



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Линейное программирование

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 6

Даня Меркулов



# Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ



$f \rightarrow \min_{x, y, z}$



# **Примеры задач линейного программирования**

# Что такое линейное программирование?



В общем случае все задачи с линейной целевой функцией и линейными функциональными ограничениями можно считать задачами линейного программирования. Однако существует несколько стандартных формулировок.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Basic})$$

для некоторых векторов  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  и матрицы  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , где неравенства — покомпонентные. Мы будем часто использовать эту формулировку для построения интуиции.

# Что такое линейное программирование?



В общем случае все задачи с линейной целевой функцией и линейными функциональными ограничениями можно считать задачами линейного программирования. Однако существует несколько стандартных формулировок.

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Basic})$$

для некоторых векторов  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  и матрицы  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , где неравенства — покомпонентные. Мы будем часто использовать эту формулировку для построения интуиции.

Широко используется **стандартная форма** записи задачи линейного программирования. Пусть заданы векторы  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  и матрица  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{LP.Standard})$$

# Пример: задача о диете



	    
Белки	<div>Количество на 100г</div> <div><math>W \in \mathbb{R}^{n \times p}</math></div>
Жиры	
Углеводы	
Калории	
Витамин D	

$$\begin{aligned} c \in \mathbb{R}^p, \text{ цена за 100г} & \quad \min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x \\ r \in \mathbb{R}^n, \text{ ограничения} & \quad Wx \succeq r \\ x \in \mathbb{R}^p, \text{ количество продуктов} & \quad x \succeq 0 \end{aligned}$$

# Пример: задача о диете



	    
Белки	<div>Количество на 100г</div> <div><math>W \in \mathbb{R}^{n \times p}</math></div>
Жиры	
Углеводы	
Калории	
Витамин D	

$c \in \mathbb{R}^p$ , цена за 100г

$r \in \mathbb{R}^n$ , ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$ , количество продуктов

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x$$

$$Wx \succeq r$$

$$x \succeq 0$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы  $W$ .

# Пример: задача о диете



	    
Белки	<div>Количество на 100г</div> <div><math>W \in \mathbb{R}^{n \times p}</math></div>
Жиры	
Углеводы	
Калории	
Витамин D	

$c \in \mathbb{R}^p$ , цена за 100г

$r \in \mathbb{R}^n$ , ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$ , количество продуктов

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x$$

$$Wx \succeq r$$

$$x \succeq 0$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы  $W$ .

Предположим, что у нас есть вектор требований для каждого питательного вещества  $r \in \mathbb{R}^n$ . Нам нужно найти самую дешёвую диету, которая удовлетворяет всем требованиям:



# Пример: задача о диете



$c \in \mathbb{R}^p$ , цена за 100г

$r \in \mathbb{R}^n$ , ограничения

$x \in \mathbb{R}^p$ , количество продуктов

$$\min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x$$

$$Wx \succeq r$$

$$x \succeq 0$$

Представьте, что вам нужно составить план диеты из некоторых продуктов: бананы, пироги, курица, яйца, рыба. Каждый из продуктов имеет свой вектор питательных веществ. Таким образом, все питательные вещества можно представить в виде матрицы  $W$ .

Предположим, что у нас есть вектор требований для каждого питательного вещества  $r \in \mathbb{R}^n$ . Нам нужно найти самую дешёвую диету, которая удовлетворяет всем требованиям:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^p} c^T x \\ \text{s.t. } Wx \succeq r \\ x_i \geq 0, i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Open In Colab

# Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования



Рисунок 1. Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.

# Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования



Рисунок 1. Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.
- В пространствах большой размерности аппроксимация может потребовать огромного количества функций.

# Минимизация выпуклой функции как задача линейного программирования

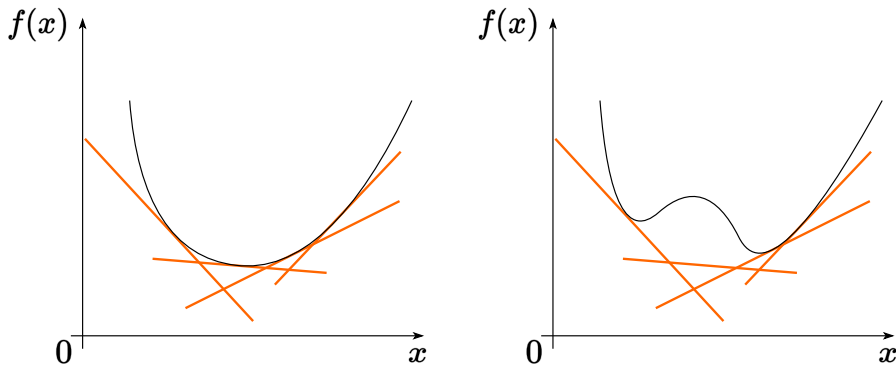


Рисунок 1. Как задача линейного программирования может помочь с общей задачей выпуклой оптимизации

- Функция выпукла, если она может быть представлена как поточечный максимум линейных функций.
- В пространствах большой размерности аппроксимация может потребовать огромного количества функций.
- Существуют более эффективные солверы для выпуклой оптимизации (не сводящиеся к LP).

# Пример: Транспортная задача



Типичная транспортная задача заключается в распределении товара от производителей к потребителям. Цель состоит в минимизации общих затрат на транспортировку при соблюдении ограничений на количество товара на каждом источнике и удовлетворении требований к спросу на каждом пункте назначения.



Рисунок 2. Карта Западной Европы. [Open In Colab](#)

# Пример: Транспортная задача



Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a	2.5	125
Берлин	2.5	n/a	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
<b>Макс. производство [тонн]</b>	550	700	

Минимизировать: Стоимость = 
$$\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c, s] x[c, s]$$

# Пример: Транспортная задача



Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a	2.5	125
Берлин	2.5	n/a	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
<b>Макс. производство [тонн]</b>	550	700	

Минимизировать: Стоимость =  $\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c, s] x[c, s]$

$\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} x[c, s] \leq \text{Макс. производство}[s] \quad \forall s \in \text{Источники}$

# Пример: Транспортная задача



Пункт назначения / Источник	Арнем [€/тонна]	Гауда [€/тонна]	Спрос [тонн]
Лондон	n/a	2.5	125
Берлин	2.5	n/a	175
Маастрихт	1.6	2.0	225
Амстердам	1.4	1.0	250
Утрехт	0.8	1.0	225
Гаага	1.4	0.8	200
<b>Макс. производство [тонн]</b>	550	700	

$$\text{Минимизировать: Стоимость} = \sum_{c \in \text{Пункты назначения}} \sum_{s \in \text{Источники}} T[c, s] x[c, s]$$

$$\sum_{c \in \text{Пункты назначения}} x[c, s] \leq \text{Макс. производство}[s] \quad \forall s \in \text{Источники}$$

$$\sum_{s \in \text{Источники}} x[c, s] = \text{Спрос}[c] \quad \forall c \in \text{Пункты назначения}$$

Задачу можно представить в виде следующего графа:



Рисунок 3. Граф, связанный с задачей



# **Как получить задачу линейного программирования?**

# Основные преобразования



- Максимум-минимум

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x & \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{ll} \max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x & \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \end{array}$$

# Основные преобразования



- Максимум-минимум

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x & \leftrightarrow \quad \max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}$$

- Равенство к неравенству

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

# Основные преобразования



- Максимум-минимум

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x & \leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}$$

- Равенство к неравенству

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

- Неравенство к равенству, увеличивая размерность задачи на  $m$ .

$$Ax \leq b \leftrightarrow \begin{cases} Ax + z = b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

# Основные преобразования



- Максимум-минимум

$$\begin{array}{ll} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x & \leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}^n} -c^\top x \\ \text{s.t. } Ax \leq b & \text{s.t. } Ax \leq b \end{array}$$

- Равенство к неравенству

$$Ax = b \leftrightarrow \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

- Неравенство к равенству, увеличивая размерность задачи на  $m$ .

$$Ax \leq b \leftrightarrow \begin{cases} Ax + z = b \\ z \geq 0 \end{cases}$$

- Неотрицательные переменные

$$x \leftrightarrow \begin{cases} x = x_+ - x_- \\ x_+ \geq 0 \\ x_- \geq 0 \end{cases}$$

# Пример: задача аппроксимации Чебышева



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_{\infty} \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_i |a_i^T x - b_i|$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой максимальной координаты вектора:

# Пример: задача аппроксимации Чебышева



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_{\infty} \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max_i |a_i^T x - b_i|$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой максимальной координаты вектора:

$$\begin{aligned} & \min_{t \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n} t \\ & \text{s.t. } a_i^T x - b_i \leq t, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad -a_i^T x + b_i \leq t, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

# Пример: задача $\ell_1$ аппроксимации



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |a_i^T x - b_i|$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой суммы координат вектора:



# Пример: задача $\ell_1$ аппроксимации



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_1 \leftrightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m |a_i^T x - b_i|$$

Можно записать эквивалентную задачу линейного программирования с заменой суммы координат вектора:

$$\begin{aligned} & \min_{t \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n} \mathbf{1}^T t \\ & \text{s.t. } a_i^T x - b_i \leq t_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \quad -a_i^T x + b_i \leq t_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
<b>Концентрат А (Добрый кола)</b>	10.6	1.25
<b>Концентрат В (Север кола)</b>	4.5	1.02
<b>Вода (Псыж)</b>	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
<b>Концентрат А (Добрый кола)</b>	10.6	1.25
<b>Концентрат В (Север кола)</b>	4.5	1.02
<b>Вода (Псыж)</b>	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где  $x_c$  — объём используемого компонента  $c$ , и  $P_c$  — его цена.

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Ограничение на объём

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
<b>Концентрат А (Добрый кола)</b>	10.6	1.25
<b>Концентрат В (Север кола)</b>	4.5	1.02
<b>Вода (Псыж)</b>	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где  $x_c$  — объём используемого компонента  $c$ , и  $P_c$  — его цена.

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
<b>Концентрат А (Добрый кола)</b>	10.6	1.25
<b>Концентрат В (Север кола)</b>	4.5	1.02
<b>Вода (Псыж)</b>	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где  $x_c$  — объём используемого компонента  $c$ , и  $P_c$  — его цена.

Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём  $V$ :

$$V = \sum_{c \in C} x_c$$

Ограничение на состав

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
Концентрат А (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат В (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

## Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где  $x_c$  — объём используемого компонента  $c$ , и  $P_c$  — его цена.

## Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём  $V$ :

$$V = \sum_{c \in C} x_c$$

## Ограничение на состав

Убедитесь, что содержание сахара — 4%:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{c \in C} x_c A_c}{\sum_{c \in C} x_c}$$

# Задача смешивания: от нелинейных ограничений к ЛП



1

Производственное предприятие получает заказ на 100 литров раствора с определённой концентрацией (например, 4% сахарного раствора). На складе есть:

Компонент	Сахар (%)	Стоимость (\$/л)
Концентрат А (Добрый кола)	10.6	1.25
Концентрат В (Север кола)	4.5	1.02
Вода (Псыж)	0.0	0.62

**Цель:** Найти смесь с минимальной стоимостью, которая удовлетворит заказ.

## Целевая функция

Минимизировать стоимость:

$$\text{Cost} = \sum_{c \in C} x_c P_c$$

где  $x_c$  — объём используемого компонента  $c$ , и  $P_c$  — его цена.

## Ограничение на объём

Убедитесь, что общий объём  $V$ :

$$V = \sum_{c \in C} x_c$$

## Ограничение на состав

Убедитесь, что содержание сахара — 4%:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{c \in C} x_c A_c}{\sum_{c \in C} x_c}$$

Линеаризованная версия:

$$0 = \sum_{c \in C} x_c (A_c - \bar{A})$$

Это можно решить с помощью линейного программирования.



Код

# Симплекс-метод



# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$

- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank } A_{\mathcal{B}} = n$ .



# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$

- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$ .
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу  $A_{\mathcal{B}}$  и соответствующую правую часть  $b_{\mathcal{B}}$  с базисом  $\mathcal{B}$ .



# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$



- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$ .
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу  $A_{\mathcal{B}}$  и соответствующую правую часть  $b_{\mathcal{B}}$  с базисом  $\mathcal{B}$ .
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса:  $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$ .

# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$



- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$ .
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу  $A_{\mathcal{B}}$  и соответствующую правую часть  $b_{\mathcal{B}}$  с базисом  $\mathcal{B}$ .
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса:  $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$ .
- Если  $Ax_{\mathcal{B}} \leq b$ , то базис  $\mathcal{B}$  является **допустимым**.

# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$



- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$ .
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу  $A_{\mathcal{B}}$  и соответствующую правую часть  $b_{\mathcal{B}}$  с базисом  $\mathcal{B}$ .
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса:  $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$ .
- Если  $Ax_{\mathcal{B}} \leq b$ , то базис  $\mathcal{B}$  является **допустимым**.
- Базис  $\mathcal{B}$  оптимален, если  $x_{\mathcal{B}}$  является решением задачи LP.Inequality.

# Геометрия симплекс-метода



Рассмотрим следующую простую формулировку задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Inequality})$$



- Определение: **базис**  $\mathcal{B}$  — это подмножество  $n$  (целых) чисел между 1 и  $m$ , такое что  $\text{rank} A_{\mathcal{B}} = n$ .
- Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу  $A_{\mathcal{B}}$  и соответствующую правую часть  $b_{\mathcal{B}}$  с базисом  $\mathcal{B}$ .
- Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса:  $x_{\mathcal{B}} = A_{\mathcal{B}}^{-1} b_{\mathcal{B}}$ .
- Если  $Ax_{\mathcal{B}} \leq b$ , то базис  $\mathcal{B}$  является **допустимым**.
- Базис  $\mathcal{B}$  оптимален, если  $x_{\mathcal{B}}$  является решением задачи LP.Inequality.
- $x_{\mathcal{B}}$  называют **базисной точкой** или базисным решением (иногда её тоже называют **базисом**).

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

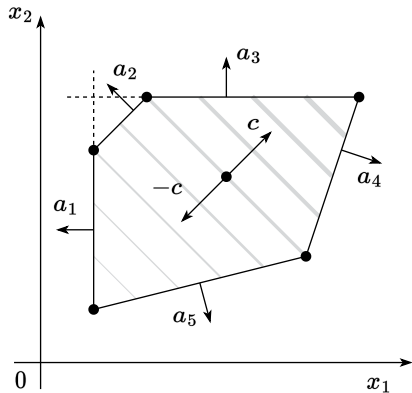


## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



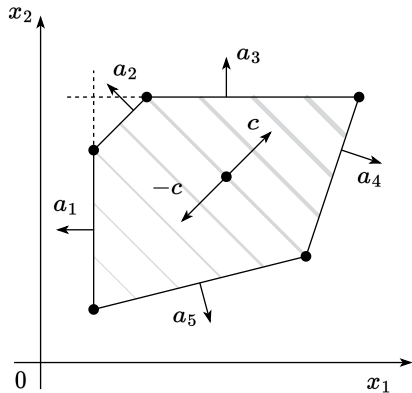
## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:



# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

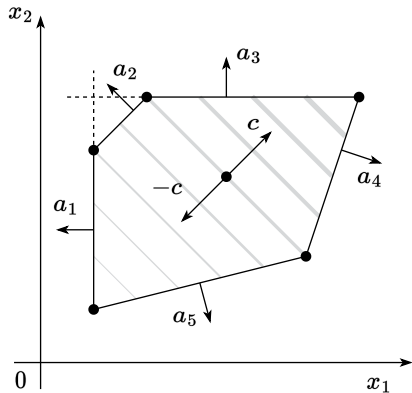


## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине

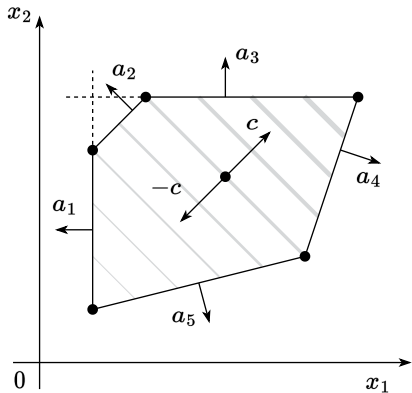


## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.
- Проверьте оптимальность.

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.
- Проверьте оптимальность.
- Если необходимо, перейдите к другой вершине (измените базис).

# Если решение задачи линейного программирования существует, то оно лежит в вершине



## i Theorem

1. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет непустое бюджетное множество, то существует по крайней мере одна допустимая базисная точка.
2. Если задача линейного программирования в стандартной форме имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной базисной точкой.
3. Если задача линейного программирования в стандартной форме допустима и ограничена, то она имеет оптимальное решение.

Для доказательства см. теорему 13.2 в Numerical Optimization by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright

Верхнеуровневая идея симплекс-метода:

- Убедитесь, что вы находитесь в вершине.
- Проверьте оптимальность.
- Если необходимо, перейдите к другой вершине (измените базис).
- Повторяйте, пока не сойдётесь.

# Оптимальный базис



# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_B$ :

$$\lambda_B^T A_B = c^T \leftrightarrow \lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$$





# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_{\mathcal{B}}$ :

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

## Theorem

Если все компоненты  $\lambda_{\mathcal{B}}$  неположительны и  $\mathcal{B}$  допустим, то  $\mathcal{B}$  оптимален.

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_{\mathcal{B}}$ :

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

## Theorem

Если все компоненты  $\lambda_{\mathcal{B}}$  неположительны и  $\mathcal{B}$  допустим, то  $\mathcal{B}$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$  и  $\mathcal{B}$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_B$ :

$$\lambda_B^T A_B = c^T \leftrightarrow \lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$$

## i Theorem

Если все компоненты  $\lambda_B$  неположительны и  $B$  допустим, то  $B$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_B \leq 0$  и  $B$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_B$$

$$A_B x^* \leq b_B$$

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_{\mathcal{B}}$ :

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

## Theorem

Если все компоненты  $\lambda_{\mathcal{B}}$  неположительны и  $\mathcal{B}$  допустим, то  $\mathcal{B}$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$  и  $\mathcal{B}$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}} \mid \lambda_{\mathcal{B}}^T \cdot \leq 0$$

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_B$ :

$$\lambda_B^T A_B = c^T \leftrightarrow \lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$$

## i Theorem

Если все компоненты  $\lambda_B$  неположительны и  $B$  допустим, то  $B$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_B \leq 0$  и  $B$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_B$$

$$A_B x^* \leq b_B \mid \lambda_B^T \cdot \leq 0$$

$$\lambda_B^T A_B x^* \geq \lambda_B^T b_B$$

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_{\mathcal{B}}$ :

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} = c^T \leftrightarrow \lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$$

## Theorem

Если все компоненты  $\lambda_{\mathcal{B}}$  неположительны и  $\mathcal{B}$  допустим, то  $\mathcal{B}$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_{\mathcal{B}} \leq 0$  и  $\mathcal{B}$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_{\mathcal{B}}$$

$$A_{\mathcal{B}} x^* \leq b_{\mathcal{B}} \mid \lambda_{\mathcal{B}}^T \leq 0$$

$$\lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} x^* \geq \lambda_{\mathcal{B}}^T b_{\mathcal{B}}$$

$$c^T x^* \geq \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} x_{\mathcal{B}}$$

# Оптимальный базис



Поскольку у нас есть базис, мы можем разложить наш целевой вектор  $c$  в этом базисе и найти скалярные коэффициенты  $\lambda_B$ :

$$\lambda_B^T A_B = c^T \leftrightarrow \lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$$

## i Theorem

Если все компоненты  $\lambda_B$  неположительны и  $B$  допустим, то  $B$  оптимален.

**Доказательство** Предположим противное, то есть  $\lambda_B \leq 0$  и  $B$  допустим, но не оптимален.

$$\exists x^* : Ax^* \leq b, c^T x^* < c^T x_B$$

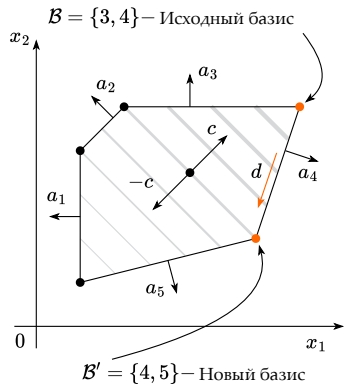
$$A_B x^* \leq b_B \mid \lambda_B^T \leq 0$$

$$\lambda_B^T A_B x^* \geq \lambda_B^T b_B$$

$$c^T x^* \geq \lambda_B^T A_B x_B$$

$$c^T x^* \geq c^T x_B$$

# Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_B$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.



# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$



Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases}$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса

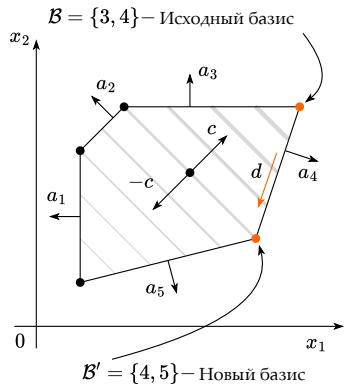


- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{B}}^i (A_{\mathcal{B}} d)^i$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса

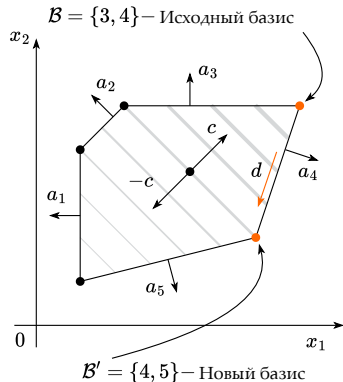


- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{B}}^i (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda_{\mathcal{B}}^k < 0$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

# Изменение базиса



- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_{\mathcal{B}}^T = c^T A_{\mathcal{B}}^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_{\mathcal{B}}^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_{\mathcal{B}}^T A_{\mathcal{B}} d = \sum_{i=1}^n \lambda_{\mathcal{B}}^i (A_{\mathcal{B}} d)^i = -\lambda_{\mathcal{B}}^k < 0$$

- Для всех  $j \notin \mathcal{B}$  рассчитаем размер шага проекции:

$$\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_{\mathcal{B}}}{a_j^T d}$$

Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_{\mathcal{B}}$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.



# Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_B$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис  $\mathcal{B}$ :  $\lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_B^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{\mathcal{B} \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_B^T A_B d = \sum_{i=1}^n \lambda_B^i (A_B d)^i = -\lambda_B^k < 0$$

- Для всех  $j \notin \mathcal{B}$  рассчитаем размер шага проекции:

$$\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_B}{a_j^T d}$$

- Определим новую вершину, которую мы добавим в новый базис:

$$t = \arg \min_j \{\mu_j \mid \mu_j > 0\}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \{k\} \cup \{t\}$$

$$x_{\mathcal{B}'} = x_B + \mu_t d = A_{\mathcal{B}'}^{-1} b_{\mathcal{B}'}$$

# Изменение базиса



Предположим, что некоторые из коэффициентов  $\lambda_B$  положительны. В этом случае необходимо осуществить переход по ребру многогранника к новой вершине, то есть произвести замену базиса.

- Предположим, что у нас есть базис  $B$ :  $\lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$
- Предположим, что  $\lambda_B^k > 0$ . Мы хотим удалить  $k$  из базиса и сформировать новый:

$$\begin{cases} A_{B \setminus \{k\}} d = 0 \\ a_k^T d = -1 \end{cases} \quad c^T d = \lambda_B^T A_B d = \sum_{i=1}^n \lambda_B^i (A_B d)^i = -\lambda_B^k < 0$$

- Для всех  $j \notin B$  рассчитаем размер шага проекции:

$$\mu_j = \frac{b_j - a_j^T x_B}{a_j^T d}$$

- Определим новую вершину, которую мы добавим в новый базис:

$$t = \arg \min_j \{\mu_j \mid \mu_j > 0\}$$

$$B' = B \setminus \{k\} \cup \{t\}$$

$$x_{B'} = x_B + \mu_t d = A_{B'}^{-1} b_{B'}$$

- Обратите внимание, что изменение базиса приводит к уменьшению целевой функции:  $c^T x_{B'} = c^T (x_B + \mu_t d) = c^T x_B + \mu_t c^T d$

# Поиск начального допустимого базиса

Нам нужно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned} \quad (1)$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

# Поиск начального допустимого базиса



Нам нужно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (1)$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

Начнём с переформулировки задачи:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top (y - z) \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

# Поиск начального допустимого базиса



Нам нужно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned} \quad (1)$$

Предложенный алгоритм требует начального допустимого базиса.

Зная решение задачи (2), можно восстановить решение задачи (1), и наоборот.

Начнём с переформулировки задачи:

$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top (y - z) \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$x = y - z \quad \Leftrightarrow \quad y_i = \max(x_i, 0), \quad z_i = \max(-x_i, 0)$$

Теперь мы попытаемся сформулировать новую задачу линейного программирования, решение которой будет допустимой базисной точкой для Задачи 2. Это означает, что мы сначала запускаем симплекс-метод для задачи Phase-1, а затем запускаем задачу Phase-2 с известным начальным решением. Обратите внимание, что допустимое базисное решение для Phase-1 должно быть легко вычислимо.

# Поиск начального допустимого базиса



$$\min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z)$$

$$\text{s.t. } Ay - Az \leq b$$

$$y \geq 0, z \geq 0$$

(Фаза-2 (главная задача ЛП))

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.



# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top (y - z) \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные  $\xi_i$  равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные  $\xi_i$  не равны нулю).

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top (y - z) \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные  $\xi_i$  равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные  $\xi_i$  не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет  $2n + m$  переменных, и точка ниже гарантирует, что  $2n + m$  неравенств удовлетворяются как равенства (активны)).

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & c^\top (y - z) \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \quad & \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t.} \quad & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные  $\xi_i$  равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные  $\xi_i$  не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет  $2n + m$  переменных, и точка ниже гарантирует, что  $2n + m$  неравенств удовлетворяются как равенства (активные)).

# Поиск начального допустимого базиса



$$\begin{aligned} & \min_{y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} c^\top (y - z) \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b \\ & y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-2 (главная задача ЛП)})$$

$$\begin{aligned} & \min_{\xi \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m \xi_i \\ \text{s.t. } & Ay - Az \leq b + \xi \\ & y \geq 0, z \geq 0, \xi \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{Фаза-1})$$

- Если Фаза-2 (главная задача ЛП) имеет допустимое решение, то оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю).

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Если оптимум Фаза-1 равен нулю (т.е. все переменные  $\xi_i$  равны нулю), то мы получаем допустимый базис для Фаза-2.

**Доказательство:** тривиальная проверка.

- Теперь мы знаем, что если мы можем решить задачу Фаза-1, то мы либо найдём начальную точку для симплекс-метода в исходном методе (если переменные  $\xi_i$  равны нулю), либо проверим, что исходная задача не имеет допустимого решения (если переменные  $\xi_i$  не равны нулю).
- Но как решить задачу Фаза-1? Она имеет допустимое базисное решение (задача имеет  $2n + m$  переменных, и точка ниже гарантирует, что  $2n + m$  неравенств удовлетворяются как равенства (активны)).

$$z = 0 \quad y = 0 \quad \xi_i = \max(0, -b_i)$$

# Сходимость симплекс-метода

# Неограниченное бюджетное множество



В этом случае не найдётся ни одного положительного  $\mu_j$ .





# Вырожденность вершин



Случаи вырожденности требуют особого рассмотрения. В отсутствие вырожденности на каждой итерации гарантируется монотонное убывание значения целевой функции.



# Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.

# Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.

# Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.

# Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.
- Основной прорыв — метод Кармаркара (1984) для решения задач ЛП с использованием метода внутренней точки.

# Экспоненциальная сходимость



- Много прикладных задач может быть сформулировано в виде задач линейного программирования.
- Симплекс-метод прост в своей основе, но в худшем случае может работать экспоненциально долго.
- Метод эллипсоидов Хачияна (1979) стал первым алгоритмом с доказанной полиномиальной сложностью для задач ЛП. Однако он обычно работает медленнее, чем симплекс-метод в реальных небольших задачах.
- Основной прорыв — метод Кармаркара (1984) для решения задач ЛП с использованием метода внутренней точки.
- Методы внутренней точки являются последним словом в этой области. Тем не менее, для типовых задач ЛП качественные реализации симплекс-метода и методов внутренней точки показывают схожую производительность.

# Пример Klee Minty



Так как число вершин конечно, сходимость алгоритма гарантирована (за исключением вырожденных случаев, которые здесь не рассматриваются). Тем не менее, сходимость может быть экспоненциально медленной из-за потенциально большого числа вершин. Существует пример, в котором симплекс-метод вынужден пройти через все вершины многогранника.

В следующей задаче симплекс-метод должен проверить  $2^n - 1$  вершин с  $x_0 = 0$ .

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & 2^{n-1}x_1 + 2^{n-2}x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \leq 5 \\ & 4x_1 + x_2 \leq 25 \\ & 8x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 125 \\ & \dots \\ & 2^n x_1 + 2^{n-1}x_2 + 2^{n-2}x_3 + \dots + x_n \leq 5^n \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$



# **Смешанное целочисленное программирование (MIP)**



# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 &\rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 &\leq 14 \\ x_i &\in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .
- Округление  $x_3 = 1$ : недопустимо.

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .
- Округление  $x_3 = 1$ : недопустимо.

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .
- Округление  $x_3 = 1$ : недопустимо.

**!** MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.



# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .
- Округление  $x_3 = 1$ : недопустимо.

**!** MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.
- Общая задача MIP является NP-трудной задачей.

# Сложность МIP



Рассмотрим следующую задачу смешанного целочисленного программирования (MIP):

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \end{aligned} \quad (3)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1, \text{ и } z = 21.$$

Упростим её до:

$$\begin{aligned} z = 8x_1 + 11x_2 + 6x_3 + 4x_4 \rightarrow \max_{x_1, x_2, x_3, x_4} \\ \text{s.t. } 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ x_i \in [0, 1] \quad \forall i \end{aligned} \quad (4)$$

Оптимальное решение

$$x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0.5, x_4 = 0, \text{ и } z = 22.$$

- Округление  $x_3 = 0$ : даёт  $z = 19$ .
- Округление  $x_3 = 1$ : недопустимо.

**!** MIP намного сложнее, чем ЛП

- Наивное округление решения, полученного для ЛП-релаксации исходной задачи MIP, может привести к недопустимому или неоптимальному решению.
- Общая задача MIP является NP-трудной задачей.
- Однако, если матрица коэффициентов MIP является *полностью унимодулярной матрицей*, то она может быть решена за полиномиальное время.

# Непредсказуемая сложность MIP



- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени

Running time to optimality for different MIPs  
MIPLIB 2017 Collection Set



# Непредсказуемая сложность MIP



- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени
-  Датасет

Running time to optimality for different MIPs  
MIPLIB 2017 Collection Set



# Непредсказуемая сложность MIP



- Трудно предсказать, что будет решено быстро, а что потребует много времени
- 📁 Датасет
- 📄 Код

Running time to optimality for different MIPs  
MIPLIB 2017 Collection Set



# Прогресс аппаратного vs программного обеспечения



Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

## Аппаратное обеспечение

Решение МІР с использованием старого ПО на современном оборудовании

## Программное обеспечение

Решение МІР с использованием современного ПО на старом оборудовании

# Прогресс аппаратного vs программного обеспечения



Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

## Аппаратное обеспечение

Решение MIP с использованием старого ПО на современном оборудовании

$\approx 1.664.510$  x ускорение

Закон Мура утверждает, что вычислительная мощность удваивается каждые 18 месяцев.

## Программное обеспечение

Решение MIP с использованием современного ПО на старом оборудовании

$\approx 2.349.000$  x ускорение

Р. Биксби провёл масштабный эксперимент по сравнению производительности всех версий CPLEX с 1992 по 2007 год и измерил общий прогресс ПО (29000 раз), позже (в 2009 году) он стал одним из основателей Gurobi Optimization, которое дало дополнительное  $\approx 81$  ускорение на MIP.

# Прогресс аппаратного vs программного обеспечения



Что бы вы выбрали, если предположить, что вопрос поставлен корректно (вы можете скомпилировать ПО для любого оборудования, и задача в обоих случаях одна и та же)? Мы рассмотрим период с 1992 по 2023 год.

## Аппаратное обеспечение

Решение MIP с использованием старого ПО на современном оборудовании

$\approx 1.664.510$  x ускорение

Закон Мура утверждает, что вычислительная мощность удваивается каждые 18 месяцев.

Оказывается, что если вам нужно решить MIP, лучше использовать старый компьютер и современные методы, чем наоборот, самый новый компьютер и методы начала 1990-х годов!<sup>2</sup>

## Программное обеспечение

Решение MIP с использованием современного ПО на старом оборудовании

$\approx 2.349.000$  x ускорение

Р. Биксби провёл масштабный эксперимент по сравнению производительности всех версий CPLEX с 1992 по 2007 год и измерил общий прогресс ПО (29000 раз), позже (в 2009 году) он стал одним из основателей Gurobi Optimization, которое дало дополнительное  $\approx 81$  ускорение на MIP.



# Источники



- Теория оптимизации (MATH4230) курс @ CUNK, профессор Тейюн Цень