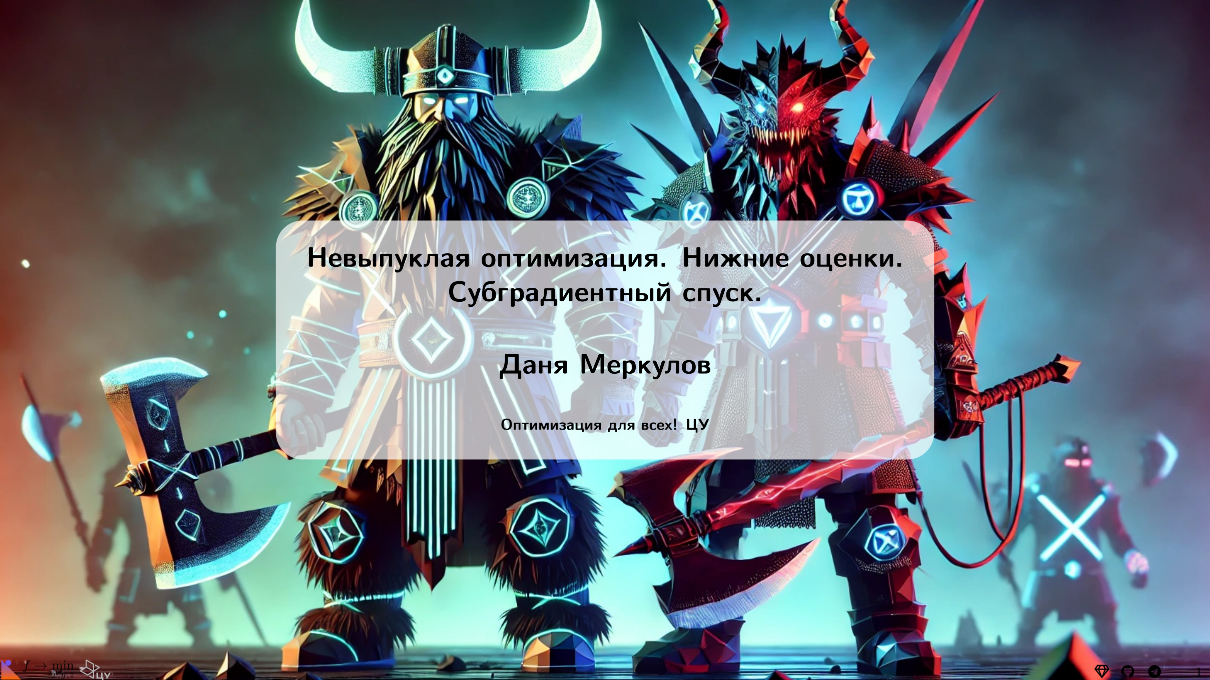


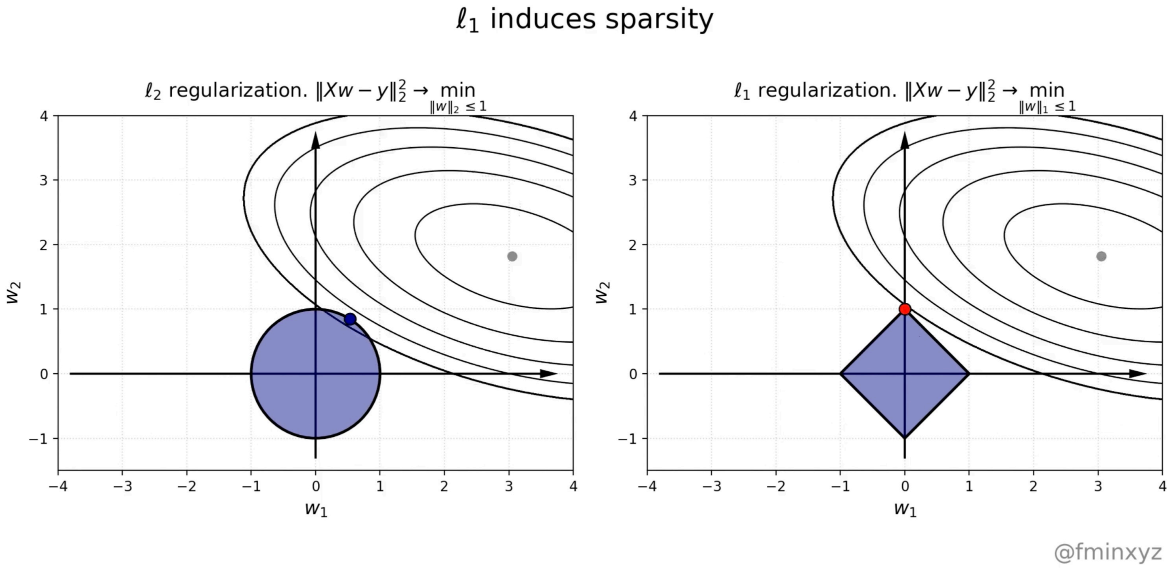
Невыпуклая оптимизация. Нижние оценки. Субградиентный спуск.

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

Негладкие задачи

Задача наименьших квадратов с ℓ_1- регуляризацией



Нормы не являются гладкими

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),
$$

Рассмотрим классическую выпуклую задачу оптимизации. Мы предполагаем, что $f(x)$ является выпуклой функцией, но теперь мы не требуем гладкости.

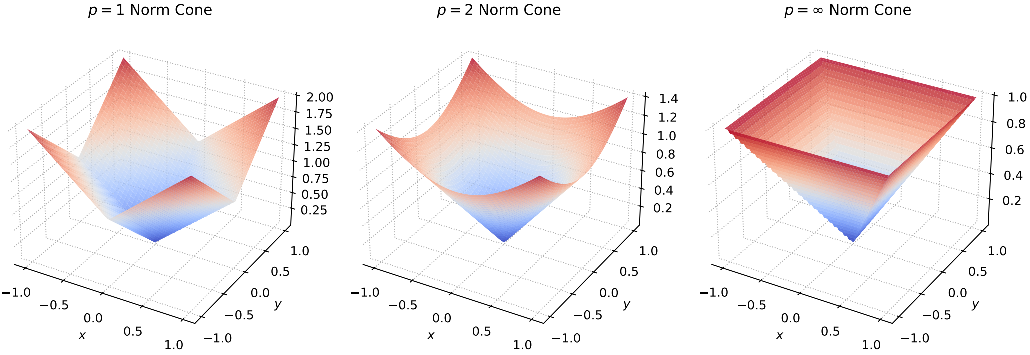


Рис. 1: Нормы конусов для разных p — нормы не являются гладкими

Пример Вульфа

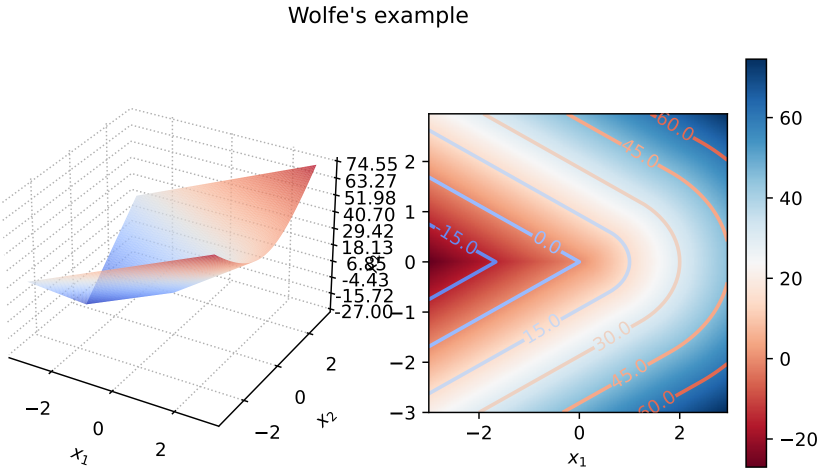


Рис. 2: Пример Вульфа. Открыть в Colab

Вычисление субградиента

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

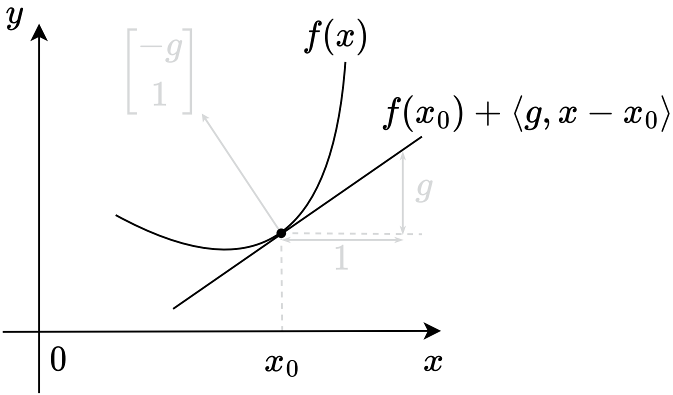


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

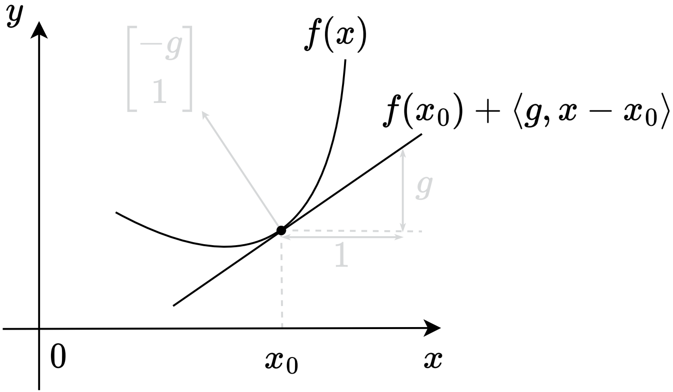


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

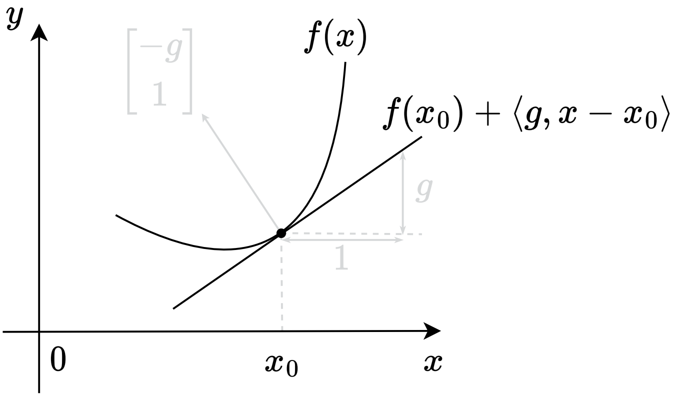


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$
f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle
$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

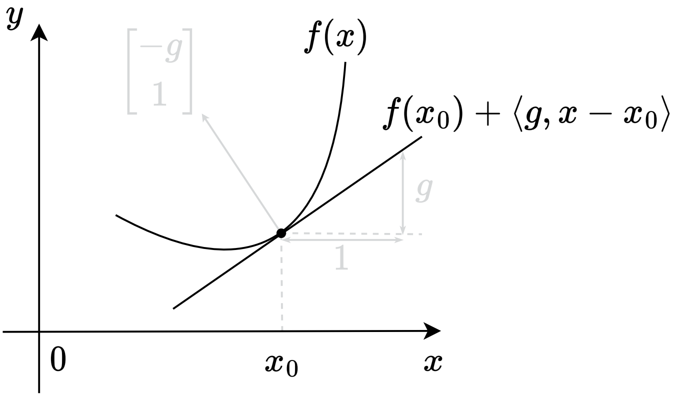


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка выпуклых функций

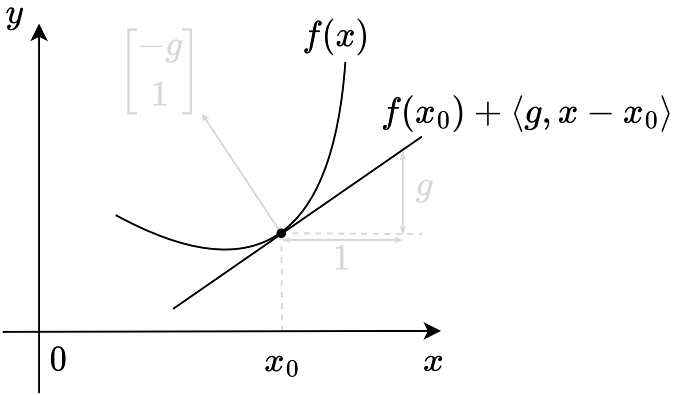


Рис. 3: Линейная аппроксимация Тейлора служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство непрерывной выпуклой функции $f(x)$ заключается в том, что для любой выбранной точки x_0 для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$
f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle
$$

для некоторого вектора g, т.е. касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы не хотим потерять такое удобное свойство.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

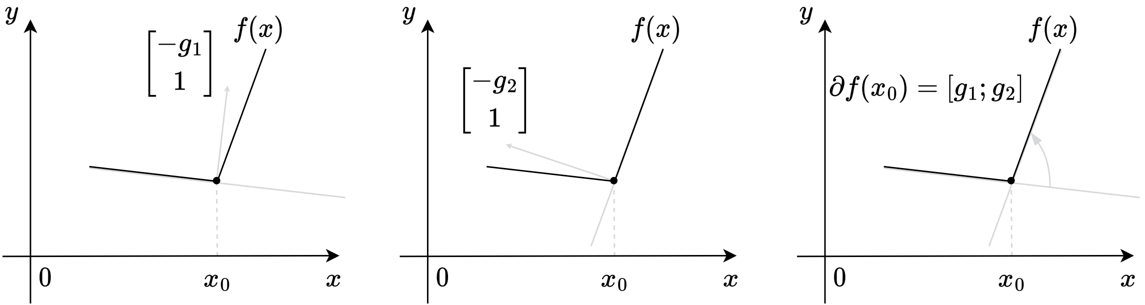


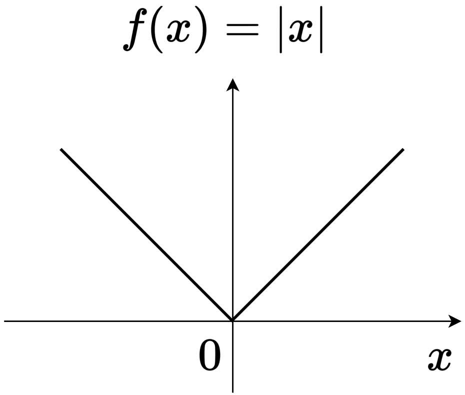
Рис. 4: Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

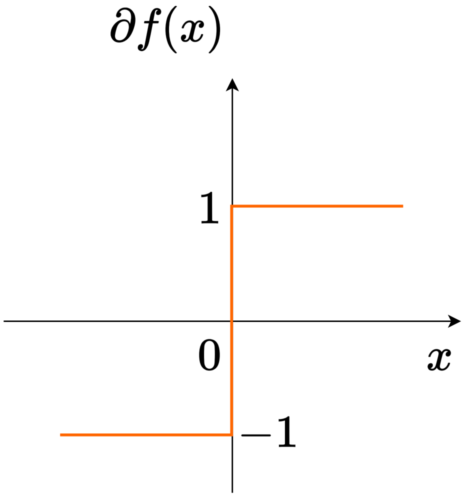
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$





Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$
f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle
$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \mathbf{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$ либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$ отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 является внутренней точкой множества S, существует $\delta > 0$ такое, что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \to 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \to 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v\rangle \geq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = -\frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$.

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \geq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$
v = -\frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},
$$

   которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$.
3. Более того, если функция f выпукла, то согласно дифференциальному условию выпуклости $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$ для всех $x \in S$. Но по определению это означает, что $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$.

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Роккафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i, \; i = \overline{1,n}$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathbf{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Роккафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = \overline{1,n}$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathbf{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x), \quad a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$
\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).
$$

Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n,\ x_0 \in S$, и поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$
\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv}\left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},
$$

$$
I(x) = \{ i \in [1:m] : f_i(x) = f(x) \}
$$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha\partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T\partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$, для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция
- $z \in \partial f(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in \partial f^*(z)$.

Субградиентный метод

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0 если $\forall x \in S$:

$$
f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle
$$

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0 если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея очень проста: заменим градиент $\nabla f(x_k)$ в методе градиентного спуска субградиентом g_k в точке x_k:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k, $g_k \in \partial f(x_k)$

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0 если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея очень проста: заменим градиент $\nabla f(x_k)$ в методе градиентного спуска субградиентом g_k в точке x_k:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k, $g_k \in \partial f(x_k)$

Заметьте, что метод субградиента не гарантирует убывание: отрицательный субградиент может не быть направлением убывания, а выбор длины шага может привести к тому, что $f(x_{k+1}) > f(x_k)$.

Поэтому мы обычно отслеживаем лучшее значение целевой функции

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1,\ldots,k} f(x_i).$$

Сходимость

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

- Запишем, насколько близко мы подошли к оптимуму $x^* = \text{arg} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \text{arg} f^*$ на последней итерации:

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

- Запишем, насколько близко мы подошли к оптимуму $x^* = \text{arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \text{arg} f^*$ на последней итерации:
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

- Запишем, насколько близко мы подошли к оптимуму $x^* = \text{arg} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \text{arg} f^*$ на последней итерации:
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.
- Дополнительно предположим, что $\|g_k\|^2 \leq G^2$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем полученное неравенство для $k = 0, \ldots, T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

- Запишем, насколько близко мы подошли к оптимуму $x^* = \text{arg} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \text{arg} f^*$ на последней итерации:
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.
- Дополнительно предположим, что $\|g_k\|^2 \leq G^2$
- Используем обозначение $R = \|x_0 - x^*\|_2$

Сходимость

- Наконец, заметим:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

Сходимость

- Наконец, заметим:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Которое приводит к основному неравенству:

$$\boxed{f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k}}$$

Сходимость

- Наконец, заметим:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Которое приводит к основному неравенству:

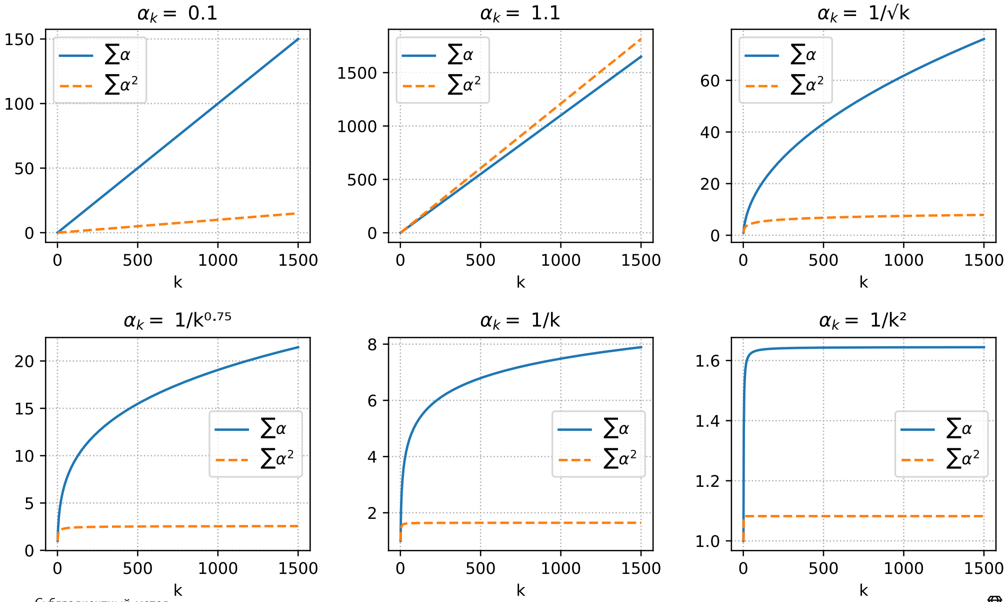
$$\boxed{f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k}}$$

- Из этого мы можем видеть, что если стратегия шага такая, что

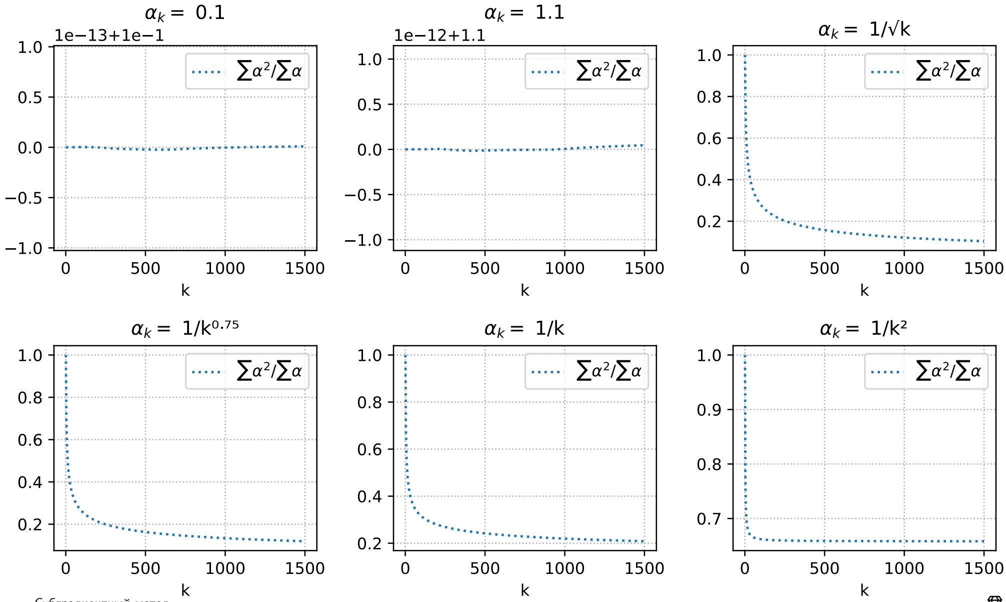
$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty,$$

то метод субградиента сходится (шаг должен быть убывающим, но не слишком быстрым).

Разные стратегии шага



Разные стратегии шага



Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, метод субградиента удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2}G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом, первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2
$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом, первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Некоторые варианты метода субградиента (например, убывающие, но несуммируемые длины шагов) работают даже когда предположение $\|g_k\|_2 \leq G$ не выполняется; см. [1] или [2].

[1] B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

[2] N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2
$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом, первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Некоторые варианты метода субградиента (например, убывающие, но несуммируемые длины шагов) работают даже когда предположение $\|g_k\|_2 \leq G$ не выполняется; см. [1] или [2].
- Найдем оптимальный шаг α который минимизирует правую часть неравенства.

[1] B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

[2] N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}
$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Интересно отметить, что если мы хотим найти оптимальные шаги для всей последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, мы получим тот же результат.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Интересно отметить, что если мы хотим найти оптимальные шаги для всей последовательности $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$, мы получим тот же результат.
- Почему? Потому что правая часть является выпуклой и **симметричной** функцией $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$, т.е. $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}
$$

- Заметим, что для метода субградиента, мы обычно не можем использовать норму субградиента как критерий остановки (представьте $f(x) = |x|$). Существуют более продвинутые варианты критериев остановки, но из-за очень медленной сходимости обычно просто задают максимальное число итераций.

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2+\ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1 + \ln T);
$$

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2+\ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln T); \qquad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \frac{R}{G} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{T+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{T+1}-1).
$$

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1 + \ln T); \qquad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \frac{R}{G} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{T+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{T+1} - 1).
$$

2. Мы отбрасываем последний -1 в верхней оценке выше и используем основное неравенство:

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2+\ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln T); \qquad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \frac{R}{G} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{T+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{T+1} - 1).
$$

2. Мы отбрасываем последний -1 в верхней оценке выше и используем основное неравенство:

$$
f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k}
$$

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2+\ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln T); \qquad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \frac{R}{G} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{T+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{T+1} - 1).
$$

2. Мы отбрасываем последний -1 в верхней оценке выше и используем основное неравенство:

$$
f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k} \leq \frac{R^2 + R^2(1+\ln T)}{4\frac{R}{G}(\sqrt{T+1})}
$$

Оценки сходимости. Негладкий выпуклый случай. Практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, метод субградиента удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

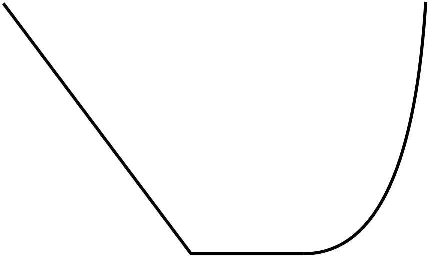
1. Оценка сумм:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{k} \leq \frac{R^2}{G^2}(1 + \ln T); \qquad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \frac{R}{G} \sum_{k=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{T+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{T+1} - 1).
$$

2. Мы отбрасываем последний -1 в верхней оценке выше и используем основное неравенство:

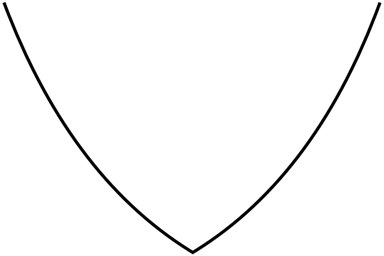
$$
f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln T)}{4\frac{R}{G}(\sqrt{T+1})} = \frac{GR(2 + \ln T)}{4\sqrt{T+1}}
$$

Негладкий сильно выпуклый случай



Негладкая

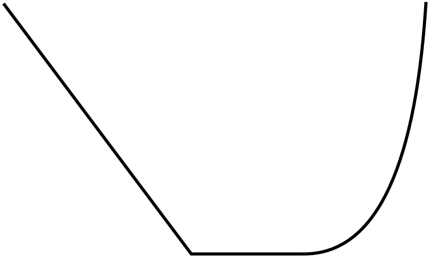
Выпуклая



Негладкая

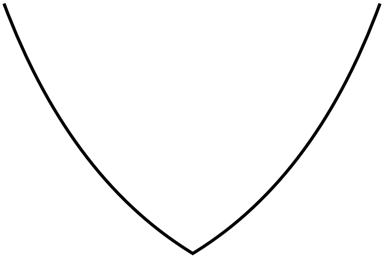
μ - сильно выпуклая

Негладкий сильно выпуклый случай



Негладкая
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая
μ - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1-\lambda)y - x\rangle \quad \to \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) - (1-\lambda)\langle g, x - y\rangle.$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1-\lambda)y - x \rangle \quad \to \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) - (1-\lambda)\langle g, x - y \rangle.$$

3. Таким образом,

$$f(x) - (1-\lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1-\lambda)f(x) \leq (1-\lambda)f(y) + (1-\lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x-y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0,1)$, из μ-сильной выпуклости,
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$
2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1-\lambda)y - x\rangle \quad \to \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) - (1-\lambda)\langle g, x-y\rangle.$$
3. Таким образом,
$$f(x) - (1-\lambda)\langle g, x-y\rangle \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$
$$(1-\lambda)f(x) \leq (1-\lambda)f(y) + (1-\lambda)\langle g, x-y\rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2$$
$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x-y\rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x-y\|^2$$
4. Переходя к пределу при $\lambda \to 1^-$ получаем

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle
\end{aligned}$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2
\end{aligned}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k\langle g_k, x_k - x^*\rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k\mu\|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k\left(f(x_k) - f(x^*)\right)
\end{aligned}$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) \\
2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай.

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* и ограниченными субградиентами $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, метод субградиента гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) \\
2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{1 - \mu\alpha_k}{2\alpha_k}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2}\|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
\begin{aligned}
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2 \\
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2 \\
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2
$$

$$
k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k \left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right)
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2T}{\mu}
$$

$$
\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2T}{\mu}
$$

$$
f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*) \leq \frac{G^2T}{\mu\sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2T}{\mu T(T-1)}
$$

Оценки сходимости. Негладкий сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2
$$

$$
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}
$$

$$
f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \qquad f^{\text{best}}_{k} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

Summary. Метод субградиента

Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые и липшицевые задачи	$\alpha \sim \dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые и липшицевые задачи	$\alpha \sim \dfrac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

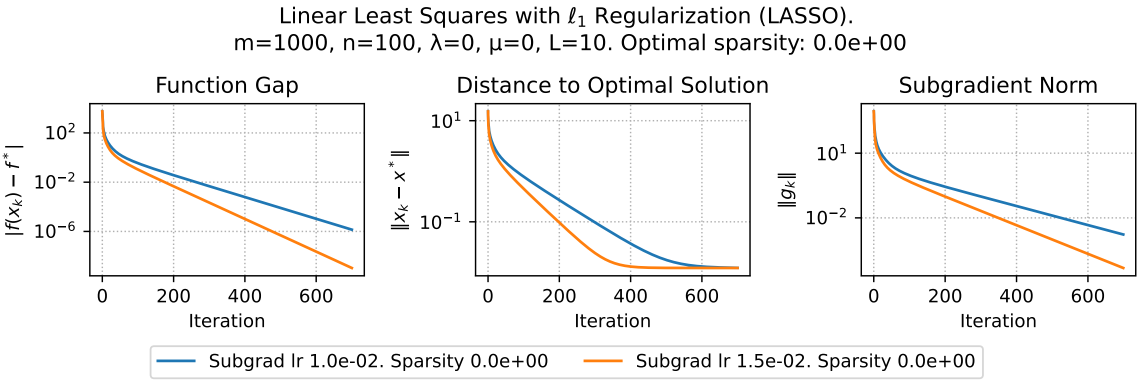


Рис. 6: Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

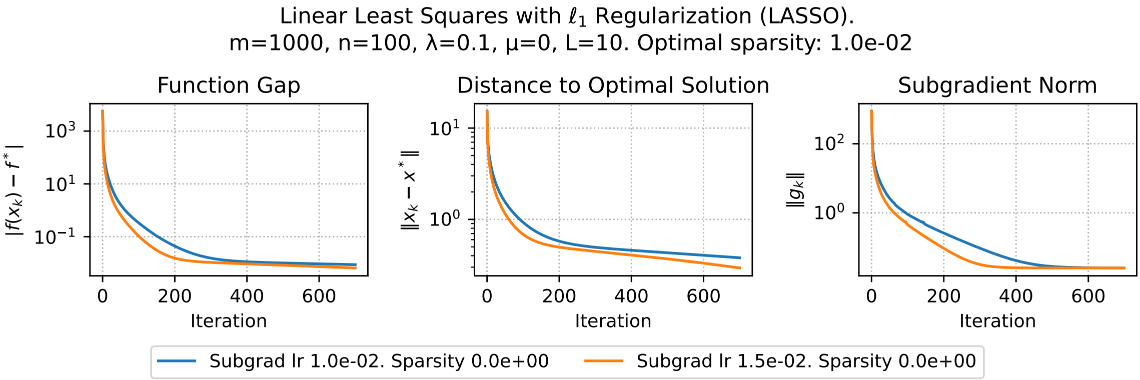


Рис. 7: Негладкий выпуклый случай. Маленькое значение λ приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

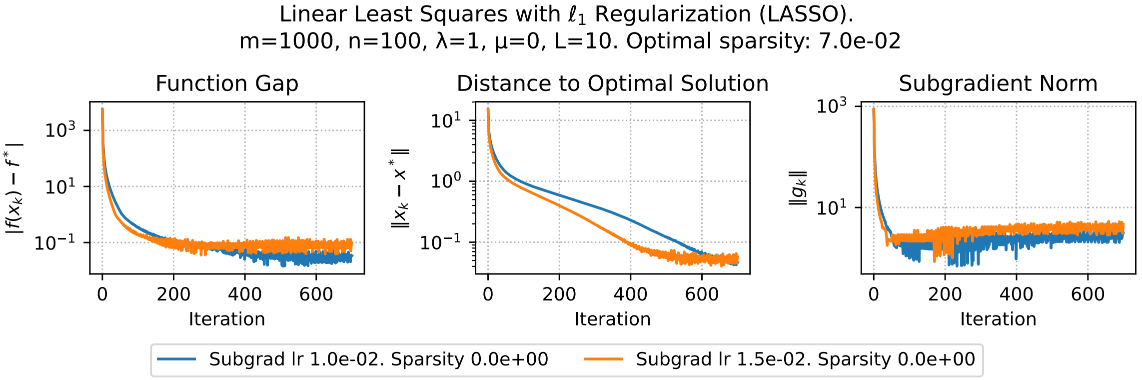


Рис. 8: Негладкий выпуклый случай. При большем значении λ проявляется немонотонность $f(x_k)$. Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

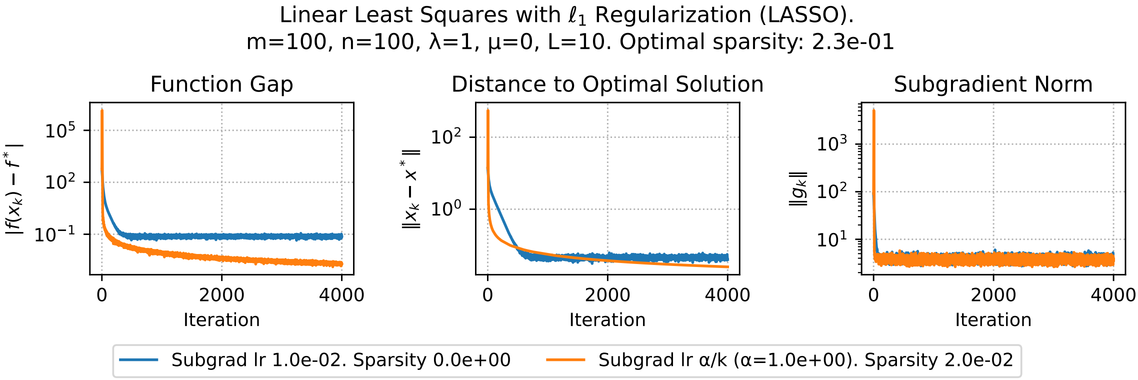


Рис. 9: Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

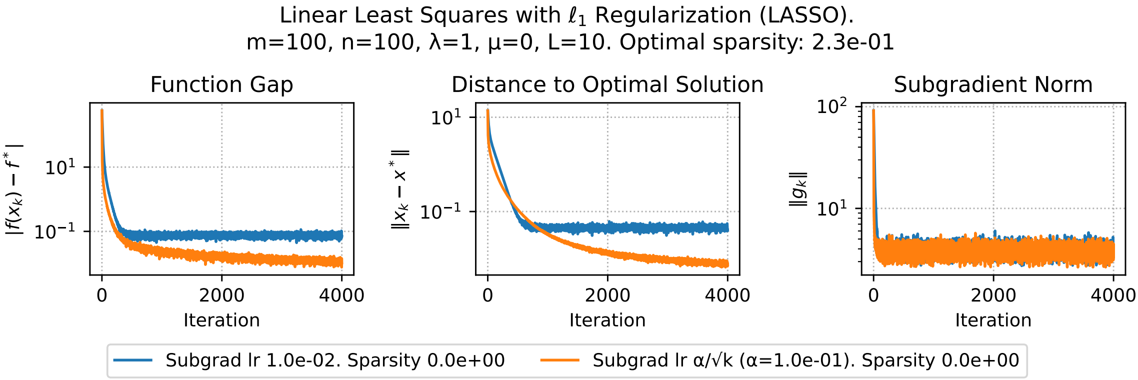


Рис. 10: Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

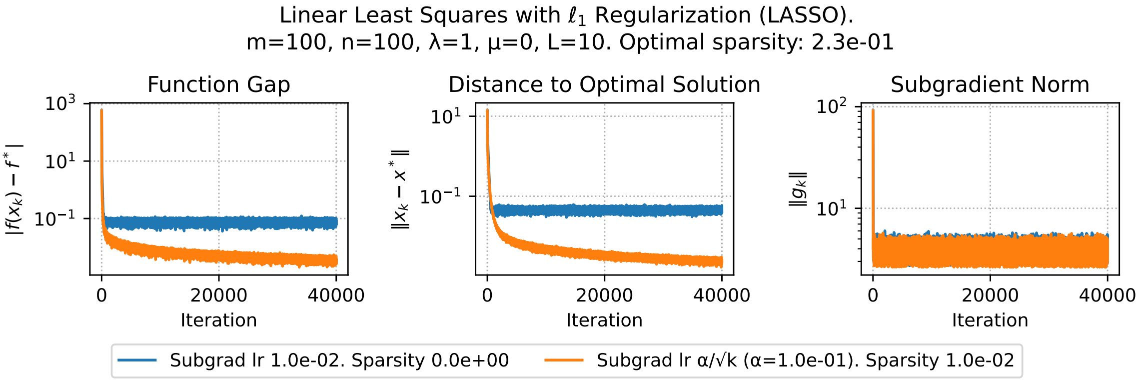


Рис. 11: Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

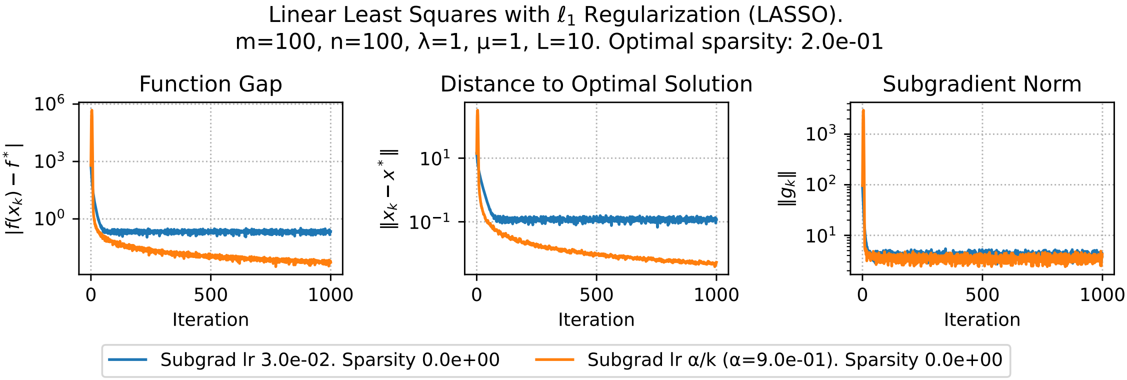


Рис. 12: Негладкий сильно выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{k}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

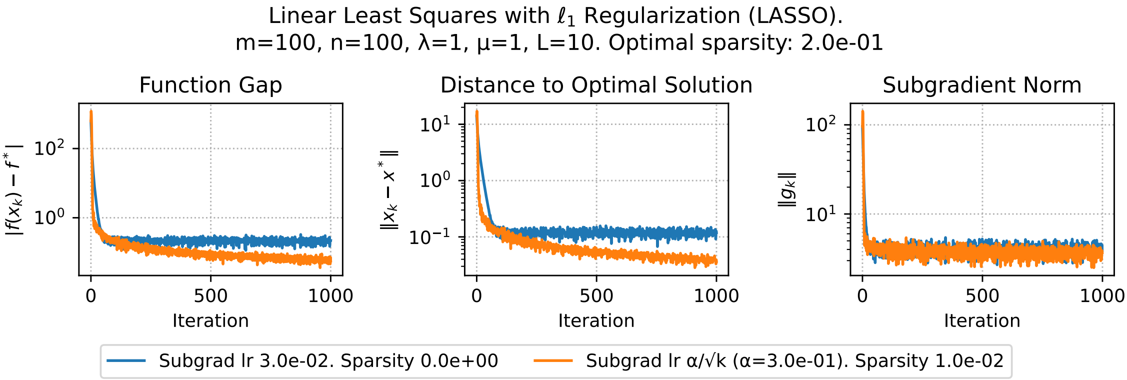


Рис. 13: Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ работает хуже

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

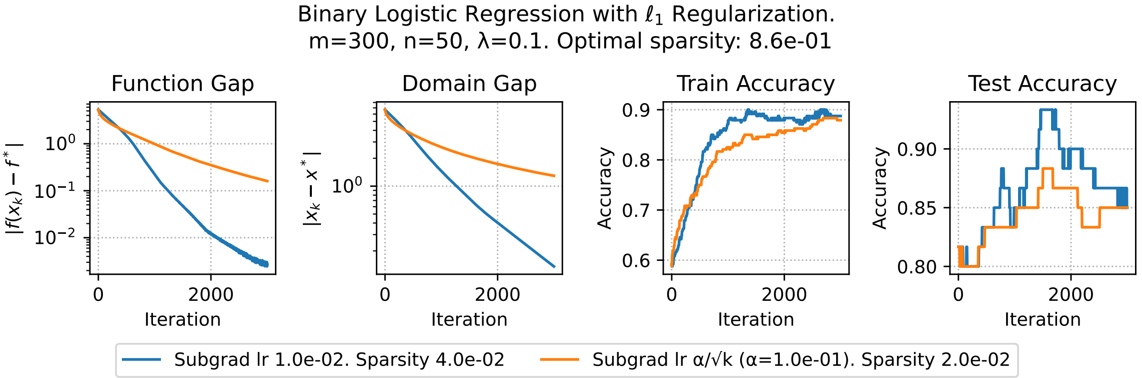


Рис. 14: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

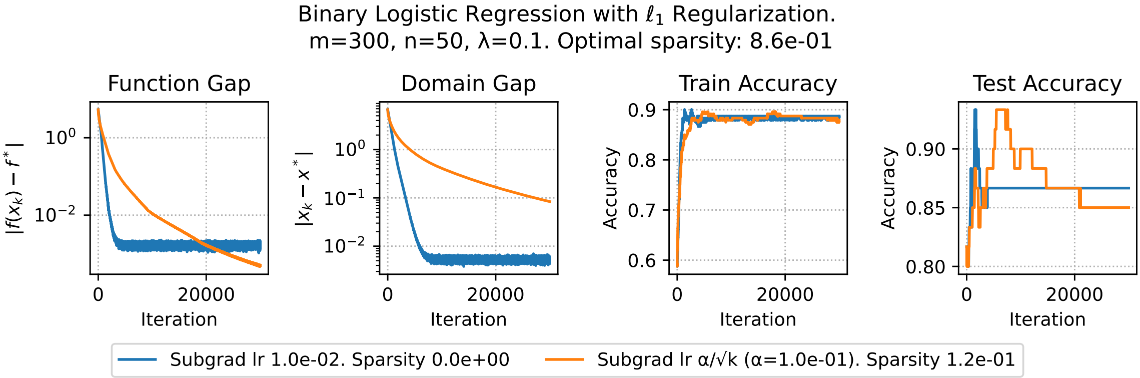


Рис. 15: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

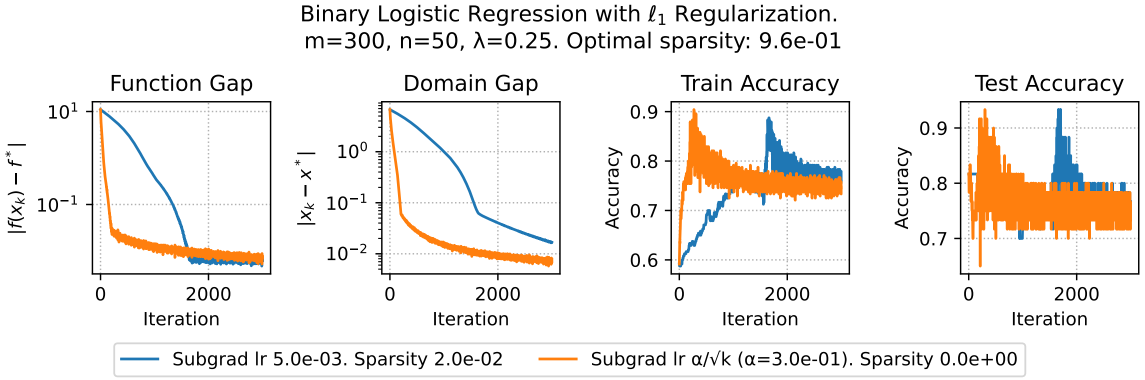


Рис. 16: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

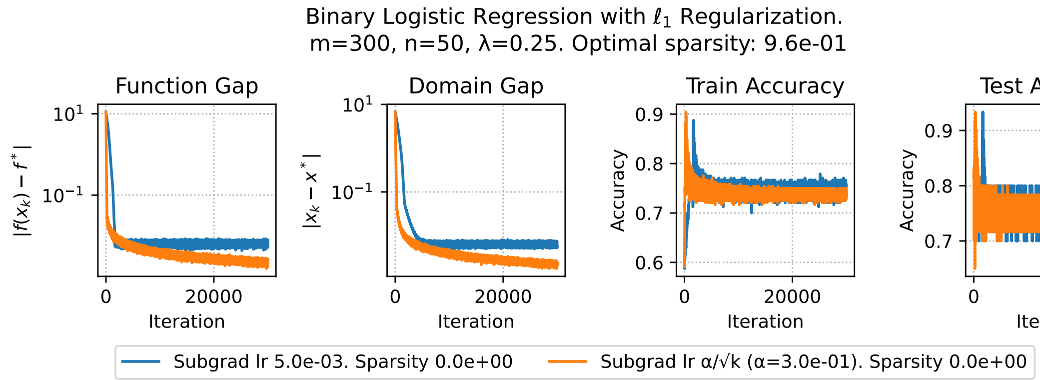


Рис. 17: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1+\exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

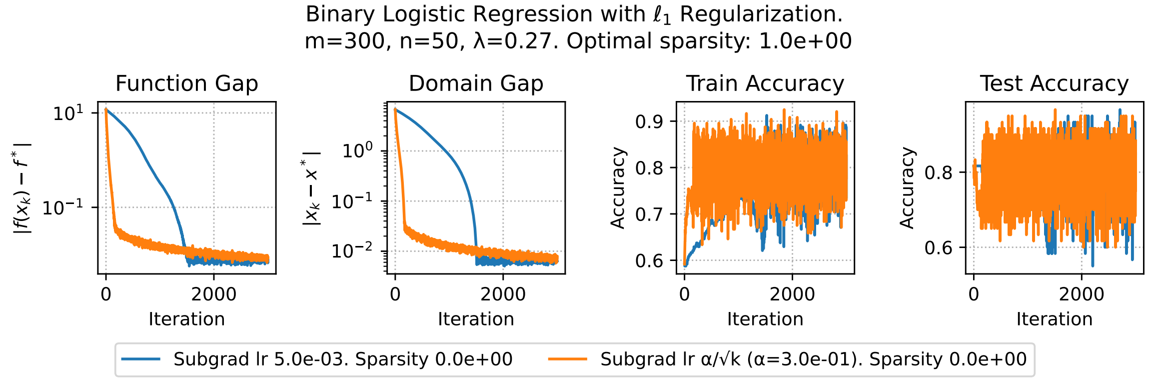


Рис. 18: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

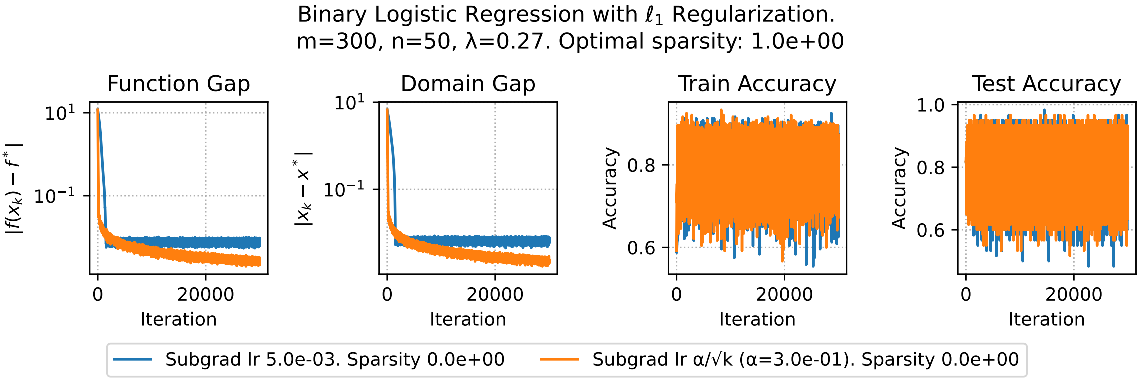


Рис. 19: Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Нижние оценки

Нижние оценки

выпуклые (негладкие)[3]	гладкие (невыпуклые)[4]	гладкие и выпуклые[5]	гладкие и сильно выпуклые (или PL)[1]
$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\dfrac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa}\log\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

[3] Nesterov, Lectures on Convex Optimization
[4] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[5] Nemirovski, Yudin, 1979

Итерация «чёрного ящика»

Итерация градиентного спуска:

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&\ \vdots \\
&= x^0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})
\end{aligned}
$$

Итерация «чёрного ящика»

Итерация градиентного спуска:

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&\ \vdots \\
&= x^0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})
\end{aligned}
$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$
\begin{aligned}
&x^{k+1} \in x^0 + \text{span}\left\{\nabla f(x^0), \nabla f(x^1), \ldots, \nabla f(x^k)\right\} && f \text{ - smooth} \\
&x^{k+1} \in x^0 + \text{span}\left\{g_0, g_1, \ldots, g_k\right\}\text{, where } g_i \in \partial f(x^i) && f \text{ - non-smooth}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Итерация «чёрного ящика»

Итерация градиентного спуска:

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\
&\ \vdots \\
&= x^0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})
\end{aligned}
$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &\in x^0 + \text{span}\left\{\nabla f(x^0), \nabla f(x^1), \ldots, \nabla f(x^k)\right\} & f \text{ - smooth} \\
x^{k+1} &\in x^0 + \text{span}\left\{g_0, g_1, \ldots, g_k\right\} \text{, where } g_i \in \partial f(x^i) & f \text{ - non-smooth}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Чтобы построить нижнюю оценку, нужно найти функцию f из соответствующего класса так, чтобы любой метод из семейства Уравнение 1 сходился не быстрее этой нижней оценки.

Негладкий выпуклый случай

Theorem

Существует функция f, которая является G-липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{i \in [1,k]} f(x^i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Негладкий выпуклый случай

Theorem

Существует функция f, которая является G-липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{i \in [1,k]} f(x^i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Идея доказательства: построить такую функцию f, что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$\text{span}\{g_0, g_1, \ldots, g_k\} \subset \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_i\}$$

где e_i — i-й стандартный базисный вектор. На итерации $k \leq n$, есть по крайней мере $n-k$ координат x, равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Основные свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$
f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,
$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Основные свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Основные свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Основные свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x:

$$\begin{aligned}
\partial f(x) &= \partial\left(\beta \max_{i \in [1,k]} x[i]\right) + \partial\left(\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\right) \\
&= \beta \partial\left(\max_{i \in [1,k]} x[i]\right) + \alpha x \\
&= \beta \text{conv}\left\{e_i \mid i : x[i] = \max_j x[j]\right\} + \alpha x
\end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{i \in [1,k]} x[i] + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x[1:k]$ — первые k компонент x.

Основные свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x:

$$\begin{aligned}\partial f(x) &= \partial\left(\beta \max_{i \in [1,k]} x[i]\right) + \partial\left(\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\right) \\ &= \beta\partial\left(\max_{i \in [1,k]} x[i]\right) + \alpha x \\ &= \beta \text{conv}\left\{e_i \mid i : x[i] = \max_j x[j]\right\} + \alpha x\end{aligned}$$

Легко видеть, что если $g \in \partial f(x)$ и $\|x\| \leq R$, то

$$\|g\| \leq \alpha R + \beta$$

Таким образом, f является $\alpha R + \beta$-липшицевой на $B(R)$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$
\alpha x + \gamma e_i,
$$

где i — *первая* координата для которой $x[i] = \max_{1 \leq j \leq k} x[j]$.

- Мы обеспечиваем $\|x^0\| \leq R$ начиная с $x^0 = 0$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *первая* координата для которой $x[i] = \max_{1 \leq j \leq k} x[j]$.

- Мы обеспечиваем $\|x^0\| \leq R$ начиная с $x^0 = 0$.
- При запросе оракула в $x^0 = 0$, он возвращает e_1. Следовательно, x^1 должен лежать на прямой, порождённой e_1.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *первая* координата для которой $x[i] = \max_{1 \leq j \leq k} x[j]$.

- Мы обеспечиваем $\|x^0\| \leq R$ начиная с $x^0 = 0$.
- При запросе оракула в $x^0 = 0$, он возвращает e_1. Следовательно, x^1 должен лежать на прямой, порождённой e_1.
- По индукции, показывается, что для всех i, итерация x^i лежит в линейной оболочке $\{e_1, \ldots, e_i\}$. В частности, для $i \leq k$, $k+1$-я координата x_i равна нулю и вследствие структуры $f(x)$:

$$f(x^i) \geq 0.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Остаётся вычислить минимальное значение f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$ как

$$y[i] = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y[i] = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Остаётся вычислить минимальное значение f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$ как

$$
y[i] = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y[i] = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.
$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$
\begin{aligned}
\partial f(y) &= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{ e_i \mid i : y[i] = \max_j y[j] \right\} \\
&= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{ e_i \mid i : y[i] = 0 \right\} \\
0 &\in \partial f(y).
\end{aligned}
$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Остаётся вычислить минимальное значение f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$ как

$$y[i] = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y[i] = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{e_i \mid i : y[i] = \max_j y[j]\right\} \\ &= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{e_i \mid i : y[i] = 0\right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Остаётся вычислить минимальное значение f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$ как

$$y[i] = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y[i] = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{ e_i \mid i : y[i] = \max_j y[j] \right\} \\ &= \alpha y + \beta \text{conv}\left\{ e_i \mid i : y[i] = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

- Теперь мы получаем:

$$f(x^i) - f(x^*) \geq 0 - \left(-\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

У нас есть: $f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, в то время как мы должны доказать, что $\min\limits_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

У нас есть: $f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, в то время как мы должны доказать, что $\min\limits_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$
\alpha = \frac{G}{R}\frac{1}{1+\sqrt{k}} \qquad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}
$$

$$
\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1+\sqrt{k})}
$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$
\min_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}
$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

У нас есть: $f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, в то время как мы должны доказать, что $\min\limits_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R}\frac{1}{1+\sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1+\sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{i \in [1,k]} f(x^i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$

Ссылки

* Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)