

# Стохастический градиентный спуск. Адаптивные методы

## Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

## Задача конечной суммы

## Задача конечной суммы

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего на конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

## Задача конечной суммы

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего на конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или линейным поиском.

## Задача конечной суммы

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего на конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или линейным поиском.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ .

## Задача конечной суммы

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего на конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или линейным поиском.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ .

## Задача конечной суммы

Рассмотрим классическую задачу минимизации среднего на конечной выборке:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^p} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x)$$

Градиентный спуск действует следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\alpha_k}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) \quad (\text{GD})$$

- Сходимость с постоянным  $\alpha$  или линейным поиском.
- Стоимость итерации линейна по  $n$ . Для ImageNet  $n \approx 1.4 \cdot 10^7$ , для WikiText  $n \approx 10^8$ .

Перейдем от вычисления полного градиента к его несмещенной оценке, когда мы случайно выбираем индекс  $i_k$  точки на каждой итерации равномерно:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f_{i_k}(x_k) \quad (\text{SGD})$$

При  $p(i_k = i) = \frac{1}{n}$  стохастический градиент является несмещенной оценкой градиента, определяемой как:

$$\mathbb{E}[\nabla f_{i_k}(x)] = \sum_{i=1}^n p(i_k = i) \nabla f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \nabla f_i(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \nabla f_i(x) = \nabla f(x)$$

Это указывает на то, что математическое ожидание стохастического градиента равно фактическому градиенту

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?



## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический метод имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический метод имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический метод имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки неулучшаемы при стандартных предположениях.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический метод имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки неулучшаемы при стандартных предположениях.
  - Оракул возвращает несмещенную аппроксимацию градиента с ограниченной дисперсией.

## Результаты для градиентного спуска

Стохастические итерации в  $n$  раз быстрее, но сколько итераций требуется?

Если  $\nabla f$  является Липшицевым, то мы имеем:

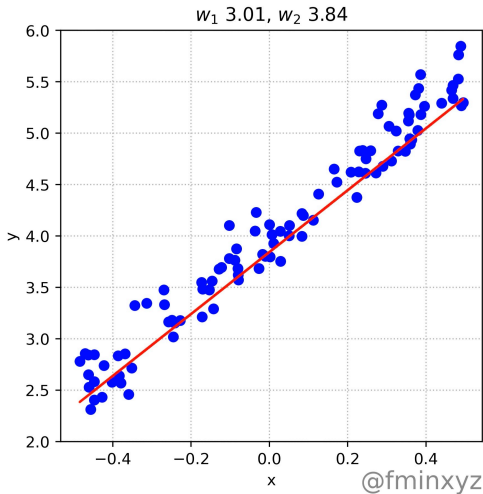
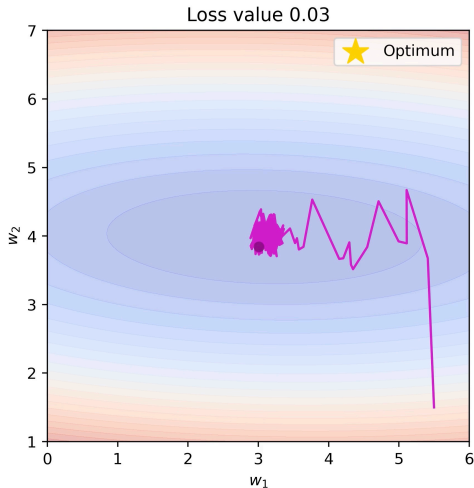
Предположение	Детерминированный градиентный спуск	Стохастический градиентный спуск
PL	$O(\log(1/\varepsilon))$	$O(1/\varepsilon)$
Выпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$
Невыпуклая	$O(1/\varepsilon)$	$O(1/\varepsilon^2)$

- Стохастический метод имеет низкую стоимость итерации, но медленную скорость сходимости.
  - Сублинейная скорость даже в сильно выпуклом случае.
  - Оценки неулучшаемы при стандартных предположениях.
  - Оракул возвращает несмещенную аппроксимацию градиента с ограниченной дисперсией.
- Momentum и квазиньютоновские методы не улучшают скорость сходимости в стохастическом случае. Могут улучшить только константы (узким местом является дисперсия, а не число обусловленности).

## Стохастический градиентный спуск (SGD)

# Типичное поведение

Stochastic Gradient Descent. Batch = 2





## Вычислительные эксперименты

# Вычислительные эксперименты

Визуализация SGD.

Посмотрим на вычислительные эксперименты для SGD .

## Адаптивность или масштабирование

## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{k-1} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{k-1} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- AdaGrad не требует настройки скорости обучения:  $\alpha > 0$  — фиксированная константа, и скорость обучения естественным образом уменьшается с итерациями.

## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{k-1} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- AdaGrad не требует настройки скорости обучения:  $\alpha > 0$  — фиксированная константа, и скорость обучения естественным образом уменьшается с итерациями.
- Скорость обучения редких информативных признаков уменьшается медленно.

## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{k-1} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- AdaGrad не требует настройки скорости обучения:  $\alpha > 0$  — фиксированная константа, и скорость обучения естественным образом уменьшается с итерациями.
- Скорость обучения редких информативных признаков уменьшается медленно.
- Может значительно превосходить SGD в разреженных задачах.

## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{(k-1)} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- AdaGrad не требует настройки скорости обучения:  $\alpha > 0$  — фиксированная константа, и скорость обучения естественным образом уменьшается с итерациями.
- Скорость обучения редких информативных признаков уменьшается медленно.
- Может значительно превосходить SGD в разреженных задачах.
- Основным недостатком является монотонное накопление градиентов в знаменателе. AdaDelta, Adam, AMSGrad и др. улучшают это, популярны при обучении глубоких нейронных сетей.



## Adagrad (Duchi, Hazan, and Singer 2010)

Очень популярный адаптивный метод. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$ , и обновление для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = v_j^{k-1} + (g_j^{(k)})^2$$
$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- AdaGrad не требует настройки скорости обучения:  $\alpha > 0$  — фиксированная константа, и скорость обучения естественным образом уменьшается с итерациями.
- Скорость обучения редких информативных признаков уменьшается медленно.
- Может значительно превосходить SGD в разреженных задачах.
- Основным недостатком является монотонное накопление градиентов в знаменателе. AdaDelta, Adam, AMSGrad и др. улучшают это, популярны при обучении глубоких нейронных сетей.
- Константа  $\epsilon$  обычно устанавливается равной  $10^{-6}$ , чтобы избежать деления на ноль или слишком больших шагов.

## RMSProp (Tieleman and Hinton, 2012)

Улучшение AdaGrad, решающее проблему агрессивного, монотонно убывающего темпа обучения. Использует скользящее среднее квадратов градиентов для настройки скорости обучения для каждого веса. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$  и правило обновления для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2$$

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

## RMSPProp (Tieleman and Hinton, 2012)

Улучшение AdaGrad, решающее проблему агрессивного, монотонно убывающего темпа обучения. Использует скользящее среднее квадратов градиентов для настройки скорости обучения для каждого веса. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$  и правило обновления для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2$$

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- RMSPProp делит скорость обучения для веса на скользящее среднее величин последних градиентов для этого веса.

## RMSPProp (Tieleman and Hinton, 2012)

Улучшение AdaGrad, решающее проблему агрессивного, монотонно убывающего темпа обучения. Использует скользящее среднее квадратов градиентов для настройки скорости обучения для каждого веса. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$  и правило обновления для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2$$

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- RMSPProp делит скорость обучения для веса на скользящее среднее величин последних градиентов для этого веса.
- Позволяет более тонко настраивать скорость обучения, чем AdaGrad, что делает его подходящим для неизотропных задач.

## RMSPProp (Tieleman and Hinton, 2012)

Улучшение AdaGrad, решающее проблему агрессивного, монотонно убывающего темпа обучения. Использует скользящее среднее квадратов градиентов для настройки скорости обучения для каждого веса. Пусть  $g^{(k)} = \nabla f_{i_k}(x^{(k-1)})$  и правило обновления для  $j = 1, \dots, p$ :

$$v_j^{(k)} = \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2$$

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{g_j^{(k)}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}}$$

### Заметки:

- RMSPProp делит скорость обучения для веса на скользящее среднее величин последних градиентов для этого веса.
- Позволяет более тонко настраивать скорость обучения, чем AdaGrad, что делает его подходящим для неізотропных задач.
- Часто используется при обучении нейронных сетей, особенно рекуррентных.

## Adadelta (Zeiler, 2012)

Расширение RMSProp, направленное на уменьшение зависимости от вручную задаваемой глобальной скорости обучения. Вместо накопления всех прошлых квадратов градиентов, Adadelta ограничивает окно накопленных прошлых градиентов некоторым фиксированным размером  $w$ . Механизм обновления не требует скорости обучения  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}v_j^{(k)} &= \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2 \\ \tilde{g}_j^{(k)} &= \frac{\sqrt{\Delta x_j^{(k-1)} + \epsilon}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}} g_j^{(k)} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \tilde{g}_j^{(k)} \\ \Delta x_j^{(k)} &= \rho \Delta x_j^{(k-1)} + (1 - \rho)(\tilde{g}_j^{(k)})^2\end{aligned}$$

## Adadelta (Zeiler, 2012)

Расширение RMSProp, направленное на уменьшение зависимости от вручную задаваемой глобальной скорости обучения. Вместо накопления всех прошлых квадратов градиентов, Adadelta ограничивает окно накопленных прошлых градиентов некоторым фиксированным размером  $w$ . Механизм обновления не требует скорости обучения  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}v_j^{(k)} &= \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2 \\ \tilde{g}_j^{(k)} &= \frac{\sqrt{\Delta x_j^{(k-1)} + \epsilon}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}} g_j^{(k)} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \tilde{g}_j^{(k)} \\ \Delta x_j^{(k)} &= \rho \Delta x_j^{(k-1)} + (1 - \rho)(\tilde{g}_j^{(k)})^2\end{aligned}$$

### Заметки:

- Adadelta адаптирует скорость обучения на основе скользящего окна обновлений градиента, а не накапливает все прошлые градиенты. Таким образом, настроенные скорости обучения более устойчивы к изменениям динамики модели.

## Adadelta (Zeiler, 2012)

Расширение RMSProp, направленное на уменьшение зависимости от вручную задаваемой глобальной скорости обучения. Вместо накопления всех прошлых квадратов градиентов, Adadelta ограничивает окно накопленных прошлых градиентов некоторым фиксированным размером  $w$ . Механизм обновления не требует скорости обучения  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}v_j^{(k)} &= \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2 \\ \tilde{g}_j^{(k)} &= \frac{\sqrt{\Delta x_j^{(k-1)} + \epsilon}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}} g_j^{(k)} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \tilde{g}_j^{(k)} \\ \Delta x_j^{(k)} &= \rho \Delta x_j^{(k-1)} + (1 - \rho)(\tilde{g}_j^{(k)})^2\end{aligned}$$

### Заметки:

- Adadelta адаптирует скорость обучения на основе скользящего окна обновлений градиента, а не накапливает все прошлые градиенты. Таким образом, настроенные скорости обучения более устойчивы к изменениям динамики модели.
- Метод не требует установки начальной скорости обучения, что упрощает настройку.



## Adadelta (Zeiler, 2012)

Расширение RMSProp, направленное на уменьшение зависимости от вручную задаваемой глобальной скорости обучения. Вместо накопления всех прошлых квадратов градиентов, Adadelta ограничивает окно накопленных прошлых градиентов некоторым фиксированным размером  $w$ . Механизм обновления не требует скорости обучения  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}v_j^{(k)} &= \gamma v_j^{(k-1)} + (1 - \gamma)(g_j^{(k)})^2 \\ \tilde{g}_j^{(k)} &= \frac{\sqrt{\Delta x_j^{(k-1)} + \epsilon}}{\sqrt{v_j^{(k)} + \epsilon}} g_j^{(k)} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \tilde{g}_j^{(k)} \\ \Delta x_j^{(k)} &= \rho \Delta x_j^{(k-1)} + (1 - \rho)(\tilde{g}_j^{(k)})^2\end{aligned}$$

### Заметки:

- Adadelta адаптирует скорость обучения на основе скользящего окна обновлений градиента, а не накапливает все прошлые градиенты. Таким образом, настроенные скорости обучения более устойчивы к изменениям динамики модели.
- Метод не требует установки начальной скорости обучения, что упрощает настройку.
- Часто используется в глубоком обучении, где масштабы параметров значительно различаются по слоям.

## Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$
$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Заметки:

• Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

Заметки:

- Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.
- Одна из самых цитируемых научных статей в мире

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

Заметки:

- Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.
- Одна из самых цитируемых научных статей в мире
- В 2018-2019 годах были опубликованы статьи, указывающие на ошибки в оригинальной статье

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

Заметки:

- Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.
- Одна из самых цитируемых научных статей в мире
- В 2018-2019 годах были опубликованы статьи, указывающие на ошибки в оригинальной статье
- Не сходится на некоторых простых задачах (даже выпуклых)

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

Заметки:

- Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.
- Одна из самых цитируемых научных статей в мире
- В 2018-2019 годах были опубликованы статьи, указывающие на ошибки в оригинальной статье
- Не сходится на некоторых простых задачах (даже выпуклых)
- Каким-то образом работает исключительно хорошо для некоторых сложных задач

# Adam (Kingma and Ba, 2014) <sup>1 2</sup>

Сочетает в себе элементы как AdaGrad, так и RMSProp. Рассматривает экспоненциально затухающее среднее прошлых градиентов и квадратов градиентов.

EMA:

$$m_j^{(k)} = \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)}$$

$$v_j^{(k)} = \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2$$

Исправление смещения:

$$\hat{m}_j = \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}$$

$$\hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k}$$

Обновление:

$$x_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - \alpha \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon}$$

Заметки:

- Он исправляет смещение к нулю в начальные моменты, наблюдаемое в других методах, таких как RMSProp, делая оценки более точными.
- Одна из самых цитируемых научных статей в мире
- В 2018-2019 годах были опубликованы статьи, указывающие на ошибки в оригинальной статье
- Не сходится на некоторых простых задачах (даже выпуклых)
- Каким-то образом работает исключительно хорошо для некоторых сложных задач
- Работает намного лучше для языковых моделей, чем для задач компьютерного зрения — почему?

<sup>1</sup>Adam: A Method for Stochastic Optimization

<sup>2</sup>On the Convergence of Adam and Beyond



## AdamW (Loshchilov & Hutter, 2017)

Решает распространенную проблему с  $\ell_2$  регуляризацией в адаптивных оптимизаторах, таких как Adam.

Стандартная  $\ell_2$  регуляризация добавляет  $\lambda\|x\|^2$  к функции потерь, что приводит к слагаемому градиента  $\lambda x$ .

В Adam это слагаемое масштабируется адаптивной скоростью обучения  $\left(\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon\right)$ , связывая затухание весов с величинами градиента.

AdamW отделяет затухание весов от шага адаптации градиента.

Правило обновления:

$$\begin{aligned}m_j^{(k)} &= \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)} \\v_j^{(k)} &= \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2 \\ \hat{m}_j &= \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}, \quad \hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \alpha \left( \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon} + \lambda x_j^{(k-1)} \right)\end{aligned}$$

## AdamW (Loshchilov & Hutter, 2017)

Решает распространенную проблему с  $\ell_2$  регуляризацией в адаптивных оптимизаторах, таких как Adam.

Стандартная  $\ell_2$  регуляризация добавляет  $\lambda\|x\|^2$  к функции потерь, что приводит к слагаемому градиента  $\lambda x$ .

В Adam это слагаемое масштабируется адаптивной скоростью обучения  $(\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon)$ , связывая затухание весов с величинами градиента.

AdamW отделяет затухание весов от шага адаптации градиента.

Правило обновления:

$$\begin{aligned}m_j^{(k)} &= \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)} \\v_j^{(k)} &= \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2 \\ \hat{m}_j &= \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}, \quad \hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \alpha \left( \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon} + \lambda x_j^{(k-1)} \right)\end{aligned}$$

Заметки:

- Слагаемое затухания весов  $\lambda x_j^{(k-1)}$  добавляется *после* шага адаптивного градиента.

## AdamW (Loshchilov & Hutter, 2017)

Решает распространенную проблему с  $\ell_2$  регуляризацией в адаптивных оптимизаторах, таких как Adam.

Стандартная  $\ell_2$  регуляризация добавляет  $\lambda\|x\|^2$  к функции потерь, что приводит к слагаемому градиента  $\lambda x$ .

В Adam это слагаемое масштабируется адаптивной скоростью обучения  $(\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon)$ , связывая затухание весов с величинами градиента.

AdamW отделяет затухание весов от шага адаптации градиента.

Правило обновления:

$$\begin{aligned}m_j^{(k)} &= \beta_1 m_j^{(k-1)} + (1 - \beta_1) g_j^{(k)} \\v_j^{(k)} &= \beta_2 v_j^{(k-1)} + (1 - \beta_2) (g_j^{(k)})^2 \\ \hat{m}_j &= \frac{m_j^{(k)}}{1 - \beta_1^k}, \quad \hat{v}_j = \frac{v_j^{(k)}}{1 - \beta_2^k} \\ x_j^{(k)} &= x_j^{(k-1)} - \alpha \left( \frac{\hat{m}_j}{\sqrt{\hat{v}_j} + \epsilon} + \lambda x_j^{(k-1)} \right)\end{aligned}$$

Заметки:

- Слагаемое затухания весов  $\lambda x_j^{(k-1)}$  добавляется *после* шага адаптивного градиента.
- Широко применяется при обучении трансформеров и других больших моделей. Выбор по умолчанию для