

Субградиенты. Негладкие задачи

МЕТОДЫ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

НЕДЕЛЯ 12

Даня Меркулов



Даня Меркулов, Петр Остроухов

Оптимизация для всех! ЦУ



$f \rightarrow \min_{x, y, z}$

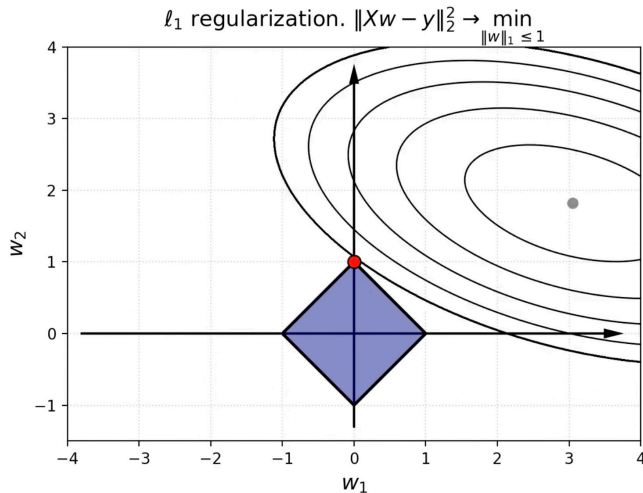
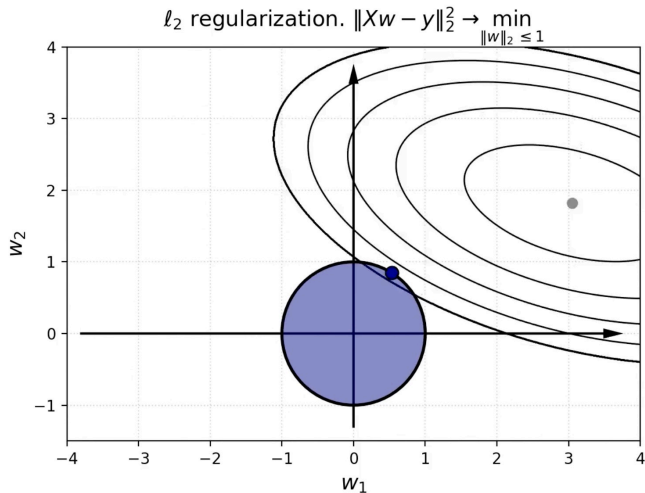


Негладкие задачи

Задача наименьших квадратов с ℓ_1 -регуляризацией



ℓ_1 induces sparsity



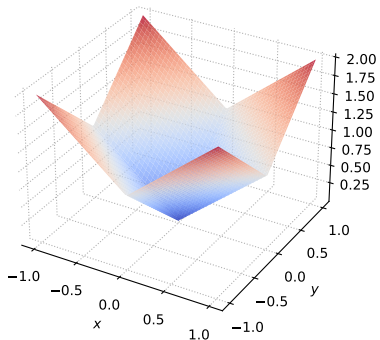
Нормы не являются гладкими



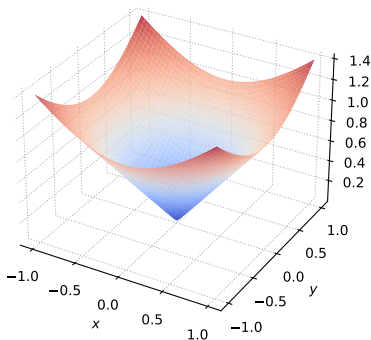
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x),$$

Рассмотрим задачу выпуклой оптимизации. Будем считать $f(x)$ выпуклой, но не обязательно гладкой.

$p = 1$ Norm Cone



$p = 2$ Norm Cone



$p = \infty$ Norm Cone

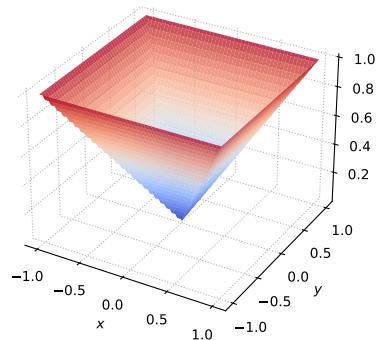


Рисунок 1. Конусы норм для разных p -норм не являются гладкими

Пример Вульфа



Wolfe's example

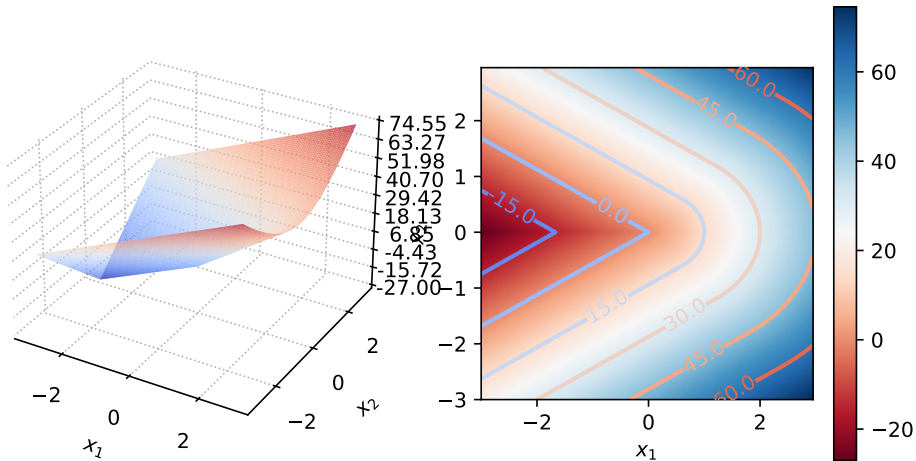
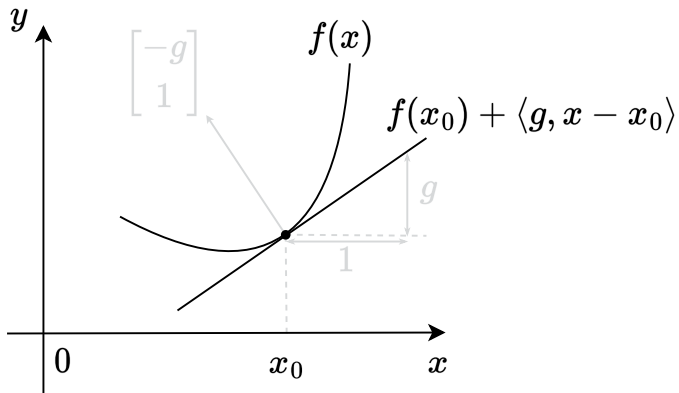


Рисунок 2. Пример Вульфа. [Открыть в Colab](#)

Вычисление субградиента

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций

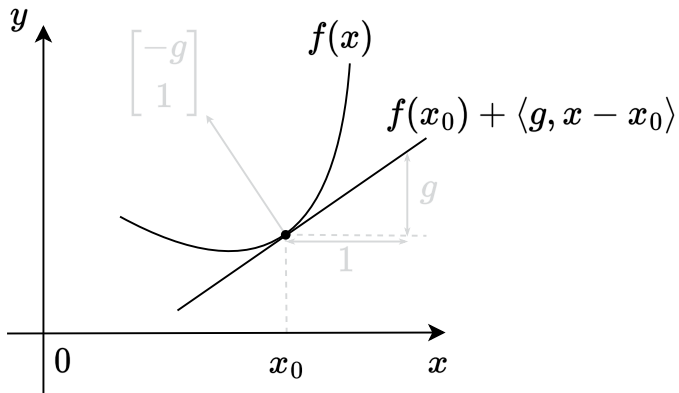


Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

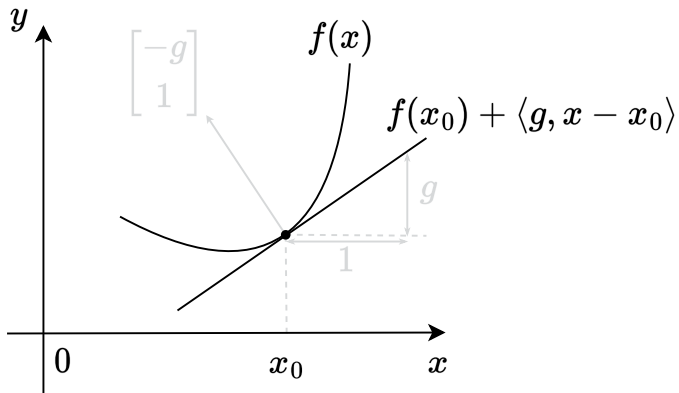
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

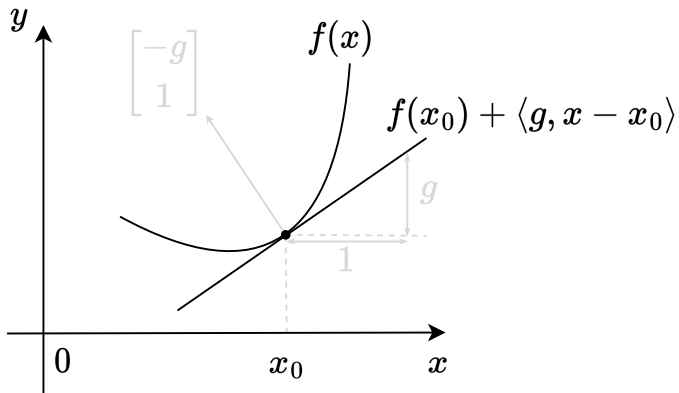
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

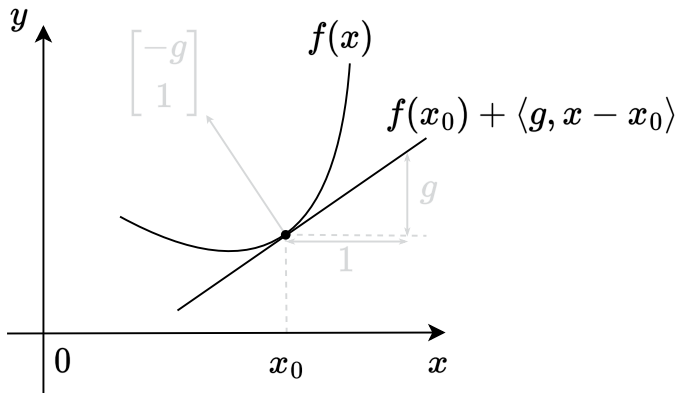
$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Линейная нижняя оценка для выпуклых функций



Важное свойство выпуклой функции $f(x)$: для любой точки x_0 и для всех $x \in \text{dom } f$ выполняется неравенство:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

для некоторого вектора g , то есть касательная к графику функции является *глобальной* нижней оценкой для функции.

- Если $f(x)$ дифференцируема, то $g = \nabla f(x_0)$.
- Не все непрерывные выпуклые функции дифференцируемы.

Мы хотим сохранить это полезное свойство и для негладких функций.

Рисунок 3. Аппроксимация Тейлора первого порядка служит глобальной нижней оценкой для выпуклой функции

Субградиент и субдифференциал



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Субградиент и субдифференциал



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

Субградиент и субдифференциал



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Множество всех субградиентов функции $f(x)$ в точке x_0 называется **субдифференциалом** функции f в точке x_0 и обозначается $\partial f(x_0)$.

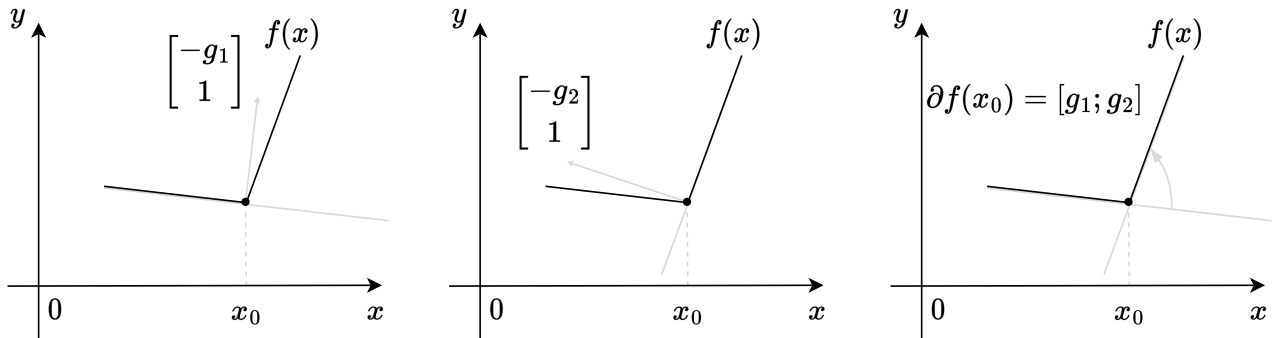


Рисунок 4. Субдифференциал — это множество всех возможных субградиентов

Субградиент и субдифференциал

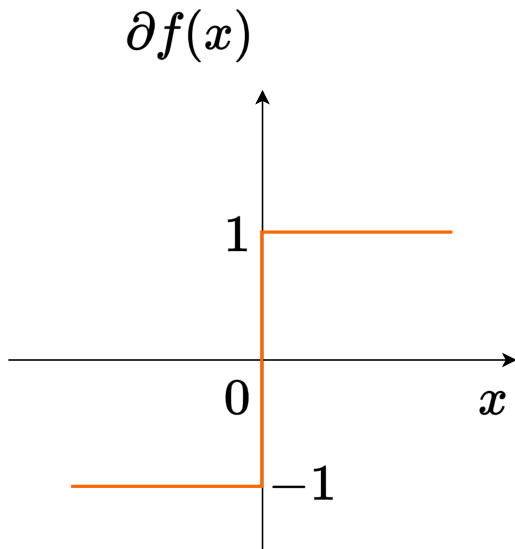
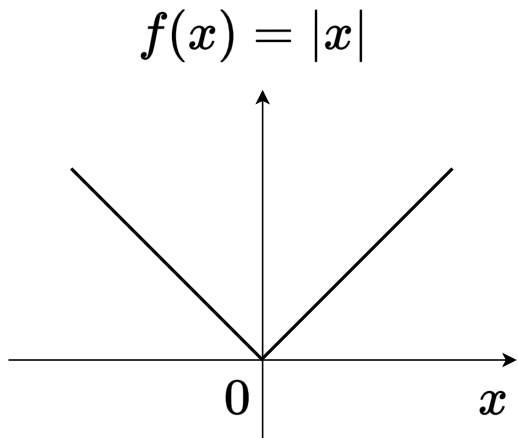


Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$

Субградиент и субдифференциал



Найдите $\partial f(x)$, если $f(x) = |x|$



Свойства субдифференциала



- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.

Свойства субдифференциала



- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Свойства субдифференциала

- Если $x_0 \in \text{ri}(S)$, то $\partial f(x_0)$ является выпуклым компактным множеством.
- Выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \Rightarrow \partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.
- Если $\partial f(x_0) \neq \emptyset \quad \forall x_0 \in S$, то $f(x)$ выпукла на S .

i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Вычисление субдифференциалов



i Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах S_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда если $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

Вычисление субдифференциалов



i Теорема Моро — Рокафеллара (субдифференциал линейной комбинации)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на выпуклых множествах S_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда если $\bigcap_{i=1}^n \text{ri}(S_i) \neq \emptyset$, то функция

$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x)$, $a_i > 0$ имеет субдифференциал

$\partial_S f(x)$ на множестве $S = \bigcap_{i=1}^n S_i$ и

$$\partial_S f(x) = \sum_{i=1}^n a_i \partial_{S_i} f_i(x).$$

i Теорема Дубовицкого — Милютина (субдифференциал поточечного максимума)

Пусть $f_i(x)$ — выпуклые функции на открытом выпуклом множестве $S \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in S$, и поточечный максимум определяется как $f(x) = \max_i f_i(x)$. Тогда:

$$\partial_S f(x_0) = \text{conv} \left\{ \bigcup_{i \in I(x_0)} \partial_S f_i(x_0) \right\},$$

$$I(x) = \{i \in \{1, \dots, m\} : f_i(x) = f(x)\}$$

Вычисление субдифференциалов



- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$

Вычисление субдифференциалов



- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции

Вычисление субдифференциалов



- $\partial(\alpha f)(x) = \alpha \partial f(x)$ для $\alpha \geq 0$
- $\partial(\sum f_i)(x) = \sum \partial f_i(x)$, f_i — выпуклые функции
- $\partial(f(Ax + b))(x) = A^T \partial f(Ax + b)$, f — выпуклая функция

Субградиентный метод

Алгоритм



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Алгоритм



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Алгоритм



Вектор g называется **субградиентом** функции $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$ в точке x_0 , если $\forall x \in S$:

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle g, x - x_0 \rangle$$

Идея метода: заменить градиент $\nabla f(x_k)$ на произвольный субградиент $g_k \in \partial f(x_k)$:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k,$$

где g_k — произвольный субградиент функции $f(x)$ в точке x_k .

Субградиентный метод не является методом спуска: значение функции может расти ($f(x_{k+1}) > f(x_k)$), так как антисубградиент не обязательно является направлением убывания.

Поэтому в качестве приближения решения берут лучшее найденное значение:

$$f_k^{\text{best}} = \min_{i=1, \dots, k} f(x_i).$$

Сходимость: выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — выпуклая функция, x^* — точка минимума. Предположим, что $\|g_k\| \leq G$ для всех k . Тогда:

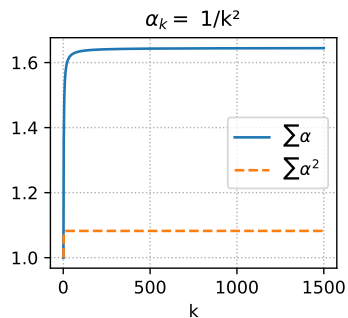
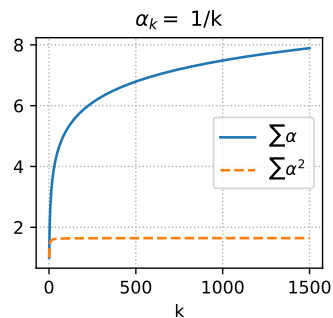
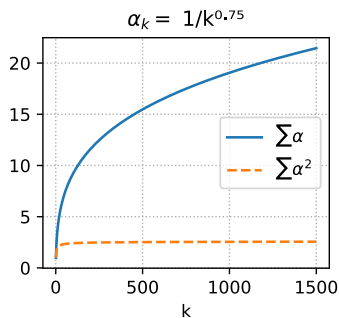
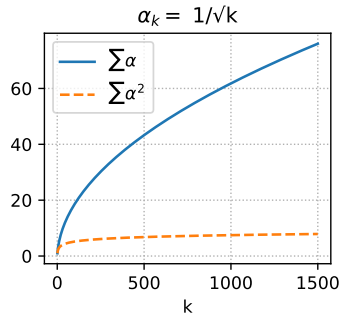
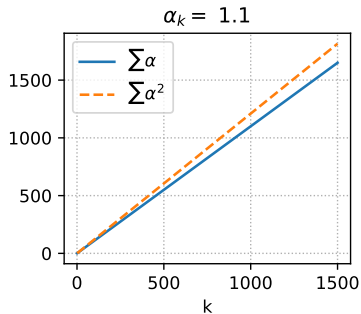
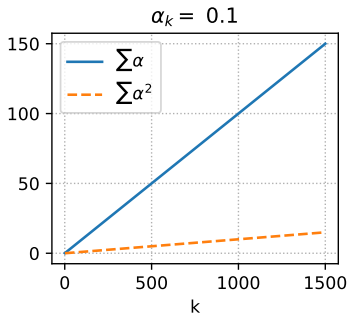
$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}$$

где $R = \|x_0 - x^*\|_2$.

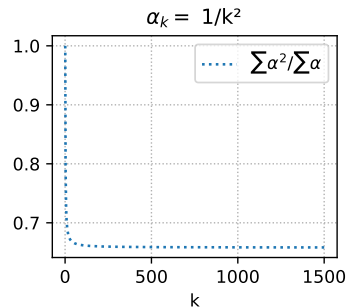
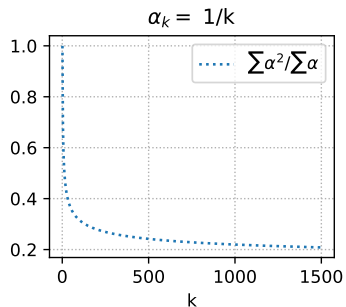
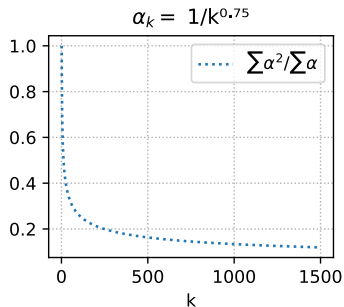
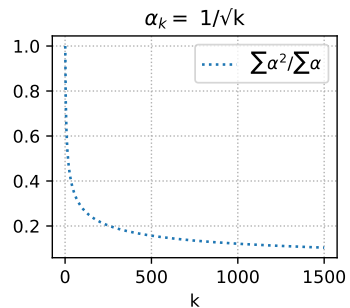
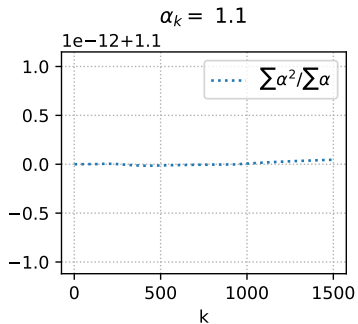
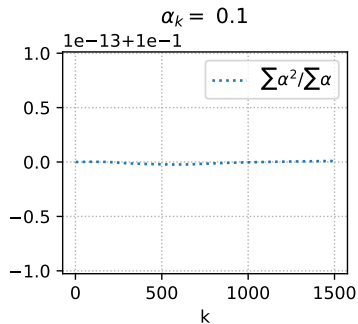
Метод сходится, если:

$$\sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k = \infty$$

Различные стратегии выбора шага



Различные стратегии выбора шага



Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. ¹ или ².

¹B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

²N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (1)



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага α , субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2}{2\alpha k} + \frac{\alpha}{2} G^2$$

- Заметим, что с любым постоянным шагом первое слагаемое правой части убывает, но второе остается постоянным.
- Замечание: существуют вариации метода, работающие и без предположения об ограниченности субградиентов (например, с нормировкой шага). См. ¹ или ².
- Найдем оптимальный шаг α , который минимизирует правую часть неравенства.

¹B. Polyak. Introduction to Optimization. Optimization Software, Inc., 1987.

²N. Shor. Minimization Methods for Non-differentiable Functions. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, 1985.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации: $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, то получите ту же оценку.

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (2)



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\alpha = \frac{R}{G} \sqrt{\frac{1}{k}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR}{\sqrt{k}}$$

- Эта версия требует знания числа итераций заранее, что не всегда практично.
- Любопытно, что, если вы будете искать оптимальный шаг на каждой итерации: $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1}$, то получите ту же оценку.
- Это связано с симметрией и выпуклостью правой части относительно α_i .

Сходимость: выпуклый случай, постоянный шаг (3)



Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для постоянного шага $\gamma = \alpha_k \|g_k\|_2$, т.е. $\alpha_k = \frac{\gamma}{\|g_k\|_2}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR^2}{2\gamma k} + \frac{G\gamma}{2}$$

- Критерий остановки: норма субградиента не подходит (пример $f(x) = |x|$). Обычно используют фиксированное число итераций.

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия

i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k);$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i}$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})}$$

Сходимость: выпуклый случай, практическая стратегия



i Theorem

Пусть f — выпуклая G -липшицева функция и $R = \|x_0 - x^*\|_2$. Для убывающей стратегии шага $\alpha_k = \frac{R}{G\sqrt{k+1}}$, субградиентный метод удовлетворяет

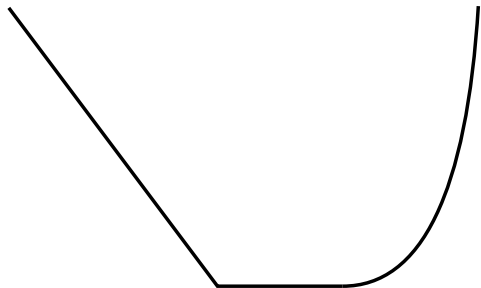
$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

1. Оценка сумм:

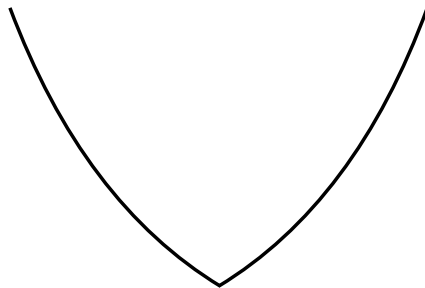
$$\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2 = \frac{R^2}{G^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i} \leq \frac{R^2}{G^2} (1 + \ln k); \quad \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i = \frac{R}{G} \sum_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{i}} \geq \frac{R}{G} \int_1^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{2R}{G} (\sqrt{k+1} - 1).$$

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i^2}{2 \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i} \leq \frac{R^2 + R^2(1 + \ln k)}{4 \frac{R}{G} (\sqrt{k+1})} = \frac{GR(2 + \ln k)}{4\sqrt{k+1}}$$

Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости

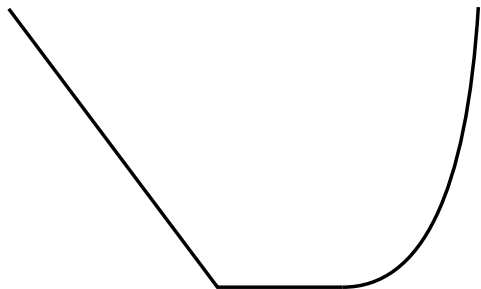


Негладкая
Выпуклая



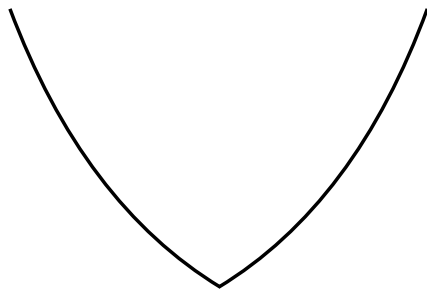
Негладкая
 μ - сильно выпуклая

Разные комбинации (сильной) выпуклости и (не)гладкости



Негладкая
Выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$



Негладкая
 μ - сильно выпуклая

$$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

Сильно выпуклая негладкая функция



Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Summary. Субградиентный метод



Тип задачи	Стратегия шага	Скорость сходимости	Сложность итераций
Выпуклые липшицевы функции	$\alpha \sim \frac{1}{\sqrt{k}}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$
Сильно выпуклые функции	$\alpha \sim \frac{1}{k}$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

Нижние оценки



выпуклые (негладкие) ³	гладкие (невыпуклые) ⁴	гладкие и выпуклые ⁵	гладкие и сильно выпуклые (или PL) ¹
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

³Nesterov, Lectures on Convex Optimization

⁴Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

⁵Nemirovski, Yudin, 1979

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
m=1000, n=100, $\lambda=0$, $\mu=0$, L=10. Optimal sparsity: 0.0e+00

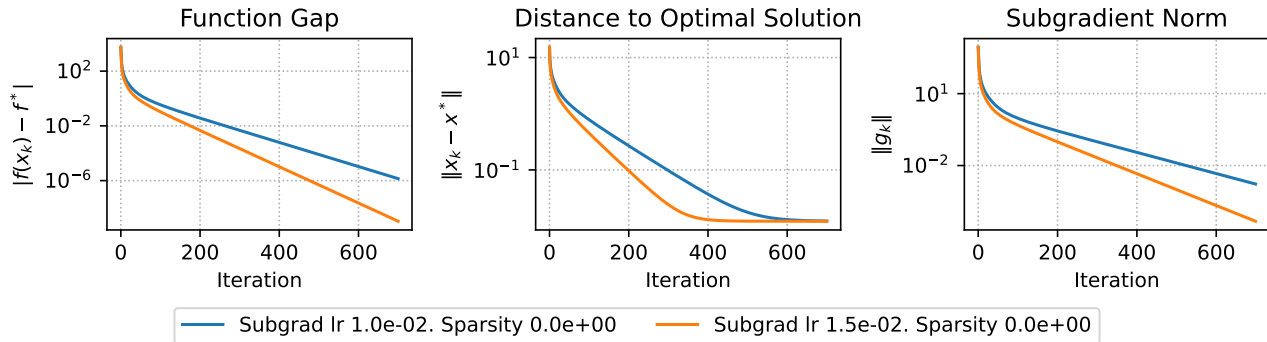


Рисунок 6. Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, не сходится в области определения

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
m=1000, n=100, $\lambda=0.1$, $\mu=0$, L=10. Optimal sparsity: 1.0e-02

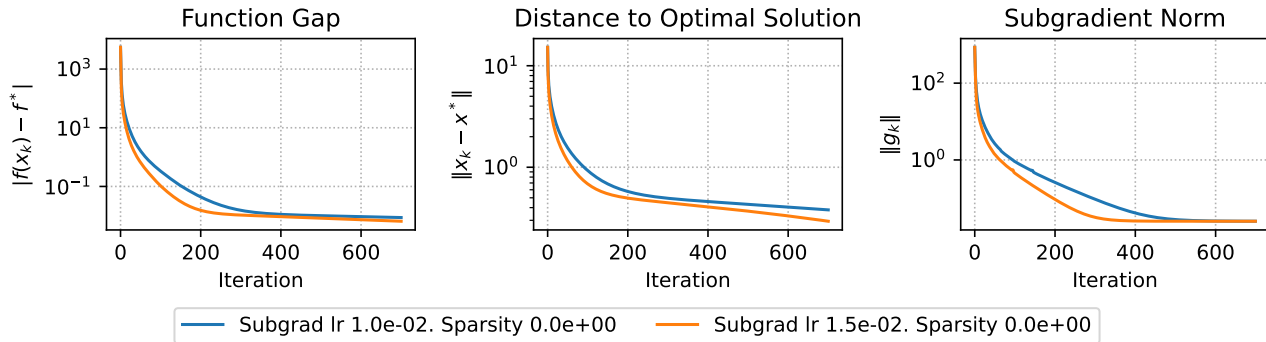


Рисунок 7. Негладкий выпуклый случай. Маленькое значение λ приводит к негладкости. Не сходится с постоянным шагом

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=1000, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $7.0e-02$

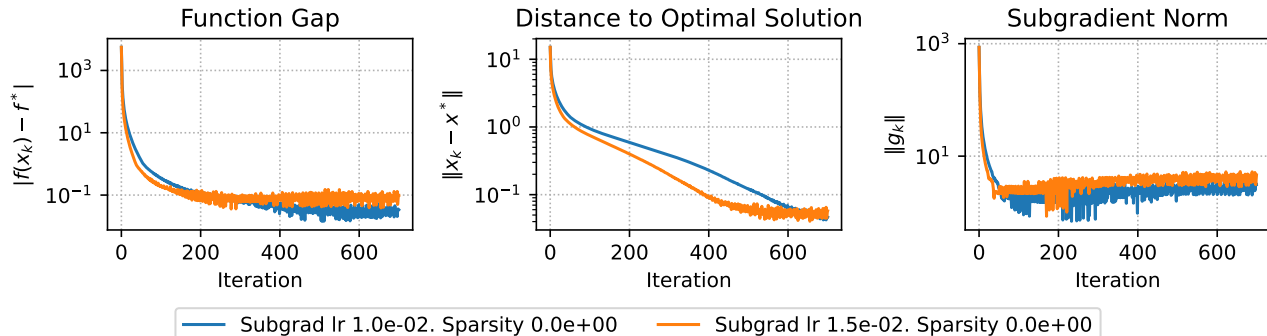


Рисунок 8. Негладкий выпуклый случай. При большем значении λ проявляется немонотонность $f(x_k)$. Видно, что меньшая постоянная длина шага приводит к более низкому стационарному уровню функции.

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $2.3e-01$

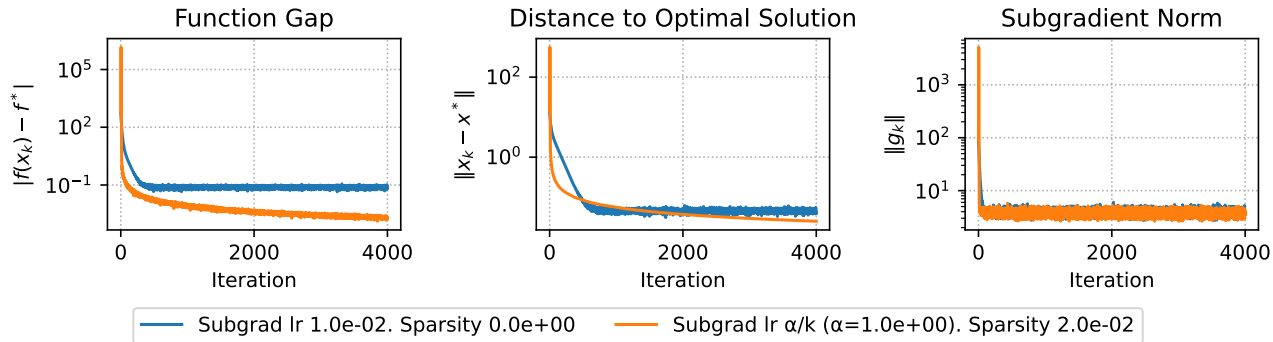


Рисунок 9. Негладкий выпуклый случай. Убывающая длина шага приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $2.3e-01$

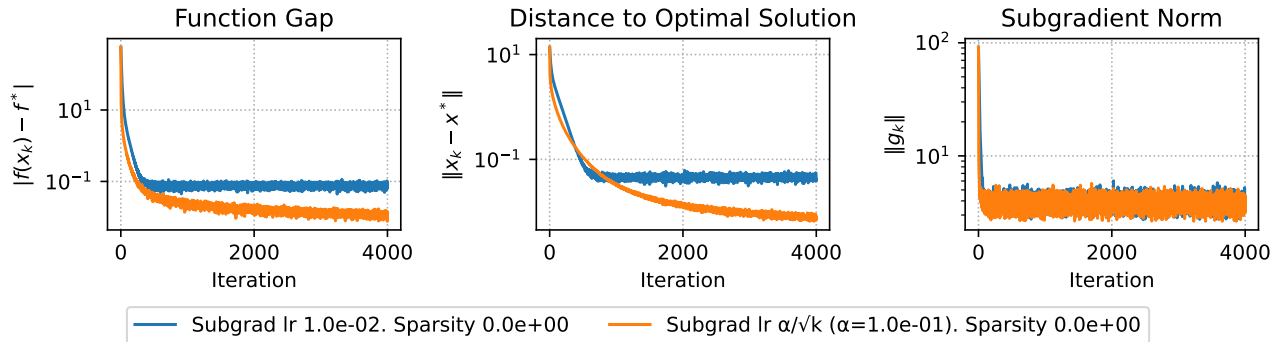


Рисунок 10. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: $2.3e-01$

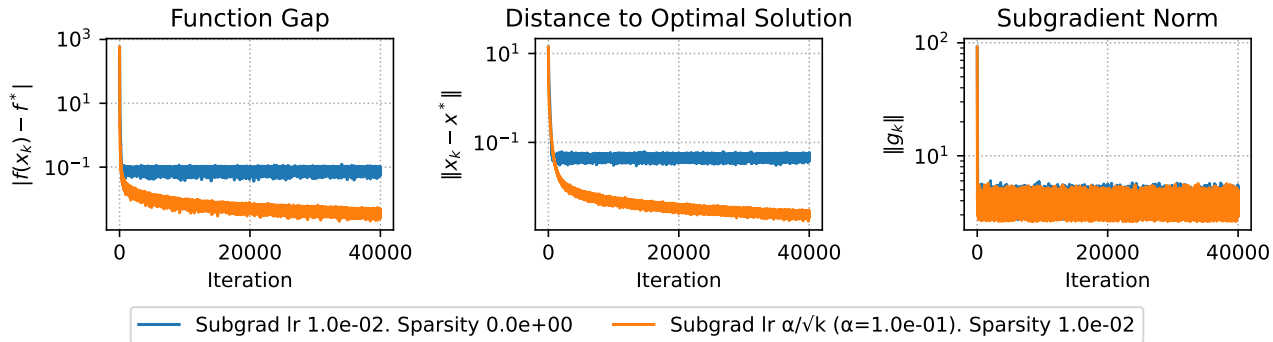


Рисунок 11. Негладкий выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$. Optimal sparsity: 2.0×10^{-1}

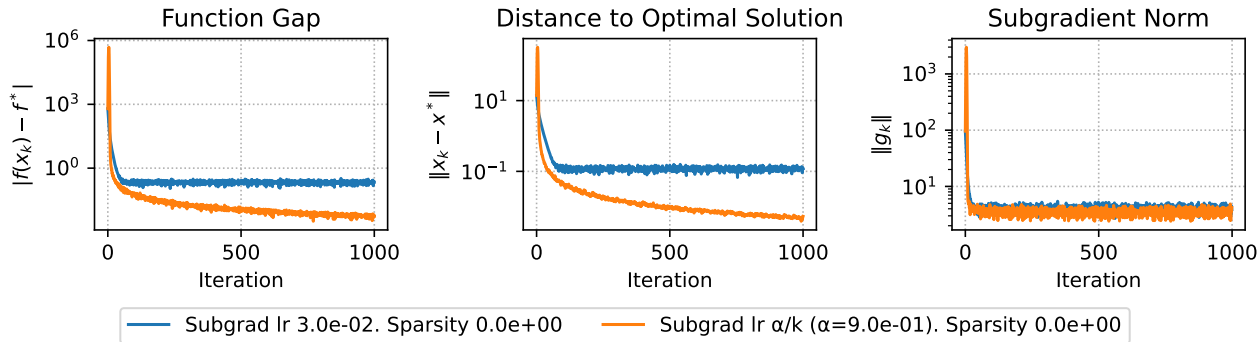


Рисунок 12. Негладкий сильно выпуклый случай. $\frac{\alpha_0}{k}$ шаг приводит к сходимости для f_k^{best}

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=100, n=100, \lambda=1, \mu=1, L=10$. Optimal sparsity: 2.0e-01

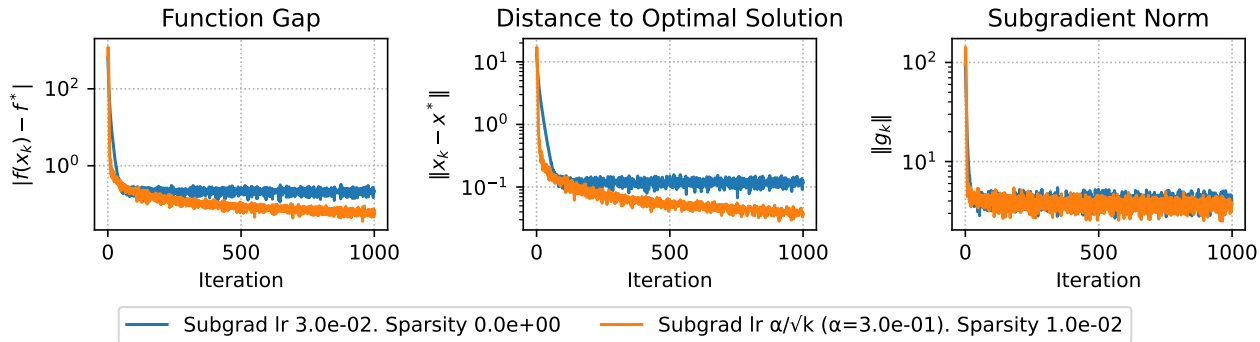


Рисунок 13. Негладкий сильно выпуклый случай. Шаг $\frac{\alpha_0}{\sqrt{k}}$ работает хуже

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
m=300, n=50, $\lambda=0.1$. Optimal sparsity: 8.6e-01

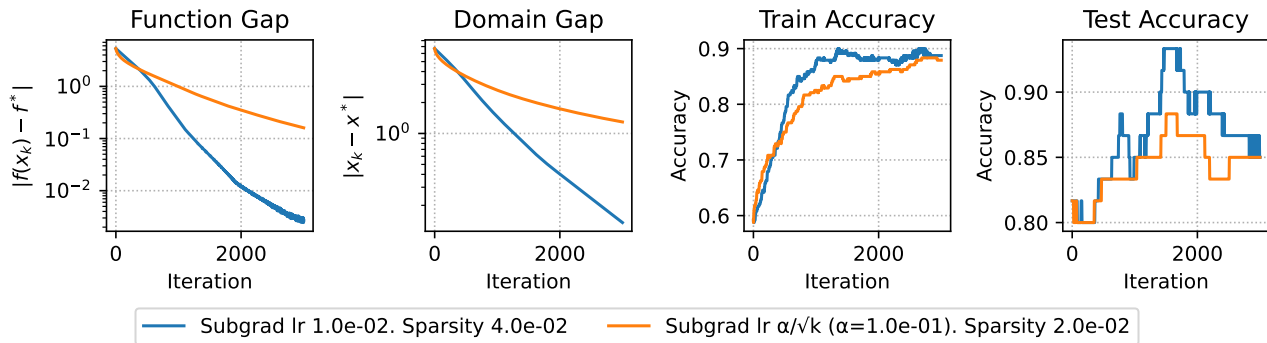


Рисунок 14. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300, n=50, \lambda=0.1$. Optimal sparsity: 8.6×10^{-1}

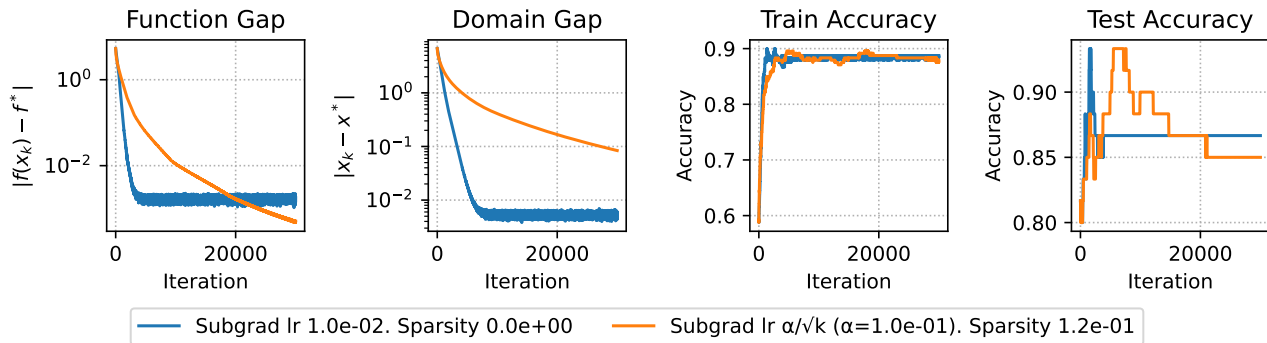


Рисунок 15. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
m=300, n=50, $\lambda=0.25$. Optimal sparsity: 9.6e-01

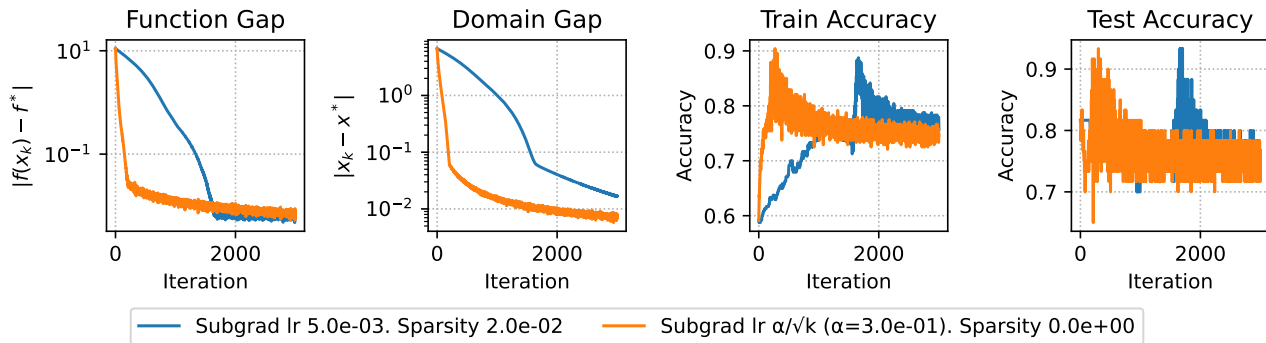


Рисунок 16. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
m=300, n=50, $\lambda=0.25$. Optimal sparsity: 9.6e-01

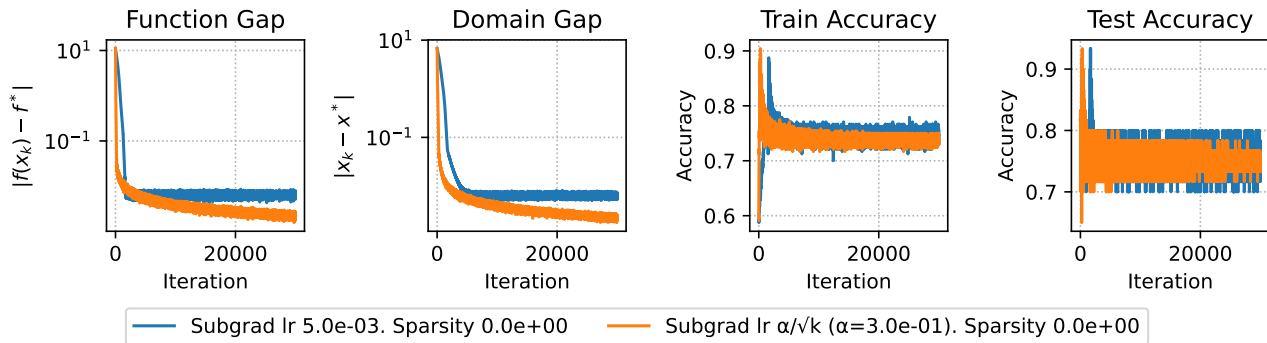


Рисунок 17. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
m=300, n=50, $\lambda=0.27$. Optimal sparsity: 1.0e+00

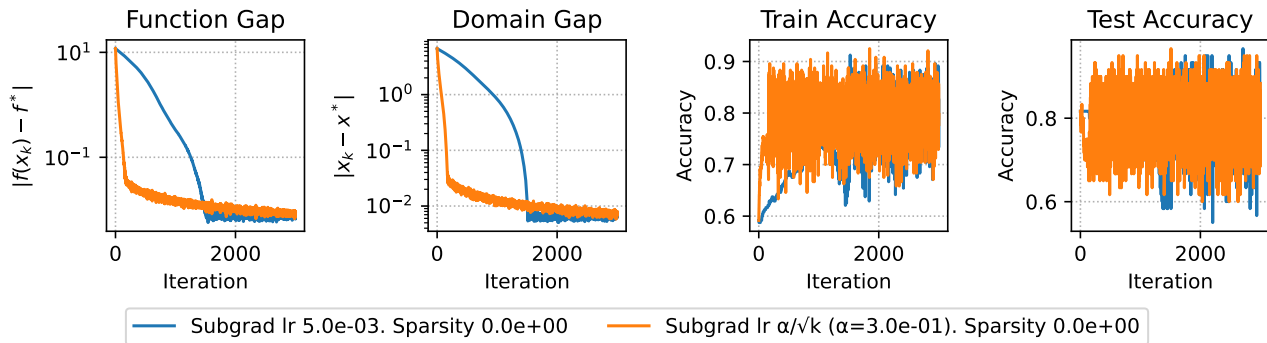


Рисунок 18. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
m=300, n=50, $\lambda=0.27$. Optimal sparsity: 1.0e+00

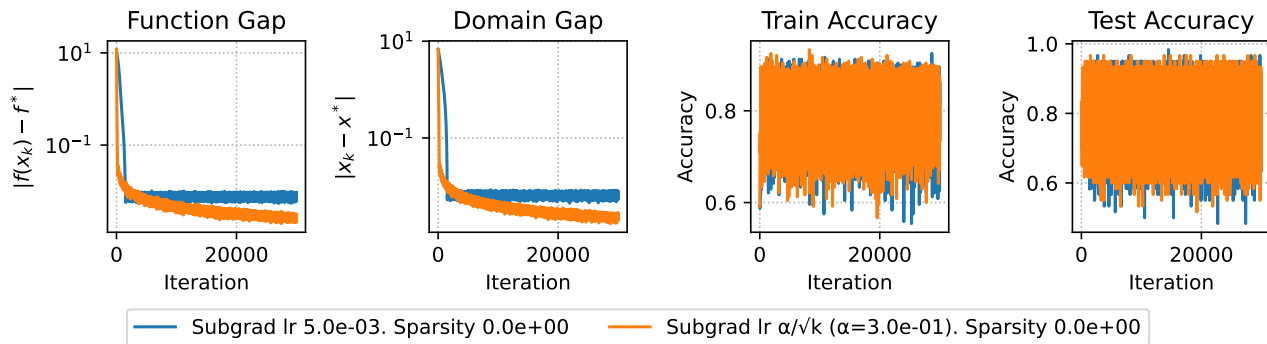


Рисунок 19. Логистическая регрессия с ℓ_1 регуляризацией

Бонус: доказательства

Субдифференциал дифференцируемой функции



i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

Субдифференциал дифференцируемой функции



i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

Субдифференциал дифференцируемой функции



i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

Субдифференциал дифференцируемой функции



i Субдифференциал дифференцируемой функции

Пусть $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на множестве S в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Если $x_0 \in \text{ri}(S)$ и f дифференцируема в точке x_0 , то либо $\partial f(x_0) = \emptyset$, либо $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$. Более того, если функция f выпукла, то первая ситуация невозможна.

Доказательство

1. Пусть $s \in \partial f(x_0)$ для некоторого $s \in \mathbb{R}^n$, отличного от $\nabla f(x_0)$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор. Поскольку x_0 — внутренняя точка S , существует $\delta > 0$, такое что $x_0 + tv \in S$ для всех $0 < t < \delta$. По определению субградиента:

$$f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\langle s, v \rangle$$

что влечёт:

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

для всех $0 < t < \delta$. Переходя к пределу при $t \rightarrow 0$ и используя определение градиента, получаем:

$$\langle \nabla f(x_0), v \rangle = \lim_{t \rightarrow 0; 0 < t < \delta} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq \langle s, v \rangle$$

2. Отсюда $\langle s - \nabla f(x_0), v \rangle \leq 0$. В силу произвольности v можно выбрать

$$v = \frac{s - \nabla f(x_0)}{\|s - \nabla f(x_0)\|},$$

Сходимость: выпуклый случай



Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость: выпуклый случай



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция, и мы используем субградиентный метод. Пусть $\|g_k\| \leq G$ для всех k , и $\|x_0 - x^*\| \leq R$. Тогда для лучшего найденного значения функции $f_T^{\text{best}} = \min_{0 \leq k < T} f(x_k)$ справедливо:

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2}{2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k}.$$

Доказательство Воспользуемся определением шага субградиентного метода $x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k$ и неравенством, определяющим субградиент: $f(x^*) \geq f(x_k) + \langle g_k, x^* - x_k \rangle$:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \\ (f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k &\leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Сходимость: выпуклый случай (доказательство 2)



Просуммируем неравенство по k от 0 до $T - 1$ и воспользуемся предположением на ограниченность нормы субградиента: $\|g_k\| \leq G$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \|x_0 - x^*\|^2 - \|x_T - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq \|x_0 - x^*\|^2 + \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ &\leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \\ (f_T^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k &\leq \sum_{k=0}^{T-1} 2\alpha_k(f(x_k) - f(x^*)) \leq R^2 + G^2 \sum_{k=0}^{T-1} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

Это дает оценку

$$f_T^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{R^2 + G^2 \sum \alpha_k^2}{2 \sum \alpha_k}.$$

Отсюда следует сходимость при $\sum \alpha_k^2 < \infty$, $\sum \alpha_k = \infty$ (шаг убывает, но не слишком быстро).

Сильно выпуклая негладкая функция



Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Доказательство

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

Сильно выпуклая негладкая функция



Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая на выпуклом множестве и x, y — произвольные точки. Тогда для любого $g \in \partial f(x)$,

$$\langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|^2.$$

Доказательство

1. Для любого $\lambda \in [0, 1)$, из μ -сильной выпуклости,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2} \lambda(1 - \lambda) \|x - y\|^2.$$

2. Из неравенства субградиента в x , мы получаем

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) + \langle g, \lambda x + (1 - \lambda)y - x \rangle \rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x) - (1 - \lambda) \langle g, x - y \rangle.$$

Сильно выпуклая негладкая функция



3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

Сильно выпуклая негладкая функция



3. Таким образом,

$$f(x) - (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$(1 - \lambda)f(x) \leq (1 - \lambda)f(y) + (1 - \lambda)\langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$$

$$f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\lambda\|x - y\|^2$$

4. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 1^-$ получаем $f(x) \leq f(y) + \langle g, x - y \rangle - \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2 \rightarrow \langle g, x - y \rangle \geq f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2}\|x - y\|^2$.

Сходимость: сильно выпуклый случай



Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 =$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



i Theorem

Пусть f — μ -сильно выпуклая функция (возможно негладкая) с минимумом x^* . Предположим, что субградиенты ограничены на траектории: $\|g_k\| \leq G$. Используя шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$, субградиентный метод гарантирует для $k > 0$ что:

$$f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}.$$

Доказательство

1. Начнем с формулировки метода как раньше:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|^2 &= \|x_k - x^* - \alpha_k g_k\|^2 = \\ &= \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k \langle g_k, x_k - x^* \rangle \\ &\leq \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) - \alpha_k \mu \|x_k - x^*\|^2 \\ &= (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 - 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) \\ 2\alpha_k (f(x_k) - f(x^*)) &\leq (1 - \mu\alpha_k) \|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \alpha_k^2 \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{1 - \mu\alpha_k}{2\alpha_k} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{1}{2\alpha_k} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{\alpha_k}{2} \|g_k\|^2\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$
$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2$$

$$f(x_k) - f(x^*) \leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2$$

$$k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu}$$
$$(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k = \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*))$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned}f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2\end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*))\end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \end{aligned}$$

Сходимость: сильно выпуклый случай



2. Подставим шаг $\alpha_k = \frac{2}{\mu(k+1)}$ в неравенство:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu(k+1)} \|g_k\|^2 \\ f(x_k) - f(x^*) &\leq \frac{\mu(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu k} \|g_k\|^2 \\ k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq \frac{\mu k(k-1)}{4} \|x_k - x^*\|^2 - \frac{\mu k(k+1)}{4} \|x_{k+1} - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \|g_k\|^2 \end{aligned}$$

3. Суммируя неравенства для всех $k = 0, 1, \dots, T-1$, мы получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) &\leq 0 - \frac{\mu(T-1)T}{4} \|x_T - x^*\|^2 + \frac{1}{\mu} \sum_{k=0}^{T-1} \|g_k\|^2 \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ (f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \sum_{k=0}^{T-1} k &= \sum_{k=0}^{T-1} k(f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*)) \leq \sum_{k=0}^{T-1} k(f(x_k) - f(x^*)) \leq \frac{G^2 T}{\mu} \\ f_{T-1}^{\text{best}} - f(x^*) &\leq \frac{G^2 T}{\mu \sum_{k=0}^{T-1} k} = \frac{2G^2 T}{\mu T(T-1)} \quad f_k^{\text{best}} - f(x^*) \leq \frac{2G^2}{\mu k}. \end{aligned}$$

Двойной бонус: Нижние оценки

Нижние оценки



выпуклые (негладкие) ⁶	гладкие (невыпуклые) ⁷	гладкие и выпуклые ⁸	гладкие и сильно выпуклые (или PL) ¹
$\mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$	$\mathcal{O}\left(\left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k\right)$
$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\sqrt{\kappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

⁶Nesterov, Lectures on Convex Optimization

⁷Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

⁸Nemirovski, Yudin, 1979

Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

Модель черного ящика



Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f - \text{smooth} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{span}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ where } g_i \in \partial f(x_i) && f - \text{non-smooth}\end{aligned} \tag{1}$$

Для получения нижней оценки построим «худшую» функцию f из соответствующего класса, на которой любой метод из семейства Уравнение 1 сходится медленно.

Негладкий выпуклый случай



Theorem

Существует функция f , которая является G -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Негладкий выпуклый случай



i Theorem

Существует функция f , которая является G -липшицевой и выпуклой, такая, что любой метод Уравнение 1 удовлетворяет

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - \min_{x \in \mathbb{B}(R)} f(x) \geq \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

для $R > 0$ и $k \leq n$, где n — размерность задачи.

Идея доказательства: построить такую функцию f , что для любого метода Уравнение 1 получаем

$$x_k \in \text{span} \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$$

где e_i — i -й стандартный базисный вектор. На итерации $k \leq n$, есть по крайней мере $n - k$ координат x , равных 0. Это позволяет нам получить оценку на ошибку.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x :

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \partial \left(\beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left(\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left(\max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x \end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — параметры, и $x^{(1)}, \dots, x^{(k)}$ — первые k компонент x .

Свойства:

- Функция $f(x)$ является α -сильно выпуклой из-за квадратичного члена $\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$.
- Функция негладкая, поскольку первое слагаемое вносит недифференцируемость в точке, соответствующей максимальной координате x .

Рассмотрим субдифференциал $f(x)$ в x :

$$\begin{aligned} \partial f(x) &= \partial \left(\beta \max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \partial \left(\frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2 \right) \\ &= \beta \partial \left(\max_{1 \leq i \leq k} x^{(i)} \right) + \alpha x \\ &= \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : x^{(i)} = \max_j x^{(j)} \right\} + \alpha x \end{aligned}$$

Легко видеть, что если $g \in \partial f(x)$ и $\|x\| \leq R$, то

$$\|g\| \leq \alpha R + \beta$$

Таким образом, f является $\alpha R + \beta$ -липшицевой на $B(R)$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1 . Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1 .

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Далее опишем оракул первого порядка для этой функции. При запросе субградиента в точке x оракул возвращает:

$$\alpha x + \gamma e_i,$$

где i — *наименьший* индекс, на котором достигается максимум $x^{(i)} = \max_{1 \leq j \leq k} x^{(j)}$.

- Пусть $x_0 = 0$.
- При запросе оракула в $x_0 = 0$, он возвращает e_1 . Следовательно, x_1 лежит на прямой, порождённой e_1 .
- Индукцией по i можно показать, что $x_i \in \text{span}\{e_1, \dots, e_i\}$. В частности, для $i \leq k$, $k+1$ -я координата x_i равна нулю и вследствие структуры $f(x)$:

$$f(x_i) \geq 0.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



- Найдем минимум функции f . Определим точку $y \in \mathbb{R}^n$:

$$y^{(i)} = -\frac{\beta}{\alpha k} \quad \text{for } 1 \leq i \leq k, \quad y^{(i)} = 0 \quad \text{for } k+1 \leq i \leq n.$$

- Заметим, что $0 \in \partial f(y)$:

$$\begin{aligned} \partial f(y) &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = \max_j y^{(j)} \right\} \\ &= \alpha y + \beta \operatorname{conv} \left\{ e_i \mid i : y^{(i)} = 0 \right\} \\ 0 &\in \partial f(y). \end{aligned}$$

- Следовательно, минимальное значение $f = f(y) = f(x^*)$ равно

$$f(y) = -\frac{\beta^2}{\alpha k} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = -\frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

- Теперь мы получаем:

$$f(x_i) - f(x^*) \geq 0 - \left(-\frac{\beta^2}{2\alpha k} \right) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}.$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$

$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Негладкий выпуклый случай (доказательство)



Имеем оценку снизу $f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k}$, что (при правильном выборе параметров) совпадает с требуемой $\frac{GR}{2(1+\sqrt{k})}$.

Выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{R} \frac{1}{1 + \sqrt{k}} \quad \beta = \frac{\sqrt{k}}{1 + \sqrt{k}}$$
$$\frac{\beta^2}{2\alpha} = \frac{GRk}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{\beta^2}{2\alpha k} = \frac{GR}{2(1 + \sqrt{k})}$$

Сильно выпуклый случай

$$\alpha = \frac{G}{2R} \quad \beta = \frac{G}{2}$$

Заметим, в частности, что $\|y\|_2^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 k} = \frac{G^2}{4\alpha^2 k} = R^2$ с этими параметрами

$$\min_{1 \leq i \leq k} f(x_i) - f(x^*) \geq \frac{G^2}{8\alpha k}$$

Ссылки



- Subgradient Methods Stephen Boyd (with help from Jaehyun Park)