

Субградиенты. Негладкие задачи

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 13

Даня Меркулов
Петр Остроухов



Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ

$$f \rightarrow \min_{x_1, y, z}$$

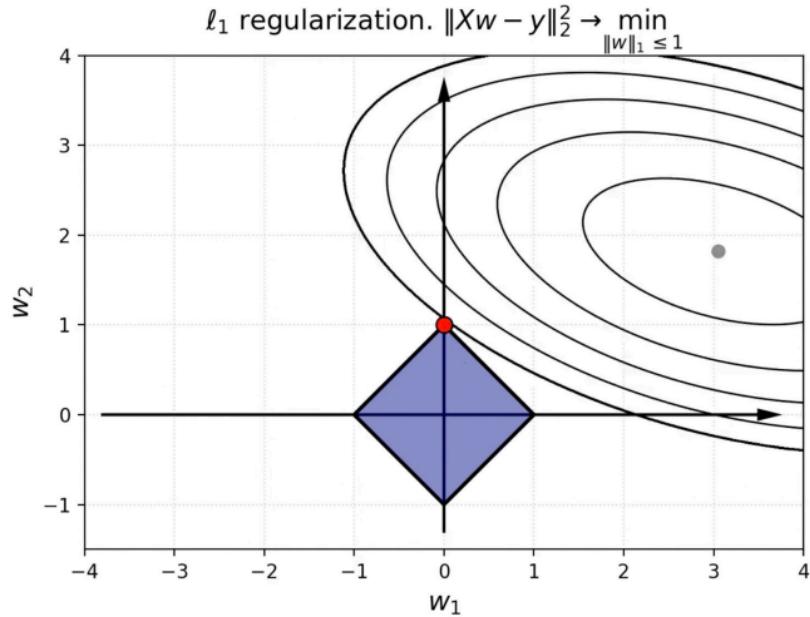
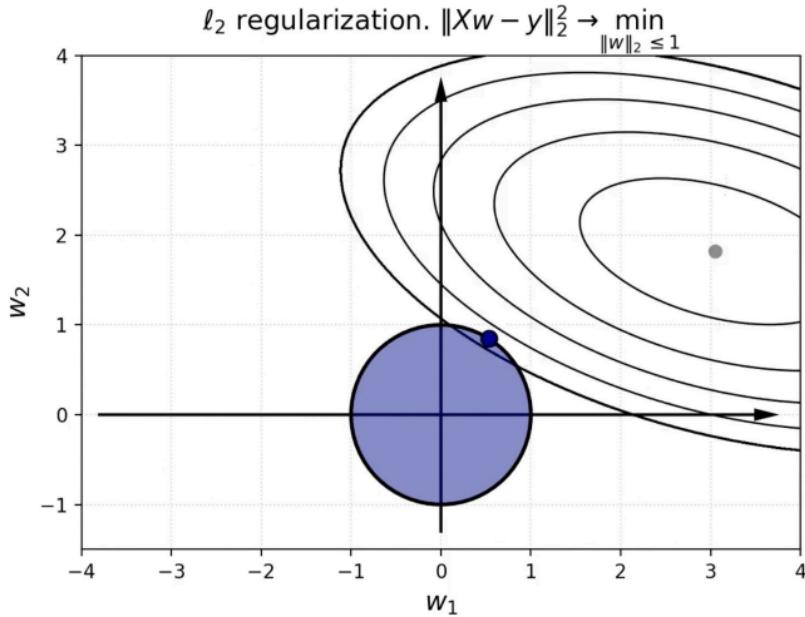


Негладкие задачи

Задача наименьших квадратов с ℓ_1 -регуляризацией



ℓ_1 induces sparsity



@fminxyz

Нормы не являются гладкими

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации. Будем считать $f(x)$ выпуклой, но не обязательно гладкой.

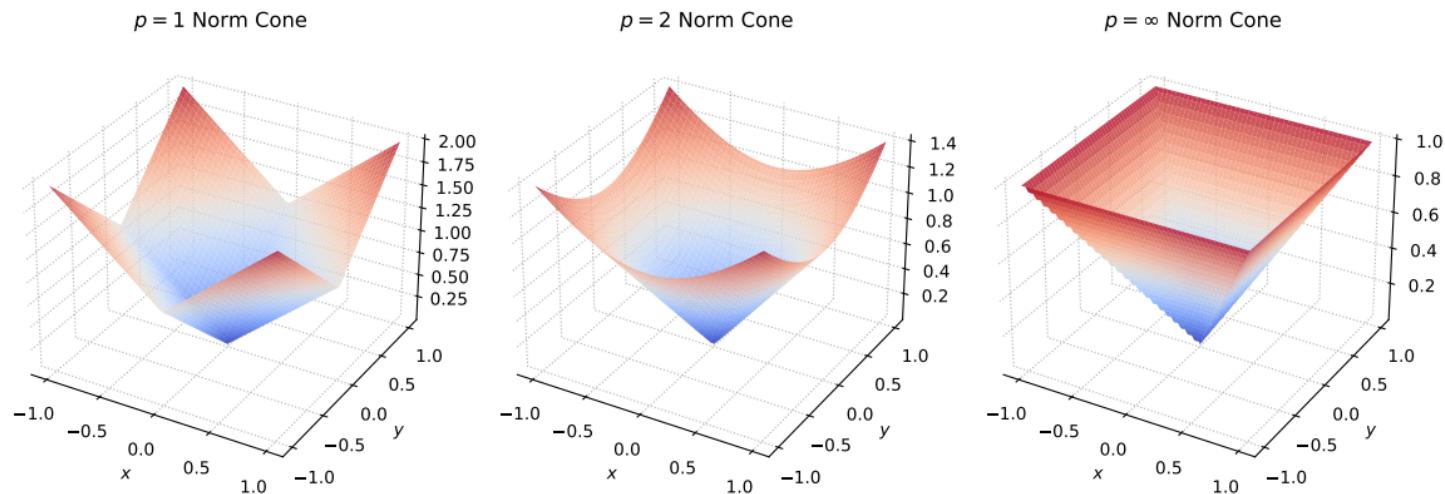


Рисунок 1. Конусы норм для разных p -норм не являются гладкими

Пример Вульфа

Wolfe's example



Рисунок 2. Пример Вульфа. [Открыть в Colab](#)

Вычисление субградиента

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Рисунок 3. Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Рисунок 3. Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

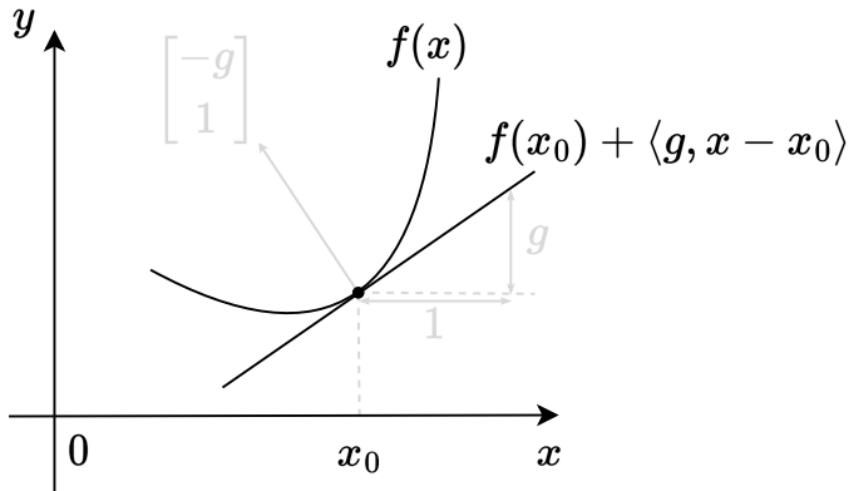


Рисунок 3. Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

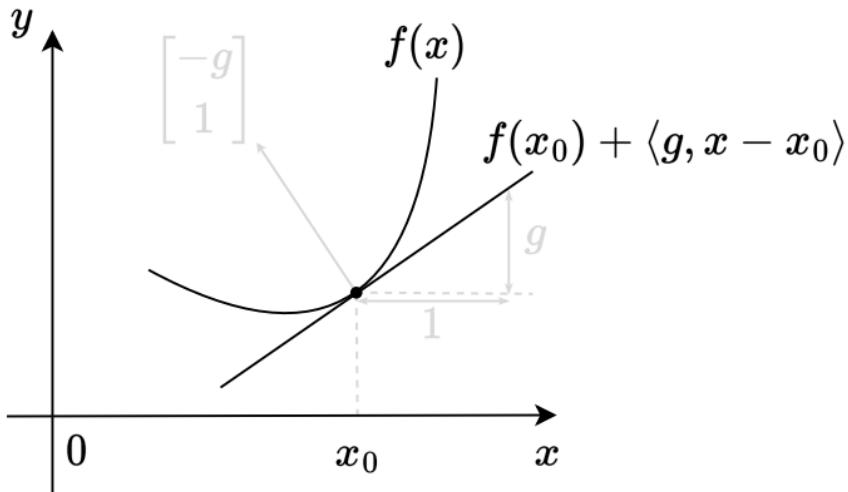


Рисунок 3. Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Рисунок 3. Апроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной нижней оценкой* для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы хотим сохранить это полезное свойство и для негладких функций.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.



Рисунок 4. Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

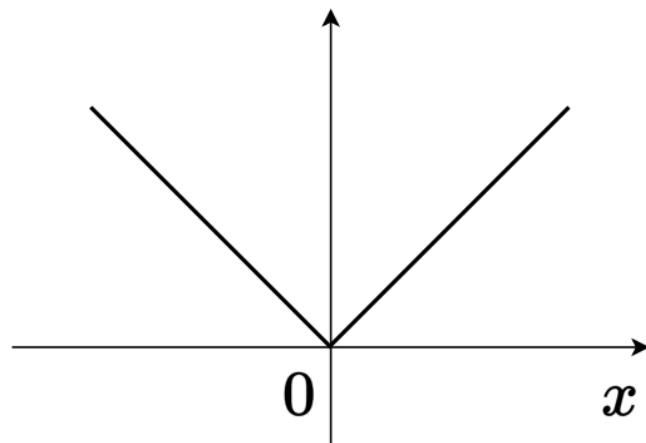
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

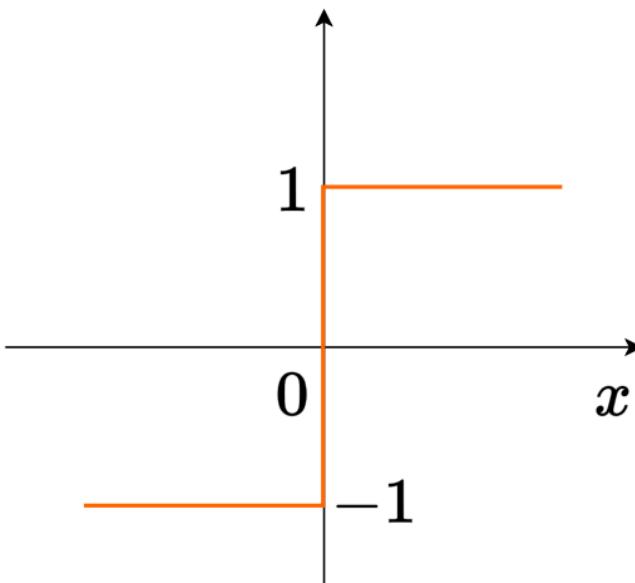
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x|$$



$$\partial f(x)$$



Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}.$
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Вычисление субдифференциалов

■ Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах

S_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда если $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах S_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда если $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, и поточечный максимум определяется как $f(x) = \max_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},$$

$$I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x)\}$$

Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$

Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции

Вычисление субдифференциалов

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x), f_i$ — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax + b))(x) = A^T \partial f(Ax + b), f$ — выпуклая функция

Субградиентный метод

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Субградиентный метод не является методом спуска: значение функции может расти ($f(x_{k+1}) > f(x_k)$), так как антисубградиент не обязательно является направлением убывания.

Поэтому в качестве приближения решения берут лучшее найденное значение:

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1, \dots, k} f(x_i).$$

Сходимость: выпуклый случай

Theorem

Пусть f — выпуклая функция, x^* — точка минимума. Предположим, что $\|g_k\| \leq G$ для всех k . Тогда:

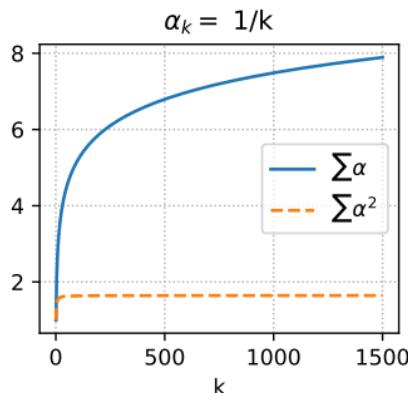
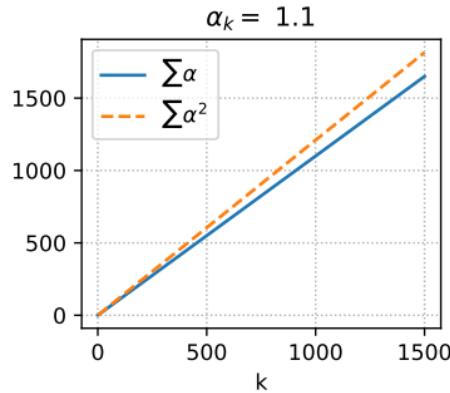
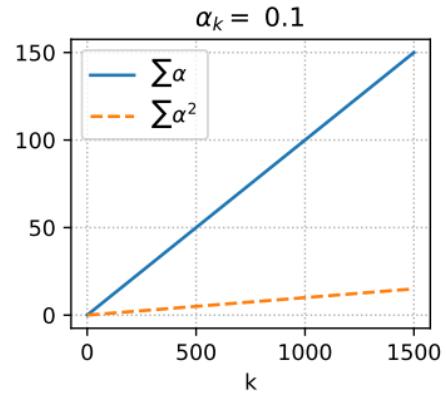
$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}$$

где $R = \|x_0 - x^*\|_2$.

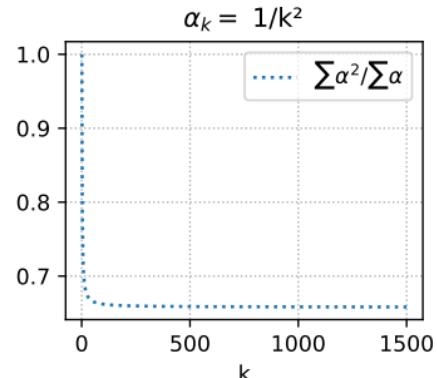
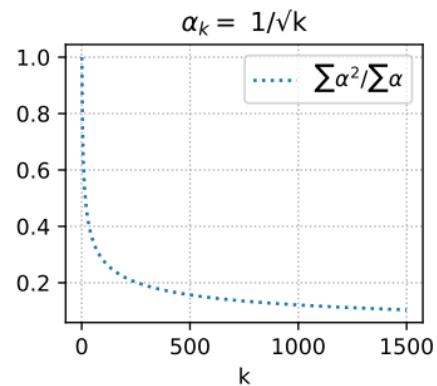
Метод сходится, если:

$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty$$

Различные стратегии выбора шага



Различные стратегии выбора шага



Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. ¹ или ².

¹B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

²N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. ¹ или ².
- Найдем оптимальный шаг α , который минимизирует правую часть неравенства.

¹B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

²N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации: $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, то получите ту же оценку.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации: $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, то получите ту же оценку.
- Это связано с симметрией и выпуклостью правой части относительно α_i .

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (3)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$, т.е. $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}$$

- Критерий остановки: норма субградиента не подходит (пример $f(x) = |x|$). Обычно используют фиксированное число итераций.

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k);$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i}$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})}$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

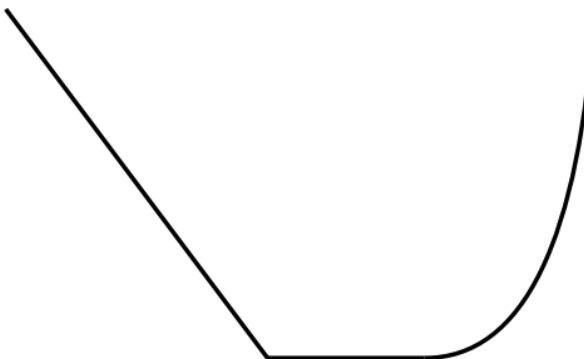
$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

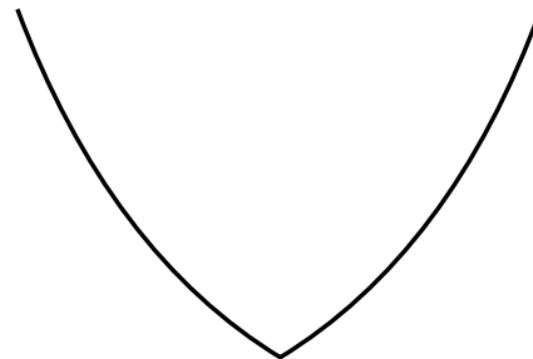
$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})} = \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости

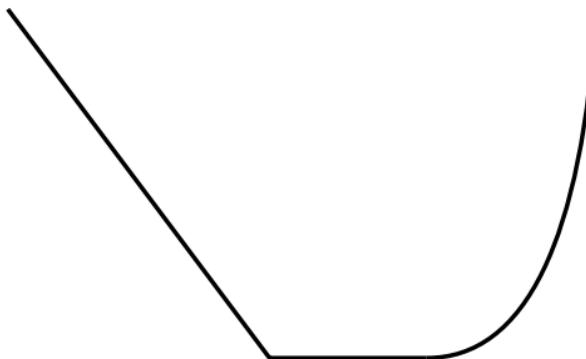


Негладкая
Выпуклая



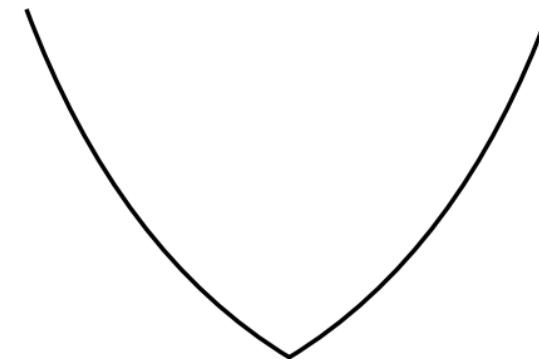
Негладкая
 μ - сильно выпуклая

Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости



Негладкая
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая
 μ - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Сильно выпуклая негладкая функция

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Summary. Субградиентный метод

Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые липшицевы функции	$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые функции	$\alpha \sim \frac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Нижние оценки

выпуклые (негладкие) ³	гладкие (невыпуклые) ⁴	гладкие и выпуклые ⁵	гладкие и сильно выпуклые (или PL) ¹
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

³Nesterov, Lectures on Convex Optimization

⁴Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

⁵Nemirovski, Yudin, 1979

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=1000, n=100, \lambda=0, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $0.0e+00$

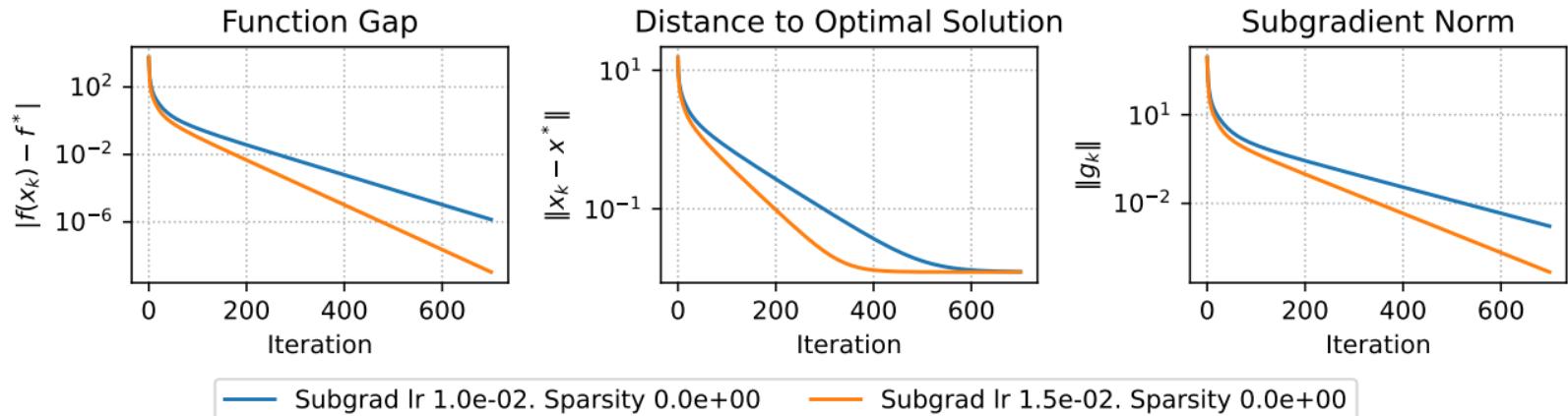


Рисунок 6. Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=1000, n=100, \lambda=0.1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: 1.0e-02

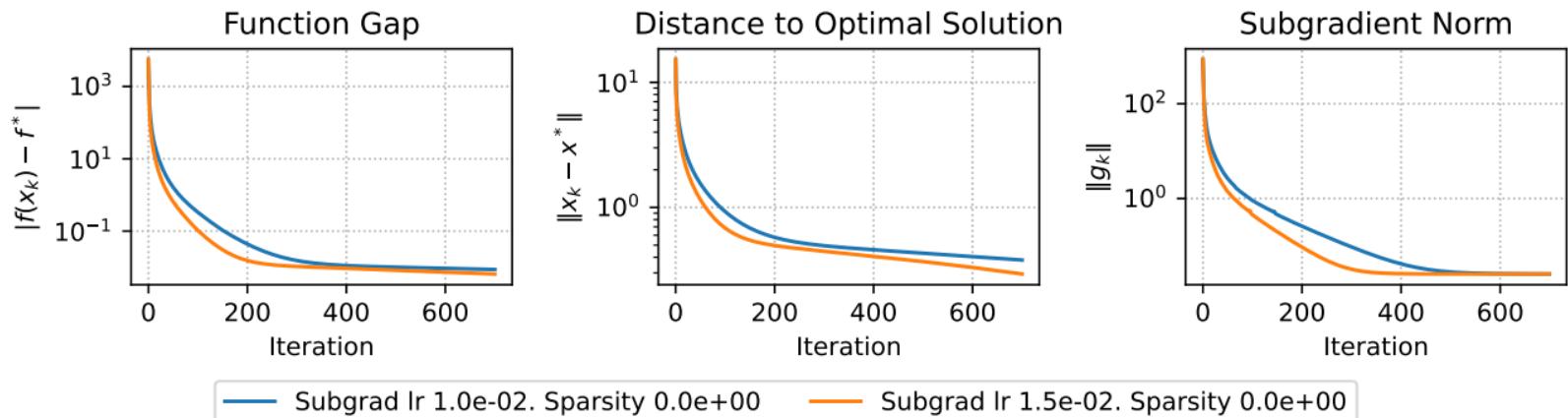


Рисунок 7. Негладкий выпуклый случай. Маленько значение λ приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=1000, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: 7.0e-02

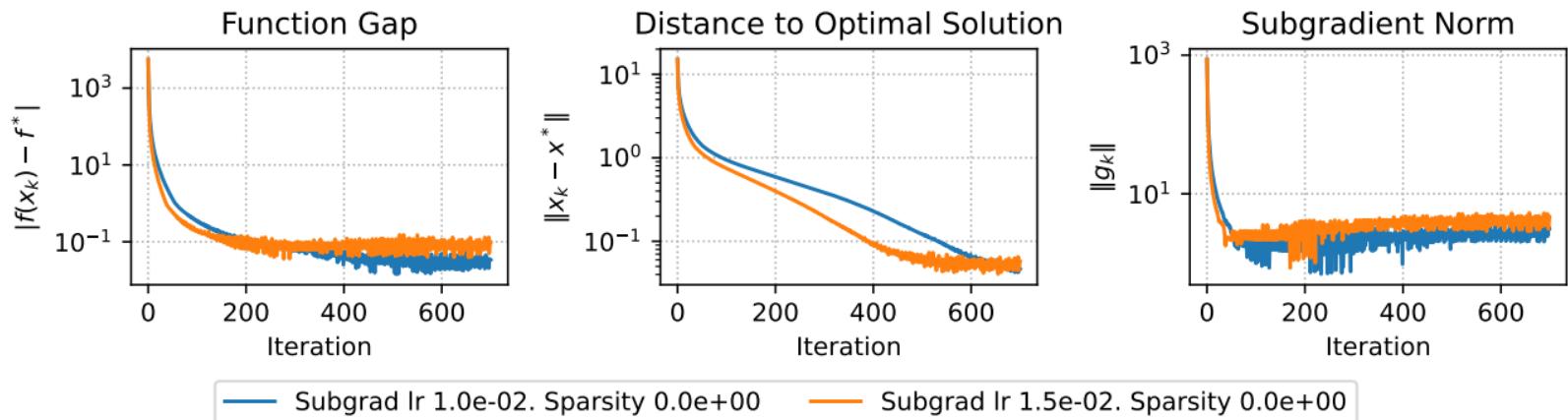


Рисунок 8. Негладкий выпуклый случай. При большем значении λ проявляется немонотонность $f(x_k)$. Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $2.3e-01$

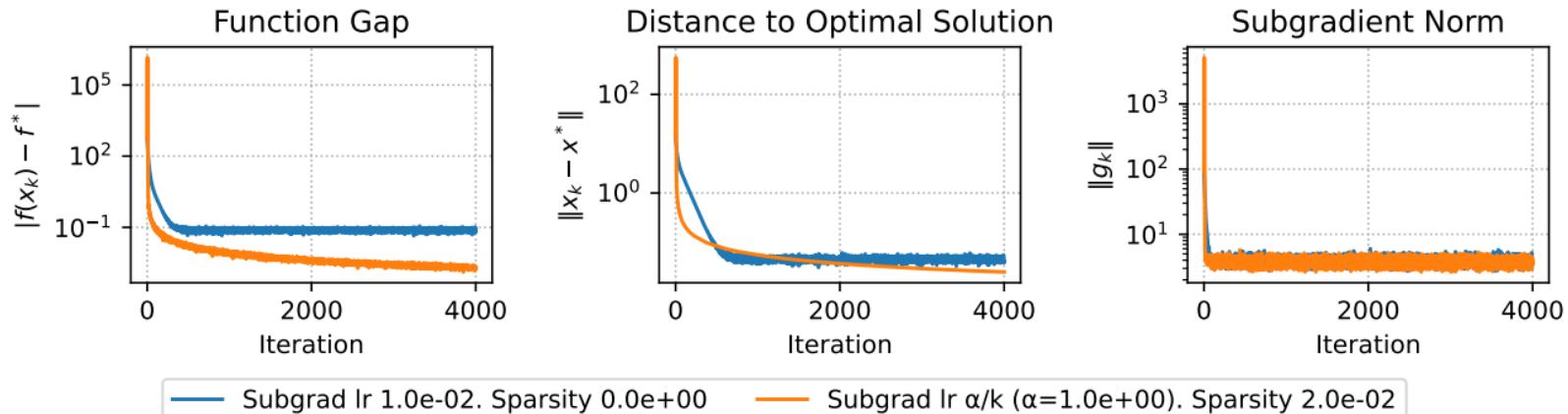


Рисунок 9. Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: 2.3e-01

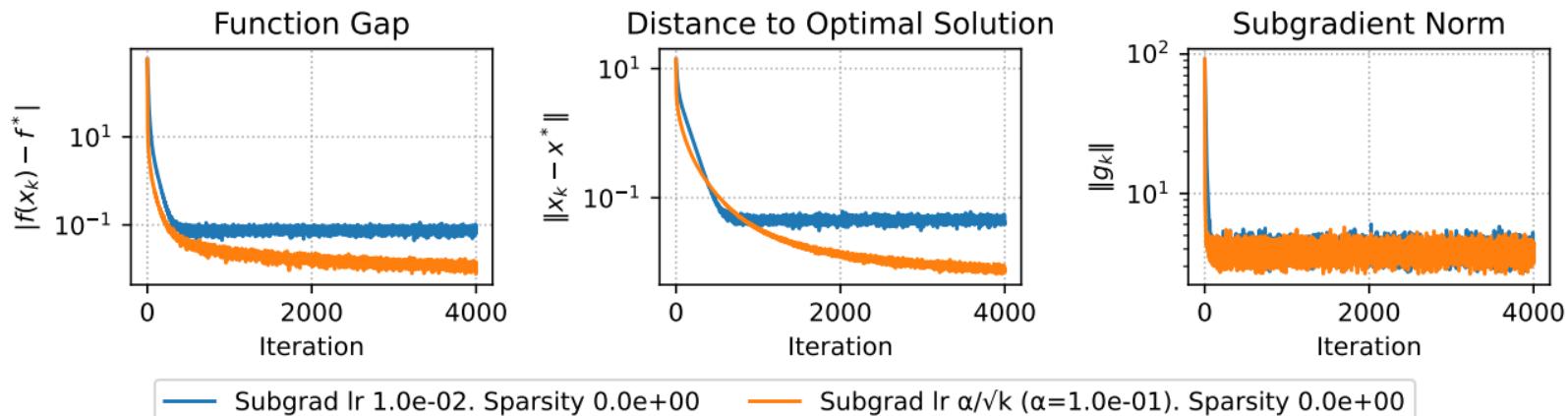


Рисунок 10. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $2.3e-01$

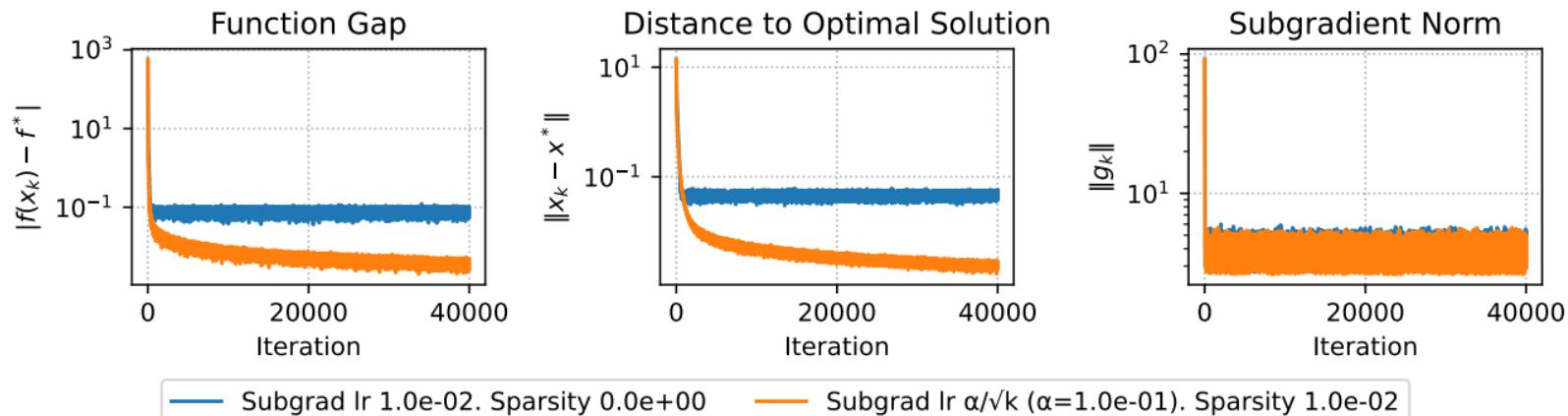


Рисунок 11. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$. Optimal sparsity: $2.0e-01$

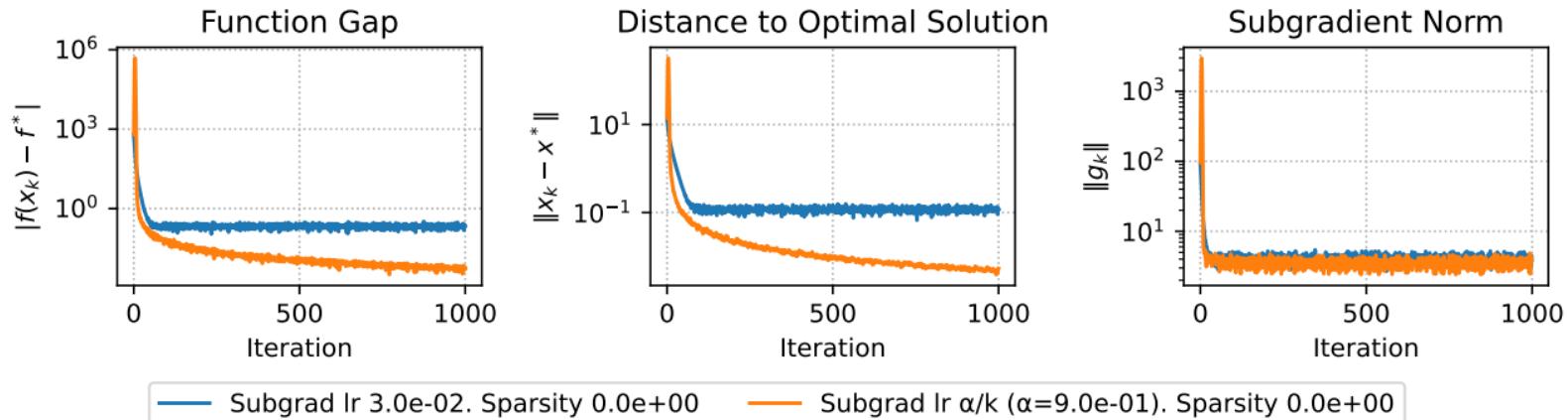


Рисунок 12. Негладкий сильно выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{k}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$. Optimal sparsity: $2.0e-01$

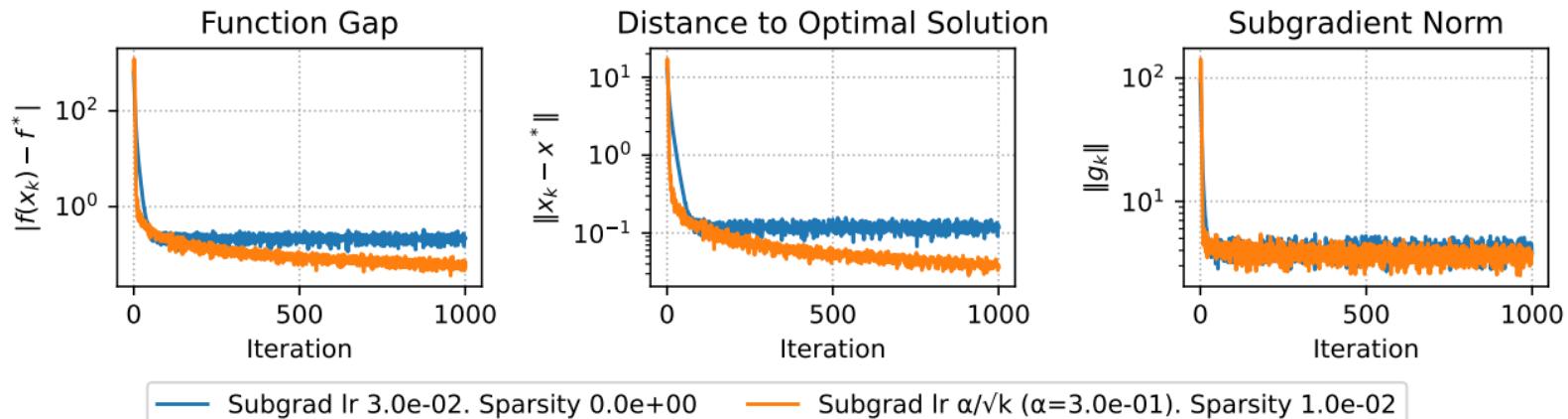


Рисунок 13. Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ работает хуже

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.1$. Optimal sparsity: 8.6e-01

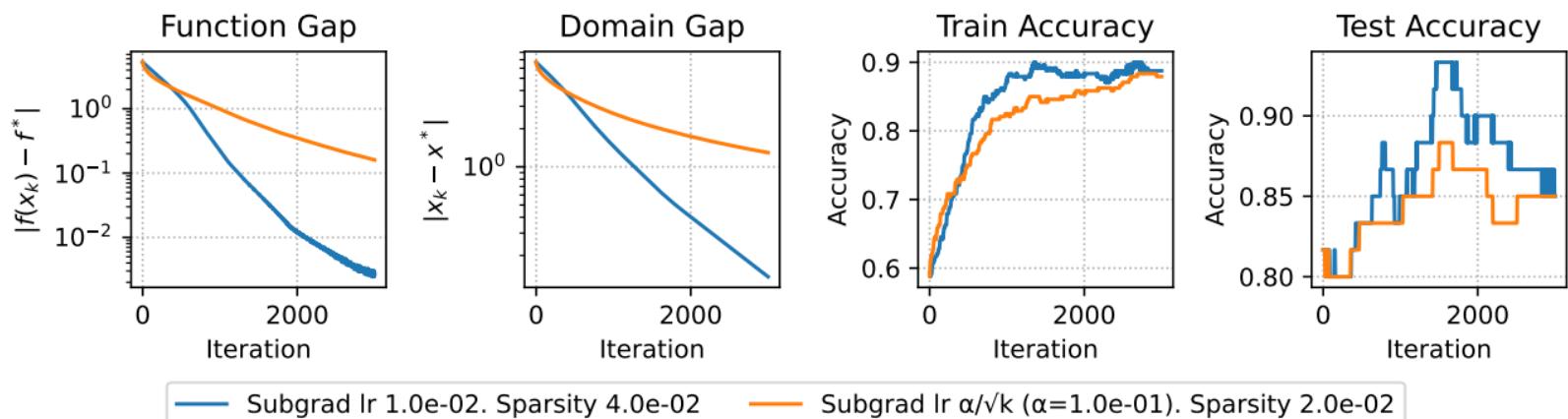


Рисунок 14. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.1$. Optimal sparsity: 8.6e-01

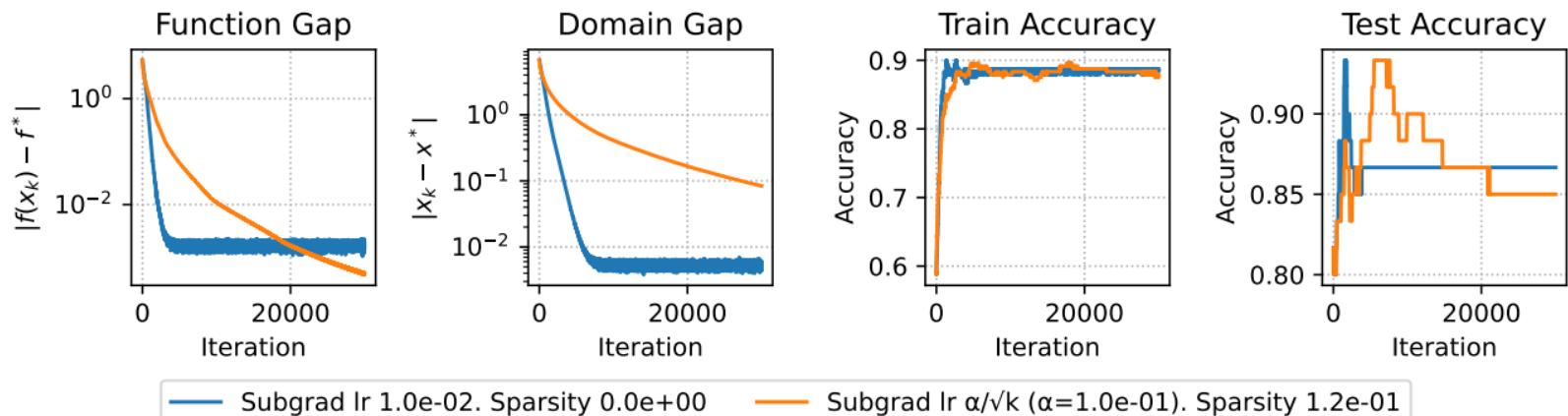


Рисунок 15. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.25$. Optimal sparsity: $9.6e-01$

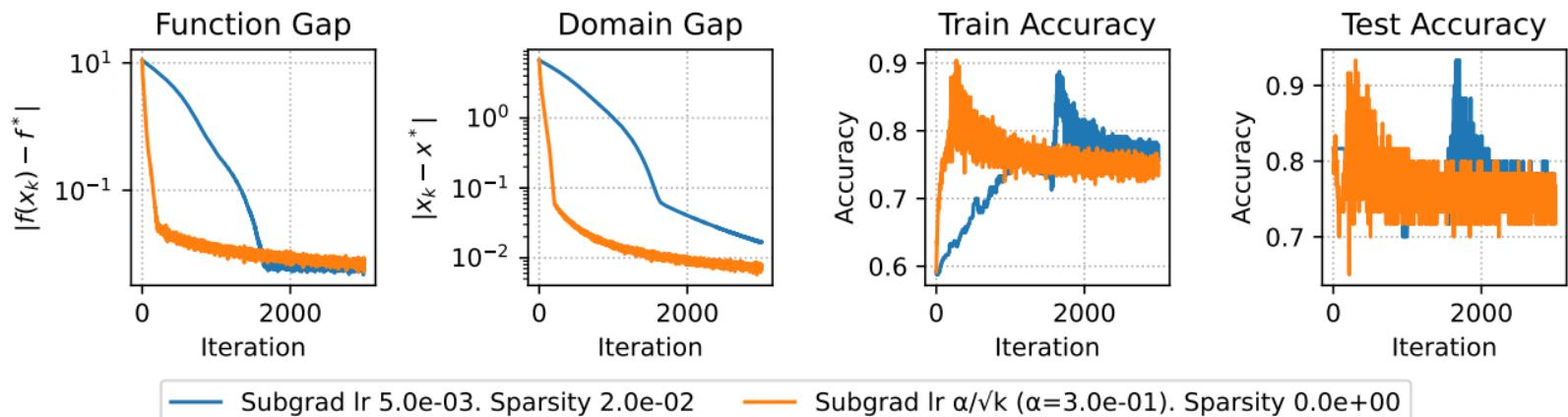


Рисунок 16. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.25$. Optimal sparsity: 9.6e-01

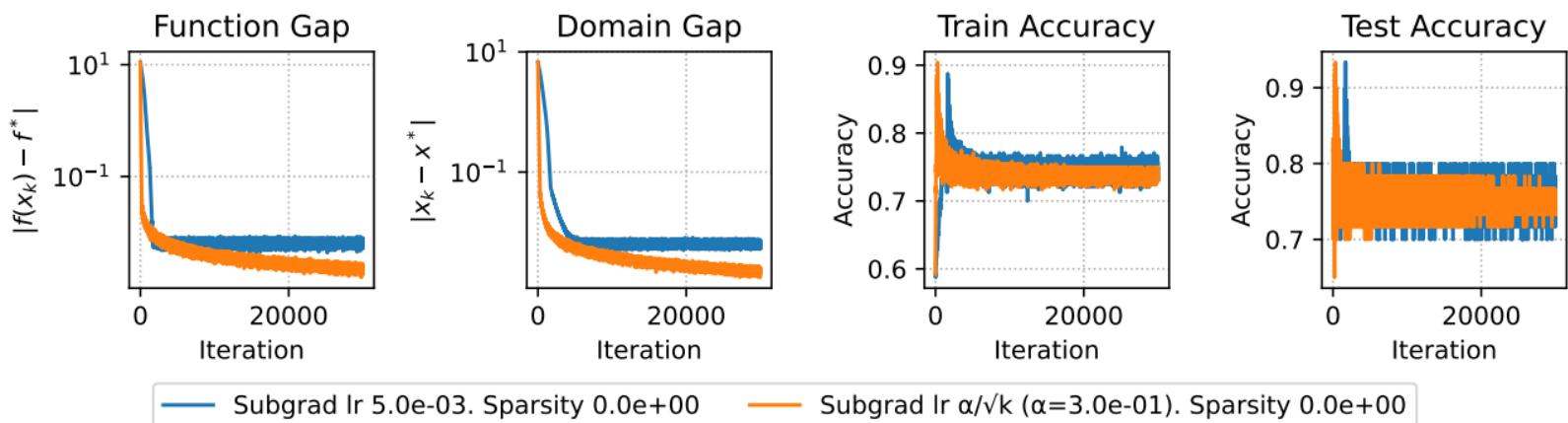


Рисунок 17. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.27$. Optimal sparsity: $1.0e+00$

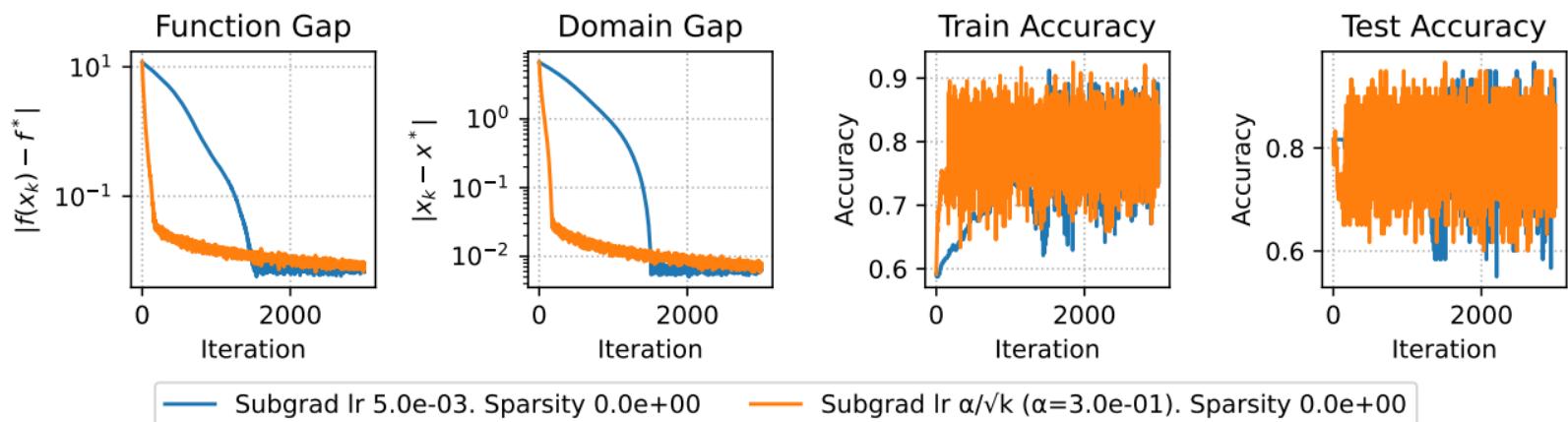


Рисунок 18. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.27$. Optimal sparsity: $1.0e+00$

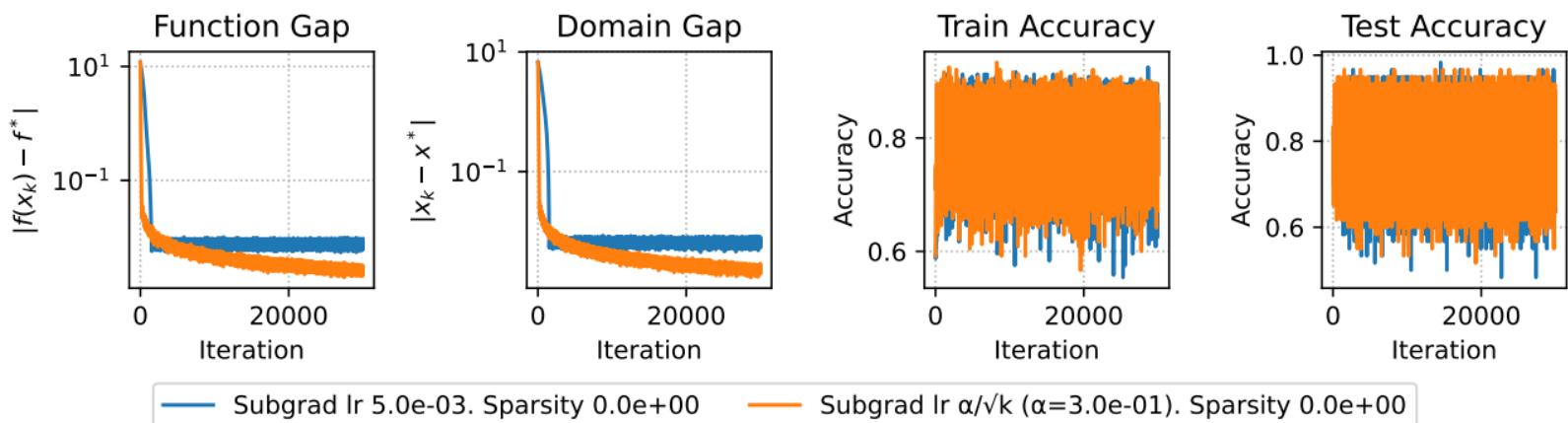


Рисунок 19. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Бонус: доказательства

Субдифференциал дифференцируемой функции

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

Субдифференциал дифференцируемой функции

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

Субдифференциал дифференцируемой функции

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

- Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

- Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

Субдифференциал дифференцируемой функции

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

- Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

- Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

Сходимость: выпуклый случай

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость: выпуклый случай

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
 &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
 &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \\
 (f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k &\leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \\ (f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k &\leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Это дает оценку

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum \alpha_k^2}{2 \sum \alpha_k}.$$

Отсюда следует сходимость при $\sum \alpha_k^2 < \infty$, $\sum \alpha_k = \infty$ (шаг убывает, но не слишком быстро).

Сильно выпуклая негладкая функция

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Доказательство

1. Для любого $\lambda \in [0, 1]$, из μ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

Сильно выпуклая негладкая функция

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Доказательство

1. Для любого $\lambda \in [0, 1]$, из μ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \quad \rightarrow \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle.$$

Сильно выпуклая негладкая функция

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

Сильно выпуклая негладкая функция

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

4. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 1^-$ получаем $f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \rightarrow \langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2$.

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

- Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

- Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

- Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

- Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

$$2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{1 - \mu \alpha_k}{2\alpha_k} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$\sum_{k=0}^{T-1} k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k (f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*))$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*))$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \quad f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Двойной бонус: Нижние оценки

Нижние оценки

выпуклые (негладкие) ⁶	гладкие (невыпуклые) ⁷	гладкие и выпуклые ⁸	гладкие и сильно выпуклые (или PL) ¹
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

⁶Nesterov, Lectures on Convex Optimization

⁷Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

⁸Nemirovski, Yudin, 1979

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
 &= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
 &\vdots \\
 &= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})
 \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} && f - \text{smooth} \\
 x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
 &= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
 &\vdots \\
 &= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})
 \end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ \nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k) \} && f - \text{smooth} \\
 x_{k+1} &\in x_0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}
 \end{aligned} \tag{1}$$

Для получения нижней оценки построим «худшую» функцию f из соответствующего класса, на которой любой метод из семейства Уравнение 1 сходится медленно.

Негладкий выпуклый случай

Theorem

Существует функция f , которая является G -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Негладкий выпуклый случай

Theorem

Существует функция f , которая является G -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Идея доказательства: построить такую функцию f , что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$x_k \in \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

где e_i — i -й стандартный базисный вектор. На итерации $k \leq n$, есть по крайней мере $n - k$ координат x , равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x :

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \partial \left(\beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left(\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left(\max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x\end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x :

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \partial \left(\beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left(\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left(\max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x\end{aligned}$$

Легко видеть, что если $g \in \partial f(x)$ и $\|x\| \leq R$, то

$$\|g\| \leq \alpha R + \beta$$

Таким образом, f является $\alpha R + \beta$ -липшицевой на $B(R)$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — наименьший индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — наименьший индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1 . Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1 .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — наименьший индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1 . Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1 .
- Индукцией по i можно показать, что $x_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$. В частности, для $i \leq k$, $k+1$ -я координата x_i равна нулю и вследствие структуры $f(x)$:

$$f(x_i) \geq 0.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned}\partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &0 \in \partial f(y).\end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &= 0 \in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ &= 0 \in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

- Теперь мы получаем:

$$f(x_i) - f(x^*) \geq 0 - \left(-\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$



Ссылки

- Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)