



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Градиентные методы для условных задач

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 12

Даня Меркулов  
Пётр Остроухов



# Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ


$$f \rightarrow \min_{x, y, z}$$

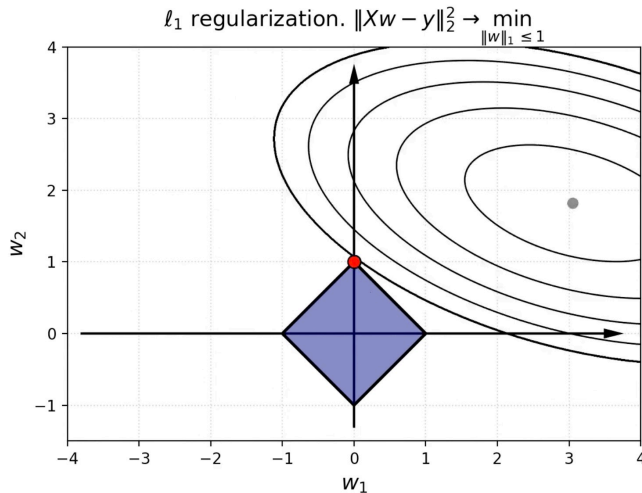
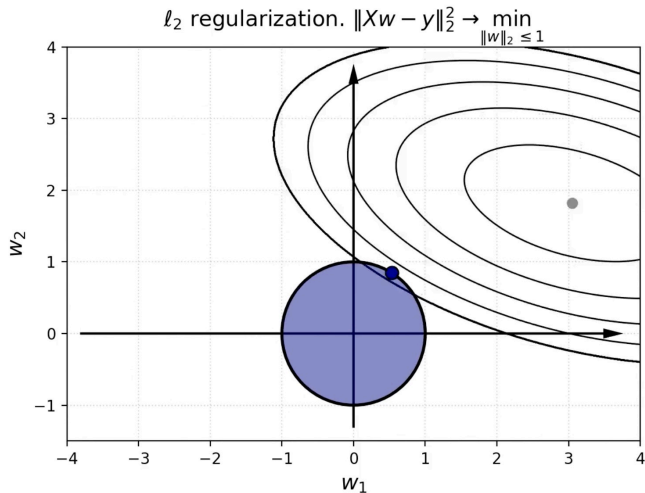


# Негладкие задачи

# Задача наименьших квадратов с $\ell_1$ -регуляризацией



$\ell_1$  induces sparsity



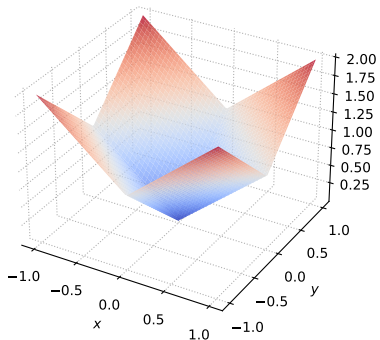
# Нормы не являются гладкими



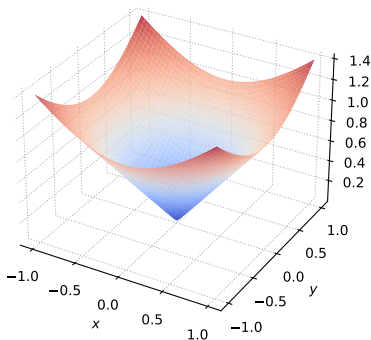
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации. Будем считать  $f(x)$  выпуклой, но не обязательно гладкой.

$p = 1$  Norm Cone



$p = 2$  Norm Cone



$p = \infty$  Norm Cone

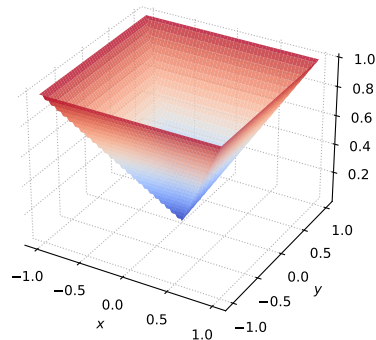


Рисунок 1. Конусы норм для разных  $p$ -норм не являются гладкими

# Пример Вульфа



Wolfe's example

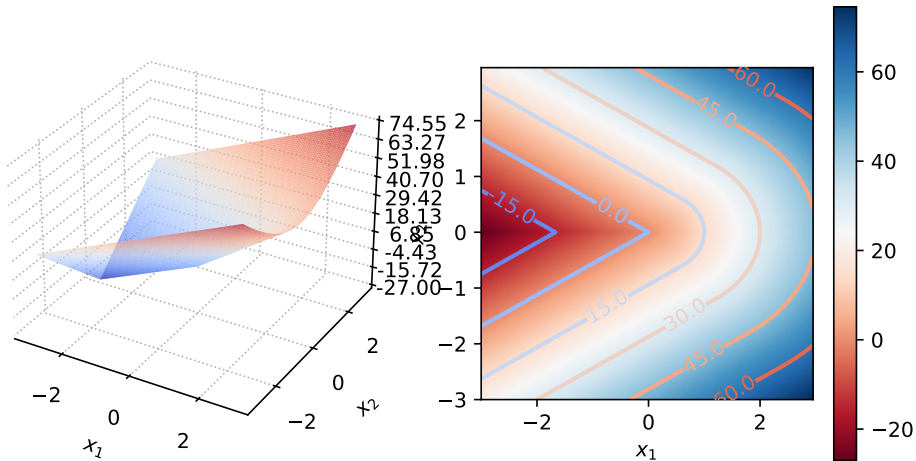


Рисунок 2. Пример Вульфа. [Открыть в Colab](#)

# Вычисление субградиента

# Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

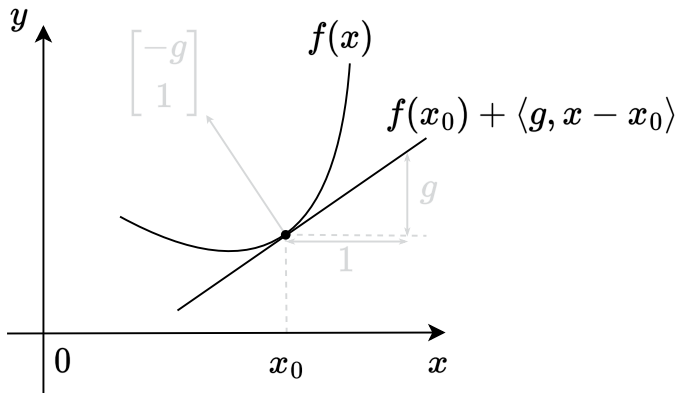
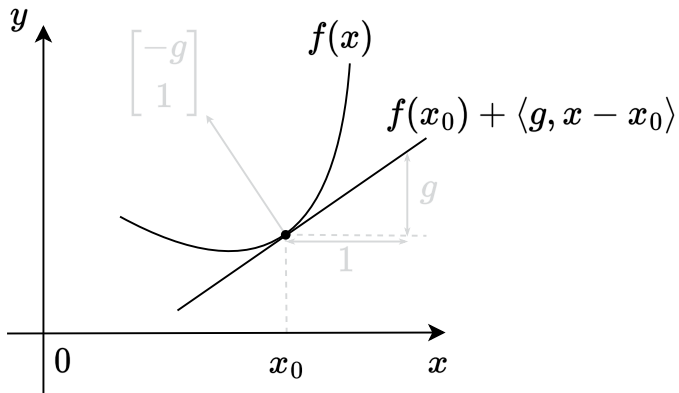


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

# Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

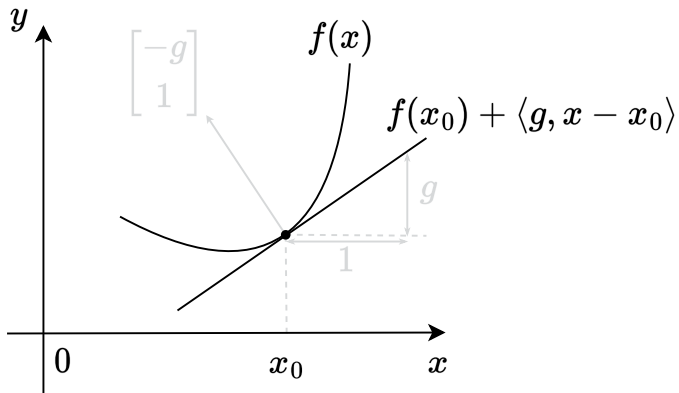
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

# Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

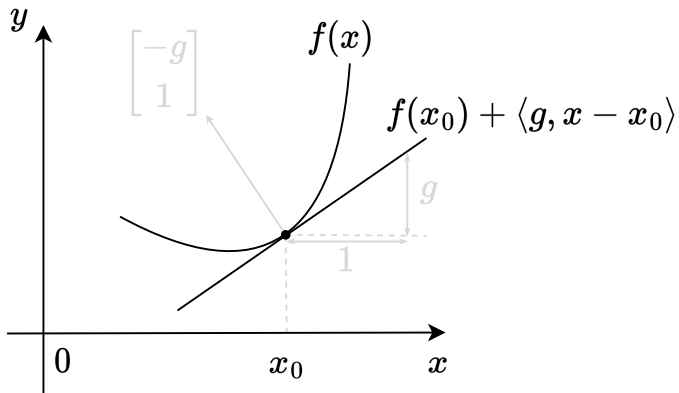
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

# Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

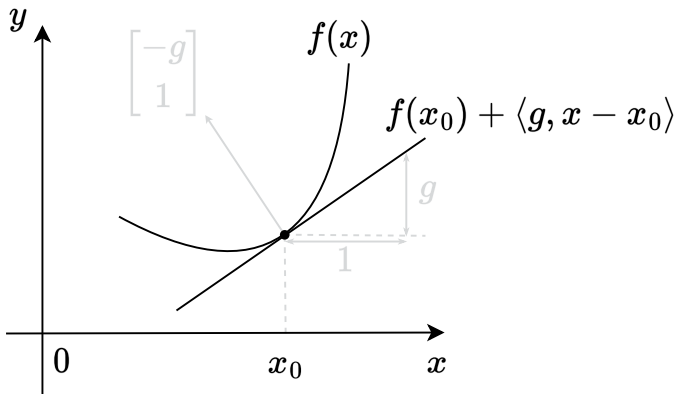
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

# Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции  $f(x)$ : для любой точки  $x_0$  и для всех  $x \in \text{dom } f$  выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора  $g$ , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если  $f(x)$  дифференцируема, то  $g = \nabla f(x_0)$ .
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы хотим сохранить это полезное свойство и для негладких функций.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

# Субградиент и субдифференциал



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

# Субградиент и субдифференциал



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\partial f(x_0)$ .

# Субградиент и субдифференциал



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x_0$  и обозначается  $\partial f(x_0)$ .

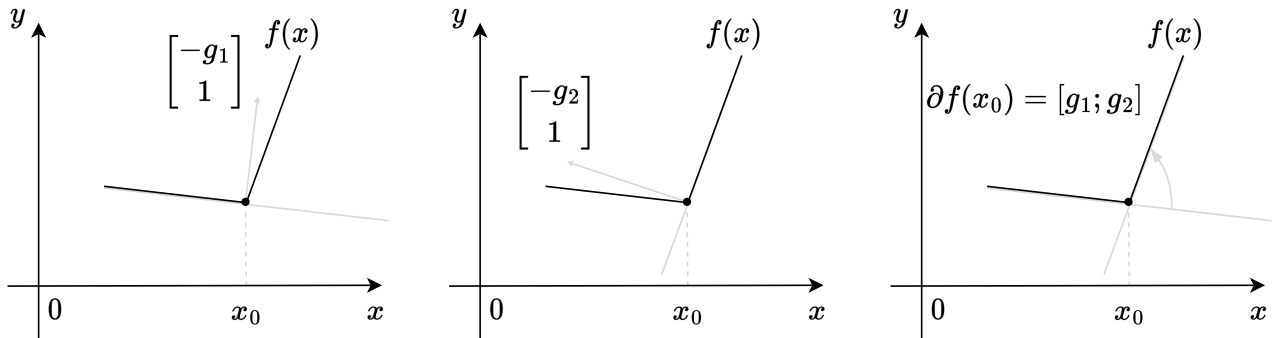


Рисунок 4. Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

# Субградиент и субдифференциал

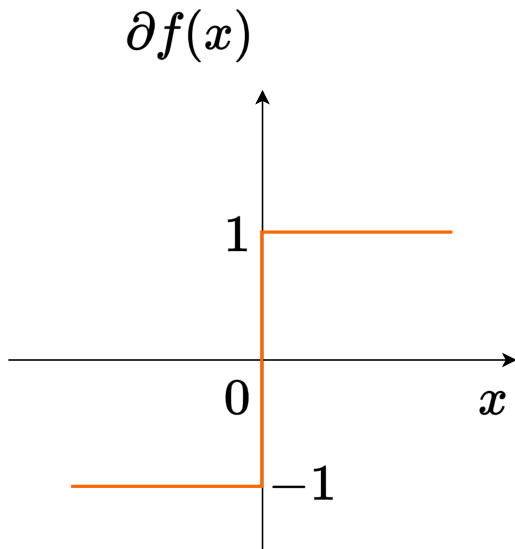
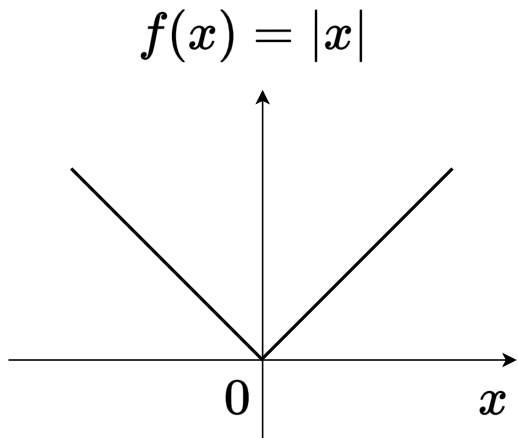


Найдите  $\partial f(x)$ , если  $f(x) = |x|$

# Субградиент и субдифференциал



Найдите  $\partial f(x)$ , если  $f(x) = |x|$



# Свойства субдифференциала



- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

## **i** Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

## Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

## Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

# Свойства субдифференциала

- Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$ , то  $\partial f(x_0)$  является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция  $f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ .
- Если  $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$ , то  $f(x)$  выпукла на  $S$ .

## Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  — функция, определенная на множестве  $S$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Если  $x_0 \in \text{ri}(S)$  и  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то либо  $\partial f(x_0) = \emptyset$ , либо  $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$ . Более того, если функция  $f$  выпукла, то первая ситуация невозможна.

## Доказательство

1. Пусть  $s \in \partial f(x_0)$  для некоторого  $s \in \mathbb{R}^n$ , отличного от  $\nabla f(x_0)$ . Пусть  $v \in \mathbb{R}^n$  — единичный вектор. Поскольку  $x_0$  — внутренняя точка  $S$ , существует  $\delta > 0$ , такое что  $x_0 + tv \in S$  для всех  $0 < t < \delta$ . По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех  $0 < t < \delta$ . Переходя к пределу при  $t \rightarrow 0$  и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

# Свойства субдифференциала



2. Отсюда  $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$ . В силу произвольности  $v$  можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к  $s = \nabla f(x_0)$  (противоречие, если  $s \neq \nabla f(x_0)$  и мы предполагали строгое неравенство, но здесь проще:  $\langle \nabla f(x_0) - s, v \rangle \geq 0$  для всех  $v \implies \nabla f(x_0) = s$ ).

# Свойства субдифференциала



2. Отсюда  $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$ . В силу произвольности  $v$  можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к  $s = \nabla f(x_0)$  (противоречие, если  $s \neq \nabla f(x_0)$  и мы предполагали строгое неравенство, но здесь проще:  $\langle \nabla f(x_0) - s, v \rangle \geq 0$  для всех  $v \implies \nabla f(x_0) = s$ ).

3. Более того, если функция  $f$  выпукла, то согласно критерию выпуклости дифференцируемой функции:  $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$  для всех  $x \in S$ . Это в точности означает, что  $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$ .

# Вычисление субдифференциалов



**i** Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда если  $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$ , то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$  на множестве  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$  и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

# Вычисление субдифференциалов



**i** Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на выпуклых множествах  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда если  $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$ , то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$ ,  $a_i > 0$  имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$  на множестве  $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$  и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

**i** Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть  $f_i(x)$  — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in S$ , и поточечный максимум определяется как  $f(x) = \max_i f_i(x)$ . Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},$$

$$I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x)\}$$

# Вычисление субдифференциала



- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$

# Вычисление субдифференциала



- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$ ,  $f_i$  — выпуклые функции

# Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$ ,  $f_i$  — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax + b))(x) = A^T \partial f(Ax + b)$ ,  $f$  — выпуклая функция

# Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$  для  $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$ ,  $f_i$  — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax + b))(x) = A^T \partial f(Ax + b)$ ,  $f$  — выпуклая функция
- $z \in \partial f(x)$  тогда и только тогда, когда  $x \in \partial f^*(z)$ .

# Субградиентный метод

# Алгоритм



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

# Алгоритм



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент  $\nabla f(x_k)$  на произвольный субградиент  $g_k \in \partial f(x_k)$ :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где  $g_k$  — произвольный субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ .

# Алгоритм



Вектор  $g$  называется **субградиентом** функции  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ , если  $\forall x \in S$ :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент  $\nabla f(x_k)$  на произвольный субградиент  $g_k \in \partial f(x_k)$ :

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где  $g_k$  — произвольный субградиент функции  $f(x)$  в точке  $x_k$ .

Субградиентный метод не является методом спуска: значение функции может расти ( $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ ), так как антисубградиент не обязательно является направлением убывания.

Поэтому в качестве приближения решения берут лучшее найденное значение:

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1, \dots, k} f(x_i).$$

# Сходимость



$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

# Сходимость



$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

# Сходимость



$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2\end{aligned}$$

- Оценим расстояние до оптимума  
 $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  на последней итерации.

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2\end{aligned}$$

- Оценим расстояние до оптимума  
 $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  на последней итерации.
- Для субградиента:  
 $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k).$

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2\end{aligned}$$

- Оценим расстояние до оптимума  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  на последней итерации.
- Для субградиента:  
 $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$ .
- Дополнительно предположим, что  $\|g_k\|^2 \leq G^2$ .

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Просуммируем неравенство по  $k$  от 0 до  $T - 1$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2\end{aligned}$$

- Оценим расстояние до оптимума  $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  на последней итерации.
- Для субградиента:  
 $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$ .
- Дополнительно предположим, что  $\|g_k\|^2 \leq G^2$ .
- Используем обозначение  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ .

# Сходимость



- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

# Сходимость



- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Это приводит к основной оценке сходимости:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}$$

# Сходимость



- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Это приводит к основной оценке сходимости:

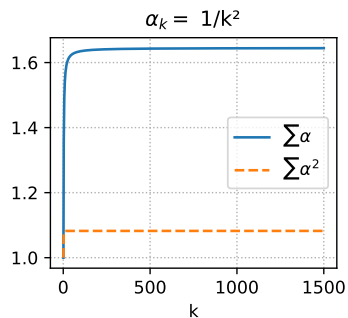
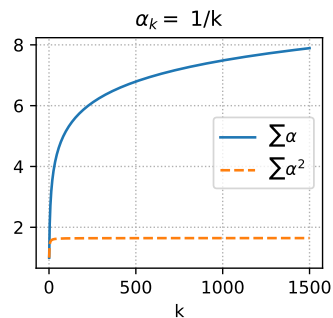
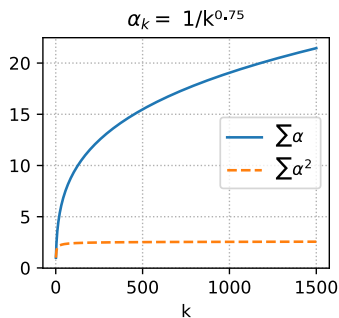
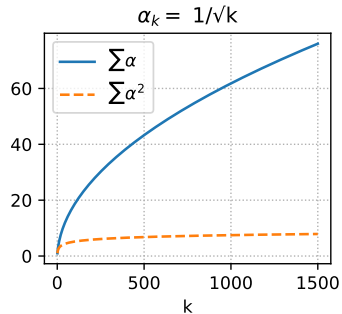
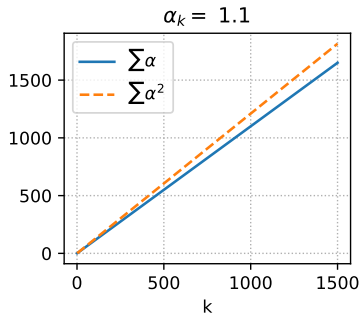
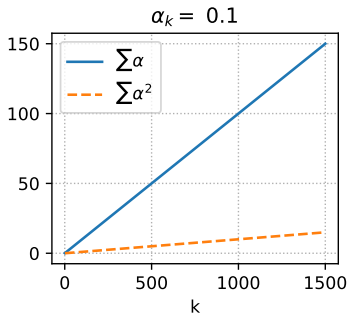
$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}$$

- Отсюда следует сходимость метода при выполнении условий:

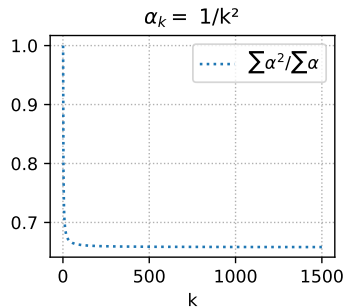
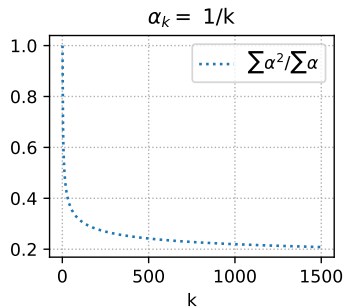
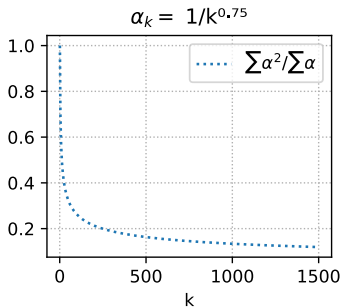
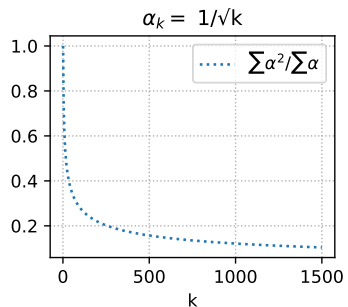
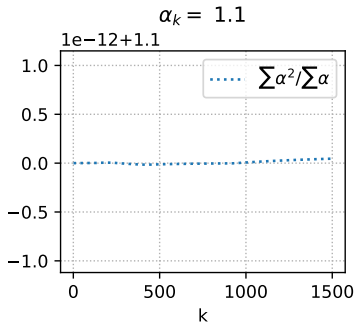
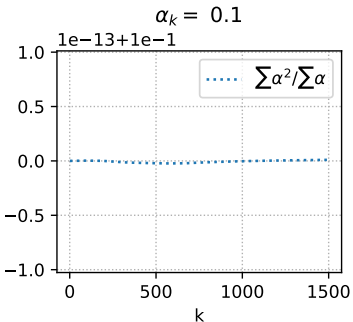
$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty,$$

то субградиентный метод сходится (шаг должен быть убывающим, но не слишком быстрым).

# Различные стратегии выбора шага



# Различные стратегии выбора шага



# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. <sup>1</sup> или <sup>2</sup>.

<sup>1</sup>B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

<sup>2</sup>N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. <sup>1</sup> или <sup>2</sup>.
- Найдем оптимальный шаг  $\alpha$ , который минимизирует правую часть неравенства.

<sup>1</sup>B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

<sup>2</sup>N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Примечательно, что оптимальный постоянный шаг дает ту же оценку, что и оптимальная последовательность шагов.

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Примечательно, что оптимальный постоянный шаг дает ту же оценку, что и оптимальная последовательность шагов.
- Это связано с симметрией и выпуклостью правой части относительно  $\alpha_i$ .

# Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для постоянного шага  $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$ , т.е.  $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}$$

- Критерий остановки: норма субградиента не подходит (пример  $f(x) = |x|$ ). Обычно используют фиксированное число итераций.

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k);$$

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1) \cdot f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i}$$

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1) \cdot f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq$$

# Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



## i Theorem

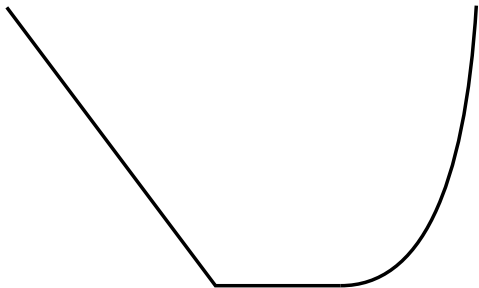
Пусть  $f$  — выпуклая  $G$ -липшицева функция и  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ . Для убывающей стратегии шага  $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$ , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

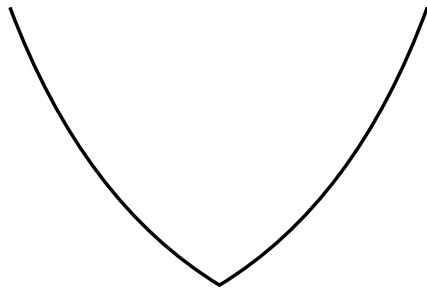
1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1) \cdot f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq$$

## Сильно выпуклый случай

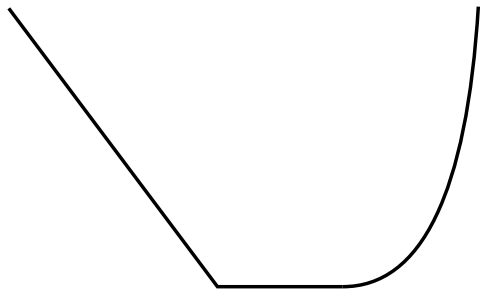


Негладкая  
Выпуклая



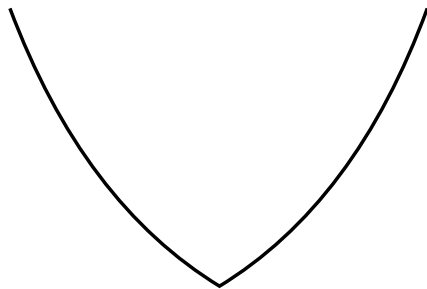
Негладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая

## Сильно выпуклый случай



Негладкая  
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

# Негладкий сильно выпуклый случай



## Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

# Негладкий сильно выпуклый случай



## Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в  $x$ , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle.$$

# Негладкий сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в  $x$ , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle.$$

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2} \lambda \|x - y\|^2$$

# Негладкий сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и  $x, y$  — произвольные точки. Тогда для любого  $g \in \partial f(x)$ ,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

1. Для любого  $\lambda \in [0, 1)$ , из  $\mu$ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в  $x$ , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle.$$

3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2} \lambda \|x - y\|^2$$

4. Переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 1^-$  получаем  $f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2 \rightarrow \langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu \alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай



## i Theorem

Пусть  $f$  —  $\mu$ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом  $x^*$ . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории:  $\|g_k\| \leq G$ . Используя шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ , субградиентный метод гарантирует для  $k > 0$  что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{1 - \mu\alpha_k}{2\alpha_k} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \end{aligned}$$

# Сходимость: сильно выпуклый случай.

## Доказательство

2. Подставим шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$  в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех  $k = 0, 1, \dots, T-1$ , мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \quad f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}. \end{aligned}$$

# Summary. Субградиентный метод



Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые липшицевы функции	$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые функции	$\alpha \sim \frac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
m=1000, n=100,  $\lambda=0$ ,  $\mu=0$ , L=10. Optimal sparsity: 0.0e+00

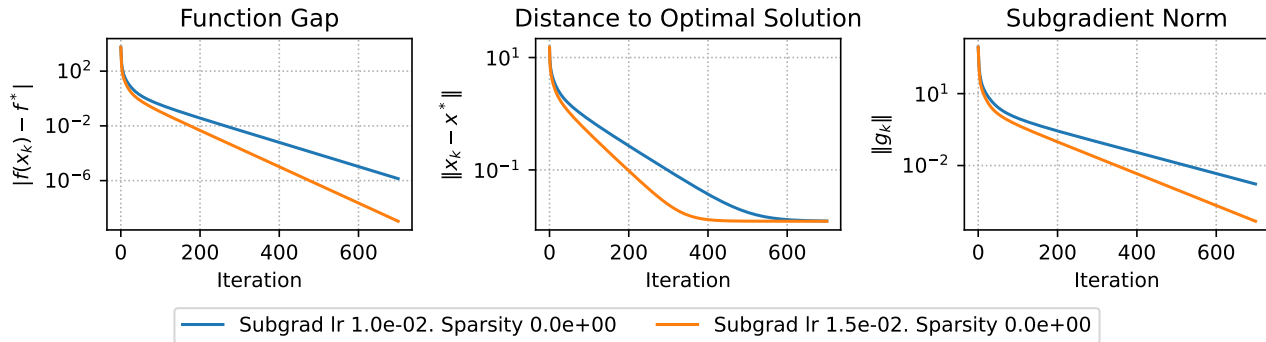


Рисунок 6. Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
m=1000, n=100,  $\lambda=0.1$ ,  $\mu=0$ , L=10. Optimal sparsity: 1.0e-02

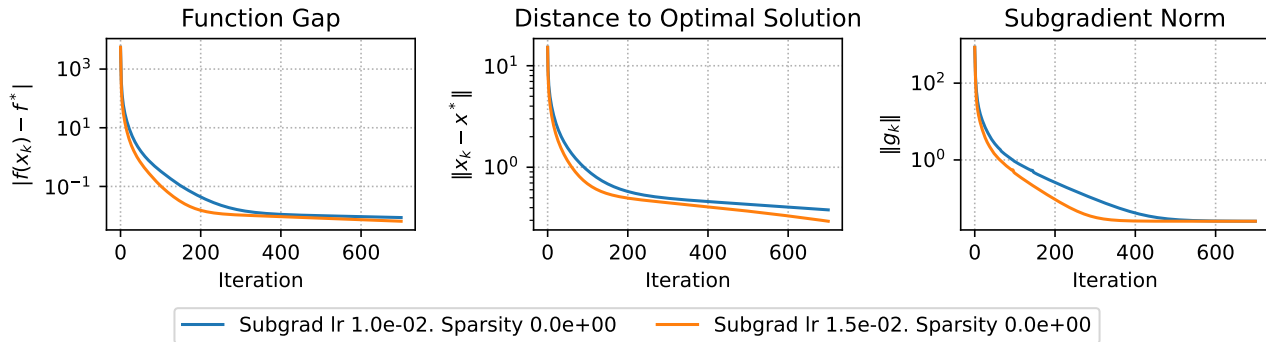


Рисунок 7. Негладкий выпуклый случай. Маленькое значение  $\lambda$  приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=1000, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $7.0 \times 10^{-2}$

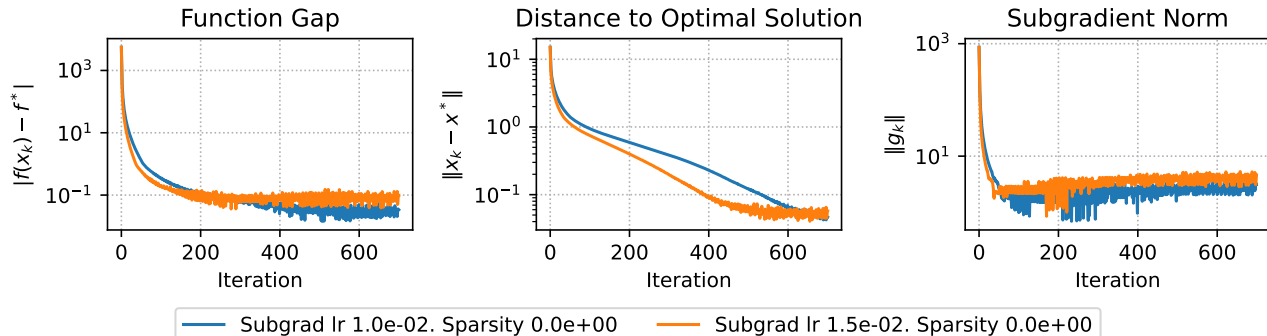


Рисунок 8. Негладкий выпуклый случай. При большем значении  $\lambda$  проявляется немонотонность  $f(x_k)$ . Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.3e-01$

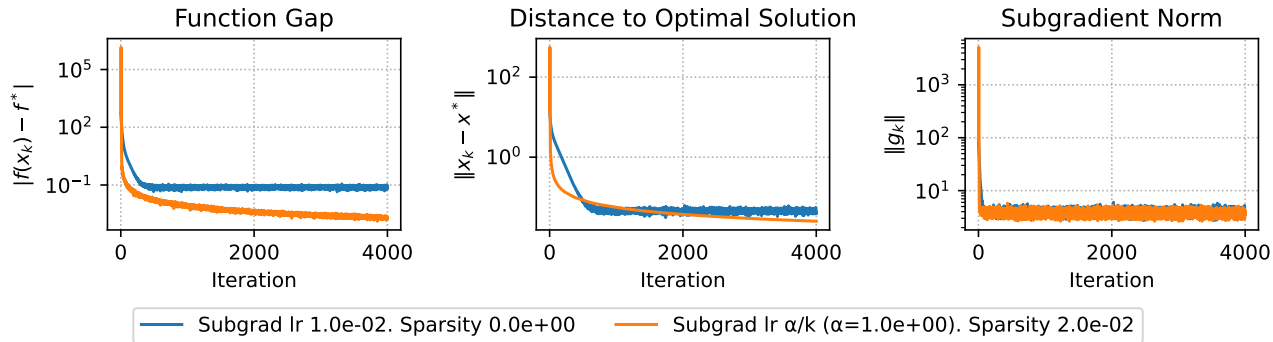


Рисунок 9. Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.3e-01$

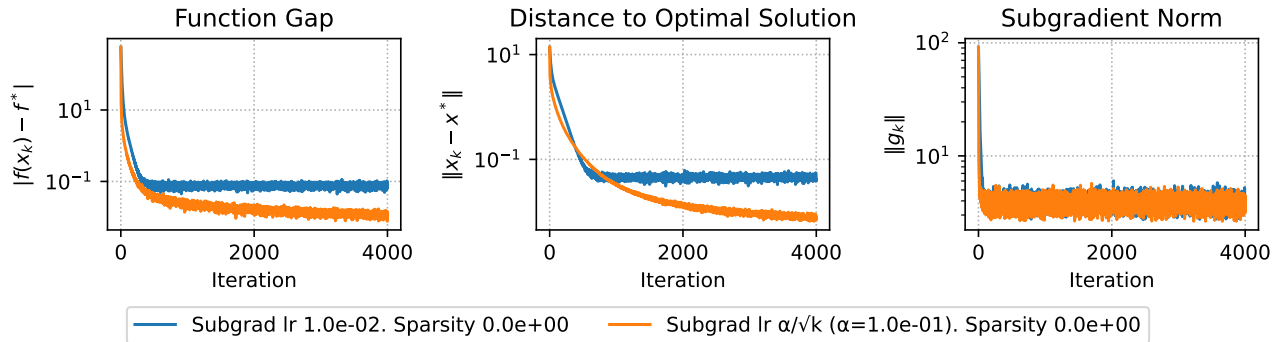


Рисунок 10. Негладкий выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.3e-01$

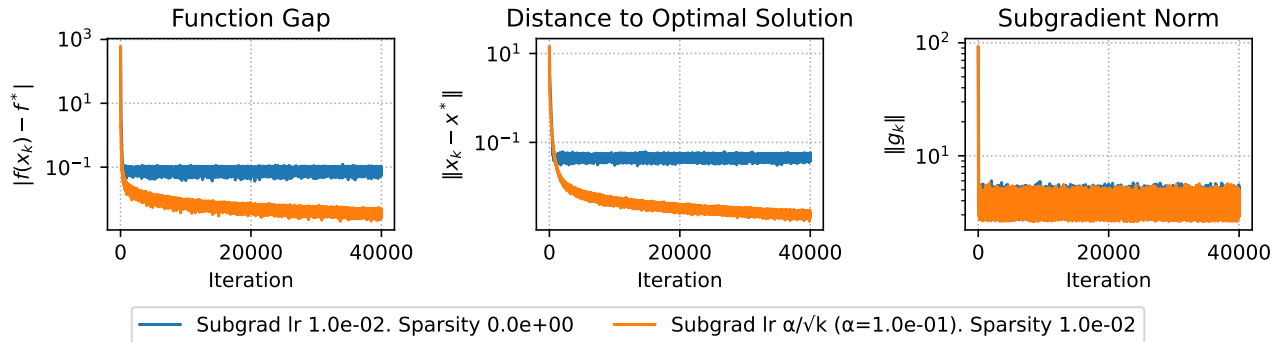


Рисунок 11. Негладкий выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$ . Optimal sparsity:  $2.0 \times 10^{-1}$

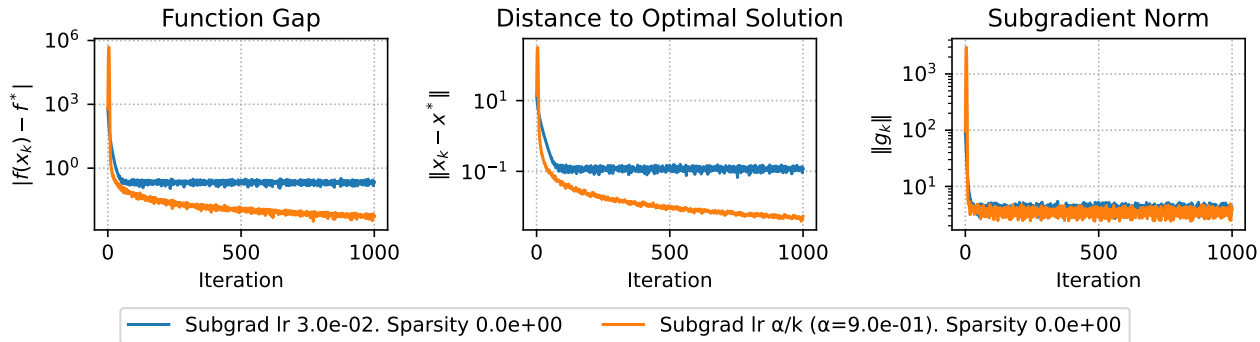


Рисунок 12. Негладкий сильно выпуклый случай.  $\frac{\alpha_0}{k}$  шаг приводит к сходимости для  $f_k^{\text{best}}$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left( \frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with  $\ell_1$  Regularization (LASSO).  
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$ . Optimal sparsity: 2.0e-01

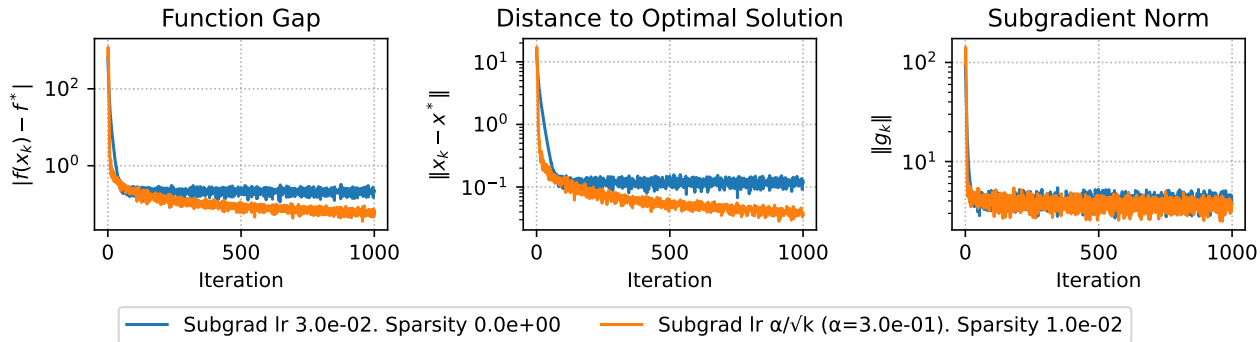


Рисунок 13. Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг  $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$  работает хуже

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300$ ,  $n=50$ ,  $\lambda=0.1$ . Optimal sparsity:  $8.6 \times 10^{-1}$

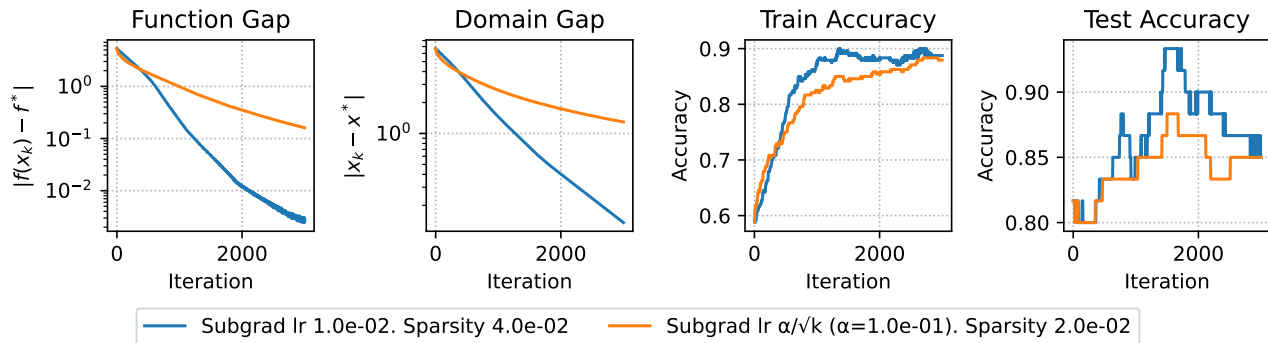


Рисунок 14. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
 $m=300, n=50, \lambda=0.1$ . Optimal sparsity:  $8.6 \times 10^{-1}$

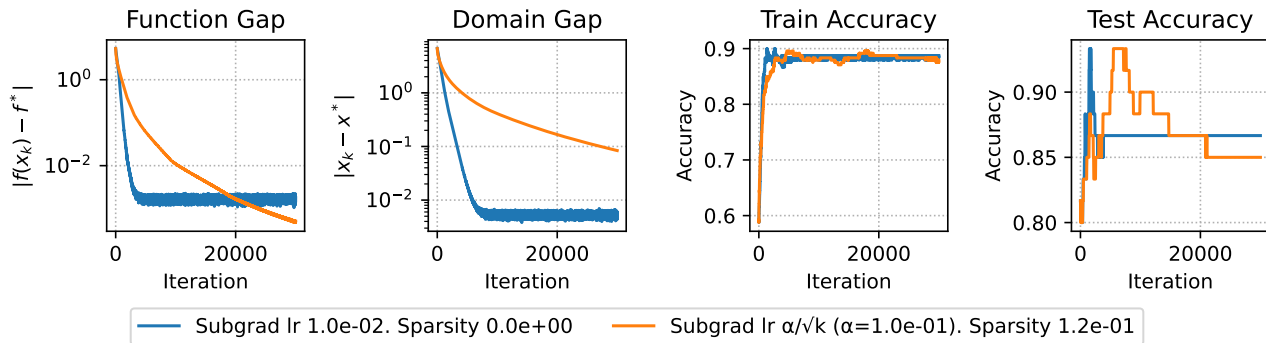


Рисунок 15. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
m=300, n=50,  $\lambda=0.25$ . Optimal sparsity: 9.6e-01

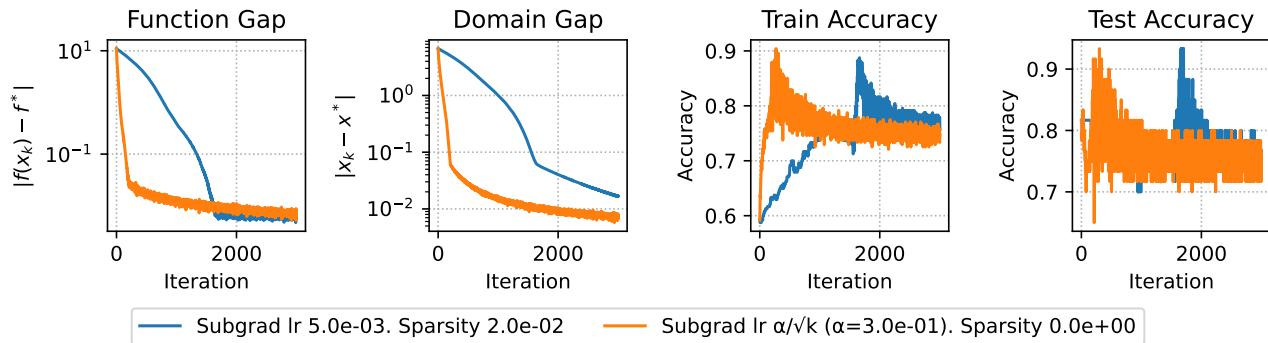


Рисунок 16. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
m=300, n=50,  $\lambda=0.25$ . Optimal sparsity: 9.6e-01

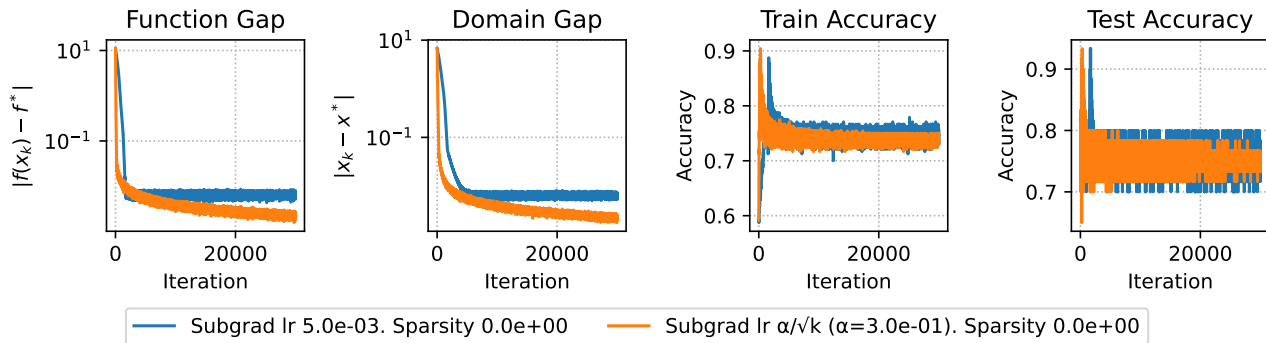


Рисунок 17. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
m=300, n=50,  $\lambda=0.27$ . Optimal sparsity: 1.0e+00

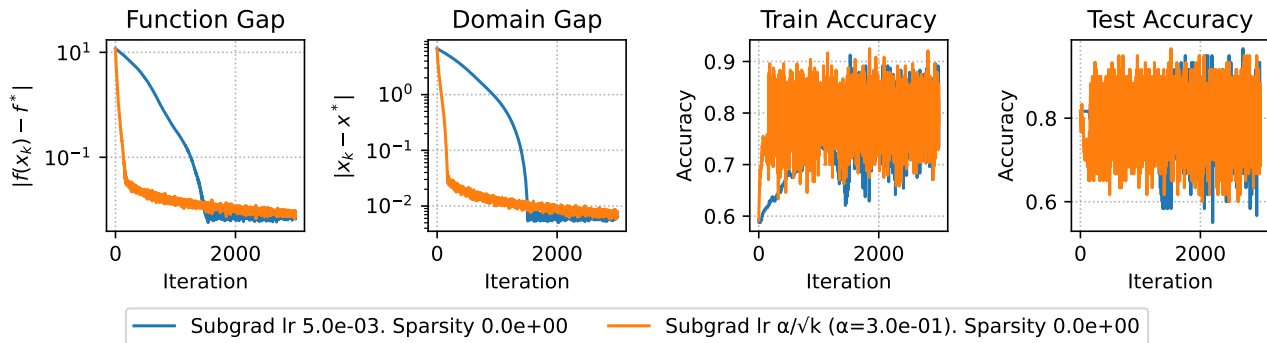


Рисунок 18. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with  $\ell_1$  Regularization.  
m=300, n=50,  $\lambda=0.27$ . Optimal sparsity: 1.0e+00

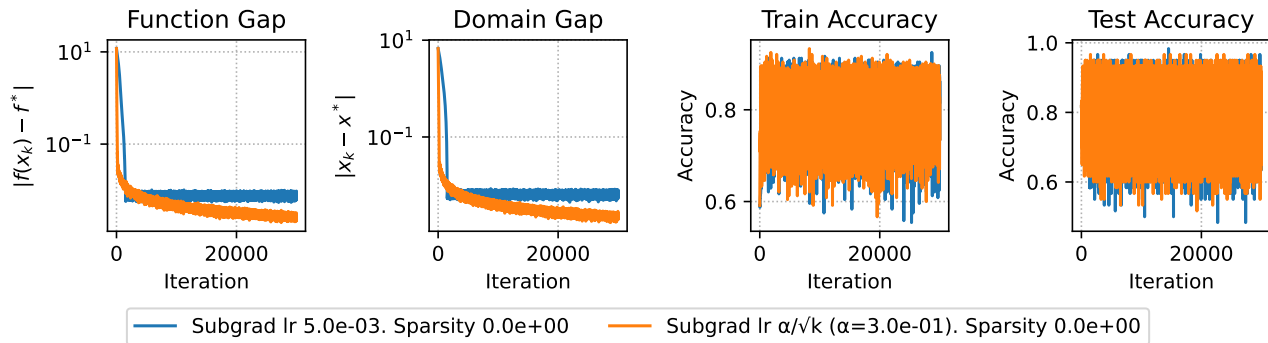


Рисунок 19. Логистическая регрессия с  $\ell_1$  регуляризацией

# Экстра: Нижние оценки

# Нижние оценки



выпуклые (негладкие) <sup>3</sup>	гладкие (невыпуклые) <sup>4</sup>	гладкие и выпуклые <sup>5</sup>	гладкие и сильно выпуклые (или PL) <sup>1</sup>
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

<sup>3</sup>Nesterov, Lectures on Convex Optimization

<sup>4</sup>Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

<sup>5</sup>Nemirovski, Yudin, 1979

# Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

# Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

# Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

Для получения нижней оценки построим «худшую» функцию  $f$  из соответствующего класса, на которой любой метод из семейства Уравнение 1 сходится медленно.

# Негладкий выпуклый случай



## Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $G$ -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для  $R > 0$  и  $k \leq n$ , где  $n$  — размерность задачи.

# Негладкий выпуклый случай



## i Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $G$ -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для  $R > 0$  и  $k \leq n$ , где  $n$  — размерность задачи.

**Идея доказательства:** построить такую функцию  $f$ , что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$x_k \in \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

где  $e_i$  —  $i$ -й стандартный базисный вектор. На итерации  $k \leq n$ , есть по крайней мере  $n - k$  координат  $x$ , равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

**Свойства:**

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

## Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

## Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

## Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

Рассмотрим субдифференциал  $f(x)$  в  $x$ :

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \partial \left( \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left( \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left( \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x \end{aligned}$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  — параметры, и  $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$  — первые  $k$  компонент  $x$ .

## Свойства:

- Функция  $f(x)$  является  $\alpha$ -сильно выпуклой из-за квадратичного члена  $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$ .
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате  $x$ .

Рассмотрим субдифференциал  $f(x)$  в  $x$ :

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \partial \left( \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left( \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left( \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x \end{aligned}$$

Легко видеть, что если  $g \in \partial f(x)$  и  $\|x\| \leq R$ , то

$$\|g\| \leq \alpha R + \beta$$

Таким образом,  $f$  является  $\alpha R + \beta$ -липшицевой на  $B(R)$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .
- При запросе оракула в  $x_0 = 0$ , он возвращает  $e_1$ . Следовательно,  $x_1$  лежит на прямой, порождённой  $e_1$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке  $x$  оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где  $i$  — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум  $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$ .

- Пусть  $x_0 = 0$ .
- При запросе оракула в  $x_0 = 0$ , он возвращает  $e_1$ . Следовательно,  $x_1$  лежит на прямой, порождённой  $e_1$ .
- Индукцией по  $i$  можно показать, что  $x_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$ . В частности, для  $i \leq k$ ,  $k+1$ -я координата  $x_i$  равна нулю и вследствие структуры  $f(x)$ :

$$f(x_i) \geq 0.$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение  $f = f(y) = f(x^*)$  равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции  $f$ . Определим точку  $y \in \mathbb{R}^n$ :

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что  $0 \in \partial f(y)$ :

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение  $f = f(y) = f(x^*)$  равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

- Теперь мы получаем:

$$f(x_i) - f(x^*) \geq 0 - \left( -\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

## Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

# Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Имеем оценку снизу  $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$ , что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой  $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$ .

## Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$
$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

## Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что  $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$  с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$

# Ссылки



- Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)