



ЦЕНТРАЛЬНЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ

# Градиентный спуск

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 7

Даня Меркулов



**Даня Меркулов, Петр Остроухов**

Оптимизация для всех! ЦУ



# Градиентный спуск

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница  $f(x) - f(x + \alpha h)$  была максимальна:

$$h = \arg \max_h (-\langle \nabla f(x), h \rangle) = \arg \min_h \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$



# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница  $f(x) - f(x + \alpha h)$  была максимальна:

$$h = \arg \max_h (-\langle \nabla f(x), h \rangle) = \arg \min_h \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = \arg \min_h \langle \nabla f(x), h \rangle = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции  $f$ .

# Направление локального наискорейшего спуска



Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница  $f(x) - f(x + \alpha h)$  была максимальна:

$$h = \arg \max_h (-\langle \nabla f(x), h \rangle) = \arg \min_h \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = \arg \min_h \langle \nabla f(x), h \rangle = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции  $f$ .

Итерация метода имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :


$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab 

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)).$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab

(GF)

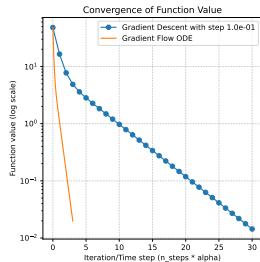
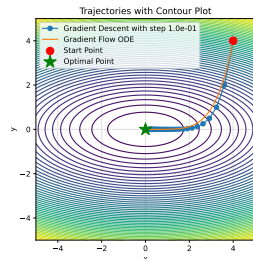


Рисунок 1. Траектория градиентного потока

# Сходимость алгоритма градиентного спуска



Код для построения анимации ниже. Сходимость существенно зависит от выбора шага  $\alpha$ :



# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$



# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)



$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\left. \frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \right|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

$$\nabla f(x^{k+1})^\top \nabla f(x^k) = 0$$



Рисунок 2.  
Наискорейший спуск

# **Сильно выпуклые квадратичные функции**

# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^\top(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .



# Сдвиг координат

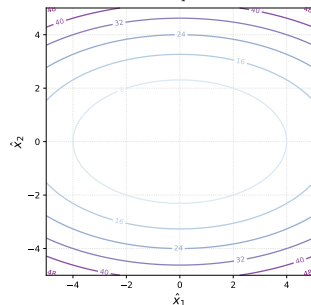
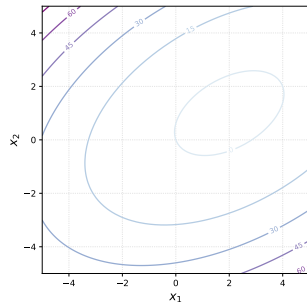


Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^\top$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^\top(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*)$$





# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат

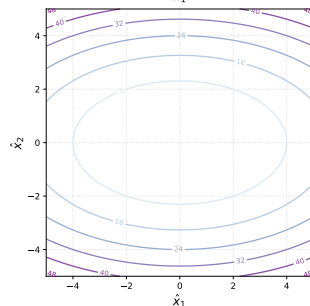
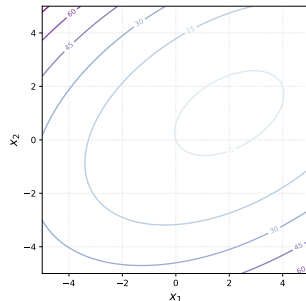


Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2} (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



# Сдвиг координат



Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top Q^\top A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^\top A (x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^\top Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2} (x^*)^\top A x^* \simeq \frac{1}{2} \hat{x}^\top \Lambda \hat{x} \end{aligned}$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1 \qquad |1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$



# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha)$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

$$\begin{aligned}\rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\&= \min_{\alpha} \max \{ |1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L| \}\end{aligned}$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{ |1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L| \}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{ |1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L| \}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{ |1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L| \}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$



# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{ |1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L| \}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2$$

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости



Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

...

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

$$= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\}$$

$$\alpha^* : 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^{2k} f(x^0)$$

# Анализ сходимости



Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью  $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$ , где  $\varkappa = \frac{L}{\mu}$  — число обусловленности квадратичной задачи.

$\varkappa$	$\rho$	Итераций до уменьшения ошибки по аргументу в	Итераций до уменьшения ошибки по функции в 10
		10 раз	раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

# Число обусловленности $\mathcal{N}$



# Случай PL-функций

# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak-Lojasiewicz condition



# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми.  Код

$$f(x) = x^2 + 3 \sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak-Lojasiewicz condition



$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Non-convex PL function



## i Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что  $f$  является PL-функцией с константой  $\mu$  и  $L$ -гладкой, для некоторых  $L \geq \mu > 0$ .

Рассмотрим последовательность  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , сгенерированную методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Пусть  $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ . Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$



# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

# Анализ сходимости



Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha \mu (f(x^k) - f^*).$$

Вычтя  $f^*$  из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

## Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$



# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является RL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является RL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является RL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является RL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Пусть } a &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \text{ и} \\ b &= \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## i Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x))^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть  $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$  и

$$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)$$

Тогда  $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$  и

$$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$



# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

# Выпуклый гладкий случай

# Выпуклый гладкий случай



## i Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и  $L$ -гладкой функцией, для некоторого  $L > 0$ .

Пусть  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Тогда для всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливо:

$$f(x^k) - f(x) \leq \frac{\|x^0 - x\|^2}{2\alpha k}.$$

**Заметим**, что мы здесь никак не упоминаем точку минимума. То есть, это сходимость  $\forall x \in \mathbb{R}^d$  (в том числе и до точки минимума).

# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \forall x, y. \quad (1)$$

# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме  $\|b - c\|^2$  налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме  $\|b - c\|^2$  налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3)  $b \equiv x$ ,  $c \equiv x^{k+1}$ ,  $a \equiv x_k$  и домножаем все на  $\frac{1}{2}$ :

(4)



# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме  $\|b - c\|^2$  налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3)  $b \equiv x$ ,  $c \equiv x^{k+1}$ ,  $a \equiv x_k$  и домножаем все на  $\frac{1}{2}$ :

$$\frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 = \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \quad (4)$$

# Анализ сходимости



Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \quad \forall x, y. \quad (1)$$

2. Гладкость:

$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \quad \forall x, y. \quad (2)$$

3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):

$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c \rangle + \|b - c\|^2$$

переносим справа все кроме  $\|b - c\|^2$  налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:

$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b \rangle - \|c - a\|^2. \quad (3)$$

- Подставляем в (3)  $b \equiv x$ ,  $c \equiv x^{k+1}$ ,  $a \equiv x_k$  и домножаем все на  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 &= \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 - \alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle - \frac{1}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle = \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle)$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 \leq \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2$$



# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x^{k+1})). \end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x^{k+1})). \end{aligned}$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на  $L$ :

# Анализ сходимости



- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение  $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$  и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$\begin{aligned} -\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha (\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(1)}{\leq} \alpha (f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle) \\ &\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left( f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \right), \end{aligned}$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага  $\alpha \leq \frac{1}{L}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 &\leq \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 + \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ \frac{1}{2} \|x - x^{k+1}\|^2 - \frac{1}{2} \|x - x^k\|^2 &\leq \alpha (f(x) - f(x^{k+1})) + \left( \frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} (f(x) - f(x^{k+1})). \end{aligned}$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на  $L$ :

$$f(x^{k+1}) - f(x) \leq \frac{L}{2} (\|x - x_k\|^2 - \|x - x_{k+1}\|^2).$$

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

(5)

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) \leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|)$$

(5)

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x^0\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2)\end{aligned}\tag{5}$$

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x^0\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x^0\|^2.\end{aligned}\tag{5}$$



# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x^0\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x^0\|^2.\end{aligned}\tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1} \rangle \\ &= f(x^{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x^{k+1})\|^2 \\ &\geq f(x^{k+1}),\end{aligned}$$

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x^0\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x^0\|^2.\end{aligned}\tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1} \rangle \\ &= f(x^{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x^{k+1})\|^2 \\ &\geq f(x^{k+1}),\end{aligned}$$

$$\text{то } \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x^{i+1}) - f(x)) \geq \min_{i=0, \dots, N-1} f(x^{i+1}) - f(x) = f(x^N) - f(x).$$

# Анализ сходимости



- Берем среднее от левой и правой частей от по всем  $k$  от 0 до  $N - 1$ :

$$\begin{aligned}\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (f(x^{k+1}) - f(x)) &\leq \frac{L}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} (\|x - x^k\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &= \frac{L}{2N} (\|x - x^0\|^2 - \|x - x^{k+1}\|^2) \\ &\leq \frac{L}{2N} \|x - x^0\|^2.\end{aligned}\tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1} \rangle \\ &= f(x^{k+1}) + \alpha \|\nabla f(x^{k+1})\|^2 \\ &\geq f(x^{k+1}),\end{aligned}$$

то  $\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (f(x^{i+1}) - f(x)) \geq \min_{i=0, \dots, N-1} f(x^{i+1}) - f(x) = f(x^N) - f(x)$ . Подставляя это в (5), получаем искомый результат.

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

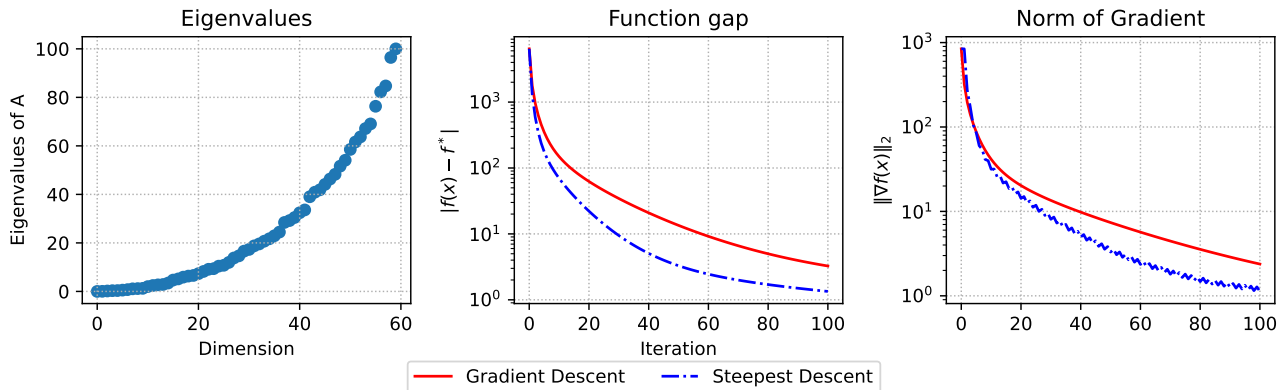
гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\ \nabla f(x^k)\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x^k - x^*\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mu} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 0, L = 100.$$

Convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.

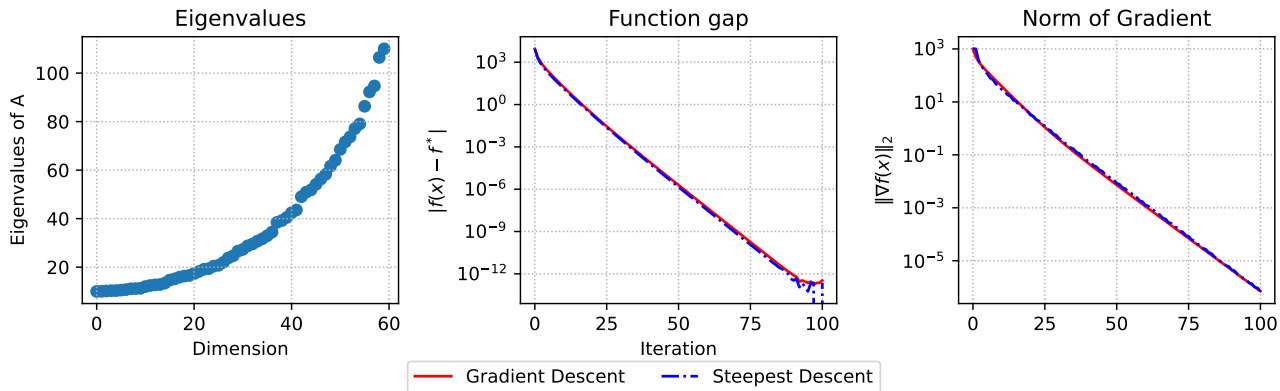


# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 110.$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.

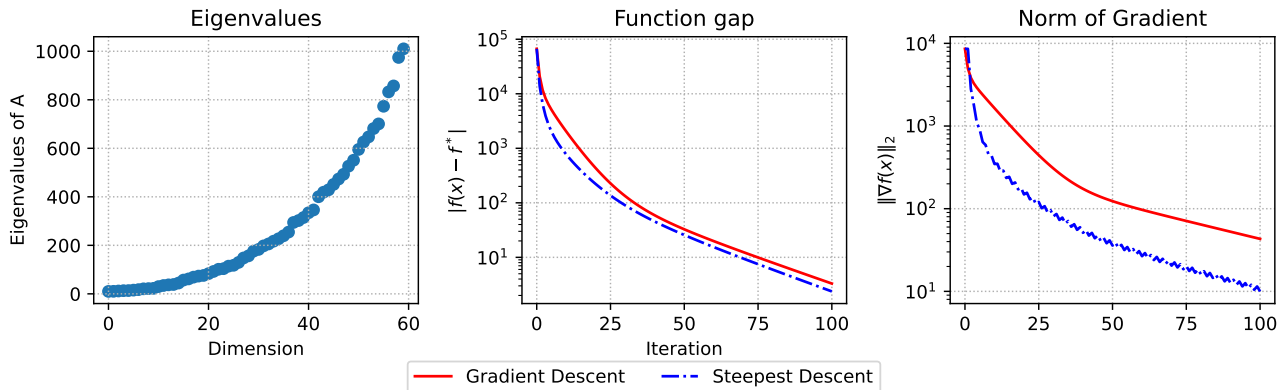


# Численные эксперименты



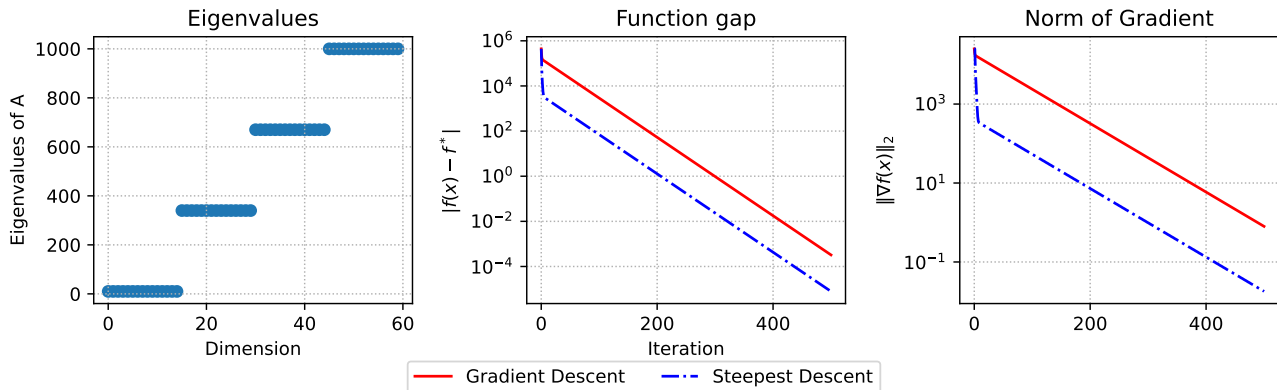
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , clustered matrix.



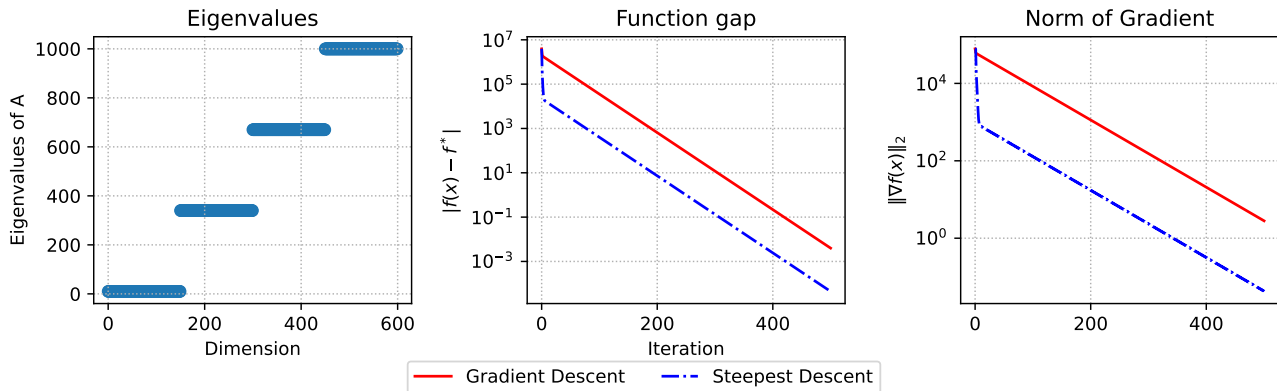


# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics.  $n=600$ , clustered matrix.

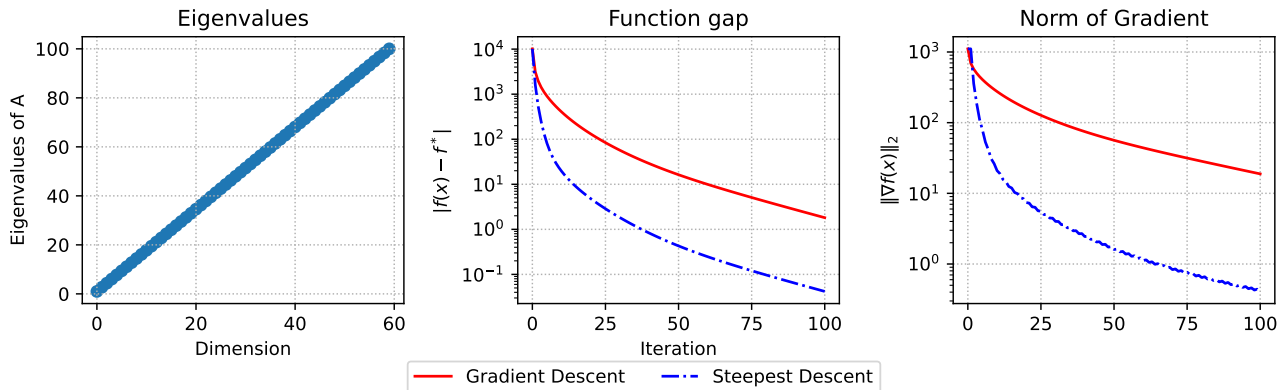


# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \mu = 10, L = 1000.$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , uniform spectrum matrix.

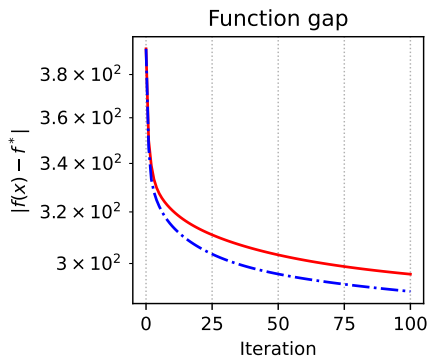
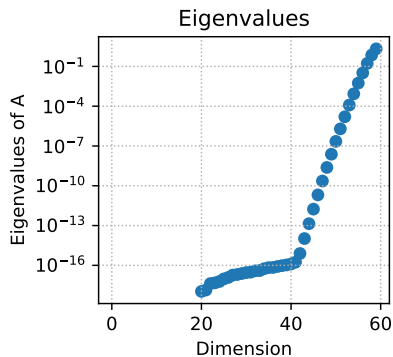


# Численные эксперименты

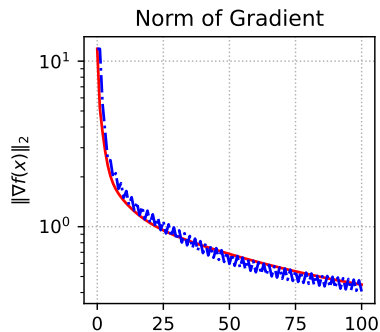


$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

Strongly convex quadratics.  $n=60$ , Hilbert matrix.



— Gradient Descent    - - - Steepest Descent

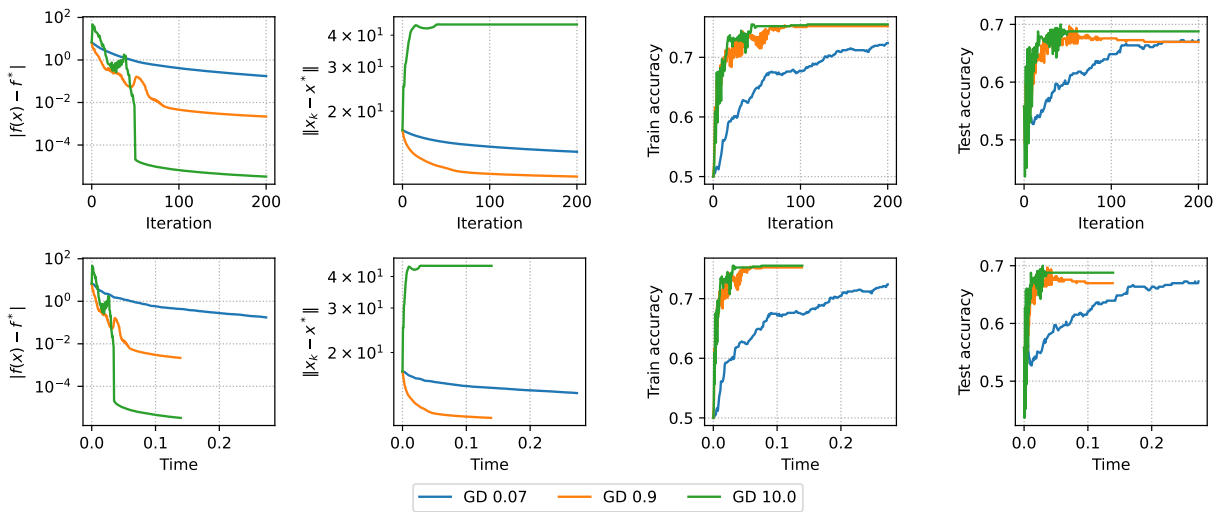


# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Convex binary logistic regression.  $\mu=0$ .

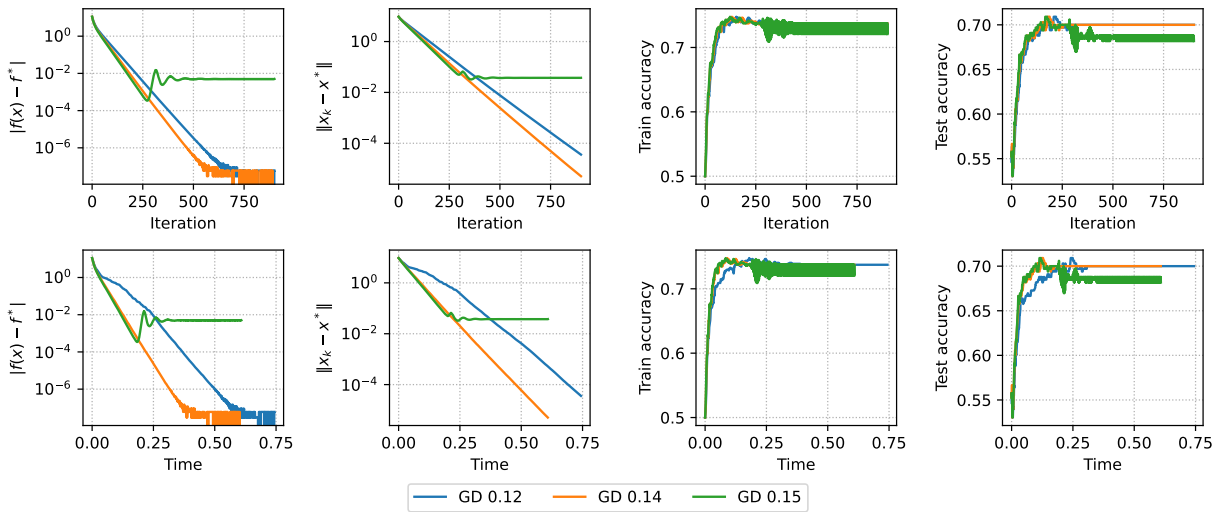


# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=0.1$ .

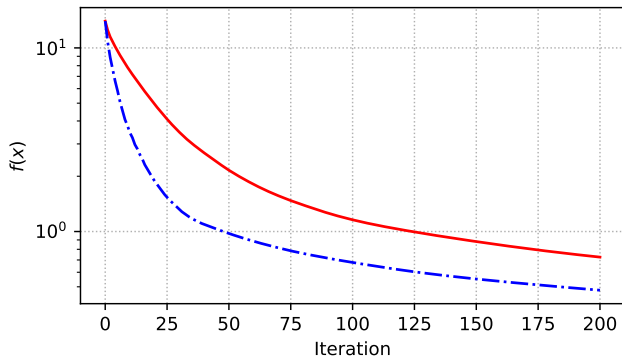


# Численные эксперименты

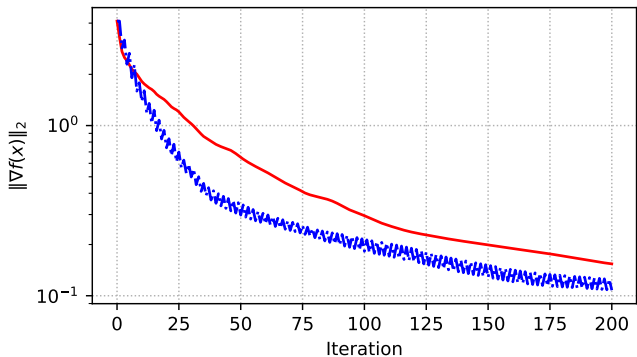


$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression.  $n=300$ .  $m=1000$ .  $\mu=0$



— Gradient Descent    -.- Steepest Descent



# Численные эксперименты



$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression.  $n=300$ .  $m=1000$ .  $\mu=1$

