

# Вспоминаем линейную алгебру. Скорости сходимости.

Даня Меркулов

## 1 Вспоминаем линейную алгебру

### 1.1 Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины  $n$  обозначается  $\mathbb{R}^n$ , а пространство матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . То есть <sup>1</sup>:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Аналогично, если  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  мы обозначаем транспонирование как  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать  $x \geq 0$  и  $x \neq 0$  для обозначения покомпонентных неравенств

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех  $x \neq 0$  :  $x^T A x > (<) 0$ . Обозначается как  $A \succ (<) 0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_{++}^n (\mathbb{S}_{--}^n)$

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех  $x$  :  $x^T A x \geq (\leq) 0$ . Обозначается как  $A \succeq (\preceq) 0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_+^n (\mathbb{S}_-^n)$

#### i Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

<sup>1</sup>Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге [Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares](#) - книга от Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, которая указана в источнике. Также полезен материал по линейной алгебре приведенный в приложении А книги Numerical Optimization by Jorge Nocedal Stephen J. Wright.

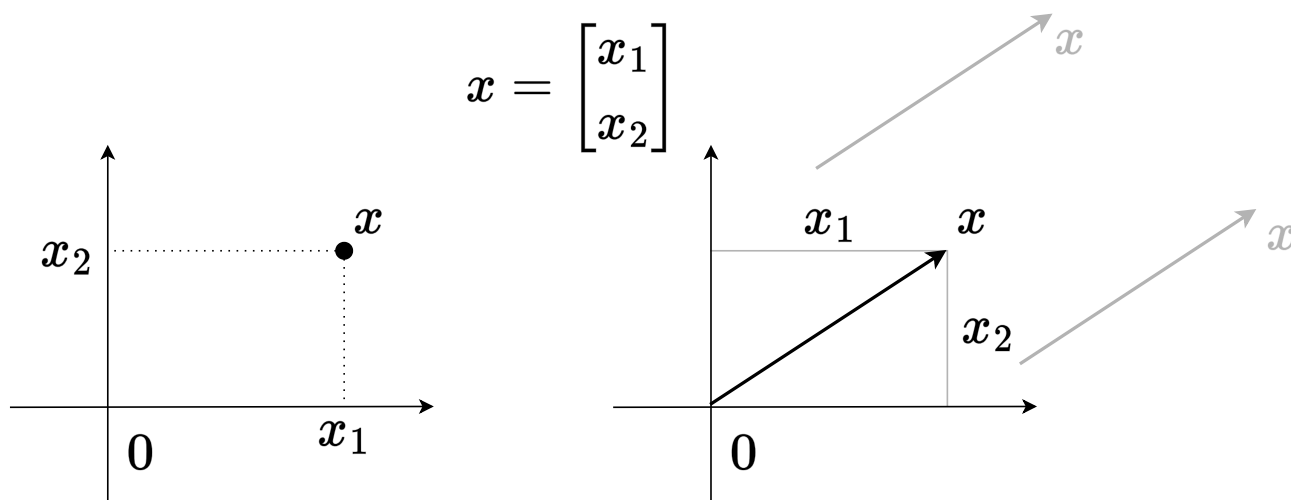


Рисунок 1: Эквивалентные представления вектора

**i Question**

Верно ли, что если матрица симметрична, то она должна быть положительно определенной?

**i Question**

Верно ли, что если матрица положительно определена, то она должна быть симметричной?

**1.2 Матричное умножение (matmul)**

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $B$  - матрица размера  $n \times p$ , тогда их произведение  $AB$  равно:

$$C = AB$$

Тогда  $C$  - матрица размера  $m \times p$ , элемент  $(i, j)$  которой равен:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^3)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью матриц.

**i Question**

Возможно ли умножить две матрицы быстрее, чем за  $\mathcal{O}(n^3)$ ? Как насчет  $\mathcal{O}(n^2)$ ,  $\mathcal{O}(n)$ ?

**1.3 Умножение матрицы на вектор (matvec)**

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$  (но если  $A$  и  $B$  коммутируют, то есть  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ )
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

## 1.4 Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)
3. Если  $\|x\| = 0$ , то  $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **Евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей реальной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса  $p$ -норм:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

---

## 1.5 $p$ -норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность-норма, или норма Чебышева, определяется как максимальное абсолютное значение элемента вектора:

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

$l_1$  норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора  $x$ :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$l_1$  норма играет очень важную роль: она все связана с методами **compressed sensing**, которые появились в середине 00-х как одна из популярных тем исследований. Код для изображения ниже доступен [здесь](#). Также посмотрите [это](#) видео.

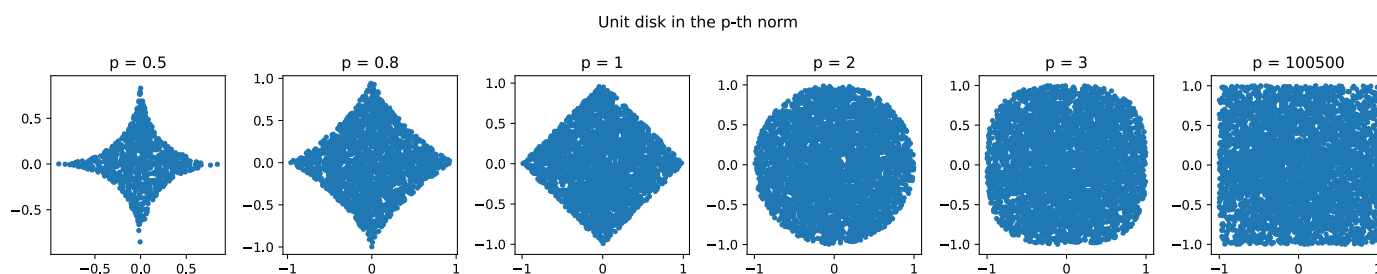


Рисунок 2: Шары в разных нормах на плоскости

## 1.6 Матричные нормы

В некотором смысле между матрицами и векторами нет большой разницы (вы можете векторизовать матрицу), и здесь появляется самая простая матричная норма **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Спектральная норма,  $\|A\|_2$  является одной из наиболее широко используемых матричных норм (наряду с нормой Фробениуса).

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Она не может быть вычислена непосредственно из элементов с помощью простой формулы, как в случае нормы Фробениуса, однако, существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она напрямую связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Для неё справедливо:

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

где  $\sigma_1(A)$  - наибольшее сингулярное значение матрицы  $A$ .

## 1.7 Скалярное произведение

Стандартное **скалярное произведение** между векторами  $x$  и  $y$  из  $\mathbb{R}^n$  равно:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  -  $i$ -ые компоненты соответствующих векторов.

### i Example

Докажите, что вы можете переставить матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием:  $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$  и  $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

## 1.8 Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное произведение** между матрицами  $X$  и  $Y$  из  $\mathbb{R}^{m \times n}$  равно:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle$$

### i Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса  $\|\cdot\|_F$  и скалярным произведением между матрицами  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ?

## 1.9 Собственные вектора и собственные значения

Число  $\lambda$  является собственным значением квадратной матрицы  $A$  размера  $n \times n$ , если существует ненулевой вектор  $q$  такой, что

$$Aq = \lambda q.$$

Вектор  $q$  называется собственным вектором матрицы  $A$ . Матрица  $A$  невырожденная, если ни одно из её собственных значений не равно нулю. Собственные значения симметричных матриц являются вещественными числами, в то время как несимметричные матрицы могут иметь комплексные собственные значения. Если матрица положительно определена и симметрична, то все её собственные значения являются положительными вещественными числами.

## 1.10 Собственные вектора и собственные значения

### i Theorem

$$A \succeq (>) 0 \Leftrightarrow \text{все собственные значения } A \geq (>) 0$$

**Proof**

1.  $\rightarrow$  Предположим, что некоторое собственное значение  $\lambda$  отрицательно, и пусть  $x$  обозначает соответствующий собственный вектор. Тогда

$$Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x < 0$$

что противоречит условию  $A \succeq 0$ .

2.  $\leftarrow$  Для любой симметричной матрицы мы можем выбрать набор собственных векторов  $v_1, \dots, v_n$ , которые образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Возьмем любой вектор  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)^T A (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \sum \alpha_i^2 v_i^T A v_i = \sum \alpha_i^2 \lambda_i v_i^T v_i \geq 0 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что  $v_i^T v_j = 0$ , для  $i \neq j$ .

### 1.11 Спектральное разложение (eigendecomposition)

Пусть  $A \in S_n$ , т.е.  $A$  - вещественная симметричная матрица размера  $n \times n$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

где  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ортогональная, т.е. удовлетворяет  $Q^T Q = I$ , и  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Вещественные числа  $\lambda_i$  являются собственными значениями  $A$  и являются корнями характеристического полинома  $\det(A - \lambda I)$ . Столбцы  $Q$  образуют ортонормированный набор собственных векторов  $A$ . Такое разложение называется спектральным.<sup>2</sup>

Мы обычно упорядочиваем вещественные собственные значения как  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Мы используем обозначение  $\lambda_i(A)$  для обозначения  $i$ -го наибольшего собственного значения  $A \in S$ . Мы обычно пишем наибольшее или максимальное собственное значение как  $\lambda_1(A) = \lambda_{\max}(A)$ , и наименьшее или минимальное собственное значение как  $\lambda_n(A) = \lambda_{\min}(A)$ .

### 1.12 Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

и, следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (соотношение Рэлея):

$$\lambda_{\min}(A) x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A) x^T x$$

**Число обусловленности** невырожденной матрицы определяется как

<sup>2</sup>Хорошая шпаргалка с разложением матриц доступна на сайте курса по линейной алгебре [website](#).

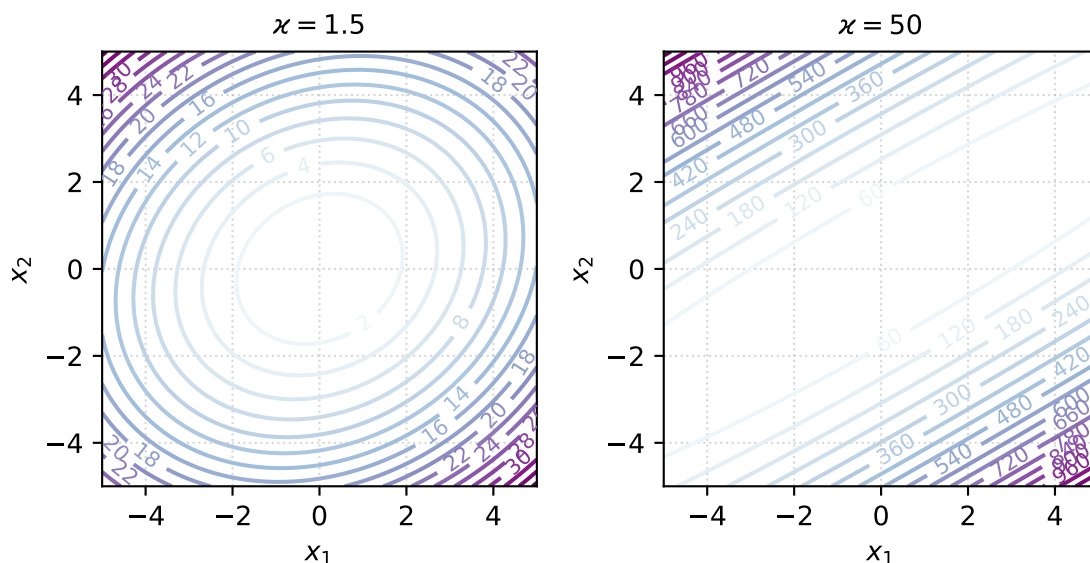
$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Если мы используем спектральную матричную норму, мы можем получить:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$$

Если, кроме того,  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ :  $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$

### 1.13 Число обусловленности



### 1.14 Сингулярное разложение (SVD)

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с рангом  $A = r$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = U \Sigma V^T$$

где  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$  удовлетворяет  $U^T U = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  удовлетворяет  $V^T V = I$ , и  $\Sigma$  является диагональной матрицей с  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , такой что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Это разложение называется **сингулярным разложением (SVD)** матрицы  $A$ . Столбцы  $U$  называются левыми сингулярными векторами  $A$ , столбцы  $V$  называются правыми сингулярными векторами, и числа  $\sigma_i$  являются сингулярными значениями. Сингулярное разложение может быть записано как

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

где  $u_i \in \mathbb{R}^m$  являются левыми сингулярными векторами, и  $v_i \in \mathbb{R}^n$  являются правыми сингулярными векторами.

### 1.15 Сингулярное разложение

#### i Question

Пусть  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Что мы можем сказать о связи между его собственными значениями и сингулярными значениями?

#### i Question

Как сингулярные значения матрицы связаны с её собственными значениями, особенно для симметричной матрицы?

### 1.16 Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать  $r$  линейно независимых столбцов матрицы и любые  $r$  линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

Применения для рангового разложения:

- Сжатие модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численном анализе: для матрицы ранга  $r$  с  $r \ll n, m$  необходимо хранить  $\mathcal{O}((n+m)r) \ll nm$  элементов.
- Извлечение признаков в машинном обучении
- Все приложения, где применяется SVD, так как ранговое разложение может быть преобразовано в форму усеченного SVD.

### 1.17 Каноническое тензорное разложение

Можно рассмотреть обобщение рангового разложения на структуры данных более высокого порядка, такие как тензоры, что означает представление тензора в виде суммы  $r$  простых тензоров.



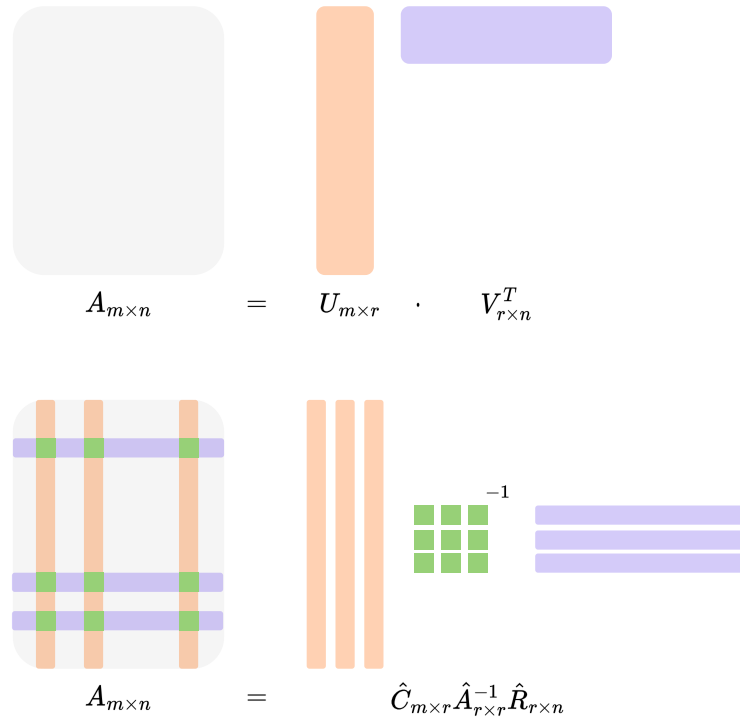


Рисунок 3: Иллюстрация рангового разложения

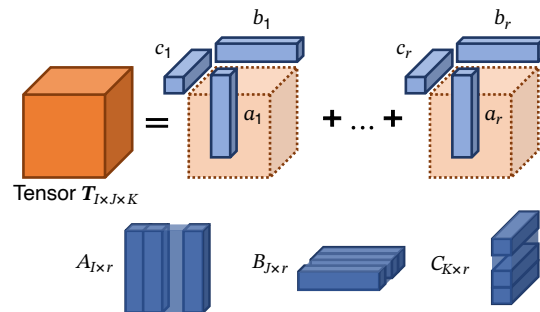


Рисунок 4: Иллюстрация канонического тензорного разложения

### Example

Заметьте, что существует множество тензорных разложений: каноническое, Таккера, тензорный поезд (ТТ), тензорное кольцо (ТР) и другие. В случае тензоров мы не имеем прямого определения *ранга* для всех типов разложений. Например, для разложения Тензорного поезда ранг является не скаляром, а вектором.

## 1.18 Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \text{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

Не забывайте о циклическом свойстве следа для произвольных матриц  $A, B, C, D$  (предполагая, что все размерности согласованы):

$$\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(DABC) = \text{tr}(CDAB) = \text{tr}(BCDA)$$

### Question

Как определитель матрицы связан с её обратимостью?

## 2 Скорости сходимости

### 2.1 Скорость сходимости

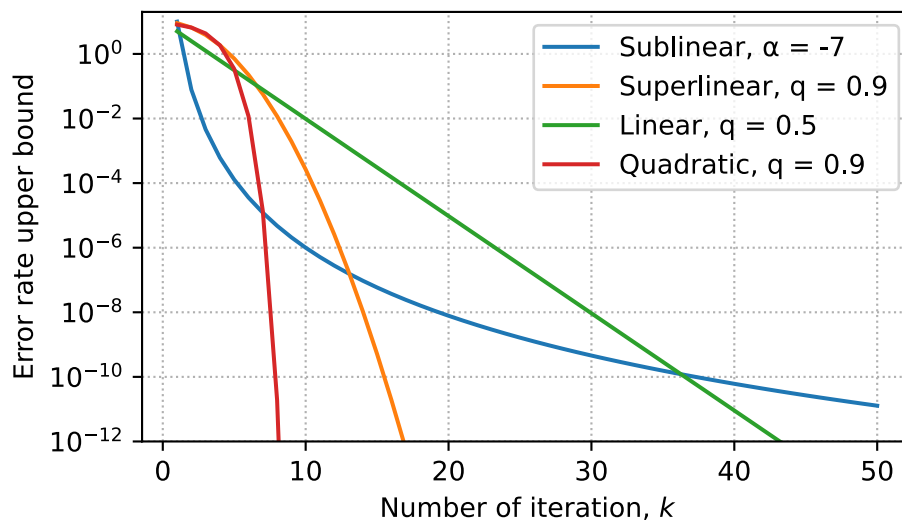


Рисунок 5: Разница в скоростях сходимости

### 2.2 Линейная сходимость

Чтобы сравнить производительность алгоритмов, мы должны определить термины для различных типов сходимости. Пусть  $r_k$  - последовательность неотрицательных вещественных чисел, которая сходится к нулю. Обычно мы имеем итерационный метод, который производит последовательность итераций  $x_k$ , приближающихся к оптимальному решению  $x^*$ , и  $r_k = \|x_k - x^*\|_2$ .

**Линейная сходимость** последовательности  $r_k$  определяется следующим образом:

Последовательность  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  сходится линейно с параметром  $0 < q < 1$ , если существует константа  $C > 0$  такая, что:

$$r_k \leq Cq^k, \quad \text{for all } k \geq m.$$

Если такое  $q$  существует, то последовательность называется линейно сходящейся. **Точная нижняя граница** всех  $q$ , удовлетворяющих неравенству, называется **скоростью линейной сходимости** последовательности.

### Question

Предположим, у вас есть две последовательности с линейными скоростями сходимости  $q_1 = 0.1$  и  $q_2 = 0.7$ , какая из них быстрее?

## 2.3 Линейная сходимость

### Example

Предположим, у нас есть следующая последовательность:

$$r_k = \frac{1}{2^k}$$

Можно сразу заключить, что мы имеем линейную сходимость с параметрами  $q = \frac{1}{2}$  и  $C = 0$ .

### Question

Определите сходимость следующей последовательности

$$r_k = \frac{3}{2^k}$$

## 2.4 Сублинейная сходимость

Если последовательность  $r_k$  сходится к нулю, но не имеет линейной сходимости, то сходимость называется сублинейной. Иногда мы можем рассмотреть следующий частный случай сублинейной сходимости:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq Ck^q,$$

где  $q < 0$  и  $0 < C < \infty$ . Интуитивно, сублинейная сходимость означает, что последовательность сходится медленнее любой геометрической прогрессии.

## 2.5 Сверхлинейная сходимость

Сходимость последовательности  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  называется **сверхлинейной**, если она сходится к нулю быстрее любой линейно сходящейся последовательности. Проверьте, что последовательность  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  является сверхлинейной, если она сходится линейно с параметром  $q = 0$ .

Для  $p > 1$ , последовательность имеет **сверхлинейную сходимость порядка  $p$** , если существует  $C > 0$  и  $0 < q < 1$  такая, что:

$$r_k \leq Cq^{p^k}, \quad \text{for all } k \geq m.$$

Когда  $p = 2$ , это называется **квадратичной сходимостью**.

### Важный пример

Предположим, что  $x^* = 1.23456789$  (истинное решение), и итерационная последовательность начинается с ошибки  $r_k = 10^{-3}$ , соответствующей 3 правильным значащим цифрам (1.234).

1. После первой итерации:

$$r_{k+1} \approx r_k^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}.$$

Теперь ошибка равна  $10^{-6}$ , и мы имеем 6 правильных значащих цифр (1.23456).

2. После второй итерации:

$$r_{k+2} \approx r_{k+1}^2 = (10^{-6})^2 = 10^{-12}.$$

Теперь ошибка равна  $10^{-12}$ , и мы имеем 12 правильных значащих цифр (1.234567890123).

## 2.6 Практические наблюдения о скоростях сходимости

- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \|x_0 - x^*\|_2$  означает сублинейную скорость сходимости
- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq q \|x_k - x^*\|_2$  означает линейную скорость сходимости, где  $q < 1$
- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq q \|x_k - x^*\|_2^2$  означает квадратичную скорость сходимости, где  $q \|x_0 - x^*\| < 1$

## 2.7 Тест корней

### Theorem

Пусть  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть  $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k}$ . (Заметим, что  $\alpha \geq 0$ .)

- Если  $0 \leq \alpha < 1$ , то  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится линейно с константой  $\alpha$ .
- В частности, если  $\alpha = 0$ , то  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится сверхлинейно.
- Если  $\alpha = 1$ , то  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится сублинейно.
- Случай  $\alpha > 1$  невозможен.

### Доказательство.

- Покажем, что если  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится линейно с константой  $0 \leq \beta < 1$ , то  $\alpha \leq \beta$ . Действительно, по определению константы линейной сходимости, для любого  $\varepsilon > 0$  такого, что  $\beta + \varepsilon < 1$ , существует  $C > 0$  такое, что  $r_k \leq C(\beta + \varepsilon)^k$  для всех  $k \geq m$ . Отсюда,  $r_k^{1/k} \leq C^{1/k}(\beta + \varepsilon)$  для всех  $k \geq m$ . Переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$  и используя  $C^{1/k} \rightarrow 1$ , мы получаем  $\alpha \leq \beta + \varepsilon$ . Учитывая произвольность  $\varepsilon$ , получаем  $\alpha \leq \beta$ .

2. Таким образом, в случае  $\alpha = 1$  последовательность  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  не может иметь линейной сходимости в соответствии с приведенным выше результатом (доказано от противного). Тем не менее,  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится к нулю, поэтому она должна сходиться сублинейно.

## 2.8 Тест корней

### i Theorem

1. Теперь рассмотрим случай  $0 \leq \alpha < 1$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  - произвольное число такое, что  $\alpha + \varepsilon < 1$ . Согласно свойствам  $\limsup$ , существует  $N \geq m$  такое, что  $r_k^{1/k} \leq \alpha + \varepsilon$  для всех  $k \geq N$ . Отсюда,  $r_k \leq (\alpha + \varepsilon)^k$  для всех  $k \geq N$ . Следовательно,  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  сходится линейно с параметром  $\alpha + \varepsilon$  (не имеет значения, что неравенство выполняется только для числа  $N$ ). Учитывая произвольность  $\varepsilon$ , это означает, что константа линейной сходимости  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  не превышает  $\alpha$ . Поскольку, как показано выше, константа линейной сходимости не может быть меньше  $\alpha$ , это означает, что константа линейной сходимости  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  точно равна  $\alpha$ .
2. Наконец, покажем, что случай  $\alpha > 1$  невозможен. Действительно, предположим, что  $\alpha > 1$ . Тогда из определения  $\limsup$  следует, что для любого  $N \geq m$  существует  $k \geq N$  такое, что  $r_k^{1/k} \geq 1$ , и, в частности,  $r_k \geq 1$ . Но это означает, что  $r_k$  имеет подпоследовательность, которая не ограничена от нуля. Следовательно,  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  не может сходиться к нулю, что противоречит условию.

## 2.9 Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю. Пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q$  не существует, но  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой, не превышающей  $q$ .
- Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.
- Случай  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$  невозможен.
- В остальных случаях (т.е., когда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k}$ ) мы не можем сделать никаких конкретных утверждений о скорости сходимости  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ .

## 2.10 Лемма о тесте отношений

### Theorem

Пусть  $(r_k)_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел. (Строгая положительность необходима для того, чтобы отношения  $\frac{r_{k+1}}{r_k}$ , которые появляются ниже, были определены.) Тогда

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

**Доказательство.**

1. Среднее неравенство следует из того, что  $\liminf$  любой последовательности всегда меньше или равен её  $\limsup$ . Докажем последнее неравенство; первое доказывается аналогично.
2. Обозначим  $L := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$ . Если  $L = +\infty$ , то неравенство очевидно, поэтому предположим, что  $L$  конечно. Заметим, что  $L \geq 0$ , поскольку отношение  $\frac{r_{k+1}}{r_k}$  положительно для всех  $k \geq m$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  - произвольное число. Согласно свойствам  $\limsup$ , существует  $N \geq m$  такое, что  $\frac{r_{k+1}}{r_k} \leq L + \varepsilon$  для всех  $k \geq N$ . Отсюда,  $r_{k+1} \leq (L + \varepsilon)r_k$  для всех  $k \geq N$ . Применяя индукцию, получаем  $r_k \leq (L + \varepsilon)^{k-N}r_N$  для всех  $k \geq N$ . Пусть  $C := (L + \varepsilon)^{-N}r_N$ . Тогда  $r_k \leq C(L + \varepsilon)^k$  для всех  $k \geq N$ , откуда  $r_k^{1/k} \leq C^{1/k}(L + \varepsilon)$ . Переходя к  $\limsup$  при  $k \rightarrow \infty$  и используя  $C^{1/k} \rightarrow 1$ , получаем  $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq L + \varepsilon$ . Учитывая произвольность  $\varepsilon$ , получаем  $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq L$ .

## 3 Задачи

### 3.1 Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения
4. Результаты первых двух вариантов не будут одинаковыми.

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

### 3.2 Задача 2. Связь между Фробениусовой нормой и сингулярными значениями.

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , и пусть  $q := \min\{m, n\}$ . Докажите, что

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2(A),$$

где  $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_q(A) \geq 0$  - сингулярные значения матрицы  $A$ . Подсказка: используйте связь между Фробениусовой нормой и скалярным произведением и SVD.

### 3.3 Задача 3. Найдите свое скалярное произведение.

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle,$$

где  $S = \sum_{i=1}^n a_i a_i^T$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\det(S) \neq 0$

### 3.4 Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$
- $r_k = \frac{1}{k^{10}}$
- $r_k = 0.707^k$
- $r_k = 0.707^{2^k}$

### 3.5 Задача 5. Один тест проще, чем другой.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующей последовательности:

$$r_k = \frac{1}{k^k}$$

### 3.6 Задача 6. Сверхлинейно, но не квадратично.

Покажите, что следующая последовательность не имеет квадратичной сходимости.

$$r_k = \frac{1}{3^{k^2}}$$

## 4 А где это нужно в реальной жизни?

### 4.1 LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models ([arXiv:2106.09685](https://arxiv.org/abs/2106.09685))

Поскольку современные LLM слишком большие, чтобы влезть в память среднего пользователя, мы используем некоторые трюки, чтобы сделать их потребление памяти меньше. Одним из наиболее популярных трюков является LoRA (Low-Rank Adaptation of Large Language Models).

Предположим, у нас есть матрица  $W \in \mathbb{R}^{d \times k}$  и мы хотим выполнить следующее обновление:

$$W = W_0 + \Delta W.$$

Основная идея LoRA состоит в том, чтобы разложить обновление  $\Delta W$  на две низкоранговые матрицы:

$$W = W_0 + \Delta W = W_0 + BA, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times k}, \\ \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r \ll \min\{d, k\}.$$


Проверьте  [ноутбук](#) для примера реализации LoRA.





Рисунок 6: Иллюстрация LoRA

## 5 Задачи на дом

### 5.0.1 Вспоминаем линейную алгебру

- [5 points] **Анализ чувствительности в линейных системах** Рассмотрим невырожденную матрицу  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  и вектор  $b \in \mathbb{R}^n$ . Предположим, что из-за ошибок измерения или вычислений вектор  $b$  изменяется на  $\tilde{b} = b + \delta b$ .
  - Выведите верхнюю оценку относительной ошибки в решении  $x$  системы  $Ax = b$  в терминах числа обусловленности  $\kappa(A)$  и относительной ошибки в  $b$ .

2. Приведите конкретный пример использования матрицы  $2 \times 2$ , где  $\kappa(A)$  велико (например,  $\geq 100500$ ).
2. [5 points] **Влияние диагонального масштабирования на ранг** Пусть  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - матрица ранга  $r$ . Пусть  $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$  - диагональная матрица. Определите ранг произведения  $DA$ . Объясните ваше обоснование.
3. [8 points] **Неожиданный SVD** Вычислите сингулярное разложение (SVD) следующих матриц:

$$\bullet A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\bullet A_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ где } x - \text{сумма чисел вашего рождения (день + месяц)}.$$

4. [10 points] **Влияние нормализации на ранг** Предположим, у нас есть набор данных  $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и мы решили представить эти данные в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} | & & | \\ x^{(1)} & \dots & x^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Предположим, что  $\text{rank } X = r$ .

В следующей задаче мы просим вас найти ранг некоторой матрицы  $M$ , связанной с  $X$ . В частности, вам нужно найти связь между  $\text{rank } X = r$  и  $\text{rank } M$ , например, что ранг  $M$  всегда больше/меньше ранга  $X$  или что  $\text{rank } M = \text{rank } X$ /35. Аргументируйте ваш ответ и сделайте его как можно более точным.

Обратите внимание, что граничные случаи возможны в зависимости от структуры матрицы  $X$ . Убедитесь, что вы правильно освещаете их в своем ответе.

В прикладной статистике и машинном обучении данные часто нормализуются. Одна из наиболее популярных стратегий состоит в том, чтобы вычесть оцененное среднее  $\mu$  и разделить на квадратный корень из оцененной дисперсии  $\sigma^2$ . т.е.

$$x \rightarrow (x - \mu) / \sigma.$$

После нормализации мы получаем новую матрицу

$$Y := \begin{pmatrix} | & & | \\ y^{(1)} & \dots & y^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix},$$
$$y^{(i)} := \frac{x^{(i)} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x^{(j)}}{\sigma}.$$

Каков ранг  $Y$  если  $\text{rank } X = r$ ? Здесь  $\sigma$  - вектор, и деление выполняется поэлементно. Причина этого в том, что разные признаки могут иметь разные масштабы. В частности:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_i^{(j)})^2 - \left( \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_i^{(j)} \right)^2}.$$

5. [20 points] **Сжатие изображений с использованием усеченного SVD** Исследуйте сжатие изображений с использованием усеченного сингулярного разложения (SVD). Понимание того, как изменение количества сингулярных значений влияет на качество сжатого изображения. Реализуйте Python скрипт для сжатия черно-белого изображения с использованием усеченного SVD и визуализируйте качество сжатия.

- **Усеченное SVD:** Разлагает изображение  $A$  на матрицы  $U$ ,  $S$ , и  $V$ . Сжатое изображение восстанавливается с использованием подмножества сингулярных значений.
- **Математическое представление:**

$$A \approx U_k \Sigma_k V_k^T$$

- $U_k$  и  $V_k$  - первые  $k$  столбцов  $U$  и  $V$  соответственно.
- $\Sigma_k$  - диагональная матрица с первыми  $k$  сингулярными значениями.
- **Относительная ошибка:** Измеряет точность сжатого изображения по сравнению с оригиналом.

$$\text{Relative Error} = \frac{\|A - A_k\|}{\|A\|}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
import numpy as np
from skimage import io, color
import requests
from io import BytesIO

def download_image(url):
    response = requests.get(url)
    img = io.imread(BytesIO(response.content))
    return color.rgb2gray(img) # Convert to grayscale

def update_plot(i, img_plot, error_plot, U, S, V, original_img, errors, ranks, ax1, ax2):
    # Adjust rank based on the frame index
    if i < 70:
        rank = i + 1
    else:
        rank = 70 + (i - 69) * 10

    reconstructed_img = ... # YOUR CODE HERE

    # Calculate relative error
    relative_error = ... # YOUR CODE HERE
    errors.append(relative_error)
    ranks.append(rank)

    # Update the image plot and title
    img_plot.set_data(reconstructed_img)
    ax1.set_title(f"Image compression with SVD\n Rank {rank}; Relative error {relative_error:.2f}")

    # Remove axis ticks and labels from the first subplot (ax1)
    ax1.set_xticks([])
    ax1.set_yticks([])
```

```
# Update the error plot
error_plot.set_data(ranks, errors)
ax2.set_xlim(1, len(S))
ax2.grid(linestyle=":")
ax2.set_ylim(1e-4, 0.5)
ax2.set_ylabel('Relative Error')
ax2.set_xlabel('Rank')
ax2.set_title('Relative Error over Rank')
ax2.semilogy()

# Set xticks to show rank numbers
ax2.set_xticks(range(1, len(S)+1, max(len(S)//10, 1))) # Adjust the step size as needed
plt.tight_layout()

return img_plot, error_plot

def create_animation(image, filename='svd_animation.mp4'):
    U, S, V = np.linalg.svd(image, full_matrices=False)
    errors = []
    ranks = []

    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(5, 8))
    img_plot = ax1.imshow(image, cmap='gray', animated=True)
    error_plot, = ax2.plot([], [], 'r-', animated=True) # Initial empty plot for errors

    # Add watermark
    ax1.text(1, 1.02, '@fminxyz', transform=ax1.transAxes, color='gray', va='bottom', ha='right')

    # Determine frames for the animation
    initial_frames = list(range(70)) # First 70 ranks
    subsequent_frames = list(range(70, len(S), 10)) # Every 10th rank after 70
    frames = initial_frames + subsequent_frames

    ani = animation.FuncAnimation(fig, update_plot, frames=len(frames), fargs=(img_plot, error_plot))
    ani.save(filename, writer='ffmpeg', fps=8, dpi=300)

    # URL of the image
    url = ""

    # Download the image and create the animation
    image = download_image(url)
    create_animation(image)
```

### 5.0.2 Скорости сходимости

1. [6 points] Определите (это означает определить характер сходимости, если она сходится) сходимость или расходимость следующих последовательностей

- $r_k = \frac{1}{\sqrt{k+5}}$ .
- $r_k = 0.101^k$ .
- $r_k = 0.101^{2^k}$ .

2. [8 points] Пусть последовательность  $\{r_k\}$  определена следующим образом

$$r_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} r_k, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ r_k^2, & \text{если } k \text{ нечётно,} \end{cases}$$

с начальным значением  $0 < r_0 < 1$ . Докажите, что  $\{r_k\}$  сходится к 0 и проанализируйте её скорость сходимости. В вашем ответе определите, является ли общая сходимость линейной, сублинейной или квадратичной.

3. [6 points] Определите скорость сходимости следующей последовательности  $\{r_k\}$  (линейная, сублинейная, сверхлинейная). В случае сверхлинейной сходимости определите, является ли сходимость квадратичной.

$$r_k = \frac{1}{k!}$$

4. [8 points] Рассмотрим рекуррентную последовательность, определённую следующим образом

$$r_{k+1} = \lambda r_k + (1 - \lambda) r_k^p, \quad k \geq 0,$$

где  $\lambda \in [0, 1)$  и  $p > 1$ . Какие дополнительные условия на  $r_0$  должны быть выполнены для того, чтобы последовательность сходилась? Покажите, что когда  $\lambda > 0$  последовательность сходится к 0 с линейной скоростью (с асимптотической константой  $\lambda$ ), и когда  $\lambda = 0$  определите скорость сходимости в терминах  $p$ . В частности, для  $p = 2$  определите, является ли сходимость квадратичной.