

# Субградиент. Негладкие задачи.

Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

## Повторение основных понятий

## Основные понятия

Для множества  $E \in \mathbb{R}^n$  и функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Вектор  $g \in \mathbb{R}^n$  называется **субградиентом** функции  $f$  в точке  $x \in E$ , если  $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

## Основные понятия

Для множества  $E \in \mathbb{R}^n$  и функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Вектор  $g \in \mathbb{R}^n$  называется **субградиентом** функции  $f$  в точке  $x \in E$ , если  $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

- Множество  $\partial f(x)$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x \in E$ , если:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)\} \forall y \in E$$

# Повторение основных понятий

## i Основные понятия

Для множества  $E \in \mathbb{R}^n$  и функции  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ :

- Вектор  $g \in \mathbb{R}^n$  называется **субградиентом** функции  $f$  в точке  $x \in E$ , если  $\forall y \in E$

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)$$

- Множество  $\partial f(x)$  называется **субдифференциалом** функции  $f$  в точке  $x \in E$ , если:

$$\partial f(x) = \{g \in \mathbb{R}^n \mid f(y) \geq f(x) + g^T(y - x)\} \forall y \in E$$

- $f(\cdot)$  называется **субдифференцируемой** в точке  $x \in E$ , если  $\partial f(x) \neq \emptyset$

# Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

## 💡 Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  субдифференцируема на **выпуклом** подмножестве  $S \in E$ , то  $f$  выпукла на  $S$ .

- Обратное, вообще говоря, неверно

## Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

### 💡 Связь между субдифференцируемостью и выпуклостью

Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  субдифференцируема на **выпуклом** подмножестве  $S \in E$ , то  $f$  выпукла на  $S$ .

- Обратное, вообще говоря, неверно
- Нет смысла искать субградиент невыпуклой функции.

## Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

- 1) Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и дифференцируема в точке  $x \in \text{int } E$ , то  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$

# Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

- 1) Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и дифференцируема в точке  $x \in \text{int } E$ , то  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
- 2) Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и для  $x \in \text{int } E$   $\partial f(x) = \{s\}$ , то  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $\nabla f(x) = s$

# Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

💡 Связь между субдифференцируемостью и дифференцируемостью

- 1) Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и дифференцируема в точке  $x \in \text{int } E$ , то  $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$
  - 2) Если  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и для  $x \in \text{int } E$   $\partial f(x) = \{s\}$ , то  $f$  дифференцируема в точке  $x$  и  $\nabla f(x) = s$
- Искать субдифференциал дифференцируемой функции — это излишество.

## Субградиентный спуск

Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь  $g_k \in \partial f(x_k)$  и  $\alpha_k > 0$ . Существует несколько известных стратегий выбора  $\alpha_k$  для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$  — фиксированный (для  $G$ -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку  $\frac{G^2\alpha}{2}$  между  $f^*$  и  $f_k$ )

## Субградиентный спуск

Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь  $g_k \in \partial f(x_k)$  и  $\alpha_k > 0$ . Существует несколько известных стратегий выбора  $\alpha_k$  для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$  — фиксированный (для  $G$ -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку  $\frac{G^2\alpha}{2}$  между  $f^*$  и  $f_k$ )
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$  — постоянная длина шага ( $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$ )

## Субградиентный спуск

Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь  $g_k \in \partial f(x_k)$  и  $\alpha_k > 0$ . Существует несколько известных стратегий выбора  $\alpha_k$  для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$  — фиксированный (для  $G$ -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку  $\frac{G^2\alpha}{2}$  между  $f^*$  и  $f_k$ )
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$  — постоянная длина шага ( $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$ )
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  — квадратично суммируемая, но не суммируемая

## Субградиентный спуск

Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь  $g_k \in \partial f(x_k)$  и  $\alpha_k > 0$ . Существует несколько известных стратегий выбора  $\alpha_k$  для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$  — фиксированный (для  $G$ -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку  $\frac{G^2\alpha}{2}$  между  $f^*$  и  $f_k$ )
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$  — постоянная длина шага ( $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$ )
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  — квадратично суммируемая, но не суммируемая
- $\alpha_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  — несуммируемая убывающая

## Субградиентный спуск

Субградиентный метод — это простой алгоритм для минимизации выпуклой функции, которая не является дифференцируемой:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$$

Здесь  $g_k \in \partial f(x_k)$  и  $\alpha_k > 0$ . Существует несколько известных стратегий выбора  $\alpha_k$  для этого метода:

- $\alpha_k = \alpha$  – фиксированный (для  $G$ -Липшицевых функций это может дать постоянную невязку  $\frac{G^2\alpha}{2}$  между  $f^*$  и  $f_k$ )
- $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$  – постоянная длина шага ( $\|x_{k+1} - x_k\| = \gamma$ )
- $\alpha_k : \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  – квадратично суммируемая, но не суммируемая
- $\alpha_k : \lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = 0$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = \infty$  – несуммируемая убывающая
- $\alpha_k = \frac{f(x_k) - f^*}{\|g_k\|_2^2}$  – шаг Поляка

## Задача 1

### Question

Найти субградиент функции

$$f(x) = -\sqrt{x}$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \in E$ ,  $c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2)  $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2)  $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

3)  $T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2)  $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

3)  $T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

4)  $f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m | f_i(x) = f(x)\}$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv}(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x))$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2)  $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

3)  $T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

4)  $f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m | f_i(x) = f(x)\}$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv}(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x))$$

## Правила субдифференцирования

1)  $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \in E, c > 0$

$$\Rightarrow \partial(cf)(x) = c\partial f(x)$$

2)  $f : F \rightarrow \mathbb{R}, g : G \rightarrow \mathbb{R}, x \in F \cap G$

$$\Rightarrow \partial(f + g)(x) \supseteq \partial f(x) + \partial g(x)$$

3)  $T : V \rightarrow W = Ax + b, g : W \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in V$

$$\Rightarrow \partial(g \circ T)(x_0) \supseteq A^* \partial(g)(T(x_0))$$

4)  $f(x) = \max(f_1(x), \dots, f_m(x)), I(x) = \{i \in 1 \dots m | f_i(x) = f(x)\}$

$$\Rightarrow \partial f(x) \supseteq \text{Conv}(\bigcup_{i \in I(x)} \partial f_i(x))$$

💡 Когда достигается равенство?

Если вышеупомянутые функции выпуклы и  $x$  является внутренней точкой, то все неравенства превращаются в равенства.

## Задача 2

### Question

Найти субградиент функции  $f(x) + g(x)$ , если

$$f(x) = -\sqrt{x} \text{ при } x \geq 0$$

$$g(x) = -\sqrt{-x} \text{ при } x \leq 0$$

## Задача 3

### Question

- 1) Найти субдифференциал функции  $f(x) = ||Ax - b||_1$ ;

## Задача 3

### Question

- 1) Найти субдифференциал функции  $f(x) = \|Ax - b\|_1$ ;
- 2) Для задачи  $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \rightarrow \min_x$  сказать, какие значения  $\lambda$  приводят к  $x_{opt} = 0$

## Задача 4

### Exercise

Мы хотим найти вектор весов  $w \in \mathbb{R}^d$ , определяющий линейный классификатор  $\text{sign}(w^T x)$ . Используем SVM с  $l_2$ -регуляризацией:

$$L(w) = \frac{\lambda}{2} \|w\|^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max \{0, 1 - y_i w^T x_i\}$$

Здесь  $\ell_i(w) = \max \{0, 1 - y_i w^T x_i\}$  — это hinge loss. Покажите, что субградиент в любой точке задается выражением:

$$g(w) = \lambda w + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \begin{cases} -y_i x_i, & \text{если } y_i w^T x_i < 1, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

и посмотрите пример кода здесь .

## Задача 5

### Question

Найти субдифференциал  $\partial f(x)$  функции  $f(x) = \exp(|x - 1| + |x + 1|)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$