

# Метод Ньютона и квазиньютоновские методы

Методы выпуклой оптимизации

НЕДЕЛЯ 11

Даня Меркулов  
Пётр Остроухов



**Даня Меркулов, Петр Остроухов**

Оптимизация для всех! ЦУ

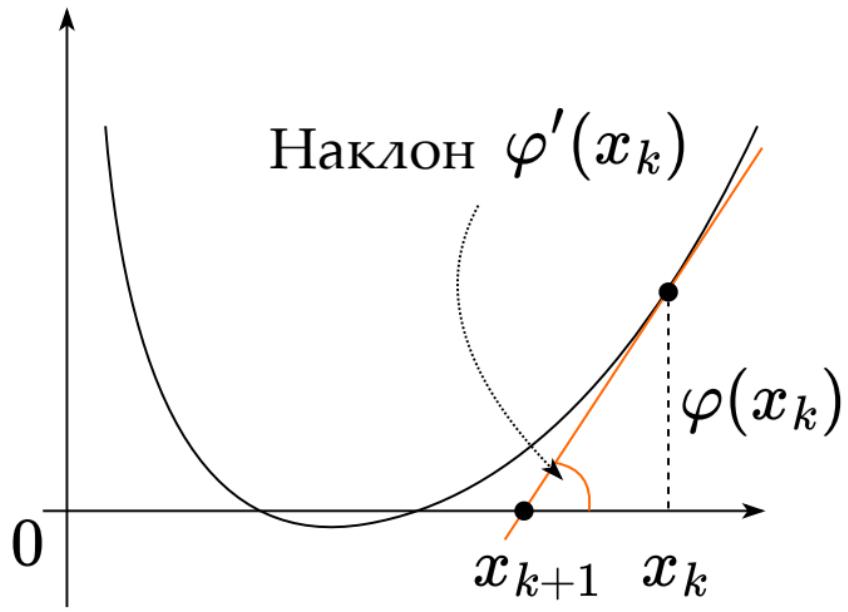




# Метод Ньютона

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции

Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .



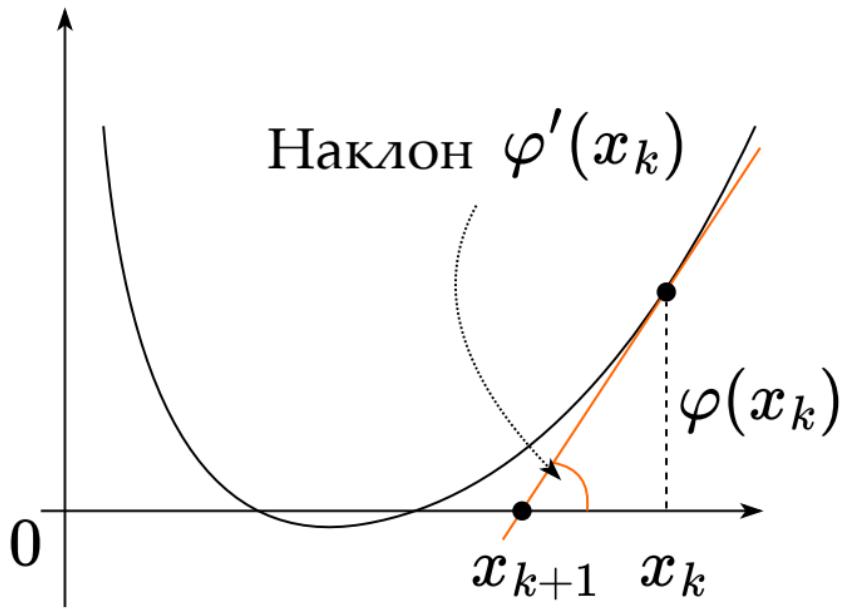
# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции

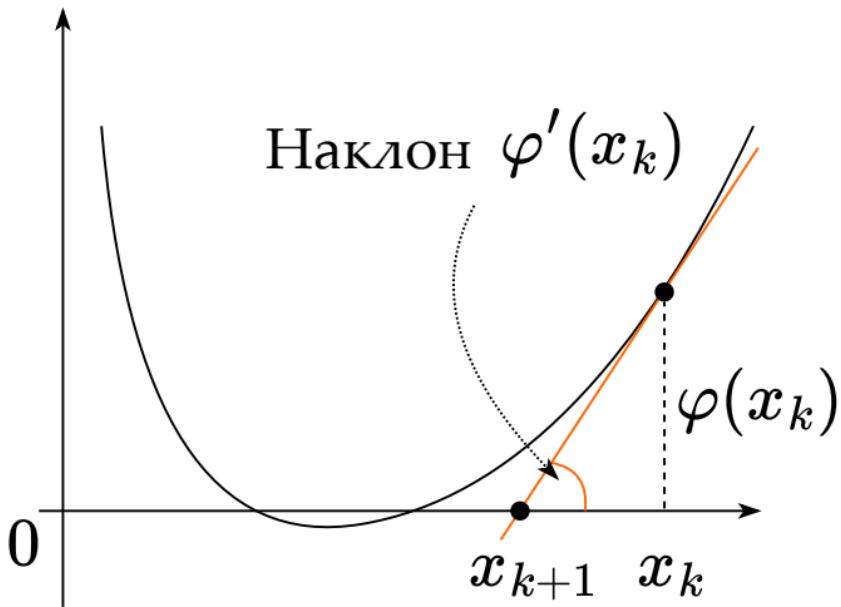


Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



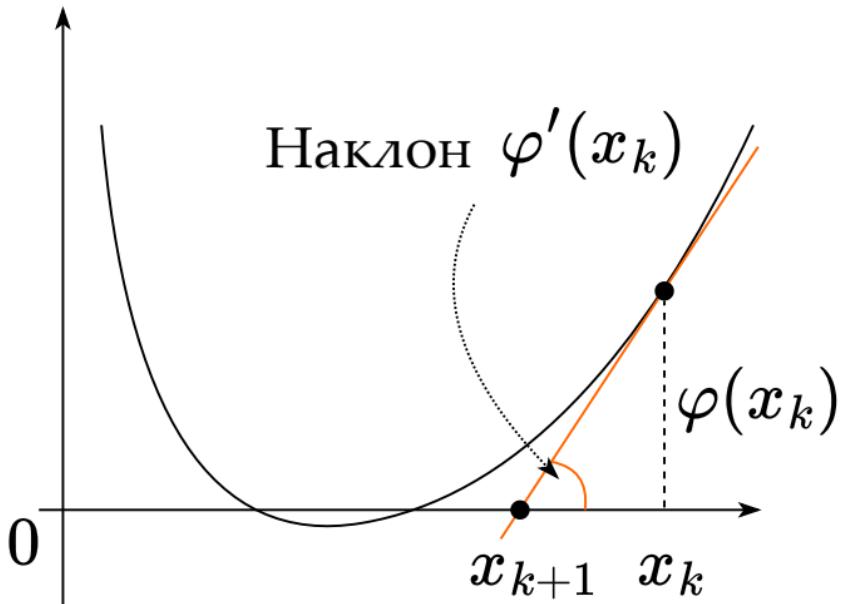
Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Мы получаем итерационную схему:

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Мы получаем итерационную схему:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Мы получаем итерационную схему:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Этот метод станет методом оптимизации Ньютона в случае  $f'(x) = \varphi(x)$ <sup>1</sup>:

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$

# Идея метода Ньютона для нахождения корней функции



Рассмотрим функцию  $\varphi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Основная идея заключается в том, чтобы построить линейное приближение в точке  $x_k$  и найти его корень, который будет новой точкой итерации:

$$\varphi'(x_k) = \frac{\varphi(x_k)}{x_k - x_{k+1}}$$

Мы получаем итерационную схему:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{\varphi(x_k)}{\varphi'(x_k)}.$$

Этот метод станет методом оптимизации Ньютона в случае  $f'(x) = \varphi(x)$ <sup>1</sup>:

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

<sup>1</sup>Мы фактически решаем задачу нахождения стационарных точек  $\nabla f(x) = 0$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k)\end{aligned}$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \\ [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)\end{aligned}$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\begin{aligned} \nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \\ [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k). \end{aligned}$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \\ [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k).\end{aligned}$$

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации

Пусть у нас есть функция  $f(x)$  и некоторая точка  $x_k$ . Рассмотрим квадратичное приближение этой функции в окрестности  $x_k$ :

$$f_{x_k}^{II}(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle.$$

Идея метода заключается в том, чтобы найти точку  $x_{k+1}$ , которая минимизирует функцию  $f_{x_k}^{II}(x)$ , т.е.  $\nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) = 0$ .

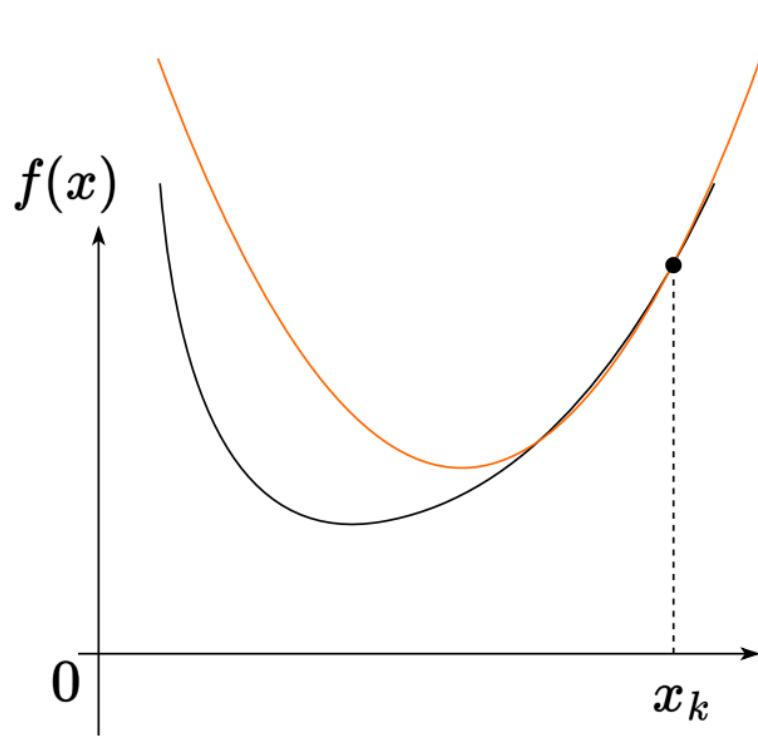
$$\begin{aligned} \nabla f_{x_k}^{II}(x_{k+1}) &= \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \\ \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -\nabla f(x_k) \\ [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla^2 f(x_k)(x_{k+1} - x_k) &= -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \\ x_{k+1} &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k). \end{aligned}$$

Необходимо отметить ограничения, связанные с необходимостью невырожденности (для существования метода) и положительной определенности (для гарантии сходимости) гессиана.

# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Метод Ньютона как оптимизация локальной квадратичной аппроксимации



# Свойства метода Ньютона

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

# Отсутствие квадратичной сходимости, если некоторые предположения нарушаются

i

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$



# Отсутствие квадратичной сходимости, если некоторые предположения нарушаются

i

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$

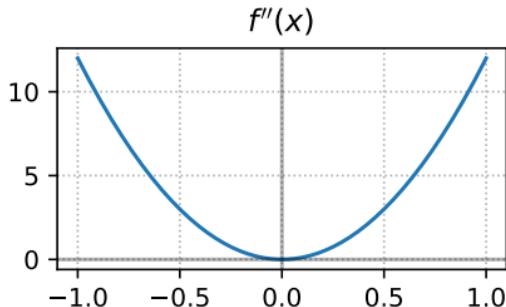
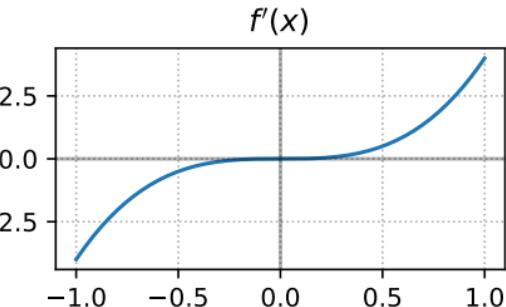
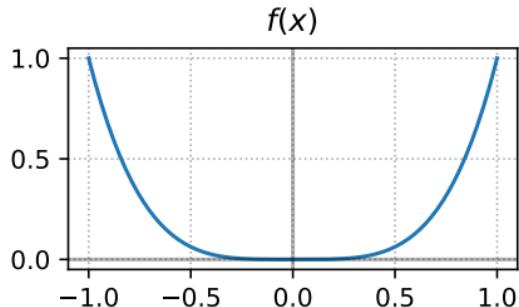


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^3}{12x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k = \frac{2}{3}x_k,$$

# Отсутствие квадратичной сходимости, если некоторые предположения нарушаются

i

$$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2$$



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)} = x_k - \frac{4x_k^3}{12x_k^2} = x_k - \frac{1}{3}x_k = \frac{2}{3}x_k,$$

сходится линейно к 0, единственному решению задачи, с линейной скоростью.

# Локальная сходимость метода Ньютона для гладкой сильно выпуклой $f(x)$



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 2, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

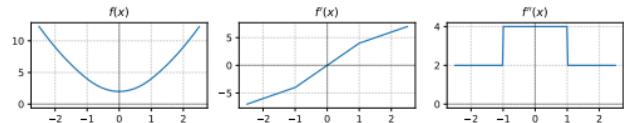
Эта функция сильно выпукла, но вторая производная не является липшицевой.

# Локальная сходимость метода Ньютона для гладкой сильно выпуклой $f(x)$



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ 2x^2 + 2, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Эта функция сильно выпукла, но вторая производная не является липшицевой.

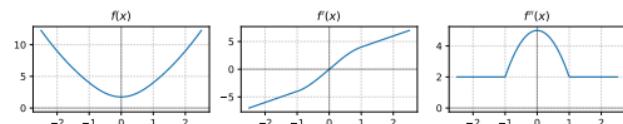


# Локальная сходимость метода Ньютона даже если $\nabla^2 f$ липшицев



$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \leq -1 \\ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{7}{4}, & -1 < x < 1 \\ (x+1)^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

Эта функция сильно выпукла и вторая производная является липшицевой.



# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



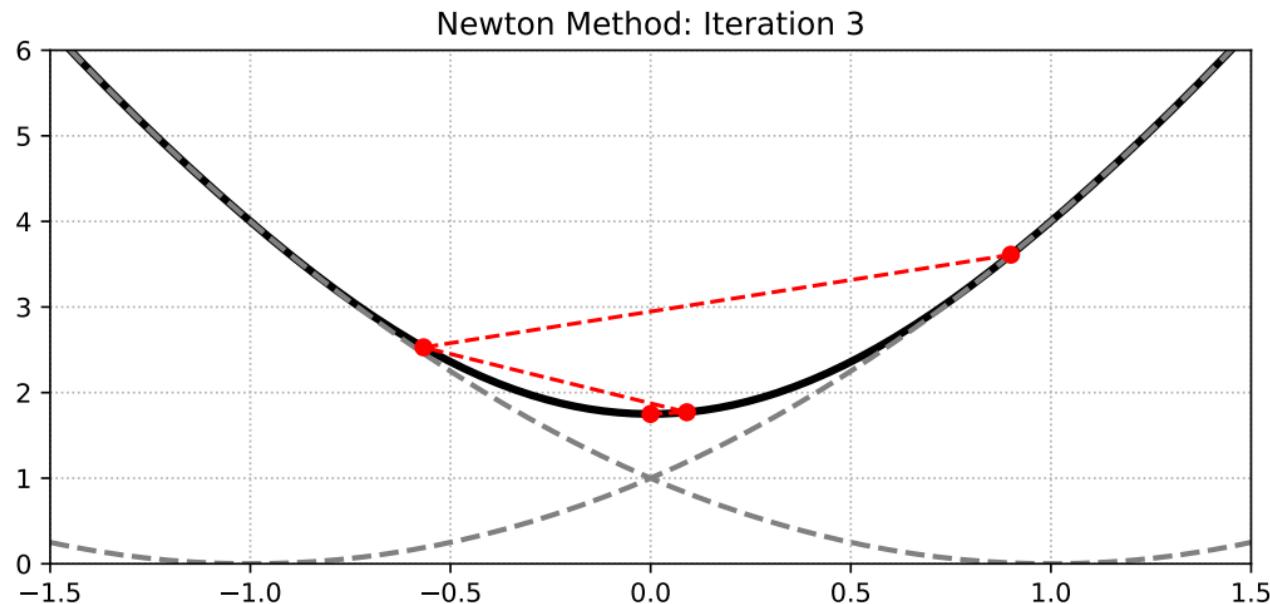
# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Хорошая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



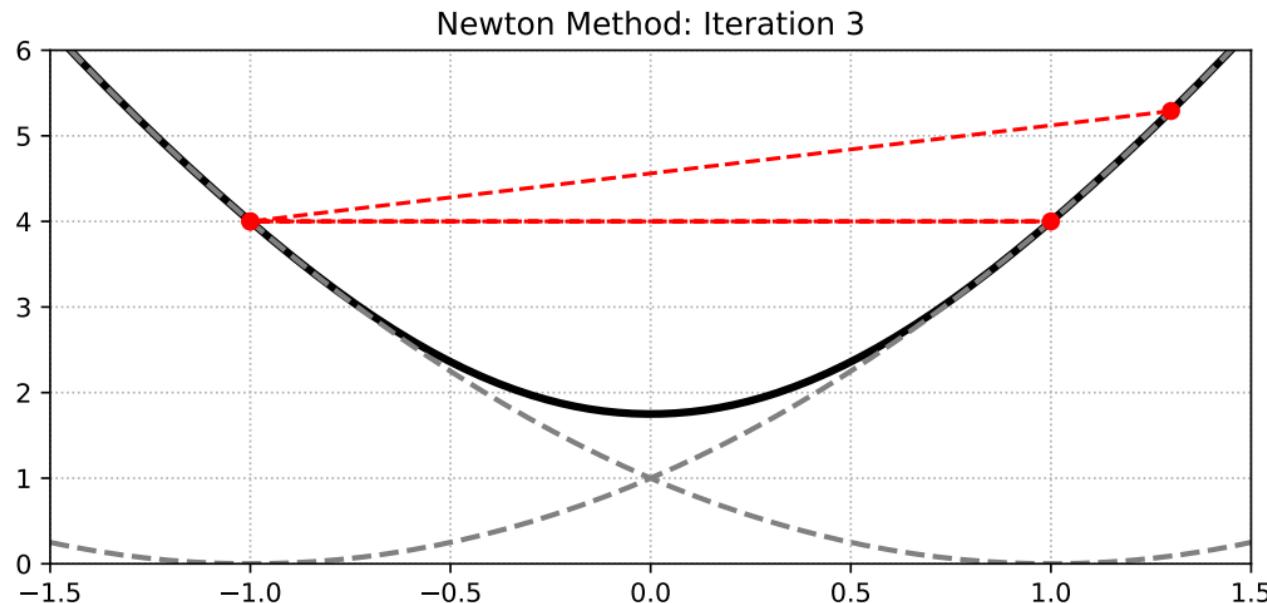
# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



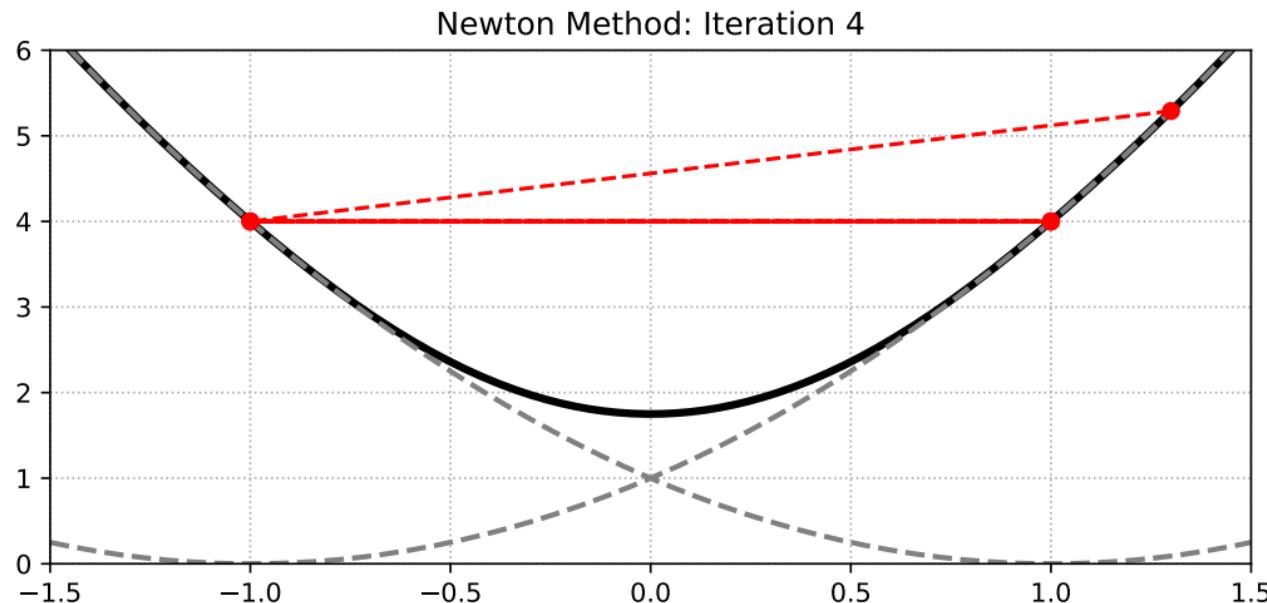
# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



# Локальная сходимость метода Ньютона. Плохая инициализация



# Проблемы метода Ньютона

## Newton



Рисунок 1. Animation 

# Проблемы метода Ньютона



Рисунок 2. Animation

# Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=10$



Рисунок 3. Так как задача - квадратичная, то метод Ньютона сходится за один шаг.

# Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=0$ ,  $L=10$

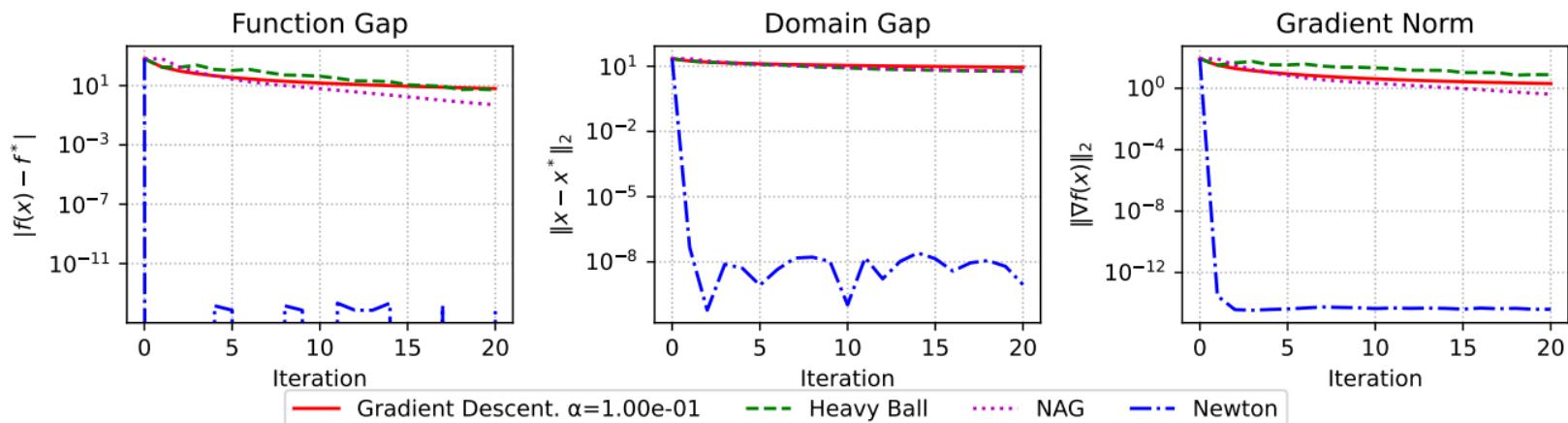


Рисунок 4. В этом случае метод Ньютона тоже крайне быстро сходится, однако, отметим, что это происходит благодаря тому, что минимальное собственное число гессиана не 0, а около  $10^{-8}$ . Если применять метод Ньютона в наивной форме с обращением матрицы, то получится ошибка, так как матрица вырождена. На практике все равно можно использовать метод, если для направления

# Метод Ньютона для квадратичной задачи (линейной регрессии)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lambda(A) \in [\mu; L].$$

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$

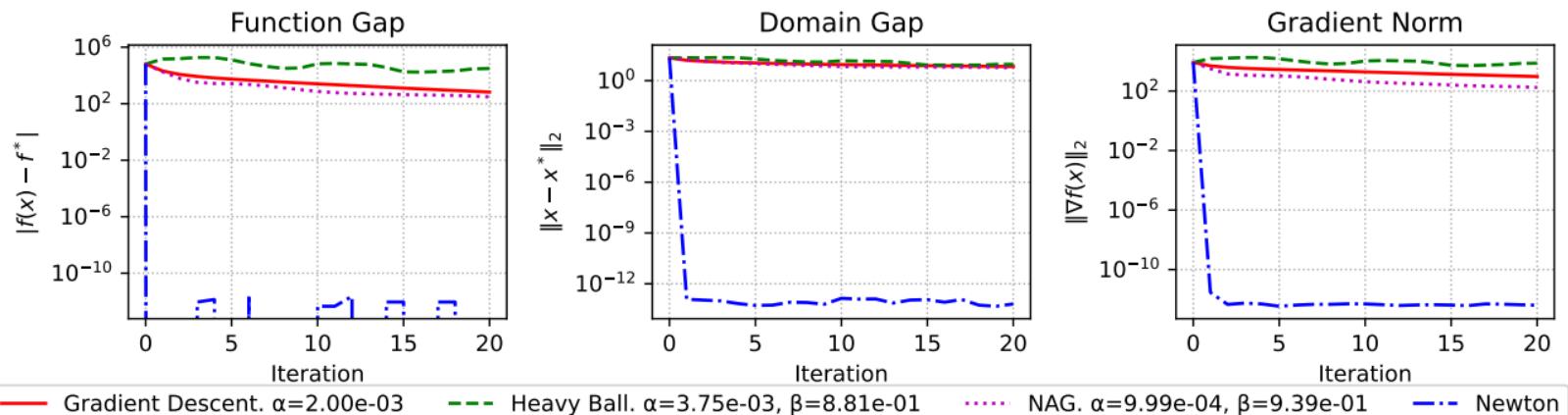


Рисунок 5. Здесь число обусловленности гессиана в 1000 раз больше, чем в предыдущем случае, и метод Ньютона сходится за 1 итерацию.

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии



Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .  $m=1000$ ,  $n=10$ .

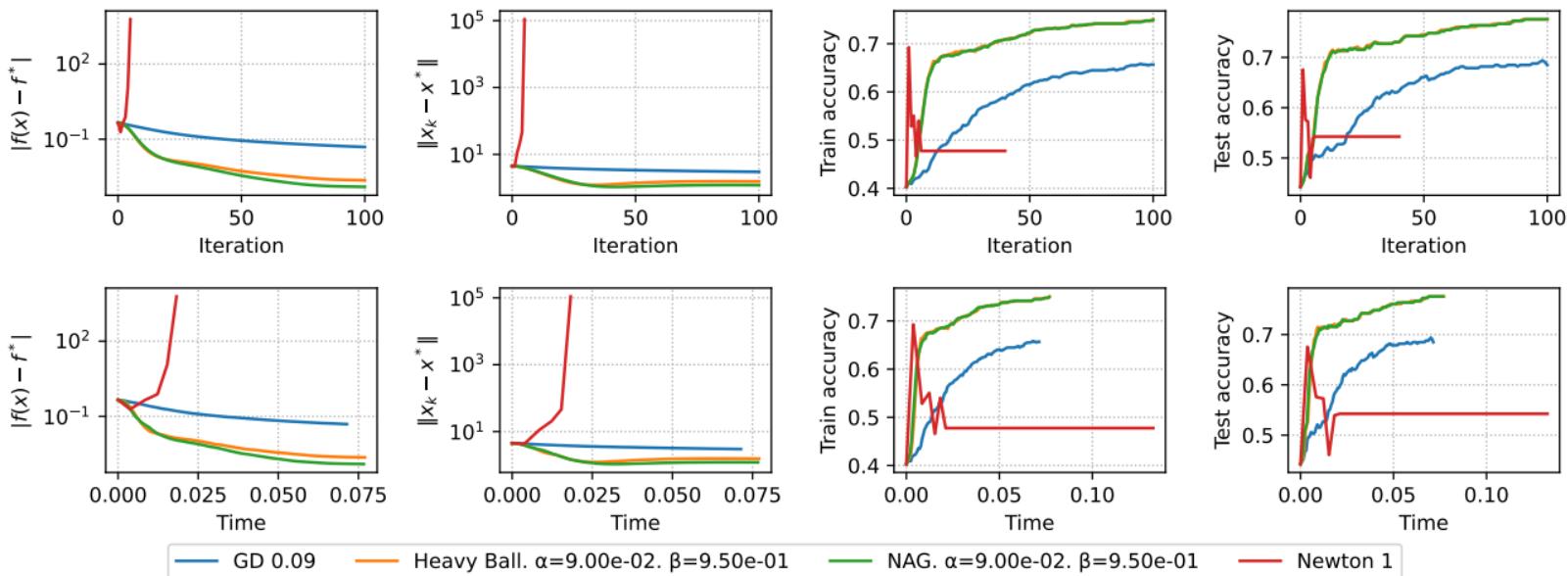


Рисунок 6. Наблюдается расходимость метода Ньютона. Сразу отметим, что в задаче нет регуляризации и гарантии сильной выпуклости. А также нет гарантий того, что мы инициализируем метод в окрестности решения.

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=10$ .



Рисунок 7. Добавление регуляризации гарантирует сильную выпукłość, наблюдается сходимость метода Ньютона.

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=500$ .



Рисунок 8. Увеличим размерность в 50 раз и наблюдаем расходимость метода Ньютона. Это можно связать с тем, что мы инициализируем метод в точке, далекой от решения

# Метод Ньютона для задачи бинарной логистической регрессии

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.2$ .  $m=1000$ ,  $n=500$ .



Рисунок 9. Не меняя задачу, изменим начальную точку и наблюдаем квадратичную сходимость метода Ньютона. Однако, обратите внимание на время работы. Уже при небольшой размерности, метод Ньютона работает значительно дольше, чем градиентные методы.

# Задача нахождения аналитического центра многогранника

Найти точку  $x \in \mathbb{R}^n$ , которая максимизирует сумму логарифмов расстояний до границ многогранника:

$$\max_x \sum_{i=1}^m \log(1 - a_i^T x) + \sum_{j=1}^n \log(1 - x_j^2)$$

или, эквивалентно, минимизирует:

$$\min_x - \sum_{i=1}^m \log(1 - a_i^T x) - \sum_{j=1}^n \log(1 - x_j^2)$$

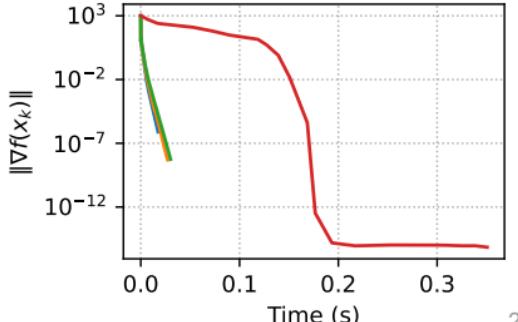
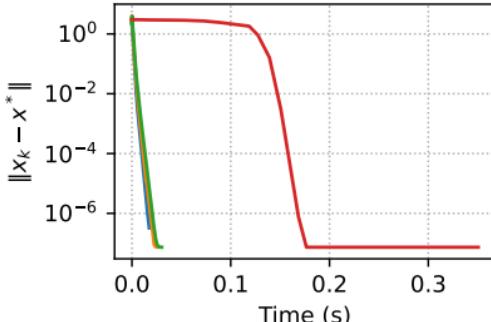
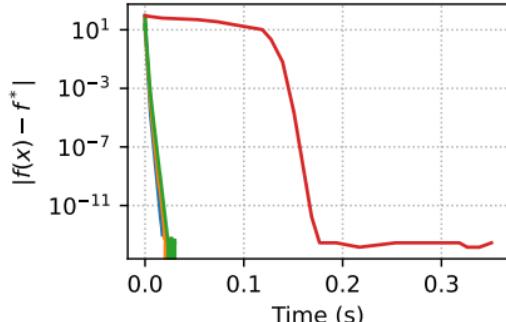
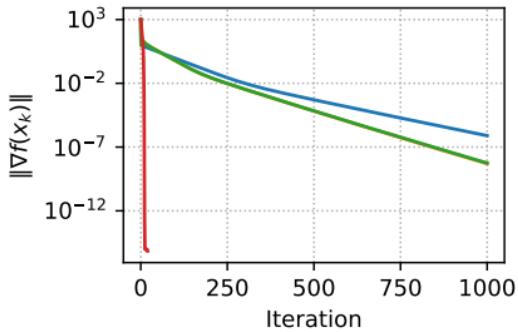
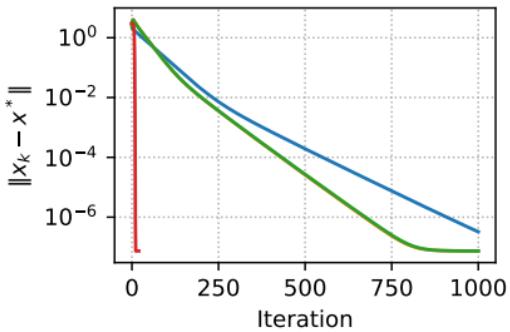
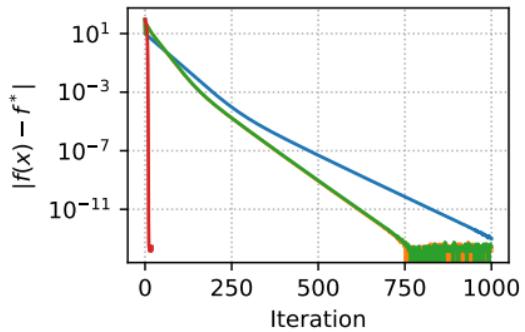
при ограничениях:  $-a_i^T x < 1$  для всех  $i = 1, \dots, m$ , где  $a_i$  - строки матрицы  $A^T$  -  $|x_j| < 1$  для всех  $j = 1, \dots, n$

Аналитический центр многогранника - это точка, которая максимально удалена от всех границ многогранника в смысле логарифмического барьера. Эта концепция широко используется в методах внутренней точки для выпуклой оптимизации.



# Задача нахождения аналитического центра многогранника

Analytical Center,  $m = 20, n = 100$



GD,  $\alpha=0.005$

Heavy Ball,  $\alpha=0.005, \beta=0.33$

NAG,  $\alpha=0.005, \beta=0.33$

Newton, damping=1.0

# Задача нахождения аналитического центра многогранника

Analytical Center, m = 200, n = 1000



GD, $\alpha=0.00015$	Heavy Ball, $\alpha=0.00015, \beta=0.79$	NAG, $\alpha=0.00015, \beta=0.79$	Newton, damping=1.0
----------------------	--	-----------------------------------	---------------------

# Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x)A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

# Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x)A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k)A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

# Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x)A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$y_{k+1} = y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

$$Ay_{k+1} = Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

# Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x)A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$y_{k+1} = y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

$$Ay_{k+1} = Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

Таким образом, правило обновления для  $x$  выглядит так:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

# Аффинная инвариантность метода Ньютона

Важным свойством метода Ньютона является **аффинная инвариантность**. Пусть дана функция  $f$  и невырожденная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , пусть  $x = Ay$ , и пусть  $g(y) = f(Ay)$ . Заметим, что  $\nabla g(y) = A^T \nabla f(x)$  и  $\nabla^2 g(y) = A^T \nabla^2 f(x)A$ . Шаги Ньютона на  $g$  выражаются как:

$$y_{k+1} = y_k - (\nabla^2 g(y_k))^{-1} \nabla g(y_k)$$

Раскрывая это, мы получаем:

$$y_{k+1} = y_k - (A^T \nabla^2 f(Ay_k) A)^{-1} A^T \nabla f(Ay_k)$$

Используя свойство обратной матрицы  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ , это упрощается до:

$$y_{k+1} = y_k - A^{-1} (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

$$Ay_{k+1} = Ay_k - (\nabla^2 f(Ay_k))^{-1} \nabla f(Ay_k)$$

Таким образом, правило обновления для  $x$  выглядит так:

$$x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

Это показывает, что итерация метода Ньютона, не зависит от масштаба задачи. У градиентного спуска такого свойства нет!

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$

Минусы:

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность

Минусы:

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода

Минусы:

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций
- Гессиан может быть вырожденным в  $x^*$

# Резюме

Плюсы:

- Квадратичная сходимость вблизи решения  $x^*$
- Аффинная инвариантность
- Отсутствие параметров у метода
- Сходимость можно сделать глобальной, если использовать демпфированный метод Ньютона (добавить процедуру линейного поиска и шага метода)

Минусы:

- Необходимо хранить (обратный) гессиан на каждой итерации:  $\mathcal{O}(n^2)$  памяти
- Необходимо решать линейные системы:  $\mathcal{O}(n^3)$  операций
- Гессиан может быть вырожденным в  $x^*$
- Гессиан может не быть положительно определенным  $\rightarrow$  направление  $-(f''(x))^{-1}f'(x)$  может не быть направлением спуска

# Квазиньютоновские методы

# Интуиция квазиньютоновских методов

Для классической задачи безусловной оптимизации  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  общий алгоритм итерационного метода записывается как:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

# Интуиция квазиньютоновских методов

Для классической задачи безусловной оптимизации  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  общий алгоритм итерационного метода записывается как:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

В методе Ньютона направление  $d_k$  (направление Ньютона) устанавливается решением линейной системы на каждом шаге:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

# Интуиция квазиньютоновских методов

Для классической задачи безусловной оптимизации  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  общий алгоритм итерационного метода записывается как:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

В методе Ньютона направление  $d_k$  (направление Ньютона) устанавливается решением линейной системы на каждом шаге:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

т.е. на каждой итерации необходимо **вычислить** гессиан и градиент и **решить** линейную систему.

# Интуиция квазиньютоновских методов

Для классической задачи безусловной оптимизации  $f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$  общий алгоритм итерационного метода записывается как:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$$

В методе Ньютона направление  $d_k$  (направление Ньютона) устанавливается решением линейной системы на каждом шаге:

$$B_k d_k = -\nabla f(x_k), \quad B_k = \nabla^2 f(x_k)$$

т.е. на каждой итерации необходимо **вычислить** гессиан и градиент и **решить** линейную систему.

Обратите внимание, что если мы возьмем единичную матрицу  $B_k = I_n$  в качестве  $B_k$  на каждом шаге, мы получим точно метод градиентного спуска.

Общий алгоритм квазиньютоновских методов основан на выборе матрицы  $B_k$  так, чтобы она в некотором смысле стремилась к истинному значению гессиана  $\nabla^2 f(x_k)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

**Основная идея:** Поскольку  $B_k$  уже содержит информацию о гессиане, используем подходящее обновление матрицы для формирования  $B_{k+1}$ .

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

**Основная идея:** Поскольку  $B_k$  уже содержит информацию о гессиане, используем подходящее обновление матрицы для формирования  $B_{k+1}$ .

**Разумное требование для  $B_{k+1}$**  (вдохновленное методом секущих):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \\ g_k &= B_{k+1}s_k\end{aligned}$$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

**Основная идея:** Поскольку  $B_k$  уже содержит информацию о гессиане, используем подходящее обновление матрицы для формирования  $B_{k+1}$ .

**Разумное требование для  $B_{k+1}$**  (вдохновленное методом секущих):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \\ g_k &= B_{k+1}s_k\end{aligned}$$

Помимо уравнения секущей, мы хотим:

- $B_{k+1}$  симметричная

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

**Основная идея:** Поскольку  $B_k$  уже содержит информацию о гессиане, используем подходящее обновление матрицы для формирования  $B_{k+1}$ .

**Разумное требование для  $B_{k+1}$**  (вдохновленное методом секущих):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \\ g_k &= B_{k+1}s_k\end{aligned}$$

Помимо уравнения секущей, мы хотим:

- $B_{k+1}$  симметричная
- $B_{k+1}$  близка к  $B_k$

# Шаблон квазиньютоновского метода

Пусть  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $B_0 \succ 0$ . Для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , повторяем:

1. Решить  $B_k d_k = -\nabla f(x_k)$
2. Обновить  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$
3. Вычислить  $B_{k+1}$  из  $B_k$

Разные квазиньютоновские методы реализуют шаг 3 по-разному. Мы скоро увидим, что обычно мы можем вычислить  $(B_{k+1})^{-1}$  из  $(B_k)^{-1}$ .

**Основная идея:** Поскольку  $B_k$  уже содержит информацию о гессиане, используем подходящее обновление матрицы для формирования  $B_{k+1}$ .

**Разумное требование для  $B_{k+1}$**  (вдохновленное методом секущих):

$$\begin{aligned}\nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) &= B_{k+1}(x_{k+1} - x_k) \\ g_k &= B_{k+1}s_k\end{aligned}$$

Помимо уравнения секущей, мы хотим:

- $B_{k+1}$  симметричная
- $B_{k+1}$  близка к  $B_k$
- $B_k \succ 0 \Rightarrow B_{k+1} \succ 0$

# Симметричное одноранговое обновление

Попробуем обновление вида:

$$B_{k+1} = B_k + a u u^T$$

# Симметричное одноранговое обновление

Попробуем обновление вида:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T$$

Уравнение секущей  $B_{k+1}s_k = g_k$  дает:

$$(au^T s_k)u = g_k - B_k s_k$$

# Симметричное одноранговое обновление

Попробуем обновление вида:

$$B_{k+1} = B_k + a u u^T$$

Уравнение секущей  $B_{k+1}s_k = g_k$  дает:

$$(au^T s_k)u = g_k - B_k s_k$$

Это верно только если  $u$  является параллельным  $g_k - B_k s_k$ . Положив  $u = g_k - B_k s_k$ , мы решаем уравнение,

$$a = \frac{1}{(g_k - B_k s_k)^T s_k},$$

# Симметричное одноранговое обновление

Попробуем обновление вида:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T$$

Уравнение секущей  $B_{k+1}s_k = g_k$  дает:

$$(au^T s_k)u = g_k - B_k s_k$$

Это верно только если  $u$  является параллельным  $g_k - B_k s_k$ . Положив  $u = g_k - B_k s_k$ , мы решаем уравнение,

$$a = \frac{1}{(g_k - B_k s_k)^T s_k},$$

что приводит к

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(g_k - B_k s_k)(g_k - B_k s_k)^T}{(g_k - B_k s_k)^T s_k}$$

Это называется симметричным одноранговым (SR1) обновлением или методом Бройдена.



# Симметричное одноранговое обновление с инверсией

Как мы можем решить

$$B_{k+1}d_{k+1} = -\nabla f(x_{k+1}),$$

чтобы сделать следующий шаг? Помимо распространения  $B_k$  на  $B_{k+1}$ , давайте распространим инверсии, т.е.  $C_k = B_k^{-1}$  на  $C_{k+1} = (B_{k+1})^{-1}$ .

[Формула Шермана-Моррисона:](#)

Формула Шермана-Моррисона утверждает:

$$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1 + v^TA^{-1}u}$$

Таким образом, для SR1 обновления, обратная матрица также легко обновляется:

$$C_{k+1} = C_k + \frac{(s_k - C_k g_k)(s_k - C_k g_k)^T}{(s_k - C_k g_k)^T g_k}$$

В общем, SR1 прост и дешев, но у него есть ключевой недостаток: он не сохраняет положительную определенность.

# Обновление Давидона-Флетчера-Пауэлла

Мы могли бы продолжить ту же идею для обновления обратной матрицы  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + a u u^T + b v v^T.$$

# Обновление Давидона-Флетчера-Пауэлла

Мы могли бы продолжить ту же идею для обновления обратной матрицы  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + a u u^T + b v v^T.$$

Умножая на  $g_k$ , используя уравнение секущей  $s_k = C_k g_k$  и решая для  $a, b$ , получаем:

$$C_{k+1} = C_k - \frac{C_k g_k g_k^T C_k}{g_k^T C_k g_k} + \frac{s_k s_k^T}{g_k^T s_k}$$

Это обновление Давидона-Флетчера-Пауэлла (DFP). Также дешево:  $O(n^2)$ , но сохраняет положительную определенность. Не так популярно, как BFGS.

# Обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно



Попробуем теперь двухранговое обновление:

$$B_{k+1} = B_k + a u u^T + b v v^T.$$

# Обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно



Попробуем теперь двухранговое обновление:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T + bvv^T.$$

Уравнение секущей  $g_k = B_{k+1}s_k$  дает:

$$g_k - B_k s_k = (au^T s_k)u + (bv^T s_k)v$$

# Обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно



Попробуем теперь двухранговое обновление:

$$B_{k+1} = B_k + auu^T + bvv^T.$$

Уравнение секущей  $g_k = B_{k+1}s_k$  дает:

$$g_k - B_k s_k = (au^T s_k)u + (bv^T s_k)v$$

Положив  $u = g_k$ ,  $v = B_k s_k$  и решая для  $a$ ,  $b$ , получаем:

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{g_k g_k^T}{s_k^T g_k}$$

Это обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно (BFGS).

# Обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно с инверсией



## Формула Вудбери

Формула Вудбери, обобщение формулы Шермана-Моррисона, дается как:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

# Обновление Брайдена-Флетчера-Гольдштейна-Шенно с инверсией



## Формула Будбери

Формула Будбери, обобщение формулы Шермана-Моррисона, дается как:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

Примененная к нашему случаю, мы получаем двухранговое обновление на обратной матрице  $C$ :

$$C_{k+1} = C_k + \frac{(s_k - C_k g_k)s_k^T}{g_k^T s_k} + \frac{s_k(s_k - C_k g_k)^T}{g_k^T s_k} - \frac{(s_k - C_k g_k)^T g_k}{(g_k^T s_k)^2} s_k s_k^T$$

$$C_{k+1} = \left(I - \frac{s_k g_k^T}{g_k^T s_k}\right) C_k \left(I - \frac{g_k s_k^T}{g_k^T s_k}\right) + \frac{s_k s_k^T}{g_k^T s_k}$$

Эта формулировка обеспечивает, что обновление BFGS, оставаясь достаточно общим, сохраняет вычислительную эффективность и требует  $O(n^2)$  операций. Важно, что обновление BFGS сохраняет положительную определенность:  $B_k \succ 0 \Rightarrow B_{k+1} \succ 0$ .  
Эквивалентно,  $C_k \succ 0 \Rightarrow C_{k+1} \succ 0$



# Код

- Открыть в Colab

# Код

- Открыть в Colab
- Сравнение квазиньютоновских методов

# Код

- Открыть в Colab
- Сравнение квазиньютоновских методов
- Некоторые практические замечания о методе Ньютона

# Бонус: доказательства

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

1. Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

2. Мы будем отслеживать расстояние до решения

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

- Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

- Мы будем отслеживать расстояние до решения

$$x_{k+1} - x^* = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) - x^* = x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) =$$

# Квадратичная сходимость метода Ньютона

## Theorem

Пусть  $f(x)$  — сильно выпуклая дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}^n$ , для второй производной которой выполняются неравенства:  $\mu I_n \preceq \nabla^2 f(x) \preceq L I_n$ . Пусть также гессиан функции  $M$ -липшицев. Тогда метод Ньютона сходится локально к решению с квадратичной скоростью, т.е. при  $\|x_0 - x^*\| < \frac{2\mu}{3M}$ :

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq \frac{3M}{2\mu} \|x_k - x^*\|^2$$

## Доказательство

- Мы будем использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau$$

- Мы будем отслеживать расстояние до решения

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) - x^* = x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) = \\ &= x_k - x^* - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau \end{aligned}$$

# Сходимость

3.

$$= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) =$$

# Сходимость

3.

$$\begin{aligned} &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\ &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \end{aligned}$$

# Сходимость

3.

$$\begin{aligned}
 &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) =
 \end{aligned}$$

# Сходимость

3.

$$\begin{aligned}
 &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} G_k(x_k - x^*)
 \end{aligned}$$

# Сходимость

3.

$$\begin{aligned}
 &= \left( I - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \nabla^2 f(x_k) - \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &= [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \left( \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau \right) (x_k - x^*) = \\
 &\quad = [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} G_k(x_k - x^*)
 \end{aligned}$$

4. Введём:

$$G_k = \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))) d\tau .$$

# Сходимость

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

# Сходимость

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\|G_k\| = \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right\| \leq$$

# Сходимость

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned} \|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad (\text{Липшицевость гессиана}) \end{aligned}$$

# Сходимость

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned}
 \|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right\| \leq \\
 &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad (\text{Липшицевость гессиана}) \\
 &\leq \int_0^1 M \|x_k - x^* - \tau(x_k - x^*)\| d\tau = \int_0^1 M \|x_k - x^*\| (1 - \tau) d\tau = \frac{r_k}{2} M,
 \end{aligned}$$

# Сходимость

5. Попробуем оценить размер  $G_k$  с помощью  $r_k = \|x_k - x^*\|$ :

$$\begin{aligned}
 \|G_k\| &= \left\| \int_0^1 (\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*)) d\tau \right\| \leq \\
 &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \leq \quad \text{(Липшицевость гессиана)} \\
 &\leq \int_0^1 M \|x_k - x^* - \tau(x_k - x^*)\| d\tau = \int_0^1 M \|x_k - x^*\| (1 - \tau) d\tau = \frac{r_k}{2} M,
 \end{aligned}$$

6. Получаем:

$$r_{k+1} \leq \left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \cdot \frac{r_k}{2} M \cdot r_k$$

и нам нужно оценить норму обратного гессиана

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

8. Из сильной выпуклости следует, что

$$\nabla^2 f(x_k) \succ 0, \text{ т.е. } r_k < \frac{\mu}{M}.$$

$$\left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \leq (\mu - Mr_k)^{-1}$$

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)}$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

8. Из сильной выпуклости следует, что

$$\nabla^2 f(x_k) \succ 0, \text{ т.е. } r_k < \frac{\mu}{M}.$$

$$\left\| [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \right\| \leq (\mu - Mr_k)^{-1}$$

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)}$$

9. Потребуем, чтобы верхняя оценка на  $r_{k+1}$  была меньше  $r_k$ , учитывая, что

$$0 < r_k < \frac{\mu}{M}:$$

$$\frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < r_k$$

$$\frac{M}{2(\mu - Mr_k)} r_k < 1$$

$$Mr_k < 2(\mu - Mr_k)$$

$$3Mr_k < 2\mu$$

$$r_k < \frac{2\mu}{3M}$$

# Сходимость

7. Из липшицевости и симметричности гессиана:

$$\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^*) \succeq -Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \nabla^2 f(x^*) - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq \mu I_n - Mr_k I_n$$

$$\nabla^2 f(x_k) \succeq (\mu - Mr_k) I_n$$

9. Потребуем, чтобы верхняя оценка на  $r_{k+1}$  была меньше  $r_k$ , учитывая, что

$$0 < r_k < \frac{\mu}{M}:$$

$$\frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < r_k$$

$$\frac{M}{2(\mu - Mr_k)} r_k < 1$$

$$Mr_k < 2(\mu - Mr_k)$$

$$3Mr_k < 2\mu$$

$$r_k < \frac{2\mu}{3M}$$

10. Возвращаясь к оценке невязки на  $k + 1$ -ой итерации, получаем:

$$r_{k+1} \leq \frac{r_k^2 M}{2(\mu - Mr_k)} < \frac{3Mr_k^2}{2\mu}$$

Таким образом, мы получили важный результат: метод Ньютона для функции с липшицевым положительно определённым гессианом сходится **квадратично** вблизи решения.

## Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

## Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим

$B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с  
расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование  
функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

## Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

Далее рассмотрим первый порядок аппроксимации функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу нахождения  $s$ , как это было сказано выше.

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

Далее рассмотрим первый порядок аппроксимации функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу нахождения  $s$ , как это было сказано выше.

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя уравнение 1, получаем:

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

Далее рассмотрим первый порядок аппроксимации функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу нахождения  $s$ , как это было сказано выше.

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя уравнение 1, получаем:

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя метод множителей Лагранжа:

$$\delta x = -\frac{2\varepsilon^2}{\nabla f(x_0)^\top A^{-1} \nabla f(x_0)} A^{-1} \nabla f$$

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

Далее рассмотрим первый порядок аппроксимации функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу нахождения  $s$ , как это было сказано выше.

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя уравнение 1, получаем:

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя метод множителей Лагранжа:

$$\delta x = -\frac{2\varepsilon^2}{\nabla f(x_0)^\top A^{-1} \nabla f(x_0)} A^{-1} \nabla f$$

Новое направление наискорейшего спуска:  $-A^{-1} \nabla f(x_0)$ .

# Бонус: Идея методов адаптивной метрики

Пусть дана функция  $f(x)$  и точка  $x_0$ . Определим  $B_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, x_0) = \varepsilon^2\}$  как множество точек с расстоянием  $\varepsilon$  до  $x_0$ . Здесь мы предполагаем существование функции расстояния  $d(x, x_0)$ .

$$x^* = \arg \min_{x \in B_\varepsilon(x_0)} f(x)$$

Далее, мы можем определить другое направление наискорейшего спуска в терминах минимизатора функции на сфере:

$$s = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^* - x_0}{\varepsilon}$$

Предположим, что расстояние локально определяется некоторой метрикой  $A$ :

$$d(x, x_0) = (x - x_0)^\top A(x - x_0)$$

Далее рассмотрим первый порядок аппроксимации функции  $f(x)$  в окрестности точки  $x_0$ :

$$f(x_0 + \delta x) \approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^\top \delta x \quad (1)$$

Теперь мы можем сформулировать задачу нахождения  $s$ , как это было сказано выше.

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} f(x_0 + \delta x) \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя уравнение 1, получаем:

$$\begin{aligned} & \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(x_0)^\top \delta x \\ \text{s.t. } & \delta x^\top A \delta x = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Используя метод множителей Лагранжа:

$$\delta x = -\frac{2\varepsilon^2}{\nabla f(x_0)^\top A^{-1} \nabla f(x_0)} A^{-1} \nabla f$$

Новое направление наискорейшего спуска:  $-A^{-1} \nabla f(x_0)$ .  
Действительно, если пространство изотропно и  $A = I$ , мы сразу получаем формулу градиентного спуска, в то время как метод Ньютона использует локальный гессиан как матрицу метрик.