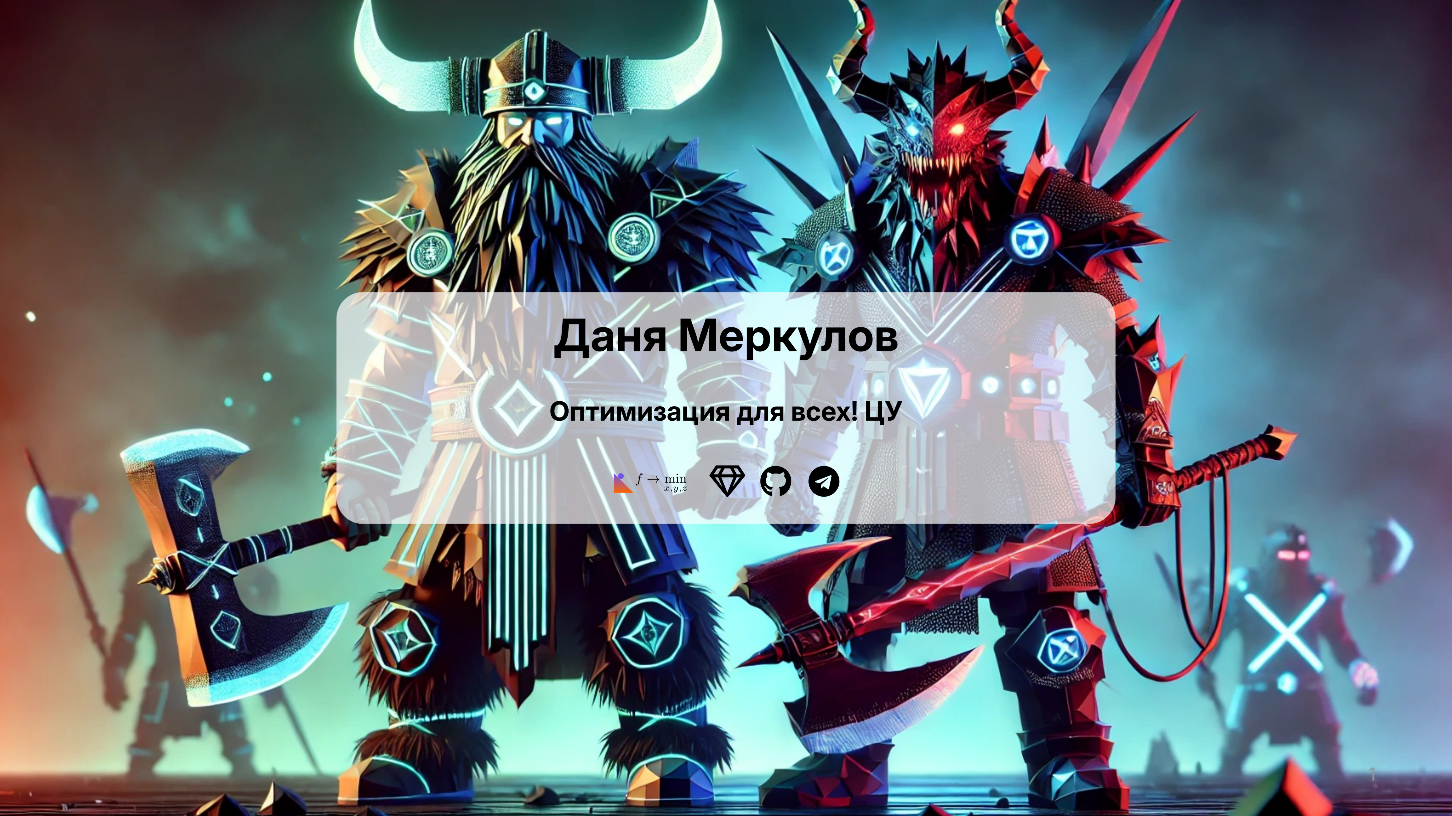
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Методы оптимизации для негладких задач

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 12

Даня Меркулов



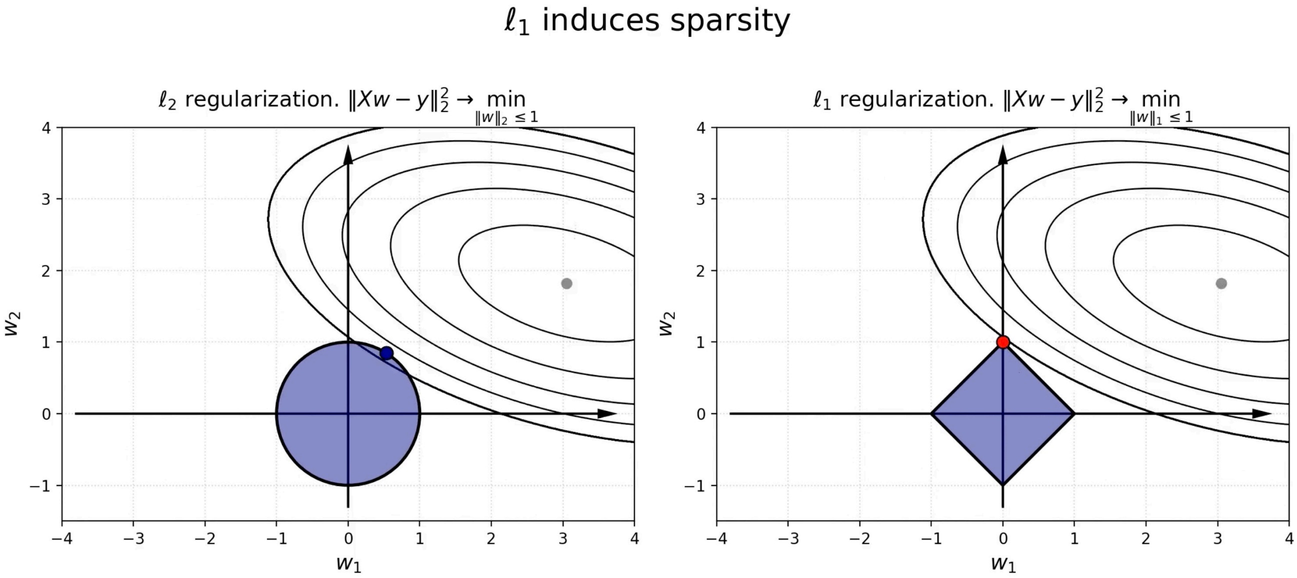
Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

$f \to \min\limits_{x,y,z}$

Негладкие задачи

Задача наименьших квадратов с ℓ_1-регуляризацией



@fminxyz

Нормы не являются гладкими

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации. Будем считать $f(x)$ выпуклой, но не обязательно гладкой.

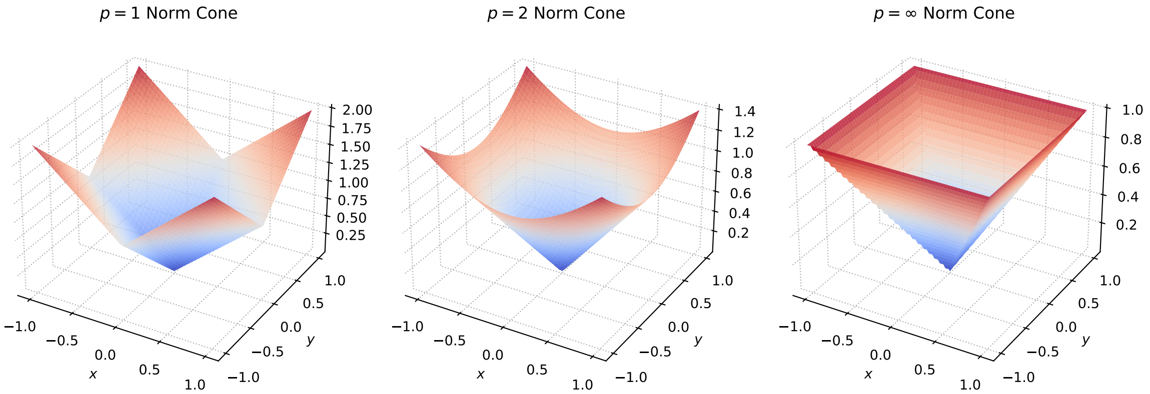


Рисунок 1. Конусы норм для разных p-норм не являются гладкими

Пример Вульфа

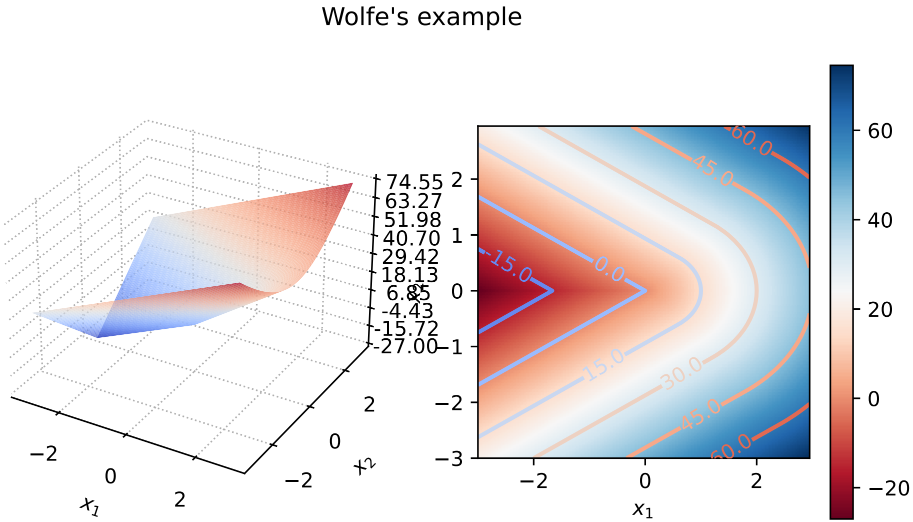


Рисунок 2. Пример Вульфа. Открыть в Colab

Вычисление субградиента

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

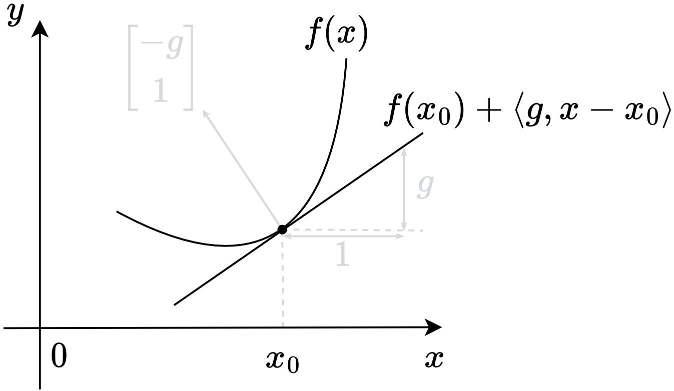


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

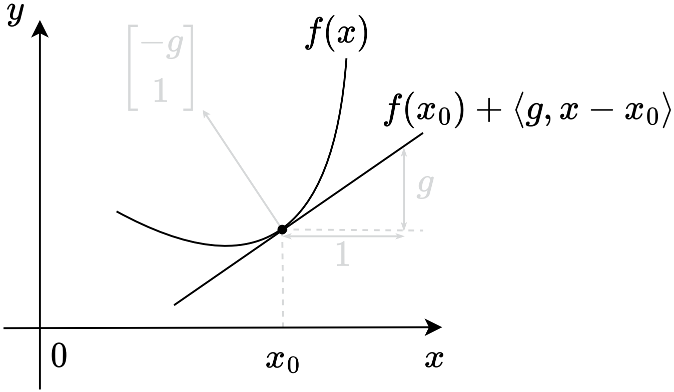


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

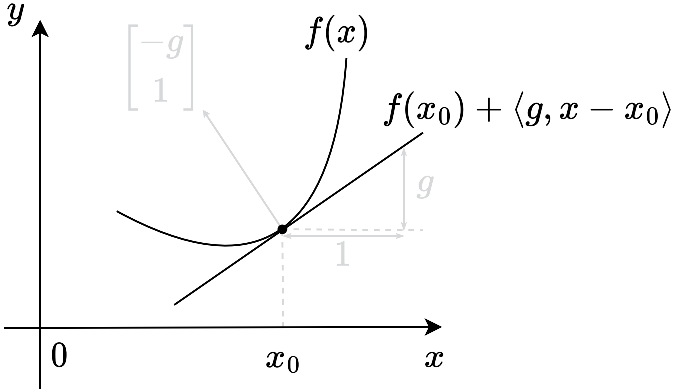


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \operatorname{dom} f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

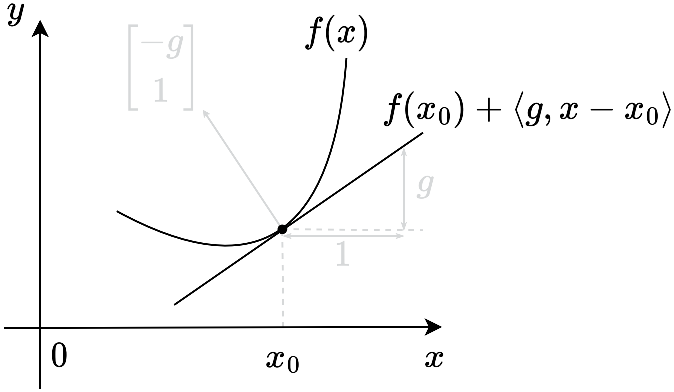


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

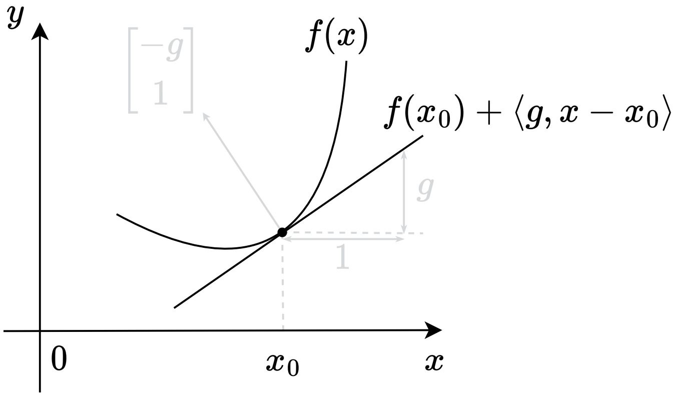


Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \operatorname{dom} f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g, то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы хотим сохранить это полезное свойство и для негладких функций.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Субградиент и субдифференциал

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

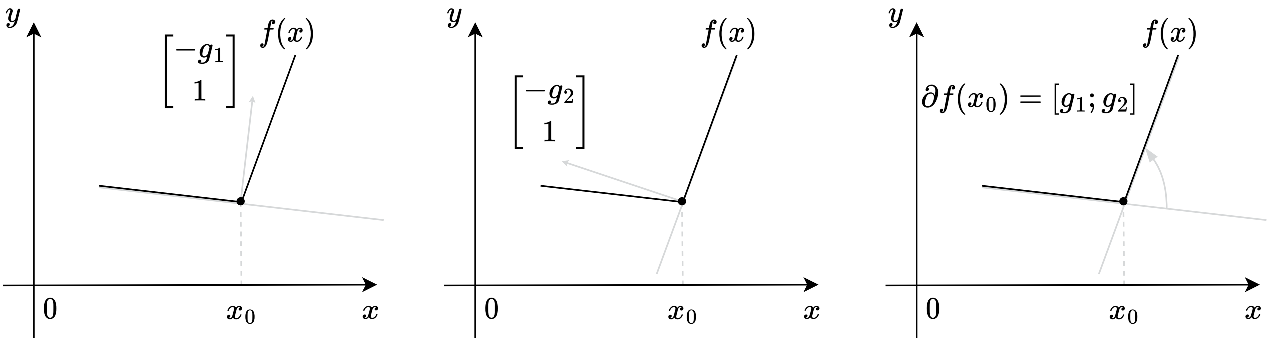


Рисунок 4. Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

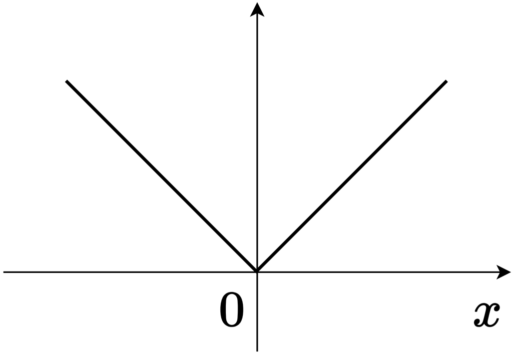
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

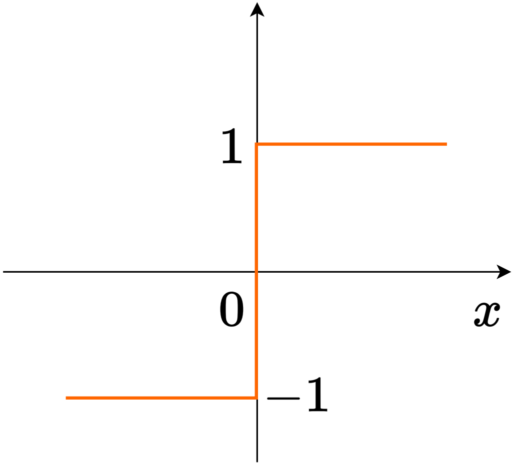
Субградиент и субдифференциал

Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

$$f(x) = |x|$$



$$\partial f(x)$$



Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \mathrm{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S, существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

> **Субдифференциал дифференцируемой функции**
>
> Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S, существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$
f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle
$$

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S.

Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0, то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S, существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v\rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v\rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \to 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v\rangle = \lim_{t\to 0; 0<t<\delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v\rangle$$

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$ (противоречие, если $s \neq \nabla f(x_0)$ и мы предполагали строгое неравенство, но здесь проще: $\langle \nabla f(x_0) - s, v \rangle \geq 0$ для всех $v \implies \nabla f(x_0) = s$).

Свойства субдифференциала

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

которое приводит к $s = \nabla f(x_0)$ (противоречие, если $s \neq \nabla f(x_0)$ и мы предполагали строгое неравенство, но здесь проще: $\langle \nabla f(x_0) - s, v \rangle \geq 0$ для всех $v \implies \nabla f(x_0) = s$).

3. Более того, если функция f выпукла, то согласно критерию выпуклости дифференцируемой функции: $f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$ для всех $x \in S$. Это в точности означает, что $\nabla f(x_0) \in \partial f(x_0)$.

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ \ i = 1, \ldots, n$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i f_i(x), \ \ a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^{n} S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Вычисление субдифференциалов

Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах $S_i,\ i = 1, \dots, n$. Тогда если $\bigcap\limits_{i=1}^n \mathrm{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция $f(x) = \sum\limits_{i=1}^n a_i f_i(x),\ a_i > 0$ имеет субдифференциал $\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap\limits_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n,\ x_0 \in S$, и поточечный максимум определяется как $f(x) = \max\limits_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \mathbf{conv}\left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},$$

$$I(x) = \{ i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x) \}$$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция

Вычисление субдифференциала

- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax+b))(x) = A^T \partial f(Ax+b)$, f — выпуклая функция
- $z \in \partial f(x)$ тогда и только тогда, когда $x \in \partial f^*(z)$.

Субградиентный метод

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k.

Алгоритм

Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \to \mathbb{R}$ в точке x_0, если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k.

Субградиентный метод не является методом спуска: значение функции может расти ($f(x_{k+1}) > f(x_k)$), так как антисубградиент не обязательно является направлением убывания.

Поэтому в качестве приближения решения берут лучшее найденное значение:

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1,\dots,k} f(x_i).$$

Сходимость

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

- Оценим расстояние до оптимума $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ на последней итерации.

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

- Оценим расстояние до оптимума $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ на последней итерации.
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

- Оценим расстояние до оптимума $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ на последней итерации.
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.
- Дополнительно предположим, что $\|g_k\|^2 \leq G^2$.

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

Сходимость

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\
2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Просуммируем неравенство по k от 0 до $T-1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\
&\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2
\end{aligned}
$$

- Оценим расстояние до оптимума $x^* = \arg\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ на последней итерации.
- Для субградиента: $\langle g_k, x^* - x_k \rangle \leq f(x^*) - f(x_k)$.
- Дополнительно предположим, что $\|g_k\|^2 \leq G^2$.
- Используем обозначение $R = \|x_0 - x^*\|_2$.

Сходимость

- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

Сходимость

- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Это приводит к основной оценке сходимости:

$$\boxed{f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k}}$$

Сходимость

- Заметим, что:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \geq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f_k^{\text{best}} - f(x^*)) = (f_k^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k$$

- Это приводит к основной оценке сходимости:

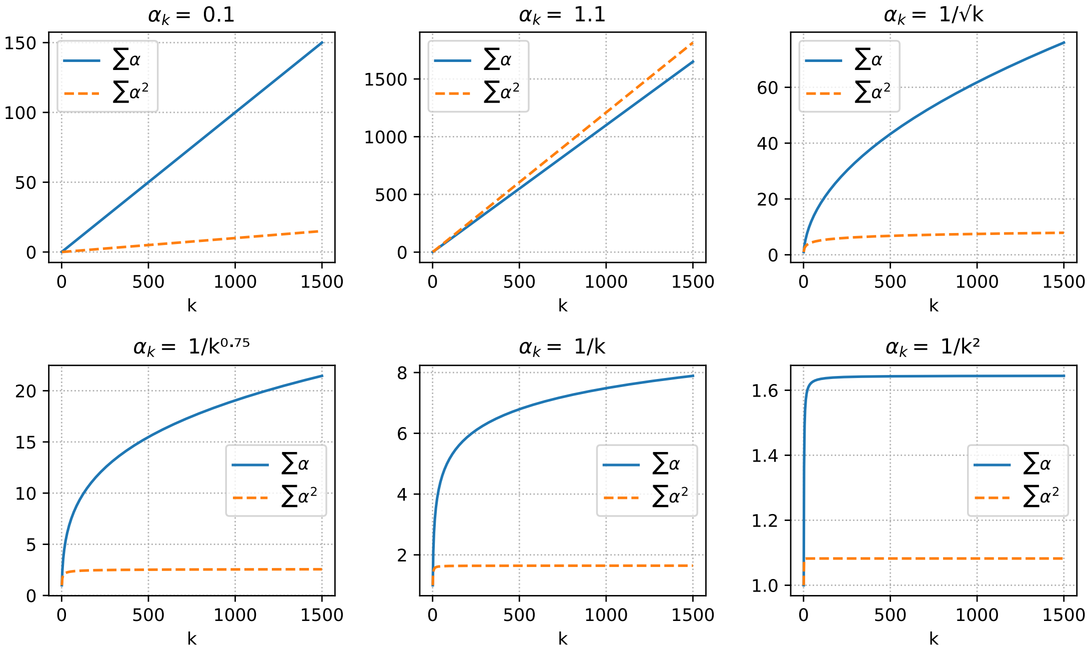
$$\boxed{f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum\limits_{k=0}^{T-1} \alpha_k}}$$

- Отсюда следует сходимость метода при выполнении условий:

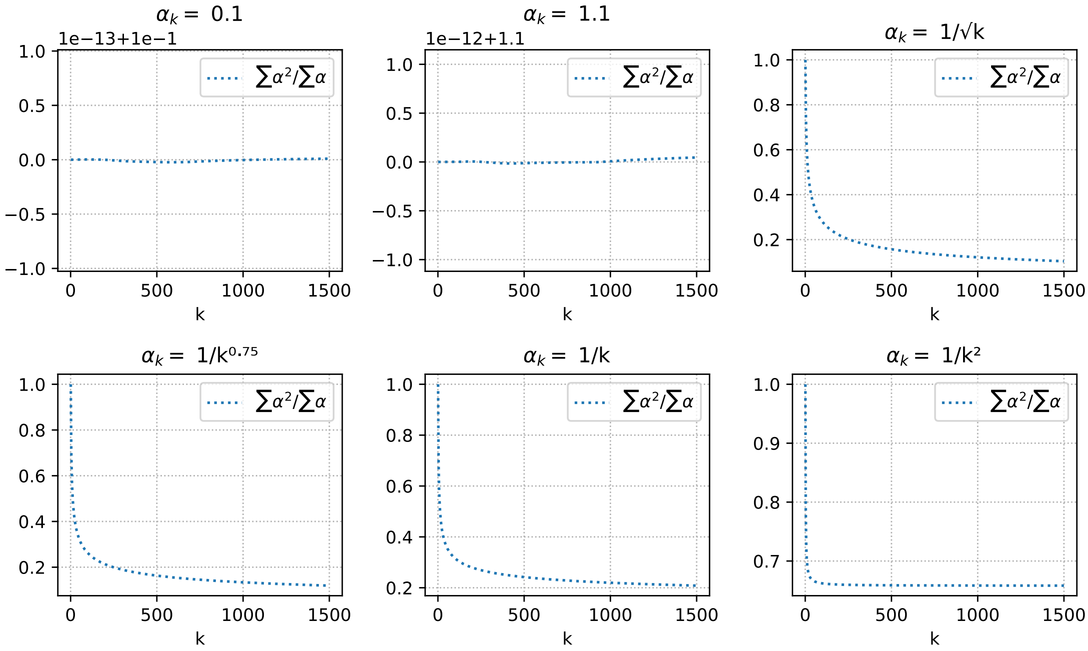
$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty,$$

то субградиентный метод сходится (шаг должен быть убывающим, но не слишком быстрым).

Различные стратегии выбора шага



Различные стратегии выбора шага



Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2
$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. [1] или [2].

[1] B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

[2] N. Shor. Minimization Methods for Non-di erentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2}G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. [1] или [2].
- Найдем оптимальный шаг α, который минимизирует правую часть неравенства.

[1] B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

[2] N. Shor. Minimization Methods for Non-di▯erentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

> **Theorem**
>
> Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет
>
> $$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

> **Theorem**
>
> Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет
>
> $$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Примечательно, что оптимальный постоянный шаг дает ту же оценку, что и оптимальная последовательность шагов.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G}\sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Примечательно, что оптимальный постоянный шаг дает ту же оценку, что и оптимальная последовательность шагов.
- Это связано с симметрией и выпуклостью правой части относительно α_i.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$, т.е. $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}
$$

- Критерий остановки: норма субградиента не подходит (пример $f(x) = |x|$). Обычно используют фиксированное число итераций.

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln k);
$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln k); \qquad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{k+1}-1).$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln k); \qquad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{k+1}-1). f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i}
$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

1. Оценка сумм:

$$
\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln k); \qquad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{k+1}-1). f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum\limits_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq
$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

Theorem

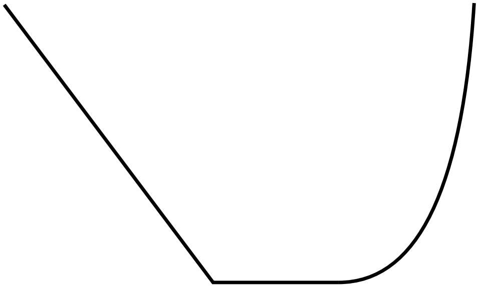
Пусть f — выпуклая G-липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}
$$

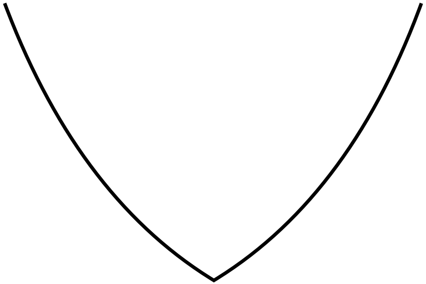
1. Оценка сумм:

$$
\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2}(1+\ln k); \qquad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{2R}{G}(\sqrt{k+1}-1). f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq
$$

Сильно выпуклый случай

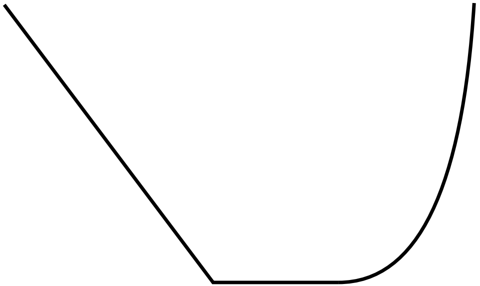


Негладкая
Выпуклая



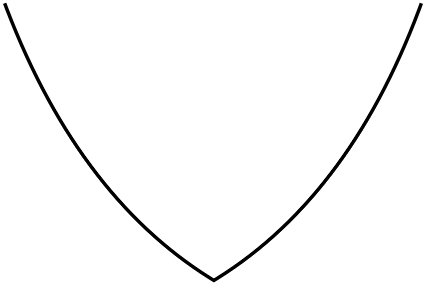
Негладкая
μ - сильно выпуклая

Сильно выпуклый случай



Негладкая
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая
μ - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2.$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1-\lambda)y - x \rangle \quad \rightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) - (1-\lambda)\langle g, x - y \rangle.$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \quad \rightarrow \quad f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle.$$

3. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle &\leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \\ (1 - \lambda)f(x) &\leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2 \\ f(x) &\leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2 \end{aligned}$$

Негладкий сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x-y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2.$$

1. Для любого $\lambda \in [0,1)$, из μ-сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x, мы получаем

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1-\lambda)y - x \rangle \quad \to \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x) - (1-\lambda)\langle g, x-y \rangle.$$

3. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x) - (1-\lambda)\langle g, x-y \rangle &\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \\ (1-\lambda)f(x) &\leq (1-\lambda)f(y) + (1-\lambda)\langle g, x-y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 \\ f(x) &\leq f(y) + \langle g, x-y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x-y\|^2 \end{aligned}$$

4. Переходя к пределу при $\lambda \to 1^-$ получаем $f(x) \leq f(y) + \langle g, x-y \rangle - \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2 \to \langle g, x-y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|^2$.

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right)
\end{aligned}
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) \\
2\alpha_k \left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай

Theorem

Пусть f — μ-сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^*. Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$
f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.
$$

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\
&= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k\langle g_k, x_k - x^*\rangle \\
&\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k\mu\|x_k - x^*\|^2 \\
&= (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 - 2\alpha_k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \\
2\alpha_k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq (1 - \mu\alpha_k)\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2\|g_k\|^2 \\
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{1 - \mu\alpha_k}{2\alpha_k}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2}\|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2
$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$
\begin{aligned}
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2 \\
f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2 \\
k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2
\end{aligned}
$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right)$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu\sum_{k=0}^{T-1} k}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай. Доказательство

2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)}\|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k}\|g_k\|^2$$

$$k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4}\|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4}\|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \ldots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4}\|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{T-1}\|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right)\sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*)\right) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k\left(f(x_k) - f(x^*)\right) \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

$$f^{\text{best}}_{T-1} - f(x^*) \leq \frac{G^2 T}{\mu\sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \qquad f^{\text{best}}_k - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Summary. Субградиентный метод

Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые липшицевы функции	$\alpha \sim \dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые функции	$\alpha \sim \dfrac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^T A\right) \in [\mu; L].$$

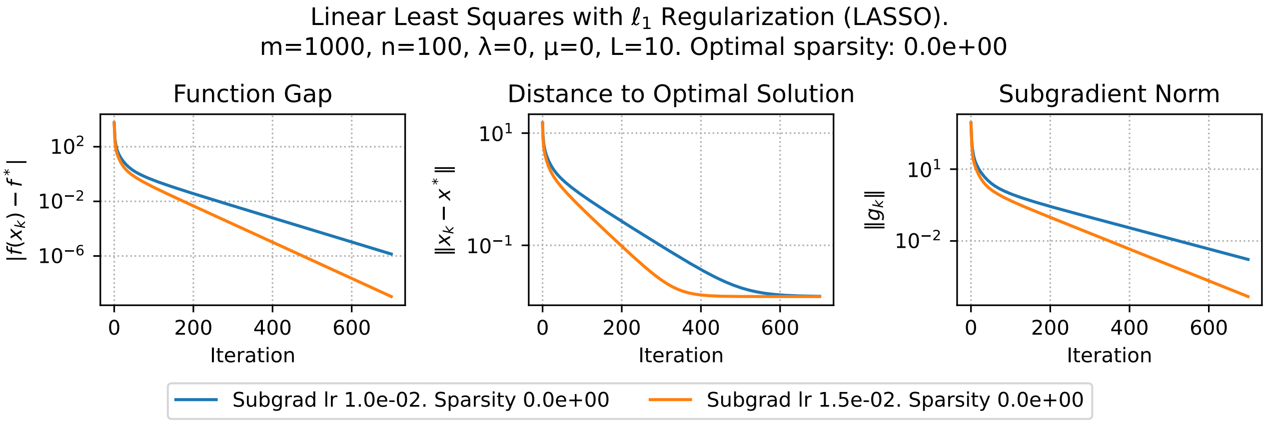


Рисунок 6. Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

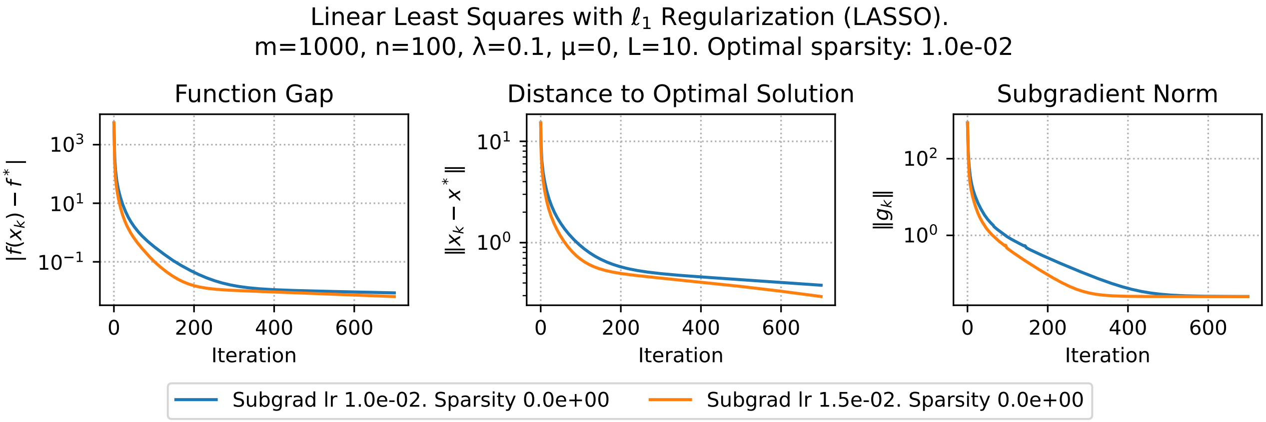


Рисунок 7. Негладкий выпуклый случай. Маленькое значение λ приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

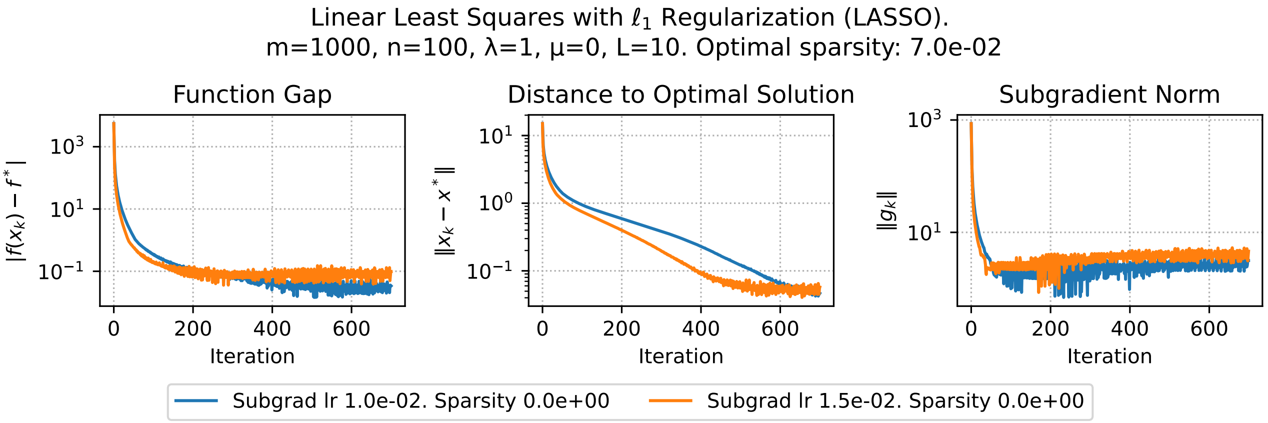


Рисунок 8. Негладкий выпуклый случай. При большем значении λ проявляется немонотонность $f(x_k)$. Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax-b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A\in\mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right)\in[\mu; L].$$

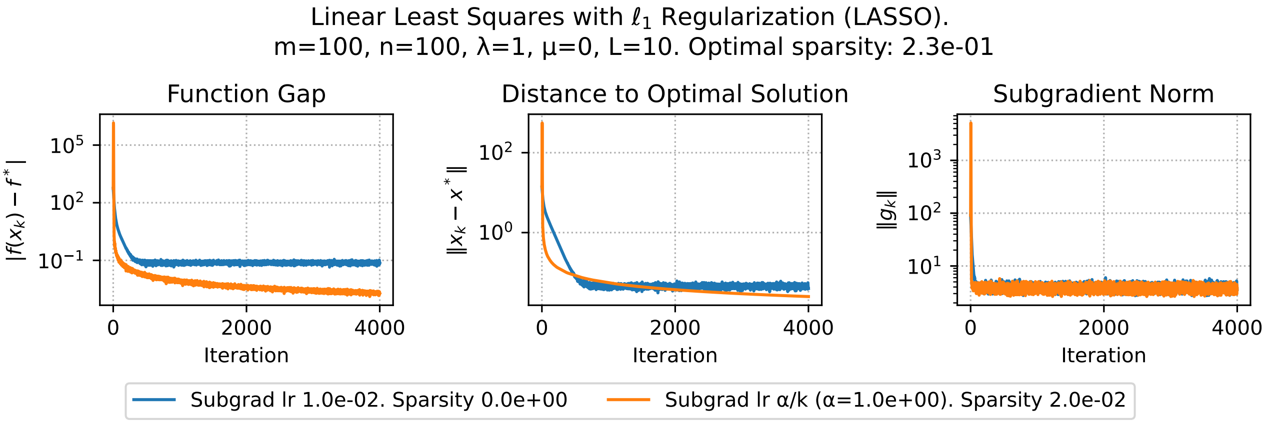


Рисунок 9. Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^T A\right) \in [\mu; L].$$

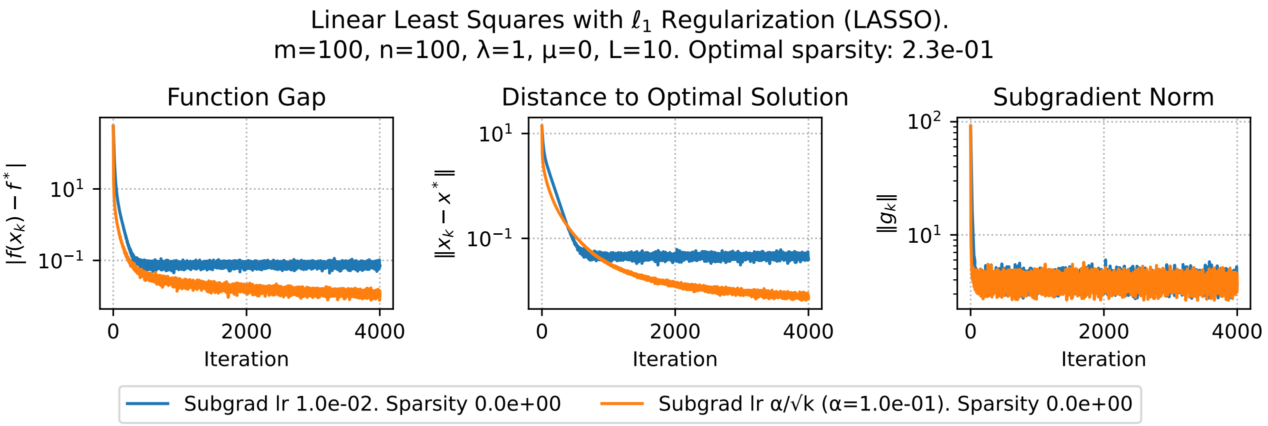


Рисунок 10. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

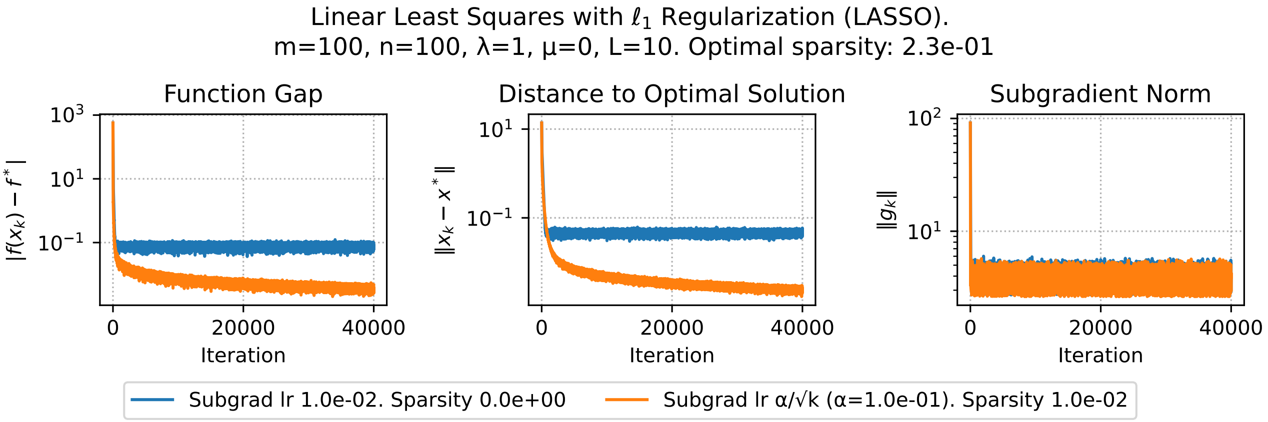


Рисунок 11. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

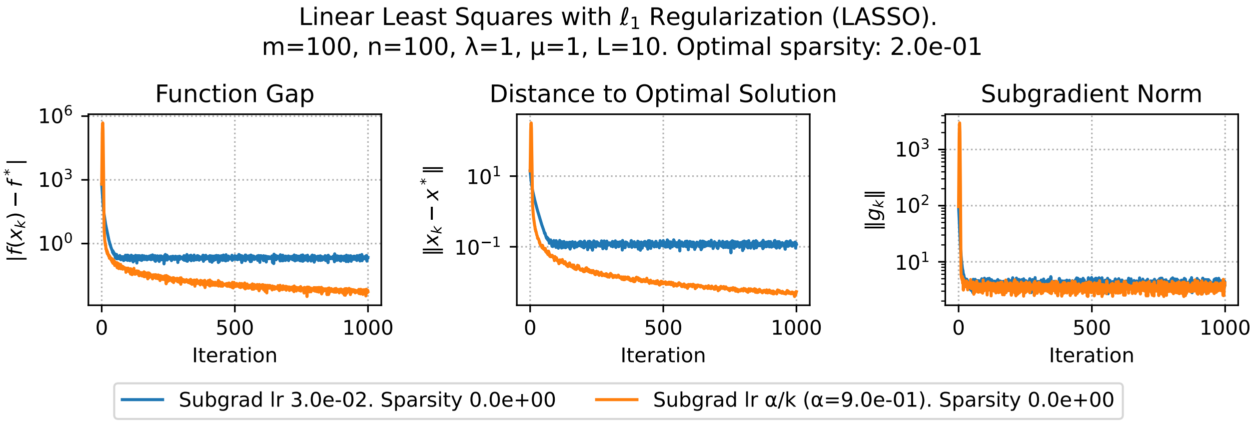


Рисунок 12. Негладкий сильно выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{k}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

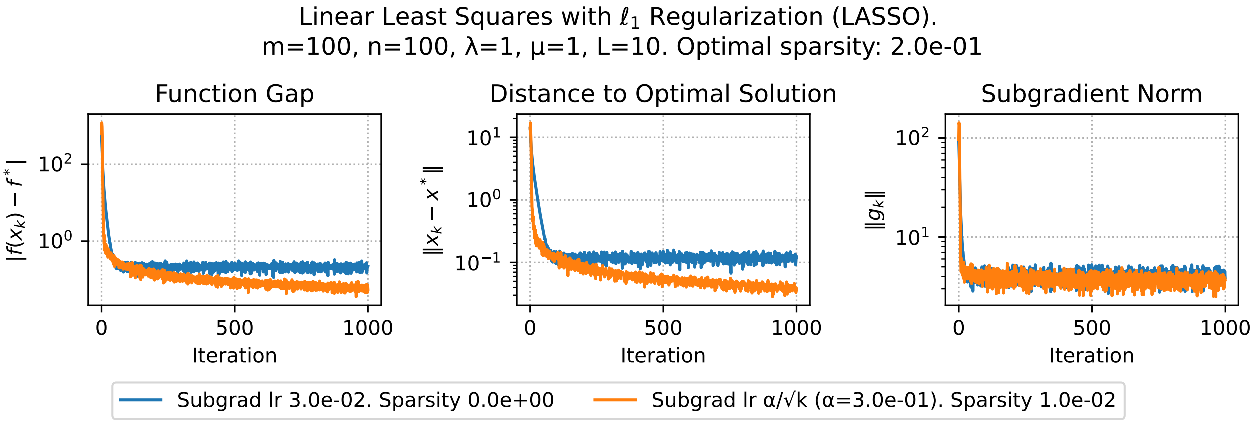


Рисунок 13. Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ работает хуже

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1+\exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

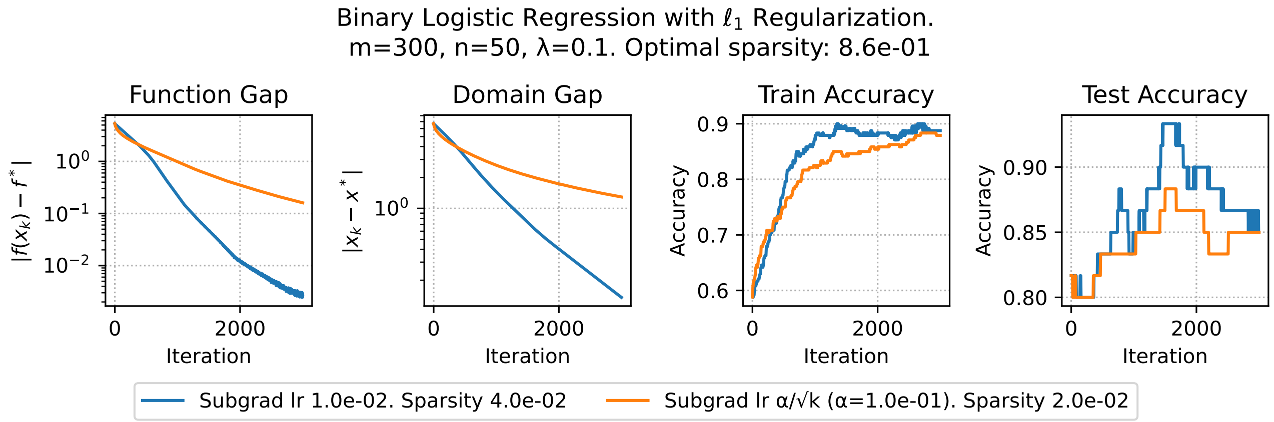


Рисунок 14. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1+\exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1,1\}$$

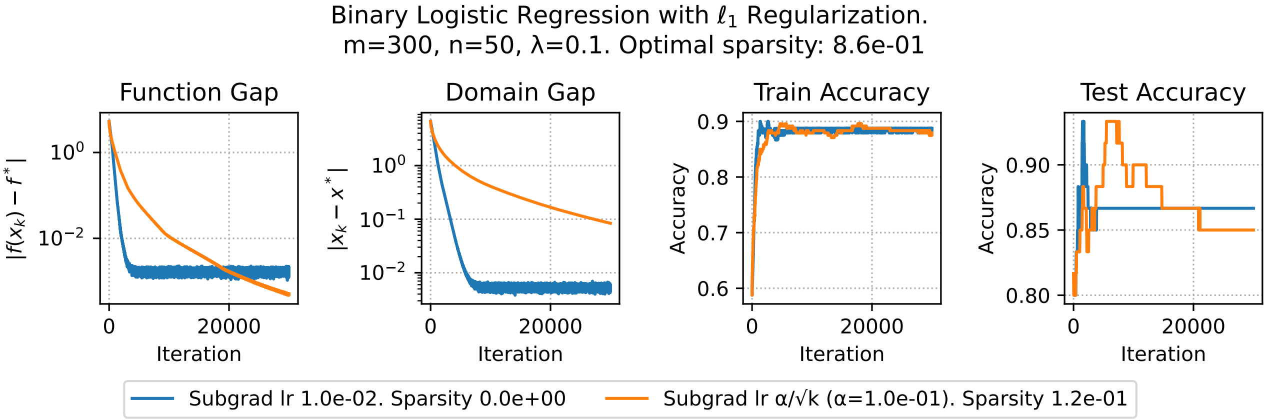


Рисунок 15. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \text{log}(1+\text{exp}(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

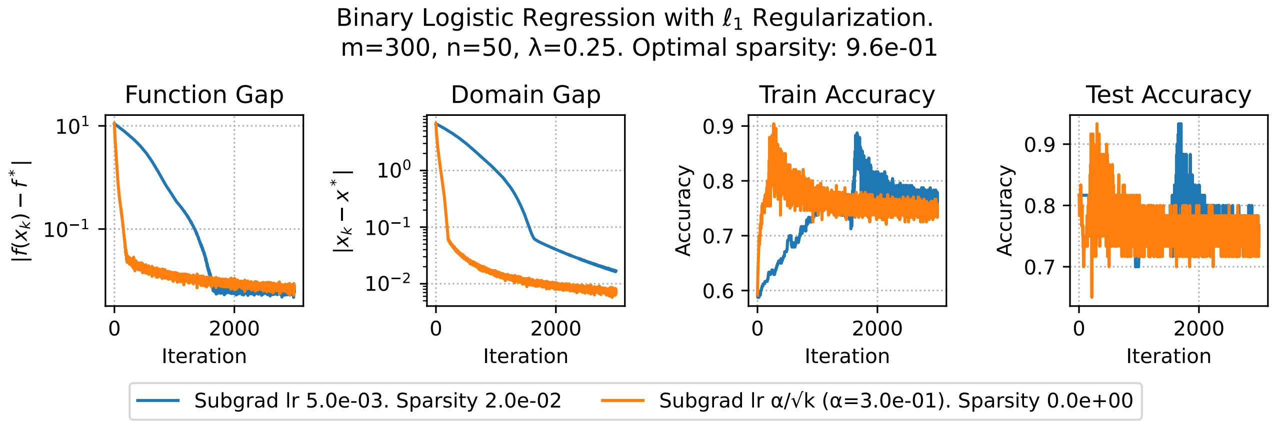


Рисунок 16. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

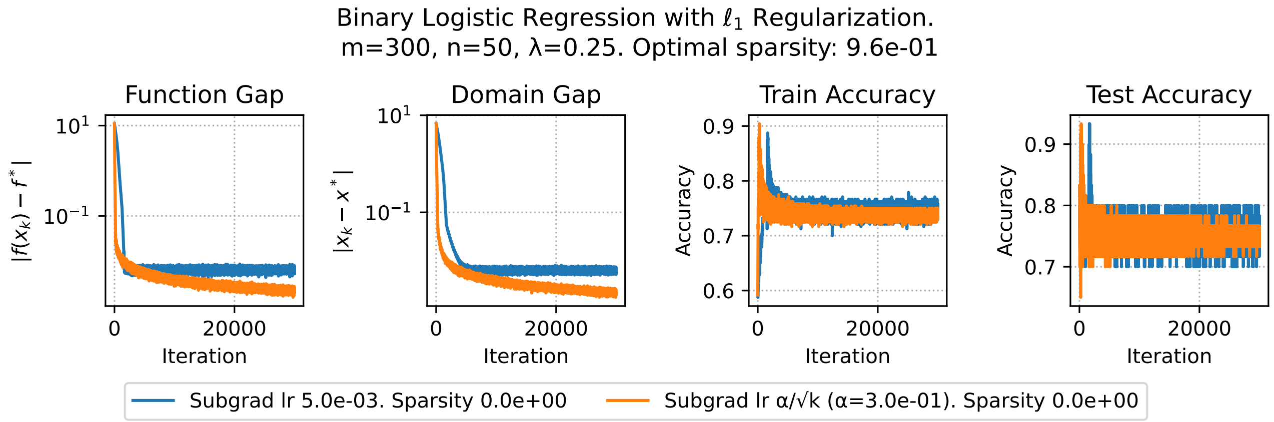


Рисунок 17. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

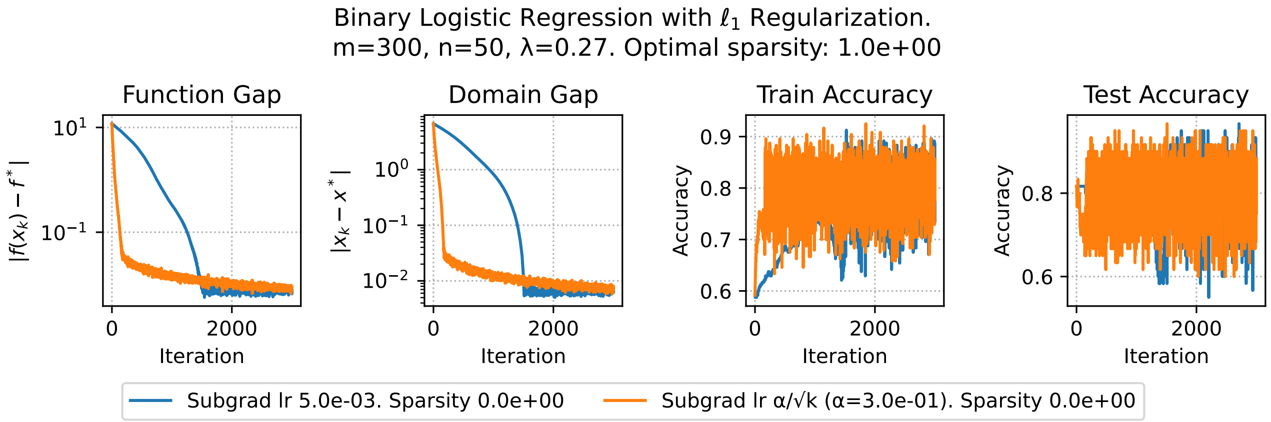


Рисунок 18. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}
$$

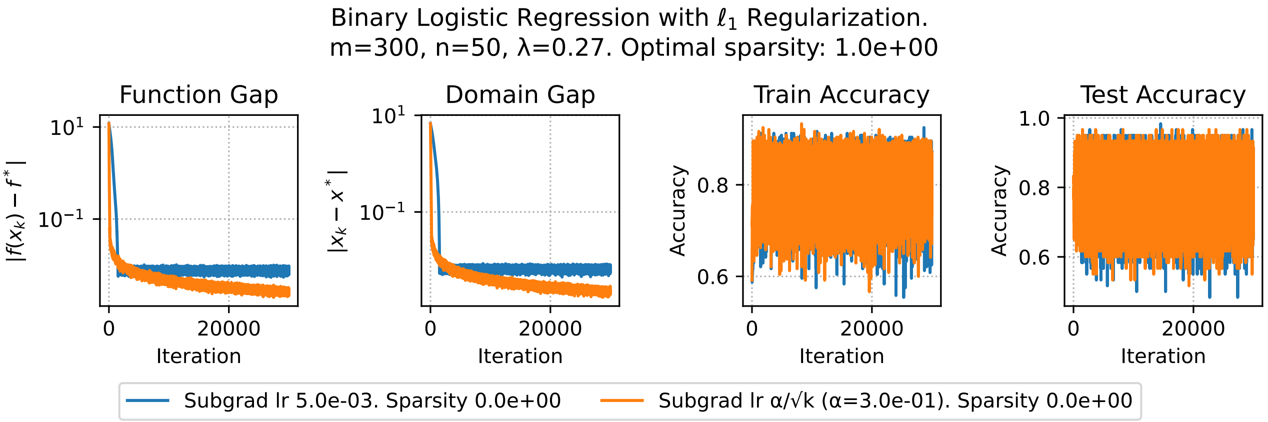


Рисунок 19. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Экстра: Нижние оценки

Нижние оценки

выпуклые (негладкие) [3]	гладкие (невыпуклые)[4]	гладкие и выпуклые[5]	гладкие и сильно выпуклые (или PL)[1]
$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\dfrac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa}\log\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

[3] Nesterov, Lectures on Convex Optimization

[4] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

[5] Nemirovski, Yudin, 1979

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ &= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\ &\ \vdots \\ &= x_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i}) \end{aligned}$$

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
&\ \vdots \\
&= x_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})
\end{aligned}
$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} \in x_0 + \text{span}\left\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \ldots, \nabla f(x_k)\right\} & f \text{ - smooth} \\
&x_{k+1} \in x_0 + \text{span}\left\{g_0, g_1, \ldots, g_k\right\} \text{, where } g_i \in \partial f(x_i) & f \text{ - non-smooth}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Модель черного ящика

Итерация градиентного спуска:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\
&\ \vdots \\
&= x_0 - \sum_{i=0}^{k} \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})
\end{aligned}
$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$
\begin{aligned}
&x_{k+1} \in x_0 + \text{span}\left\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \ldots, \nabla f(x_k)\right\} && f \text{ - smooth} \\
&x_{k+1} \in x_0 + \text{span}\left\{g_0, g_1, \ldots, g_k\right\} \text{, where } g_i \in \partial f(x_i) && f \text{ - non-smooth}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Для получения нижней оценки построим «худшую» функцию f из соответствующего класса, на которой любой метод из семейства Уравнение 1 сходится медленно.

Негладкий выпуклый случай

Theorem

Существует функция f, которая является G-липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) - \min_{x\in\mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Негладкий выпуклый случай

> **Theorem**
>
> Существует функция f, которая является G-липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет
>
> $$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$
>
> для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Идея доказательства: построить такую функцию f, что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$x_k \in \text{span}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$$

где e_i — i-й стандартный базисный вектор. На итерации $k \leq n$, есть по крайней мере $n-k$ координат x, равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x:

$$\begin{aligned}
\partial f(x) &= \partial\left(\beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)}\right) + \partial\left(\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\right) \\
&= \beta \partial\left(\max_{1 \le i \le k} x^{(i)}\right) + \alpha x \\
&= \beta \,\text{conv}\left\{e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)}\right\} + \alpha x
\end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x.

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α-сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x.

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x:

$$\begin{aligned}
\partial f(x) &= \partial\left(\beta \max_{1 \le i \le k} x^{(i)}\right) + \partial\left(\frac{\alpha}{2}\|x\|_2^2\right) \\
&= \beta\partial\left(\max_{1 \le i \le k} x^{(i)}\right) + \alpha x \\
&= \beta \operatorname{conv}\left\{e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)}\right\} + \alpha x
\end{aligned}$$

Легко видеть, что если $g \in \partial f(x)$ и $\|x\| \le R$, то

$$\|g\| \le \alpha R + \beta$$

Таким образом, f является $\alpha R + \beta$-липшицевой на $B(R)$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1. Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1. Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1.
- Индукцией по i можно показать, что $x_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$. В частности, для $i \leq k$, $k+1$-я координата x_i равна нулю и вследствие структуры $f(x)$:

$$f(x_i) \geq 0.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$
y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.
$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$
\begin{aligned}
\partial f(y) &= \alpha y + \beta \,\text{conv}\left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\
&= \alpha y + \beta \,\text{conv}\left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\
0 &\in \partial f(y).
\end{aligned}
$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$
y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \le i \le k, \qquad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \le i \le n.
$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$
\begin{aligned}
\partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\
&= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\
0 &\in \partial f(y).
\end{aligned}
$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$
f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.
$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

- Найдем минимум функции f. Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$
y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \qquad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.
$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$
\begin{aligned}
\partial f(y) &= \alpha y + \beta \,\text{conv}\left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\
&= \alpha y + \beta \,\text{conv}\left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\
0 &\in \partial f(y).
\end{aligned}
$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$
f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.
$$

- Теперь мы получаем:

$$
f(x_i) - f(x^*) \geq 0 - \left(-\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.
$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R}\frac{1}{1+\sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1+\sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)

Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R}\frac{1}{1+\sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1+\sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$$

Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1\leq i\leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$

Ссылки

- Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)