

Градиентный спуск

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 7

Даня Меркулов



Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ



Сильно выпуклые квадратичные функции

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.



Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.



Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.



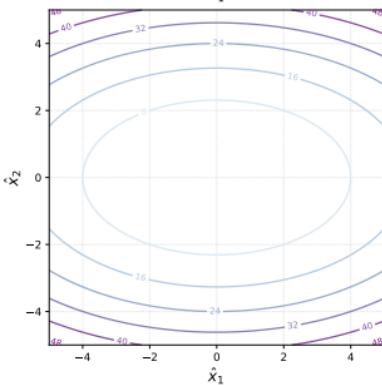
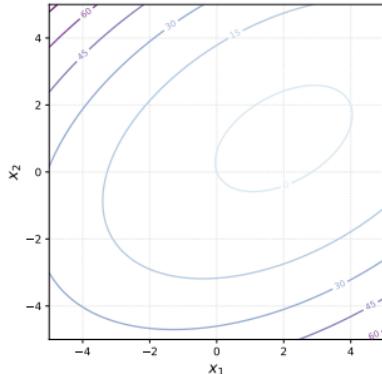
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*)$$



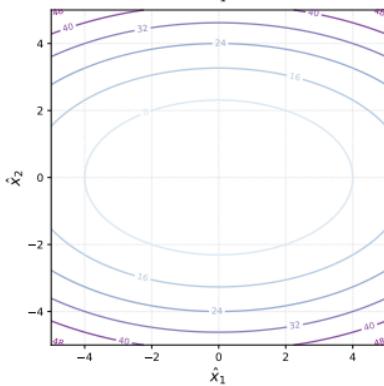
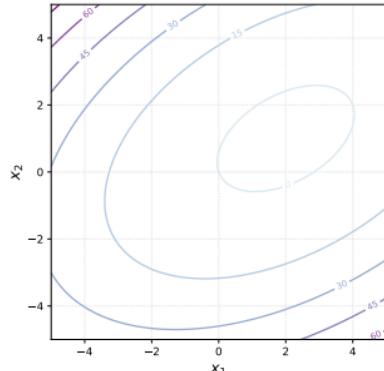
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \end{aligned}$$



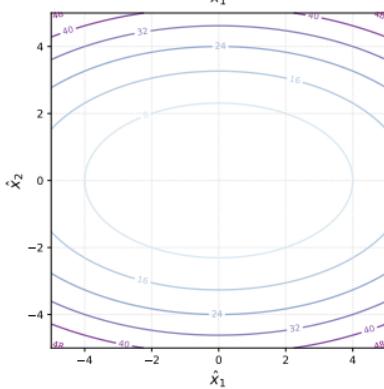
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



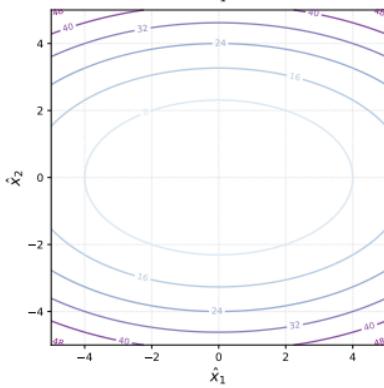
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^\top A x^* \simeq \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} \end{aligned}$$



Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha)$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \\ \alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu &= \alpha^* L - 1 \end{aligned}$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$\begin{aligned} |1 - \alpha \mu| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha \mu &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha L| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L &> 0 \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из \hat{x})

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^{2k} f(x^0)$$

Анализ сходимости

Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью $\frac{\kappa-1}{\kappa+1} = 1 - \frac{2}{\kappa+1}$, где $\kappa = \frac{L}{\mu}$ — число обусловленности квадратичной задачи.

| κ | ρ | Итераций до уменьшения ошибки | |
|----------|--------|-------------------------------|---------------------|
| | | по аргументу в 10 раз | по функции в 10 раз |
| 1.1 | 0.05 | 1 | 1 |
| 2 | 0.33 | 3 | 2 |
| 5 | 0.67 | 6 | 3 |
| 10 | 0.82 | 12 | 6 |
| 50 | 0.96 | 58 | 29 |
| 100 | 0.98 | 116 | 58 |
| 500 | 0.996 | 576 | 288 |
| 1000 | 0.998 | 1152 | 576 |

Число обусловленности κ

$\kappa = 1.0$



$\kappa = 100.0$





Случай PL-функций

PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. ↗ Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

Function, that satisfies
Polyak- Lojasiewicz condition



PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми.  Код

$$f(x) = x^2 + 3 \sin^2(x)$$

Function, that satisfies
Polyak- Lojasiewicz condition



$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Non-convex PL function



Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L -гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$.

Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α , удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L -гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$.

Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α , удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Анализ сходимости

Используем L -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha \mu (f(x^k) - f^*).$$

Вычтя f^* из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

Выпуклый гладкий случай

Выпуклый гладкий случай

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

Пусть $x^* = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$, а $f^* = f(x^*)$. Предположим, что $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и L -гладкой функцией, для некоторого $L > 0$. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x_0 с постоянным шагом α , удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$.

Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 0, L = 100.$$

Convex quadratics. $n=60$, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 110.$$

Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics. $n=60$, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics. n=600, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

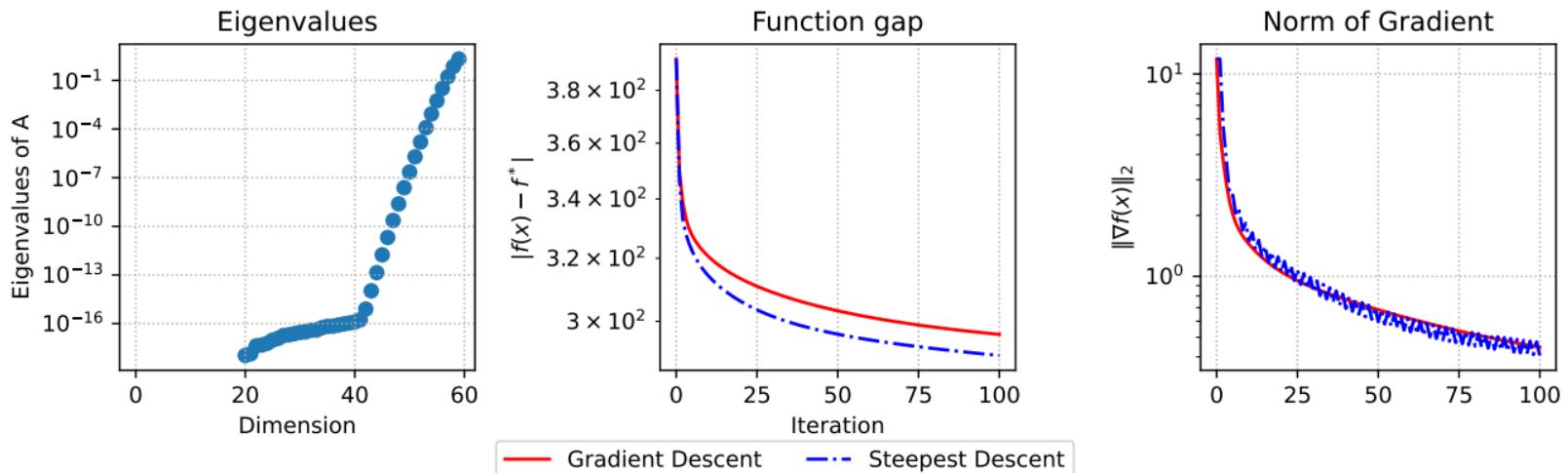
Strongly convex quadratics. n=60, uniform spectrum matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Convex binary logistic regression. mu=0.

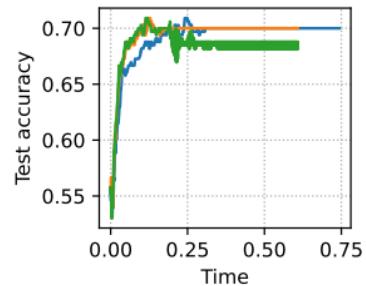
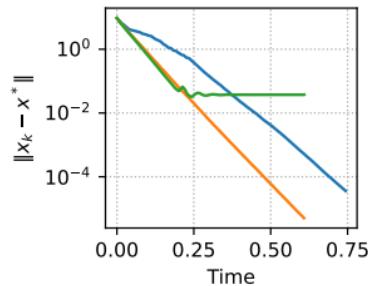
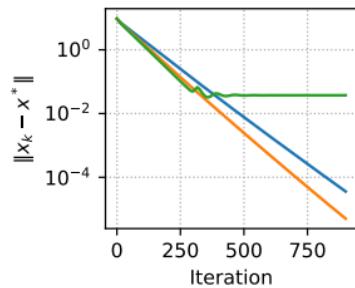


— GD 0.07 — GD 0.9 — GD 10.0

Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Strongly convex binary logistic regression. mu=0.1.



— GD 0.12 — GD 0.14 — GD 0.15

Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. $\mu=0$



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. $\mu=1$



Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x , поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Наконец:

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^*$$

Обратите внимание, что для любого x , поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Наконец:

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*)$$

Обратите внимание, что для любого x , поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x , поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x , поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \\ k_\varepsilon &\geq \nu \log \frac{f(x_0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска

Вопрос: Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка?

Сходимость градиентного спуска

Вопрос: Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка? **Да, можно.**

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

| выпуклая (негладкая) | гладкая (невыпуклая) ¹ | гладкая & выпуклая ² | гладкая & сильно выпуклая |
|--|--|--|---|
| $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ | $\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\ = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ | $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ | $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\varkappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ |

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты – они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

| выпуклая (негладкая) | гладкая (невыпуклая) ¹ | гладкая & выпуклая ² | гладкая & сильно выпуклая |
|--|--|--|---|
| $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ | $\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\ = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$ | $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ | $f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\varkappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$ |

Например, из таблицы выше следует, что никакой метод первого порядка определённой формы не может сходиться быстрее, чем $\Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ($\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ для гладкой выпуклой функции) для гладкой выпуклой функции.

¹Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

²Nemirovski, Yudin, 1979

Бонус: доказательства сходимости

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T (x - x^*) = \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
 $b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и

$$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$$

Тогда $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$ и

$$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right) \\ f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2, \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right) \\ f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2, \end{aligned}$$

Любая μ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right) \\ f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2, \end{aligned}$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [1/4]



Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

Пусть $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Предположим, что $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ является выпуклой и L -гладкой функцией, для некоторого $L > 0$. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x_0 с постоянным шагом α , удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$.

Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Заметим, что мы здесь никак не упоминаем точку минимума. То есть, это сходимость $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (в том числе и до точки минимума).

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x, c \equiv x_{k+1}, a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

(4)

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x, c \equiv x_{k+1}, a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 = \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \quad (4)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x, c \equiv x_{k+1}, a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &= \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 - \alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle = \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle)\end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2\end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x_{k+1})).\end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned}-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),\end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x_{k+1})).\end{aligned}$$

- Переносим правую часть влево, левую – вправо и домножаем на L :

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x_{k+1})) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x_{k+1})). \end{aligned}$$

- Переносим правую часть влево, левую – вправо и домножаем на L :

$$f(x_{k+1} - f(x)) \leq \frac{L}{2} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2).$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

(5)

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) \leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|) \quad (5)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x_0\|^2 - \|x - x_{N-1}\|^2) \end{aligned} \tag{5}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x_0\|^2 - \|x - x_{N-1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x_0\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2) \\
 &= \frac{L}{2N} (\|x - x_0\|^2 - \|x - x_{N-1}\|^2) \\
 &\leq \frac{L}{2N} \|x - x_0\|^2.
 \end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}
 f(x_k) &\geq f(x_{k+1}) + \langle \nabla f(x_{k+1}), x_k - x_{k+1} \rangle \\
 &= f(x_{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x_{k+1})\|^2 \\
 &\geq f(x_{k+1}),
 \end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2) \\
 &= \frac{L}{2N} (\|x - x_0\|^2 - \|x - x_{N-1}\|^2) \\
 &\leq \frac{L}{2N} \|x - x_0\|^2.
 \end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}
 f(x_k) &\geq f(x_{k+1}) + \langle \nabla f(x_{k+1}), x_k - x_{k+1} \rangle \\
 &= f(x_{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x_{k+1})\|^2 \\
 &\geq f(x_{k+1}),
 \end{aligned}$$

то $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_{i+1}) - f(x)) \geq \min_{i=0, \dots, N-1} f(x_{i+1}) - f(x) = f(x_N) - f(x)$.

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x_{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x_0\|^2 - \|x - x_{N-1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x_0\|^2. \end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned} f(x_k) &\geq f(x_{k+1}) + \langle \nabla f(x_{k+1}), x_k - x_{k+1} \rangle \\ &= f(x_{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x_{k+1})\|^2 \\ &\geq f(x_{k+1}), \end{aligned}$$

то $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x_{i+1}) - f(x)) \geq \min_{i=0, \dots, N-1} f(x_{i+1}) - f(x) = f(x_N) - f(x)$. Подставляя это в (5), получаем искомый результат.