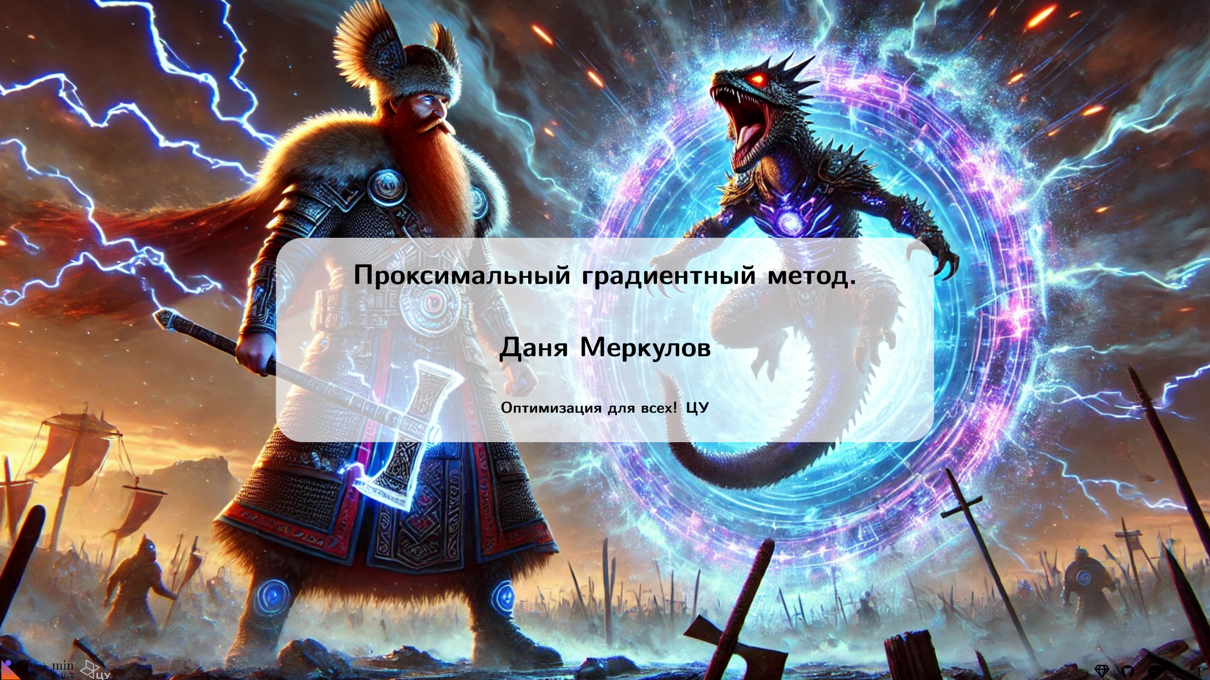


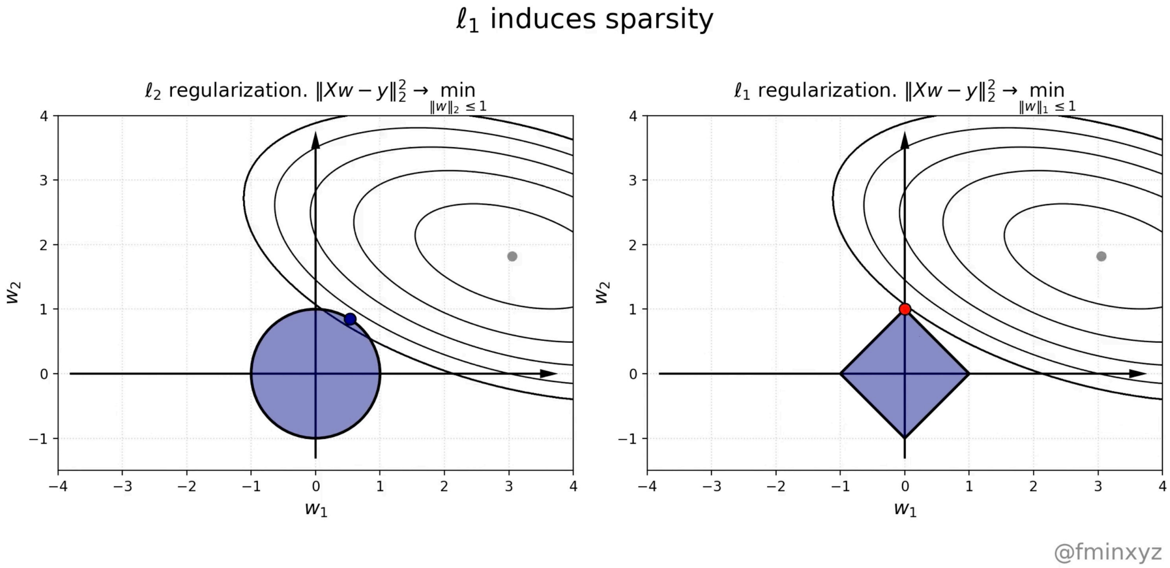
Проксимальный градиентный метод.

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

Субградиентный метод

Негладкие задачи



Субградиентный метод

Субградиентный метод: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$

Субградиентный метод

Субградиентный метод: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Субградиентный метод

Субградиентный метод: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Theorem

Предположим, что f является G-липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\overline{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$

Субградиентный метод

Субградиентный метод: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \qquad x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Theorem

Предположим, что f является G-липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\overline{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$
- $R = \|x_0 - x^*\|$

Субградиентный метод

Субградиентный метод: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Theorem

Предположим, что f является G-липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\overline{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$
- $R = \|x_0 - x^*\|$
- $\overline{x} = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} x_i$

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.
- Можно использовать метод зеркального спуска (обобщение метода субградиента на, возможно, неевклидову метрику) с той же скоростью сходимости, чтобы лучше согласовать геометрию задачи.

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.
- Можно использовать метод зеркального спуска (обобщение метода субградиента на, возможно, неевклидову метрику) с той же скоростью сходимости, чтобы лучше согласовать геометрию задачи.
- Однако, мы можем достичь стандартной скорости градиентного спуска $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ (и даже ускоренной версии $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$), если мы будем использовать структуру задачи.

Проксимальный оператор

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$
\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)
$$

Явный метод Эйлера:

$$
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)
$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})
$$

$$
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0
$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x)\Big|_{x = x_{k+1}} = 0$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} &= -\nabla f(x_{k+1}) \\
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) &= 0 \\
\left.\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x)\right|_{x = x_{k+1}} &= 0 \\
\left.\nabla \left[\frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 + f(x) \right]\right|_{x = x_{k+1}} &= 0
\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} &= -\nabla f(x_{k+1}) \\
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) &= 0 \\
\left.\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x)\right|_{x=x_{k+1}} &= 0 \\
\left.\nabla \left[\frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2 + f(x)\right]\right|_{x=x_{k+1}} &= 0 \\
x_{k+1} = \text{arg}\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} &= -\nabla f(x_{k+1}) \\
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) &= 0 \\
\left.\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x)\right|_{x = x_{k+1}} &= 0 \\
\left.\nabla \left[\frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2 + f(x)\right]\right|_{x = x_{k+1}} &= 0 \\
x_{k+1} = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{aligned}
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} &= -\nabla f(x_{k+1}) \\
\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) &= 0 \\
\left.\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x)\right|_{x = x_{k+1}} &= 0 \\
\left.\nabla \left[\frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2 + f(x)\right]\right|_{x = x_{k+1}} &= 0 \\
x_{k+1} = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

! Проксимальный оператор

$$\text{prox}_{f,\alpha}(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha}\|x - x_k\|_2^2\right]$$

Визуализация проксимального оператора

$$
\text{Prox}_f(x) = \underset{x'}{\text{argmin}}\ \frac{1}{2}\|x - x'\|^2 + f(x')
$$

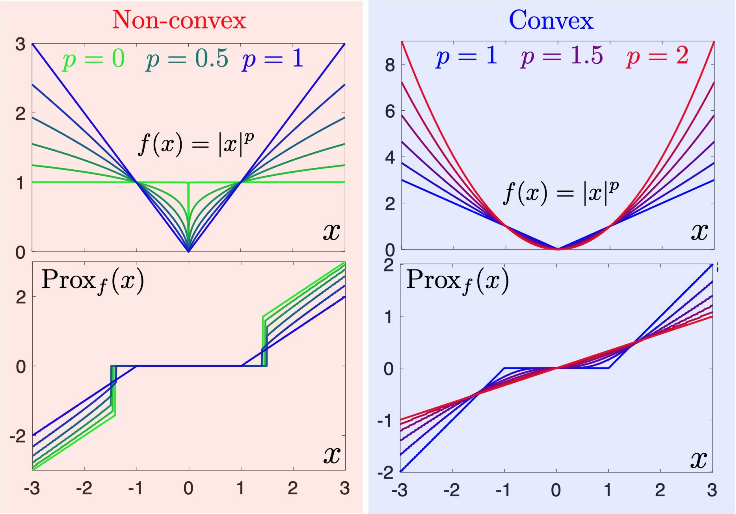


Рис. 1: Источник

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) = x_k
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\overset{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k
\end{aligned}
$$

$$
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k \stackrel{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\overset{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
\end{aligned}
$$

  Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \to 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f^{II}_{x_k}(x)$:

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\overset{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
\end{aligned}
$$

  Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \to 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f^{II}_{x_k}(x)$:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{f^{II}_{x_k}, \alpha}(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\overset{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
\end{aligned}
$$

  Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \to 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f^{II}_{x_k}(x)$:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{f^{II}_{x_k}, \alpha}(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]
$$

$$
\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{\alpha}(x - x_k) \Big|_{x = x_{k+1}} = 0
$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\
(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\
x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\overset{\alpha \to 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f) x_k
\end{aligned}
$$

  Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \to 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f^{II}_{x_k}(x)$:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{f^{II}_{x_k}, \alpha}(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]
$$

$$
\left. \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{\alpha}(x - x_k) \right|_{x = x_{k+1}} = 0
$$

$$
x_{k+1} = x_k - \left[\nabla^2 f(x_k) + \frac{1}{\alpha} I \right]^{-1} \nabla f(x_k)
$$

От проекций к проксимальности

Пусть $\mathbb{I}_S$ — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S. Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

От проекций к проксимальности

Пусть $\mathbb{I}_S$ — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S. Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in S} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2.$$

От проекций к проксимальности

Пусть $\mathbb{I}_S$ — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S. Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in S} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

От проекций к проксимальности

Пусть $\mathbb{I}_S$ — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S. Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in S} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

Перепишем ортогональную проекцию $\pi_S(y)$ как

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \mathbb{I}_S(x).$$

От проекций к проксимальности

Пусть $\mathbb{I}_S$ — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S. Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in S} \frac{1}{2}\|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

Перепишем ортогональную проекцию $\pi_S(y)$ как

$$\pi_S(y) := \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + \mathbb{I}_S(x).$$

Проксимальность: заменим $\mathbb{I}_S$ на некоторую выпуклую функцию!

$$\text{prox}_r(y) = \text{prox}_{r,1}(y) := \arg\min \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + r(x)$$

Составная оптимизация

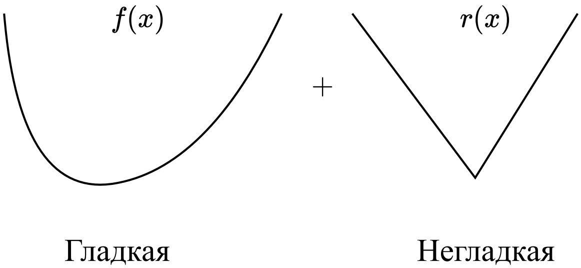
Регулярные / Составные целевые функции

Многие негладкие задачи имеют вид

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = f(x) + r(x)$$

- **Lasso, L1-LS, compressed sensing**

$$f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, r(x) = \lambda\|x\|_1$$



Регулярные / Составные целевые функции

Многие негладкие задачи имеют вид

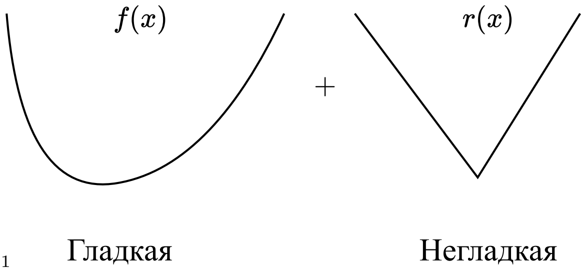
$$
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = f(x) + r(x)
$$

- **Lasso, L1-LS, compressed sensing**

$$
f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, r(x) = \lambda \|x\|_1
$$

- **L1-логистическая регрессия, разреженная LR**

$$
f(x) = -y \log h(x) - (1-y) \log(1 - h(x)), r(x) = \lambda \|x\|_1
$$



Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$
$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*)
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* &= (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* &= (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) \\
x^* &= \mathsf{prox}_{r, \alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* &= (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) \\
x^* &= \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
\end{aligned}
$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* &= (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) \\
x^* &= \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
\end{aligned}
$$

Которые приводят к методу проксимального градиента:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{r,\alpha}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

И этот метод сходится со скоростью $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$!

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
0 &\in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*) \\
x^* &\in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) &\in (I + \alpha \partial r)(x^*) \\
x^* &= (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) \\
x^* &= \text{prox}_{r, \alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
\end{aligned}
$$

Которые приводят к методу проксимального градиента:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{r, \alpha}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))
$$

И этот метод сходится со скоростью $\mathcal{O}(\frac{1}{k})$!

Другая форма проксимального оператора

$$
\text{prox}_{f, \alpha}(x_k) = \text{prox}_{\alpha f}(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\alpha f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|_2^2 \right] \qquad \text{prox}_f(x_k) = \text{arg}\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|_2^2 \right]
$$

Примеры проксимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1$, $\lambda > 0$

$$[\text{prox}_r(x)]_i = \left[|x_i| - \lambda\right]_+ \cdot \text{sign}(x_i),$$

который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).

Примеры проксимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1$, $\lambda > 0$
$$
[\text{prox}_r(x)]_i = [|x_i| - \lambda]_+ \cdot \text{sign}(x_i),
$$
который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).
- $r(x) = \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2$, $\lambda > 0$
$$
\text{prox}_r(x) = \frac{x}{1 + \lambda}.
$$

Примеры проксимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1$, $\lambda > 0$
$$[\text{prox}_r(x)]_i = \left[|x_i| - \lambda\right]_+ \cdot \text{sign}(x_i),$$
  который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).
- $r(x) = \frac{\lambda}{2}\|x\|_2^2$, $\lambda > 0$
$$\text{prox}_r(x) = \frac{x}{1+\lambda}.$$
- $r(x) = \mathbb{I}_S(x)$.
$$\text{prox}_r(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) = \text{proj}_r(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(x) < +\infty$, то проксимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(x) < +\infty$, то проксимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(x) < +\infty$, то проксимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Вопрос: Что можно сказать об этой задаче?

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(x) < +\infty$, то проксимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Вопрос: Что можно сказать об этой задаче?

Это сильно выпуклая функция, что означает, что она имеет единственный минимум (существование $\hat{x}$ необходимо для того, чтобы $r(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|_2^2$ принимало конечное значение).

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,

Доказательство

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,

Доказательство

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

1. Установим эквивалентность между первым и вторым условиями. Первое условие можно переписать как

$$y = \arg\min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^d} \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \right).$$

Из условий оптимальности для выпуклой функции r, это эквивалентно:

$$0 \in \partial \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \right)\Bigg|_{\tilde{x}=y} = \partial r(y) + y - x.$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

1. Установим эквивалентность между первым и вторым условиями. Первое условие можно переписать как

$$y = \arg\min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^d} \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \right).$$

   Из условий оптимальности для выпуклой функции r, это эквивалентно:

$$0 \in \partial \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|^2 \right)\Bigg|_{\tilde{x}=y} = \partial r(y) + y - x.$$

2. Из определения субдифференциала, для любого субградиента $g \in \partial f(y)$ и для любого $z \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle g, z - y \rangle \leq r(z) - r(y).$$

   В частности, это верно для $g = x - y$. Обратно это также очевидно: для $g = x - y$, вышеуказанное соотношение выполняется, что означает $g \in \partial r(y)$.

Свойства проксимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

1. Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\langle x - u, z_1 - u \rangle \leq r(z_1) - r(u)$$
$$\langle y - v, z_2 - v \rangle \leq r(z_2) - r(v).$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

1. Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\begin{aligned} \langle x - u, z_1 - u \rangle &\leq r(z_1) - r(u) \\ \langle y - v, z_2 - v \rangle &\leq r(z_2) - r(v). \end{aligned}$$

2. Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\begin{aligned} \langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle &\leq 0, \\ \langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

1. Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\begin{aligned}
\langle x - u, z_1 - u \rangle &\leq r(z_1) - r(u) \\
\langle y - v, z_2 - v \rangle &\leq r(z_2) - r(v).
\end{aligned}$$

2. Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\begin{aligned}
\langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle &\leq 0, \\
\langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 &\leq 0.
\end{aligned}$$

3. Что и требовалось доказать после подстановки u и v.

$$\|u - v\|_2^2 \leq \langle x - y, u - v \rangle$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

1. Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\begin{aligned}\langle x - u, z_1 - u \rangle &\leq r(z_1) - r(u) \\ \langle y - v, z_2 - v \rangle &\leq r(z_2) - r(v).\end{aligned}$$

2. Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\begin{aligned}\langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle &\leq 0, \\ \langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 &\leq 0.\end{aligned}$$

3. Что и требовалось доказать после подстановки u и v.

$$\|u - v\|_2^2 \leq \langle x - y, u - v \rangle$$

4. Последнийпункт следует из неравенства Коши-Буняковского для последнего неравенства.

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$
x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$
x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 \in & \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
-\alpha \nabla f(x^*) \in & \alpha \partial r(x^*)
\end{aligned}
$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$\begin{aligned} 0 \in& \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) \in& \alpha \partial r(x^*) \\ x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* \in& \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:
$$\begin{aligned} 0 \in & \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) \in & \alpha \partial r(x^*) \\ x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* \in & \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$
2. Возвратимся к предыдущей лемме:
$$\text{prox}_r(x) = y \Leftrightarrow x - y \in \partial r(y)$$

Свойства проксимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L-гладкая, а для r, prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$
x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$
\begin{aligned}
0 \in& \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\
-\alpha \nabla f(x^*) \in& \alpha \partial r(x^*) \\
x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* \in& \alpha \partial r(x^*)
\end{aligned}
$$

2. Возвратимся к предыдущей лемме:

$$
\text{prox}_r(x) = y \Leftrightarrow x - y \in \partial r(y)
$$

3. Наконец,

$$
x^* = \text{prox}_{\alpha r}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))
$$

Теоретические инструменты для анализа сходимости

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$
f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}
$$
$$
\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle\right)
$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L-гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$
f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}
$$
$$
\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \right)
$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L-гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$
f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}
$$
$$
\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \right)
$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L-гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$
\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2
$$

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$
f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}
$$
$$
\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \right)
$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L-гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$
\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|_2^2
$$
$$
\overset{x := y,\, y := y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)}{} \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L}\nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2
$$

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — L-гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$
f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}
$$
$$
\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \right)
$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L-гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$
\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2}\|y - x\|_2^2
$$
$$
\overset{x := y, y := y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)}{} \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L}\nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2
$$
$$
\varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2
$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$
\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2
$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla\varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle\nabla f(x), y\rangle$:

$$f(x) - \langle\nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle\nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle\nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L\left(f(y) - f(x) - \langle\nabla f(x), y - x\rangle\right)$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L\left(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle\right)$$

поменять местами x и y $$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L\left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle\right)$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$
\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2
$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle$:

$$
\begin{aligned}
& f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \\
& f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \\
& \|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L\left(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle\right) \\
\text{поменять местами x и y} \quad & \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L\left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle\right)
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x, минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x\rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y\rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L\left(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x\rangle\right)$$

поменять местами x и y $\quad \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L\left(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle\right)$

Лемма доказана. С первого взгляда она не имеет большого геометрического смысла, но мы будем использовать ее как удобный инструмент для оценки разницы между градиентами.

Анализ сходимости

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$. Тогда, функция f является μ-сильно выпуклой тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется следующее:

$$
\begin{aligned}
\text{Strongly convex case } \mu > 0 \quad & \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2 \\
\text{Convex case } \mu = 0 \quad & \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0
\end{aligned}
$$

Доказательство

1. Мы докажем только случай сильной выпуклости, случай выпуклости следует из него с установкой $\mu = 0$. Начнем с необходимости. Для сильно выпуклой функции

$$
\begin{aligned}
& f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \\
& f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \\
\text{sum} \quad & \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости 💎💎💎💎

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
{\scriptstyle \langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt} \qquad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \mu\|x-y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y\rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y\rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y\rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y\rangle \\
&\overset{\langle \nabla f(y), x-y\rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y\rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y)\rangle dt \\
&\overset{y + t(x-y) - y = t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y)\rangle dt
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
{\scriptstyle \langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt} \quad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
{\scriptstyle y + t(x-y) - y = t(x-y)} \quad &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
\overset{\langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt}{} \quad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
\overset{y + t(x-y) - y = t(x-y)}{} \quad &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
{\scriptstyle \langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt} \quad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
{\scriptstyle y + t(x-y) - y = t(x-y)} \quad &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x-y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
\overset{\langle \nabla f(y), x-y\rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y\rangle dt}{} &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
\overset{y + t(x-y) - y = t(x-y)}{} &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt = \mu \|x-y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x-y\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
{\scriptstyle \langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt} \quad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
{\scriptstyle y + t(x-y) - y = t(x-y)} \quad &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt = \mu \|x-y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$
f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu\|x-y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
\overset{\langle \nabla f(y), x-y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y \rangle dt}{} &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
\overset{y + t(x-y) - y = t(x-y)}{} &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x-y)\|^2 dt = \mu \|x-y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$
f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}
$$

Анализ сходимости

2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y\rangle \geq \mu\|x-y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x-y\rangle dt$:

$$
\begin{aligned}
f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x-y\rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)), x-y\rangle dt - \langle \nabla f(y), x-y\rangle \\
\overset{\langle \nabla f(y), x-y\rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x-y\rangle dt}{} \quad &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), (x-y)\rangle dt \\
\overset{y + t(x-y) - y = t(x-y)}{} \quad &= \int_0^1 t^{-1}\langle \nabla f(y + t(x-y)) - \nabla f(y), t(x-y)\rangle dt \\
&\geq \int_0^1 t^{-1}\mu\|t(x-y)\|^2 dt = \mu\|x-y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$
f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x-y\rangle + \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}
$$

поменять местами x и y $\quad -\langle \nabla f(x), x-y\rangle \leq -\left(f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x-y\|_2^2\right)$

Проксимальный метод градиента. Выпуклый случай

Сходимость

Theorem

Рассмотрим проксимальный метод градиента

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right)
$$

Для критерия $\varphi(x) = f(x) + r(x)$, мы предполагаем:

- f выпукла, дифференцируема, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, и ∇f является липшицевой с константой $L > 0$.
- r выпукла, и $\text{prox}_{\alpha r}(x_k) = \text{arg}\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\alpha r(x) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|_2^2\right]$ может быть вычислен.

Проксимальный градиентный спуск с фиксированным шагом $\alpha = 1/L$ удовлетворяет

$$
\varphi(x_k) - \varphi^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|^2}{2k},
$$

Проксимальный градиентный спуск имеет скорость сходимости $O(1/k)$ или $O(1/\varepsilon)$. Это соответствует скорости градиентного спуска! (Но помните о стоимости проксимальной операции)

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$

   где $G_\alpha(x)$ является:

$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$

   Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$

   где $G_\alpha(x)$ является:

$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$

   Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x:

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$
где $G_\alpha(x)$ является:
$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$
Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x:
$$
\text{гладкость} \quad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|_2^2
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))\\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$
   где $G_\alpha(x)$ является:
$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$
   Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x:
$$
\text{гладкость} \quad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|_2^2
$$

   выпуклость $f(x) \geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$
где $G_\alpha(x)$ является:
$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$
Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x:
$$
\begin{aligned}
\text{гладкость} \quad f(x_{k+1}) &\leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|_2^2 \\
\text{выпуклость } f(x) \geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \quad &\leq f(x) - \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как "градиентный объект":
$$
\begin{aligned}
x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\
x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).
\end{aligned}
$$
где $G_\alpha(x)$ является:
$$
G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}\left(x - \text{prox}_{\alpha r}\left(x - \alpha \nabla f\left(x\right)\right)\right)
$$
Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптимален. Следовательно, G_α аналогичен ∇f. Если x локально оптимален, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f. Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r, позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x:
$$
\begin{aligned}
\text{гладкость}\quad f(x_{k+1}) &\leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2}\|x_{k+1} - x_k\|_2^2 \\
\text{выпуклость } f(x) \geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \quad &\leq f(x) - \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})
$$

$$
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad \Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
&\qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
&\qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
&\qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& \langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& \langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& \langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$
f(x_{k+1}) \leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

Анализ сходимости

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& \langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$
f(x_{k+1}) \leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

$$
f(x_{k+1}) \leq f(x) + r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

Анализ сходимости 💎💎💎💎💎

3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right) \qquad &\Leftrightarrow \qquad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \qquad &\Rightarrow \qquad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\
& \qquad\qquad G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})
\end{aligned}
$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x:

$$
\begin{aligned}
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1}) \\
\text{подставить конкретный субградиент} \qquad & r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle \\
& \langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle
\end{aligned}
$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$
\begin{aligned}
f(x_{k+1}) &\leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
f(x_{k+1}) &\leq f(x) + r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
f(x_{k+1}) + r(x_{k+1}) &\leq f(x) + r(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k + \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \left(\alpha L - 2 \right) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$
\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

$$
\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

$\alpha \leq \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}(\alpha L - 2) \leq -\frac{\alpha}{2}$

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$
\begin{aligned}
&\varphi(x_{k+1}) \le \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\varphi(x_{k+1}) \le \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \left(\alpha L - 2 \right) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
\scriptstyle \alpha \le \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}(\alpha L - 2) \le -\frac{\alpha}{2} \qquad &\varphi(x_{k+1}) \le \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$
\begin{aligned}
& \varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
& \varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \left(\alpha L - 2\right) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
{\scriptstyle \alpha \leq \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2}(\alpha L - 2) \leq -\frac{\alpha}{2}} \quad & \varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
\end{aligned}
$$

7. Теперь легко проверить, что когда $x = x_k$ мы получаем монотонное убывание для проксимального градиентного метода:

$$
\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x_k) - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2
$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) \leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2\right]
\end{aligned}$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[-\|x_k - x^* - \alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2\right]
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

8. Когда $x = x^*$:

$$
\begin{aligned}
\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[-\|x_k - x^* - \alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\left[\|x_k - x^*\|_2^2 - \|x_{k+1} - x^*\|_2^2\right]
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right]$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$
\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1})
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1})
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in \overline{0, k-1}$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 \right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k-1$ и суммируем их:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} \left[\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2\right] \\
&\leq \frac{1}{2\alpha}\|x_0 - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) &\leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\
\varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}
\end{aligned}
$$

Что является стандартной оценкой $\frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$ с $\alpha = \frac{1}{L}$, или, скоростью $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких выпуклых задач с градиентным спуском!

Проксимальный градиентный метод. Сильно выпуклый случай

Сходимость

Theorem

Рассмотрим проксимальный градиентный метод

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right)$$

Для критерия $\varphi(x) = f(x) + r(x)$, мы предполагаем:

- f является μ-сильно выпуклой, дифференцируемой, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, и ∇f является липшицевой с константой $L > 0$.
- r выпукла, и $\text{prox}_{\alpha r}(x_k) = \arg\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\alpha r(x) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|_2^2\right]$ может быть вычислен.

Проксимальный градиентный спуск с фиксированным шагом $\alpha \leq 1/L$ удовлетворяет

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq \left(1 - \alpha\mu\right)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

Это точно соответствует скорости сходимости градиентного спуска. Обратите внимание, что исходная задача даже негладкая!

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
\text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
\text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
\text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
\text{лемма о стационарной точке } &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
\text{нерастяжимость } &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
{\scriptstyle \text{лемма о стационарной точке}} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
{\scriptstyle \text{нерастяжимость}} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
\end{aligned}
$$

2. Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
\text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
\text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
\end{aligned}
$$

2. Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:

$$
\text{гладкость} \;\; \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right)
$$

Анализ сходимости

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
\text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
\text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
&= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
\end{aligned}
$$

2. Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:

$$
\text{гладкость} \;\; \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right)
$$

$$
\text{сильная выпуклость} \;\; -\langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \leq -\left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x_k - x^*\|_2^2 \right) -
$$

$$
-\langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle
$$

Анализ сходимости

3. Подставим:

Анализ сходимости

3. Подставим:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha\langle \nabla f(x^*), x_k - x^*\rangle + \\
+ \alpha^2 2L \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^*\rangle \right)
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Подставим:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha\langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\
+ \alpha^2 2L \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right) \\
\leq (1 - \alpha\mu)\|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right)
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

3. Подставим:

$$
\begin{aligned}
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha\langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\
+ \alpha^2 2L \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right) \\
\leq (1 - \alpha\mu)\|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) \left(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \right)
\end{aligned}
$$

4. Из выпуклости f: $f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0$. Следовательно, если мы используем $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$
\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)\|x_k - x^*\|^2,
$$

что и означает линейную сходимость метода со скоростью не хуже $1 - \frac{\mu}{L}$.

Ускоренный проксимальный градиент – *выпуклая* функция

Ускоренный проксимальный градиентный метод

Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ является **выпуклой** и L**-гладкой**, $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является правильной, замкнутой и выпуклой, $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ имеет минимизатор $x^\star$, и предположим, что $\text{prox}_{\alpha r}$ легко вычисляется для $\alpha > 0$. С любым $x_0 \in \text{dom}\, r$ определим последовательность

$$
\begin{aligned}
t_0 &= 1, \qquad y_0 = x_0, \\
x_k &= \text{prox}_{\frac{1}{L}r}\left(y_{k-1} - \tfrac{1}{L}\nabla f(y_{k-1})\right), \\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}), \qquad k \geq 1.
\end{aligned}
$$

Для каждого $k \geq 1$

$$
\boxed{\varphi(x_k) - \varphi(x^\star) \ \leq \ \frac{2L\,\|x_0 - x^\star\|_2^2}{(k+1)^2}}
$$

Ускоренный проксимальный градиент – μ-*сильно выпуклая* функция

Ускоренный проксимальный градиентный метод

Добавим, что f является μ-**сильно выпуклой** ($\mu > 0$).
Установим шаг $\alpha = \frac{1}{L}$ и фиксированный параметр импульса

$$\beta = \frac{\sqrt{L/\mu} - 1}{\sqrt{L/\mu} + 1}.$$

Генерируем итерации для $k \geq 0$ (возьмем $x_{-1} = x_0$):

$$y_k = x_k + \beta\left(x_k - x_{k-1}\right),$$
$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(y_k - \alpha \nabla f(y_k)).$$

Для каждого $k \geq 0$

$$\boxed{\varphi(x_k) - \varphi(x^\star) \leq \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^k \left(\varphi(x_0) - \varphi(x^\star) + \frac{\mu}{2}\|x_0 - x^\star\|_2^2\right)}$$

Численные эксперименты

Квадратичный случай

$$f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].$$

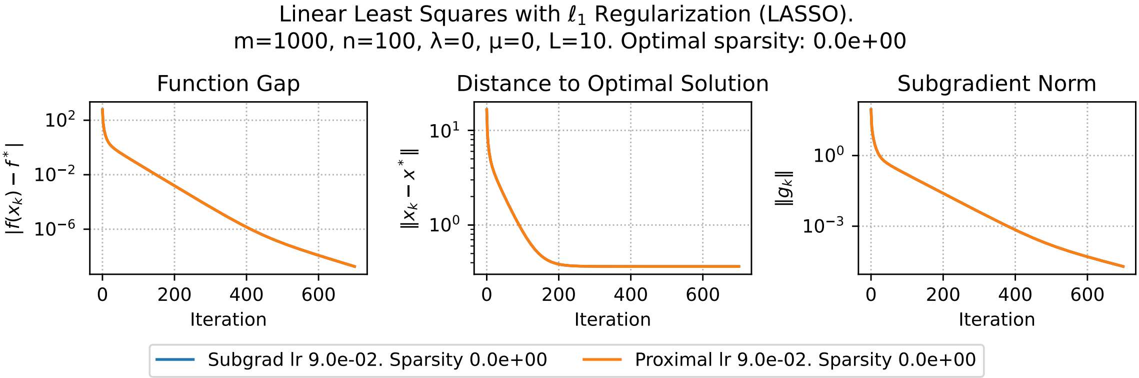


Рис. 2: Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, отсутствие сходимости в области, нет разницы между методом субградиента и проксимальным методом.

Квадратичный случай

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

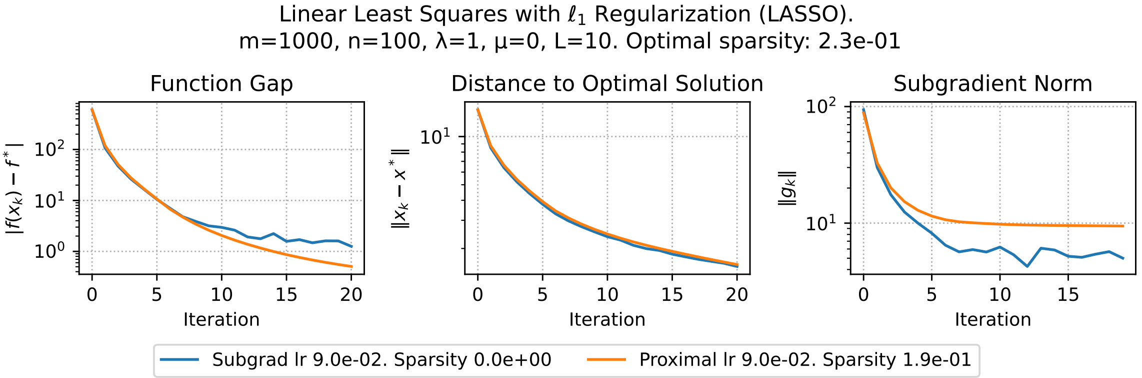


Рис. 3: Негладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость. В начале метод субградиента и проксимальный метод близки.

Квадратичный случай

$$
f(x) = \frac{1}{2m}\|Ax - b\|_2^2 + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda\left(\tfrac{1}{m}A^TA\right) \in [\mu; L].
$$

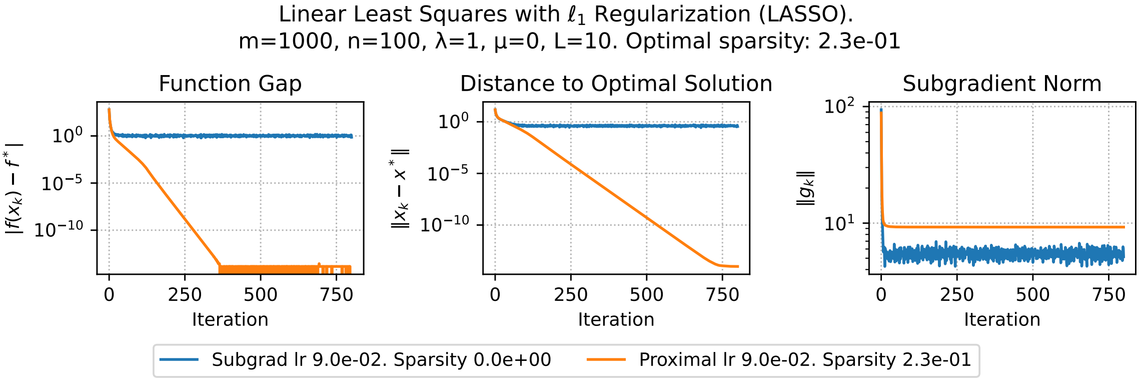


Рис. 4: Негладкий выпуклый случай. Если мы возьмем больше итераций, то проксимальный метод сходится с постоянным шагом, что не так для метода субградиента. Разница огромна, в то время как сложность итерации одинакова.

Бинарная логистическая регрессия

$$f(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1+\exp(-b_i(A_i x))) + \lambda\|x\|_1 \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}, \qquad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

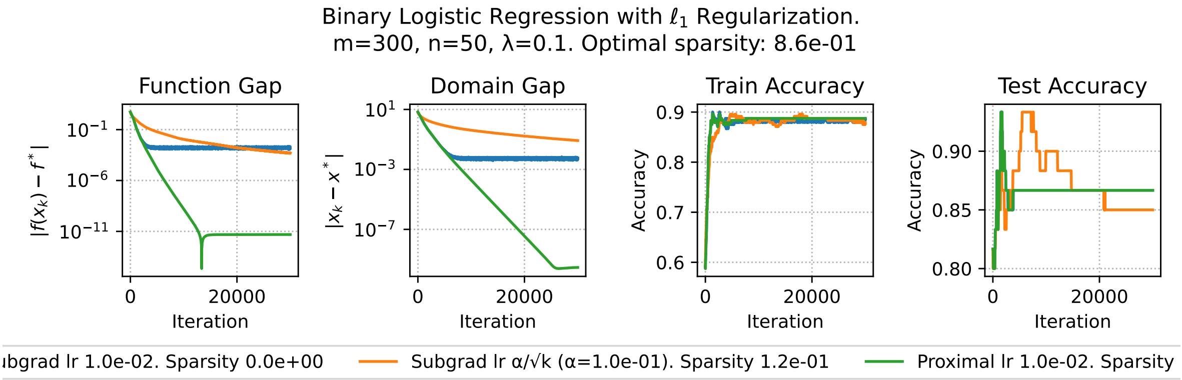
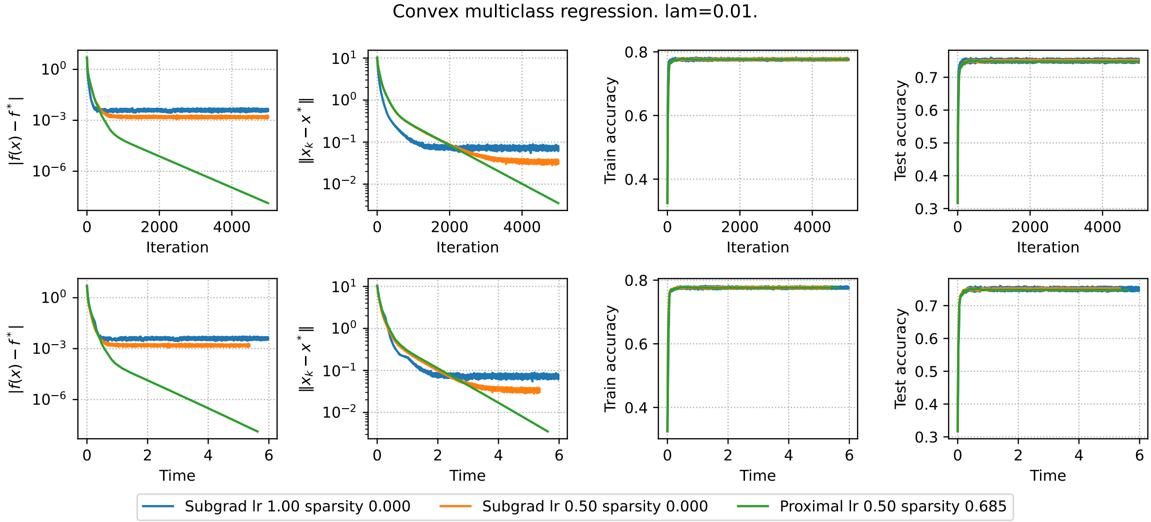


Рис. 5: Логистическая регрессия с ℓ_1-регуляризацией

Softmax multiclass regression



Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:
  - Дано x_0, для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v.

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:
    - Дано x_0, для $k \geq 0$, повторять:
    $$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(x_k - \alpha\nabla f(x_k)\right),$$
    где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v.
- **Сходимость**:

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:
    - Дано x_0, для $k \geq 0$, повторять:

    $$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(x_k - \alpha\nabla f(x_k)\right),$$

    где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v.
- **Сходимость**:
    - Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α.

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:
  - Дано x_0, для $k \geq 0$, повторять:
$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(x_k - \alpha \nabla f(x_k)\right),$$
    где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v.
- **Сходимость**:
  - Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α.
- **Применение**:

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1-регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1-штрафом.

- **Алгоритм**:
    - Дано x_0, для $k \geq 0$, повторять:
    $$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(x_k - \alpha\nabla f(x_k)\right),$$
    где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v.
- **Сходимость**:
    - Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α.
- **Применение**:
    - Эффективно для восстановления разреженных сигналов, обработки изображений и compressed sensing.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

* **Алгоритм**:

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
  - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
    - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
    - Для $k \geq 1$, обновляем:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})\right), \\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
    - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
    - Для $k \geq 1$, обновляем:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})\right), \\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

- **Сходимость**:

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
  - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
  - Для $k \geq 1$, обновляем:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})\right), \\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

- **Сходимость**:
  - Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
    - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
    - Для $k \geq 1$, обновляем:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})\right),\\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2},\\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

- **Сходимость**:
    - Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.
- **Применение**:

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм**:
    - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
    - Для $k \geq 1$, обновляем:

$$
\begin{aligned}
x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}\left(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})\right), \\
t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\
y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).
\end{aligned}
$$

- **Сходимость**:
    - Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.
- **Применение**:
    - Особенно полезен для больших задач в машинном обучении и обработке сигналов, где ℓ_1-штраф индуцирует разреженность.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:

$$
\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,
$$

  где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:

$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$

  где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:

$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$

  где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:
  - Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:
$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$
где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:
  - Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.
- **Алгоритм**:

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:
$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$
где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:
  - Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.
- **Алгоритм**:
  - Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:
$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$
где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:
  - Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.
- **Алгоритм**:
  - Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.
- **Применение**:

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи**:

$$\min_X \frac{1}{2}\|P_\Omega(X) - P_\Omega(M)\|_F^2 + \lambda\|X\|_*,$$

  где P_Ω проецирует на наблюдаемое множество Ω, и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.
- **Проксимальный оператор**:
  - Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.
- **Алгоритм**:
  - Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.
- **Применение**:
  - Широко используется в рекомендательных системах, восстановлении изображений и других областях, где данные естественно представлены в виде матриц, но частично наблюдаемы.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L-гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f. Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L-гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f. Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L-гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f. Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L-гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f. Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

  Если разрешить численно неточный проксимальный оператор, то действительно можно решать любую негладкую задачу оптимизации. Но с теоретической точки зрения это не лучше субградиентного спуска, поскольку для решения проксимальной подзадачи используется вспомогательный метод (например, тот же субградиентный спуск).
- Проксимальный метод является общим современным фреймворком для многих численных методов. Далее развиваются ускоренные, стохастические, приближенные двойственные методы и т.д.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L-гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f. Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

  Если разрешить численно неточный проксимальный оператор, то действительно можно решать любую негладкую задачу оптимизации. Но с теоретической точки зрения это не лучше субградиентного спуска, поскольку для решения проксимальной подзадачи используется вспомогательный метод (например, тот же субградиентный спуск).
- Проксимальный метод является общим современным фреймворком для многих численных методов. Далее развиваются ускоренные, стохастические, приближенные двойственные методы и т.д.
- Дополнительные материалы: разбиение по проксимальному оператору, схема Дугласа—Рачфорда, задача наилучшего приближения, разбиение на три оператора.