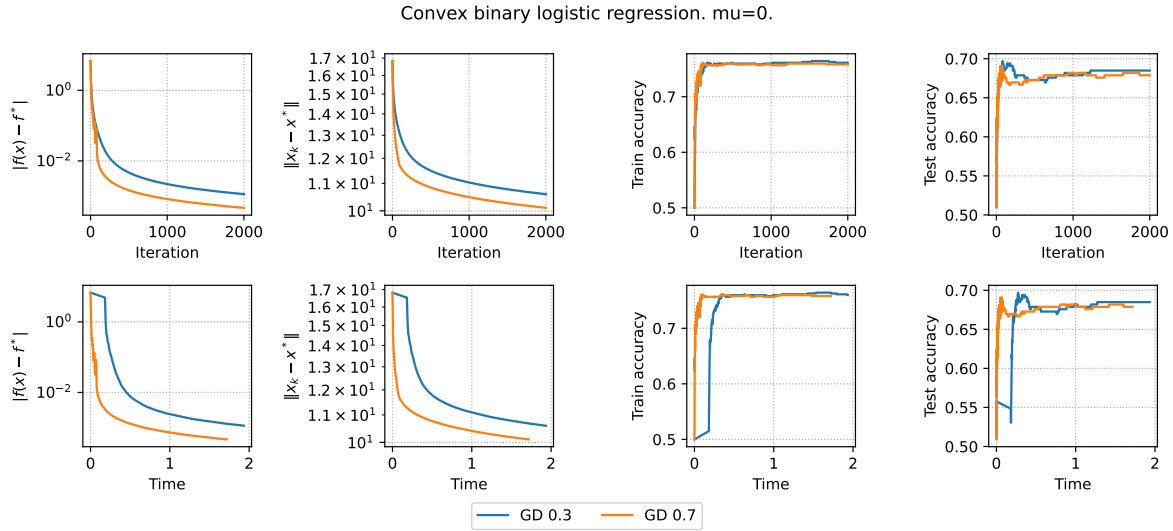


Рисунок 23: Лишь небольшая точность может быть достигнута с сублинейной сходимостью

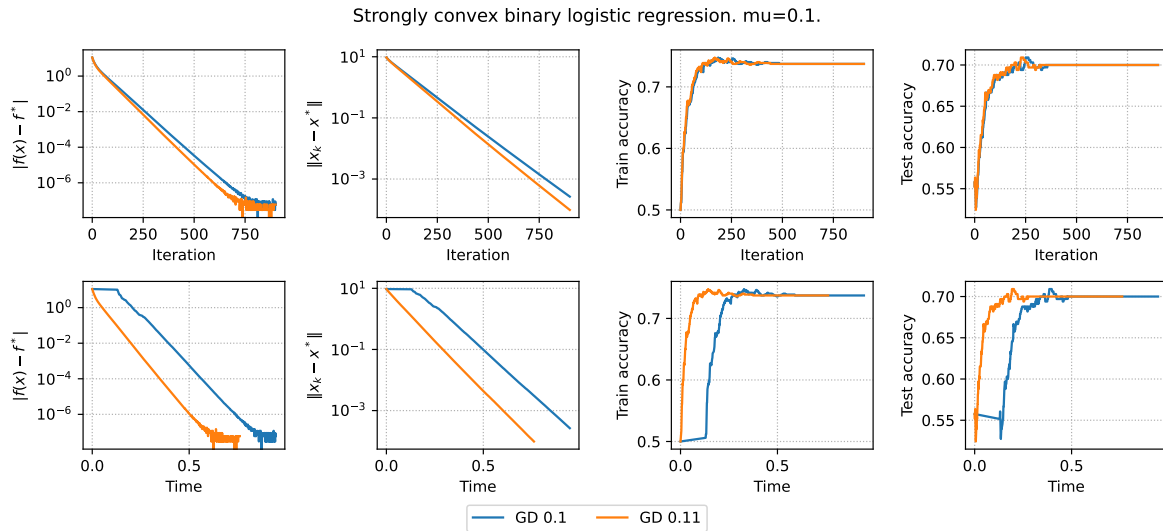


Рисунок 24: Сильная выпуклость обеспечивает линейную сходимость

#### 4.5 Любой локальный минимум является глобальным минимумом для глубоких линейных сетей <sup>2</sup>

Рассмотрим следующую задачу оптимизации:

$$\min_{W_1, \dots, W_L} L(W_1, \dots, W_L) = \frac{1}{2} \|W_L W_{L-1} \dots W_1 X - Y\|_F^2,$$

где

<sup>2</sup>Глобальные условия оптимальности для глубоких нейронных сетей



$X \in \mathbb{R}^{d_x \times n}$  - матрица данных/входных данных,

$Y \in \mathbb{R}^{d_y \times n}$  - матрица меток/выходных данных.

### Theorem

Пусть  $k = \min(d_x, d_y)$  - "ширина" сети, и определим

$$V = \{(W_1, \dots, W_L) \mid \text{rank}(\Pi_i W_i) = k\}.$$

Тогда каждая критическая точка  $L(W)$  в  $V$  является глобальным минимумом, в то время как каждая критическая точка в дополнении  $V^c$  является седловой точкой.

## 5 Задачи

1. Докажите, что шар в  $\mathbb{R}^n$  (т.е. множество  $\{x \mid \|x - x_c\| \leq r\}$ ) - является выпуклым.
2. Является ли полоса  $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \alpha \leq a^\top x \leq \beta\}$  выпуклой?
3. Пусть  $S$  такое, что  $\forall x, y \in S \rightarrow \frac{1}{2}(x + y) \in S$ . Является ли это множество выпуклым?
4. Является ли множество  $S = \{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ , где  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  с выпуклым  $S_1$ , выпуклым?
5. Является ли множество  $S = \{x \mid x + S_2 \subseteq S_1\}$ , где  $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  с выпуклым  $S_1$ , выпуклым?

## 6 Задачи на дом

1. [10 points] Докажите, что эта функция выпукла:

$$f(x, y, z) = z \log(e^{\frac{x}{z}} + e^{\frac{y}{z}}) + (z - 2)^2 + e^{\frac{1}{x+y}}$$

где функция  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет область определения, определенную как:

$$\text{dom } f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y > 0, z > 0\}.$$

2. [5 points] Центр масс тела является важным понятием в физике (механике). Для системы материальных точек с массами  $m_i$  и координатами  $x_i$ , центр масс определяется как:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^k m_i x_i}{\sum_{i=1}^k m_i}$$

Центр масс тела не всегда лежит внутри тела. Например, центр масс бублика находится в его отверстии. Докажите, что центр масс системы материальных точек лежит в выпуклой оболочке множества этих точек.

3. [8 points] Докажите, что  $\text{conv}\{xx^\top : x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\} = \{A \in \mathbb{S}_+^n : \text{tr}(A) = 1\}$ .
4. [5 points] Докажите, что множество  $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid e^{x_1} \leq x_2\}$  является выпуклым.

5. [8 points] Рассмотрим функцию  $f(x) = x^d$ , где  $x \in \mathbb{R}_+$ . Заполните следующую таблицу ☉ или ☉. Объясните свои ответы (с доказательствами).

$d$	Выпуклая	Вогнутая	Строго выпуклая	$\mu$ -сильно выпуклая
$-2, x \in \mathbb{R}_{++}$				
$-1, x \in \mathbb{R}_{++}$				
0				
0.5				
1				
$\in (1; 2)$				
2				
$> 2$				

6. [6 points] Докажите, что функция энтропии, определенная как

$$f(x) = - \sum_{i=1}^n x_i \log(x_i),$$

с  $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R}_{++}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ , является строго вогнутой.

7. [8 points] Докажите, что максимум выпуклой функции  $f$  над многогранником  $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$  достигается в одной из его вершин, т.е.

$$\sup_{x \in P} f(x) = \max_{i=1, \dots, k} f(v_i).$$

Более сильное утверждение: максимум выпуклой функции над замкнутым ограниченным выпуклым множеством достигается в крайней точке, т.е. точке в множестве, которая не является выпуклой комбинацией любой другой точки в множестве. (вы не должны его доказывать).  
Подсказка: Предположите, что утверждение неверно, и используйте неравенство Йенсена.

8. [6 points] Докажите, что два определения  $\mu$ -сильно выпуклых функций эквивалентны:

1.  $f(x)$  является  $\mu$ -сильно выпуклой  $\iff$  для любых  $x_1, x_2 \in S$  и  $0 \leq \lambda \leq 1$  для некоторого  $\mu > 0$ :

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x_1 - x_2\|^2$$

2.  $f(x)$  является  $\mu$ -сильно выпуклой  $\iff$  если существует  $\mu > 0$  такое, что функция  $f(x) - \frac{\mu}{2} \|x\|^2$  является выпуклой.