



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Сюжеты из обучения нейронных сетей

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 14

Даня Меркулов

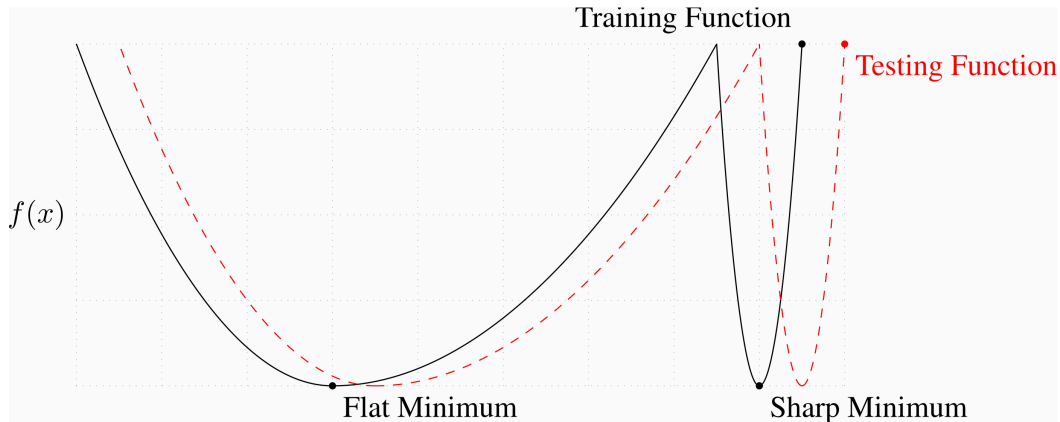
Оптимизация нейронных сетей: Sharpness-Aware Minimization, Mode Connectivity, Grokking, Double Descent.

Семинар

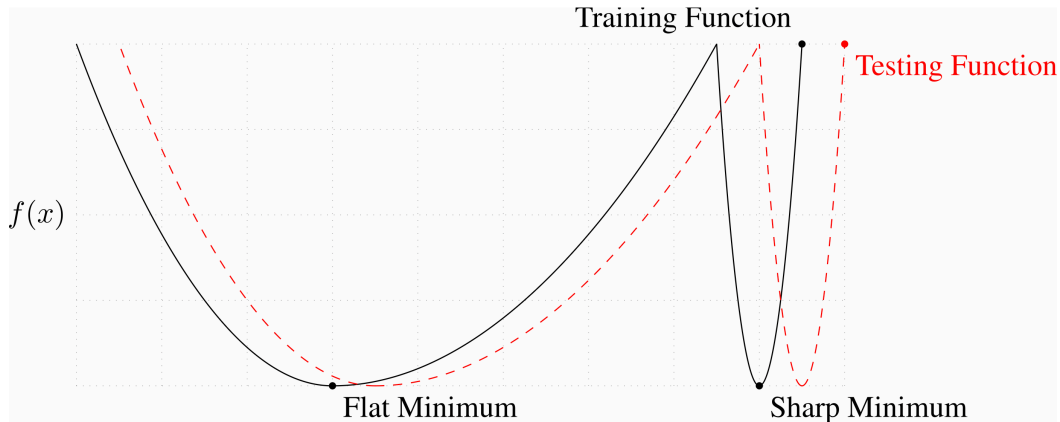
Оптимизация для всех! ЦУ

SAM

Плоский минимум vs Острый минимум



Плоский минимум vs Острый минимум



i Question

Что не так с острым минимумом?

Sharpness-Aware Minimization¹

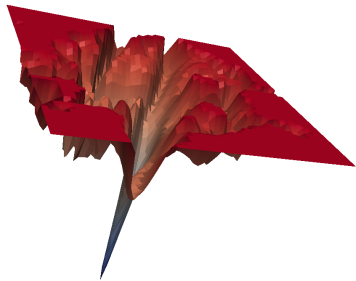


Рисунок 1. Острый минимум, к которому сошлась ResNet, обученная с помощью SGD.

¹Foret, Pierre, et al. "Sharpness-aware minimization for efficiently improving generalization." (2020)

Sharpness-Aware Minimization¹

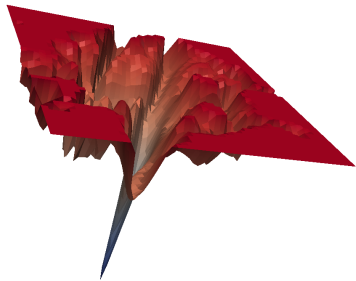


Рисунок 1. Острый минимум, к которому сошлась ResNet, обученная с помощью SGD.

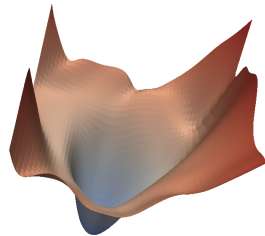


Рисунок 2. Широкий минимум, к которому сошлась та же ResNet, обученная с помощью SAM.

¹Foret, Pierre, et al. "Sharpness-aware minimization for efficiently improving generalization." (2020)

Sharpness-Aware Minimization¹

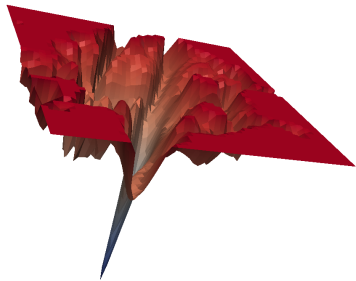


Рисунок 1. Острый минимум, к которому сошлась ResNet, обученная с помощью SGD.

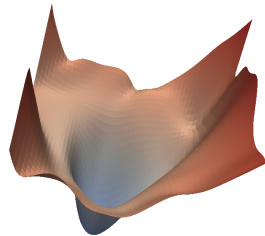


Рисунок 2. Широкий минимум, к которому сошлась та же ResNet, обученная с помощью SAM.

Sharpness-Aware Minimization (SAM) — это процедура, целью которой является улучшение обобщающей способности модели путем одновременной минимизации значения функции потерь и **остроты (sharpness) функции потерь**.

¹Foret, Pierre, et al. "Sharpness-aware minimization for efficiently improving generalization." (2020)

Постановка задачи обучения



Обучающая выборка, полученная *i.i.d.* из распределения D :

$$S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n,$$

где x_i — вектор признаков, а y_i — метка.

Постановка задачи обучения

Обучающая выборка, полученная *i.i.d.* из распределения D :

$$S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n,$$

где x_i — вектор признаков, а y_i — метка.

Функция потерь на обучающей выборке:

$$L_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(w, x_i, y_i),$$

где l — функция потерь для одного объекта, w — параметры.

Постановка задачи обучения

Обучающая выборка, полученная *i.i.d.* из распределения D :

$$S = \{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n,$$

где x_i — вектор признаков, а y_i — метка.

Функция потерь на обучающей выборке:

$$L_S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l(w, x_i, y_i),$$

где l — функция потерь для одного объекта, w — параметры.

Функция потерь на генеральной совокупности (population loss):

$$L_D = \mathbb{E}_{(x,y)}[l(w, x, y)]$$

Что такое sharpness (острота)?



Theorem

Для любого $\rho > 0$, с высокой вероятностью по обучающей выборке S , сгенерированной из распределения D ,

$$L_D(w) \leq \max_{\|\epsilon\|_2 \leq \rho} L_S(w + \epsilon) + h(\|w\|_2^2 / \rho^2),$$

где $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — строго возрастающая функция (при некоторых технических условиях на $L_D(w)$).

Что такое sharpness (острота)?



i Theorem

Для любого $\rho > 0$, с высокой вероятностью по обучающей выборке S , сгенерированной из распределения D ,

$$L_D(w) \leq \max_{\|\epsilon\|_2 \leq \rho} L_S(w + \epsilon) + h(\|w\|_2^2 / \rho^2),$$

где $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ — строго возрастающая функция (при некоторых технических условиях на $L_D(w)$).

Добавляя и вычитая $L_S(w)$:

$$\left[\max_{\|\epsilon\|_2 \leq \rho} L_S(w + \epsilon) - L_S(w) \right] + L_S(w) + h(\|w\|_2^2 / \rho^2)$$

Слагаемое в квадратных скобках отражает **остроту (sharpness)** L_S в точке w , измеряя, как быстро может возрасти ошибка обучения при переходе от w к близкому значению параметров.

Sharpness-Aware Minimization



Функция h заменяется на более простую константу λ . Авторы предлагают выбирать значения параметров, решая следующую задачу Sharpness-Aware Minimization (SAM):

$$\min_w L_S^{SAM}(w) + \lambda \|w\|_2^2 \quad \text{где} \quad L_S^{SAM}(w) \triangleq \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} L_S(w + \epsilon),$$

с гиперпараметром $\rho \geq 0$ и p из $[1, \infty]$ (небольшое обобщение, хотя $p = 2$ эмпирически является лучшим выбором).

Как минимизировать L_S^{SAM} ?



Для минимизации L_S^{SAM} используется эффективная аппроксимация его градиента. Первым шагом рассматривается разложение Тейлора первого порядка для $L_S(w + \epsilon)$:

$$\epsilon^*(w) \triangleq \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w + \epsilon)\} \approx \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w) + \epsilon^T \nabla_w L_S(w)\} = \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{\epsilon^T \nabla_w L_S(w)\}.$$

Как минимизировать L_S^{SAM} ?



Для минимизации L_S^{SAM} используется эффективная аппроксимация его градиента. Первым шагом рассматривается разложение Тейлора первого порядка для $L_S(w + \epsilon)$:

$$\epsilon^*(w) \triangleq \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w + \epsilon)\} \approx \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w) + \epsilon^T \nabla_w L_S(w)\} = \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{\epsilon^T \nabla_w L_S(w)\}.$$

Последнее выражение — это просто $\arg \max$ скалярного произведения векторов ϵ и $\nabla_w L_S(w)$, и хорошо известно, какой аргумент его максимизирует:

$$\hat{\epsilon}(w) = \rho \operatorname{sign}(\nabla_w L_S(w)) |\nabla_w L_S(w)|^{q-1} / \left(\|\nabla_w L_S(w)\|_q^q \right)^{1/p},$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Как минимизировать L_S^{SAM} ?



Для минимизации L_S^{SAM} используется эффективная аппроксимация его градиента. Первым шагом рассматривается разложение Тейлора первого порядка для $L_S(w + \epsilon)$:

$$\epsilon^*(w) \triangleq \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w + \epsilon)\} \approx \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{L_S(w) + \epsilon^T \nabla_w L_S(w)\} = \arg \max_{\|\epsilon\|_p \leq \rho} \{\epsilon^T \nabla_w L_S(w)\}.$$

Последнее выражение — это просто $\arg \max$ скалярного произведения векторов ϵ и $\nabla_w L_S(w)$, и хорошо известно, какой аргумент его максимизирует:

$$\hat{\epsilon}(w) = \rho \operatorname{sign}(\nabla_w L_S(w)) |\nabla_w L_S(w)|^{q-1} / (\|\nabla_w L_S(w)\|_q^q)^{1/p},$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Таким образом

$$\begin{aligned} \nabla_w L_S^{SAM}(w) &\approx \nabla_w L_S(w + \hat{\epsilon}(w)) = \left. \frac{d(w + \hat{\epsilon}(w))}{dw} \nabla_w L_S(w) \right|_{w + \hat{\epsilon}(w)} \\ &= \left. \nabla_w L_S(w) \right|_{w + \hat{\epsilon}(w)} + \left. \frac{d\hat{\epsilon}(w)}{dw} \nabla_w L_S(w) \right|_{w + \hat{\epsilon}(w)} \end{aligned}$$

Sharpness-Aware Minimization



Современные фреймворки могут легко вычислить предыдущее приближение. Однако для ускорения вычислений члены второго порядка можно отбросить, получая:

$$\nabla_w L_S^{SAM}(w) \approx \nabla_w L_S(w) \Big|_{w+\hat{\epsilon}(w)}$$

Sharpness-Aware Minimization



Современные фреймворки могут легко вычислить предыдущее приближение. Однако для ускорения вычислений члены второго порядка можно отбросить, получая:

$$\nabla_w L_S^{SAM}(w) \approx \nabla_w L_S(w)|_{w+\hat{\epsilon}(w)}$$

Input: Training set $\mathcal{S} \triangleq \cup_{i=1}^n \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)\}$, Loss function $l : \mathcal{W} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}_+$, Batch size b , Step size $\eta > 0$, Neighborhood size $\rho > 0$.

Output: Model trained with SAM

Initialize weights \mathbf{w}_0 , $t = 0$;

while not converged do

- Sample batch $\mathcal{B} = \{(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \dots, (\mathbf{x}_b, \mathbf{y}_b)\}$;
- Compute gradient $\nabla_w L_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})$ of the batch's training loss;
- Compute $\hat{\epsilon}(\mathbf{w})$ per equation 2;
- Compute gradient approximation for the SAM objective (equation 3): $\mathbf{g} = \nabla_w L_{\mathcal{B}}(\mathbf{w})|_{w+\hat{\epsilon}(w)}$;
- Update weights: $\mathbf{w}_{t+1} = \mathbf{w}_t - \eta \mathbf{g}$;
- $t = t + 1$;

end

return \mathbf{w}_t

Algorithm 1: SAM algorithm

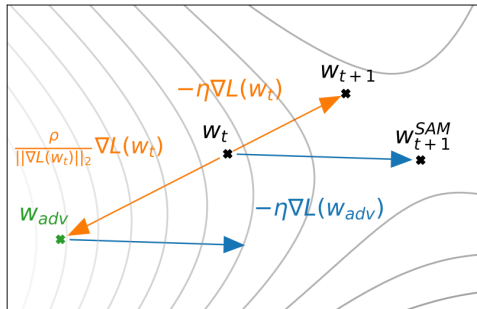


Figure 2: Schematic of the SAM parameter update.

Результаты SAM

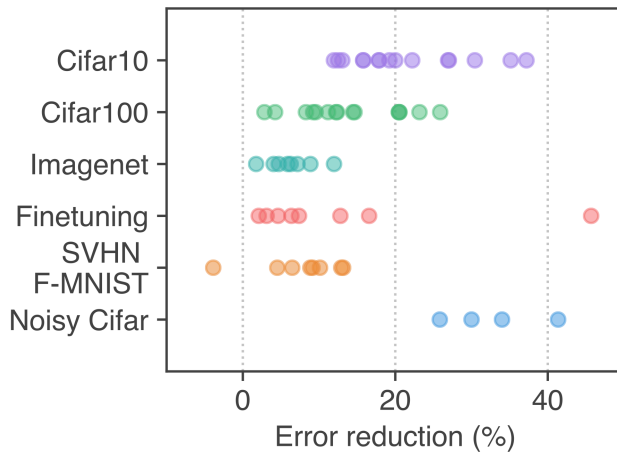


Рисунок 4. Снижение частоты ошибок, полученное при переходе на SAM. Каждая точка соответствует отдельному набору данных / модели / аугментации данных.

Связность мод (Mode Connectivity)

Связность мод (Mode Connectivity)²

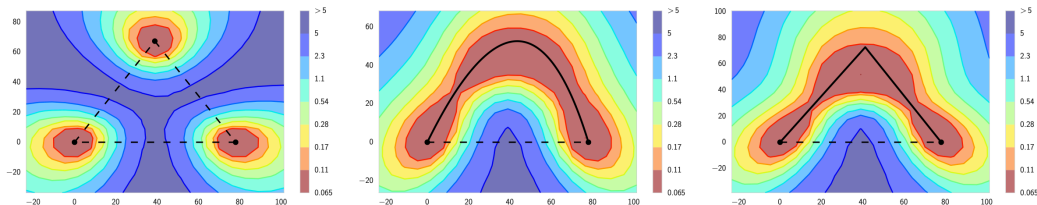


Рисунок 5. Поверхность функции потерь (кросс-энтропия с l_2 -регуляризацией) для ResNet-164 на CIFAR-100 как функция весов сети в двумерном подпространстве. На каждом графике горизонтальная ось фиксирована и проходит через оптимумы двух независимо обученных сетей. Вертикальная ось меняется между графиками при смене плоскостей (определенных в основном тексте). Слева: Три оптимума для независимо обученных сетей. В центре и справа: Квадратичная кривая Безье и ломаная с одним изгибом, соединяющие два нижних оптимума с левого графика вдоль пути с почти постоянной функцией потерь. Заметьте, что на каждом графике прямой линейный путь между модами привел бы к высоким потерям.

²Garipov, T., Izmailov, P., Podoprikin, D., Vetrov, D. P., Wilson, A. G. (2018). Loss surfaces, mode connectivity, and fast ensembling of dnns. Advances in neural information processing systems, 31.

Процедура поиска кривой

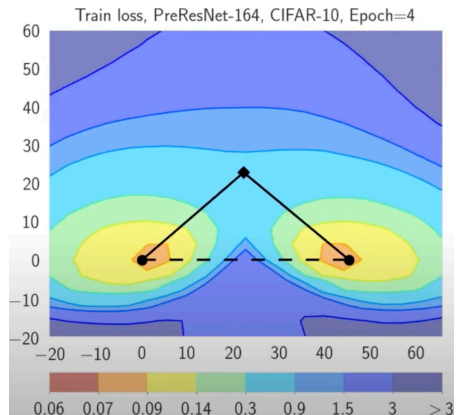
- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

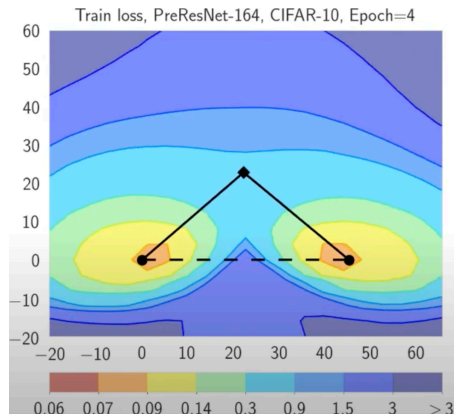
$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

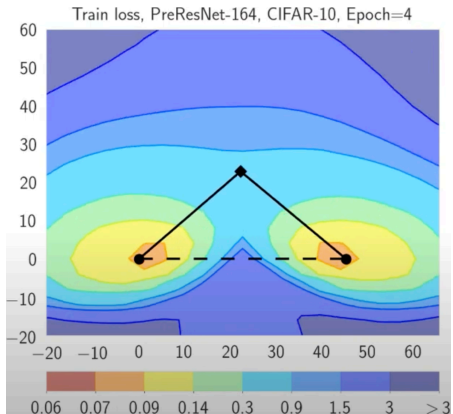
- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

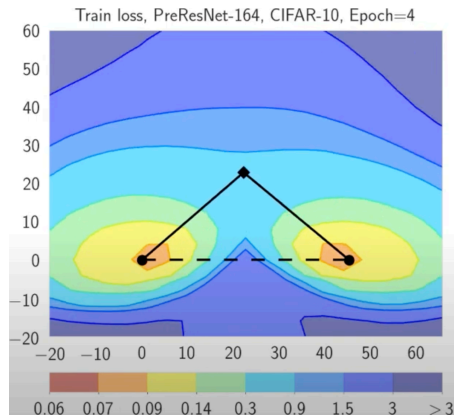
$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

- Минимизируем усредненную функцию потерь по θ :

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой

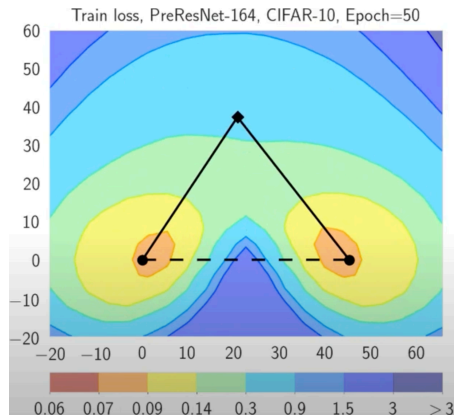
- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

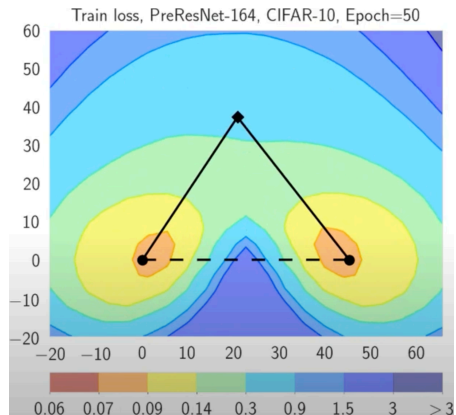
$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

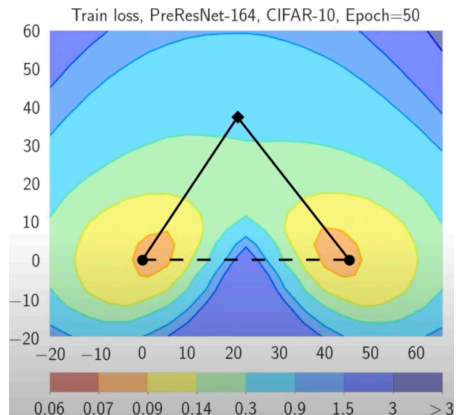
- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

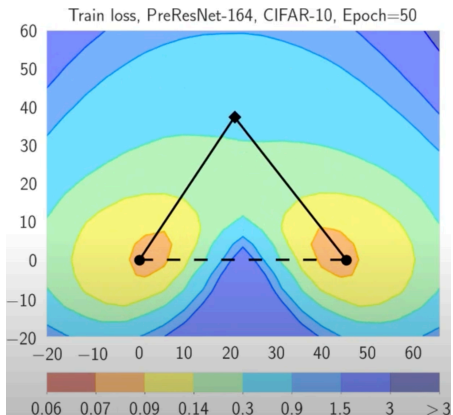
$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

- Минимизируем усредненную функцию потерь по θ :

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой

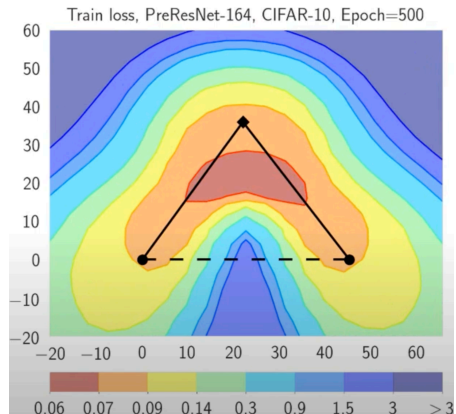
- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой

- Веса предобученных сетей:

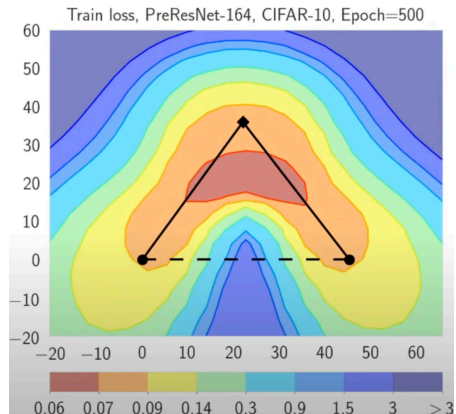
$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

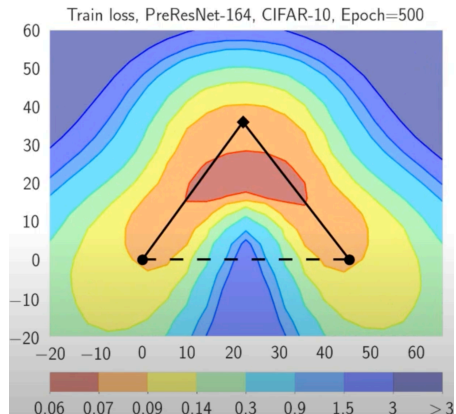
- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Процедура поиска кривой



- Веса предобученных сетей:

$$\widehat{w}_1, \widehat{w}_2 \in \mathbb{R}^{|\text{net}|}$$

- Определим параметрическую кривую: $\phi_\theta(\cdot) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{|\text{net}|}$

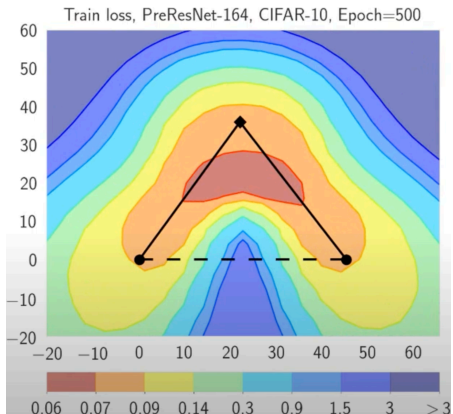
$$\phi_\theta(0) = \widehat{w}_1, \quad \phi_\theta(1) = \widehat{w}_2$$

- Функция потерь DNN:

$$\mathcal{L}(w)$$

- Минимизируем усредненную функцию потерь по θ :

$$\underset{\theta}{\text{minimize}} \quad \ell(\theta) = \int_0^1 \mathcal{L}(\phi_\theta(t)) dt = \mathbb{E}_{t \sim U(0,1)} \mathcal{L}(\phi_\theta(t))$$



Гроккинг (Grokking)

Гроккинг (Grokking)³



- После достижения нулевой ошибки на обучении веса продолжают изменяться в манере, напоминающей случайное блуждание

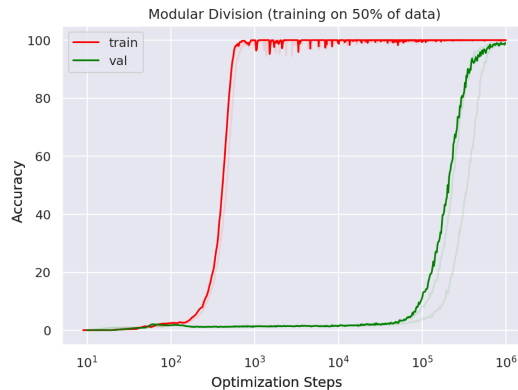


Рисунок 6. Гроккинг: Яркий пример обобщения, наступающего намного позже переобучения на алгоритмическом наборе данных.

Гроккинг (Grokking)³



- После достижения нулевой ошибки на обучении веса продолжают изменяться в манере, напоминающей случайное блуждание
- Возможно, они медленно дрейфуют к более широкому минимуму

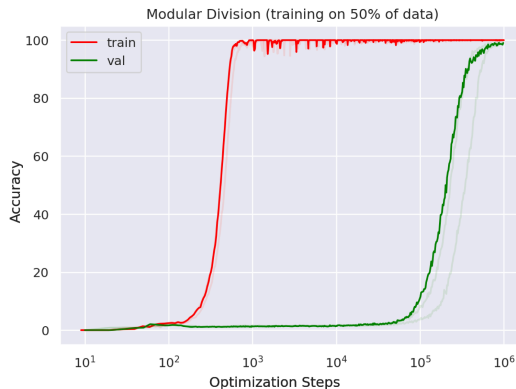


Рисунок 6. Гроккинг: Яркий пример обобщения, наступающего намного позже переобучения на алгоритмическом наборе данных.

Гроккинг (Grokking)³



- После достижения нулевой ошибки на обучении веса продолжают изменяться в манере, напоминающей случайное блуждание
- Возможно, они медленно дрейфуют к более широкому минимуму
- Недавно открытый эффект гроккинга подтверждает эту гипотезу

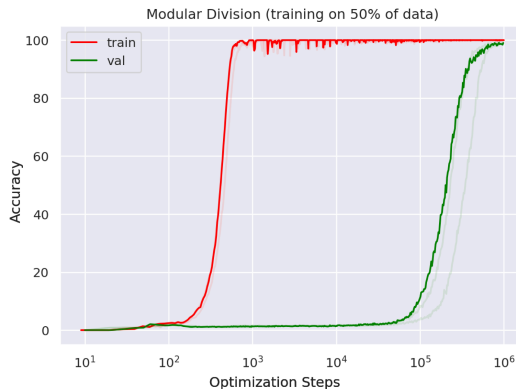


Рисунок 6. Гроккинг: Яркий пример обобщения, наступающего намного позже переобучения на алгоритмическом наборе данных.

³Power, Alethea, et al. "Grokking: Generalization beyond overfitting on small algorithmic datasets." (2022).

Двойной спуск (Double Descent)

Двойной спуск (Double Descent)⁴

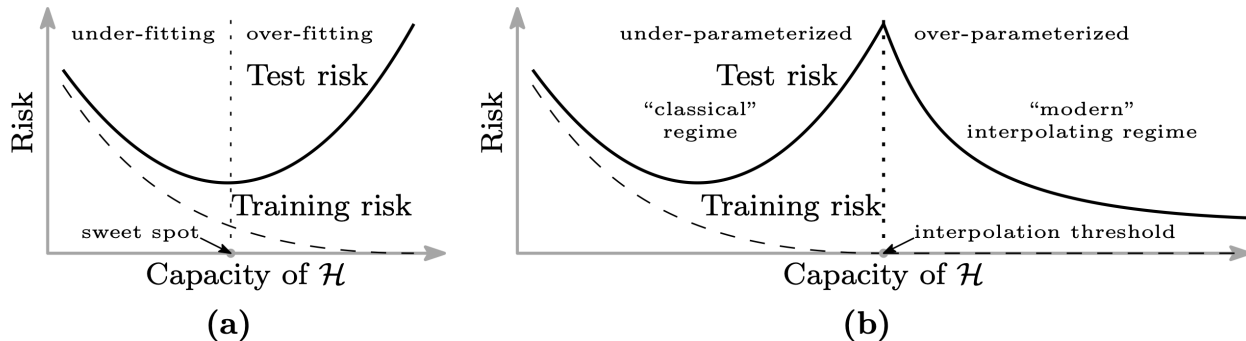
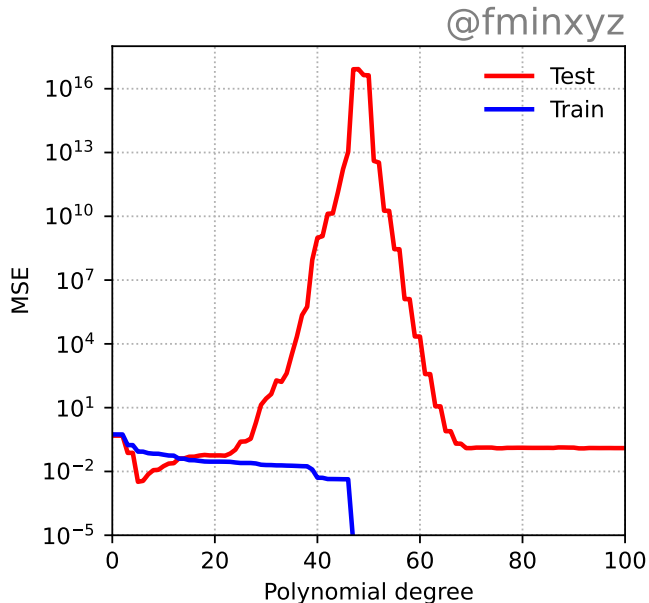
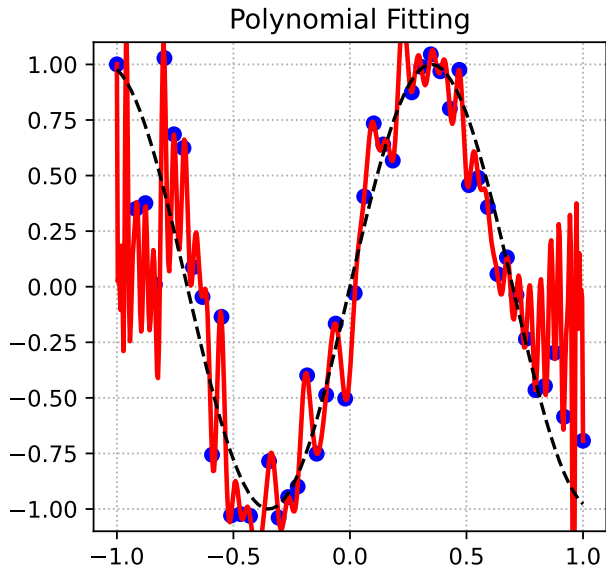


Рисунок 7. Кривые риска обучения (пунктирная линия) и тестового риска (сплошная линия). (a) Классическая U-образная кривая риска, возникающая из компромисса смещения и дисперсии (bias-variance trade-off). (b) Кривая риска двойного спуска, которая объединяет U-образную кривую риска (т.е. «классический» режим) с наблюдаемым поведением на моделях высокой размерности (т.е. «современный» интерполяционный режим), разделенных порогом интерполяции. Предикторы справа от порога интерполяции имеют нулевой риск обучения.

⁴Belkin, Mikhail, et al. "Reconciling modern machine-learning practice and the classical bias-variance trade-off." (2019)

Двойной спуск (Double Descent)



Shampoo и Muon

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

Заметки:

- Нацелен на более эффективный учет информации о кривизне, чем методы первого порядка.

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

Заметки:

- Нацелен на более эффективный учет информации о кривизне, чем методы первого порядка.
- Вычислительно дороже, чем Adam, но может сходиться быстрее или к лучшим решениям с точки зрения количества шагов.

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

Заметки:

- Нацелен на более эффективный учет информации о кривизне, чем методы первого порядка.
- Вычислительно дороже, чем Adam, но может сходиться быстрее или к лучшим решениям с точки зрения количества шагов.
- Требуется тщательной реализации для эффективности (например, эффективное вычисление обратных матричных корней, работа с большими матрицами).

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

Shampoo⁵



Расшифровывается как **Stochastic Hessian-Approximation Matrix Preconditioning for Optimization Of** deep networks. Это метод, вдохновленный оптимизацией второго порядка, разработанный для глубокого обучения больших моделей.

Основная идея: Аппроксимирует полноматричный предобуславливатель AdaGrad, используя эффективные матричные структуры, в частности произведения Кронекера.

Для матрицы весов $W \in \mathbb{R}^{m \times n}$ обновление включает предобуславливание с использованием аппроксимаций матриц статистики $L \approx \sum_k G_k G_k^T$ и $R \approx \sum_k G_k^T G_k$, где G_k — градиенты.

Упрощенная концепция:

1. Вычислить градиент G_k .
2. Обновить статистики $L_k = \beta L_{k-1} + (1 - \beta) G_k G_k^T$ и $R_k = \beta R_{k-1} + (1 - \beta) G_k^T G_k$.
3. Вычислить предобуславливатели $P_L = L_k^{-1/4}$ и $P_R = R_k^{-1/4}$. (Обратный матричный корень)
4. Обновить: $W_{k+1} = W_k - \alpha P_L G_k P_R$.

Заметки:

- Нацелен на более эффективный учет информации о кривизне, чем методы первого порядка.
- Вычислительно дороже, чем Adam, но может сходиться быстрее или к лучшим решениям с точки зрения количества шагов.
- Требуется тщательной реализации для эффективности (например, эффективное вычисление обратных матричных корней, работа с большими матрицами).
- Существуют варианты для различных форм тензоров (например, сверточных слоев).

⁵Gupta, V., Koren, T. and Singer, Y., 2018, July. Shampoo: Preconditioned stochastic tensor optimization. In International Conference on Machine Learning (pp. 1842-1850). PMLR.

$$\begin{aligned}
 W_{t+1} &= W_t - \eta(G_t G_t^\top)^{-1/4} G_t (G_t^\top G_t)^{-1/4} \\
 &= W_t - \eta(U S^2 U^\top)^{-1/4} (U S V^\top) (V S^2 V^\top)^{-1/4} \\
 &= W_t - \eta(U S^{-1/2} U^\top) (U S V^\top) (V S^{-1/2} V^\top) \\
 &= W_t - \eta U S^{-1/2} S S^{-1/2} V^\top \\
 &= W_t - \eta U V^\top
 \end{aligned}$$

⁶K. Jordan blogpost "Muon: An optimizer for hidden layers in neural networks". 2024.

⁷J. Bernstein blogpost "Deriving Muon". 2025.

⁸Kovalev, D. (2025). Understanding Gradient Orthogonalization for Deep Learning via Non-Euclidean Trust-Region Optimization. arXiv preprint arXiv:2503.12645.

Сравнение Muon с AdamW на LogReg




🔗 Простое сравнение Muon и AdamW на небольшой задаче LogReg

Дополнительные материалы



Дополнительные материалы



-  Д. Ветров "Удивительные свойства ландшафта функции потерь в перепараметризованных моделях"




Дополнительные материалы



-  Д. Ветров "Удивительные свойства ландшафта функции потерь в перепараметризованных моделях"
-  В. Голощапов "О чем не гроккинг"

Дополнительные материалы



-  Д. Ветров "Удивительные свойства ландшафта функции потерь в перепараметризованных моделях"
-  В. Голощапов "О чем не гроккинг"
-  Д. Ковалев "Understanding Gradient Orthogonalization for Deep Learning via Non-Euclidean Trust-Region Optimization" (Теория за Muon)