

# Стохастический градиентный спуск

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

## Задача с конечной суммой

## Задача с конечной суммой

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего по конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или поиском по линии.

## Задача с конечной суммой

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего по конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или поиском по линии.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ . Для FineWeb  $n \approx 15 \cdot 10^{12}$  токенов.

## Задача с конечной суммой

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего по конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или поиском по линии.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ . Для FineWeb  $n \approx 15 \cdot 10^{12}$  токенов.

## Задача с конечной суммой

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего по конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или поиском по линии.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ . Для FineWeb  $n \approx 15 \cdot 10^{12}$  токенов.

Давайте перейдем от полного вычисления градиента к его несмещенной оценке, когда мы случайным образом выбираем индекс  $i_k$  точки на каждой итерации равномерно:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f_{i_k}(x_k) \quad (\text{SGD})$$

С  $p(i_k = i) = \frac{1}{n}$ , стохастический градиент является несмещенной оценкой градиента, которая задается следующим образом:

$$\mathbb{E}[\nabla f_{i_k}(x)] = \sum_{i=1}^n p(i_k = i) \nabla f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \nabla f_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) = \nabla f(x)$$

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический градиентный спуск имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.



## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический градиентный спуск имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический градиентный спуск имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки скорости не могут быть улучшены при стандартных предположениях.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический градиентный спуск имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки скорости не могут быть улучшены при стандартных предположениях.
  - Оракул возвращает несмещенную аппроксимацию градиента с ограниченной дисперсией.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций потребуется для достижения заданной точности?

Если  $\nabla f$  является липшицевым, то мы получаем:

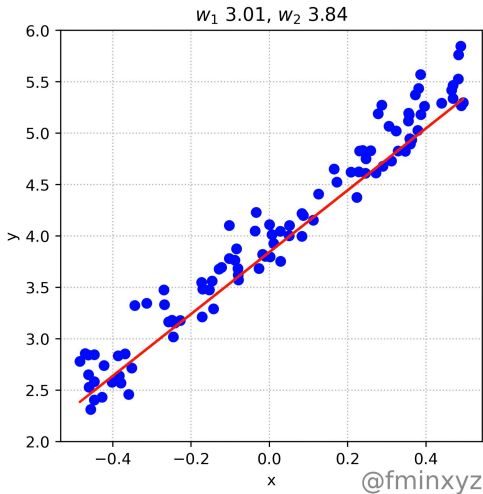
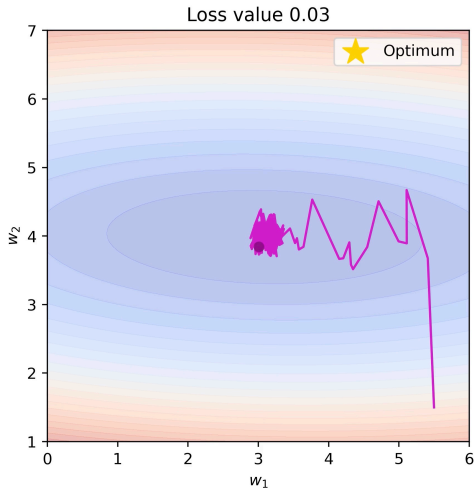
Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$\mathcal{O}(\log(1/\varepsilon))$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$
Выпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклый	$\mathcal{O}(1/\varepsilon)$	$\mathcal{O}(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический градиентный спуск имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки скорости не могут быть улучшены при стандартных предположениях.
  - Оракул возвращает несмещенную аппроксимацию градиента с ограниченной дисперсией.
- Методы с моментом и квази-Ньютоновские методы не улучшают скорость в стохастическом случае, а только могут улучшить константные множители (бутылочное горлышко — дисперсия, а не число обусловленности).

## Стохастический градиентный спуск (SGD)

# Типичное поведение

Stochastic Gradient Descent. Batch = 2



# Сходимость

Липшицевость градиента означает:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

## Сходимость

Липшицевость градиента означает:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Используя (SGD):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2$$



# Сходимость

Липшицевость градиента означает:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Используя (SGD):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2$$

Теперь возьмем матожидание по  $i_k$ :

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq \mathbb{E}[f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

## Сходимость

Липшицевость градиента означает:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Используя (SGD):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2$$

Теперь возьмем матожидание по  $i_k$ :

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq \mathbb{E}[f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

Используя линейность матожидания:

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \mathbb{E}[\nabla f_{i_k}(x_k)] \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

## Сходимость

Липшицевость градиента означает:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Используя (SGD):

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2$$

Теперь возьмем матожидание по  $i_k$ :

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq \mathbb{E}[f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \nabla f_{i_k}(x_k) \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

Используя линейность матожидания:

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \langle \nabla f(x_k), \mathbb{E}[\nabla f_{i_k}(x_k)] \rangle + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

Поскольку равномерное выборочное распределение означает несмещенную оценку градиента:

$$\mathbb{E}[\nabla f_{i_k}(x_k)] = \nabla f(x_k):$$

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \quad (1)$$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

- i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*)$$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

- i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

- i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

Вычтем  $f^*$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Вычтем } f^* \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1})] - f^* \leq (f(x_k) - f^*) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$



## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Вычтем } f^* \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1})] - f^* \leq (f(x_k) - f^*) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Переставляем} \quad \leq (1 - 2\alpha_k\mu)[f(x_k) - f^*] + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Вычтем } f^* \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1})] - f^* \leq (f(x_k) - f^*) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Переставляем} \quad \leq (1 - 2\alpha_k\mu)[f(x_k) - f^*] + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

Ограниченность дисперсии:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$

## Гладкий PL-случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

Начнем с неравенства (1):

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1})] \leq f(x_k) - \alpha_k \|\nabla f(x_k)\|^2 + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{PL: } \|\nabla f(x_k)\|^2 \geq 2\mu(f(x_k) - f^*) \quad \leq f(x_k) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Вычтем } f^* \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1})] - f^* \leq (f(x_k) - f^*) - 2\alpha_k\mu(f(x_k) - f^*) + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Переставляем} \quad \leq (1 - 2\alpha_k\mu)[f(x_k) - f^*] + \alpha_k^2 \frac{L}{2} \mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2]$$

$$\text{Ограниченность дисперсии: } \mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2 \quad \leq (1 - 2\alpha_k\mu)[f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha_k^2}{2}.$$

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

- i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}$$

1. Рассмотрим стратегию **убывающего шага** с  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$ , тогда мы получаем

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}$$

1. Рассмотрим стратегию **убывающего шага** с  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$ , тогда мы получаем

$$1 - 2\alpha_k \mu = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} = \frac{k^2}{(k+1)^2}$$

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}$$

1. Рассмотрим стратегию **убывающего шага** с  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$ , тогда мы получаем

$$1 - 2\alpha_k \mu = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] \leq \frac{k^2}{(k+1)^2} [f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2(2k+1)^2}{8\mu^2(k+1)^4}$$

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}$$

1. Рассмотрим стратегию **убывающего шага** с  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$ , тогда мы получаем

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha_k \mu &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \\ \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] &\leq \frac{k^2}{(k+1)^2} [f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2(2k+1)^2}{8\mu^2(k+1)^4} \\ (2k+1)^2 &< (2k+2)^2 = 4(k+1)^2 \\ &\leq \frac{k^2}{(k+1)^2} [f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2(k+1)^2} \end{aligned}$$

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

**i** Пусть  $f$  —  $L$ -гладкая функция, удовлетворяющая условию Поляка-Лоясиевича (PL) с константой  $\mu > 0$ , а дисперсия стохастического градиента ограничена:  $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ . Тогда стохастический градиентный спуск с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  гарантирует

$$\mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}$$

1. Рассмотрим стратегию **убывающего шага** с  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$ , тогда мы получаем

$$\begin{aligned} 1 - 2\alpha_k \mu &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2k+1}{(k+1)^2} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \quad \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] \leq \frac{k^2}{(k+1)^2} [f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2(2k+1)^2}{8\mu^2(k+1)^4} \\ (2k+1)^2 &< (2k+2)^2 = 4(k+1)^2 \quad \leq \frac{k^2}{(k+1)^2} [f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2(k+1)^2} \end{aligned}$$

2. Умножив обе части на  $(k+1)^2$  и пусть  $\delta_f(k) \equiv k^2 \mathbb{E}[f(x_k) - f^*]$  мы получаем

$$\begin{aligned} (k+1)^2 \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] &\leq k^2 \mathbb{E}[f(x_k) - f^*] + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \delta_f(k+1) &\leq \delta_f(k) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2}. \end{aligned}$$



## Сходимость. Гладкий PL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

которое дает указанную скорость.

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

$$\delta_f(i+1) \leq \delta_f(i) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2}$$

которое дает указанную скорость.

## Сходимость. Гладкий RL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

$$\delta_f(i+1) \leq \delta_f(i) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2}$$
$$\sum_{i=0}^k [\delta_f(i+1) - \delta_f(i)] \leq \sum_{i=0}^k \frac{L\sigma^2}{2\mu^2}$$

которое дает указанную скорость.

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned}\delta_f(i+1) &\leq \delta_f(i) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \sum_{i=0}^k [\delta_f(i+1) - \delta_f(i)] &\leq \sum_{i=0}^k \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \delta_f(k+1) - \delta_f(0) &\leq \frac{L\sigma^2(k+1)}{2\mu^2}\end{aligned}$$

которое дает указанную скорость.

## Сходимость. Гладкий PL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned}\delta_f(i+1) &\leq \delta_f(i) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \sum_{i=0}^k [\delta_f(i+1) - \delta_f(i)] &\leq \sum_{i=0}^k \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \delta_f(k+1) - \delta_f(0) &\leq \frac{L\sigma^2(k+1)}{2\mu^2} \\ (k+1)^2 \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] &\leq \frac{L\sigma^2(k+1)}{2\mu^2}\end{aligned}$$

которое дает указанную скорость.

## Сходимость. Гладкий RL-случай.

3. Просуммируем предыдущее неравенство от  $i = 0$  до  $k$  и используем тот факт, что  $\delta_f(0) = 0$  мы получаем

$$\begin{aligned}\delta_f(i+1) &\leq \delta_f(i) + \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \sum_{i=0}^k [\delta_f(i+1) - \delta_f(i)] &\leq \sum_{i=0}^k \frac{L\sigma^2}{2\mu^2} \\ \delta_f(k+1) - \delta_f(0) &\leq \frac{L\sigma^2(k+1)}{2\mu^2} \\ (k+1)^2 \mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] &\leq \frac{L\sigma^2(k+1)}{2\mu^2} \\ \mathbb{E}[f(x_k) - f^*] &\leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2 k}\end{aligned}$$

которое дает указанную скорость.

# Сходимость. Гладкий выпуклый случай (ограниченная дисперсия)

## Вспомогательные обозначения

Для (возможно) неконстантной последовательности шагов  $(\alpha_t)_{t \geq 0}$  определим *взвешенное среднее*

$$\bar{x}_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sum_{t=0}^{k-1} \alpha_t} \sum_{t=0}^{k-1} \alpha_t x_t, \quad k \geq 1.$$

Везде ниже  $f^* \equiv \min_x f(x)$  и  $x^* \in \arg \min_x f(x)$ .

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

**i** Пусть  $f$  — выпуклая функция (не обязательно гладкая), а дисперсия стохастического градиента ограничена  $\mathbb{E}[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \leq \sigma^2 \quad \forall k$ . Если SGD использует постоянный шаг  $\alpha_t \equiv \alpha > 0$ , то для любого  $k \geq 1$

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha \sigma^2}{2}$$

где  $\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} x_t$ .

При выборе постоянного  $\alpha = \frac{\|x_0 - x^*\|}{\sigma\sqrt{k}}$  (зависящего от  $k$ ) имеем

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\| \sigma}{\sqrt{k}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right).$$



## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

1. Начнём с разложения квадрата расстояния до минимума:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - \alpha \nabla f_{i_k}(x_k) - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f_{i_k}(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2.$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

1. Начнём с разложения квадрата расстояния до минимума:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - \alpha \nabla f_{i_k}(x_k) - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f_{i_k}(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2.$$

2. Берём условное матожидание по  $i_k$  (обозначим  $\mathbb{E}_k[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | x_k]$ ), используем свойство  $\mathbb{E}_k[\nabla f_{i_k}(x_k)] = \nabla f(x_k)$ , ограниченность дисперсии  $\mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$  и выпуклость  $f$  (которая даёт  $\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle \geq f(x_k) - f^*$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\|x_{k+1} - x^*\|^2] &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha(f(x_k) - f^*) + \alpha^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

1. Начнём с разложения квадрата расстояния до минимума:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - \alpha \nabla f_{i_k}(x_k) - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f_{i_k}(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2.$$

2. Берём условное матожидание по  $i_k$  (обозначим  $\mathbb{E}_k[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | x_k]$ ), используем свойство  $\mathbb{E}_k[\nabla f_{i_k}(x_k)] = \nabla f(x_k)$ , ограниченность дисперсии  $\mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$  и выпуклость  $f$  (которая даёт  $\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle \geq f(x_k) - f^*$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\|x_{k+1} - x^*\|^2] &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha(f(x_k) - f^*) + \alpha^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

3. Переносим слагаемое с  $f(x_k)$  влево и берём полное матожидание:

$$2\alpha \mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \mathbb{E}[\|x_k - x^*\|^2] - \mathbb{E}[\|x_{k+1} - x^*\|^2] + \alpha^2 \sigma^2.$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

1. Начнём с разложения квадрата расстояния до минимума:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - \alpha \nabla f_{i_k}(x_k) - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f_{i_k}(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2.$$

2. Берём условное матожидание по  $i_k$  (обозначим  $\mathbb{E}_k[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot | x_k]$ ), используем свойство  $\mathbb{E}_k[\nabla f_{i_k}(x_k)] = \nabla f(x_k)$ , ограниченность дисперсии  $\mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$  и выпуклость  $f$  (которая даёт  $\langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle \geq f(x_k) - f^*$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_k[\|x_{k+1} - x^*\|^2] &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \mathbb{E}_k[\|\nabla f_{i_k}(x_k)\|^2] \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha (f(x_k) - f^*) + \alpha^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

3. Переносим слагаемое с  $f(x_k)$  влево и берём полное матожидание:

$$2\alpha \mathbb{E}[f(x_k) - f^*] \leq \mathbb{E}[\|x_k - x^*\|^2] - \mathbb{E}[\|x_{k+1} - x^*\|^2] + \alpha^2 \sigma^2.$$

4. Суммируем (телескопируем) по  $t = 0, \dots, k-1$ :

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{k-1} 2\alpha \mathbb{E}[f(x_t) - f^*] &\leq \sum_{t=0}^{k-1} (\mathbb{E}[\|x_t - x^*\|^2] - \mathbb{E}[\|x_{t+1} - x^*\|^2]) + \sum_{t=0}^{k-1} \alpha^2 \sigma^2 \\ &= \mathbb{E}[\|x_0 - x^*\|^2] - \mathbb{E}[\|x_k - x^*\|^2] + k \alpha^2 \sigma^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + k \alpha^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

5. Делим на  $2\alpha k$ :

$$\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha\sigma^2}{2}.$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

5. Делим на  $2\alpha k$ :

$$\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha\sigma^2}{2}.$$

6. Используя выпуклость  $f$  и неравенство Йенсена для усреднённой точки  $\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} x_t$ :

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k)] \leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} f(x_t) \right] = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t)].$$

Вычитая  $f^*$  из обеих частей, получаем:

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t) - f^*].$$

## Гладкий выпуклый случай с постоянным шагом

5. Делим на  $2\alpha k$ :

$$\frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha \sigma^2}{2}.$$

6. Используя выпуклость  $f$  и неравенство Йенсена для усреднённой точки  $\bar{x}_k = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} x_t$ :

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k)] \leq \mathbb{E} \left[ \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} f(x_t) \right] = \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t)].$$

Вычитая  $f^*$  из обеих частей, получаем:

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{1}{k} \sum_{t=0}^{k-1} \mathbb{E}[f(x_t) - f^*].$$

7. Объединяя (5) и (6), получаем искомую оценку:

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha \sigma^2}{2}.$$

## Гладкий выпуклый случай с убывающим шагом

$$\alpha_k = \frac{\alpha_0}{\sqrt{k+1}}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \frac{1}{4L}$$

**i** При тех же предположениях, но с убывающим шагом  $\alpha_k = \frac{\alpha_0}{\sqrt{k+1}}$

$$\mathbb{E}[f(\bar{x}_k) - f^*] \leq \frac{5\|x_0 - x^*\|^2}{4\alpha_0\sqrt{k}} + 5\alpha_0\sigma^2 \frac{\log(k+1)}{\sqrt{k}} = \mathcal{O}\left(\frac{\log k}{\sqrt{k}}\right).$$



## Мини-батч SGD

# Мини-батч SGD

## Подход 1: контролировать размер выборки

Детерминированный метод использует все  $n$  градиентов:

$$\nabla f(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x_k).$$

Стохастический метод аппроксимирует это, используя только 1 выборку:

$$\nabla f_{i_k}(x_k) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x_k).$$

Распространённый вариант — использовать большую выборку  $B_k$  (“мини-батч”):

$$\frac{1}{|B_k|} \sum_{i \in B_k} \nabla f_i(x_k) \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x_k),$$

особенно полезно для векторизации и параллелизации.

Например, с 16 ядрами установите  $|B_k| = 16$  и вычислите 16 градиентов одновременно.

## Мини-батч как градиентный спуск с ошибкой

Метод SG с выборкой  $B_k$  (“мини-батч”) использует итерации:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \left( \frac{1}{|B_k|} \sum_{i \in B_k} \nabla f_i(x_k) \right).$$

Посмотрим на это как на “градиентный метод с ошибкой”:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k (\nabla f(x_k) + e_k),$$

где  $e_k$  — разница между аппроксимированным и истинным градиентом.

Если вы используете  $\alpha_k = \frac{1}{L}$ , то используя лемму о спуске, этот алгоритм имеет:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|e_k\|^2,$$

для любой ошибки  $e_k$ .

## Влияние ошибки на скорость сходимости

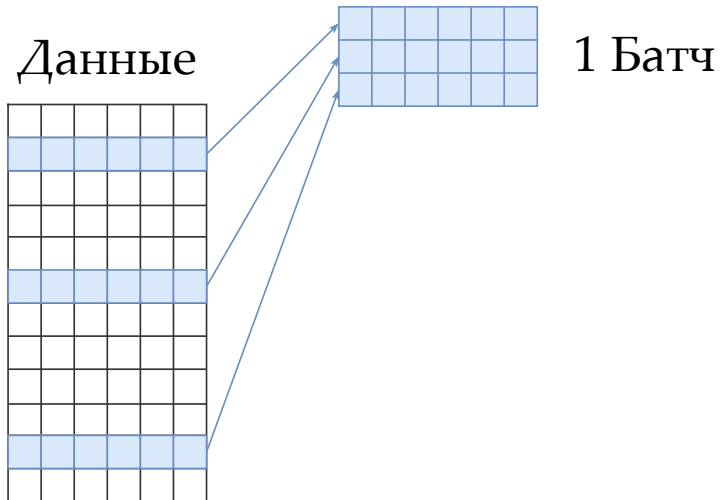
Оценка прогресса с  $\alpha_k = \frac{1}{L}$  и ошибкой в градиенте  $e_k$  выглядит следующим образом:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{1}{2L} \|\nabla f(x_k)\|^2 + \frac{1}{2L} \|e_k\|^2.$$

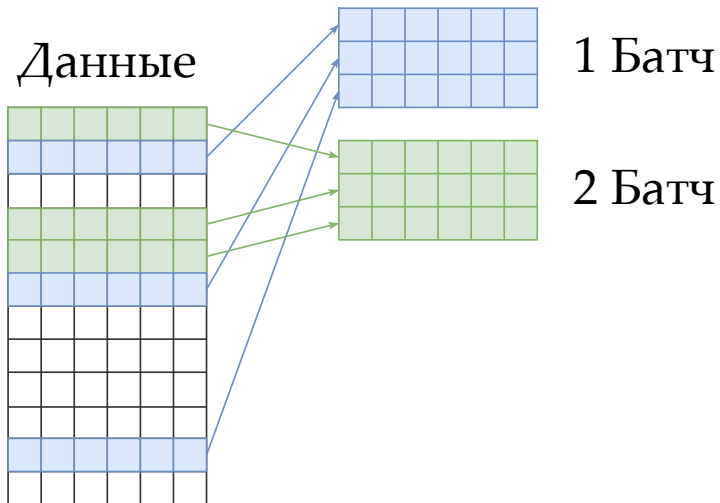
## Идея SGD и батчей

Данные

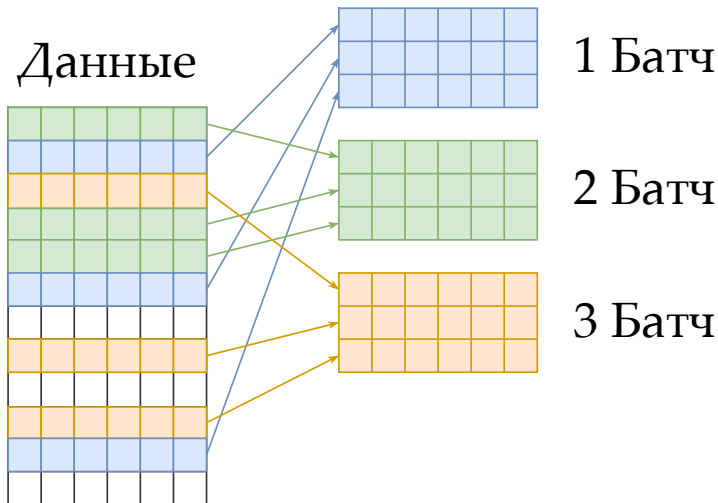

## Идея SGD и батчей



## Идея SGD и батчей

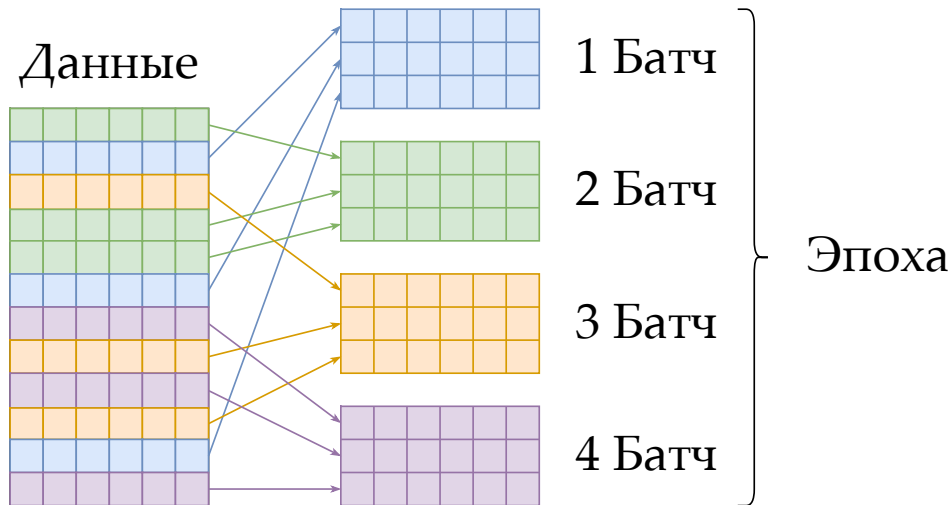


## Идея SGD и батчей





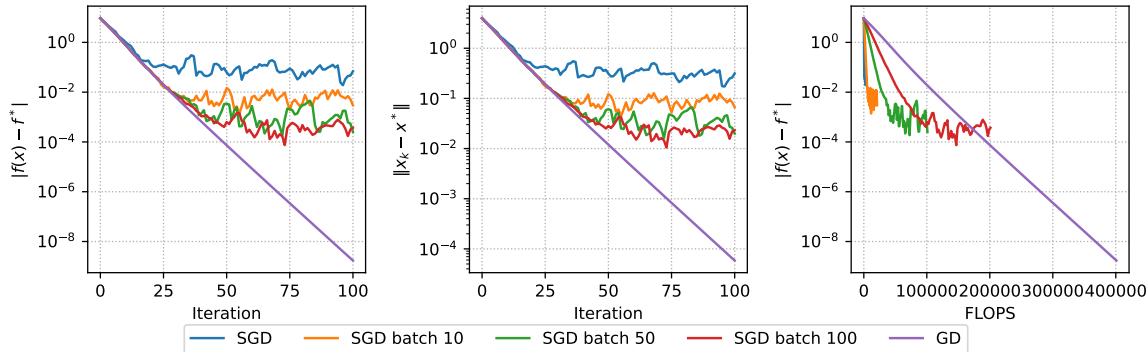
## Идея SGD и батчей



# Основная проблема SGD

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex binary logistic regression.  $m=200$ ,  $n=10$ ,  $\mu=1$ .



# Основные результаты сходимости SGD

**i** Пусть  $f$  -  $L$ -гладкая  $\mu$ -сильно выпуклая функция, а дисперсия стохастического градиента конечна ( $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ ). Тогда траектория стохастического градиентного спуска с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  будет гарантировать:

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

# Основные результаты сходимости SGD

- i** Пусть  $f$  -  $L$ -гладкая  $\mu$ -сильно выпуклая функция, а дисперсия стохастического градиента конечна ( $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ ). Тогда траектория стохастического градиентного спуска с постоянным шагом  $\alpha < \frac{1}{2\mu}$  будет гарантировать:

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] \leq (1 - 2\alpha\mu)^k [f(x_0) - f^*] + \frac{L\sigma^2\alpha}{4\mu}.$$

- i** Пусть  $f$  -  $L$ -гладкая  $\mu$ -сильно выпуклая функция, а дисперсия стохастического градиента конечна ( $\mathbb{E}[\|\nabla f_i(x_k)\|^2] \leq \sigma^2$ ). Тогда стохастический градиентный шум с уменьшающимся шагом  $\alpha_k = \frac{2k+1}{2\mu(k+1)^2}$  будет сходиться сублинейно:

$$\mathbb{E}[f(x_{k+1}) - f^*] \leq \frac{L\sigma^2}{2\mu^2(k+1)}$$

## Заключения

- SGD с постоянным шагом не сходится даже для PL (сильно выпуклого) случая

## Заключения

- SGD с постоянным шагом не сходится даже для PL (сильно выпуклого) случая
- SGD достигает сублинейной сходимости с скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$  для PL-случая.

## Заключения

- SGD с постоянным шагом не сходится даже для PL (сильно выпуклого) случая
- SGD достигает сублинейной сходимости с скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$  для PL-случая.
- Ускорения Нестерова/Поляка не улучшают скорость сходимости

# Заключения

- SGD с постоянным шагом не сходится даже для PL (сильно выпуклого) случая
- SGD достигает сублинейной сходимости с скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$  для PL-случая.
- Ускорения Нестерова/Поляка не улучшают скорость сходимости
- Двухфазный Ньютоновский метод достигает  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$  без сильной выпуклости.