ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

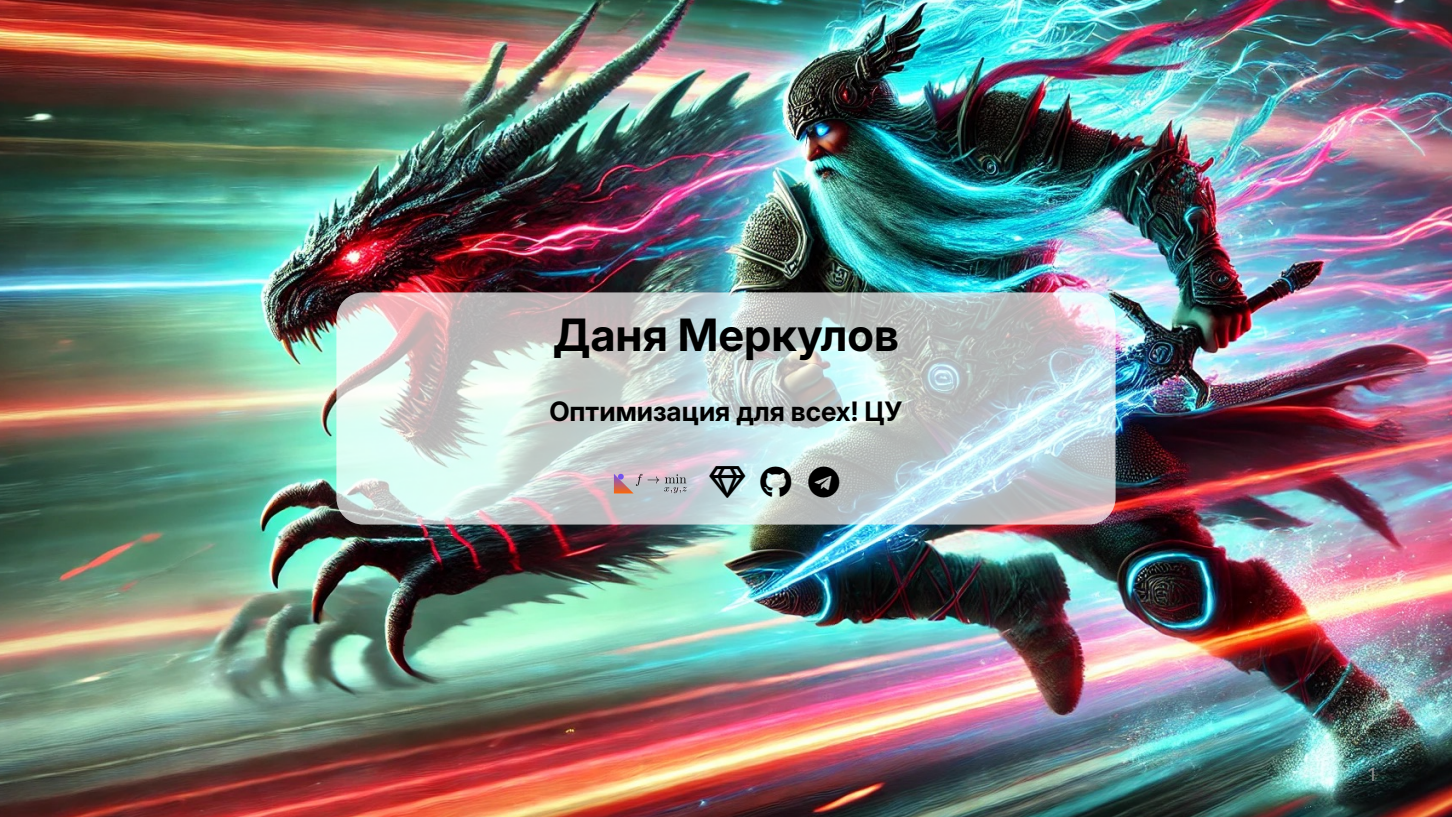
Ускоренные градиентные методы

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 8

Даня Меркулов

Пётр Остроухов


Даня Меркулов
Оптимизация для всех! ЦУ
$f \to \min_{x,y,z}$

Сильно выпуклые квадратичные функции

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

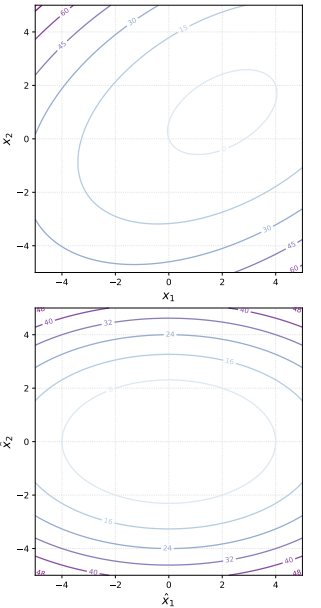
$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.

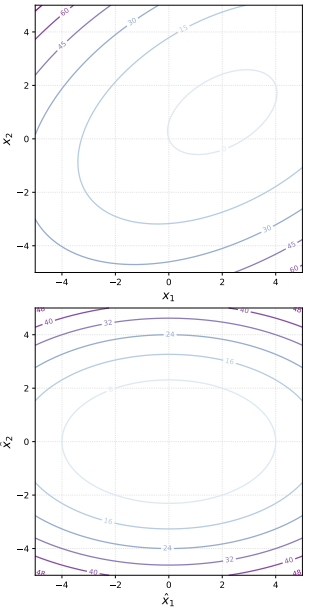


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.

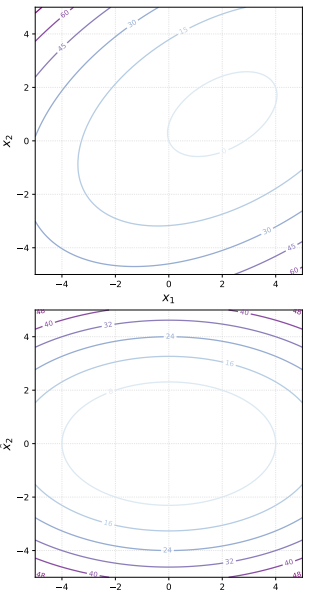


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.



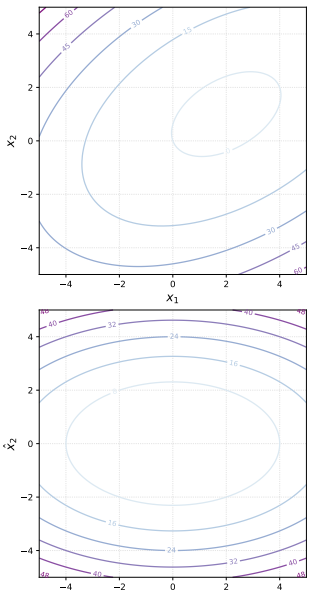
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*)$$



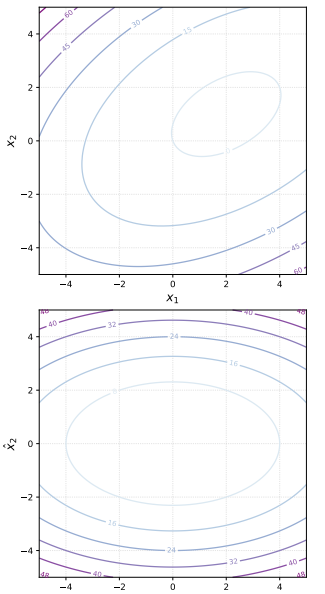
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \end{aligned}$$



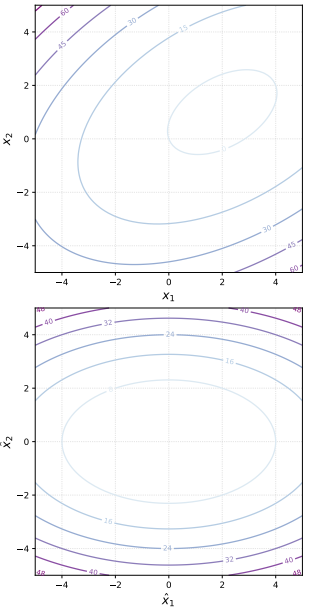
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \end{aligned}$$



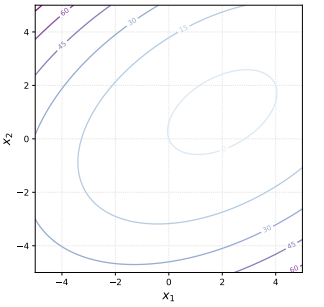
Сдвиг координат

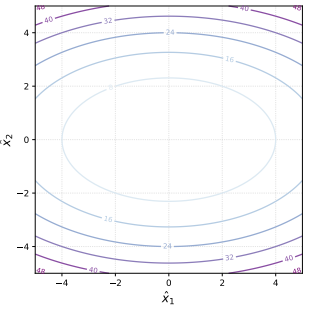
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^* \end{aligned}$$





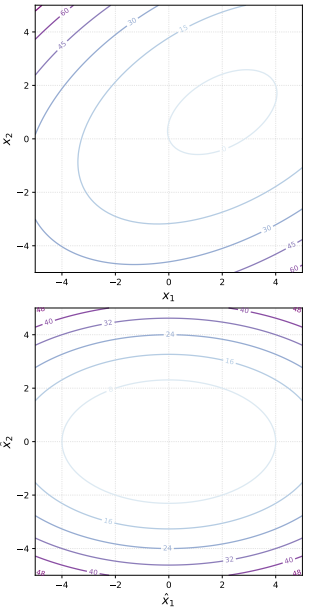
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^* \simeq \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} \end{aligned}$$



Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \qquad\qquad |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha)$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}|$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\}
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu} \\
|x^k_{(i)}| &\leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu} \\
|x^k_{(i)}| &\leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}| \\
\|x^k\|_2 &\leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\widehat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \tfrac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \tfrac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* :&\quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

$$|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L-\mu}{L+\mu}\right)^k |x^0_{(i)}|$$

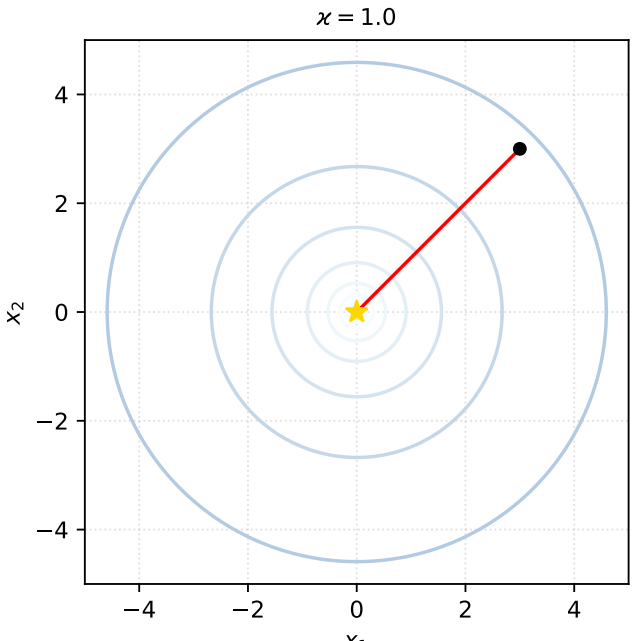
$$\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L-\mu}{L+\mu}\right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left(\frac{L-\mu}{L+\mu}\right)^{2k} f(x^0)$$

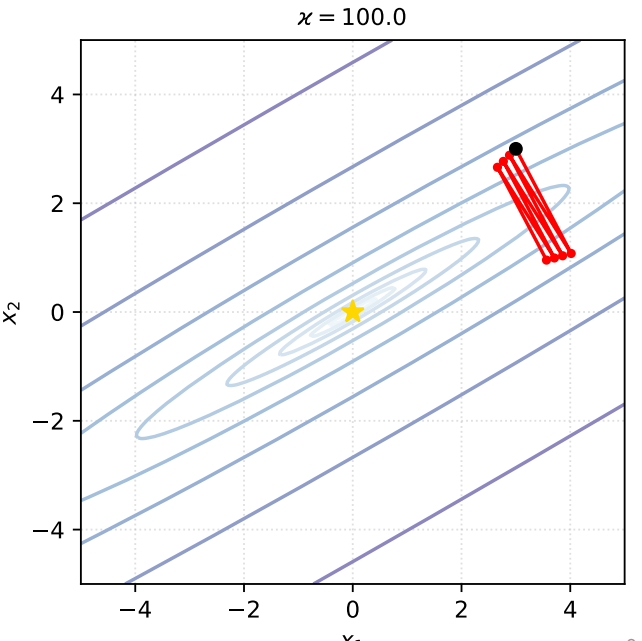
Анализ сходимости

Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$, где $\varkappa = \frac{L}{\mu}$ — *число обусловленности* квадратичной задачи.

$\varkappa$	ρ	Итераций до уменьшения ошибки по аргументу в 10 раз	Итераций до уменьшения ошибки по функции в 10 раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

Число обусловленности $\varkappa$





Случай PL-функций

PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

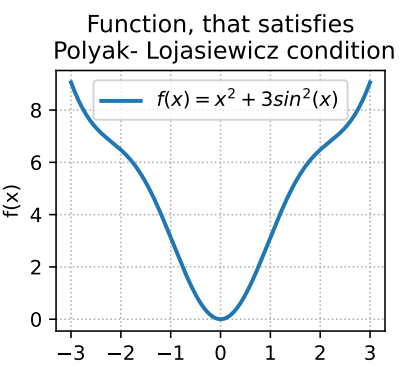
Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$



PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

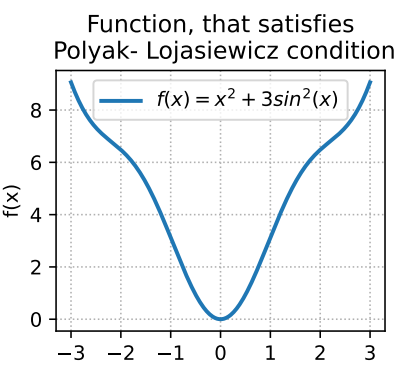
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

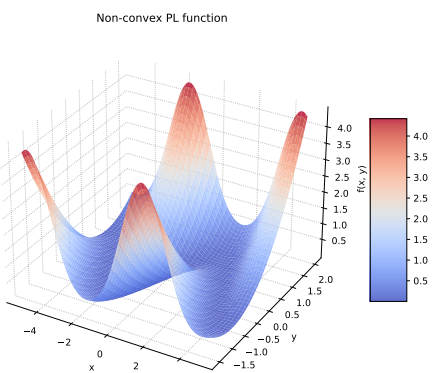
Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$





Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L-гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$.
Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L-гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$.
Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha\mu(f(x^k) - f^*).$$

Вычтя f^* из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

Выпуклый гладкий случай

Выпуклый гладкий случай

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

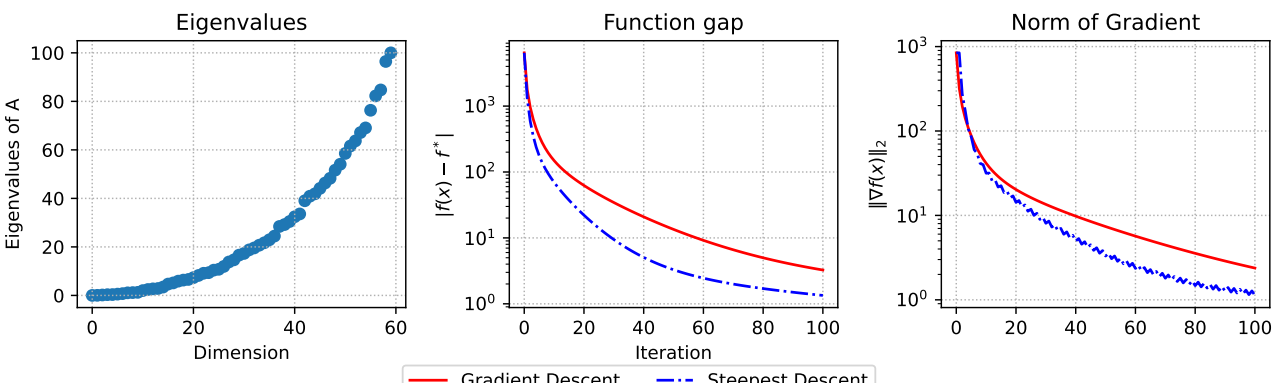
Пусть $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$, а $f^* = f(x^*)$. Предположим, что $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой и L-гладкой функцией, для некоторого $L > 0$. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x_0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$.
Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 0, \ L = 100.$$

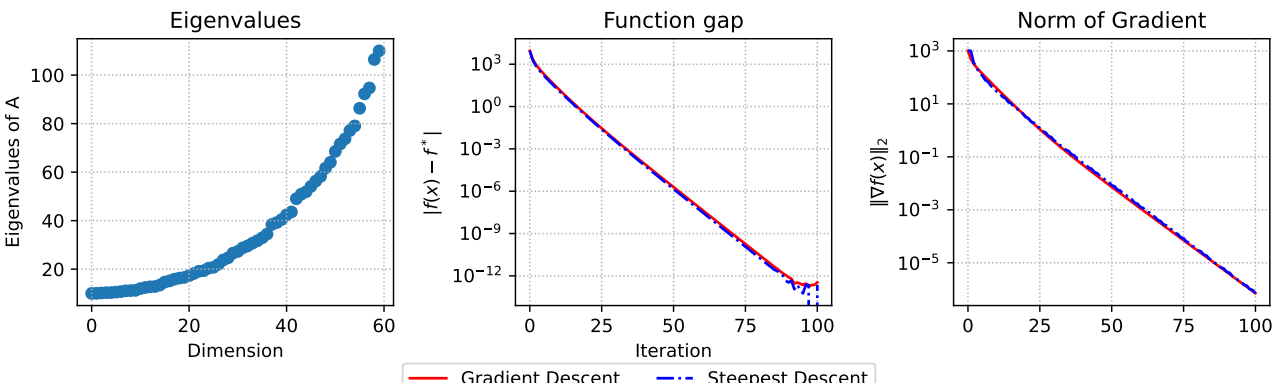
Convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 110.$$

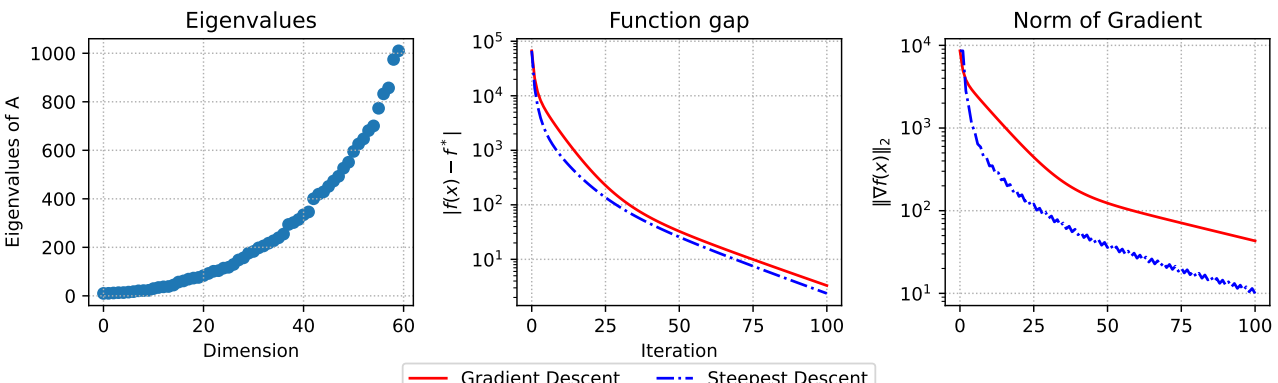
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

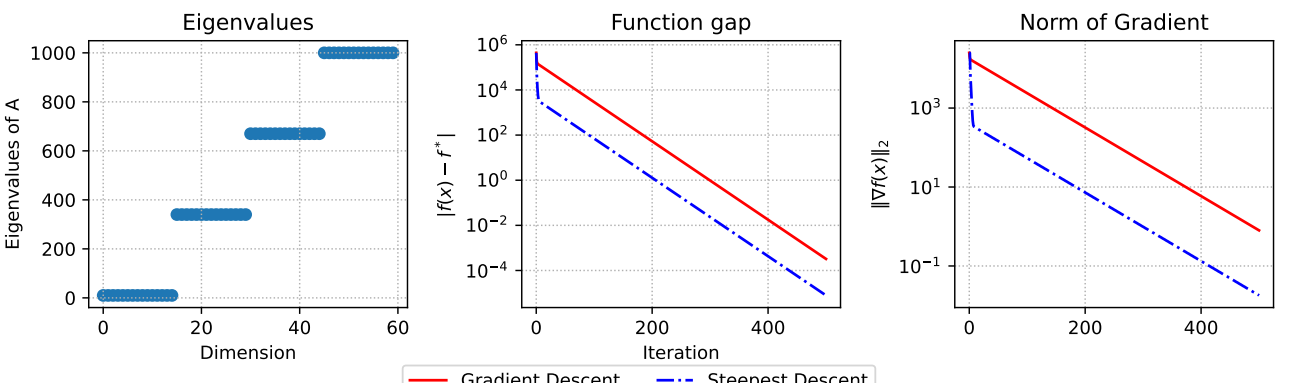
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

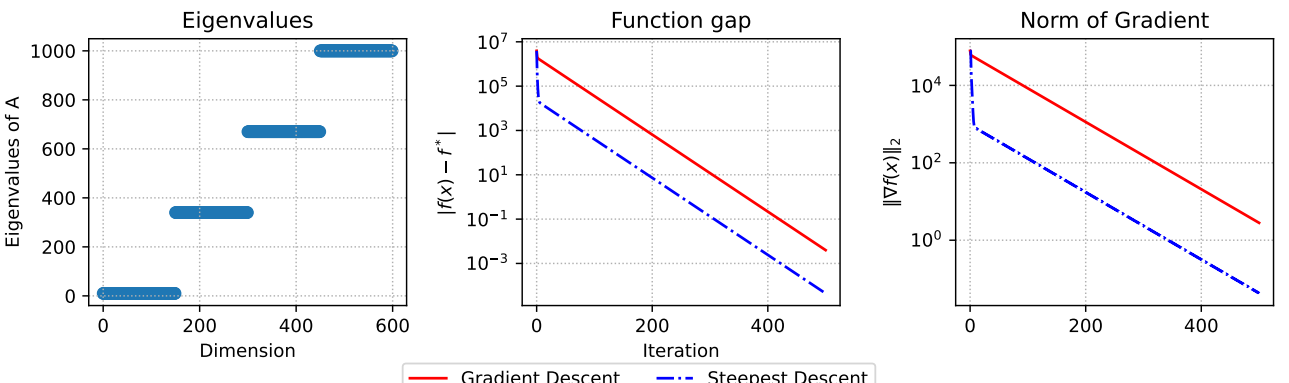
Strongly convex quadratics. n=60, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

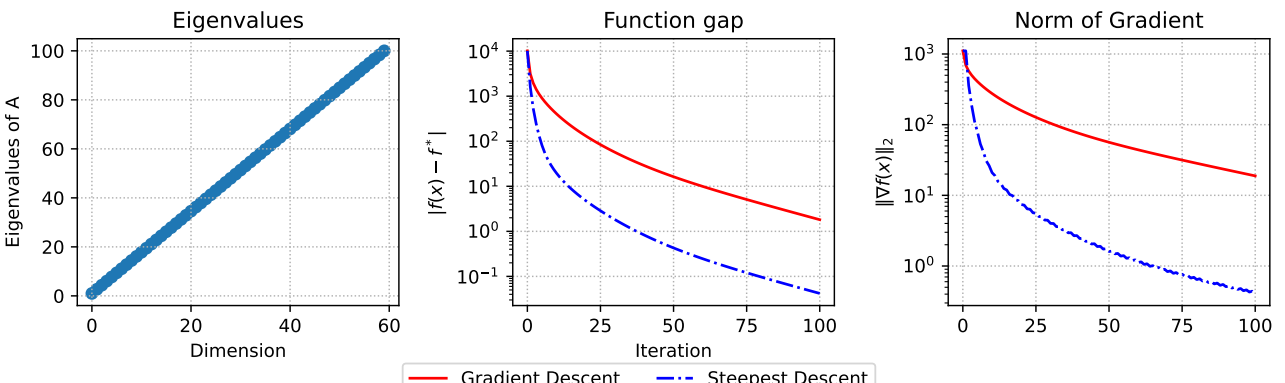
Strongly convex quadratics. n=600, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

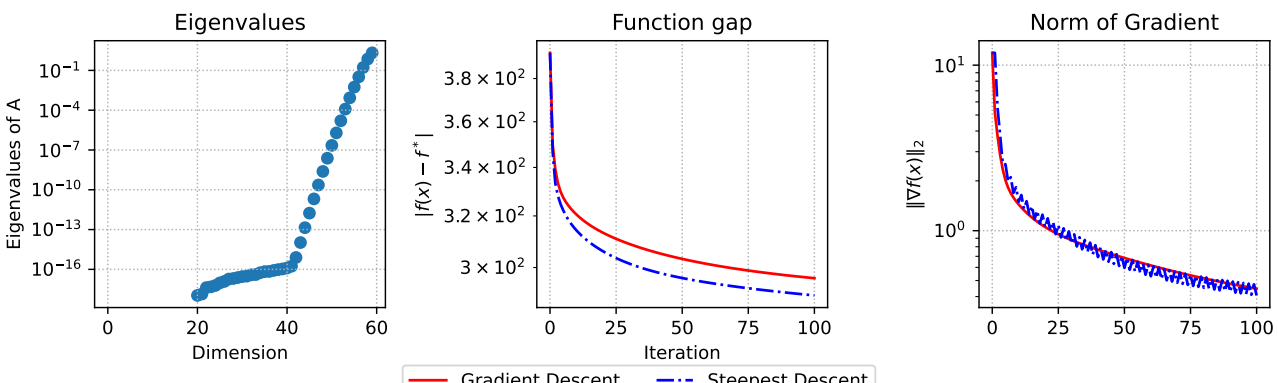
Strongly convex quadratics. n=60, uniform spectrum matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

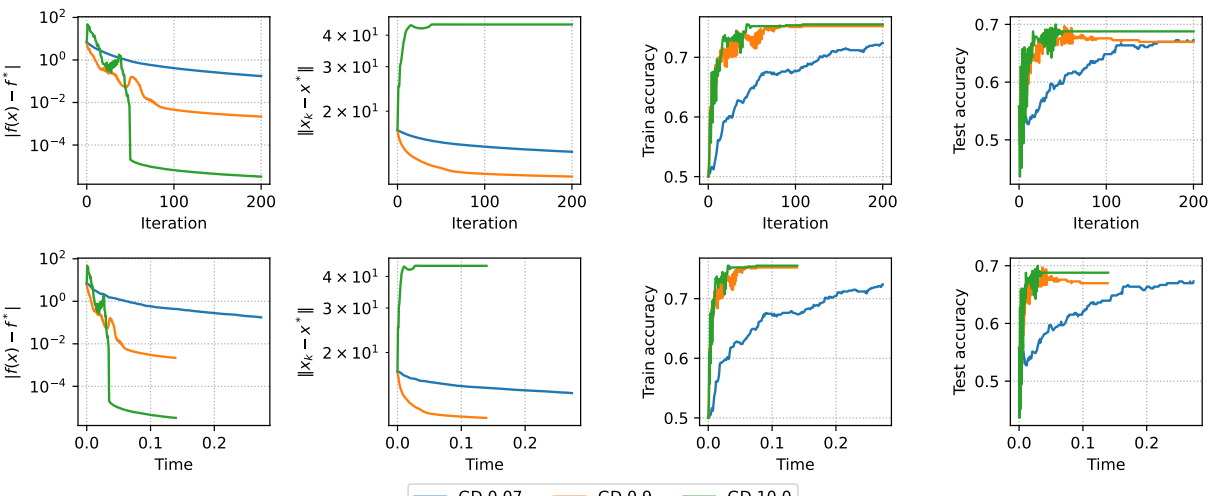
Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

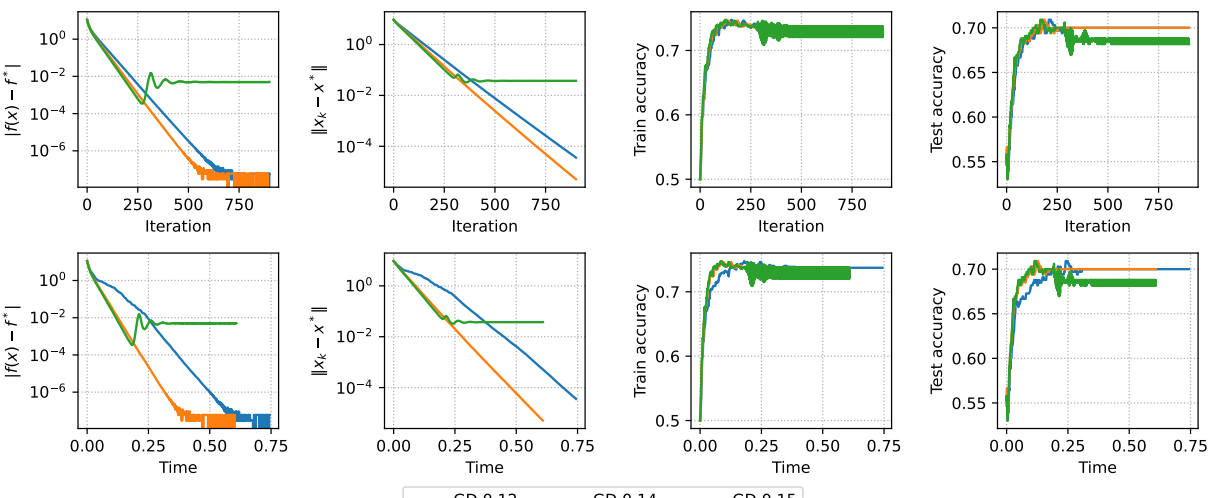
Convex binary logistic regression. mu=0.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

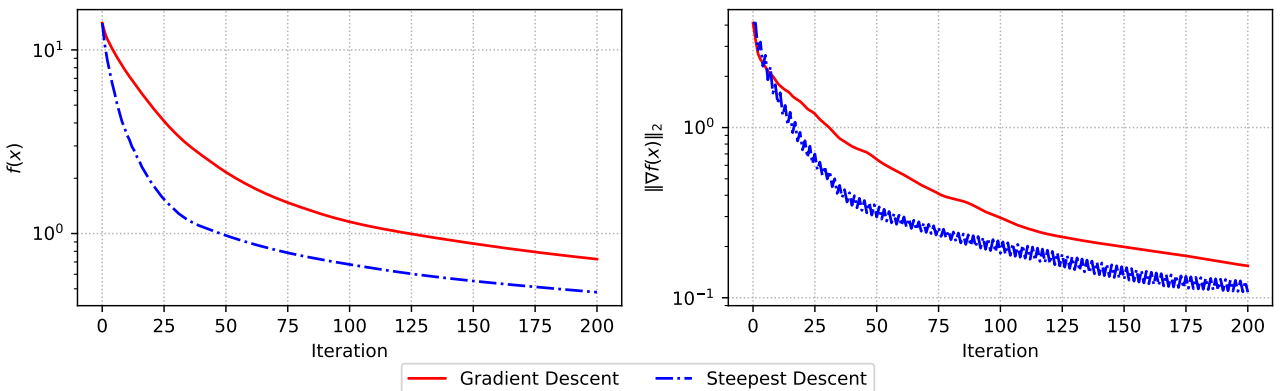
Strongly convex binary logistic regression. mu=0.1.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

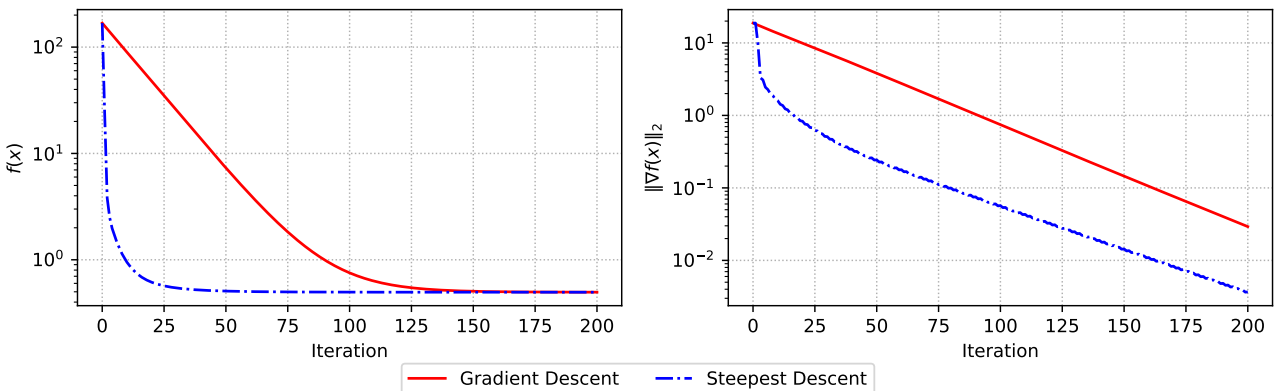
Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. μ=0



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. μ=1



Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x, поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \le e^{-x}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x, поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \le e^{-x}$$

Наконец:

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^*$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x, поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \le e^{-x}$$

Наконец:

$$\varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*)$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x, поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \le e^{-x}$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* &\le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\le \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладкой сильно выпуклой функции мы имеем:

$$f(x_k) - f^* \le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x_0) - f^*).$$

Обратите внимание, что для любого x, поскольку e^{-x} выпуклая и $1 - x$ является её касательной в точке $x = 0$, мы имеем:

$$1 - x \le e^{-x}$$

Наконец:

$$\begin{aligned} \varepsilon = f(x_{k_\varepsilon}) - f^* &\le \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x_0) - f^*) \\ &\le \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x_0) - f^*) \\ k_\varepsilon &\ge \varkappa \log \frac{f(x_0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска

Вопрос: Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка?

Сходимость градиентного спуска

Вопрос: Можно ли добиться лучшей скорости сходимости, используя только информацию первого порядка? **Да, можно.**

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)[1]	гладкая & выпуклая[2]	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\varkappa}\,\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Нижние оценки

- Как правило, это гораздо более нетривиальные результаты - они показывают, что никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка на выбранном классе функций.
- Часто, эти результаты получаются путём предъявления конкретной функции из класса, для которой никакой метод не может сходиться быстрее, чем нижняя оценка.
- Для нижних оценок пишут $\Omega(\cdot)$ вместо $\mathcal{O}(\cdot)$.

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)[1]	гладкая & выпуклая[2]	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min\limits_{0 \le i \le k} \|\nabla f(x_i)\| = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\varkappa}\log\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Например, из таблицы выше следует, что никакой метод первого порядка определённой формы не может сходиться быстрее, чем $\Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ($\Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ для гладкой выпуклой функции) для гладкой выпуклой функции.

[1] Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017
[2] Nemirovski, Yudin, 1979

Бонус: доказательства сходимости

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x-x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^*-x)\right)^T(x-x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^*-x)\right)^T \sqrt{\mu}(x-x^*) \end{aligned}$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
$b = \sqrt{\mu}(x-x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$
Тогда $a+b = \sqrt{\mu}(x-x^*)$ и
$a-b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x-x^*)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [1/4]

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

Пусть $f^* = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Предположим, что $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой и L-гладкой функцией, для некоторого $L > 0$. Пусть $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x_0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$.
Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Заметим, что мы здесь никак не упоминаем точку минимума. То есть, это сходимость $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (в том числе и до точки минимума).

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \, , \; \forall x, y. \tag{2}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \, , \; \forall x, y. \tag{2}$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$
2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \, , \; \forall x, y. \tag{2}$$
3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):
$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$
переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:
$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x_{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

(4)

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \, , \; \forall x, y. \tag{2}$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x_{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2}\|x - x_{k+1}\|^2 = \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \tag{4}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [2/4]

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \, , \; \forall x, y. \tag{1}$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \, , \; \forall x, y. \tag{2}$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x_{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|x - x_{k+1}\|^2 &= \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 + \langle x_{k+1} - x_k, x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 - \alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 . \end{aligned} \tag{4}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle = \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right)$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right)
\end{aligned}
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2
\end{aligned}
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
&\overset{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right).
\end{aligned}
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
&\overset{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right).
\end{aligned}
$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на L:

.

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [3/4]

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_k - x_{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
\frac{1}{2} \|x - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 &\leq \alpha \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2 \\
&\overset{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} \left(f(x) - f(x_{k+1}) \right).
\end{aligned}
$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на L:

$$
f(x_{k+1} - f(x)) \leq \frac{L}{2} \left(\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2 \right).
$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

(5)

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) \leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2 - \|x-x_{k+1}\|\right) \tag{5}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2-\|x-x_{k+1}\|\right)\\ &= \frac{L}{2N}\left(\|x-x_0\|^2-\|x-x_{k+1}\|^2\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2-\|x-x_{k+1}\|\right)\\ &= \frac{L}{2N}\left(\|x-x_0\|^2-\|x-x_{k+1}\|^2\right)\\ &\leq \frac{L}{2N}\|x-x_0\|^2.\end{aligned} \tag{5}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2-\|x-x_{k+1}\|\right)\\ &= \frac{L}{2N}\left(\|x-x_0\|^2-\|x-x_{k+1}\|^2\right)\\ &\leq \frac{L}{2N}\|x-x_0\|^2.\end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x_k) &\geq f(x_{k+1})+\langle\nabla f(x_{k+1}), x_k-x_{k+1}\rangle\\ &= f(x_{k+1})+\alpha\|\nabla f(x_{k+1})\|^2\\ &\geq f(x_{k+1}),\end{aligned}$$

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2-\|x-x_{k+1}\|\right)\\ &= \frac{L}{2N}\left(\|x-x_0\|^2-\|x-x_{k+1}\|^2\right)\\ &\leq \frac{L}{2N}\|x-x_0\|^2.\end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x_k) &\geq f(x_{k+1})+\langle\nabla f(x_{k+1}), x_k-x_{k+1}\rangle\\ &= f(x_{k+1})+\alpha\|\nabla f(x_{k+1})\|^2\\ &\geq f(x_{k+1}),\end{aligned}$$

то $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) \geq \min_{i=0,\ldots,N-1} f(x_{i+1})-f(x)=f(x_N)-f(x)$.

Сходимость градиентного спуска в выпуклом гладком случае [4/4]

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x-x_k\|^2-\|x-x_{k+1}\|\right)\\ &= \frac{L}{2N}\left(\|x-x_0\|^2-\|x-x_{k+1}\|^2\right)\\ &\leq \frac{L}{2N}\|x-x_0\|^2.\end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x_k) &\geq f(x_{k+1})+\langle\nabla f(x_{k+1}), x_k-x_{k+1}\rangle\\ &= f(x_{k+1})+\alpha\|\nabla f(x_{k+1})\|^2\\ &\geq f(x_{k+1}),\end{aligned}$$

то $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x_{k+1})-f(x)\right) \geq \min_{i=0,\ldots,N-1} f(x_{i+1})-f(x) = f(x_N)-f(x)$. Подставляя это в (5), получаем искомый результат.