

Линейное программирование

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 6

Даня Меркулов
Пётр Остроухов

Линейное программирование и симплекс-метод

Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ



Линейное программирование

Линейное программирование. Общие формы

Для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Базовая форма задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ & \text{s.t. } Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Basic})$$



Рисунок 1. Иллюстрация задачи линейного программирования.

Линейное программирование. Общие формы

Для некоторых векторов $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ и матрицы $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Базовая форма задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } & Ax \leq b \end{aligned} \quad (\text{LP.Basic})$$

- Стандартная форма задачи линейного программирования:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{LP.Standard})$$

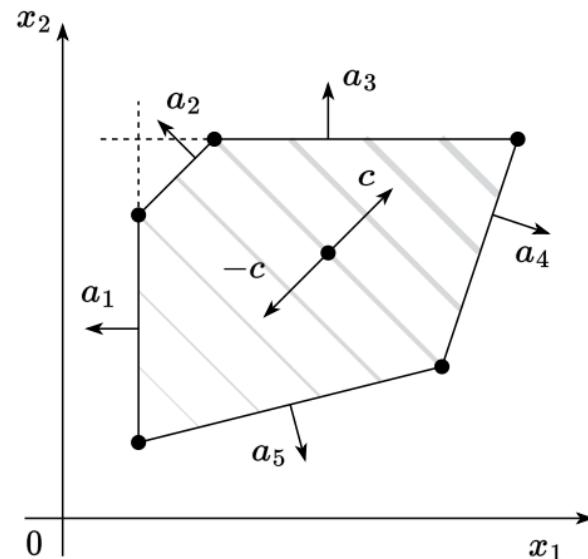


Рисунок 1. Иллюстрация задачи линейного программирования.



Симплекс-метод

Основы симплекс-метода



Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.



Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- Базис B является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m , таких что $\text{rank } A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B . Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.

Основы симплекс-метода



Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.



Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- **Базис** B является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m , таких что $\text{rank } A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B . Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.
- Если $Ax_B \leq b$, то базис B является **допустимым**.

Основы симплекс-метода



Рисунок 2. Основные понятия симплекс-метода.

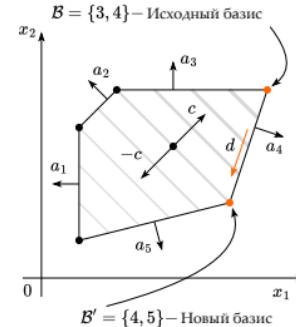


Рисунок 3. Изменение базиса симплекс-метода.

Основные понятия симплекс-метода

- **Базис B** является подмножеством n (целых) чисел между 1 и m , таких что $\text{rank } A_B = n$. Обратите внимание, что мы можем связать подматрицу A_B и соответствующую правую часть b_B с базисом B . Также мы можем получить точку пересечения всех этих гиперплоскостей из базиса: $x_B = A_B^{-1} b_B$.
- Если $Ax_B \leq b$, то базис B является **допустимым**.
- Базис B является **оптимальным**, если x_B является оптимумом LP .Basic.

Основы симплекс-метода



Рисунок 4. Основные понятия симплекс-метода.

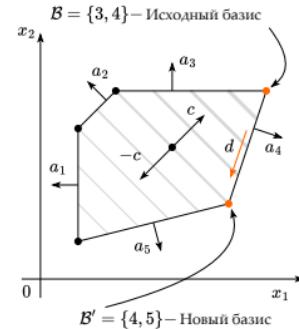


Рисунок 5. Изменение базиса симплекс-метода.

Интуиция симплекс-метода

- Алгоритм симплекс-метода последовательно перемещается по рёбрам многогранника, в каждой вершине выбирая ребро, которое обеспечивает наибольшее уменьшение величины $c^T x$

Основы симплекс-метода



Рисунок 4. Основные понятия симплекс-метода.

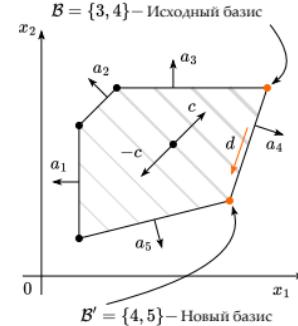


Рисунок 5. Изменение базиса симплекс-метода.

Интуиция симплекс-метода

- Алгоритм симплекс-метода последовательно перемещается по рёбрам многогранника, в каждой вершине выбирая ребро, которое обеспечивает наибольшее уменьшение величины $c^T x$
- Процесс либо завершается в некоторой вершине, либо уходит по неограниченному ребру, что означает неограниченность задачи снизу ($-\infty$ оптимум)

Основы симплекс-метода



Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.



Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.

Существование решения стандартной задачи линейного программирования

- Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса

Основы симплекс-метода



Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.



Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.



Существование решения стандартной задачи линейного программирования

- Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса
- Если стандартная задача линейного программирования имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной точкой базиса.

Основы симплекс-метода



Рисунок 6. Основные понятия симплекс-метода.



Рисунок 7. Изменение базиса симплекс-метода.



Существование решения стандартной задачи линейного программирования

- Если стандартная задача линейного программирования имеет непустое допустимое множество, то существует по крайней мере одна допустимая точка базиса
- Если стандартная задача линейного программирования имеет решения, то по крайней мере одно из таких решений является оптимальной точкой базиса.
- Если стандартная задача линейного программирования является допустимой и ограниченной, то она имеет оптимальное решение.

Основы симплекс-метода

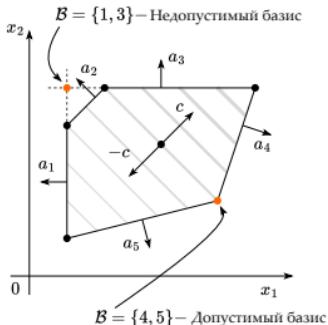


Рисунок 8. Основные понятия симплекс-метода.

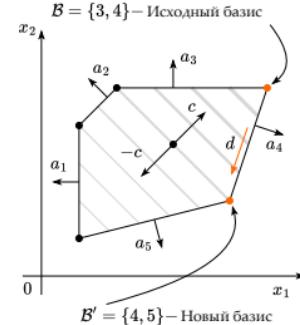


Рисунок 9. Изменение базиса симплекс-метода.

💡 Теорема об оптимуме в вершине

Пусть λ_B будут координатами нашего вектора c в базисе B :

$$\lambda_B^\top A_B = c^\top \leftrightarrow \lambda_B^\top = c^\top A_B^{-1}$$

Если все компоненты λ_B неотрицательны и B является допустимым, то B является оптимальным.

Примеры задач линейного программирования

Примеры задач линейного программирования.

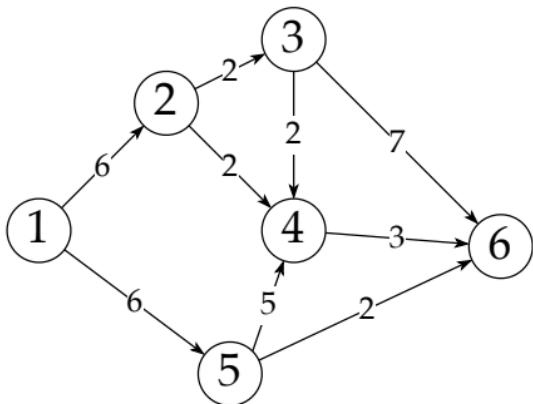
Производственные планы

Предположим, вы думаете о том, чтобы начать бизнес по производству *Продукта X*.

Давайте найдем максимальную недельную прибыль для вашего бизнеса в  Production Plan Problem.

Максимальный поток и минимальный разрез

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с, 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

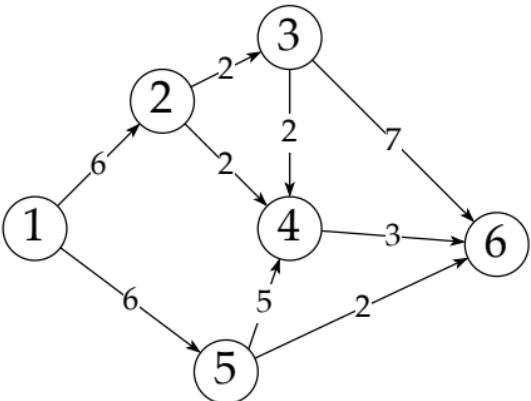


Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке

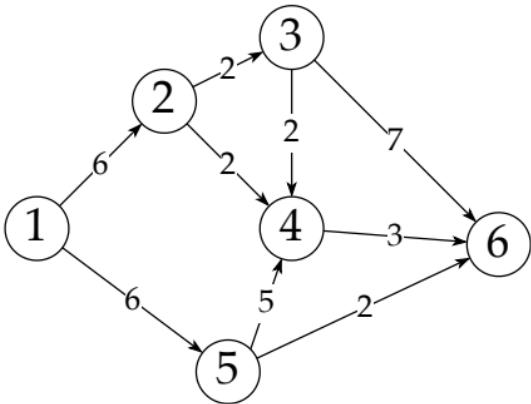
Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с, 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке



Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с, 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица потоков: $X[i, j]$ представляет собой поток от узла i к узлу j .

Пример задачи о максимальном потоке



Узлы представляют собой маршрутизаторы, рёбра представляют собой каналы связи; каждому узлу соответствует пропускная способность — узел 1 может общаться с узлом 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может общаться с узлом 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет собой каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) общаться с узлом 6 (сток) на 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускных способностей:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

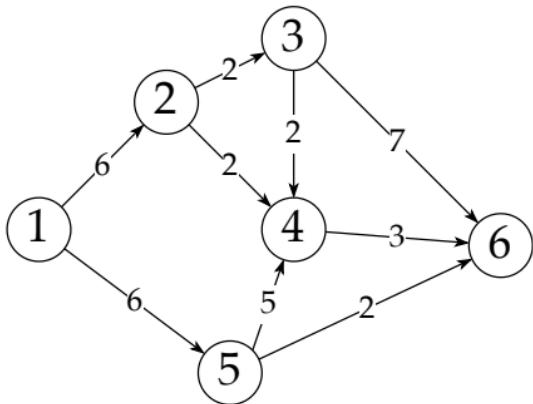
Матрица потоков: $X[i, j]$ представляет собой поток от узла i к узлу j .

Ограничения:

$$0 \leq X \quad X \leq C$$

Сохранение потока: $\sum_{j=2}^N X(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} X(k, i), \quad i = 2, \dots, N - 1$

Пример задачи о максимальном потоке



Данная настройка, когда все, что производится источником, будет идти в сток. Поток сети просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^N X(1, i) \quad (\text{Поток})$$

Пример задачи о максимальном потоке



Данная настройка, когда все, что производится источником, будет идти в сток. Поток сети просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^N X(1, i) \quad (\text{Поток})$$

максимизировать $\langle X, S \rangle$

при ограничениях $-X \leq 0$

$$X \leq C$$

$$\langle X, L_n \rangle = 0, \quad n = 2, \dots, N - 1,$$

(Задача о максимальном потоке)

L_n состоит из одного столбца (n) единиц (кроме последней строки) минус одна строка (также n) единиц (кроме первого столбца).

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Пример задачи о минимальном разрезе

Разрез сети разделяет вершины на два множества: одно содержит источник (мы называем это множество \mathcal{S}), и одно содержит сток. Пропускная способность разреза — это общая величина рёбер, выходящих из \mathcal{S} — мы разделяем множества, «отрезая поток» по этим рёбрам.



Рёбра в разрезе: $1 \rightarrow 2, 4 \rightarrow 6$, и $5 \rightarrow 6$. Пропускная способность этого разреза: $6 + 3 + 2 = 11$.



Рёбра в разрезе: $2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 6$, и $5 \rightarrow 6$. Пропускная способность этого разреза: $2 + 3 + 2 = 7$.

Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.

Максимальное значение потока $s-t$ равно минимальной пропускной способности всех $s-t$ разрезов.



Примеры задач линейного программирования.

Различные приложения

Посмотрите на различные практические приложения задач линейного программирования и симплекс-метода в [Related Collab Notebook](#).