



## Условия оптимальности. Функция Лагранжа. Условия Каруша-Куна-Таккера

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

*В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному алгоритму.*

—Предисловие к “Аналитической механике”



Рис. 1: Жозеф Луи Лагранж

## Условия оптимальности

# Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$



Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

## Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$

Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).



Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

## Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$



Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**:  $x^* \in S$ .

Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

## Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$



Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**:  $x^* \in S$ .

- Точка  $x^*$  является **глобальным минимумом**, если  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in S$ .

Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

## Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$



Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**:  $x^* \in S$ .

- Точка  $x^*$  является **глобальным минимумом**, если  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in S$ .
- Точка  $x^*$  является **локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$ .

Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

# Теория

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$



Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**:  $x^* \in S$ .

- Точка  $x^*$  является **глобальным минимумом**, если  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in S$ .
- Точка  $x^*$  является **локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$ .
- Точка  $x^*$  является **строгим локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$  с  $x \neq x^*$ .

# Теория



Рис. 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$

Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, **не пусто**:  $x^* \in S$ .

- Точка  $x^*$  является **глобальным минимумом**, если  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in S$ .
- Точка  $x^*$  является **локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$ .
- Точка  $x^*$  является **строгим локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$  с  $x \neq x^*$ .
- Мы называем точку  $x^*$  **стационарной точкой** (или **критической точкой**), если  $\nabla f(x^*) = 0$ . Любой локальный минимум дифференцируемой функции должен быть стационарной точкой.

# Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

## i Theorem

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $S$  существует.

# Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

## i Theorem

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $S$  существует.

GOOD NEWS EVERYONE!



Рис. 3: Многие практические задачи теоретически разрешимы

# Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

## i Theorem

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $S$  существует.

GOOD NEWS EVERYONE!



## i Теорема Тейлора

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно дифференцируемая функция и  $p \in \mathbb{R}^n$ . Тогда мы имеем:

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x + tp)^T p \quad \text{для некоторого } t \in (0, 1)$$

Рис. 3: Многие практические задачи теоретически разрешимы

# Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

## i Theorem

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $S$  существует.

GOOD NEWS EVERYONE!



Рис. 3: Многие практические задачи теоретически разрешимы

## i Теорема Тейлора

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно дифференцируемая функция и  $p \in \mathbb{R}^n$ . Тогда мы имеем:

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x + tp)^T p \quad \text{для некоторого } t \in (0, 1)$$

Кроме того, если  $f$  дважды непрерывно дифференцируема, то мы имеем:

$$\nabla f(x + p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x + tp)p dt$$

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x + tp)p$$

для некоторого  $t \in (0, 1)$ .

## Безусловная оптимизация

# Необходимые условия

## ■ Необходимое условие оптимальности первого порядка

Если  $x^*$  - локальный минимум и  $f$  непрерывно дифференцируема в открытой окрестности, то

$$\nabla f(x^*) = 0$$

## Достаточные условия

### Достаточные условия оптимальности второго порядка

Пусть  $\nabla^2 f$  непрерывна в открытой окрестности  $x^*$ , и выполнено

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \nabla^2 f(x^*) \succ 0.$$

Тогда  $x^*$  является строгим локальным минимумом функции  $f$ .

## Контрпример Пеано

Заметим, что если  $\nabla f(x^*) = 0$ ,  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$  (гессиан положительно полуопределён), то мы не можем быть уверены, что  $x^*$  является локальным минимумом.

## Контрпример Пеано

Заметим, что если  $\nabla f(x^*) = 0$ ,  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$  (гессиан положительно полуопределён), то мы не можем быть уверены, что  $x^*$  является локальным минимумом.

$$f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$$

## Контрпример Пеано

Заметим, что если  $\nabla f(x^*) = 0$ ,  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$  (гессиан положительно полуопределён), то мы не можем быть уверены, что  $x^*$  является локальным минимумом.

$$f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$$

Хотя поверхность не имеет локального минимума в начале координат, ее пересечение с любой вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат (плоскость с уравнением  $y = tx$  или  $x = 0$ ) является кривой, которая имеет локальный минимум в начале координат.

Другими словами, если точка начинает движение в начале координат  $(0, 0)$  вдоль любой прямой линии, то значение  $(2x^2 - y)(x^2 - y)$  будет увеличиваться в начале движения. Тем не менее,  $(0, 0)$  не является локальным минимумом функции, потому что движение вдоль параболы, такой как  $y = \sqrt{2}x^2$ , приведет к уменьшению значения функции.

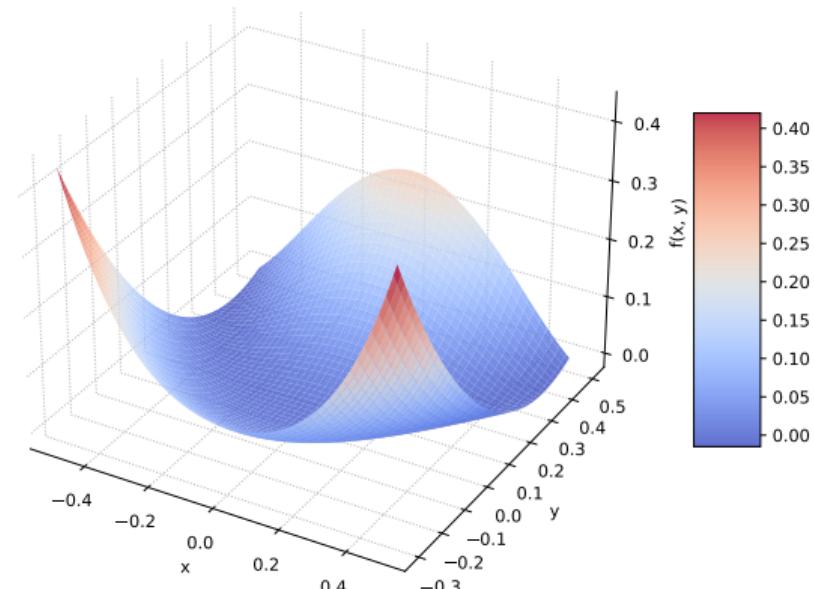
## Контрпример Пеано

Заметим, что если  $\nabla f(x^*) = 0$ ,  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$  (гессиан положительно полуопределен), то мы не можем быть уверены, что  $x^*$  является локальным минимумом.

$$f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$$

Хотя поверхность не имеет локального минимума в начале координат, ее пересечение с любой вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат (плоскость с уравнением  $y = mx$  или  $x = 0$ ) является кривой, которая имеет локальный минимум в начале координат. Другими словами, если точка начинает движение в начале координат  $(0, 0)$  вдоль любой прямой линии, то значение  $(2x^2 - y)(x^2 - y)$  будет увеличиваться в начале движения. Тем не менее,  $(0, 0)$  не является локальным минимумом функции, потому что движение вдоль параболы, такой как  $y = \sqrt{2}x^2$ , приведет к уменьшению значения функции.

Non-convex PL function



## Условная оптимизация

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым  
направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  
если малые шаги вдоль  $d$  не выводят  
нас за пределы  $S$ .

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

1. Тогда для любого допустимого направления  $d \in \mathbb{R}^n$  в  $x^*$  выполняется  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ .

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

1. Тогда для любого допустимого направления  $d \in \mathbb{R}^n$  в  $x^*$  выполняется  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ .
2. Если, кроме того,  $S$  выпукло, то

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \forall x \in S.$$

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

1. Тогда для любого допустимого направления  $d \in \mathbb{R}^n$  в  $x^*$  выполняется  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ .
2. Если, кроме того,  $S$  выпукло, то

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \forall x \in S.$$

## Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .

Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

1. Тогда для любого допустимого направления  $d \in \mathbb{R}^n$  в  $x^*$  выполняется  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ .
2. Если, кроме того,  $S$  выпукло, то

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \forall x \in S.$$

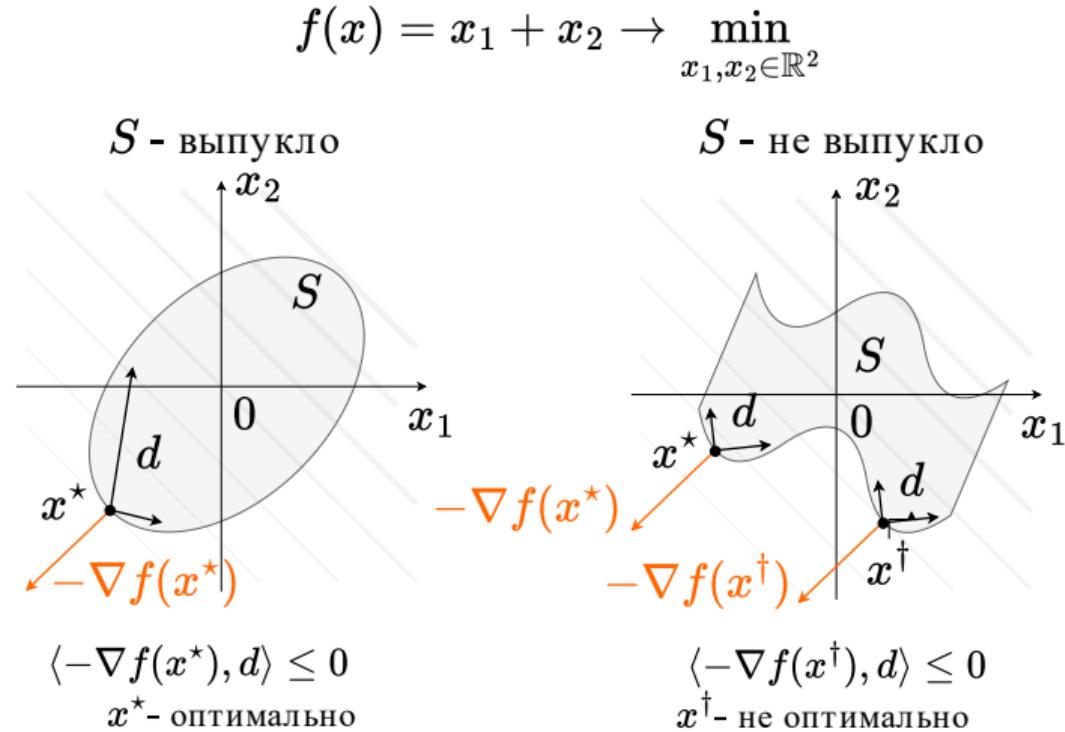


Рис. 4: Общее условие локальной оптимальности первого порядка

## Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

## Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве  $S$ , то:

## Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве  $S$ , то:

- Любой локальный минимум является глобальным.

## Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве  $S$ , то:

- Любой локальный минимум является глобальным.
- Множество локальных минимумов  $S^*$  выпукло.

## Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве  $S$ , то:

- Любой локальный минимум является глобальным.
- Множество локальных минимумов  $S^*$  выпукло.
- Если  $f(x)$  — строго или сильно выпуклая функция, то  $S^*$  содержит только одну точку:  $S^* = \{x^*\}$ .

## Задачи с ограничениями-равенствами

В задачах без ограничений всё довольно интуитивно. В этом разделе мы добавим одно ограничение-равенство, то есть:

## Задачи с ограничениями-равенствами

В задачах без ограничений всё довольно интуитивно. В этом разделе мы добавим одно ограничение-равенство, то есть:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } h(x) &= 0 \end{aligned}$$

## Задачи с ограничениями-равенствами

В задачах без ограничений всё довольно интуитивно. В этом разделе мы добавим одно ограничение-равенство, то есть:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } h(x) &= 0 \end{aligned}$$

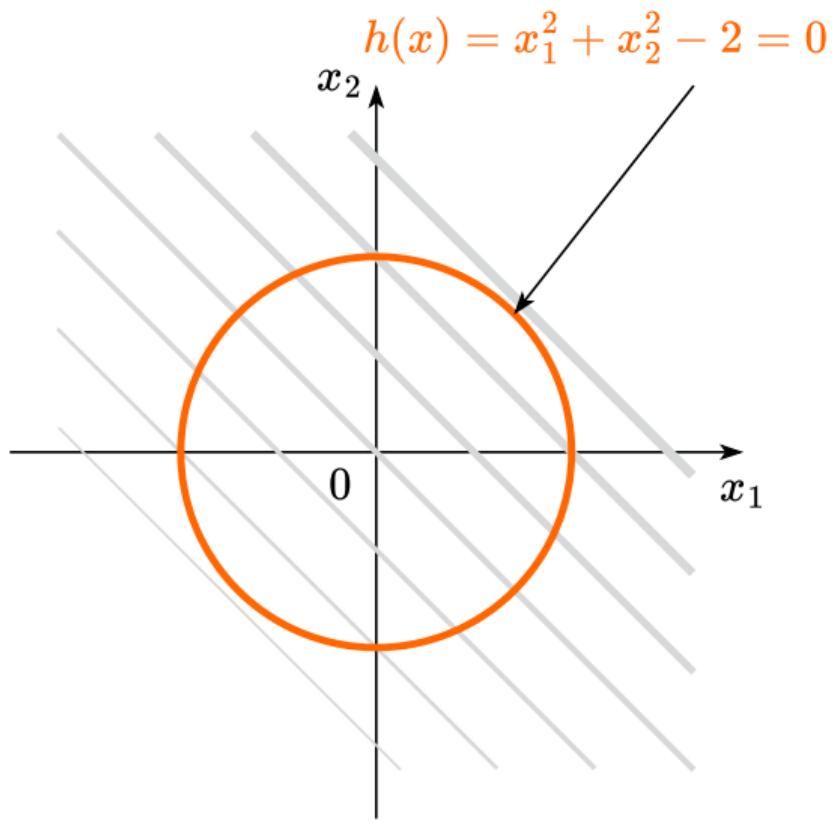
Мы попробуем проиллюстрировать подход к решению этой задачи через простой пример с  $f(x) = x_1 + x_2$  и  $h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ .

## Задачи с ограничениями-равенствами

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2}$$

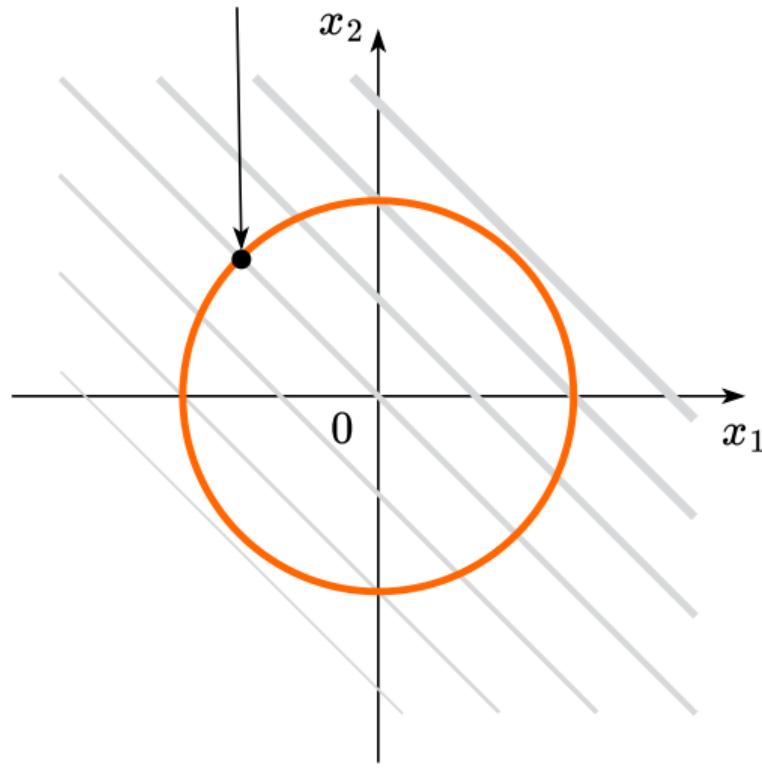


## Задачи с ограничениями-равенствами



## Задачи с ограничениями-равенствами

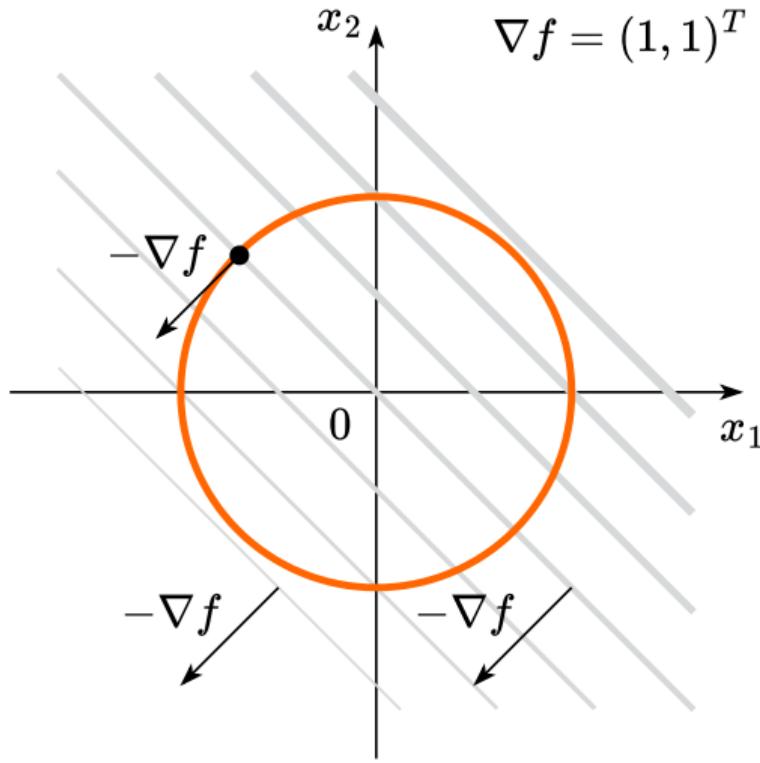
Допустимая точка  $x_F$



## Задачи с ограничениями-равенствами



## Задачи с ограничениями-равенствами



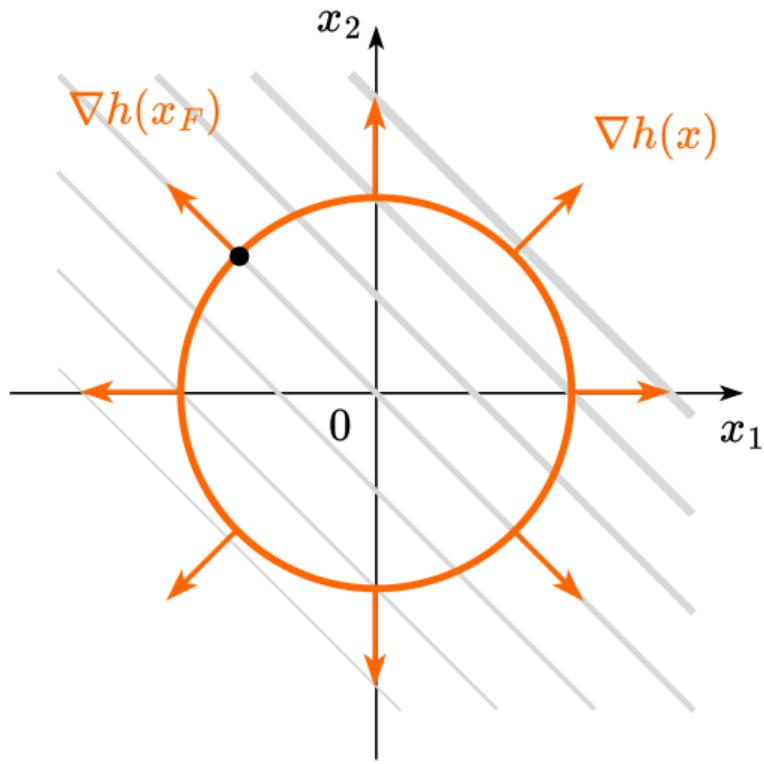
## Задачи с ограничениями-равенствами

Мы хотим:  $f(x_F + \delta x) \leq f(x_F)$



## Задачи с ограничениями-равенствами

$$\nabla h = (2x_1, 2x_2)^T$$



## Задачи с ограничениями-равенствами



## Задачи с ограничениями-равенствами



## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

$$-\nabla f(x) = \nu \nabla h(x)$$

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

$$-\nabla f(x) = \nu \nabla h(x)$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x) \rangle = \langle \delta x, \nu \nabla h(x) \rangle = 0$$

## Задачи с ограничениями-равенствами

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

$$-\nabla f(x) = \nu \nabla h(x)$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x) \rangle = \langle \delta x, \nu \nabla h(x) \rangle = 0$$

Тогда мы достигли такой точки допустимого множества, из которой нельзя уменьшить значение функции при допустимых малых сдвигах. Это и есть условие локального минимума в задаче с ограничением.

## Задачи с ограничениями-равенствами



## Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

## Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует  $\nu^*$ :

## Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует  $\nu^*$ :

### Необходимые условия

Важно отметить, что  $L(x^*, \nu^*) = f(x^*)$ .

## Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует  $\nu^*$ :

Необходимые условия

$\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0$  это мы уже написали выше

Важно отметить, что  $L(x^*, \nu^*) = f(x^*)$ .

## Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует  $\nu^*$ :

Необходимые условия

$\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0$  это мы уже написали выше

$\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0$  бюджетное ограничение

Важно отметить, что  $L(x^*, \nu^*) = f(x^*)$ .

## Задачи с ограничениями-равенствами

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{ECP}$$

$$L(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) = f(x) + \nu^\top h(x)$$

Пусть  $f(x)$  и  $h_i(x)$  дважды дифференцируемы в точке  $x^*$  и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности  $x^*$ . Условия локального минимума для  $x \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{R}^p$  записываются как

Необходимые условия

$$\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0$$

$$\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0$$

## Задача наименьших квадратов

### Example

Поставим задачу оптимизации и решим ее для линейной системы  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  для трех случаев (предполагая, что матрица имеет полный ранг):

- $m < n$

## Задача наименьших квадратов

### Example

Поставим задачу оптимизации и решим ее для линейной системы  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  для трех случаев (предполагая, что матрица имеет полный ранг):

- $m < n$
- $m = n$

## Задача наименьших квадратов

### Example

Поставим задачу оптимизации и решим ее для линейной системы  $Ax = b$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  для трех случаев (предполагая, что матрица имеет полный ранг):

- $m < n$
- $m = n$
- $m > n$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

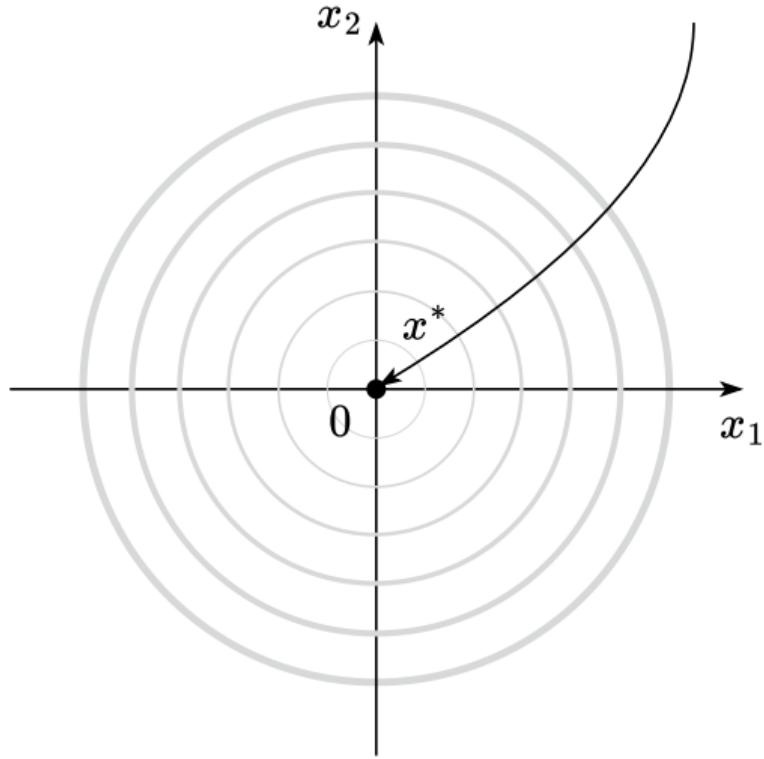
## Пример задачи с ограничениями-неравенствами

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

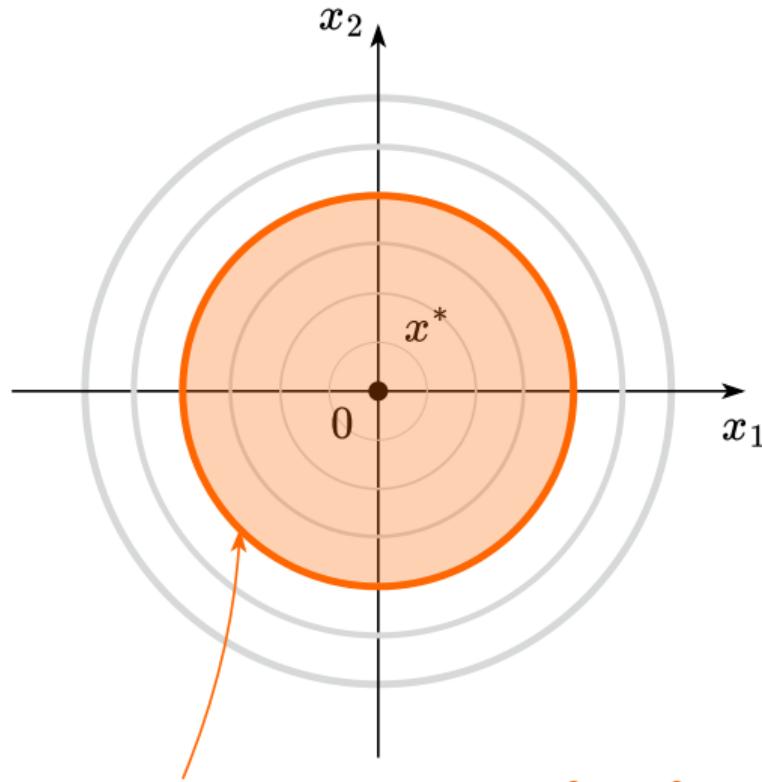
## Задачи с ограничениями-неравенствами

$$x^* = \operatorname{argmin} f(x)$$



$$\text{Линии уровня } f(x) = x_1^2 + x_2^2 = C$$

## Задачи с ограничениями-неравенствами



Бюджетное множество  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

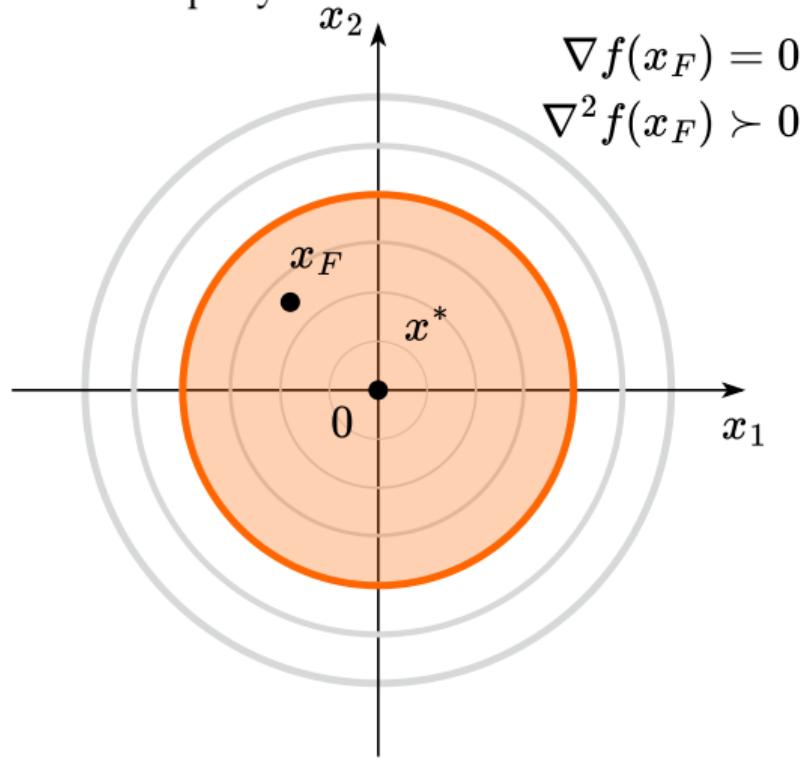
## Задачи с ограничениями-неравенствами

Как понять, что некоторая допустимая  
точка является локальным минимумом?



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Просто! Проверим достаточные условия  
локального экстремума



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Таким образом, если ограничения типа неравенства неактивны в условной задаче, то мы можем решать задачу без ограничений. Однако так бывает не всегда. Рассмотрим второй простой пример.

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = C$$



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Бюджетное множество  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$



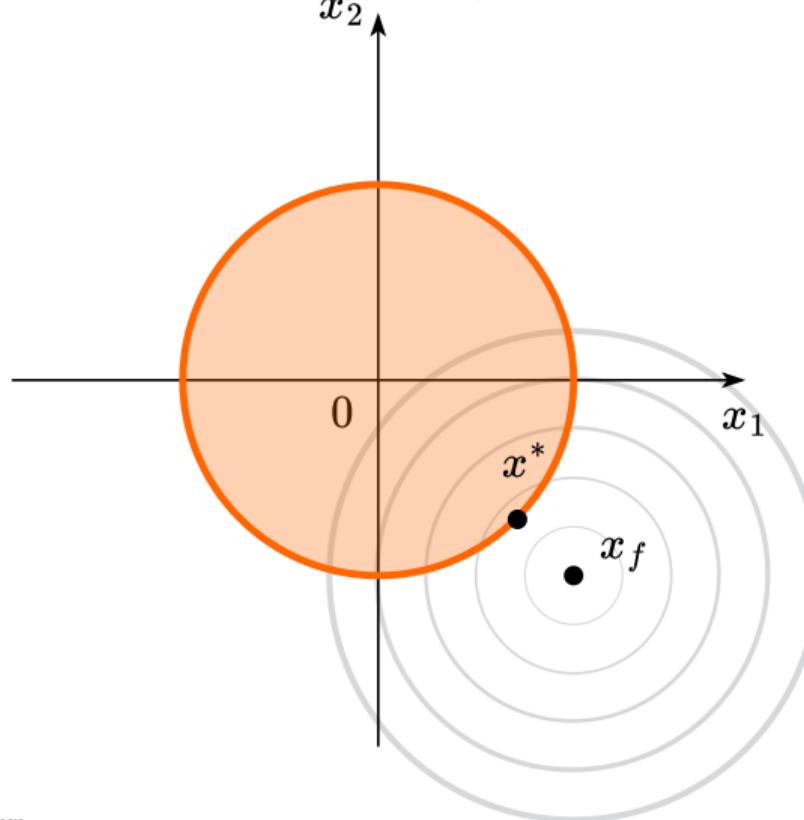
## Задачи с ограничениями-неравенствами

Как понять, что некоторая допустимая  
точка является локальным минимумом?



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Не так просто! Даже градиент  
в оптимальной точке не равен нулю 😭



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Фактически имеем задачу  
с ограничением-равенством

$x_2$

$$g(x^*) = 0$$

0

$x_1$

$x^*$

$x_f$

## Задачи с ограничениями-неравенствами



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Не является локальным минимумом, т.к.  $-\nabla f(x)$  направлен внутрь бюджетного множества



## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

$g(x) \leq 0$  активно.  $g(x^*) = 0$

- $g(x^*) = 0$

## Задачи с ограничениями-неравенствами

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

$g(x) \leq 0$  активно.  $g(x^*) = 0$

- $g(x^*) = 0$
- Необходимые условия:  $-\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*), \lambda > 0$

## Лагранжиан для задач с ограничениями-неравенствами

Объединяя два возможных случая, мы можем записать общие условия для задачи:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.t. } g(x) \leq 0$$

Определим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Классические условия

Каруша-Куна-Таккера для локального минимума  $x^*$ , сформулированные при некоторых условиях регулярности, можно записать следующим образом.

## Лагранжиан для задач с ограничениями-неравенствами

Объединяя два возможных случая, мы можем записать общие условия для задачи:

Если  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует единственный множитель Лагранжа  $\lambda^*$  такой, что:

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

s.t.  $g(x) \leq 0$

- (1)  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$
- (2)  $\lambda^* \geq 0$
- (3)  $\lambda^* g(x^*) = 0$
- (4)  $g(x^*) \leq 0$

Определим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Классические условия

Каруша-Куна-Таккера для локального минимума  $x^*$ , сформулированные при некоторых условиях регулярности, можно записать следующим образом.

## Общая формулировка

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Данная формулировка является общей задачей математического программирования.

Решение включает в себя построение лагранжиана:

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)$$

## Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$

## Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$

## Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$

## Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$
- $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$

## Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$
- $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- $f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$

## Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша-Куна-Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми  $f_0, f_i$  и аффинными  $h_i$ ) существует точка  $x$  такая, что  $h(x) = 0$  и  $f_i(x) < 0$  (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша—Куна—Таккера становятся необходимыми и достаточными.

## Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша-Куна-Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми  $f_0, f_i$  и аффинными  $h_i$ ) существует точка  $x$  такая, что  $h(x) = 0$  и  $f_i(x) < 0$  (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша—Куна—Таккера становятся необходимыми и достаточными.
- **Условие линейной квалификации ограничений.** Если  $f_i$  и  $h_i$  являются аффинными функциями, то никаких других условий не требуется.

## Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша–Куна–Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми  $f_0, f_i$  и аффинными  $h_i$ ) существует точка  $x$  такая, что  $h(x) = 0$  и  $f_i(x) < 0$  (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша—Куна—Таккера становятся необходимыми и достаточными.
- **Условие линейной квалификации ограничений.** Если  $f_i$  и  $h_i$  являются аффинными функциями, то никаких других условий не требуется.
- **Условие линейной независимости ограничений.** Градиенты активных ограничений неравенства и градиенты ограничений равенства линейно независимы в точке  $x^*$ .

## Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша–Куна–Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми  $f_0, f_i$  и аффинными  $h_i$ ) существует точка  $x$  такая, что  $h(x) = 0$  и  $f_i(x) < 0$  (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша—Куна—Таккера становятся необходимыми и достаточными.
- **Условие линейной квалификации ограничений.** Если  $f_i$  и  $h_i$  являются аффинными функциями, то никаких других условий не требуется.
- **Условие линейной независимости ограничений.** Градиенты активных ограничений неравенства и градиенты ограничений равенства линейно независимы в точке  $x^*$ .
- Для других примеров см. [wiki](#).

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

$$L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)$$

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

$$L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)$$

Производная  $L$  по  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \nu \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}$$

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

$$L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)$$

Производная  $L$  по  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \nu \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad \nu = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

## Пример. Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

$$L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)$$

Производная  $L$  по  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \nu \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad \nu = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0$

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0$

### Question

Решите систему выше за  $O(n \log n)$ .

## Пример. Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0.$$

### Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top 1 - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top 1 = 1, \quad x \geq 0$

#### Question

Решите систему выше за  $O(n \log n)$ .

#### Question

Решите систему выше за  $O(n)$ .

## Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.

## Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.
- Однострочное доказательство ККТ

## Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.
- Однострочное доказательство ККТ
- О втором порядке оптимальности для задач оптимизации с ограничениями неравенства

## Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.
- Однострочное доказательство ККТ
- О втором порядке оптимальности для задач оптимизации с ограничениями неравенства
- О втором порядке оптимальности в нелинейной оптимизации

## Ссылки

- Лекция по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.
- Однострочное доказательство ККТ
- О втором порядке оптимальности для задач оптимизации с ограничениями неравенства
- О втором порядке оптимальности в нелинейной оптимизации
- Численная оптимизация by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright.