

Вспоминаем линейную алгебру. Скорости сходимости.

Даня Меркулов

1 Вспоминаем линейную алгебру

1.1 Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается \mathbb{R}^n , а пространство матриц размера $m \times n$ с вещественными элементами обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$. То есть¹:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Аналогично, если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ мы обозначаем транспонирование как $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать $x \geq 0$ и $x \neq 0$ для обозначения покомпонентных неравенств

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0$: $x^T Ax > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как \mathbb{S}_{++}^n (\mathbb{S}_{--}^n)

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех x : $x^T Ax \geq (\leq)0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq)0$. Множество таких матриц обозначается как \mathbb{S}_+^n (\mathbb{S}_-^n)

Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

¹Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге [Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares](#) - книга от Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, которая указана в источнике. Также полезен материал по линейной алгебре приведенный в приложении А книги Numerical Optimization by Jorge Nocedal Stephen J. Wright.

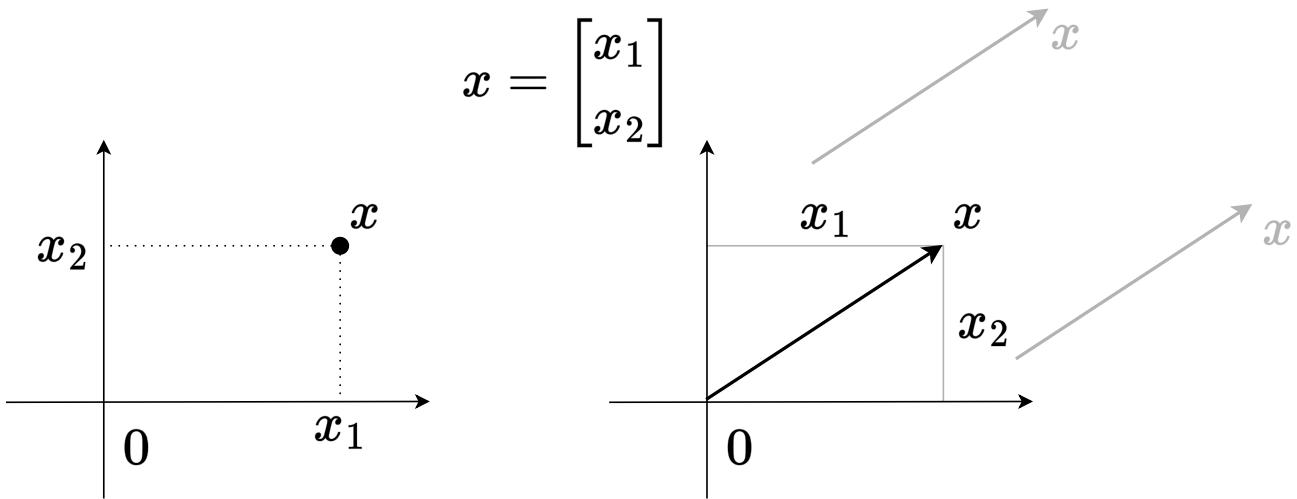


Рисунок 1: Эквивалентные представления вектора

Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она должна быть положительно определенной?

Question

Верно ли, что если матрица положительно определена, то она должна быть симметричной?

1.2 Матричное умножение (matmul)

Пусть \$A\$ - матрица размера \$m \times n\$, а \$B\$ - матрица размера \$n \times p\$, тогда их произведение \$AB\$ равно:

$$C = AB$$

Тогда \$C\$ - матрица размера \$m \times p\$, элемент \$(i, j)\$ которой равен:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной форме требует \$\mathcal{O}(n^3)\$ арифметических операций, где \$n\$ обычно считается наибольшей размерностью матриц.

Question

Возможно ли умножить две матрицы быстрее, чем за \$\mathcal{O}(n^3)\$? Как насчет \$\mathcal{O}(n^2), \mathcal{O}(n)\$?

1.3 Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть \$A\$ - матрица размера \$m \times n\$, а \$x\$ - вектор длины \$n\$, тогда \$i\$-й элемент произведения \$Ax\$ равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной форме требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B коммутируют, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

1.4 Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$, то $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **Евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей реальной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса p -норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

1.5 p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность-норма, или норма Чебышева, определяется как максимальное абсолютное значение элемента вектора:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

l_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора x :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

l_1 норма играет очень важную роль: она все связана с методами **compressed sensing**, которые появились в середине 00-х как одна из популярных тем исследований. Код для изображения ниже доступен [здесь](#). Также посмотрите [это](#) видео.



Рисунок 2: Шары в разных нормах на плоскости

1.6 Матричные нормы

В некотором смысле между матрицами и векторами нет большой разницы (вы можете векторизовать матрицу), и здесь появляется самая простая матричная норма **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Спектральная норма, $\|A\|_2$ является одной из наиболее широко используемых матричных норм (наряду с нормой Фробениуса).

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Она не может быть вычислена непосредственно из элементов с помощью простой формулы, как в случае нормы Фробениуса, однако, существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она напрямую связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Для неё справедливо:

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

где $\sigma_1(A)$ - наибольшее сингулярное значение матрицы A .

1.7 Скалярное произведение

Стандартное **скалярное произведение** между векторами x и y из \mathbb{R}^n равно:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle$$

Здесь x_i и y_i - i -ые компоненты соответствующих векторов.

Example

Докажите, что вы можете переставить матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием: $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ и $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

1.8 Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное произведение** между матрицами X и Y из $\mathbb{R}^{m \times n}$ равно:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle$$

Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса $\|\cdot\|_F$ и скалярным произведением между матрицами $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

1.9 Собственные вектора и собственные значения

Число λ является собственным значением квадратной матрицы A размера $n \times n$, если существует ненулевой вектор q такой, что

$$Aq = \lambda q.$$

Вектор q называется собственным вектором матрицы A . Матрица A невырожденная, если ни одно из её собственных значений не равно нулю. Собственные значения симметричных матриц являются вещественными числами, в то время как несимметричные матрицы могут иметь комплексные собственные значения. Если матрица положительно определена и симметрична, то все её собственные значения являются положительными вещественными числами.

1.10 Собственные вектора и собственные значения

Theorem

$$A \succeq (\succ)0 \Leftrightarrow \text{все собственные значения } A \geq (>)0$$

Proof

1. → Предположим, что некоторое собственное значение λ отрицательно, и пусть x обозначает соответствующий собственный вектор. Тогда

$$Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x < 0$$

что противоречит условию $A \succeq 0$.

2. ← Для любой симметричной матрицы мы можем выбрать набор собственных векторов v_1, \dots, v_n , которые образуют ортонормированный базис в \mathbb{R}^n . Возьмем любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned} x^T Ax &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)^T A (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \sum \alpha_i^2 v_i^T A v_i = \sum \alpha_i^2 \lambda_i v_i^T v_i \geq 0 \end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что $v_i^T v_j = 0$, для $i \neq j$.

1.11 Спектральное разложение (eigendecomposition)

Пусть $A \in S_n$, т.е. A - вещественная симметричная матрица размера $n \times n$. Тогда A может быть разложена как

$$A = Q \Lambda Q^T,$$

где $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ортогональная, т.е. удовлетворяет $Q^T Q = I$, и $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Вещественные числа λ_i являются собственными значениями A и являются корнями характеристического полинома $\det(A - \lambda I)$. Столбцы Q образуют ортонормированный набор собственных векторов A . Такое разложение называется спектральным.²

Мы обычно упорядочиваем вещественные собственные значения как $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Мы используем обозначение $\lambda_i(A)$ для обозначения i -го наибольшего собственного значения $A \in S$. Мы обычно пишем наибольшее или максимальное собственное значение как $\lambda_1(A) = \lambda_{\max}(A)$, и наименьшее или минимальное собственное значение как $\lambda_n(A) = \lambda_{\min}(A)$.

1.12 Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T Ax}{x^T x}$$

и, следовательно, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (соотношение Рэлея):

$$\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T Ax \leq \lambda_{\max}(A)x^T x$$

Число обусловленности невырожденной матрицы определяется как

²Хорошая шпаргалка с разложением матриц доступна на сайте курса по линейной алгебре [website](#).

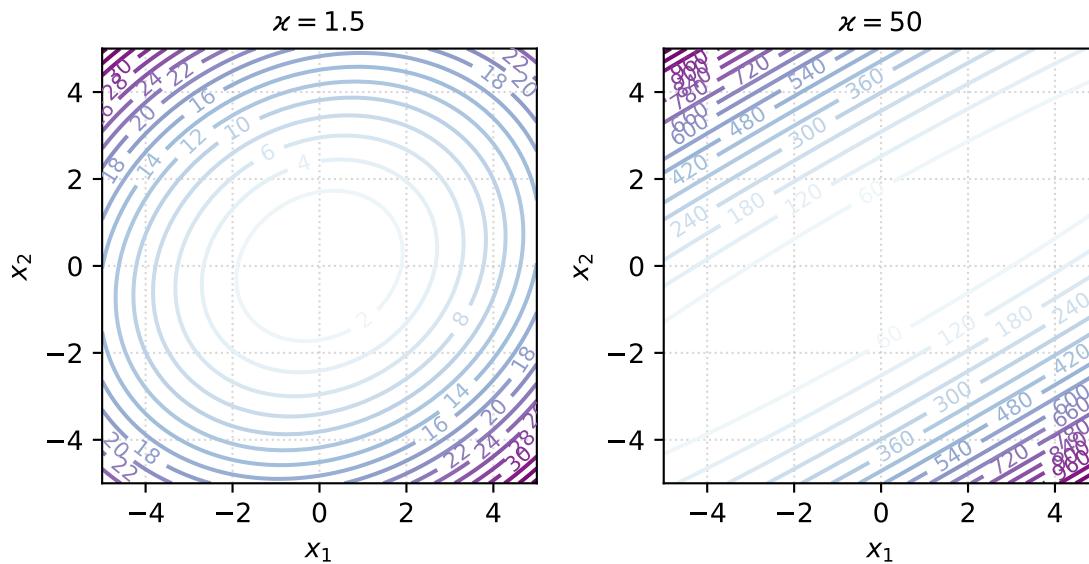
$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Если мы используем спектральную матричную норму, мы можем получить:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$$

Если, кроме того, $A \in \mathbb{S}_{++}^n$: $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$

1.13 Число обусловленности



где $u_i \in \mathbb{R}^m$ являются левыми сингулярными векторами, и $v_i \in \mathbb{R}^n$ являются правыми сингулярными векторами.

1.15 Сингулярное разложение

Question

Пусть $A \in \mathbb{S}_{++}^n$. Что мы можем сказать о связи между его собственными значениями и сингулярными значениями?

Question

Как сингулярные значения матрицы связаны с её собственными значениями, особенно для симметричной матрицы?

1.16 Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать r линейно независимых столбцов матрицы и любые r линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

Применения для рангового разложения:

- Сжатие модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численном анализе: для матрицы ранга r с $r \ll n, m$ необходимо хранить $\mathcal{O}((n+m)r) \ll nm$ элементов.
- Извлечение признаков в машинном обучении
- Все приложения, где применяется SVD, так как ранговое разложение может быть преобразовано в форму усеченного SVD.

1.17 Каноническое тензорное разложение

Можно рассмотреть обобщение рангового разложения на структуры данных более высокого порядка, такие как тензоры, что означает представление тензора в виде суммы r простых тензоров.



Рисунок 3: Иллюстрация рангового разложения

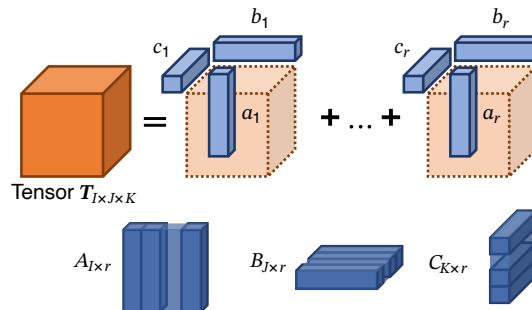


Рисунок 4: Иллюстрация канонического тензорного разложения

Example

Заметьте, что существует множество тензорных разложений: каноническое, Таккера, тензорный поезд (TT), тензорное кольцо (TR) и другие. В случае тензоров мы не имеем прямого определения *ранга* для всех типов разложений. Например, для разложения Тензорного поезда ранг является не скаляром, а вектором.

1.18 Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$ тогда и только тогда, когда A является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Не забывайте о циклическом свойстве следа для произвольных матриц A, B, C, D (предполагая, что все размерности согласованы):

$$\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(DABC) = \text{tr}(CDAB) = \text{tr}(BCDA)$$

Question

Как определитель матрицы связан с её обратимостью?

2 Скорости сходимости

2.1 Скорость сходимости



Рисунок 5: Разница в скоростях сходимости

2.2 Линейная сходимость

Чтобы сравнить производительность алгоритмов, мы должны определить термины для различных типов сходимости. Пусть r_k - последовательность неотрицательных вещественных чисел, которая сходится к нулю. Обычно мы имеем итерационный метод, который производит последовательность итераций x_k , приближающихся к оптимальному решению x^* , и $r_k = \|x_k - x^*\|_2$.

Линейная сходимость последовательности r_k определяется следующим образом:

Последовательность $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ сходится линейно с параметром $0 < q < 1$, если существует константа $C > 0$ такая, что:

$$r_k \leq Cq^k, \quad \text{for all } k \geq m.$$

Если такое q существует, то последовательность называется **линейно сходящейся**. **Точная нижняя граница** всех q , удовлетворяющих неравенству, называется **скоростью линейной сходимости** последовательности.

Question

Предположим, у вас есть две последовательности с линейными скоростями сходимости $q_1 = 0.1$ и $q_2 = 0.7$, какая из них быстрее?

2.3 Линейная сходимость

Example

Предположим, у нас есть следующая последовательность:

$$r_k = \frac{1}{2^k}$$

Можно сразу заключить, что мы имеем линейную сходимость с параметрами $q = \frac{1}{2}$ и $C = 0$.

Question

Определите сходимость следующей последовательности

$$r_k = \frac{3}{2^k}$$

2.4 Сублинейная сходимость

Если последовательность r_k сходится к нулю, но не имеет линейной сходимости, то сходимость называется **сублинейной**. Иногда мы можем рассмотреть следующий частный случай сублинейной сходимости:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq Ck^q,$$

где $q < 0$ и $0 < C < \infty$. Интуитивно, сублинейная сходимость означает, что последовательность сходится медленнее любой геометрической прогрессии.

2.5 Сверхлинейная сходимость

Сходимость последовательности $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ называется **сверхлинейной**, если она сходится к нулю быстрее любой линейно сходящейся последовательности. Проверьте, что последовательность $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ является сверхлинейной, если она сходится линейно с параметром $q = 0$.

Для $p > 1$, последовательность имеет **сверхлинейную сходимость порядка p** , если существует $C > 0$ и $0 < q < 1$ такая, что:

$$r_k \leq Cq^{p^k}, \quad \text{for all } k \geq m.$$

Когда $p = 2$, это называется **квадратичной сходимостью**.

Важный пример

Предположим, что $x^* = 1.23456789$ (истинное решение), и итерационная последовательность начинается с ошибки $r_k = 10^{-3}$, соответствующей 3 правильным значащим цифрам (1.234).

1. После первой итерации:

$$r_{k+1} \approx r_k^2 = (10^{-3})^2 = 10^{-6}.$$

Теперь ошибка равна 10^{-6} , и мы имеем 6 правильных значащих цифр (1.23456).

2. После второй итерации:

$$r_{k+2} \approx r_{k+1}^2 = (10^{-6})^2 = 10^{-12}.$$

Теперь ошибка равна 10^{-12} , и мы имеем 12 правильных значащих цифр (1.234567890123).

2.6 Практические наблюдения о скоростях сходимости

- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}} \|x_0 - x^*\|_2$ означает сублинейную скорость сходимости
- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq q\|x_k - x^*\|_2$ означает линейную скорость сходимости, где $q < 1$
- $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq q\|x_k - x^*\|_2^2$ означает квадратичную скорость сходимости, где $q\|x_0 - x^*\| < 1$

2.7 Тест корней

Theorem

Пусть $(r_k)_{k=m}^\infty$ - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть $\alpha := \limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k}$. (Заметим, что $\alpha \geq 0$.)

- Если $0 \leq \alpha < 1$, то $(r_k)_{k=m}^\infty$ сходится линейно с константой α .
- В частности, если $\alpha = 0$, то $(r_k)_{k=m}^\infty$ сходится сверхлинейно.
- Если $\alpha = 1$, то $(r_k)_{k=m}^\infty$ сходится сублинейно.
- Случай $\alpha > 1$ невозможен.

Доказательство.

- Покажем, что если $(r_k)_{k=m}^\infty$ сходится линейно с константой $0 \leq \beta < 1$, то $\alpha \leq \beta$. Действительно, по определению константы линейной сходимости, для любого $\varepsilon > 0$ такого, что $\beta + \varepsilon < 1$, существует $C > 0$ такое, что $r_k \leq C(\beta + \varepsilon)^k$ для всех $k \geq m$. Отсюда, $r_k^{1/k} \leq C^{1/k}(\beta + \varepsilon)$ для всех $k \geq m$. Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ и используя $C^{1/k} \rightarrow 1$, мы получаем $\alpha \leq \beta + \varepsilon$. Учитывая произвольность ε , получаем $\alpha \leq \beta$.

2. Таким образом, в случае $\alpha = 1$ последовательность $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не может иметь линейной сходимости в соответствии с приведенным выше результатом (доказано от противного). Тем не менее, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится к нулю, поэтому она должна сходиться сублинейно.

2.8 Тест корней

Theorem

- Теперь рассмотрим случай $0 \leq \alpha < 1$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число такое, что $\alpha + \varepsilon < 1$. Согласно свойствам limsup, существует $N \geq m$ такое, что $r_k^{1/k} \leq \alpha + \varepsilon$ для всех $k \geq N$. Отсюда, $r_k \leq (\alpha + \varepsilon)^k$ для всех $k \geq N$. Следовательно, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ сходится линейно с параметром $\alpha + \varepsilon$ (не имеет значения, что неравенство выполняется только для числа N). Учитывая произвольность ε , это означает, что константа линейной сходимости $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не превышает α . Поскольку, как показано выше, константа линейной сходимости не может быть меньше α , это означает, что константа линейной сходимости $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ точно равна α .
- Наконец, покажем, что случай $\alpha > 1$ невозможен. Действительно, предположим, что $\alpha > 1$. Тогда из определения limsup следует, что для любого $N \geq m$ существует $k \geq N$ такое, что $r_k^{1/k} \geq 1$, и, в частности, $r_k \geq 1$. Но это означает, что r_k имеет подпоследовательность, которая не ограничена от нуля. Следовательно, $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ не может сходиться к нулю, что противоречит условию.

2.9 Тест отношений

Пусть $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю. Пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует q и $0 \leq q < 1$, то $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ имеет линейную сходимость с константой q .
- В частности, если $q = 0$, то $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ имеет сверхлинейную сходимость.
- Если q не существует, но $q = \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$, то $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ имеет линейную сходимость с константой, не превышающей q .
- Если $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$, то $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ имеет сублинейную сходимость.
- Случай $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$ невозможен.
- В остальных случаях (т.е., когда $\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$) мы не можем сделать никаких конкретных утверждений о скорости сходимости $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$.

2.10 Лемма о teste отношении

Theorem

Пусть $(r_k)_{k=m}^{\infty}$ - последовательность строго положительных чисел. (Строгая положительность необходима для того, чтобы отношения $\frac{r_{k+1}}{r_k}$, которые появляются ниже, были определены.) Тогда

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}.$$

Доказательство.

1. Среднее неравенство следует из того, что \liminf любой последовательности всегда меньше или равен её \limsup . Докажем последнее неравенство; первое доказывается аналогично.
2. Обозначим $L := \limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$. Если $L = +\infty$, то неравенство очевидно, поэтому предположим, что L конечно. Заметим, что $L \geq 0$, поскольку отношение $\frac{r_{k+1}}{r_k}$ положительно для всех $k \geq m$. Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. Согласно свойствам \limsup , существует $N \geq m$ такое, что $\frac{r_{k+1}}{r_k} \leq L + \varepsilon$ для всех $k \geq N$. Отсюда, $r_{k+1} \leq (L + \varepsilon)r_k$ для всех $k \geq N$. Применяя индукцию, получаем $r_k \leq (L + \varepsilon)^{k-N}r_N$ для всех $k \geq N$. Пусть $C := (L + \varepsilon)^{-N}r_N$. Тогда $r_k \leq C(L + \varepsilon)^k$ для всех $k \geq N$, откуда $r_k^{1/k} \leq C^{1/k}(L + \varepsilon)$. Переходя к \limsup при $k \rightarrow \infty$ и используя $C^{1/k} \rightarrow 1$, получаем $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq L + \varepsilon$. Учитывая произвольность ε , получаем $\limsup_{k \rightarrow \infty} r_k^{1/k} \leq L$.

3 Задачи

3.1 Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ - случайные квадратные плотные матрицы, и $x \in \mathbb{R}^n$ - вектор. Вам нужно вычислить b .

Какой способ лучше всего использовать?

1. $A_1 A_2 A_3 x$ (слева направо)
2. $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$ (справа налево)
3. Не имеет значения
4. Результаты первых двух вариантов не будут одинаковыми.

Проверьте простой код после вашего интуитивного ответа.

3.2 Задача 2. Связь между Фробениусовой нормой и сингулярными значениями.

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, и пусть $q := \min\{m, n\}$. Докажите, что

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2(A),$$

где $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_q(A) \geq 0$ - сингулярные значения матрицы A . Подсказка: используйте связь между Фробениусовой нормой и скалярным произведением и SVD.

3.3 Задача 3. Найдите свое скалярное произведение.

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1}a_i, a_i \rangle,$$

где $S = \sum_{i=1}^n a_i a_i^T$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\det(S) \neq 0$

3.4 Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$
- $r_k = \frac{1}{k^{10}}$
- $r_k = 0.707^k$
- $r_k = 0.707^{2^k}$

3.5 Задача 5. Один тест проще, чем другой.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующей последовательности:

$$r_k = \frac{1}{k^k}$$

3.6 Задача 6. Сверхлинейно, но не квадратично.

Покажите, что следующая последовательность не имеет квадратичной сходимости.

$$r_k = \frac{1}{3^{k^2}}$$

4 А где это нужно в реальной жизни?

4.1 LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models ([arXiv:2106.09685](https://arxiv.org/abs/2106.09685))

Поскольку современные LLM слишком большие, чтобы вместиться в память среднего пользователя, мы используем некоторые трюки, чтобы сделать их потребление памяти меньше. Одним из наиболее популярных трюков является LoRA (Low-Rank Adaptation of Large Language Models).

Предположим, у нас есть матрица $W \in \mathbb{R}^{d \times k}$ и мы хотим выполнить следующее обновление:

$$W = W_0 + \Delta W.$$

Основная идея LoRA состоит в том, чтобы разложить обновление ΔW на две низкоранговые матрицы:

$$\begin{aligned} W &= W_0 + \Delta W = W_0 + BA, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times k}, \\ rank(A) &= rank(B) = r \ll \min\{d, k\}. \end{aligned}$$

Проверьте  ноутбук для примера реализации LoRA.



Рисунок 6: Иллюстрация LoRA

5 Задачи на дом

5.0.1 Вспоминаем линейную алгебру

1. [5 points] **Анализ чувствительности в линейных системах** Рассмотрим невырожденную матрицу $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор $b \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что из-за ошибок измерения или вычислений вектор b изменяется на $\tilde{b} = b + \delta b$.
 1. Выведите верхнюю оценку относительной ошибки в решении x системы $Ax = b$ в терминах числа обусловленности $\kappa(A)$ и относительной ошибки в b .

2. Приведите конкретный пример использования матрицы 2×2 , где $\kappa(A)$ велико (например, ≥ 100500).
2. [5 points] **Влияние диагонального масштабирования на ранг** Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - матрица ранга r . Пусть $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - диагональная матрица. Определите ранг произведения DA . Объясните ваше обоснование.
3. [8 points] **Неожиданный SVD** Вычислите сингулярное разложение (SVD) следующих матриц:

- $A_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}$
- $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, где x - сумма чисел вашего рождения (день + месяц).

4. [10 points] **Влияние нормализации на ранг** Предположим, у нас есть набор данных $x^{(i)} \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$, и мы решили представить эти данные в виде матрицы

$$X = \begin{pmatrix} | & & | \\ x^{(1)} & \dots & x^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Предположим, что $\text{rank } X = r$.

В следующей задаче мы просим вас найти ранг некоторой матрицы M , связанной с X . В частности, вам нужно найти связь между $\text{rank } X = r$ и $\text{rank } M$, например, что ранг M всегда больше/меньше ранга X или что $\text{rank } M = \text{rank } X/35$. Аргументируйте ваш ответ и сделайте его как можно более точным.

Обратите внимание, что граничные случаи возможны в зависимости от структуры матрицы X . Убедитесь, что вы правильно освещаете их в своем ответе.

В прикладной статистике и машинном обучении данные часто нормализуются. Одна из наиболее популярных стратегий состоит в том, чтобы вычесть оцененное среднее μ и разделить на квадратный корень из оцененной дисперсии σ^2 . т.е.

$$x \rightarrow (x - \mu)/\sigma.$$

После нормализации мы получаем новую матрицу

$$Y := \begin{pmatrix} | & & | \\ y^{(1)} & \dots & y^{(m)} \\ | & & | \end{pmatrix},$$

$$y^{(i)} := \frac{x^{(i)} - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x^{(j)}}{\sigma}.$$

Каков ранг Y если $\text{rank } X = r$? Здесь σ - вектор, и деление выполняется поэлементно. Причина этого в том, что разные признаки могут иметь разные масштабы. В частности:

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (x_i^{(j)})^2 - \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m x_i^{(j)} \right)^2}.$$

5. [20 points] **Сжатие изображений с использованием усеченного SVD** Исследуйте сжатие изображений с использованием усеченного сингулярного разложения (SVD). Понимание того, как изменение количества сингулярных значений влияет на качество сжатого изображения. Реализуйте Python скрипт для сжатия черно-белого изображения с использованием усеченного SVD и визуализируйте качество сжатия.

- **Усеченное SVD:** Разлагает изображение A на матрицы U, S , и V . Сжатое изображение восстанавливается с использованием подмножества сингулярных значений.
- **Математическое представление:**

$$A \approx U_k \Sigma_k V_k^T$$

- U_k и V_k - первые k столбцов U и V соответственно.
- Σ_k - диагональная матрица с первыми k сингулярными значениями.
- **Относительная ошибка:** Измеряет точность сжатого изображения по сравнению с оригиналом.

$$\text{Relative Error} = \frac{\|A - A_k\|}{\|A\|}$$

```
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.animation as animation
import numpy as np
from skimage import io, color
import requests
from io import BytesIO

def download_image(url):
    response = requests.get(url)
    img = io.imread(BytesIO(response.content))
    return color.rgb2gray(img) # Convert to grayscale

def update_plot(i, img_plot, error_plot, U, S, V, original_img, errors, ranks, ax1, ax2):
    # Adjust rank based on the frame index
    if i < 70:
        rank = i + 1
    else:
        rank = 70 + (i - 69) * 10

    reconstructed_img = ... # YOUR CODE HERE

    # Calculate relative error
    relative_error = ... # YOUR CODE HERE
    errors.append(relative_error)
    ranks.append(rank)

    # Update the image plot and title
    img_plot.set_data(reconstructed_img)
    ax1.set_title(f"Image compression with SVD\n Rank {rank}; Relative error {relative_error:.2f}")

    # Remove axis ticks and labels from the first subplot (ax1)
    ax1.set_xticks([])
    ax1.set_yticks([])
```

```
# Update the error plot
error_plot.set_data(ranks, errors)
ax2.set_xlim(1, len(S))
ax2.grid(linestyle=":")
ax2.set_ylimit(1e-4, 0.5)
ax2.set_ylabel('Relative Error')
ax2.set_xlabel('Rank')
ax2.set_title('Relative Error over Rank')
ax2.semilogy()

# Set xticks to show rank numbers
ax2.set_xticks(range(1, len(S)+1, max(len(S)//10, 1))) # Adjust the step size as needed
plt.tight_layout()

return img_plot, error_plot

def create_animation(image, filename='svd_animation.mp4'):
    U, S, V = np.linalg.svd(image, full_matrices=False)
    errors = []
    ranks = []

    fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(2, 1, figsize=(5, 8))
    img_plot = ax1.imshow(image, cmap='gray', animated=True)
    error_plot, = ax2.plot([], [], 'r-', animated=True) # Initial empty plot for errors

    # Add watermark
    ax1.text(1, 1.02, '@fminxyz', transform=ax1.transAxes, color='gray', va='bottom', ha='right')

    # Determine frames for the animation
    initial_frames = list(range(70)) # First 70 ranks
    subsequent_frames = list(range(70, len(S), 10)) # Every 10th rank after 70
    frames = initial_frames + subsequent_frames

    ani = animation.FuncAnimation(fig, update_plot, frames=len(frames), fargs=(img_plot, error_plot))
    ani.save(filename, writer='ffmpeg', fps=8, dpi=300)

    # URL of the image
    url = ""

    # Download the image and create the animation
    image = download_image(url)
    create_animation(image)
```

5.0.2 Скорости сходимости

1. [6 points] Определите (это означает определить характер сходимости, если она сходится) сходимость или расходимость следующих последовательностей

- $r_k = \frac{1}{\sqrt{k+5}}$.
- $r_k = 0.101^k$.
- $r_k = 0.101^{2^k}$.

2. [8 points] Пусть последовательность $\{r_k\}$ определена следующим образом

$$r_{k+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} r_k, & \text{если } k \text{ чётно,} \\ r_k^2, & \text{если } k \text{ нечётно,} \end{cases}$$

с начальным значением $0 < r_0 < 1$. Докажите, что $\{r_k\}$ сходится к 0 и проанализируйте её скорость сходимости. В вашем ответе определите, является ли общая сходимость линейной, сублинейной или квадратичной.

3. [6 points] Определите скорость сходимости следующей последовательности $\{r_k\}$ (линейная, сублинейная, сверхлинейная). В случае сверхлинейной сходимости определите, является ли сходимость квадратичной.

$$r_k = \frac{1}{k!}$$

4. [8 points] Рассмотрим рекуррентную последовательность, определенную следующим образом

$$r_{k+1} = \lambda r_k + (1 - \lambda) r_k^p, \quad k \geq 0,$$

где $\lambda \in [0, 1)$ и $p > 1$. Какие дополнительные условия на r_0 должны быть выполнены для того, чтобы последовательность сходилась? Покажите, что когда $\lambda > 0$ последовательность сходится к 0 с линейной скоростью (с асимптотической константой λ), и когда $\lambda = 0$ определите скорость сходимости в терминах p . В частности, для $p = 2$ определите, является ли сходимость квадратичной.