

# Ускоренные градиентные методы

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 8

Даня Меркулов  
Пётр Остроухов



# Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ



# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$   $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu \log \frac{1}{\varepsilon}}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого  $x$ , поскольку  $e^{-x}$  выпуклая и  $1 - x$  является её касательной в точке  $x = 0$ , мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu \log \frac{1}{\varepsilon}}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

Наконец:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^*$$

Обратите внимание, что для любого  $x$ , поскольку  $e^{-x}$  выпуклая и  $1 - x$  является её касательной в точке  $x = 0$ , мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu \log \frac{1}{\varepsilon}}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

Наконец:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*)$$

Обратите внимание, что для любого  $x$ , поскольку  $e^{-x}$  выпуклая и  $1 - x$  является её касательной в точке  $x = 0$ , мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$   $x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* &\leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \end{aligned}$$

Обратите внимание, что для любого  $x$ , поскольку  $e^{-x}$  выпуклая и  $1 - x$  является её касательной в точке  $x = 0$ , мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$



# Сходимость градиентного спуска



Градиентный спуск:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого  $x$ , поскольку  $e^{-x}$  выпуклая и  $1 - x$  является её касательной в точке  $x = 0$ , мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \\ k_\varepsilon &\geq \kappa \log \frac{f(x_0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

# Сходимость градиентного спуска



**Вопрос:** Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка?

# Сходимость градиентного спуска



**Вопрос:** Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка? **Да, можно.**

# Нижние оценки

# Нижние оценки



Для нижних оценок пишут  $\Omega(\cdot)$  вместо  $\mathcal{O}(\cdot)$ .

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая) <sup>1</sup>	гладкая & выпуклая <sup>2</sup>	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

<sup>1</sup>Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

<sup>2</sup>Nemirovski, Yudin, 1979

# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ &= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k)\end{aligned}$$

# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots\end{aligned}$$



# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} && f \text{ — гладкая} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ где } g_i \in \partial f(x_i) && f \text{ — негладкая}\end{aligned} \tag{1}$$

# Чёрный ящик



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} & f &\text{— гладкая} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ где } g_i \in \partial f(x_i) & f &\text{— негладкая}\end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы построить нижнюю оценку, нам нужно найти функцию  $f$  из соответствующего класса, такую, что любой метод из семейства (1) будет работать не быстрее этой нижней оценки.

# Гладкий случай



## Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .

# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .

# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:

# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - а. Нижняя оценка не является точной.



# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - а. Нижняя оценка не является точной.
  - б. Метод градиентного спуска не является оптимальным для этой задачи.

# Гладкий случай



## i Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - а. Нижняя оценка не является точной.
  - б. **Метод градиентного спуска не является оптимальным для этой задачи.**

# Наихудшая функция Нестерова



- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$$



# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ 0 &\leq x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ 0 &\leq x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ 0 &\leq x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

# Наихудшая функция Нестерова



- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2} x^T A x - e_1^T x \right) = \frac{L}{8} x^T A x - \frac{L}{4} e_1^T x$ .

# Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2} x^T A x - e_1^T x \right) = \frac{L}{8} x^T A x - \frac{L}{4} e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

# Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2} x^T A x - e_1^T x \right) = \frac{L}{8} x^T A x - \frac{L}{4} e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.

# Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2} x^T A x - e_1^T x \right) = \frac{L}{8} x^T A x - \frac{L}{4} e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.
- Решение:

$$x_i^* = 1 - \frac{i}{n+1},$$



# Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2} x^T A x - e_1^T x \right) = \frac{L}{8} x^T A x - \frac{L}{4} e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.
- Решение:

$$x_i^* = 1 - \frac{i}{n+1},$$

- И значение функции равно

$$f(x^*) = \frac{L}{8} x^{*T} A x^* - \frac{L}{4} \langle x^*, e_1 \rangle = -\frac{L}{8} \langle x^*, e_1 \rangle = -\frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

# Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ . Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ . Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

# Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ . Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Из-за структуры матрицы  $A$  можно показать, что после  $k$  итераций все последние  $n - k$  компоненты  $x_k$  равны нулю.

$$x_k = \begin{bmatrix} \bullet & 1 \\ \bullet & 2 \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & k \\ 0 & k+1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

# Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ . Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Из-за структуры матрицы  $A$  можно показать, что после  $k$  итераций все последние  $n - k$  компоненты  $x_k$  равны нулю.

$$x_k = \begin{bmatrix} \bullet & 1 \\ \bullet & 2 \\ \vdots & \vdots \\ \bullet & k \\ 0 & k+1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & n \end{bmatrix}$$

- Однако, поскольку каждая итерация  $x_k$ , произведенная нашим методом, лежит в  $S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  (т.е. имеет нули в координатах  $k+1, \dots, n$ ), она не может "достичь" полного оптимального вектора  $x^*$ . Другими словами, даже если бы мы выбрали лучший возможный вектор из  $S_k$ , обозначаемый

$$\tilde{x}_k = \arg \min_{x \in S_k} f(x),$$

значение функции в нём  $f(\tilde{x}_k)$  будет выше, чем  $f(x^*)$ .

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k(i)} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .



# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k(i)} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .
- Теперь мы имеем:

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*)$$

(2)

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k(i)} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .
- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \end{aligned}$$

(2)

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k(i)} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .
- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{n-k}{(k+1)(n+1)}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k(i)} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .
- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{n-k}{(k+1)(n+1)}\right) \\ &\stackrel{n=2k+1}{=} \frac{L}{16(k+1)} \end{aligned} \tag{2}$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\|x_0 - x^*\|_2^2 = \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2\end{aligned}$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3}\end{aligned}$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\&= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\&\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\&= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$



# Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}. \end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

# Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned} \|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}. \end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

# Гладкий случай (доказательство)



- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\&= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\&\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\&= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\leq \frac{(n+1)^3}{3}\end{aligned}$$

# Гладкий случай (доказательство)



Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2}$$

# Гладкий случай (доказательство)



Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \end{aligned}$$

# Гладкий случай (доказательство)



Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \\ &= \frac{3LR^2}{32(k+1)^2} \end{aligned}$$

# Гладкий случай (доказательство)



Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \\ &= \frac{3LR^2}{32(k+1)^2} \end{aligned}$$

Это завершает доказательство с желаемой скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .

# Нижние оценки для гладкого случая



## i Гладкий выпуклый случай

Существует  $L$ -гладкая выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод в форме 1 для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

## i Гладкий сильно выпуклый случай

Для любого  $x_0$  и любого  $\mu > 0$ ,  $\kappa = \frac{L}{\mu} > 1$ , существует  $L$ -гладкая и  $\mu$ -сильно выпуклая функция  $f$ , такая, что для любого метода в форме 1 выполняются неравенства:

$$\begin{aligned}\|x_k - x^*\|_2 &\geq \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|_2 \\ f(x_k) - f^* &\geq \frac{\mu}{2} \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$



# Ускорение для квадратичных функций

# Результат сходимости для квадратичных функций



Предположим, что мы решаем задачу минимизации сильно выпуклой квадратичной функции, с помощью метода градиентного спуска:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

# Результат сходимости для квадратичных функций



Предположим, что мы решаем задачу минимизации сильно выпуклой квадратичной функции, с помощью метода градиентного спуска:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

## Theorem

Градиентный спуск с шагом  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$  сходится к оптимальному решению  $x^*$  со следующей гарантией:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2 \quad f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^{2k} (f(x_0) - f(x^*))$$

где  $\kappa = \frac{L}{\mu}$  является числом обусловленности  $A$ .

# Число обусловленности $\mathcal{N}$



# Ускорение из первых принципов



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k (Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

# Ускорение из первых принципов



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

## Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ ,  
где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

# Ускорение из первых принципов



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

## Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ , где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

Мы можем ограничить норму ошибки как

$$\|e_k\| \leq \|p_k(A)\| \cdot \|e_0\|.$$

# Ускорение из первых принципов



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

## Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ , где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

Мы можем ограничить норму ошибки как

$$\|e_k\| \leq \|p_k(A)\| \cdot \|e_0\|.$$

Поскольку  $A$  является симметричной матрицей с собственными значениями в  $[\mu, L]$ :

$$\|p_k(A)\| \leq \max_{\mu \leq a \leq L} |p_k(a)|.$$

Это приводит к интересной постановке задачи: среди всех полиномов, удовлетворяющих  $p_k(0) = 1$ , мы ищем полином, значение которого как можно меньше отклоняется от нуля на интервале  $[\mu, L]$ .



# Наивное полиномиальное решение



Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг

$\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

$$\|e_k\| \leq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k \|e_0\|$$

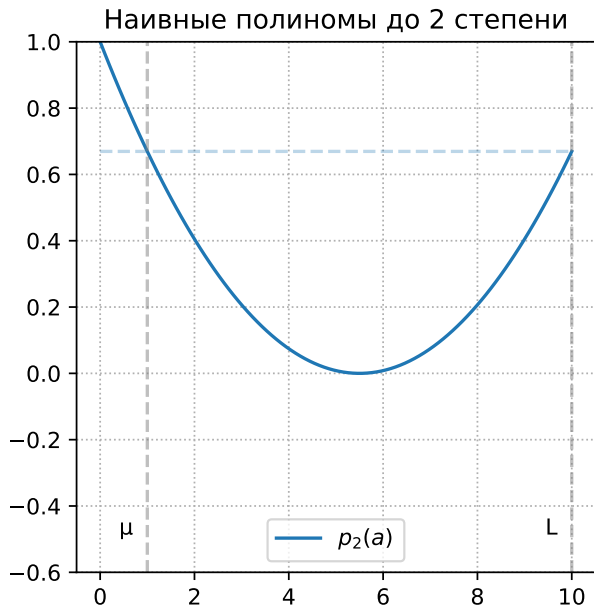
Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом

рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\kappa = 10$ .

Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.



# Наивное полиномиальное решение



Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг

$\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

$$\|e_k\| \leq \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ .

Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.



# Наивное полиномиальное решение



Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг

$\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

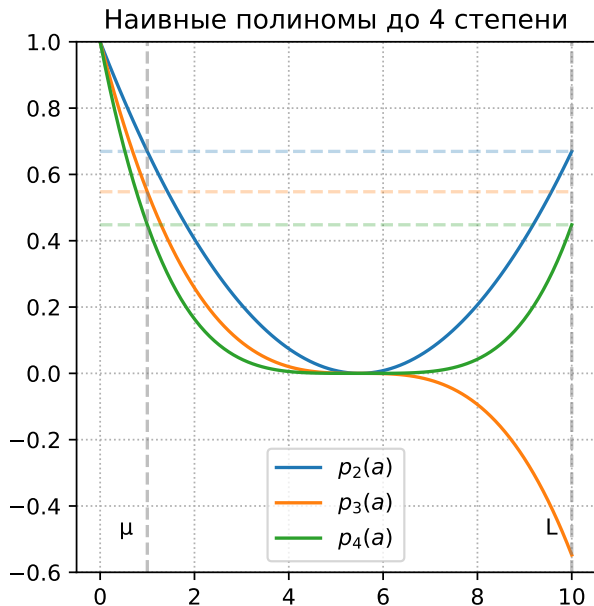
$$\|e_k\| \leq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa+1}\right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\kappa = 10$ .

Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.



# Наивное полиномиальное решение



Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг

$\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

$$\|e_k\| \leq \left(\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}\right)^k \|e_0\|$$

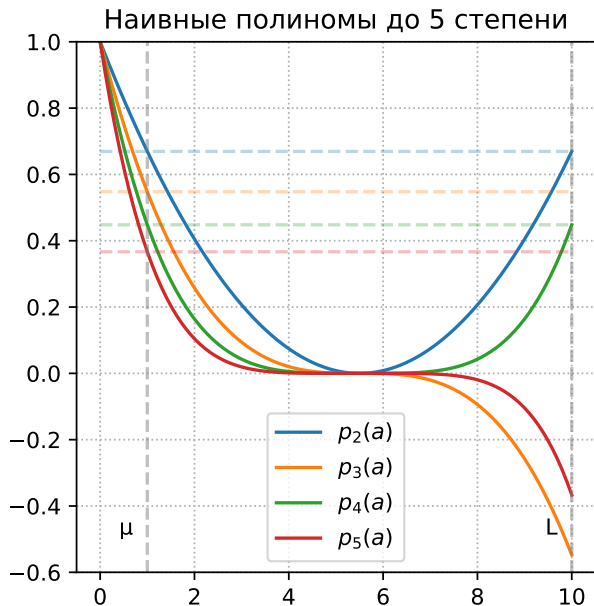
Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом

рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ .

Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.



# Наивное полиномиальное решение



Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг

$\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

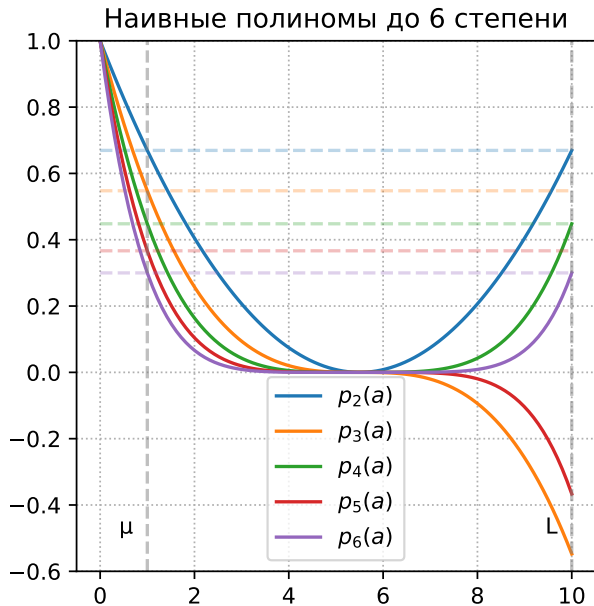
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ .

Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.



# Полиномы Чебышева



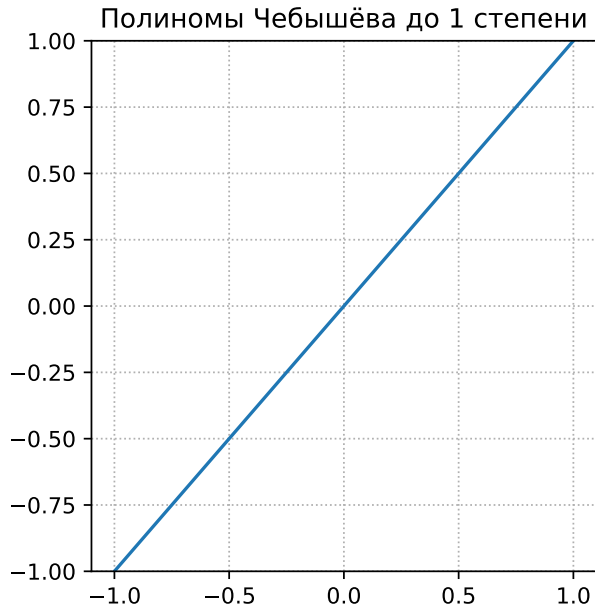
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



# Полиномы Чебышева



Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



# Полиномы Чебышева



Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):





# Полиномы Чебышева



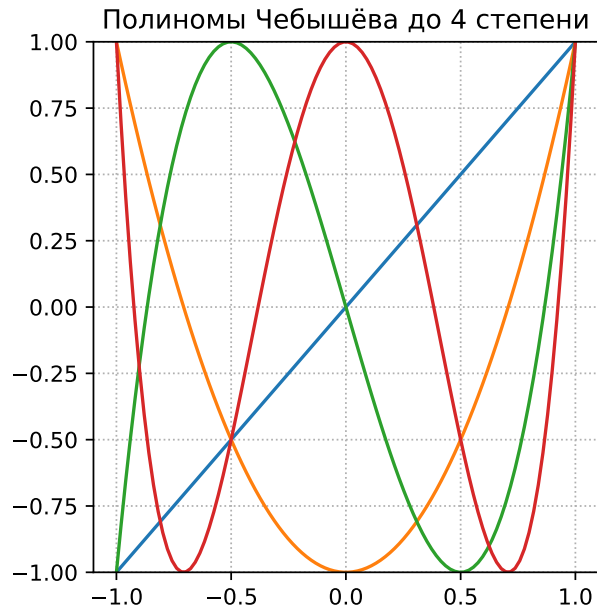
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



# Полиномы Чебышева



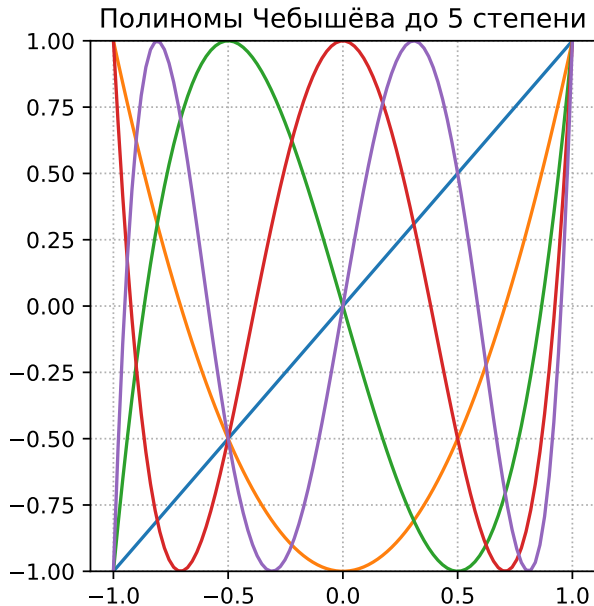
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

В нашем анализе ошибок мы требуем, чтобы полином был равен 1 в 0 (т.е.  $p_k(0) = 1$ ). После применения преобразования значение  $T_k$  в точке, соответствующей  $a = 0$ , может не быть 1. Следовательно, мы умножаем на обратную величину  $T_k$  в точке

$$\frac{L + \mu}{L - \mu}, \quad \text{что обеспечивает} \quad P_k(0) = T_k\left(\frac{L + \mu - 0}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = 1.$$

# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

В нашем анализе ошибок мы требуем, чтобы полином был равен 1 в 0 (т.е.  $p_k(0) = 1$ ). После применения преобразования значение  $T_k$  в точке, соответствующей  $a = 0$ , может не быть 1. Следовательно, мы умножаем на обратную величину  $T_k$  в точке

$$\frac{L + \mu}{L - \mu}, \quad \text{что обеспечивает} \quad P_k(0) = T_k\left(\frac{L + \mu - 0}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = 1.$$

Построим отшкалированные полиномы Чебышёва

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1}$$

и увидим, что они больше подходят для нашей задачи, чем наивные полиномы на интервале  $[\mu, L]$ .

# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва

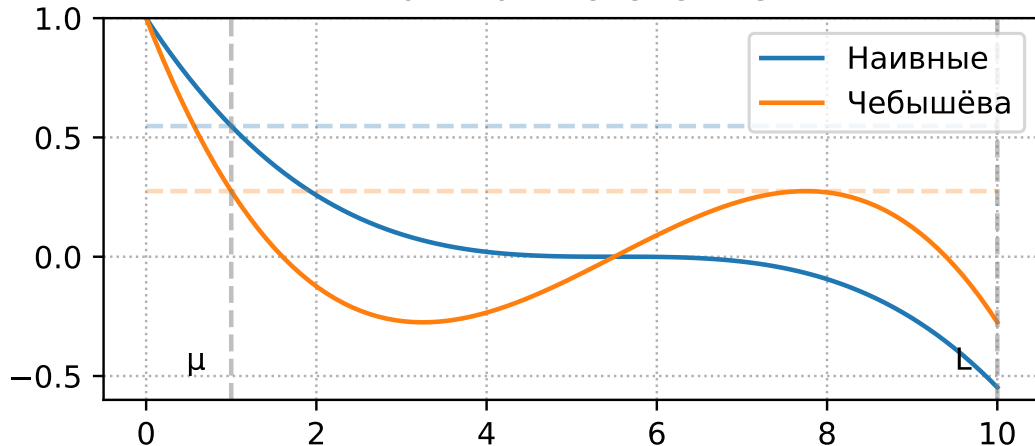




# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Полиномы степени 3



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



Полиномы степени 4



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва



# Отшкалированные полиномы Чебышёва





# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k\left(\frac{L + \mu - 2\mu}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1}$$

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k\left(\frac{L + \mu - 2\mu}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1}$$

Используя определение числа обусловленности  $\kappa = \frac{L}{\mu}$ , мы получаем:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq T_k\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)^{-1} = T_k\left(1 + \frac{2}{\kappa - 1}\right)^{-1} = T_k(1 + \epsilon)^{-1}, \quad \epsilon = \frac{2}{\kappa - 1}.$$

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k\left(\frac{L + \mu - 2\mu}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1}$$

Используя определение числа обусловленности  $\kappa = \frac{L}{\mu}$ , мы получаем:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq T_k\left(\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1}\right)^{-1} = T_k\left(1 + \frac{2}{\kappa - 1}\right)^{-1} = T_k(1 + \epsilon)^{-1}, \quad \epsilon = \frac{2}{\kappa - 1}.$$

Именно в этот момент явно возникнет ускорение. Мы ограничим значение  $\|P_k(A)\|_2$  сверху величиной  $\left(\frac{1}{1 + \sqrt{\epsilon}}\right)^k$ . Для этого детально изучим величину  $|T_k(1 + \epsilon)|$ .

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$\begin{aligned}T_k(x) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)) \\T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).\end{aligned}$$

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$\begin{aligned}T_k(x) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)) \\T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).\end{aligned}$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$\begin{aligned} T_k(x) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)) \\ T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)). \end{aligned}$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$\begin{aligned}T_k(x) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)) \\T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).\end{aligned}$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

4. Следовательно,

$$\begin{aligned}T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)) \\&= \cosh(k\phi) \\&= \frac{e^{k\phi} + e^{-k\phi}}{2} \geq \frac{e^{k\phi}}{2} \\&= \frac{(1 + \sqrt{\epsilon})^k}{2}.\end{aligned}$$



# Верхняя оценка для полиномов Чебышёва



Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$\begin{aligned}T_k(x) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(x)) \\T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).\end{aligned}$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

4. Следовательно,

$$\begin{aligned}T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)) \\&= \cosh(k\phi) \\&= \frac{e^{k\phi} + e^{-k\phi}}{2} \geq \frac{e^{k\phi}}{2} \\&= \frac{(1 + \sqrt{\epsilon})^k}{2}.\end{aligned}$$

5. Наконец, мы получаем:

$$\begin{aligned}\|e_k\| &\leq \|P_k(A)\| \|e_0\| \leq \frac{2}{(1 + \sqrt{\epsilon})^k} \|e_0\| \\&\leq 2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^{-k} \|e_0\| \\&\leq 2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{n-1}} k\right) \|e_0\|\end{aligned}$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$
$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$
$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a) T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$
$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a) T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$
$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a) T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$
$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a) T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a)t_{k+1} = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)t_k - P_{k-1}(a)t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$\begin{aligned} P_k(a) &= T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} & T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_{k-1}(a) T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) \\ T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_k(a) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) & T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_{k+1}(a) T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) \\ P_{k+1}(a) t_{k+1} &= 2 \frac{L+\mu-2a}{L-\mu} P_k(a) t_k - P_{k-1}(a) t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) \\ P_{k+1}(a) &= 2 \frac{L+\mu-2a}{L-\mu} P_k(a) \frac{t_k}{t_{k+1}} - P_{k-1}(a) \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} \end{aligned}$$

# Ускоренный метод [1/2]



Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$\begin{aligned} P_k(a) &= T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} & T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_{k-1}(a) T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) \\ T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_k(a) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) & T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) &= P_{k+1}(a) T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right) \end{aligned}$$

$$P_{k+1}(a)t_{k+1} = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)t_k - P_{k-1}(a)t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)\frac{t_k}{t_{k+1}} - P_{k-1}(a)\frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}$$

Поскольку мы имеем  $P_{k+1}(0) = P_k(0) = P_{k-1}(0) = 1$ , получаем рекуррентную формулу вида:

$$P_{k+1}(a) = (1 - \alpha_k a)P_k(a) + \beta_k (P_k(a) - P_{k-1}(a)).$$



## Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

# Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$



## Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

## Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$x_{k+1} = P_{k+1}(A)x_0$$

# Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$x_{k+1} = P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0$$

## Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0 \\ &= (I - \alpha_k A)x_k + \beta_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

# Ускоренный метод [2/2]



Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2 \frac{L + \mu}{L - \mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0 \\ &= (I - \alpha_k A)x_k + \beta_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Для квадратичной задачи мы имеем  $\nabla f(x_k) = Ax_k$ , поэтому мы можем переписать обновление как:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$



# Ускорение из первых принципов



# Метод тяжёлого шарика

# Колебания и ускорение



Gradient Descent



Heavy Ball



# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею импульса (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$



# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею импульса (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$



# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею импульса (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

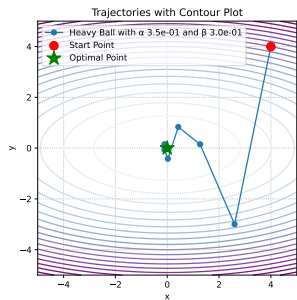
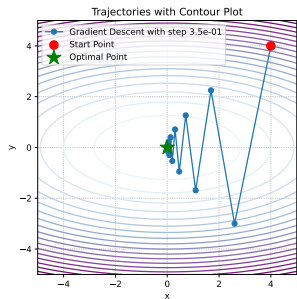
В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

Это можно переписать как

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k. \end{aligned}$$

# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею импульса (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

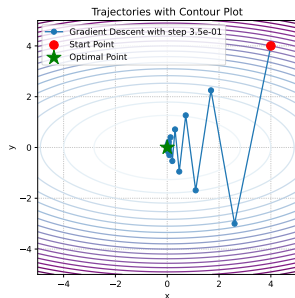
$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

Это можно переписать как

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k. \end{aligned}$$

Давайте введем следующее обозначение:  $\hat{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}$ . Следовательно,  $\hat{z}_{k+1} = M \hat{z}_k$ , где матрица итерации  $M$  имеет вид:

# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею импульса (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

Это можно переписать как

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I) \hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k. \end{aligned}$$

Давайте введем следующее обозначение:  $\hat{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}$ . Следовательно,  $\hat{z}_{k+1} = M \hat{z}_k$ , где матрица итерации  $M$  имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} I - \alpha \Lambda + \beta I & -\beta I \\ I & 0_d \end{bmatrix}.$$



# Сведение к скалярному случаю

Обратим внимание, что  $M$  является матрицей  $2d \times 2d$  с четырьмя блочно-диагональными матрицами размера  $d \times d$  внутри. Это означает, что мы можем изменить порядок координат, чтобы сделать  $M$  блочно-диагональной. Обратите внимание, что в уравнении ниже матрица  $M$  обозначает то же самое, что и в обозначении выше, за исключением описанной перестановки строк и столбцов. Мы используем эту небольшую перегрузку обозначений для простоты.

# Сведение к скалярному случаю

Обратим внимание, что  $M$  является матрицей  $2d \times 2d$  с четырьмя блочно-диагональными матрицами размера  $d \times d$  внутри. Это означает, что мы можем изменить порядок координат, чтобы сделать  $M$  блочно-диагональной. Обратите внимание, что в уравнении ниже матрица  $M$  обозначает то же самое, что и в обозначении выше, за исключением описанной перестановки строк и столбцов. Мы используем эту небольшую перегрузку обозначений для простоты.



$$\begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_k^{(d)} \\ \hat{x}_{k-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-1}^{(d)} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \hat{x}_k^{(1)} \\ \hat{x}_{k-1}^{(1)} \\ \vdots \\ \hat{x}_k^{(d)} \\ \hat{x}_{k-1}^{(d)} \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_d \end{bmatrix}$$

Рисунок 1. Иллюстрация перестановки матрицы  $M$

где  $\hat{x}_k^{(i)}$  является  $i$ -й координатой вектора  $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^d$  и  $M_i$  обозначает  $2 \times 2$  матрицу. Переупорядочение позволяет нам исследовать динамику метода независимо от размерности. Асимптотическая скорость сходимости  $2d$ -мерной последовательности векторов  $\hat{z}_k$  определяется наихудшей скоростью сходимости среди его блока координат. Следовательно, достаточно исследовать оптимизацию в одномерном случае.

# Сведение к скалярному случаю



Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Сведение к скалярному случаю

Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод будет сходиться, если  $\rho(M) < 1$ , и оптимальные параметры могут быть вычислены путем оптимизации спектрального радиуса

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_{\alpha, \beta} \max_i \rho(M_i), \quad \alpha^* = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \beta^* = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2.$$

# Сведение к скалярному случаю

Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод будет сходиться, если  $\rho(M) < 1$ , и оптимальные параметры могут быть вычислены путем оптимизации спектрального радиуса

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_{\alpha, \beta} \max_i \rho(M_i), \quad \alpha^* = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \beta^* = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2.$$

Можно показать, что для таких параметров матрица  $M$  имеет комплексные собственные значения, которые образуют комплексно-сопряжённую пару, поэтому расстояние до оптимума (в этом случае  $\|z_k\|$ ) обычно не убывает монотонно.

# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны ( $\alpha^*, \beta^*$ ), собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны ( $\alpha^*, \beta^*$ ), собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

$$\operatorname{Re}(\lambda^M) = \frac{L + \mu - 2\lambda_i}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \operatorname{Im}(\lambda^M) = \frac{\pm 2\sqrt{(L - \lambda_i)(\lambda_i - \mu)}}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad |\lambda^M| = \frac{L - \mu}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}.$$



# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны ( $\alpha^*, \beta^*$ ), собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

$$\operatorname{Re}(\lambda^M) = \frac{L + \mu - 2\lambda_i}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \operatorname{Im}(\lambda^M) = \frac{\pm 2\sqrt{(L - \lambda_i)(\lambda_i - \mu)}}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad |\lambda^M| = \frac{L - \mu}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}.$$

И скорость сходимости не зависит от шага и равна  $\sqrt{\beta^*}$ .

# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

## i Theorem

Предположим, что  $f$  является  $\mu$ -сильно выпуклой и  $L$ -гладкой квадратичной функцией. Тогда метод тяжёлого шарика с параметрами

$$\alpha = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \beta = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2$$

сходится линейно:

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \left( \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|$$

# Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика<sup>3</sup>



## i Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и выпуклой и что

$$\beta \in [0, 1), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\beta)}{L}\right).$$

Тогда последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерациями тяжёлого шарика, удовлетворяет

$$f(\bar{x}_T) - f^* \leq \begin{cases} \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)} \left( \frac{L\beta}{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in \left(0, \frac{1-\beta}{L}\right], \\ \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)(2(1-\beta) - \alpha L)} \left( L\beta + \frac{(1-\beta)^2}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in \left[\frac{1-\beta}{L}, \frac{2(1-\beta)}{L}\right), \end{cases}$$

где  $\bar{x}_T$  среднее Чезаро последовательности итераций, т.е.

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T x_k.$$

<sup>3</sup>Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et al.

# Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика<sup>4</sup>



## i Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и сильно выпуклой и что

$$\alpha \in \left(0, \frac{2}{L}\right), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{2} \left( \frac{\mu\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{4} + 4\left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right)} \right).$$

Тогда последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерациями метода тяжёлого шарика, сходится линейно к единственному оптимальному решению  $x^*$ . В частности,

$$f(x_k) - f^* \leq q^k (f(x_0) - f^*),$$

где  $q \in [0, 1)$ .

<sup>4</sup>Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et al.

# Итоги по методу тяжёлого шарика



- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.

# Итоги по методу тяжёлого шарика



- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.

# Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно <sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method

# Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно<sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.
- Метод не был чрезвычайно популярен до ML-бума.

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method



# Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно<sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.
- Метод не был чрезвычайно популярен до ML-бума.
- Сейчас он фактически является стандартом для практического ускорения методов градиентного спуска, в том числе для невыпуклых задач (обучение нейронных сетей).

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method

# Ускоренный градиентный метод Нестерова

# Концепция ускоренного градиентного метода Нестерова



$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_{k+1} - \alpha \nabla f(y_{k+1}) \end{cases}$$

# Концепция ускоренного градиентного метода Нестерова



$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$

Давайте определим следующие обозначения

$$x^+ = x - \alpha \nabla f(x)$$

Градиентный шаг

$$d_k = \beta_k(x_k - x_{k-1})$$

Импульс

Тогда мы можем записать:

$$x_{k+1} = x_k^+$$

Градиентный спуск

$$x_{k+1} = x_k^+ + d_k$$

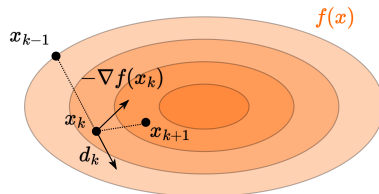
Метод тяжёлого шарика

$$x_{k+1} = (x_k + d_k)^+$$

Ускоренный градиентный метод Нестерова

$$\begin{cases} y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_{k+1} - \alpha \nabla f(y_{k+1}) \end{cases}$$

Polyak momentum



Nesterov momentum



# Сходимость для выпуклых функций



## i Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и  $L$ -гладкой. Ускоренный градиентный метод Нестерова (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:

**Обновление градиента:** 
$$x_{k+1} = y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k)$$

**Вес экстраполяции:** 
$$\lambda_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_k^2}}{2}$$

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_{k+1}}$$

**Экстраполяция:** 
$$y_{k+1} = x_{k+1} + \gamma_k (x_{k+1} - x_k)$$

Последовательность  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемая алгоритмом, сходится к оптимальному значению  $f^*$  со скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , в частности:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2L\|x_0 - x^*\|^2}{k^2}$$

# Ускоренная сходимость для сильно выпуклых функций



## i Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mu$ -сильно выпуклой и  $L$ -гладкой. Ускоренный градиентный метод Нестерова (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:

**Обновление градиента:** 
$$x_{k+1} = y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k)$$

**Экстраполяция:** 
$$y_{k+1} = x_{k+1} - \gamma (x_{k+1} - x_k)$$

**Вес экстраполяции:** 
$$\gamma = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}$$

Последовательность  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемая алгоритмом, сходится к оптимальному значению  $f^*$  линейно:

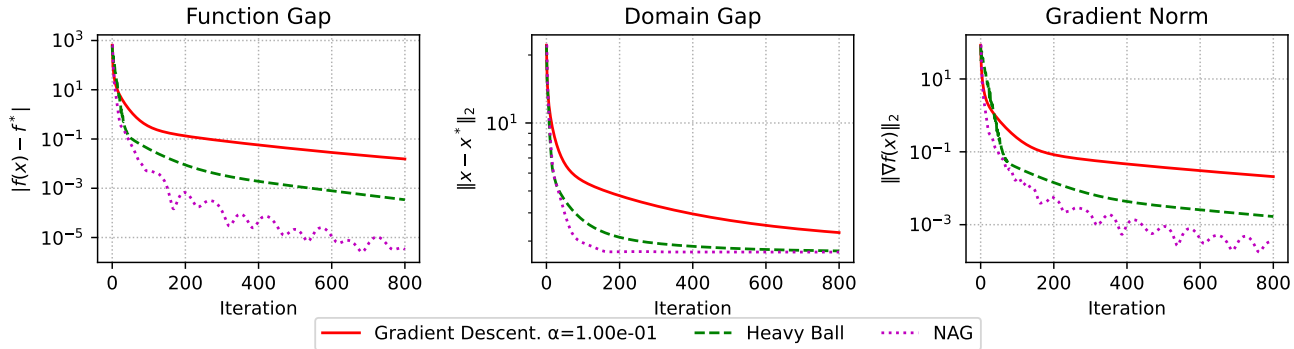
$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\mu + L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

# Численные эксперименты

# Выпуклая квадратичная задача (линейная регрессия)



Convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=0$ ,  $L=10$





# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)



Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=10$



# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)



Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$



# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)



Strongly convex quadratics:  $n=1000$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



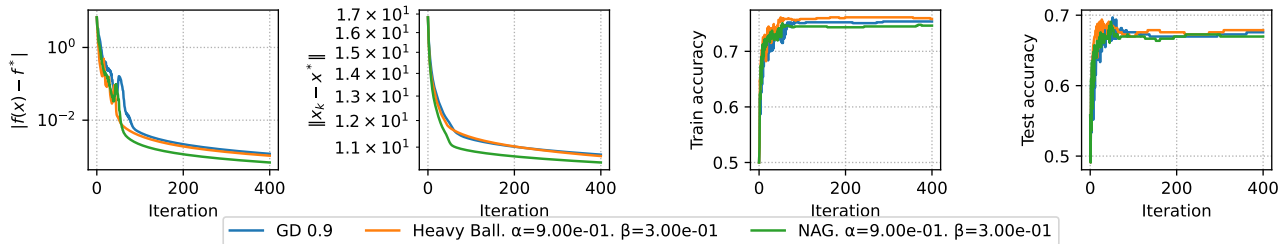
Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



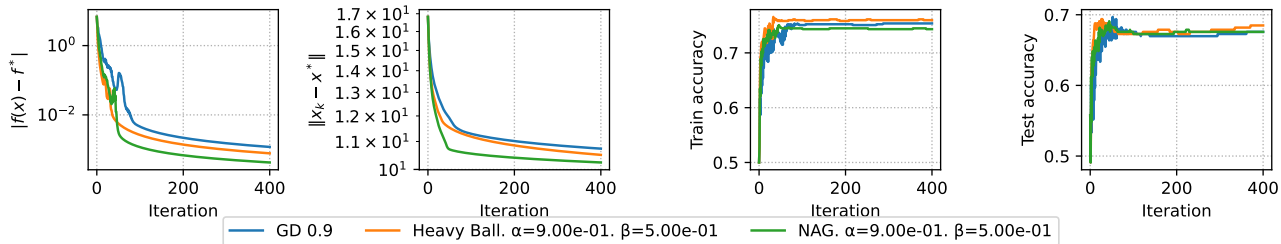
Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .





# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



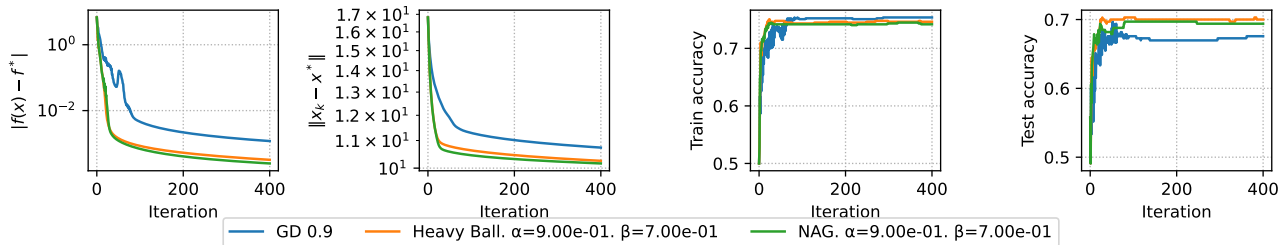
Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Выпуклая бинарная логистическая регрессия



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .



# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия



Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия



Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .





# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия



Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия



Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



# Нижние оценки для методов 1 порядка (Источник)



Тип задачи	Критерий	Нижняя оценка	Верхняя оценка	Ссылка (Ниж.)	Ссылка (Верх.)
$L$ -гладкая выпуклая	Зазор оптимальности	$\Omega\left(\sqrt{L} \varepsilon^{-1}\right)$	✓ (точное совпадение)	[1], Теорема 2.1.7	[1], Теорема 2.2.2
$L$ -гладкая $\mu$ -сильно выпуклая	Зазор оптимальности	$\Omega\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$	✓	[1], Теорема 2.1.13	[1], Теорема 2.2.2
Негладкая $G$ -липшицева выпуклая	Зазор оптимальности	$\Omega\left(G^2 \varepsilon^{-2}\right)$	✓ (точное совпадение)	[1], Теорема 3.2.1	[1], Теорема 3.2.2
Негладкая $G$ -липшицева $\mu$ -сильно выпуклая	Зазор оптимальности	$\Omega\left(G^2 (\mu \varepsilon)^{-1}\right)$	✓	[1], Теорема 3.2.5	[3], Теорема 3.9
$L$ -гладкая выпуклая (сходимость по функции)	Стационарность	$\Omega\left(\sqrt{\Delta L} \varepsilon^{-1}\right)$	✓ (с точностью до логарифмического множителя)	[2], Теорема 1	[2], Приложение A.1
$L$ -гладкая выпуклая (сходимость по аргументу)	Стационарность	$\Omega\left(\sqrt{DL} \varepsilon^{-1/2}\right)$	✓	[2], Теорема 1	[6], Раздел 6.5
$L$ -гладкая невыпуклая	Стационарность	$\Omega\left(\Delta L \varepsilon^{-2}\right)$	✓	[5], Теорема 1	[7], Теорема 10.15
Негладкая $G$ -липшицева $\rho$ -слабо выпуклая (WC)	Квази-стационарность	Неизвестно	$\mathcal{O}\left(\varepsilon^{-4}\right)$	/	[8], Следствие 2.2
$L$ -гладкая $\mu$ -PL	Зазор оптимальности	$\Omega\left(\kappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$	✓	[9], Теорема 3	[10], Теорема 1

## Источники:

- [1] - Lectures on Convex Optimization, Y. Nesterov.
- [2] - Lower bounds for finding stationary points II: first-order methods, Y. Carmon, J.C. Duchi, O. Hinder, A. Sidford.
- [3] - Convex optimization: Algorithms and complexity, S. Bubeck, others.
- [4] - Optimizing the efficiency of first-order methods for decreasing the gradient of smooth convex functions D. Kim, J.A. Fessler.
- [5] - Lower bounds for finding stationary points I, Y. Carmon, J.C. Duchi, O. Hinder, A. Sidford.
- [6] - Optimizing the efficiency of first-order methods for decreasing the gradient of smooth convex functions, D. Kim, J.A. Fessler.
- [7] - First-order methods in optimization, A. Beck. SIAM. 2017.
- [8] - Stochastic subgradient method converges at the rate  $\mathcal{O}(\kappa^{-1/4})$  on weakly convex functions, D. Davis, D. Drusvyatskiy.
- [9] - On the lower bound of minimizing Polyak-Lojasiewicz functions, P. Yue, C. Fang, Z. Lin.
- [10] - Linear convergence of gradient and proximal-gradient methods under the Polyak-Lojasiewicz condition, H. Karimi, J. Nutini, M. Schmidt.

## Обозначения:

- Зазор оптимальности:  $f(x_k) - f^* \leq \varepsilon$
- Стационарность:  $\|\nabla f(x_k)\| \leq \varepsilon$
- Квази-стационарность:  $\|\nabla f_\lambda(x_k)\| \leq \varepsilon$ , где  $f_\lambda(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left( f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right)$
- Липшицевость функции:  $|f(x) - f(y)| \leq G \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- Липшицевость градиента ( $L$ -гладкость):  $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n$
- $\mu$ -сильная выпуклость:  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2$
- $\rho$ -слабо выпуклая функция:  

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) + \rho \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2 \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$
- Число обусловленности:  $\kappa = \frac{L}{\mu}$
- Зазор в начальной точке:  $f(x_0) - f^* \leq \Delta$
- Зазор по аргументу:  $D = \|x_0 - x^*\|$