ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Линейное программирование

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 6

Даня Меркулов
Пётр Остроухов

Линейное программирование и симплекс-метод

Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

Линейное программирование

Линейное программирование. Общие формы

Для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Базовая форма задачи линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \qquad \text{(LP.Basic)}$$
$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

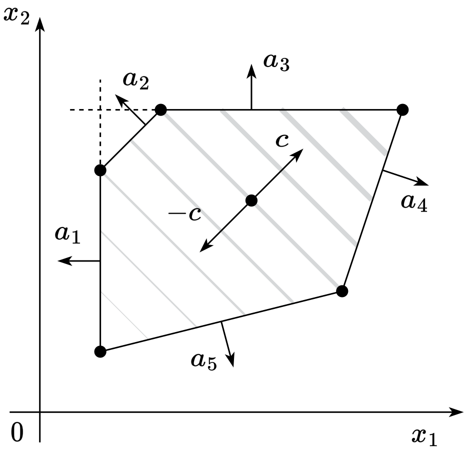


Рисунок 1. Иллюстрация задачи линейного программирования.

Линейное программирование. Общие формы

Для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Базовая форма задачи линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \qquad \text{(LP.Basic)}$$
$$\text{s.t. } Ax \leq b$$

- Стандартная форма задачи линейного программирования:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \qquad \text{(LP.Standard)}$$
$$\text{s.t. } Ax = b$$
$$x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n$$

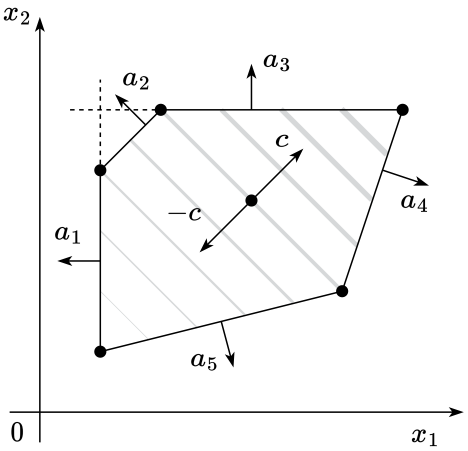


Рисунок 1. Иллюстрация задачи линейного программирования.

Симплекс-метод

Основы симплекс-метода

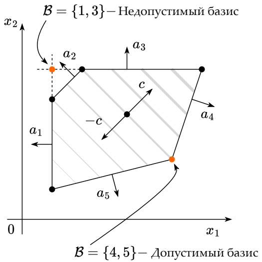


Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.

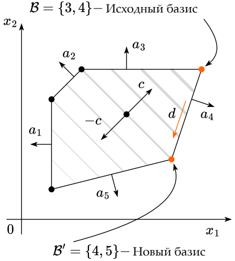


Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- **Базис** B является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m, таких что rank$A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B. Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.

Основы симплекс-метода

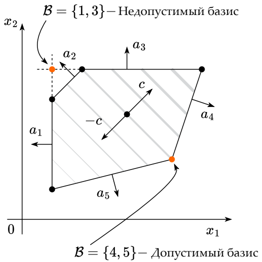


Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.

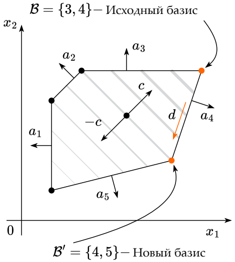


Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- **Базис** B является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m, таких что $\text{rank} A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B. Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.
- Если $A x_B \leq b$, то базис B является **допустимым**.

Основы симплекс-метода

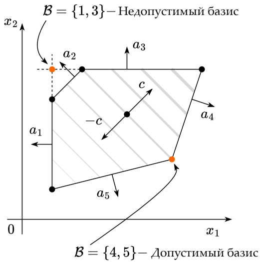


Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.

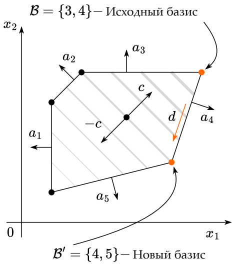


Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- **Базис** B является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m, таких что rank$A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B. Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.
- Если $Ax_B \leq b$, то базис B является **допустимым**.
- Базис B является **оптимальным**, если x_B является оптимумом `LP.Basic`.

Основы симплекс-метода

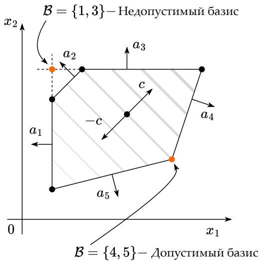


Рисунок 4. Основные понятия симплекс-метода.

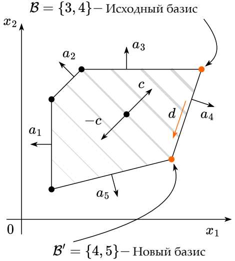


Рисунок 5. Изменение базиса симплекс-метода.

Интуиция симплекс-метода

- Алгоритм симплекс-метода последовательно перемещается по рёбрам многогранника, в каждой вершине выбирая ребро, которое обеспечивает наибольшее уменьшение величины $c^\top x$

Основы симплекс-метода

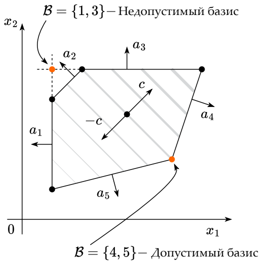


Рисунок 4. Основные понятия симплекс-метода.

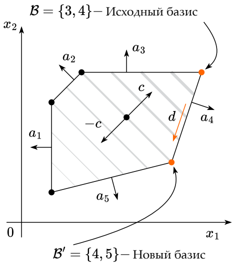


Рисунок 5. Изменение базиса симплекс-метода.

Интуиция симплекс-метода

- Алгоритм симплекс-метода последовательно перемещается по рёбрам многогранника, в каждой вершине выбирая ребро, которое обеспечивает наибольшее уменьшение величины $c^\top x$
- Процесс либо завершается в некоторой вершине, либо уходит по неограниченному ребру, что означает неограниченность задачи снизу ($-\infty$ оптимум)

Основы симплекс-метода

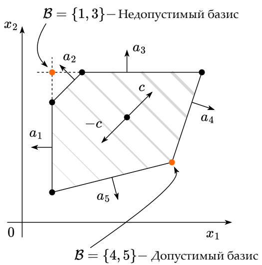


Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.

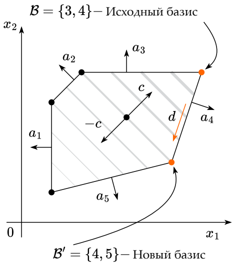


Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.

Существование решения стандартной задачи линейного программирования

1. Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса

Основы симплекс-метода

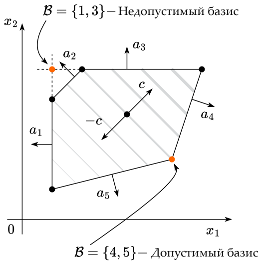


Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.

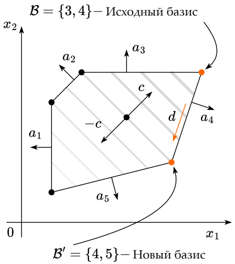


Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.

Существование решения стандартной задачи линейного программирования

1. Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса
2. Если стандартная задача линейного программирования имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной точкой базиса.

Основы симплекс-метода

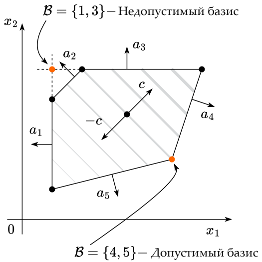


Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.

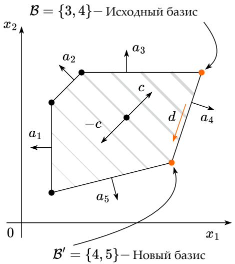


Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.

Существование решения стандартной задачи линейного программирования

1. Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса
2. Если стандартная задача линейного программирования имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной точкой базиса.
3. Если стандартная задача линейного программирования является допустимой и ограниченной, то она имеет оптимальное решение.

Основы симплекс-метода

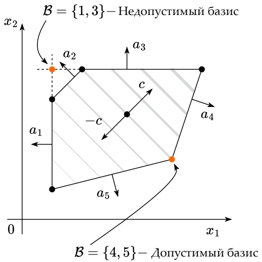


Рисунок 8. Основные понятия симплекс-метода.

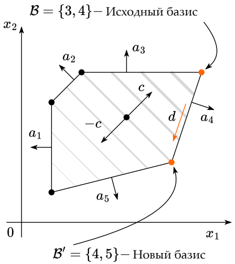


Рисунок 9. Изменение базиса симплекс-метода.

Теорема об оптимуме в вершине

Пусть λ_B будут координатами нашего вектора c в базисе B:

$$\lambda_B^\top A_B = c^\top \leftrightarrow \lambda_B^\top = c^\top A_B^{-1}$$

Если все компоненты λ_B неотрицательны и B является допустимым, то B является оптимальным.

Примеры задач линейного программирования

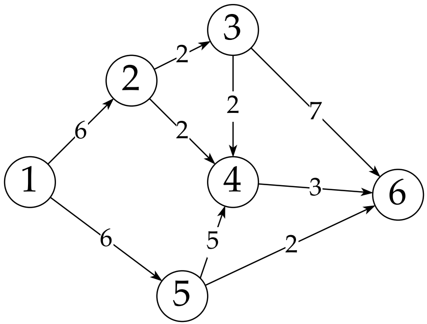
Примеры задач линейного программирования. Производственные планы

Предположим, вы думаете о том, чтобы начать бизнес по производству *Продукта X*.

Давайте найдем максимальную недельную прибыль для вашего бизнеса в Production Plan Problem.

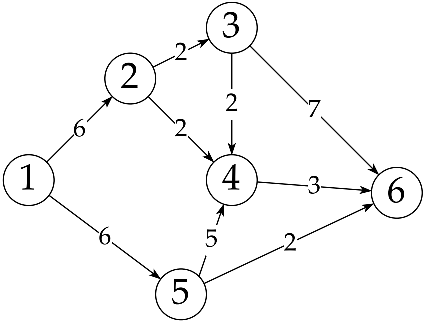
Максимальный поток и минимальный разрез

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке

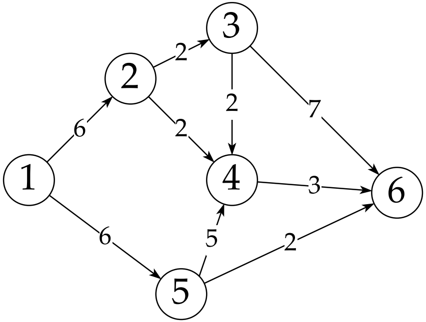


Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.

Пример задачи о максимальном потоке

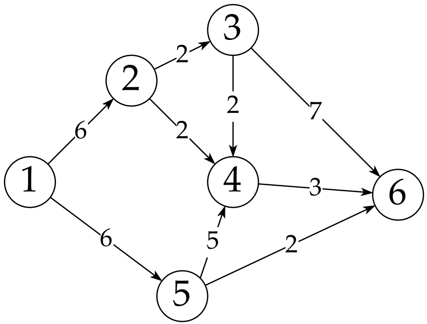


Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Пример задачи о максимальном потоке

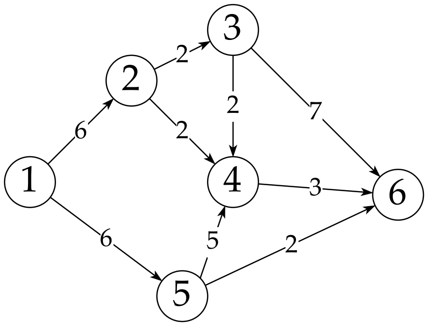


Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

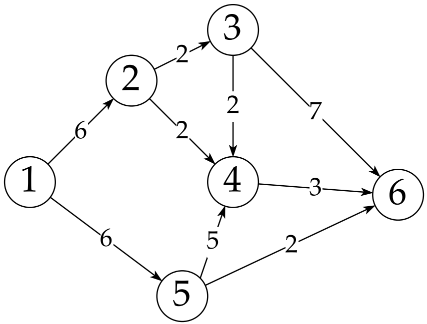
Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

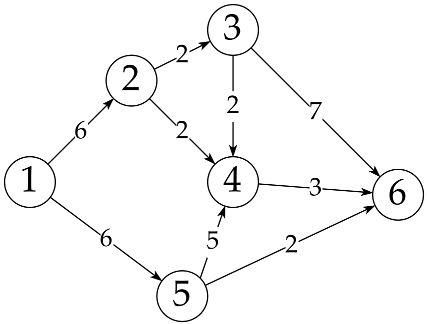
- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица потоков: $X[i, j]$ представляет собой поток от узла i к узлу j.

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

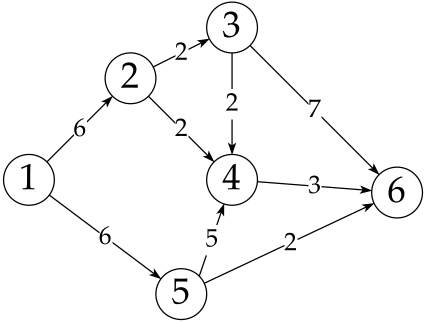
Матрица потоков: $X[i, j]$ представляет собой поток от узла i к узлу j.

Ограничения:

$$0 \leq X \qquad X \leq C$$

Сохранение потока: $$\sum_{j=2}^{N} X(i,j) = \sum_{k=1}^{N-1} X(k,i),\ i = 2, \ldots, N-1$$

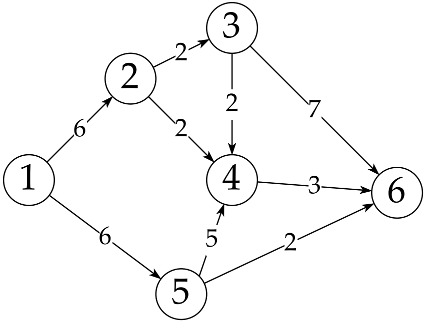
Пример задачи о максимальном потоке



Данная настройка, когда все, что производится источником, будет идти в сток. Поток сети просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^{N} X(1,i) \qquad \text{(Поток)}$$

Пример задачи о максимальном потоке



$$\begin{aligned} \text{максимизировать } & \langle X, S\rangle \\ \text{при ограничениях } & -X \le 0 \\ & X \le C \\ & \langle X, L_n\rangle = 0,\ n = 2, \dots, N-1, \end{aligned}$$

(Задача о максимальном потоке)

L_n состоит из одного столбца (n) единиц (кроме последней строки) минус одна строка (также n) единиц (кроме первого столбца).

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

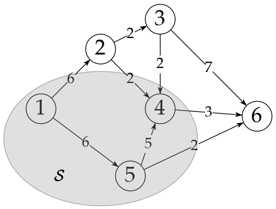
Данная настройка, когда все, что производится источником, будет идти в сток. Поток сети просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^{N} X(1, i) \qquad \text{(Поток)}$$

Пример задачи о минимальном разрезе

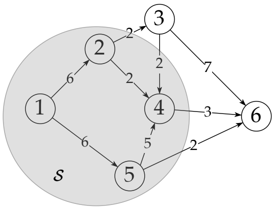
Разрез сети разделяет вершины на два множества: одно содержит источник (мы называем это множество $\mathcal{S}$), и одно содержит сток. Пропускная способность разреза — это общая величина рёбер, выходящих из $\mathcal{S}$ — мы разделяем множества, «отрезая поток» по этим рёбрам.

$\mathcal{S} = \{1, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $1 \to 2, 4 \to 6$, и $5 \to 6$. Пропускная способность этого разреза: $6 + 3 + 2 = 11$.

$\mathcal{S} = \{1, 2, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $2 \to 3, 4 \to 6$, и $5 \to 6$. Пропускная способность этого разреза: $2 + 3 + 2 = 7$.

> **Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.**
>
> Максимальное значение потока s-t равно минимальной пропускной способности всех s-t разрезов.

Примеры задач линейного программирования. Различные приложения

Посмотрите на различные практические приложения задач линейного программирования и симплекс-метода в Related Collab Notebook.