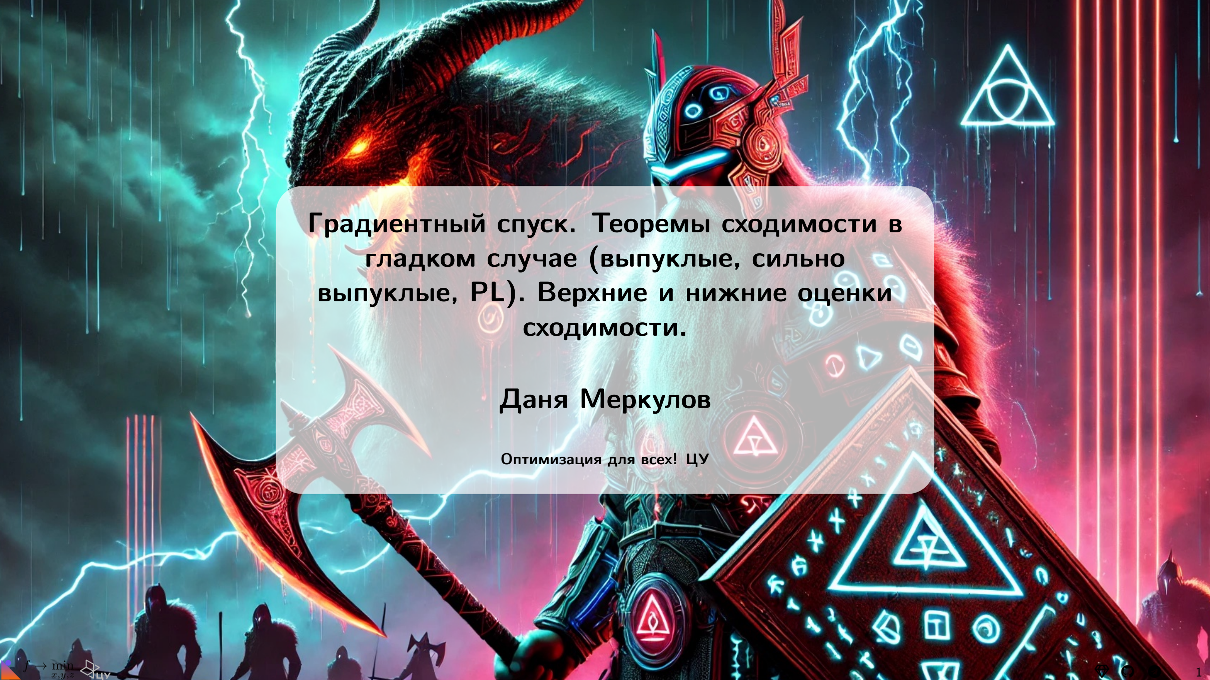


Градиентный спуск. Теоремы сходимости в гладком случае (выпуклые, сильно выпуклые, PL). Верхние и нижние оценки сходимости.

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

Градиентный спуск

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$
f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)
$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Мы хотим, чтобы h было убывающим направлением:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Мы хотим, чтобы h было убывающим направлением:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

и переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle f'(x), h \rangle \leq 0$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Мы хотим, чтобы h было убывающим направлением:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

и переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle f'(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} |\langle f'(x), h \rangle| &\leq \|f'(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle f'(x), h \rangle &\geq -\|f'(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|f'(x)\|_2 \end{aligned}$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Мы хотим, чтобы h было убывающим направлением:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

и переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle f'(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши-Буняковского:

$$|\langle f'(x), h \rangle| \leq \|f'(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle f'(x), h \rangle \geq -\|f'(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|f'(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|_2}$$

даёт направление **наискорейшего локального** убывания функции f.

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль некоторого направления $h, \|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Мы хотим, чтобы h было убывающим направлением:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle f'(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

и переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle f'(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши-Буняковского:

$$|\langle f'(x), h \rangle| \leq \|f'(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle f'(x), h \rangle \geq -\|f'(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|f'(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{f'(x)}{\|f'(x)\|_2}$$

даёт направление **наискорейшего локального** убывания функции f.

Итерация метода имеет вид:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k)$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, которое называется уравнением градиентного потока.

$$\frac{dx}{dt} = -f'(x(t)) \tag{ГП}$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, которое называется уравнением градиентного потока.

$$\frac{dx}{dt} = -f'(x(t)) \tag{ГП}$$

и дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -f'(x_k),$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, которое называется уравнением градиентного потока.

$$
\frac{dx}{dt} = -f'(x(t)) \tag{ГП}
$$

и дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -f'(x_k),
$$

где $x_k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ - шаг сетки.
Отсюда мы получаем выражение для x_{k+1}

$$
x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k),
$$

которое является градиентным спуском.
Открыть в Colab ♣

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение, которое называется уравнением градиентного потока.

$$
\frac{dx}{dt} = -f'(x(t)) \tag{ГП}
$$

и дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -f'(x_k),
$$

где $x_k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ - шаг сетки.
Отсюда мы получаем выражение для x_{k+1}

$$
x_{k+1} = x_k - \alpha f'(x_k),
$$

которое является градиентным спуском.
Открыть в Colab ♣

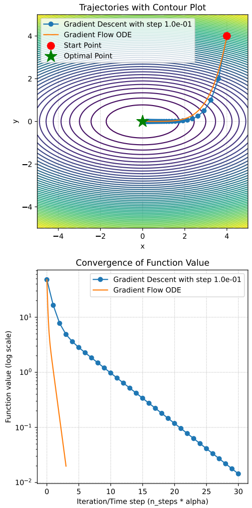
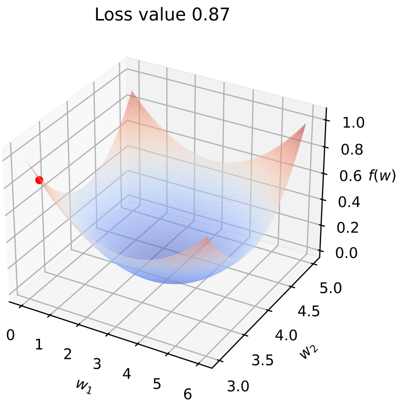
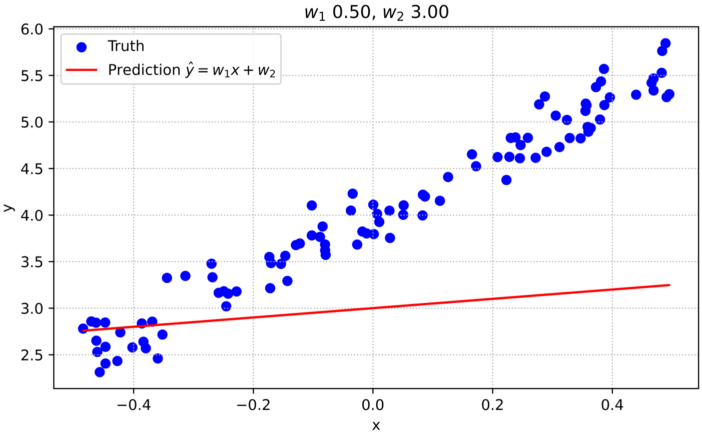


Рис. 1: Траектория градиентного потока

Сходимость алгоритма градиентного спуска

Существенно зависит от выбора шага α:





Точный линейный поиск aka метод наискорейший спуска

$$\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_{k+1}) = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Более теоретический, чем практический подход. Он также позволяет анализировать сходимость, но часто точный линейный поиск может быть сложным, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что каждая следующая итерация ортогональна предыдущей:

$$\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Точный линейный поиск aka метод наискорейший спуска

$$
\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_{k+1}) = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

Более теоретический, чем практический подход. Он также позволяет анализировать сходимость, но часто точный линейный поиск может быть сложным, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.
Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что каждая следующая итерация ортогональна предыдущей:

$$
\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

Оптимальные условия:

Точный линейный поиск aka метод наискорейший спуска

$$
\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_{k+1}) = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

Более теоретический, чем практический подход. Он также позволяет анализировать сходимость, но часто точный линейный поиск может быть сложным, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что каждая следующая итерация ортогональна предыдущей:

$$
\alpha_k = \text{arg}\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

Оптимальные условия:

$$
\nabla f(x_{k+1})^\top \nabla f(x_k) = 0
$$

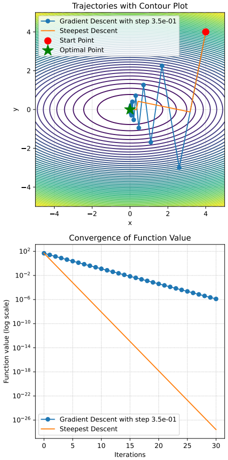


Рис. 2: Наискорейший спуск

Открыть в Colab ♣

Сильно выпуклые квадратичные функции

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

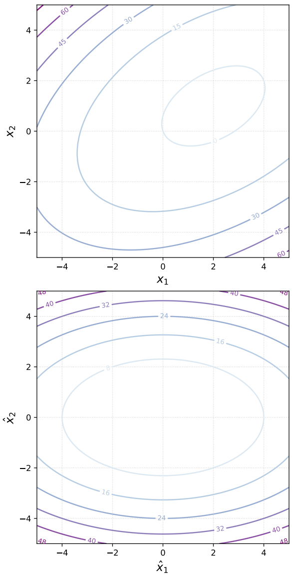
$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.

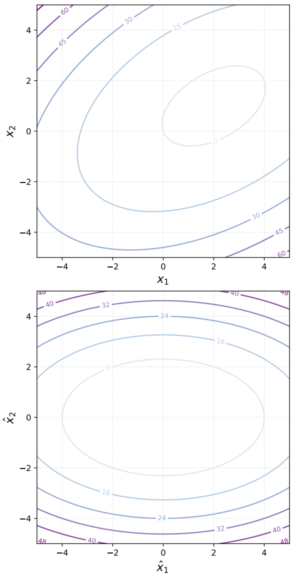


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.

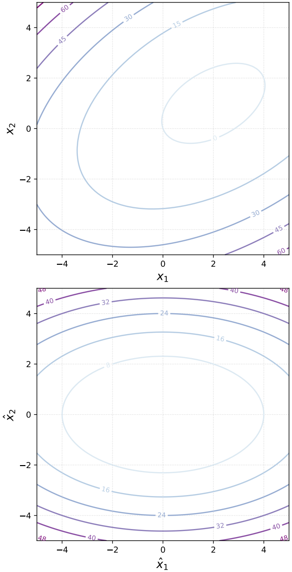


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.



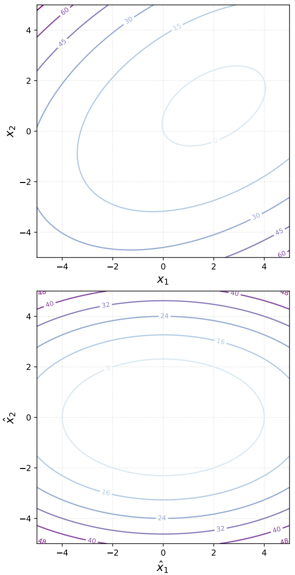
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$
f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*)
$$



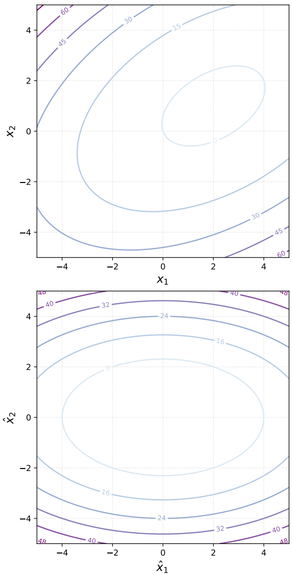
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2} \hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^*
\end{aligned}
$$



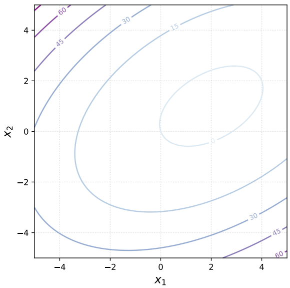
Сдвиг координат

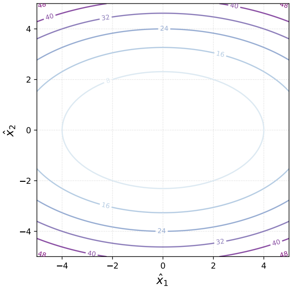
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^*
\end{aligned}
$$





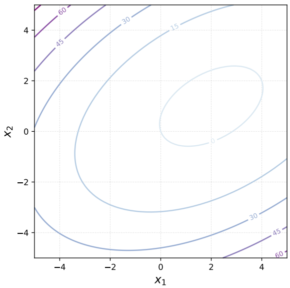
Сдвиг координат

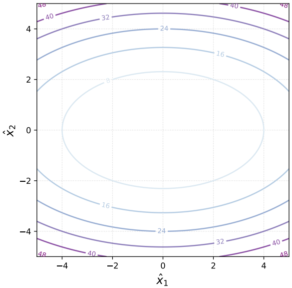
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^*
\end{aligned}
$$





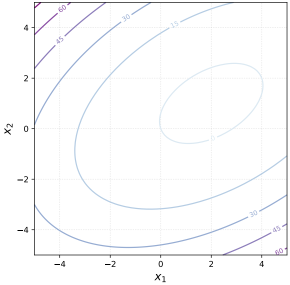
Сдвиг координат

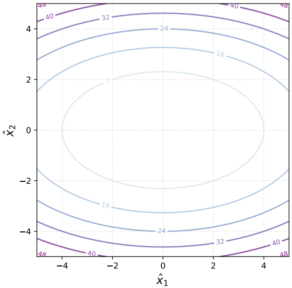
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ where } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Давайте покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* - точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^* \simeq \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x}
\end{aligned}$$





Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
|1 - \alpha\mu| < 1
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha \mu| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha \mu &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \quad & \quad \alpha \mu > 0
\end{aligned}
$$

$$
|1 - \alpha L| < 1
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha\mu| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \quad & \quad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
|1 - \alpha L| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha L &< 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha)
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 & &|1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & &-1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad\quad \alpha\mu > 0 & &\alpha < \frac{2}{L} \quad\quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* : &\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha \mu| &< 1 & |1 - \alpha L| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha \mu &< 1 & -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu &> 0 & \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L &> 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
&\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha\mu| &< 1 & \qquad |1 - \alpha L| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu &< 1 & \qquad -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu &> 0 & \qquad \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L &> 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu} \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu} \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k x^0_{(i)} \\
\|x^{k+1}\|_2 &\leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав шляпу из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x^k_{(i)} \text{ Для } i\text{-ой координаты} \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0, \lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Теперь мы хотим настроить α, чтобы выбрать лучшую (наименьшую) скорость сходимости

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \qquad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu} \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k x^0_{(i)}
\end{aligned}
$$

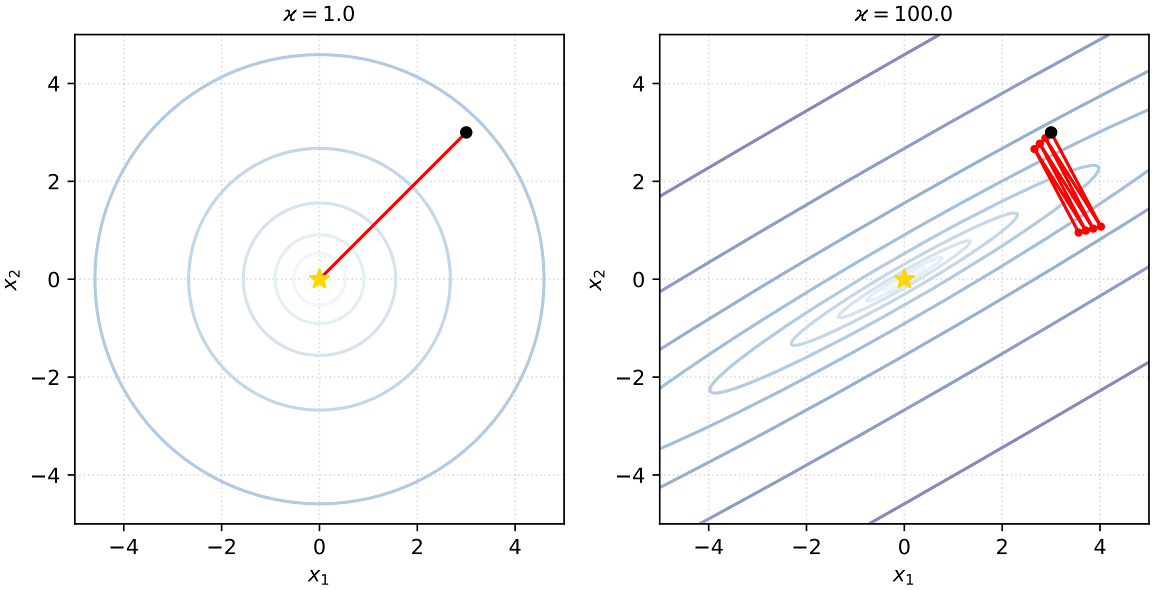
$$
\|x^{k+1}\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^{k+1}) \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^{2k} f(x^0
$$

Анализ сходимости

Таким образом, мы имеем линейную сходимость в области с коэффициентом $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$, где $\varkappa = \frac{L}{\mu}$ иногда называется *числом обусловленности* квадратичной задачи.

$\varkappa$	ρ	Итераций для уменьшения разрыва области в 10 раз	Итераций для уменьшения разрыва в функции в 10 раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

Число обусловленности $\varkappa$



Случай PL-функции

Условие PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

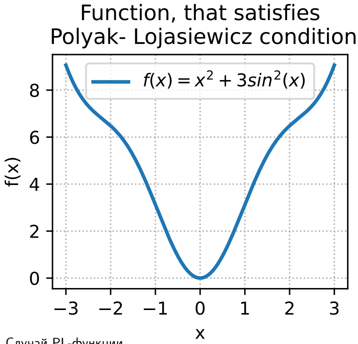
Неравенство PL выполняется, если выполняется следующее условие для некоторого $\mu > 0$,

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$



Условие PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Неравенство PL выполняется, если выполняется следующее условие для некоторого $\mu > 0$,

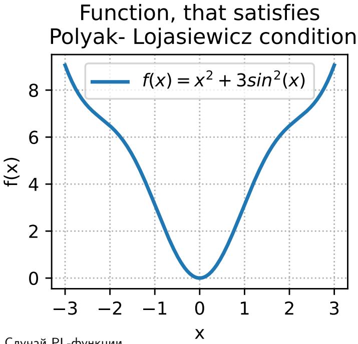
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

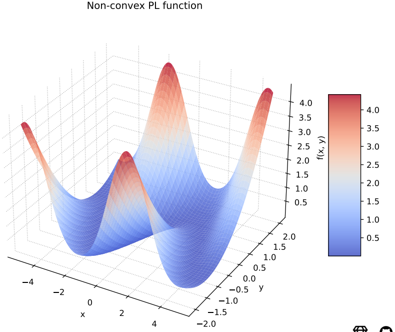
Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$





Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что f является μ-PL-функцией и L-гладкой, для некоторого $L \geq \mu > 0$.

Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную алгоритмом градиентного спуска с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2
$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве мы использовали нашу гипотезу о шаге, что $\alpha L \leq 1$.

Анализ сходимости

Мы можем использовать L-гладкость, вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве мы использовали нашу гипотезу о шаге, что $\alpha L \leq 1$.

Теперь мы можем использовать свойство PL-функции, чтобы записать:

$$
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha\mu(f(x^k) - f^*).
$$

Вычтя f^* из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T(x-x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 =$$

$$= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^*-x)\right)^T(x-x^*) =$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)
\end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

$$= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и $b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

$$= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и

$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Тогда $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$ и

$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right) \\
f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
\end{aligned}
$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

Выпуклый гладкий случай

Выпуклый гладкий случай

Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что f является выпуклой и L-гладкой, для некоторого $L > 0$.
Пусть $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ - последовательность итераций, сгенерированная алгоритмом градиентного спуска с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Тогда, для всех $x^* \in \operatorname{argmin} f$, для всех $k \in \mathbb{N}$ мы имеем:

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, мы сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \text{ if } \alpha = \frac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обычно для сходящегося алгоритма градиентного спуска чем больше шаг, тем быстрее сходимость. Поэтому мы часто будем использовать $\alpha = \frac{1}{L}$.

Анализ сходимости

- Как и раньше, мы сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \left(2 - L\alpha\right) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \text{ if } \alpha = \frac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

  Обычно для сходящегося алгоритма градиентного спуска чем больше шаг, тем быстрее сходимость. Поэтому мы часто будем использовать $\alpha = \frac{1}{L}$.
- После этого мы используем выпуклость:

$$ \tag{2} $$

Анализ сходимости

- Как и раньше, мы сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \text{ if } \alpha = \frac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

  Обычно для сходящегося алгоритма градиентного спуска чем больше шаг, тем быстрее сходимость. Поэтому мы часто будем использовать $\alpha = \frac{1}{L}$.
- После этого мы используем выпуклость:

$$
f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \tag{2}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, мы сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \text{ if } \alpha = \frac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

  Обычно для сходящегося алгоритма градиентного спуска чем больше шаг, тем быстрее сходимость. Поэтому мы часто будем использовать $\alpha = \frac{1}{L}$.
- После этого мы используем выпуклость:

$$
f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ with } y = x^*, x = x^k
\tag{2}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, мы сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \text{ if } \alpha = \frac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

  Обычно для сходящегося алгоритма градиентного спуска чем больше шаг, тем быстрее сходимость. Поэтому мы часто будем использовать $\alpha = \frac{1}{L}$.
- После этого мы используем выпуклость:

$$
\begin{aligned}
f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ with } y = x^*, x = x^k \\
f(x^k) - f^* &\leq \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 &\leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
= f^* + \left\langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \right\rangle \\
= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$.

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right) \right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 &\leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
f(x^{k+1}) \leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right]
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha\nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha\nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right]
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 &\leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha\nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha\nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Теперь предположим, что последняя строка определена для некоторого индекса i и просуммируем по $i \in [0, k-1]$. Большинство слагаемых будут обнулятся из-за телескопической суммы:

$$(3)$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha\nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha\nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Теперь предположим, что последняя строка определена для некоторого индекса i и просуммируем по $i \in [0, k-1]$. Большинство слагаемых будут обнулятся из-за телескопической суммы:

$$
2\alpha\sum_{i=0}^{k-1}\left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \tag{3}
$$

Анализ сходимости

- Теперь мы подставляем Уравнение 2 в Уравнение 1:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Let $a = x^k - x^*$ and $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Then $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ and $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Теперь предположим, что последняя строка определена для некоторого индекса i и просуммируем по $i \in [0, k-1]$. Большинство слагаемых будут обнулятся из-за телескопической суммы:

$$
2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \tag{3}
$$

Анализ сходимости

- Из-за монотонного убывания на каждой итерации $f(x^{i+1}) < f(x^i)$:

$$
kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})
$$

Анализ сходимости

- Из-за монотонного убывания на каждой итерации $f(x^{i+1}) < f(x^i)$:

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в Уравнение 3:

Анализ сходимости

- Из-за монотонного убывания на каждой итерации $f(x^{i+1}) < f(x^i)$:

$$
kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})
$$

- Теперь подставим это в Уравнение 3:

$$
2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2
$$

Анализ сходимости

- Из-за монотонного убывания на каждой итерации $f(x^{i+1}) < f(x^i)$:

$$
kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})
$$

- Теперь подставим это в Уравнение 3:

$$
2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^* \right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2
$$

$$
f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}
$$

Анализ сходимости

* Из-за монотонного убывания на каждой итерации $f(x^{i+1}) < f(x^i)$:

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

* Теперь подставим это в Уравнение 3:

$$2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^* \right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \leq \frac{L\|x^0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

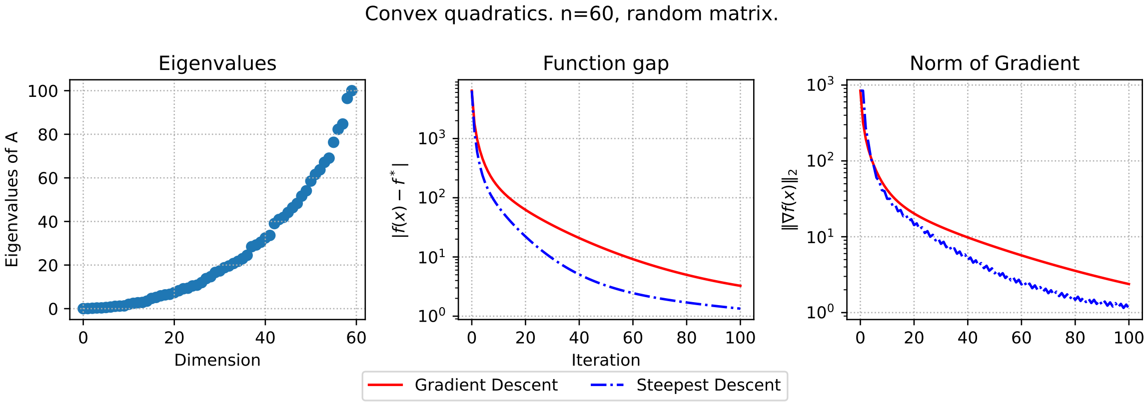
Итог

Градиентный спуск: $$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\|\nabla f(x^k)\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\|x^k - x^*\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Численные эксперименты

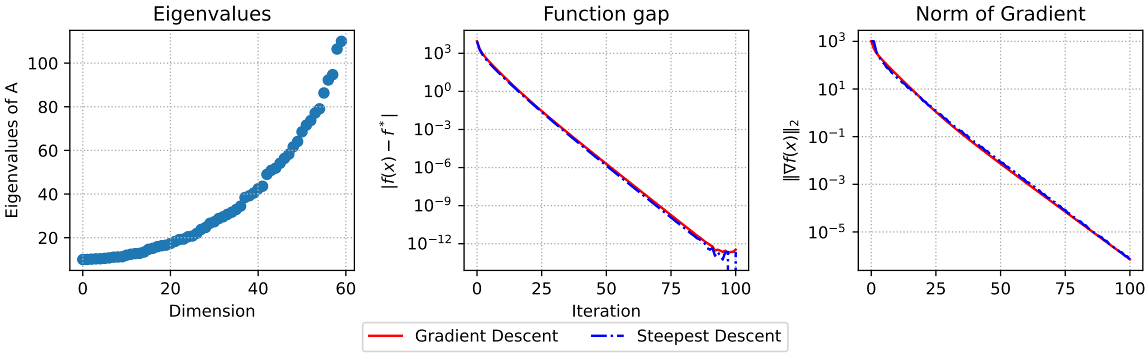
$$
f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}
$$



Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}
$$

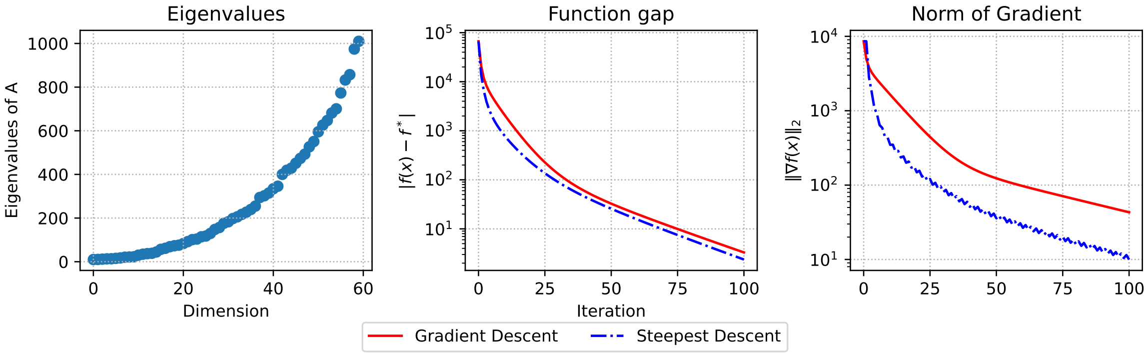
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

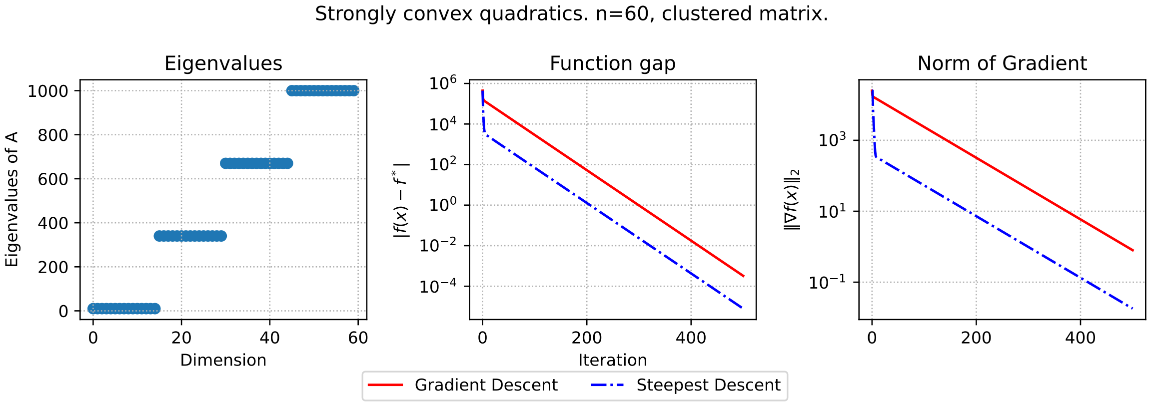
$$
f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}
$$

Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

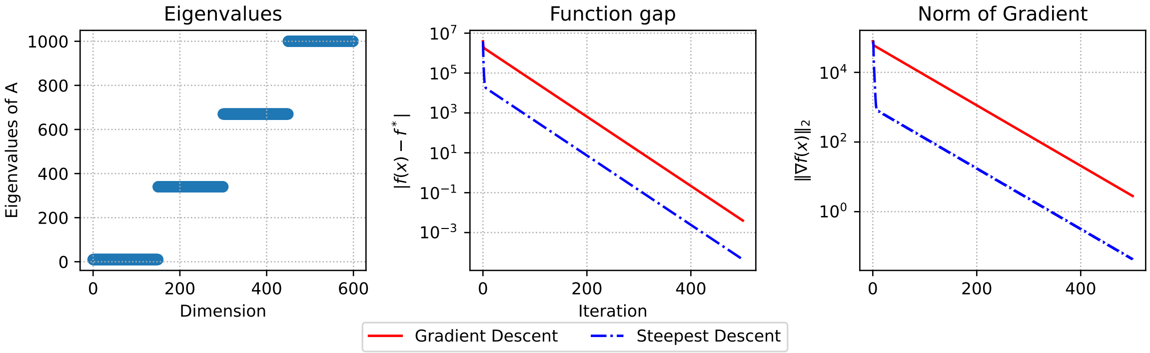
$$
f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}
$$



Численные эксперименты

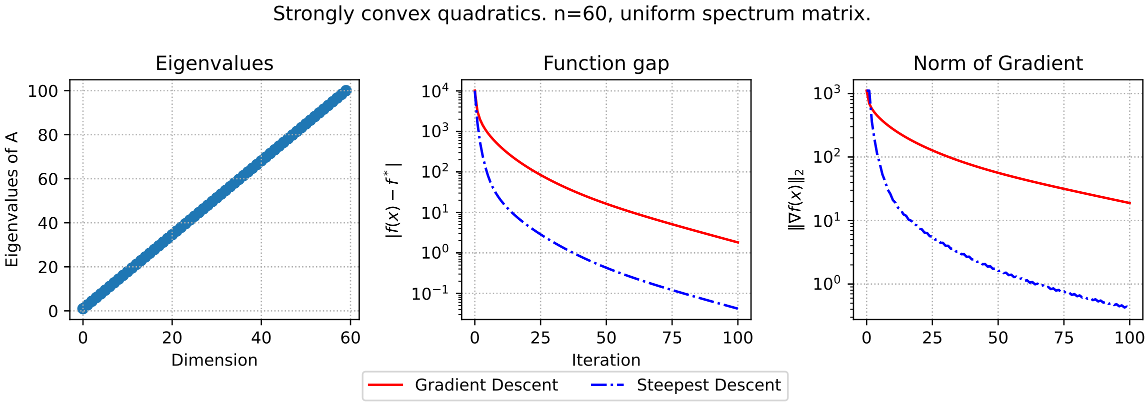
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics. n=600, clustered matrix.



Численные эксперименты

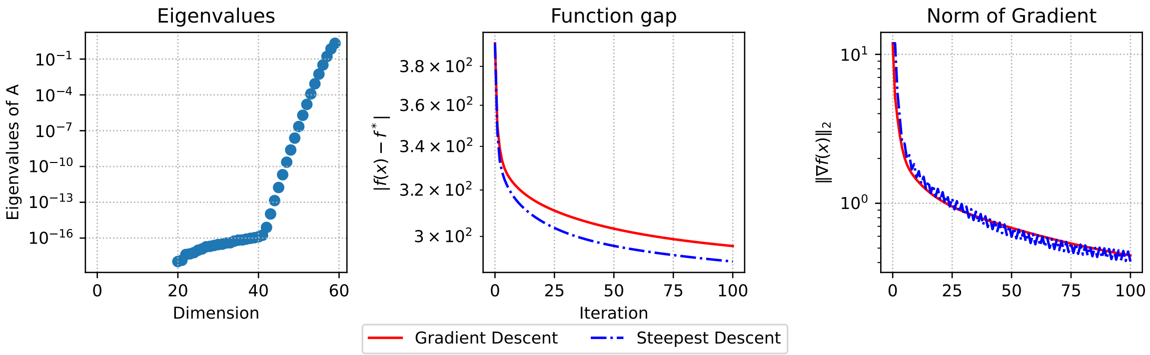
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

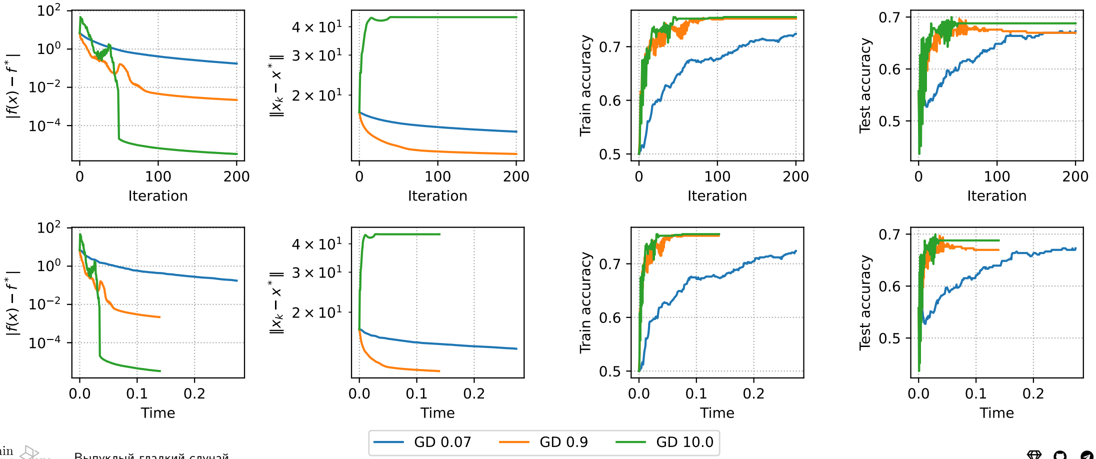
Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



Численные эксперименты

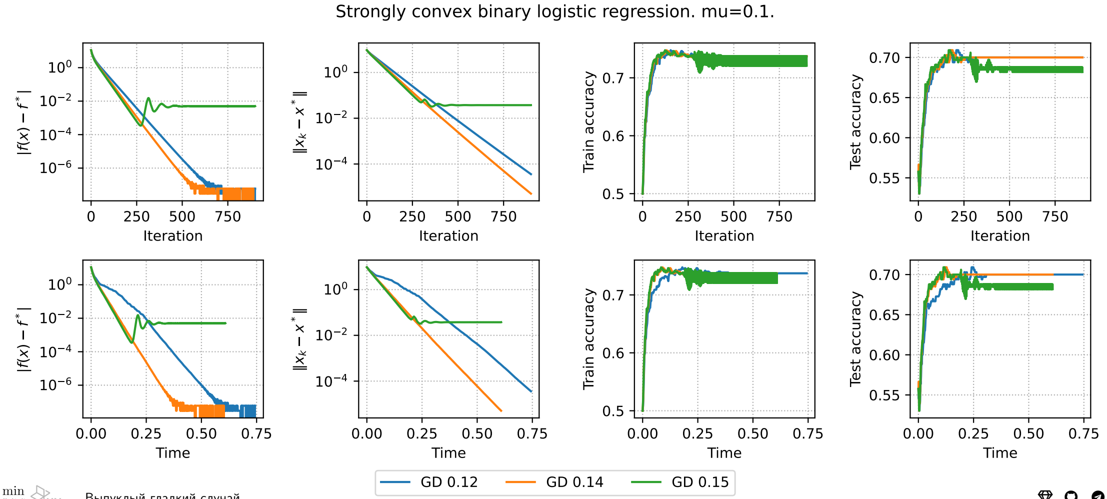
$$f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+\exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}$$

Convex binary logistic regression. mu=0.



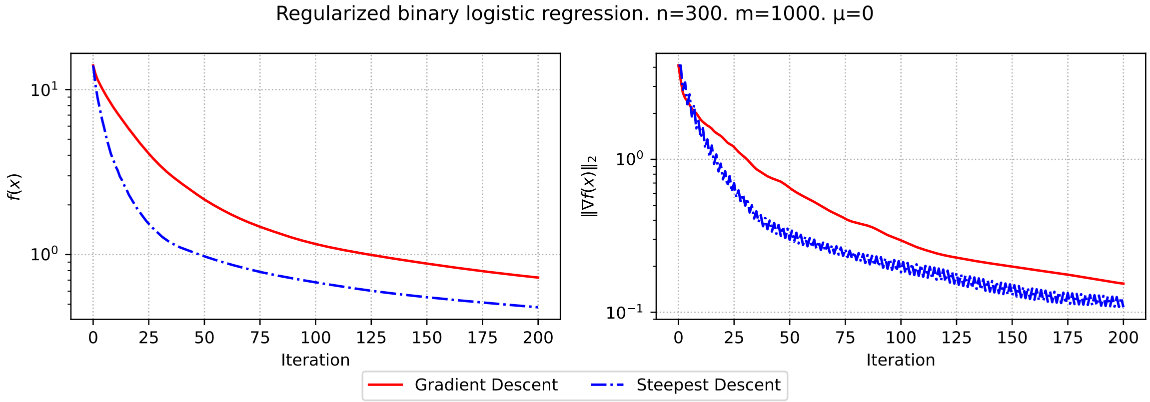
Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+\exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}
$$



Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+\exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}
$$



Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\log(1+\exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}
$$