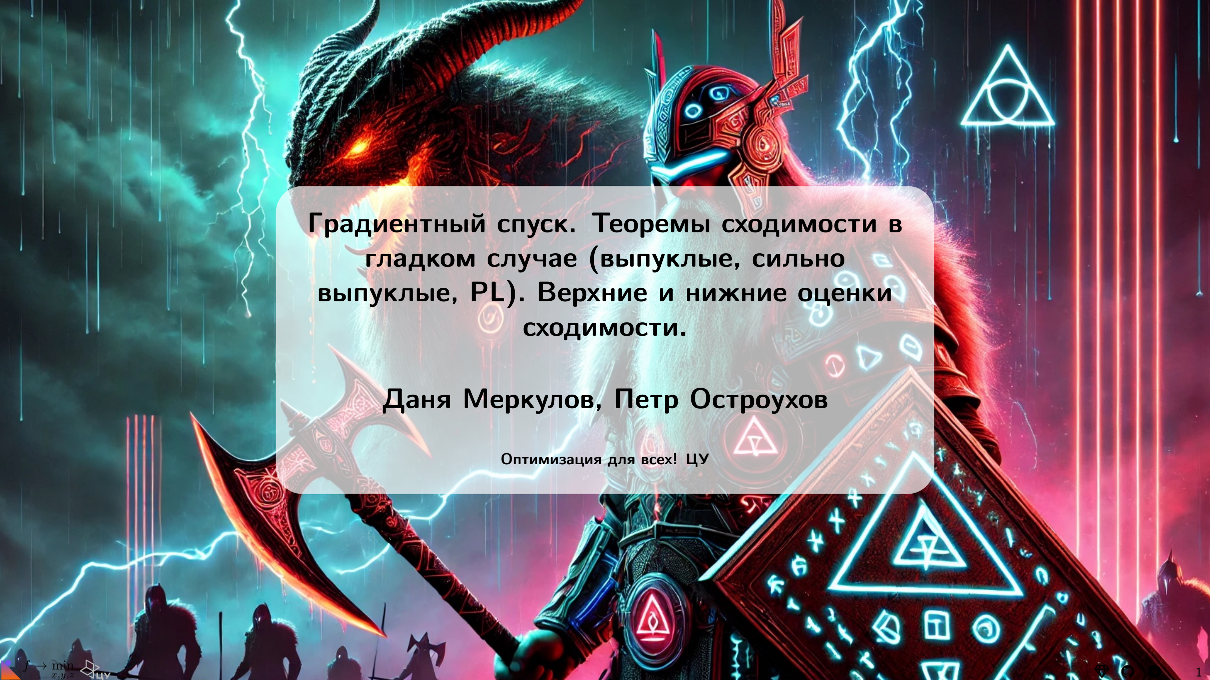


Градиентный спуск. Теоремы сходимости в гладком случае (выпуклые, сильно выпуклые, PL). Верхние и нижние оценки сходимости.

Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ

Повторение

Виды выпуклости

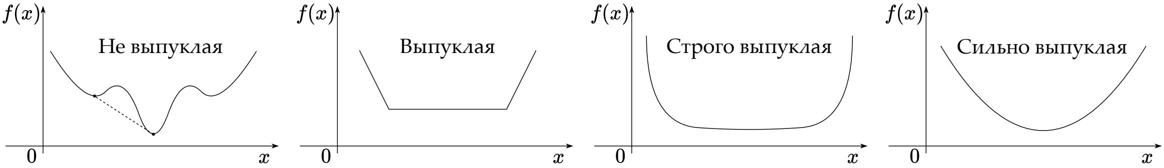


Рис. 1: Примеры выпуклых функций

Гладкость

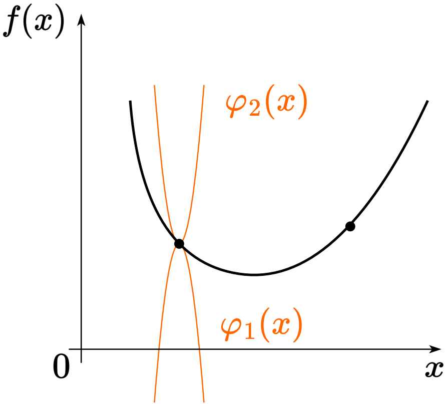


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

Определение: Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является L -гладкой, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leqslant L\|y - x\|$$

Гладкость

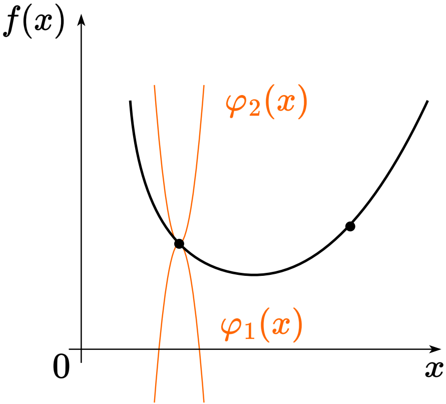


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

Определение: Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является L -гладкой, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leqslant L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы.
Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой L, то $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle\| \leqslant \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Гладкость

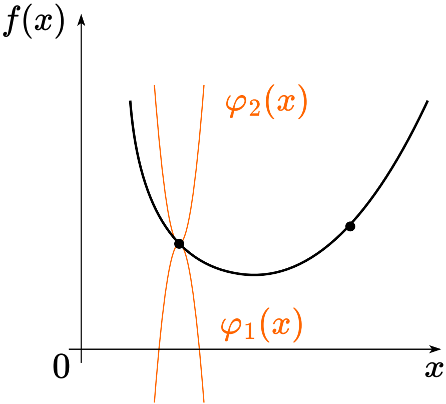


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

Определение: Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является L -гладкой, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leqslant L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы.
Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой L, то $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle\| \leqslant \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Если зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то:

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

Гладкость

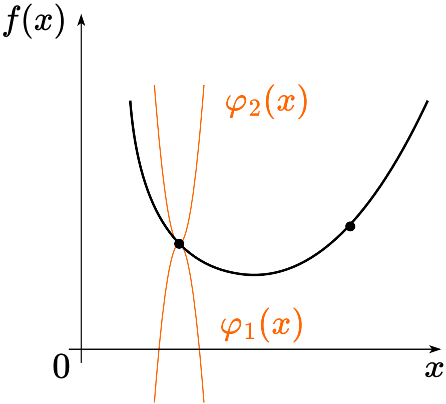


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

Определение: Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является L -гладкой, если $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leqslant L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы.
Если $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ - непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой L, то $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle\| \leqslant \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Если зафиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то:

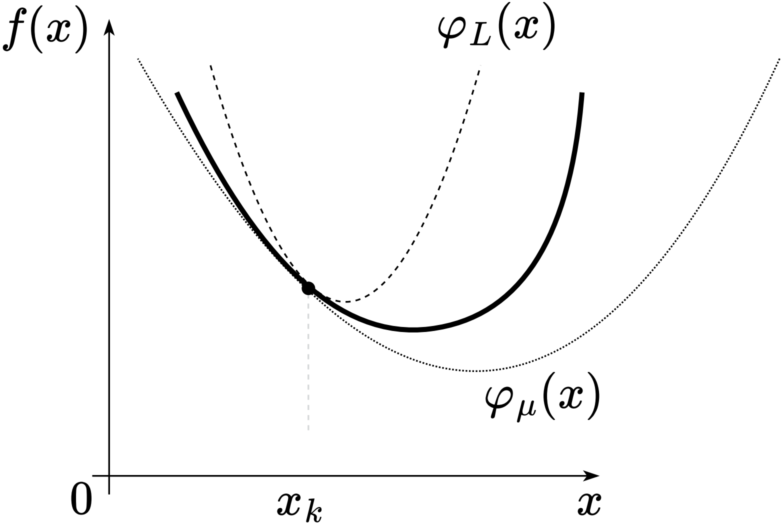
$$\varphi_1(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0\rangle - \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0\rangle + \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

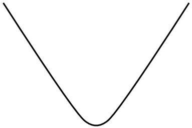
Это две параболы, и для них верно, что

$$\varphi_1(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi_2(x) \ \forall x$$

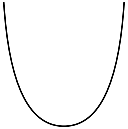
Гладкость и сильная выпуклость



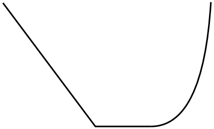
Гладкость и сильная выпуклость



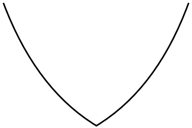
Гладкая
Выпуклая



Гладкая
μ - сильно выпуклая



Негладкая
Выпуклая



Негладкая
μ - сильно выпуклая

Градиентный спуск

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$
f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)
$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница $f(x) - f(x + \alpha h)$ была максимальна:

$$h = \arg\max_h \left(-\langle \nabla f(x), h \rangle\right) = \arg\min_h \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha\langle \nabla f(x), h\rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha\langle \nabla f(x), h\rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h\rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница $f(x) - f(x + \alpha h)$ была максимальна:

$$h = \arg\max_h \left(-\langle \nabla f(x), h\rangle\right) = \arg\min_h \langle \nabla f(x), h\rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h\rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h\rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = \arg\min_h \langle \nabla f(x), h\rangle = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции f.

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) - f(x) < 0$$

$$\alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < 0$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle < 0$$

Более того, мы хотим, чтобы разница $f(x) - f(x + \alpha h)$ была максимальна:

$$h = \arg\max_h \left(-\langle \nabla f(x), h \rangle\right) = \arg\min_h \langle \nabla f(x), h \rangle.$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

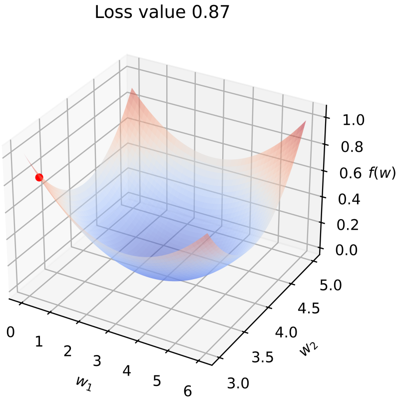
$$h = \arg\min_h \langle \nabla f(x), h \rangle = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

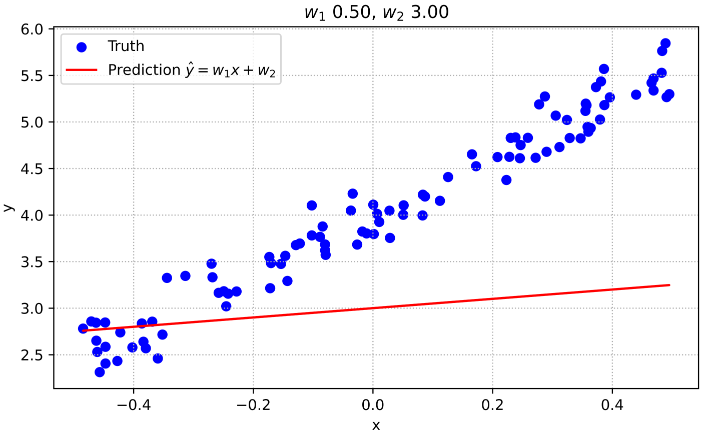
представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции f.
Итерация метода имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

Сходимость алгоритма градиентного спуска

Код для построения анимации ниже. Сходимость существенно зависит от выбора шага α:





Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha = \alpha_k} = 0.$$

Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$
\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))
$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.
Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$
\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha = \alpha_k} = 0.
$$

Условия оптимальности:

Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$
\alpha_k = \arg\min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))
$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$
\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha = \alpha_k} = 0.
$$

Условия оптимальности:

$$
\nabla f(x^{k+1})^\top \nabla f(x^k) = 0
$$

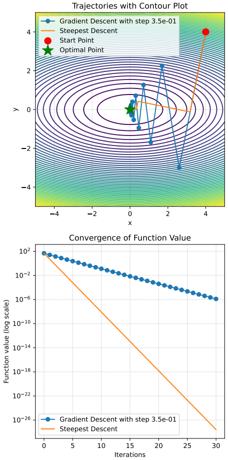


Рис. 3: Наискорейший спуск

Открыть в Colab ♣

Сильно выпуклые квадратичные функции

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

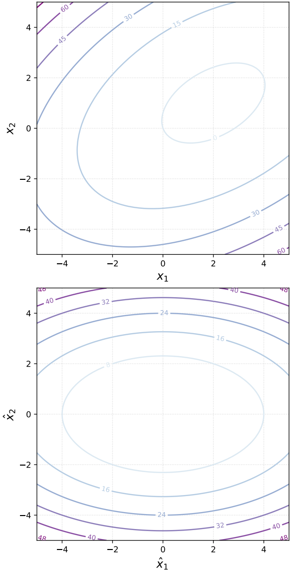
$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.

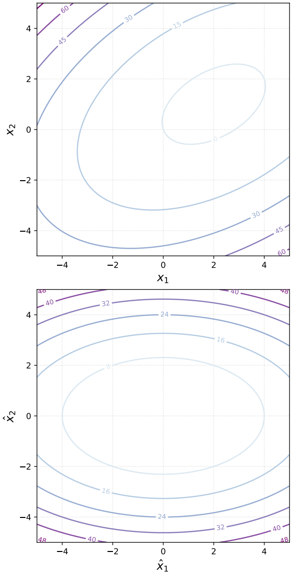


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.

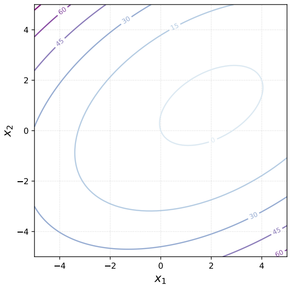


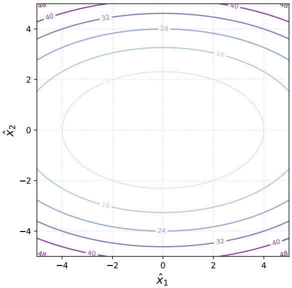
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.





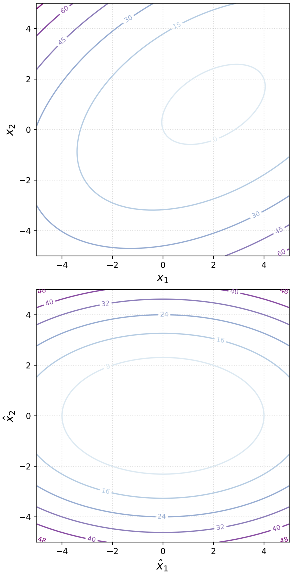
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*)$$



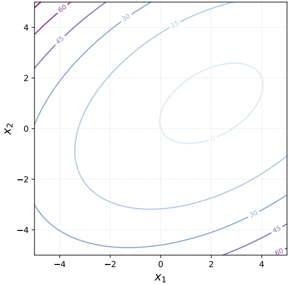
Сдвиг координат

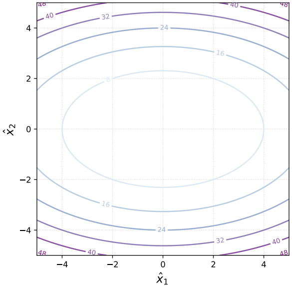
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2} (Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2} \hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2} (x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^*
\end{aligned}
$$



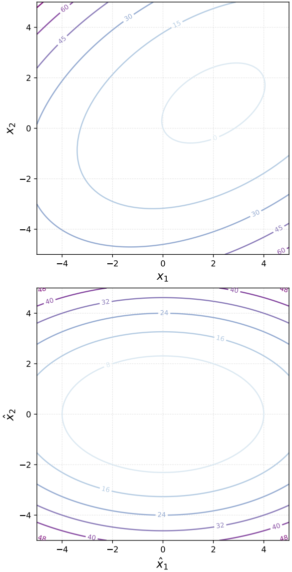


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.



$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \end{aligned}$$

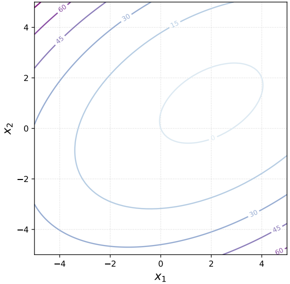
Сдвиг координат

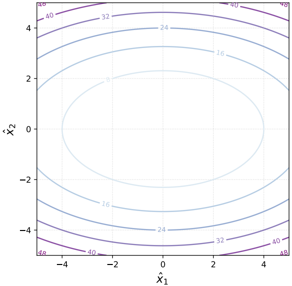
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q\hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q\hat{x} - b^T Q\hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q\hat{x} - (x^*)^T A^T Q\hat{x} - (x^*)^T A x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^*
\end{aligned}$$



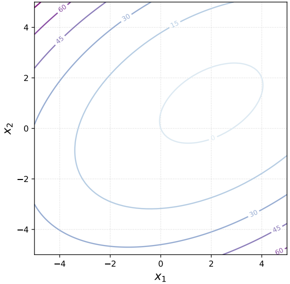


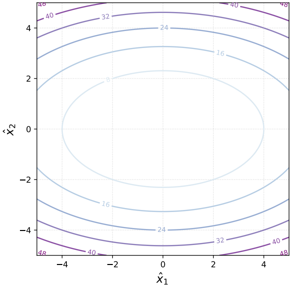
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.
$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.





$$
\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2} \hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2} \hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\
&= \frac{1}{2} \hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^* \simeq \frac{1}{2} \hat{x}^T \Lambda \hat{x}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
|1 - \alpha\mu| < 1
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(1 - \alpha^k \lambda_{(i)}\right) x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
& |1 - \alpha \mu| < 1 \\
& -1 < 1 - \alpha \mu < 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \qquad\qquad |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(1 - \alpha^k \lambda_{(i)}\right) x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha\mu| &< 1 & \qquad |1 - \alpha L| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu &< 1 & \qquad -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu &> 0 & &
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{array}{ll}
|1 - \alpha\mu| < 1 & |1 - \alpha L| < 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 & \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{array}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 & &|1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & &-1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 & &\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha)
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{array}{ll}
|1 - \alpha\mu| < 1 & |1 - \alpha L| < 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 & \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{array}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(1 - \alpha^k \lambda_{(i)}\right) x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* :& \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(1 - \alpha^k \lambda_{(i)}\right) x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= \left(1 - \alpha\, \lambda_{(i)}\right)^k x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_{\alpha} \max \left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{array}{ll}
|1 - \alpha\mu| < 1 & |1 - \alpha L| < 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 & \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{array}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\} \\
\alpha^* :& \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= \left(1 - \alpha^k \lambda_{(i)}\right) x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k \, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
&\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

$$
|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x^0_{(i)}|
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 & &|1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 & &-1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 & &\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_{\alpha} \max \left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1
\end{aligned}
$$

$$
\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
$$

$$
|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|
$$

$$
\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

. . .

Помним, что $\lambda_{\min} = \mu > 0$, $\lambda_{\max} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
|1 - \alpha\mu| &< 1 & \qquad |1 - \alpha L| &< 1 \\
-1 < 1 - \alpha\mu &< 1 & \qquad -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\
\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu &> 0 & \qquad \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L &> 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \max\left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \qquad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

$$
|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|
$$

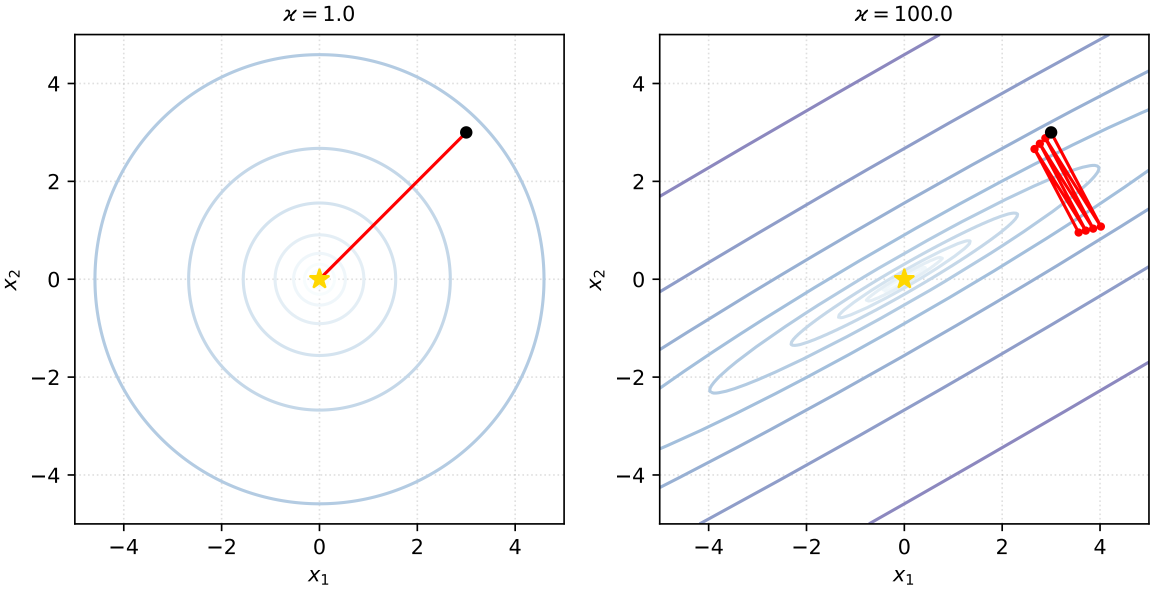
$$
\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2 \qquad f(x^k) \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^{2k} f(x^0)
$$

Анализ сходимости

Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$, где $\varkappa = \frac{L}{\mu}$ — *число обусловленности* квадратичной задачи.

$\varkappa$	ρ	Итераций до уменьшения ошибки по аргументу в 10 раз	Итераций до уменьшения ошибки по функции в 10 раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

Число обусловленности $\varkappa$



Случай PL-функций

PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

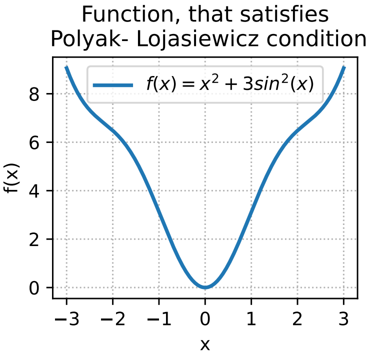
Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$



PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

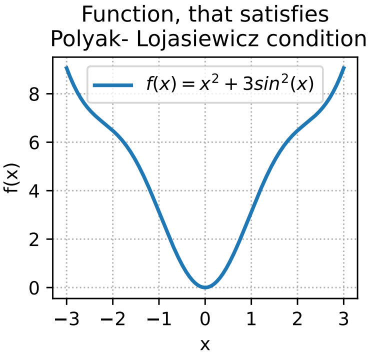
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

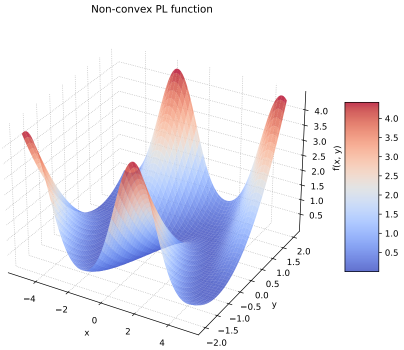
Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

$$f(x,y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$





Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L-гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$. Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \left(2 - L\alpha\right) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha\mu(f(x^k) - f^*).
$$

Вычтя f^* из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$
f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2
$$

Положим $y = x^*$:

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =
\end{aligned}
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

$$= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) =$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$
f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2
$$

Положим $y = x^*$:

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)
\end{aligned}
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x-x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^*-x)\right)^T(x-x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^*-x)\right)^T\sqrt{\mu}(x-x^*)
\end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x-x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^*-x)\right)^T(x-x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^*-x)\right)^T\sqrt{\mu}(x-x^*)
\end{aligned}
$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
$b = \sqrt{\mu}(x-x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

$$= \left(\nabla f(x) - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и

$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Тогда $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$ и

$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

Выпуклый гладкий случай

Выпуклый гладкий случай

Theorem

Предположим, что $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ является выпуклой и L-гладкой функцией, для некоторого $L > 0$. Пусть $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Тогда для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x^k) - f(x) \leq \frac{\|x^0 - x\|^2}{2\alpha k}.$$

Заметим, что мы здесь никак не упоминаем точку минимума. То есть, это сходимость $\forall x \in \mathbb{R}^d$ (в том числе и до точки минимума).

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \,, \;\forall x, y. \tag{1}$$

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \ \forall x, y. \tag{1}$$

2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \ \forall x, y. \tag{2}$$

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \ \forall x, y. \tag{1}$$
2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \ \forall x, y. \tag{2}$$
3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):
$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c\rangle + \|b - c\|^2$$
переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:
$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b\rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle \,, \; \forall x, y. \tag{1}$$
2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2 \,, \; \forall x, y. \tag{2}$$
3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):
$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c\rangle + \|b - c\|^2$$
переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:
$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b\rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x^{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\tag{4}$$

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \ \forall x, y. \tag{1}$$
2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \ \forall x, y. \tag{2}$$
3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):
$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c\rangle + \|b - c\|^2$$
переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:
$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b\rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x^{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:
$$\frac{1}{2}\|x - x^{k+1}\|^2 = \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2 + \langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x\rangle - \frac{1}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \tag{4}$$

Анализ сходимости

Наш инструментарий:

1. Выпуклость:
$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle, \ \forall x, y. \tag{1}$$
2. Гладкость:
$$f(x) \leq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{L}{2} \|x - y\|^2, \ \forall x, y. \tag{2}$$
3. 3-point identity (по сути, квадрат разности):
$$\|a - b\|^2 = \|a - c - (b - c)\|^2 = \|a - c\|^2 - 2\langle a - c, b - c\rangle + \|b - c\|^2$$
переносим справа все кроме $\|b - c\|^2$ налево и меняем местами все факторы внутри каждого из перенесенных членов:
$$\|b - c\|^2 = \|b - a\|^2 + 2\langle c - a, c - b\rangle - \|c - a\|^2. \tag{3}$$

- Подставляем в (3) $b \equiv x$, $c \equiv x^{k+1}$, $a \equiv x_k$ и домножаем все на $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|x - x^{k+1}\|^2 &= \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 + \left\langle x^{k+1} - x^k, x^{k+1} - x\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 - \alpha\left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x\right\rangle - \frac{1}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \right\rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

Анализ сходимости

* Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle = \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right)
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right)
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\frac{1}{2} \left\| x - x^{k+1} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k \rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \rangle \right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\frac{1}{2} \left\| x - x^{k+1} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2
$$

$$
\frac{1}{2} \left\| x - x^{k+1} \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 \leq \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha\left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x\right\rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha\left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x\right\rangle &= \alpha\left(\left\langle \nabla f(x^k), x - x^k\right\rangle + \left\langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1}\right\rangle\right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha\left(f(x) - f(x^k) + \left\langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1}\right\rangle\right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha\left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\|x - x^{k+1}\right\|^2 &\leq \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 + \alpha\left(f(x) - f(x^{k+1})\right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2}\right)\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \\
\frac{1}{2}\left\|x - x^{k+1}\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 &\leq \alpha\left(f(x) - f(x^{k+1})\right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2}\right)\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \\
&\overset{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L}\left(f(x) - f(x^{k+1})\right).
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x\rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
-\alpha \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x\rangle &= \alpha \left(\langle \nabla f(x^k), x - x^k\rangle + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle\right) \\
&\overset{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1}\rangle\right) \\
&\overset{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2}\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left\|x - x^{k+1}\right\|^2 &\leq \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 + \alpha\left(f(x) - f(x^{k+1})\right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2}\right)\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \\
\frac{1}{2}\left\|x - x^{k+1}\right\|^2 - \frac{1}{2}\left\|x - x^k\right\|^2 &\leq \alpha\left(f(x) - f(x^{k+1})\right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2}\right)\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2 \\
&\overset{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L}\left(f(x) - f(x^{k+1})\right).
\end{aligned}
$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на L:

.

Анализ сходимости

- Посмотрим внимательнее на скалярное произведение $-\alpha \left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \right\rangle$ и воспользуемся сначала выпуклостью (1), а потом – гладкостью (2):

$$
\begin{aligned}
- \alpha \left\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x \right\rangle &= \alpha \left(\left\langle \nabla f(x^k), x - x^k \right\rangle + \left\langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \right\rangle \right) \\
&\stackrel{(1)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^k) + \left\langle \nabla f(x^k), x^k - x^{k+1} \right\rangle \right) \\
&\stackrel{(2)}{\leq} \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) + \frac{L}{2} \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \right),
\end{aligned}
$$

- Подставляем это все обратно в (4) и используем условие на размер шага $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left\| x - x^{k+1} \right\|^2 &\leq \frac{1}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 + \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \\
\frac{1}{2} \left\| x - x^{k+1} \right\|^2 - \frac{1}{2} \left\| x - x^k \right\|^2 &\leq \alpha \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right) + \left(\frac{\alpha L}{2} - \frac{1}{2} \right) \left\| x^{k+1} - x^k \right\|^2 \\
&\stackrel{(\alpha \leq 1/L)}{\leq} \frac{1}{L} \left(f(x) - f(x^{k+1}) \right).
\end{aligned}
$$

- Переносим правую часть влево, левую - вправо и домножаем на L:

$$
f(x^{k+1} - f(x)) \leq \frac{L}{2} \left(\left\| x - x_k \right\|^2 - \left\| x - x_{k+1} \right\|^2 \right).
$$

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

(5)

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1})-f(x)\right)\leq\frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x-x^k\right\|^2-\left\|x-x^{k+1}\right\|\right) \tag{5}$$

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1}) - f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x - x^k\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|\right) \\
&= \frac{L}{2N}\left(\left\|x - x^0\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|^2\right)
\end{aligned} \tag{5}
$$

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1}) - f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x - x^k\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|\right) \\
&= \frac{L}{2N}\left(\left\|x - x^0\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|^2\right) \\
&\leq \frac{L}{2N}\left\|x - x^0\right\|^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x-x^k\right\|^2-\left\|x-x^{k+1}\right\|\right) \\
&= \frac{L}{2N}\left(\left\|x-x^0\right\|^2-\left\|x-x^{k+1}\right\|^2\right) \\
&\leq \frac{L}{2N}\left\|x-x^0\right\|^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$
\begin{aligned}
f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1}\rangle \\
&= f(x^{k+1}) + \alpha\left\|\nabla f(x^{k+1})\right\|^2 \\
&\geq f(x^{k+1}),
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1}) - f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x - x^k\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|\right) \\
&= \frac{L}{2N}\left(\left\|x - x^0\right\|^2 - \left\|x - x^{k+1}\right\|^2\right) \\
&\leq \frac{L}{2N}\left\|x - x^0\right\|^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$\begin{aligned}
f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1}\rangle \\
&= f(x^{k+1}) + \alpha\left\|\nabla f(x^{k+1})\right\|^2 \\
&\geq f(x^{k+1}),
\end{aligned}$$

то $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1}) - f(x)\right) \geq \min_{i=0,\ldots,N-1} f(x^{i+1}) - f(x) = f(x^N) - f(x)$.

Анализ сходимости

- Берем среднее от левой и правой частей от по всем k от 0 до $N-1$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1})-f(x)\right) &\leq \frac{L}{2N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left\|x-x^k\right\|^2-\left\|x-x^{k+1}\right\|\right)\\
&= \frac{L}{2N}\left(\left\|x-x^0\right\|^2-\left\|x-x^{k+1}\right\|^2\right)\\
&\leq \frac{L}{2N}\left\|x-x^0\right\|^2.
\end{aligned} \tag{5}
$$

- Так как для выпуклых функций (1) градиентный спуск монотонен:

$$
\begin{aligned}
f(x^k) &\geq f(x^{k+1}) + \langle \nabla f(x^{k+1}), x^k - x^{k+1}\rangle\\
&= f(x^{k+1}) + \alpha\left\|\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\\
&\geq f(x^{k+1}),
\end{aligned}
$$

то $\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left(f(x^{k+1})-f(x)\right) \geq \min_{i=0,\ldots,N-1} f(x^{i+1}) - f(x) = f(x^N) - f(x)$. Подставляя это в (5), получаем искомый результат.

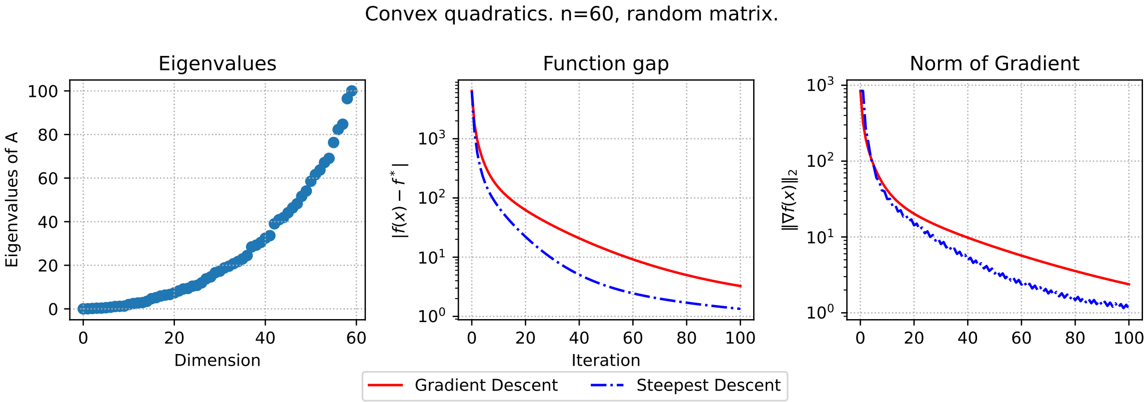
Итог

Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$

гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\|\nabla f(x^k)\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\|x^k - x^*\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\varkappa \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Численные эксперименты

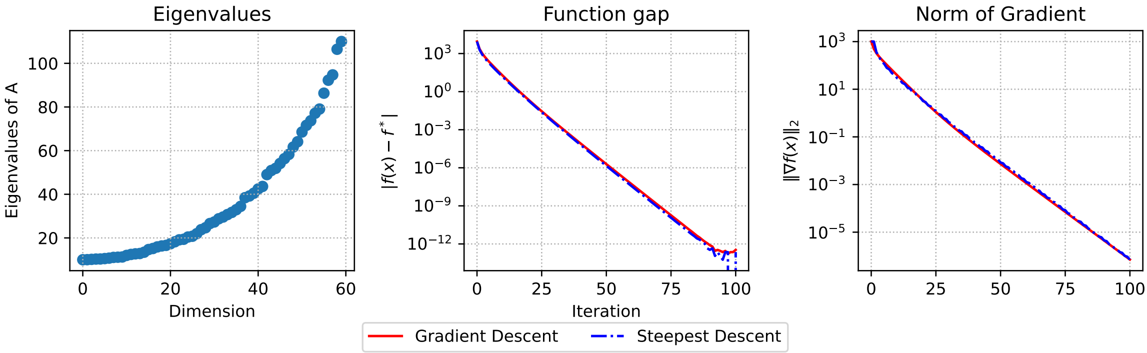
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \;\; \mu = 0, \;\; L = 100.$$



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 110.$$

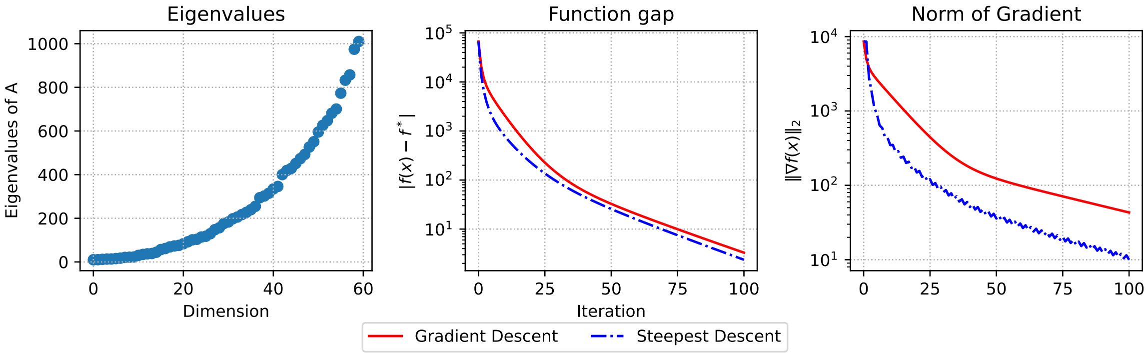
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

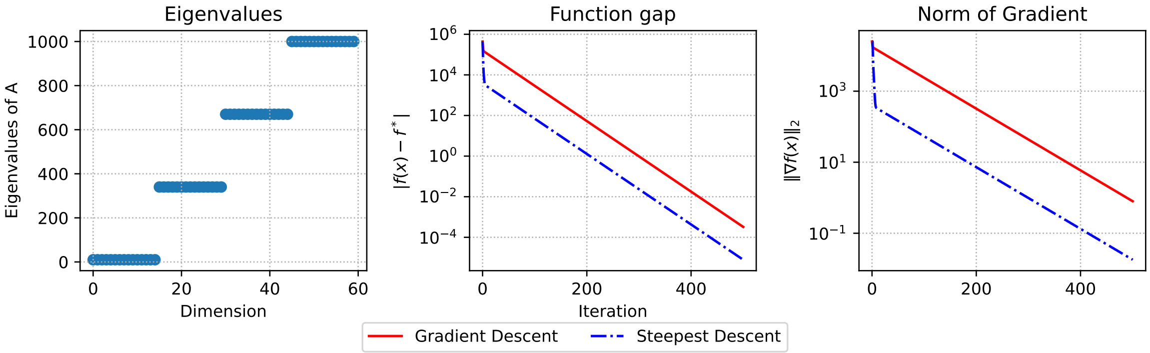
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \;\; \mu = 10, \;\; L = 1000.$$

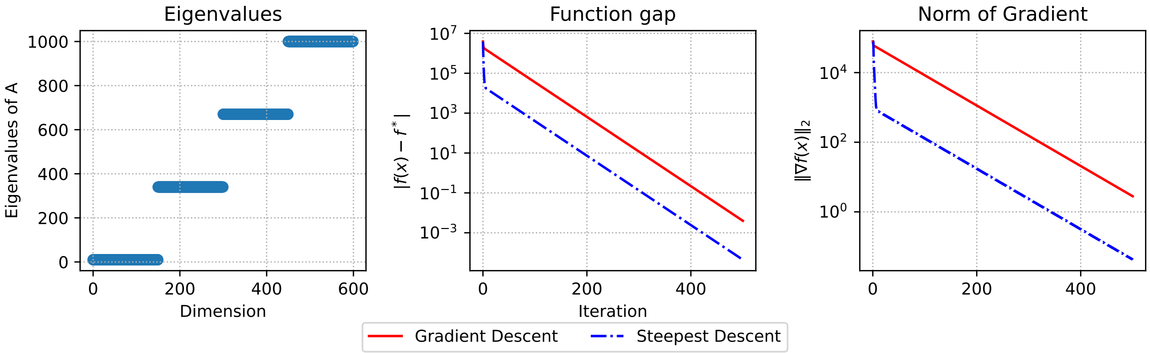
Strongly convex quadratics. n=60, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \ \mu = 10, \ L = 1000.$$

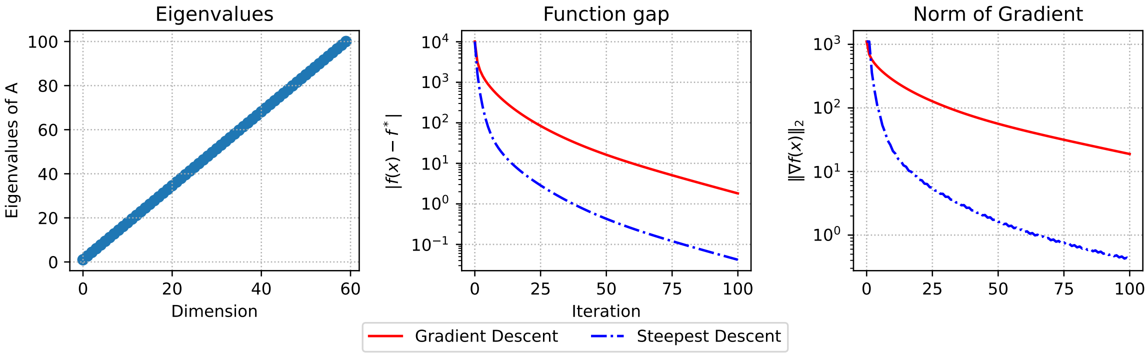
Strongly convex quadratics. n=600, clustered matrix.



Численные эксперименты

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}, \; \mu = 10, \; L = 1000.
$$

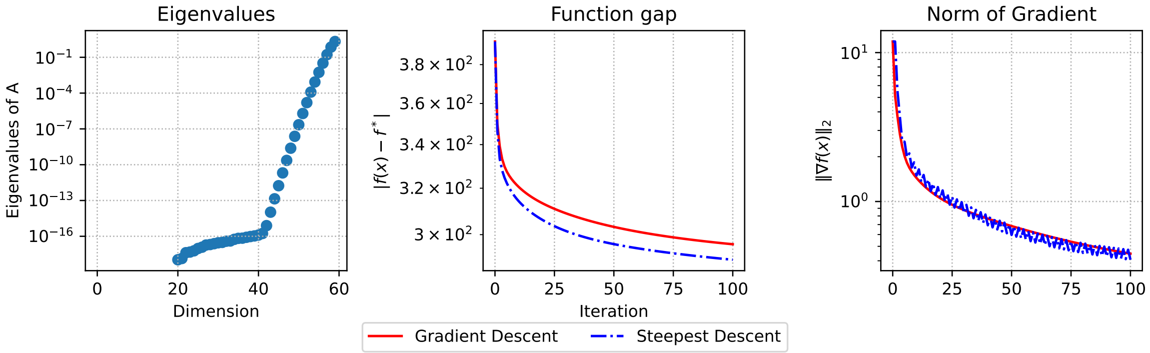
Strongly convex quadratics. n=60, uniform spectrum matrix.



Численные эксперименты

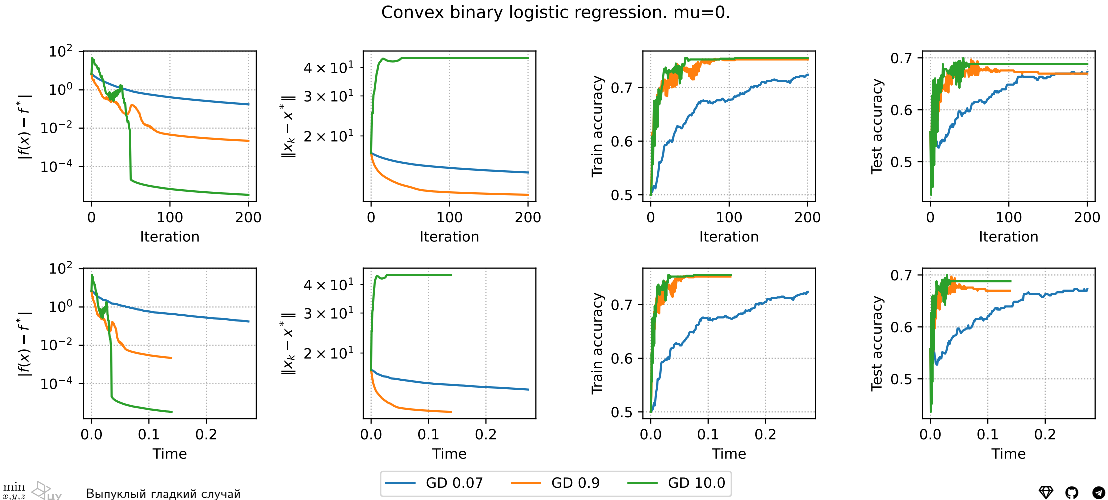
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \right\}$$

Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



Численные эксперименты

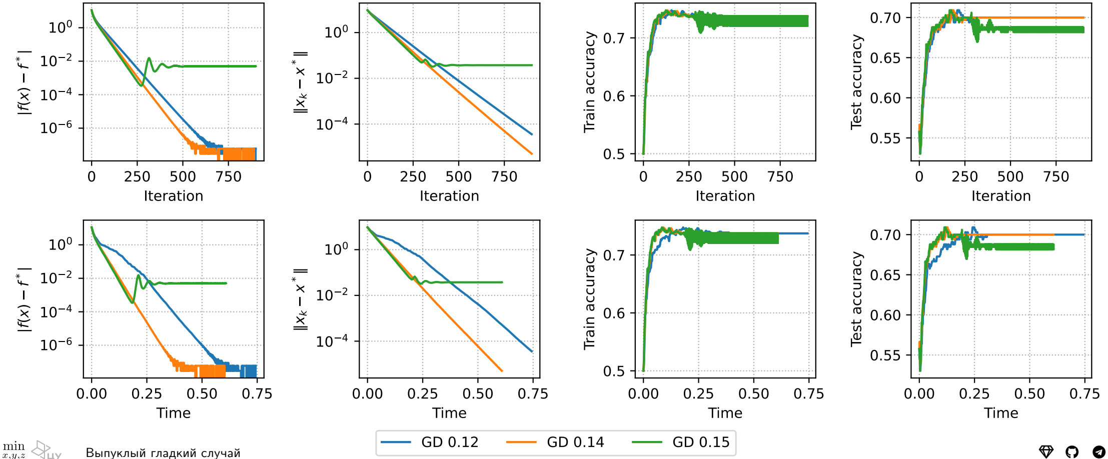
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1+\exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \right\}$$



Численные эксперименты

$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}
$$

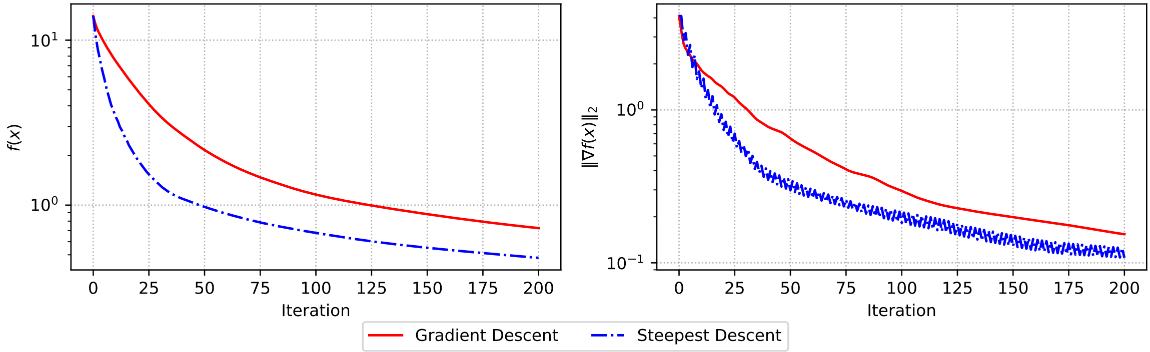
Strongly convex binary logistic regression. mu=0.1.



Численные эксперименты

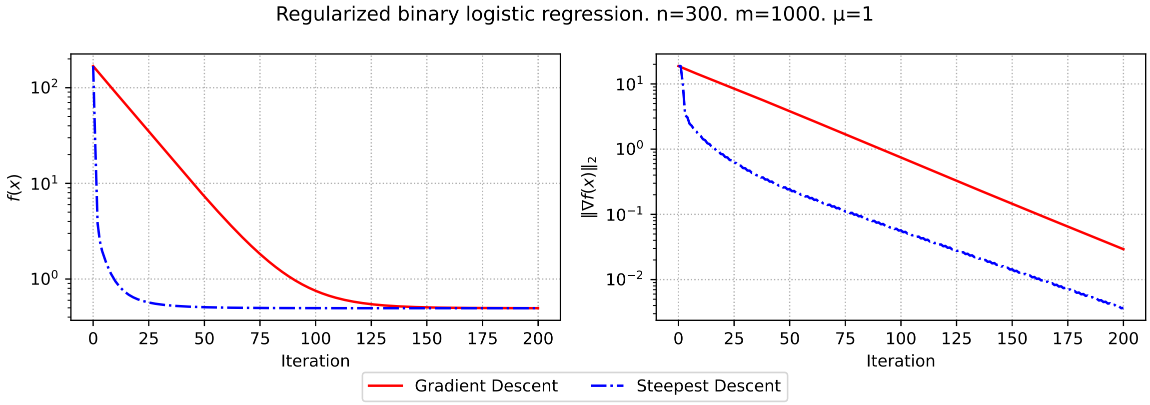
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. μ=0



Численные эксперименты

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \right\}$$



Экстра: Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Экстра: Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$
\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}
$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$
\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),
$$

Экстра: Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где $x^k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ — шаг сетки.
Отсюда получаем выражение для x^{k+1}:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.
Открыть в Colab ♣

Экстра: Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где $x^k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ — шаг сетки.
Отсюда получаем выражение для x^{k+1}:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.
Открыть в Colab ♣

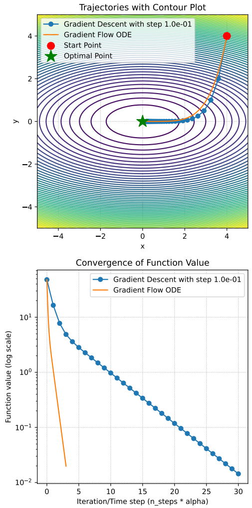


Рис. 6: Траектория градиентного потока