

Субградиенты. Негладкие задачи

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 13

Даня Меркулов
Пётр Остроухов

Субградиент. Негладкие задачи.

Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

Повторение основных понятий

Повторение основных понятий



i Основные понятия

Для множества $E \in \mathbb{R}^n$ и функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$:

- Вектор $g \in \mathbb{R}^n$ называется **субградиентом** функции f в точке $x \in E$, если $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

Повторение основных понятий



i Основные понятия

Для множества $E \in \mathbb{R}^n$ и функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$:

- Вектор $g \in \mathbb{R}^n$ называется **субградиентом** функции f в точке $x \in E$, если $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

- Множество $\partial f(x)$ называется **субдифференциалом** функции f в точке $x \in E$, если:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + g^T(y - x) \forall y \in E\}$$

Повторение основных понятий



i Основные понятия

Для множества $E \subset \mathbb{R}^n$ и функции $f : E \rightarrow \mathbb{R}$:

- Вектор $g \in \mathbb{R}^n$ называется **субградиентом** функции f в точке $x \in E$, если $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

- Множество $\partial f(x)$ называется **субдифференциалом** функции f в точке $x \in E$, если:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + g^T(y - x) \forall y \in E\}$$

- $f(\cdot)$ называется **субдифференцируемой** в точке $x \in E$, если $\partial f(x) \neq \emptyset$

Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ субдифференцируема на **выпуклом** подмножестве $S \in E$, то f выпукла на S .

- Обратное, вообще говоря, неверно

Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ субдифференцируема на **выпуклом** подмножестве $S \in E$, то f выпукла на S .

- Обратное, вообще говоря, неверно
- Нет смысла искать субградиент невыпуклой функции.

Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

- 1) Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и дифференцируема в точке $x \in \text{int } E$, то $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
- 2) Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и для $x \in \text{int } E$ $\partial f(x) = \{s\}$, то f дифференцируема в точке x и $\nabla f(x) = s$

Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

- 1) Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и дифференцируема в точке $x \in \text{int } E$, то $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
- 2) Если $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла и для $x \in \text{int } E$ $\partial f(x) = \{s\}$, то f дифференцируема в точке x и $\nabla f(x) = s$

- Искать субдифференциал дифференцируемой функции — это излишество.

Субградиентный спуск



Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь $g_k \in \partial f(x_k)$ и $\alpha_k > 0$. Существует несколько известных стратегий выбора α_k для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$ — фиксированный (для G -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку $\frac{G^2 \alpha}{2}$ между f^* и f_k)

Субградиентный спуск



Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь $g_k \in \partial f(x_k)$ и $\alpha_k > 0$. Существует несколько известных стратегий выбора α_k для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$ — фиксированный (для G -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку $\frac{G^2 \alpha}{2}$ между f^* и f_k)
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ — постоянная длина шага ($\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$)

Субградиентный спуск



Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь $g_k \in \partial f(x_k)$ и $\alpha_k > 0$. Существует несколько известных стратегий выбора α_k для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$ — фиксированный (для G -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку $\frac{G^2\alpha}{2}$ между f^* и f_k)
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ — постоянная длина шага ($\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$)
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ — квадратично суммируемая, но не суммируемая

Субградиентный спуск



Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь $g_k \in \partial f(x_k)$ и $\alpha_k > 0$. Существует несколько известных стратегий выбора α_k для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$ — фиксированный (для G -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку $\frac{G^2\alpha}{2}$ между f^* и f_k)
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ — постоянная длина шага ($\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$)
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ — квадратично суммируемая, но не суммируемая
- $\alpha_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ — несуммируемая убывающая

Субградиентный спуск



Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь $g_k \in \partial f(x_k)$ и $\alpha_k > 0$. Существует несколько известных стратегий выбора α_k для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$ — фиксированный (для G -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку $\frac{G^2\alpha}{2}$ между f^* и f_k)
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$ — постоянная длина шага ($\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$)
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ — квадратично суммируемая, но не суммируемая
- $\alpha_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$ — несуммируемая убывающая
- $\alpha_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\|g_k\|_2^2}$ — шаг Поляка

Задача 1



i Question

Найти субдифференциал функции

$$f(x) = -\sqrt{x}$$

Правила субдифференцирования



$$1) \quad f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

Правила субдифференцирования



1) $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2) $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

Правила субдифференцирования

$$1) f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

$$2) f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

$$3) T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

Правила субдифференцирования

$$1) f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

$$2) f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

$$3) T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

$$4) f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m \mid f_i(x) = f(x)\}$$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

Правила субдифференцирования

$$1) f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

$$2) f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

$$3) T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

$$4) f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m \mid f_i(x) = f(x)\}$$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

Правила субдифференцирования

$$1) f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

$$2) f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

$$3) T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

$$4) f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m \mid f_i(x) = f(x)\}$$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv} \left(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x) \right)$$

💡 Когда достигается равенство?

Если вышеупомянутые функции выпуклы и x является внутренней точкой, то все неравенства превращаются в равенства.

Задача 2



Question

Найти субдифференциал функции $h(x)$, если

$$h(x) = \begin{cases} f(x) \equiv -\sqrt{x} & \text{при } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{при } x \leq 0 \end{cases}$$

Задача 3



i Question

1) Найти субдифференциал функции $f(x) = \|Ax - b\|_1$;

Задача 3



i Question

- 1) Найти субдифференциал функции $f(x) = \|Ax - b\|_1$;
- 2) Для задачи $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \rightarrow \min_x$ сказать, какие значения λ приводят к $x_{opt} = 0$

Задача 4



i Exercise

Мы хотим найти вектор весов $w \in \mathbb{R}^d$, определяющий линейный классификатор $\text{sign}(w^T x)$. Используем SVM с l_2 -регуляризацией:

$$L(w) = \frac{\lambda}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max \{0, 1 - y_i w^T x_i\}$$

Здесь $\ell_i(w) = \max \{0, 1 - y_i w^T x_i\}$ — это hinge loss. Покажите, что субградиент в любой точке задается выражением:

$$g(w) = \lambda w + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{cases} -y_i x_i, & \text{если } y_i w^T x_i < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и посмотрите пример кода здесь .

Задача 5



i Question

Найти субдифференциал $\partial f(x)$ функции $f(x) = \exp(|x - 1| + |x + 1|)$ для всех $x \in \mathbb{R}$