

# Ускорения градиентного спуска

## Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

# Скорости сходимости градиентного спуска

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad \kappa = \frac{L}{\mu}$$

	выпуклая и гладкая	выпуклая и сильно выпуклая (или PL)
Верхняя оценка	$f(x_k) - f^* \approx \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 \approx \mathcal{O}\left(\left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}\right)^k\right)$
Нижняя оценка	$f(x_k) - f^* \approx \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 \approx \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k\right)$

# Три схемы обновления

- Градиентный спуск

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Перемещаем точку  $x_k$  в направлении  $-\nabla f(x_k)$  на  $\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|$  единиц.

# Три схемы обновления

- **Градиентный спуск**

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Перемещаем точку  $x_k$  в направлении  $-\nabla f(x_k)$  на  $\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|$  единиц.

- **Метод тяжелого шарика**

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

Выполняем GD, перемещаем обновленный  $x$  в направлении предыдущего шага на  $\beta_k \|x_k - x_{k-1}\|$  единиц.

# Три схемы обновления

- **Градиентный спуск**

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

Перемещаем точку  $x_k$  в направлении  $-\nabla f(x_k)$  на  $\alpha_k \|\nabla f(x_k)\|$  единиц.

- **Метод тяжелого шарика**

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

Выполняем GD, перемещаем обновленный  $x$  в направлении предыдущего шага на  $\beta_k \|x_k - x_{k-1}\|$  единиц.

- **Ускорение Нестерова**

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k + \beta_k (x_k - x_{k-1})) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

или

$$y_{k+1} = x_k - \beta_k (x_k - x_{k-1}),$$

$$x_{k+1} = y_{k+1} - \alpha_k \nabla f(y_{k+1}).$$

Перемещаем не обновленный  $x$  в направлении предыдущего шага на  $\beta_k \|x_k - x_{k-1}\|$  единиц, выполняем GD на сдвинутом  $x$ .

# Черный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&\vdots \\&= x^0 - \sum_{i=0}^k \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})\end{aligned}$$

# Черный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&\vdots \\&= x^0 - \sum_{i=0}^k \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство первого порядка, где

$$\begin{aligned}x^{k+1} &\in x^0 + \text{span} \{ \nabla f(x^0), \nabla f(x^1), \dots, \nabla f(x^k) \} && f - \text{smooth} \\x^{k+1} &\in x^0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x^i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

# Черный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&= x^{k-1} - \alpha^{k-1} \nabla f(x^{k-1}) - \alpha^k \nabla f(x^k) \\&\vdots \\&= x^0 - \sum_{i=0}^k \alpha^{k-i} \nabla f(x^{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство первого порядка, где

$$\begin{aligned}x^{k+1} &\in x^0 + \text{span} \{ \nabla f(x^0), \nabla f(x^1), \dots, \nabla f(x^k) \} && f - \text{smooth} \\x^{k+1} &\in x^0 + \text{span} \{ g_0, g_1, \dots, g_k \}, \text{ where } g_i \in \partial f(x^i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

Чтобы построить нижнюю оценку, нам нужно найти функцию  $f$  из соответствующего класса, такую что любой метод из семейства 1 будет работать не быстрее нижней оценки.



## Гладкий случай

### i Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $L$ -гладкой и выпуклой, так что любой метод 1 для любого  $k : 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$  удовлетворяет:

$$f(x^k) - f^* \geq \frac{3L\|x^0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Не важно, какой метод первого порядка вы используете, всегда существует функция  $f$ , на которой метод будет сходиться не быстрее чем  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта оценка  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не совпадает со скоростью сходимости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - a. Нижняя оценка не является точной.
  - b. Градиентный метод не является оптимальным для этой задачи.

## Гладкий случай

### i Theorem

Существует функция  $f$ , которая является  $L$ -гладкой и выпуклой, так что любой метод 1 для любого  $k : 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$  удовлетворяет:

$$f(x^k) - f^* \geq \frac{3L\|x^0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Не важно, какой метод первого порядка вы используете, всегда существует функция  $f$ , на которой метод будет сходиться не быстрее чем  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта оценка  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не совпадает со скоростью сходимости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - a. Нижняя оценка не является точной.
  - b. **Градиентный метод не является оптимальным для этой задачи.**

# Метод тяжелого шарика для квадратичной задачи

## Question

Какая стратегия шага используется для **GD**?

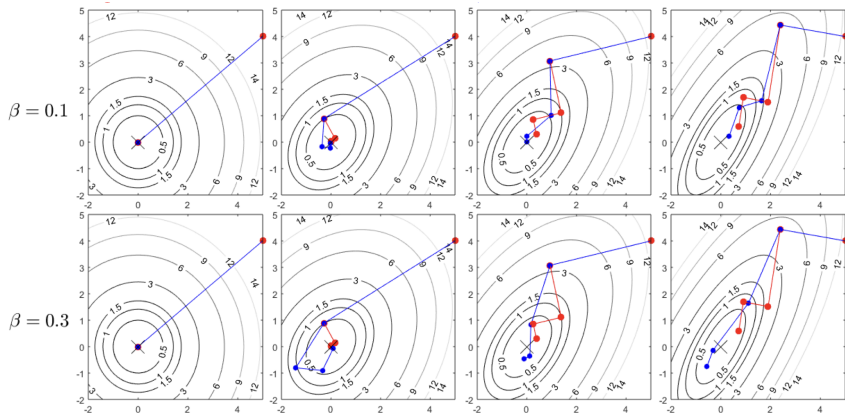


Рис. 1: **GD** vs. **HBM** with fixed  $\beta$ .

**Наблюдение:** для хорошей  $f$  (со сферическими уровнями), GD уже достаточно хорош, и HBM добавляет небольшой эффект. Однако, для плохой  $f$  (с эллиптическими уровнями), HBM лучше в некоторых случаях.

## Метод тяжелого шарика для квадратичной задачи

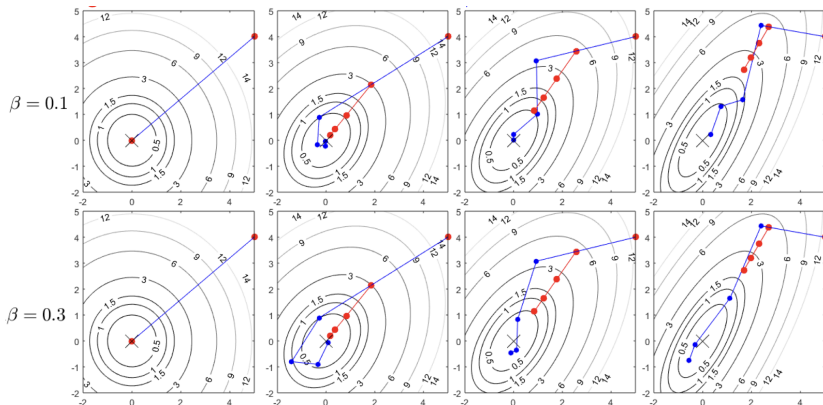


Рис. 2: GD with  $\alpha = \frac{1}{L}$  vs. HBM with fixed  $\beta$ .

**Наблюдение:** то же самое. Если хорошая  $f$  (с сферическими уровнями), GD уже достаточно хорош. Если плохая  $f$  (с эллиптическими уровнями), HBM лучше в некоторых случаях.

## NAG как метод импульса

- Начнем с установки  $k = 0, a_0 = 1, x_{-1} = y_0, y_0$  в произвольном параметре, итерации

$$\text{Обновление градиента } x_k = y_k - \alpha_k \nabla f(y_k) \quad (2)$$

$$\text{Вес экстраполяции } a_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a_k^2}}{2} \quad (3)$$

$$\text{Экстраполяция } y_{k+1} = x_k + \frac{a_k - 1}{a_{k+1}}(x_k - x_{k-1}) \quad (4)$$

Обратите внимание, что здесь используется фиксированный шаг:  $\alpha_k = \frac{1}{L} \forall k$ .

### Theorem

Если  $f$  является  $L$ -гладкой и выпуклой, последовательность  $\{f(x_k)\}_k$ , генерируемая NAG, сходится к оптимальному значению  $f^*$  с скоростью  $\mathcal{O}(\frac{1}{k^2})$  как

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{4L\|x_k - x^*\|^2}{(k+2)^2}$$

# NAG для DL <sup>1</sup>

task	$0_{(SGD)}$	0.9N	0.99N	0.995N	0.999N	0.9M	0.99M	0.995M	0.999M	SGD <sub>C</sub>
Curves	0.48	0.16	0.096	0.091	<b>0.074</b>	0.15	0.10	0.10	0.10	0.16
Mnist	2.1	1.0	<b>0.73</b>	0.75	0.80	1.0	0.77	0.84	0.90	0.9
Faces	36.4	14.2	8.5	7.8	<b>7.7</b>	15.3	8.7	8.3	9.3	NA

Рис. 3: Таблица сообщает о квадратичных ошибках на задачах для каждой комбинации  $\beta_{max}$  и типа импульса (NAG=N, HB=M). Когда  $\beta_{max}$  равен 0, выбор между NAG и HB не имеет значения, поэтому ошибки обучения представлены в одном столбце. Для каждого выбора  $\beta_{max}$  используется наиболее эффективный шаг обучения. Столбец SGD<sub>C</sub> содержит результаты Chapelle & Erhan (2011), которые использовали 1,7 млн. шагов SGD и сети tanh.

<sup>1</sup>Ссылка

## Сходимость метода тяжелого шарика <sup>2</sup>

### i Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и выпуклой и что

$$\beta \in [0, 1), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\beta)}{L}\right).$$

Тогда, последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерацией тяжелого шарика, удовлетворяет

$$f(\bar{x}_T) - f^* \leq \begin{cases} \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)} \left( \frac{L\beta}{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in (0, \frac{1-\beta}{L}], \\ \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)(2(1-\beta) - \alpha L)} \left( L\beta + \frac{(1-\beta)^2}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in [\frac{1-\beta}{L}, \frac{2(1-\beta)}{L}), \end{cases}$$

где  $\bar{x}_T$  является средним по Чезаро итераций, т.е.

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T x_k.$$

<sup>2</sup>Сходимость метода тяжелого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et.al.

# Сходимость метода тяжелого шарика<sup>3</sup>

## i Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и сильно выпуклой и что

$$\alpha \in (0, \frac{2}{L}), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{2} \left( \frac{\mu\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{4} + 4(1 - \frac{\alpha L}{2})} \right).$$

Тогда, последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерацией тяжелого шарика, сходится линейно к уникальному оптимальному значению  $x^*$ . В частности,

$$f(x_k) - f^* \leq q^k(f(x_0) - f^*),$$

где  $q \in [0, 1)$ .

<sup>3</sup>Сходимость метода тяжелого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et.al.



# Сходимость NAG

## i Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и  $L$ -гладкой. Алгоритм Nesterov Accelerated Gradient Descent (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:

**Экстраполяция:**  $y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1})$

**Обновление градиента:**  $x_{k+1} = y_{k+1} - \frac{1}{L} \nabla f(y_{k+1})$

**Вес экстраполяции:**  $\lambda_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_k^2}}{2}$

**Вес экстраполяции:**  $\beta_k = \frac{1 - \lambda_k}{\lambda_{k+1}}$

Последовательности  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемые алгоритмом, сходятся к оптимальному значению  $f^*$  с скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , в частности:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2L\|x_0 - x^*\|^2}{k^2}$$

# Сходимость NAG

## i Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mu$ -сильно выпуклой и  $L$ -гладкой. Алгоритм Нестерова (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:


**Экстраполяция:**  $y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1})$

**Обновление градиента:**  $x_{k+1} = y_{k+1} - \frac{1}{L} \nabla f(y_{k+1})$


**Вес экстраполяции:**  $\gamma_k = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}$

Последовательности  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемые алгоритмом, сходятся к оптимальному значению  $f^*$  линейно:



$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\mu + L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{\kappa}}\right)$$

Давайте напишем код!  Colab

# Логистическая регрессия

Давайте напишем код!  Colab

# Ссылки и примеры Python

- Изображения для HBM взяты из презентации. Посетите сайт для большего количества туториалов.
- Почему импульс действительно работает. Ссылка.
- Запустите код в Colab. Код взят из .
- Важность инициализации и импульса в глубоком обучении. Ссылка.

## NAG для квадратичной задачи

Рассмотрим следующую квадратичную задачу оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} q(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \text{ where } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

Каждая симметричная матрица  $A$  имеет разложение на собственные значения

$$A = Q \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) Q^\top = Q \Lambda Q^\top, \quad Q = [q_1, \dots, q_n].$$

и, как по соглашению, мы будем считать, что  $\lambda_i$ 's отсортированы, от наименьшего  $\lambda_1$  до наибольшего  $\lambda_n$ .  
Очевидно, что  $\lambda_i$  соответствует **кривизне** вдоль соответствующих направлений собственных векторов.

Мы можем перепараметризовать  $q(x)$  с помощью матричного преобразования  $Q$  и оптимизировать  $y = Qx$  с помощью целевой функции

$$p(y) \equiv q(x) = q(Q^\top y) = y^\top Q(Q^\top \Lambda Q) Q^\top y / 2 - b^\top Q^\top y = y^\top \Lambda y / 2 - c^\top y,$$

где  $c = Qb$ .

Мы можем еще раз переписать  $p$  как

$$p(y) = \sum_{i=1}^n [p]_i([y]_i),$$

где  $[p]_i(t) = \lambda_i t^2 / 2 - [c]_i t$ .

## NAG для квадратичной задачи

💡 Теорема 2.1 из [1].

Пусть  $p(y) = \sum_{i=1}^n [p]_i([y]_i)$  такой, что  $[p]_i(t) = \lambda_i t^2/2 - [c]_i t$ . Пусть  $\alpha$  будет произвольным и фиксированным. Обозначим через  $\text{HBM}_x(\beta, p, y, v)$  и  $\text{HBM}_v(\beta, p, y, v)$  вектор параметров и вектор скорости соответственно, полученные применением одного шага HBM (т.е. уравнения 1 и затем уравнения 2) к функции  $p$  в точке  $y$ , со скоростью  $v$ , коэффициентом импульса  $\beta$  и шагом обучения  $\alpha$ . Определим  $\text{NAG}_x$  и  $\text{NAG}_v$  аналогично. Тогда для  $z \in \{x, v\}$ :

$$\text{HBM}_z(\beta, p, y, v) = \begin{bmatrix} \text{HBM}_z(\beta, [p]_1, [y]_1, [v]_1) \\ \vdots \\ \text{HBM}_z(\beta, [p]_n, [y]_n, [v]_n) \end{bmatrix}$$

$$\text{NAG}_z(\beta, p, y, v) = \begin{bmatrix} \text{HBM}_z(\beta(1 - \alpha\lambda_1), [p]_1, [y]_1, [v]_1) \\ \vdots \\ \text{HBM}_z(\beta(1 - \alpha\lambda_n), [p]_n, [y]_n, [v]_n) \end{bmatrix}$$

## NAG для квадратичной задачи. Доказательство (1/2)

### Доказательство:

Легко показать, что если

$$x_{i+1} = \text{HBM}_x(\beta_i, [q]_i, [x]_i, [v]_i)$$

$$v_{i+1} = \text{HBM}_v(\beta_i, [q]_i, [x]_i, [v]_i)$$

то для  $y_i = Qx_i, w_i = Qv_i$

$$y_{i+1} = \text{HBM}_x(\beta_i, [p]_i, [y]_i, [w]_i)$$

$$w_{i+1} = \text{HBM}_v(\beta_i, [p]_i, [y]_i, [w]_i)$$

. Тогда, рассмотрим один шаг  $\text{HBM}_v$ :

$$\begin{aligned}\text{HBM}_v(\beta, p, y, v) &= \beta v - \alpha \nabla p(y) \\ &= (\beta[v]_1 - \alpha \nabla_{[y]_1} p(y), \dots, \beta[v]_n - \alpha \nabla_{[y]_n} p(y)) \\ &= (\beta[v]_1 - \alpha \nabla[p]_1([y]_1), \dots, \beta[v]_n - \alpha \nabla[p]_n([y]_n)) \\ &= (\text{HBM}_v(\beta_1, [p]_1, [y]_1, [v]_1), \dots, \text{HBM}_v(\beta_i, [p]_i, [y]_i, [v]_i))\end{aligned}$$

Это показывает, что один шаг  $\text{HBM}_v$  на  $p$  точно эквивалентен  $n$  одновременным применениям  $\text{HBM}_v$  к одномерным квадратичным  $[p]_i$ , все с одним и тем же  $\beta$  и  $\alpha$ . Аналогично, для  $\text{HBM}_x$ .



## NAG для квадратичной задачи. Доказательство (2/2)

Далее мы покажем, что NAG, примененный к одномерной квадратичной задаче с коэффициентом импульса  $\beta$ , эквивалентен HBM, примененному к той же квадратичной задаче и с тем же шагом обучения, но с коэффициентом импульса  $\beta(1 - \alpha\lambda)$ . Мы покажем это, раскрыв  $\text{NAG}_v(\beta, [p]_i, y, v)$  (где  $y$  и  $v$  являются скалярами):

$$\begin{aligned}\text{NAG}_v(\beta, [p]_i, y, v) &= \beta v - \alpha \nabla [p]_i(y + \beta v) \\ &= \beta v - \alpha(\lambda_i(y + \beta v) - c_i) \\ &= \beta v - \alpha\lambda_i\beta v - \alpha(\lambda_i y - c_i) \\ &= \beta(1 - \alpha\lambda_i)v - \alpha \nabla [p]_i(y) \\ &= \text{HBM}_v(\beta(1 - \alpha\lambda_i), [p]_i, y, v).\end{aligned}$$

ч.т.д.

**Наблюдения:**

- HBM и NAG становятся **эквивалентными** когда  $\alpha$  мал (когда  $\alpha\lambda \ll 1$  для каждого собственного значения  $\lambda$  матрицы  $A$ ), поэтому NAG и HBM отличаются только когда  $\alpha$  достаточно велико.
- Когда  $\alpha$  относительно велико, NAG использует меньший эффективный импульс для направлений с высокой кривизной, что **предотвращает колебания** (или расхождение) и, таким образом, позволяет использовать большее  $\beta$ , что допускает СМ при заданном  $\alpha$ .