



Проксимальный градиентный метод.

Даня Меркулов

Оптимизация для всех! ЦУ

Субградиентный метод

Негладкие задачи

ℓ_1 induces sparsity

ℓ_2 regularization. $\|Xw - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\|w\|_2 \leq 1}$



ℓ_1 regularization. $\|Xw - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\|w\|_1 \leq 1}$



@fminxyz

Субградиентный метод

Субградиентный метод:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$$

Субградиентный метод

Субградиентный метод:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$$

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Субградиентный метод

Субградиентный метод:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$$

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Theorem

Предположим, что f является G -липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\bar{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$

Субградиентный метод

Субградиентный метод:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$$

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Theorem

Предположим, что f является G -липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\bar{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$
- $R = \|x_0 - x^*\|$

Субградиентный метод

Субградиентный метод:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k g_k, \quad g_k \in \partial f(x_k)$$

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Theorem

Предположим, что f является G -липшицевой и выпуклой, тогда субградиентный метод сходится как:

$$f(\bar{x}) - f^* \leq \frac{GR}{\sqrt{k}},$$

где

- $\alpha = \frac{R}{G\sqrt{k}}$
- $R = \|x_0 - x^*\|$
- $\bar{x} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} x_i$

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$
$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

сильно выпуклый (негладкий)

$$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$
$$k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.
- Можно использовать метод зеркального спуска (обобщение метода субградиента на, возможно, неевклидову метрику) с той же скоростью сходимости, чтобы лучше согласовать геометрию задачи.

Нижние оценки для негладких выпуклых задач

выпуклый (негладкий)	сильно выпуклый (негладкий)
$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$

- Субградиентный метод является оптимальным для задач выше.
- Можно использовать метод зеркального спуска (обобщение метода субградиента на, возможно, неевклидову метрику) с той же скоростью сходимости, чтобы лучше согласовать геометрию задачи.
- Однако, мы можем достичь стандартной скорости градиентного спуска $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ (и даже ускоренной версии $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$), если мы будем использовать структуру задачи.

Проксимальный оператор

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} &= -\nabla f(x_{k+1}) \\ \frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) &= 0\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 + f(x) \right] \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 + f(x) \right] \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 + f(x) \right] \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

Интуиция проксимального отображения

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x)$$

Явный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_k)$$

Приводит к обычному методу градиентного спуска.

Неявный метод Эйлера:

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} = -\nabla f(x_{k+1})$$

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\alpha} + \nabla f(x_{k+1}) = 0$$

$$\frac{x - x_k}{\alpha} + \nabla f(x) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$\nabla \left[\frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 + f(x) \right] \Big|_{x=x_{k+1}} = 0$$

$$x_{k+1} = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

! Проксимальный оператор

$$\text{prox}_{f,\alpha}(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

Визуализацияproxимального оператора

$$\text{Prox}_f(x) = \operatorname{argmin}_{x'} \frac{1}{2} \|x - x'\|^2 + f(x')$$



Рис. 1: Источник

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) = x_k$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \rightarrow 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f_{x_k}^{II}(x)$:

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \rightarrow 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f_{x_k}^{II}(x)$:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{f_{x_k}^{II}, \alpha}(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \rightarrow 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f_{x_k}^{II}(x)$:

$$\begin{aligned}x_{k+1} = \text{prox}_{f_{x_k}^{II}, \alpha}(x_k) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right] \\&\quad \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{\alpha}(x - x_k) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0\end{aligned}$$

Интуиция проксимального отображения

- **GD из метода проксимального отображения.** Возвращаемся к дискретизации:

$$\begin{aligned}x_{k+1} + \alpha \nabla f(x_{k+1}) &= x_k \\(I + \alpha \nabla f)(x_{k+1}) &= x_k \\x_{k+1} = (I + \alpha \nabla f)^{-1} x_k &\stackrel{\alpha \rightarrow 0}{\approx} (I - \alpha \nabla f)x_k\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем обычный градиентный спуск с $\alpha \rightarrow 0$: $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$.

- **Метод Ньютона из метода проксимального отображения.** Теперь рассмотрим проксимальное отображение второго порядка приближения функции $f_{x_k}^{II}(x)$:

$$\begin{aligned}x_{k+1} = \text{prox}_{f_{x_k}^{II}, \alpha}(x_k) &= \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2} \langle \nabla^2 f(x_k)(x - x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\alpha} \|x - x_k\|_2^2 \right] \\&\quad \nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) + \frac{1}{\alpha}(x - x_k) \Big|_{x=x_{k+1}} = 0 \\x_{k+1} &= x_k - \left[\nabla^2 f(x_k) + \frac{1}{\alpha} I \right]^{-1} \nabla f(x_k)\end{aligned}$$

От проекций к проксимальности

Пусть \mathbb{I}_S — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S . Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

От проекций к проксимальности

Пусть \mathbb{I}_S — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S . Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

От проекций к проксимальности

Пусть \mathbb{I}_S — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S . Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

От проекций к проксимальности

Пусть \mathbb{I}_S — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S . Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

Перепишем ортогональную проекцию $\pi_S(y)$ как

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \mathbb{I}_S(x).$$

От проекций к проксимальности

Пусть \mathbb{I}_S — индикаторная функция для замкнутого, выпуклого множества S . Возвратимся к ортогональной проекции $\pi_S(y)$:

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in S} \frac{1}{2} \|x - y\|_2^2.$$

С использованием следующего обозначения индикаторной функции

$$\mathbb{I}_S(x) = \begin{cases} 0, & x \in S, \\ \infty, & x \notin S, \end{cases}$$

Перепишем ортогональную проекцию $\pi_S(y)$ как

$$\pi_S(y) := \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + \mathbb{I}_S(x).$$

Проксимальность: заменим \mathbb{I}_S на некоторую выпуклую функцию!

$$\text{prox}_r(y) = \text{prox}_{r,1}(y) := \arg \min \frac{1}{2} \|x - y\|^2 + r(x)$$

Составная оптимизация

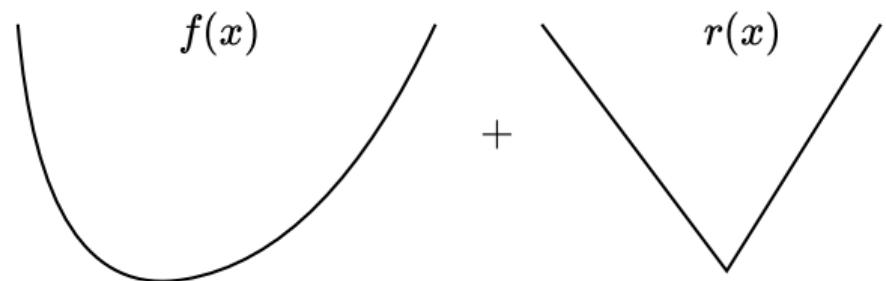
Регулярные / Составные целевые функции

Многие негладкие задачи имеют вид

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = f(x) + r(x)$$

- Lasso, L1-LS, compressed sensing

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2, r(x) = \lambda \|x\|_1$$



Гладкая

Негладкая

Регулярные / Составные целевые функции

Многие негладкие задачи имеют вид

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \varphi(x) = f(x) + r(x)$$

- Lasso, L1-LS, compressed sensing

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2, r(x) = \lambda \|x\|_1$$

- L1-логистическая регрессия, разреженная LR

$$f(x) = -y \log h(x) - (1-y) \log(1-h(x)), r(x) = \lambda \|x\|_1$$



Гладкая

Негладкая

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* = (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* = (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* = (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* = (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Которые приводят к методу проксимального градиента:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{r,\alpha}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

И этот метод сходится со скоростью $\mathcal{O}(\frac{1}{k})!$

Интуиция проксимального отображения

Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

$$0 \in \alpha \nabla f(x^*) + \alpha \partial r(x^*)$$

$$x^* \in \alpha \nabla f(x^*) + (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* - \alpha \nabla f(x^*) \in (I + \alpha \partial r)(x^*)$$

$$x^* = (I + \alpha \partial r)^{-1}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Которые приводят к методу проксимального градиента:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{r,\alpha}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

И этот метод сходится со скоростью $\mathcal{O}(\frac{1}{k})!$

i Другая форма проксимального оператора

$$\text{prox}_{f,\alpha}(x_k) = \text{prox}_{\alpha f}(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[\alpha f(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

$$\text{prox}_f(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} \left[f(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|_2^2 \right]$$

Примерыproxимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1, \lambda > 0$

$$[\text{prox}_r(x)]_i = [|x_i| - \lambda]_+ \cdot \text{sign}(x_i),$$

который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).

Примерыproxимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1, \lambda > 0$

$$[\text{prox}_r(x)]_i = [|x_i| - \lambda]_+ \cdot \text{sign}(x_i),$$

который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).

- $r(x) = \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2, \lambda > 0$

$$\text{prox}_r(x) = \frac{x}{1 + \lambda}.$$

Примерыproxимальных операторов

- $r(x) = \lambda \|x\|_1, \lambda > 0$

$$[\text{prox}_r(x)]_i = [|x_i| - \lambda]_+ \cdot \text{sign}(x_i),$$

который также известен как оператор мягкого порога (soft-thresholding).

- $r(x) = \frac{\lambda}{2} \|x\|_2^2, \lambda > 0$

$$\text{prox}_r(x) = \frac{x}{1 + \lambda}.$$

- $r(x) = \mathbb{I}_S(x).$

$$\text{prox}_r(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) = \text{proj}_r(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Свойстваproxимального оператора

i Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(\hat{x}) < +\infty$, то proxимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(\hat{x}) < +\infty$, то proxимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(\hat{x}) < +\infty$, то proxимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Вопрос: Что можно сказать об этой задаче?

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определён. Если существует такой $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, что $r(\hat{x}) < +\infty$, то proxимальный оператор определяется однозначно (т.е. всегда возвращает единственное значение).

Доказательство:

Проксимальный оператор возвращает минимум некоторой задачи оптимизации.

Вопрос: Что можно сказать об этой задаче?

Это сильно выпуклая функция, что означает, что она имеет единственный минимум (существование \hat{x} необходимо для того, чтобы $r(\hat{x}) + \frac{1}{2}\|x - \hat{x}\|_2^2$ принимало конечное значение).

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,

Доказательство

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,

Доказательство

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

1. Установим эквивалентность между первым и вторым условиями. Первое условие можно переписать как

$$y = \arg \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^d} \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2 \right).$$

Из условий оптимальности для выпуклой функции r , это эквивалентно:

$$0 \in \partial \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2 \right) \Big|_{\tilde{x}=y} = \partial r(y) + y - x.$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, для которой prox_r определен. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, следующие три условия эквивалентны:

- $\text{prox}_r(x) = y$,
- $x - y \in \partial r(y)$,
- $\langle x - y, z - y \rangle \leq r(z) - r(y)$ для любого $z \in \mathbb{R}^n$.

Доказательство

1. Установим эквивалентность между первым и вторым условиями. Первое условие можно переписать как

$$y = \arg \min_{\tilde{x} \in \mathbb{R}^d} \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2 \right).$$

Из условий оптимальности для выпуклой функции r , это эквивалентно:

$$0 \in \partial \left(r(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|x - \tilde{x}\|^2 \right) \Big|_{\tilde{x}=y} = \partial r(y) + y - x.$$

2. Из определения субдифференциала, для любого субградиента $g \in \partial f(y)$ и для любого $z \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle g, z - y \rangle \leq r(z) - r(y).$$

В частности, это верно для $g = x - y$. Обратно это также очевидно: для $g = x - y$, вышеуказанное соотношение выполняется, что означает $g \in \partial r(y)$.

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

- Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\langle x - u, z_1 - u \rangle \leq r(z_1) - r(u)$$

$$\langle y - v, z_2 - v \rangle \leq r(z_2) - r(v).$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

- Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\langle x - u, z_1 - u \rangle \leq r(z_1) - r(u)$$

$$\langle y - v, z_2 - v \rangle \leq r(z_2) - r(v).$$

- Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle \leq 0,$$

$$\langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 \leq 0.$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

- Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\langle x - u, z_1 - u \rangle \leq r(z_1) - r(u)$$

$$\langle y - v, z_2 - v \rangle \leq r(z_2) - r(v).$$

- Что и требовалось доказать после подстановки u и v .

$$\|u - v\|_2^2 \leq \langle x - y, u - v \rangle$$

- Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle \leq 0,$$

$$\langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 \leq 0.$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Оператор $\text{prox}_r(x)$ является жёстко нерастягивающим (FNE):

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2^2 \leq \langle \text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y), x - y \rangle$$

и нерастягивающим:

$$\|\text{prox}_r(x) - \text{prox}_r(y)\|_2 \leq \|x - y\|_2$$

Доказательство

- Пусть $u = \text{prox}_r(x)$, и $v = \text{prox}_r(y)$. Тогда, из предыдущего свойства:

$$\langle x - u, z_1 - u \rangle \leq r(z_1) - r(u)$$

$$\langle y - v, z_2 - v \rangle \leq r(z_2) - r(v).$$

- Заменим $z_1 = v$ и $z_2 = u$ и сложим:

$$\langle x - u, v - u \rangle + \langle y - v, u - v \rangle \leq 0,$$

$$\langle x - y, v - u \rangle + \|v - u\|_2^2 \leq 0.$$

- Что и требовалось доказать после подстановки u и v .

$$\|u - v\|_2^2 \leq \langle x - y, u - v \rangle$$

- Последний пункт следует из неравенства Коши-Буняковского для последнего неравенства.

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*)$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$\begin{aligned} 0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) &\in \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$\begin{aligned} 0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) &\in \alpha \partial r(x^*) \\ x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* &\in \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$\begin{aligned} 0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) &\in \alpha \partial r(x^*) \\ x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* &\in \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$

2. Возвратимся к предыдущей лемме:

$$\text{prox}_r(x) = y \Leftrightarrow x - y \in \partial r(y)$$

Свойстваproxимального оператора

Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ и $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклые функции. Кроме того, пусть f непрерывно дифференцируема и L -гладкая, а для r , prox_r определена. Тогда, x^* является решением составной задачи оптимизации тогда и только тогда, когда для любого $\alpha > 0$, выполняется:

$$x^* = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Доказательство

1. Условия оптимальности:

$$\begin{aligned} 0 &\in \nabla f(x^*) + \partial r(x^*) \\ -\alpha \nabla f(x^*) &\in \alpha \partial r(x^*) \\ x^* - \alpha \nabla f(x^*) - x^* &\in \alpha \partial r(x^*) \end{aligned}$$

2. Возвратимся к предыдущей лемме:

$$\text{prox}_r(x) = y \Leftrightarrow x - y \in \partial r(y)$$

3. Наконец,

$$x^* = \text{prox}_{\alpha r}(x^* - \alpha \nabla f(x^*)) = \text{prox}_{r,\alpha}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))$$

Теоретические инструменты для анализа сходимости



Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L -гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.



Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство.

1. Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L -гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
2. Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:



Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство.

- Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L -гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
- Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$



Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство.

- Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L -гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
- Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$x:=y, y:=y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — L -гладкая выпуклая функция. Тогда, для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, выполняется неравенство:

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y) \text{ или, эквивалентно,}$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 = \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$$

Доказательство.

- Рассмотрим другую функцию $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$. Очевидно, это выпуклая функция (как сумма выпуклых функций). И легко проверить, что она является L -гладкой функцией по определению, так как $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x)$ и $\|\nabla \varphi(y_1) - \nabla \varphi(y_2)\| = \|\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$.
- Теперь рассмотрим свойство гладкости параболы для функции $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) \leq \varphi(x) + \langle \nabla \varphi(x), y - x \rangle + \frac{L}{2} \|y - x\|_2^2$$

$$x:=y, y:=y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \quad \varphi\left(y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) + \left\langle \nabla \varphi(y), -\frac{1}{L} \nabla \varphi(y) \right\rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$

$$\varphi\left(y - \frac{1}{L} \nabla \varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L} \|\nabla \varphi(y)\|_2^2$$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять местами x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять местами x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

Анализ сходимости



3. Из условий первого порядка для выпуклой функции $\nabla \varphi(y) = \nabla f(y) - \nabla f(x) = 0$, мы можем заключить, что для любого x , минимум функции $\varphi(y)$ находится в точке $y = x$. Следовательно:

$$\varphi(x) \leq \varphi\left(y - \frac{1}{L}\nabla\varphi(y)\right) \leq \varphi(y) - \frac{1}{2L}\|\nabla\varphi(y)\|_2^2$$

4. Теперь, подставим $\varphi(y) = f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle$:

$$f(x) - \langle \nabla f(x), x \rangle \leq f(y) - \langle \nabla f(x), y \rangle - \frac{1}{2L}\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2$$

$$f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq f(y)$$

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\|_2^2 \leq 2L(f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle)$$

поменять местами x и y $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2^2 \leq 2L(f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle)$

Лемма доказана. С первого взгляда она не имеет большого геометрического смысла, но мы будем использовать ее как удобный инструмент для оценки разницы между градиентами.



i Theorem

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема на \mathbb{R}^n . Тогда, функция f является μ -сильно выпуклой тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathbb{R}^d$ выполняется следующее:

$$\text{Strongly convex case } \mu > 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$$

$$\text{Convex case } \mu = 0 \quad \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$$

Доказательство

- Мы докажем только случай сильной выпуклости, случай выпуклости следует из него с установкой $\mu = 0$. Начнем с необходимости. Для сильно выпуклой функции

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

$$\text{sum } \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\quad \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ y + t(x - y) - y = t(x - y) &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\ &\stackrel{\langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt}{=} \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\ &\stackrel{y+t(x-y)-y=t(x-y)}{=} \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\ &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

Анализ сходимости



2. Для достаточности мы предполагаем, что $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \mu \|x - y\|^2$. Используя теорему Ньютона-Лейбница $f(x) = f(y) + \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt$:

$$\begin{aligned}
 f(x) - f(y) - \langle \nabla f(y), x - y \rangle &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)), x - y \rangle dt - \langle \nabla f(y), x - y \rangle \\
 \langle \nabla f(y), x - y \rangle = \int_0^1 \langle \nabla f(y), x - y \rangle dt &= \int_0^1 \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), (x - y) \rangle dt \\
 y + t(x - y) - y = t(x - y) &= \int_0^1 t^{-1} \langle \nabla f(y + t(x - y)) - \nabla f(y), t(x - y) \rangle dt \\
 &\geq \int_0^1 t^{-1} \mu \|t(x - y)\|^2 dt = \mu \|x - y\|^2 \int_0^1 t dt = \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем критерий сильной выпуклости, удовлетворяющий

$$f(x) \geq f(y) + \langle \nabla f(y), x - y \rangle + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \text{ или, эквивалентно:}$$

$$\text{поменять местами } x \text{ и } y \quad - \langle \nabla f(x), x - y \rangle \leq - \left(f(x) - f(y) + \frac{\mu}{2} \|x - y\|_2^2 \right)$$

Проксимальный метод градиента. Выпуклый случай

Сходимость

Theorem

Рассмотрим проксимальный метод градиента

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Для критерия $\varphi(x) = f(x) + r(x)$, мы предполагаем:

- f выпукла, дифференцируема, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, и ∇f является липшицевой с константой $L > 0$.
- r выпукла, и $\text{prox}_{\alpha r}(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} [\alpha r(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|_2^2]$ может быть вычислен.

Проксимальный градиентный спуск с фиксированным шагом $\alpha = 1/L$ удовлетворяет

$$\varphi(x_k) - \varphi^* \leq \frac{L\|x_0 - x^*\|^2}{2k},$$

Проксимальный градиентный спуск имеет скорость сходимости $O(1/k)$ или $O(1/\varepsilon)$. Это соответствует скорости градиентного спуска! (Но помните о стоимости проксимальной операции)

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha G_\alpha(x_k).$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha G_\alpha(x_k).$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x :

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).\end{aligned}$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x :

гладкость $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|_2^2$

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).\end{aligned}$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x :

гладкость $f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|_2^2$

выпуклость $f(x) \geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle$

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).\end{aligned}$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x :

$$\text{гладкость } f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|_2^2$$

$$\begin{aligned}\text{выпуклость } f(x) &\geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \\&\leq f(x) - \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2\end{aligned}$$

Анализ сходимости



Доказательство

1. Введем **градиентное отображение**, обозначаемое как $G_\alpha(x)$, действующее как “градиентный объект”:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \\x_{k+1} &= x_k - \alpha G_\alpha(x_k).\end{aligned}$$

где $G_\alpha(x)$ является:

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} (x - \text{prox}_{\alpha r}(x - \alpha \nabla f(x)))$$

Очевидно, что $G_\alpha(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x оптimalен. Следовательно, G_α аналогичен ∇f . Если x локально оптimalен, то $G_\alpha(x) = 0$ даже для невыпуклой f . Это демонстрирует, что проксимальный градиентный метод эффективно объединяет градиентный спуск на f с проксимальным оператором r , позволяя ему эффективно обрабатывать недифференцируемые компоненты.

2. Мы будем использовать гладкость и выпуклость f для некоторой произвольной точки x :

$$\text{гладкость } f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|_2^2$$

$$\begin{aligned}\text{выпуклость } f(x) &\geq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle \\&\leq f(x) - \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\&\leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2\end{aligned}$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \quad \Leftrightarrow \quad x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

Так как $x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k)$ $\Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } x_{k+1} - x_k &= -\alpha G_\alpha(x_k) & \Rightarrow & \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\ &&& G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1}) \end{aligned}$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } x_{k+1} - x_k &= -\alpha G_\alpha(x_k) & \Rightarrow \quad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) &\in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\ && G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) &\in \partial r(x_{k+1}) \end{aligned}$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } x_{k+1} - x_k &= -\alpha G_\alpha(x_k) & \Rightarrow \quad \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) &\in \partial \alpha r(x_{k+1}) \\ && G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) &\in \partial r(x_{k+1}) \end{aligned}$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

Так как $x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k)$ $\Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$\langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial r(x_{k+1})$$

Так как $x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k)$ $\Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$\langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial \alpha r(x_{k+1})$$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$\langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial r(x_{k+1})$$

$$\text{Так как } x_{k+1} - x_k = -\alpha G_\alpha(x_k) \Rightarrow \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

$$G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1})$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$\langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$f(x_{k+1}) \leq f(x) + r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



3. Теперь мы будем использовать свойство проксимального оператора, которое было доказано ранее:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) \Leftrightarrow x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \partial r(x_{k+1})$$

$$\begin{aligned} \text{Так как } x_{k+1} - x_k &= -\alpha G_\alpha(x_k) & \Rightarrow & \alpha G_\alpha(x_k) - \alpha \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1}) \\ &&& G_\alpha(x_k) - \nabla f(x_k) \in \partial r(x_{k+1}) \end{aligned}$$

4. Из определения субградиента выпуклой функции r для любой точки x :

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle g, x - x_{k+1} \rangle, \quad g \in \partial r(x_{k+1})$$

подставить конкретный субградиент

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k) - \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$r(x) \geq r(x_{k+1}) + \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle - \langle \nabla f(x), x - x_{k+1} \rangle$$

$$\langle \nabla f(x), x_{k+1} - x \rangle \leq r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle$$

5. Учитывая приведённую выше оценку, мы возвращаемся к гладкости и выпуклости:

$$f(x_{k+1}) \leq f(x) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$f(x_{k+1}) \leq f(x) + r(x) - r(x_{k+1}) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_{k+1} \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$f(x_{k+1}) + r(x_{k+1}) \leq f(x) + r(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k + \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\begin{aligned}\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\ \varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2\end{aligned}$$

Анализ сходимости



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\begin{aligned}\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\ \varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2\end{aligned}$$

$$\alpha \leq \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \leq -\frac{\alpha}{2}$$

Анализ сходимости



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\alpha \leq \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \leq -\frac{\alpha}{2} \quad \varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



6. Используя $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ мы можем доказать очень полезное неравенство, которое позволит нам продемонстрировать монотонное убывание итерации:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) - \langle G_\alpha(x_k), x - x_k \rangle - \langle G_\alpha(x_k), \alpha G_\alpha(x_k) \rangle + \frac{\alpha^2 L}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle + \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\alpha \leq \frac{1}{L} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} (\alpha L - 2) \leq -\frac{\alpha}{2} \quad \varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

7. Теперь легко проверить, что когда $x = x_k$ мы получаем монотонное убывание для проксимального градиентного метода:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x_k) - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости ⚡⚡⚡⚡⚡

8. Когда $x = x^*$:

Анализ сходимости



8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



8. Когда $x = x^*$:

$$\varphi(x_{k+1}) \leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) \leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2$$

Анализ сходимости



8. Когда $x = x^*$:

$$\begin{aligned}\varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\ \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2]\end{aligned}$$

8. Когда $x = x^*$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2]
 \end{aligned}$$

8. Когда $x = x^*$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [-\|x_k - x^* - \alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2]
 \end{aligned}$$

8. Когда $x = x^*$:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x_{k+1}) &\leq \varphi(x^*) + \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 \varphi(x_{k+1}) - \varphi(x^*) &\leq \langle G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|G_\alpha(x_k)\|_2^2 \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [2\langle \alpha G_\alpha(x_k), x_k - x^* \rangle - \|\alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [-\|x_k - x^* - \alpha G_\alpha(x_k)\|_2^2 + \|x_k - x^*\|_2^2] \\
 &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_k - x^*\|_2^2 - \|x_{k+1} - x^*\|_2^2]
 \end{aligned}$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2]$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) = k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1})$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) &= k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1})\end{aligned}$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) &= k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}\end{aligned}$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2\end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) &= k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}\end{aligned}$$

Анализ сходимости



9. Теперь мы запишем приведенное выше ограничение для всех итераций $i \in 0, k - 1$ и суммируем их:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] &\leq \frac{1}{2\alpha} [\|x_0 - x^*\|_2^2 - \|x_k - x^*\|_2^2] \\ &\leq \frac{1}{2\alpha} \|x_0 - x^*\|_2^2 \end{aligned}$$

10. Поскольку $\varphi(x_k)$ является убывающей последовательностью, то:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_k) &= k\varphi(x_k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi(x_{i+1}) \\ \varphi(x_k) - \varphi(x^*) &\leq \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} [\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x^*)] \leq \frac{\|x_0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \end{aligned}$$

Что является стандартной оценкой $\frac{L\|x_0 - x^*\|_2^2}{2k}$ с $\alpha = \frac{1}{L}$, или, скоростью $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ для гладких выпуклых задач с градиентным спуском!

Проксимальный градиентный метод. Сильно выпуклый случай

Сходимость

Theorem

Рассмотрим проксимальный градиентный метод

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(x_k - \alpha \nabla f(x_k))$$

Для критерия $\varphi(x) = f(x) + r(x)$, мы предполагаем:

- f является μ -сильно выпуклой, дифференцируемой, $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, и ∇f является липшицевой с константой $L > 0$.
- r выпукла, и $\text{prox}_{\alpha r}(x_k) = \arg \min_{x \in \mathbb{R}^n} [\alpha r(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|_2^2]$ может быть вычислен.

Проксимальный градиентный спуск с фиксированным шагом $\alpha \leq 1/L$ удовлетворяет

$$\|x_k - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu)^k \|x_0 - x^*\|_2^2$$

Это точно соответствует скорости сходимости градиентного спуска. Обратите внимание, что исходная задача даже негладкая!

Доказательство

1. Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 = \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2$$

лемма о стационарной точке $= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2$



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
 \text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
 \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
 \end{aligned}$$



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\ \text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\ \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\ &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2\end{aligned}$$

- Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
 \text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
 \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
 \end{aligned}$$

- Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:

гладкость $\|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 \leq 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)$



Доказательство

- Учитывая расстояние до решения и используя лемму о стационарной точке:

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - x^*\|_2^2 \\
 \text{лемма о стационарной точке} &= \|\text{prox}_{\alpha f}(x_k - \alpha \nabla f(x_k)) - \text{prox}_{\alpha f}(x^* - \alpha \nabla f(x^*))\|_2^2 \\
 \text{нерастяжимость} &\leq \|x_k - \alpha \nabla f(x_k) - x^* + \alpha \nabla f(x^*)\|_2^2 \\
 &= \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \alpha^2 \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2
 \end{aligned}$$

- Теперь мы используем гладкость из анализа сходимости и сильную выпуклость:

$$\begin{aligned}
 \text{гладкость } \|\nabla f(x_k) - \nabla f(x^*)\|_2^2 &\leq 2L(f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\
 \text{сильная выпуклость } -\langle \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle &\leq -\left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2}\|x_k - x^*\|_2^2\right) - \\
 &\quad -\langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle
 \end{aligned}$$

Анализ сходимости ⚙️ 💎

3. Подставим:

Анализ сходимости ⚙️ 💎

3. Подставим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &+ \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$

Анализ сходимости ⚙️ 💎

3. Подставим:

$$\begin{aligned}\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\ &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\ &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)\end{aligned}$$



3. Подставим:

$$\begin{aligned}
 \|x_{k+1} - x^*\|_2^2 &\leq \|x_k - x^*\|^2 - 2\alpha \left(f(x_k) - f(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_k - x^*\|_2^2 \right) - 2\alpha \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle + \\
 &\quad + \alpha^2 2L (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle) \\
 &\leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2 + 2\alpha(\alpha L - 1) (f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle)
 \end{aligned}$$

4. Из выпуклости f : $f(x_k) - f(x^*) - \langle \nabla f(x^*), x_k - x^* \rangle \geq 0$. Следовательно, если мы используем $\alpha \leq \frac{1}{L}$:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2^2 \leq (1 - \alpha\mu) \|x_k - x^*\|^2,$$

что и означает линейную сходимость метода со скоростью не хуже $1 - \frac{\mu}{L}$.

Ускоренный проксимальный градиент – выпуклая функция

Ускоренный проксимальный градиентный метод

Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ является **выпуклой и L -гладкой**, $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ является правильной, замкнутой и выпуклой, $\varphi(x) = f(x) + r(x)$ имеет минимизатор x^* , и предположим, что $\text{prox}_{\alpha r}$ легко вычисляется для $\alpha > 0$. С любым $x_0 \in \text{dom } r$ определим последовательность

$$\begin{aligned} t_0 &= 1, & y_0 &= x_0, \\ x_k &= \text{prox}_{\frac{1}{L}r}(y_{k-1} - \frac{1}{L}\nabla f(y_{k-1})), \\ t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\ y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}), & k \geq 1. \end{aligned}$$

Для каждого $k \geq 1$

$$\boxed{\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \leq \frac{2L \|x_0 - x^*\|_2^2}{(k+1)^2}}$$

Ускоренный проксимальный градиент – μ -сильно выпуклая функция

Ускоренный проксимальный градиентный метод

Добавим, что f является **μ -сильно выпуклой** ($\mu > 0$).

Установим шаг $\alpha = \frac{1}{L}$ и фиксированный параметр импульса

$$\beta = \frac{\sqrt{L/\mu} - 1}{\sqrt{L/\mu} + 1}.$$

Генерируем итерации для $k \geq 0$ (возьмем $x_{-1} = x_0$):

$$y_k = x_k + \beta(x_k - x_{k-1}),$$
$$x_{k+1} = \text{prox}_{\alpha r}(y_k - \alpha \nabla f(y_k)).$$

Для каждого $k \geq 0$

$$\varphi(x_k) - \varphi(x^*) \leq \left(1 - \sqrt{\frac{\mu}{L}}\right)^k \left(\varphi(x_0) - \varphi(x^*) + \frac{\mu}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2\right)$$

Численные эксперименты

Квадратичный случай

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
m=1000, n=100, $\lambda=0$, $\mu=0$, $L=10$. Optimal sparsity: 0.0e+00



Рис. 2: Гладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость, отсутствие сходимости в области, нет разницы между методом субградиента и проксимальным методом.

Квадратичный случай

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
m=1000, n=100, $\lambda=1$, $\mu=0$, L=10. Optimal sparsity: 2.3e-01



Рис. 3: Негладкий выпуклый случай. Сублинейная сходимость. В начале метод субградиента и проксимальный метод близки.

Квадратичный случай

$$f(x) = \frac{1}{2m} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \lambda \left(\frac{1}{m} A^T A \right) \in [\mu; L].$$

Linear Least Squares with ℓ_1 Regularization (LASSO).
 $m=1000, n=100, \lambda=1, \mu=0, L=10$. Optimal sparsity: 2.3e-01



Рис. 4: Негладкий выпуклый случай. Если мы возьмем больше итераций, то проксимальный метод сходится с постоянным шагом, что не так для метода субградиента. Разница огромна, в то время как сложность итерации одинакова.

Бинарная логистическая регрессия

$$f(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-b_i(A_i x))) + \lambda \|x\|_1 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}, \quad A_i \in \mathbb{R}^n, \quad b_i \in \{-1, 1\}$$

Binary Logistic Regression with ℓ_1 Regularization.
 $m=300$, $n=50$, $\lambda=0.1$. Optimal sparsity: 8.6e-01

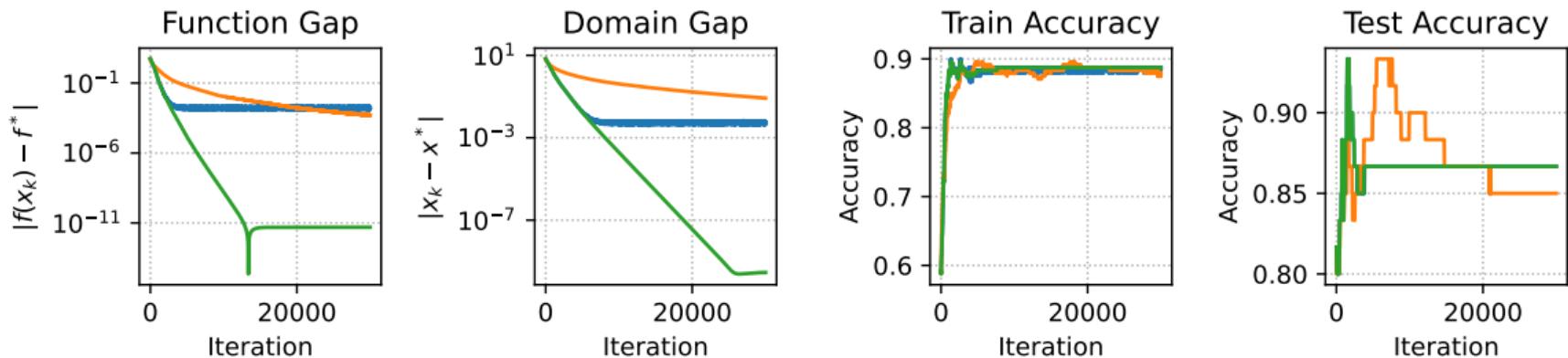


Рис. 5: Логистическая регрессия с ℓ_1 -регуляризацией

Softmax multiclass regression

Convex multiclass regression. lam=0.01.



Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- Алгоритм:

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- **Алгоритм:**

- Дано x_0 , для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v .

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- **Алгоритм:**

- Дано x_0 , для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v .

- **Сходимость:**

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- **Алгоритм:**

- Дано x_0 , для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v .

- **Сходимость:**

- Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α .

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- **Алгоритм:**

- Дано x_0 , для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v .

- **Сходимость:**

- Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α .

- **Применение:**

Пример: ISTA

Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (ISTA)

ISTA является популярным методом для решения задач оптимизации с ℓ_1 -регуляризацией, такой как Lasso. Он объединяет градиентный спуск с оператором сжатия для эффективного управления негладким ℓ_1 -штрафом.

- **Алгоритм:**

- Дано x_0 , для $k \geq 0$, повторять:

$$x_{k+1} = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(x_k - \alpha\nabla f(x_k)),$$

где $\text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(v)$ применяет оператор сжатия к каждому компоненту v .

- **Сходимость:**

- Сходится со скоростью $O(1/k)$ для подходящего шага α .

- **Применение:**

- Эффективно для восстановления разреженных сигналов, обработки изображений и compressed sensing.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- Алгоритм:

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**
 - Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**

- Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
- Для $k \geq 1$, обновляем:

$$x_k = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1} (y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})),$$

$$t_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2},$$

$$y_k = x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k} (x_k - x_{k-1}).$$

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**

- Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
- Для $k \geq 1$, обновляем:

$$x_k = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1} (y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})),$$

$$t_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2},$$

$$y_k = x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k} (x_k - x_{k-1}).$$

- **Сходимость:**

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**

- Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
- Для $k \geq 1$, обновляем:

$$x_k = \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1} (y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})),$$

$$t_k = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2},$$

$$y_k = x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k} (x_k - x_{k-1}).$$

- **Сходимость:**

- Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**

- Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
- Для $k \geq 1$, обновляем:

$$\begin{aligned}x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})), \\t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

- **Сходимость:**

- Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.

- **Применение:**

Пример: FISTA

Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm (FISTA)

FISTA улучшает сходимость ISTA, включая в неё импульсное слагаемое, вдохновленное методом Нестерова.

- **Алгоритм:**

- Инициализируем $x_0 = y_0$, $t_0 = 1$.
- Для $k \geq 1$, обновляем:

$$\begin{aligned}x_k &= \text{prox}_{\lambda\alpha\|\cdot\|_1}(y_{k-1} - \alpha\nabla f(y_{k-1})), \\t_k &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_{k-1}^2}}{2}, \\y_k &= x_k + \frac{t_{k-1} - 1}{t_k}(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

- **Сходимость:**

- Улучшает скорость сходимости до $O(1/k^2)$.

- **Применение:**

- Особенно полезен для больших задач в машинном обучении и обработке сигналов, где ℓ_1 -штраф индуцирует разреженность.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- Формулировка задачи:

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

- Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

- Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

- **Алгоритм:**

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

- Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

- **Алгоритм:**

- Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

- Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

- **Алгоритм:**

- Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.

- **Применение:**

Пример: задача восстановления матрицы (Matrix Completion)

Решение задачи Matrix Completion

Задачи matrix completion стремятся заполнить пропущенные элементы частично наблюдаемой матрицы при определенных предположениях, обычно низкого ранга. Это может быть сформулировано в виде задачи минимизации, включающую ядерную норму (сумму сингулярных значений), которая продвигает решения низкого ранга.

- **Формулировка задачи:**

$$\min_X \frac{1}{2} \|P_{\Omega}(X) - P_{\Omega}(M)\|_F^2 + \lambda \|X\|_*,$$

где P_{Ω} проецирует на наблюдаемое множество Ω , и $\|\cdot\|_*$ обозначает ядерную норму.

- **Проксимальный оператор:**

- Проксимальный оператор для ядерной нормы включает сингулярное разложение (SVD) и сжатие сингулярных значений.

- **Алгоритм:**

- Можно применять аналогичные проксимальные методы или ускоренные проксимальные методы; основной вычислительный расход приходится на выполнение SVD.

- **Применение:**

- Широко используется в рекомендательных системах, восстановлении изображений и других областях, где данные естественно представлены в виде матриц, но частично наблюдаемы.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L -гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f . Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L -гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f . Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L -гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f . Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L -гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f . Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Если разрешить численно неточный проксимальный оператор, то действительно можно решать любую негладкую задачу оптимизации. Но с теоретической точки зрения это не лучше субградиентного спуска, поскольку для решения проксимальной подзадачи используется вспомогательный метод (например, тот же субградиентный спуск).

- Проксимальный метод является общим современным фреймворком для многих численных методов. Далее развиваются ускоренные, стохастические, приближенные двойственные методы и т.д.

Summary

- Если использовать структуру задачи, можно превзойти нижние оценки для неструктурированной постановки.
- Проксимальный метод для задачи с L -гладкой выпуклой функцией f и выпуклой функцией r с вычислимым проксимальным оператором имеет ту же скорость сходимости, что и метод градиентного спуска для f . Свойства гладкости/негладкости r на сходимость не влияют.
- Кажется, что если $f = 0$, то любая негладкая задача может быть решена таким методом. Вопрос: это правда?

Если разрешить численно неточный проксимальный оператор, то действительно можно решать любую негладкую задачу оптимизации. Но с теоретической точки зрения это не лучше субградиентного спуска, поскольку для решения проксимальной подзадачи используется вспомогательный метод (например, тот же субградиентный спуск).

- Проксимальный метод является общим современным фреймворком для многих численных методов. Далее развиваются ускоренные, стохастические, приближенные двойственные методы и т.д.
- Дополнительные материалы: разбиение по проксимальному оператору, схема Дугласа—Рачфорда, задача наилучшего приближения, разбиение на три оператора.