

# Вспоминаем линейную алгебру. Скорости сходимости.

## Семинар

Оптимизация для всех! ЦУ

## Ключевые моменты лекции

# Вспоминаем линейную алгебру

- Наивный matmul  $\mathcal{O}(n^3)$ , наивный matvec  $\mathcal{O}(n^2)$

# Вспоминаем линейную алгебру

- Наивный matmul  $\mathcal{O}(n^3)$ , наивный matvec  $\mathcal{O}(n^2)$
- Все матрицы имеют SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

# Вспоминаем линейную алгебру

- Наивный matmul  $\mathcal{O}(n^3)$ , наивный matvec  $\mathcal{O}(n^2)$
- Все матрицы имеют SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

- $\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(DABC) = \text{tr}(CDAB) = \text{tr}(BCDA)$  для любых матриц ABCD, если умножение определено.

# Вспоминаем линейную алгебру

- Наивный matmul  $\mathcal{O}(n^3)$ , наивный matvec  $\mathcal{O}(n^2)$
- Все матрицы имеют SVD

$$A = U\Sigma V^T$$

- $\text{tr}(ABCD) = \text{tr}(DABC) = \text{tr}(CDAB) = \text{tr}(BCDA)$  для любых матриц ABCD, если умножение определено.
- $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$

# Скорости сходимости

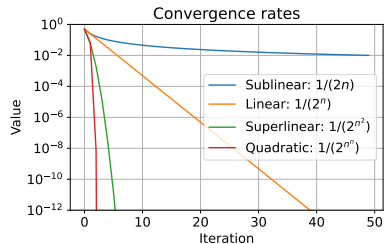


Рис. 1: Иллюстрация различных скоростей сходимости

- Линейная (геометрическая, экспоненциальная) сходимость:

$$r_k \leq Cq^k, \quad 0 < q < 1, C > 0$$

# Скорости сходимости

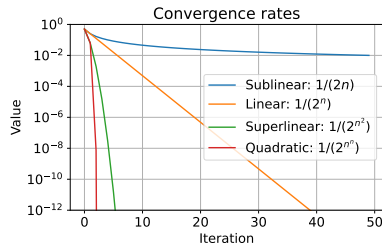


Рис. 1: Иллюстрация различных скоростей сходимости

- Линейная (геометрическая, экспоненциальная) сходимость:

$$r_k \leq Cq^k, \quad 0 < q < 1, C > 0$$

- Любая сходящаяся последовательность, которая медленнее (быстрее) любой линейно сходящейся последовательности, имеет сублинейную (сверхлинейную) сходимоть



# Скорости сходимости

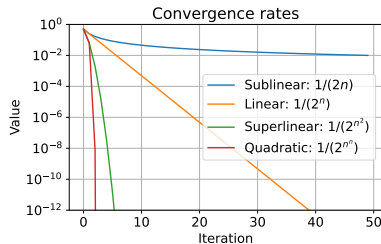


Рис. 1: Иллюстрация различных скоростей сходимости

- Линейная (геометрическая, экспоненциальная) сходимостъ:

$$r_k \leq Cq^k, \quad 0 < q < 1, C > 0$$

- Любая сходящаяся последовательность, которая медленнее (быстрее) любой линейно сходящейся последовательности, имеет сублинейную (сверхлинейную) сходимостъ
- Инфимум всех  $0 \leq q < 1$  таких, что  $r_k \leq Cq^k$  называется **константой линейной сходимости**, и  $q^k$  называется **скоростъ сходимости**.

## Тест корней

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k r_k^{1/k}$$

- Если  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .

## Тест корней

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k r_k^{1/k}$$

- Если  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.

# Тест корней

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k r_k^{1/k}$$

- Если  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.

## Тест корней

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность неотрицательных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k r_k^{1/k}$$

- Если  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.
- Случай  $q > 1$  невозможен.

## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .

## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.

## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q$  не существует, но  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой, не превышающей  $q$ .



## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q$  не существует, но  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой, не превышающей  $q$ .
- Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.

## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q$  не существует, но  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой, не превышающей  $q$ .
- Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.
- Случай  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$  невозможен.

## Тест отношений

Пусть  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  - последовательность строго положительных чисел, сходящаяся к нулю, и пусть

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_{k+1}}{r_k}$$

- Если существует  $q$  и  $0 \leq q < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой  $q$ .
- В частности, если  $q = 0$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сверхлинейную сходимость.
- Если  $q$  не существует, но  $q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет линейную сходимость с константой, не превышающей  $q$ .
- Если  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} = 1$ , то  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$  имеет сублинейную сходимость.
- Случай  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} > 1$  невозможен.
- В остальных случаях (т.е., когда  $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_k \frac{r_{k+1}}{r_k} < 1 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sup_k \frac{r_{k+1}}{r_k}$ ) мы не можем сделать никаких конкретных утверждений о скорости сходимости  $\{r_k\}_{k=m}^{\infty}$ .

# Задачи

## Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Задача 1. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения
4. Результаты первых двух вариантов не будут одинаковыми.

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.



## Задача 2. Связь между Фробениусовой нормой и сингулярными значениями.

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , и пусть  $q := \min\{m, n\}$ . Докажите, что

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2(A),$$

где  $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_q(A) \geq 0$  - сингулярные значения матрицы  $A$ . Подсказка: используйте связь между Фробениусовой нормой и скалярным произведением и SVD.

### Задача 3. Найдите свое скалярное произведение.

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle,$$

где  $S = \sum_{i=1}^n a_i a_i^T$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\det(S) \neq 0$

## Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$

## Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$

## Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$
- $r_k = \frac{1}{k^{10}}$

## Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$
- $r_k = \frac{1}{k^{10}}$
- $r_k = 0.707^k$

## Задача 4. Простые скорости сходимости.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующих последовательностей:

- $r_k = \frac{1}{3^k}$
- $r_k = \frac{4}{3^k}$
- $r_k = \frac{1}{k^{10}}$
- $r_k = 0.707^k$
- $r_k = 0.707^{2^k}$

## Задача 5. Один тест проще, чем другой.

Определите сходимость (и её скорость) или расходимость следующей последовательности:

$$r_k = \frac{1}{k^k}$$



## Задача 6. Сверхлинейно, но не квадратично.

Покажите, что следующая последовательность не имеет квадратичной сходимости.

$$r_k = \frac{1}{3^{k^2}}$$

А где это нужно в реальной жизни?

## LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models (arXiv:2106.09685)

Поскольку современные LLM слишком большие, чтобы влезть в память среднего пользователя, мы используем некоторые трюки, чтобы сделать их потребление памяти меньше. Одним из наиболее популярных трюков является LoRA (Low-Rank Adaptation of Large Language Models).

Предположим, у нас есть матрица  $W \in \mathbb{R}^{d \times k}$  и мы хотим выполнить следующее обновление:

$$W = W_0 + \Delta W.$$

Основная идея LoRA состоит в том, чтобы разложить обновление  $\Delta W$  на две низкоранговые матрицы:

$$W = W_0 + \Delta W = W_0 + BA, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times k}, \\ \text{rank}(A) = \text{rank}(B) = r \ll \min\{d, k\}.$$

Проверьте  ноутбук для примера реализации LoRA.

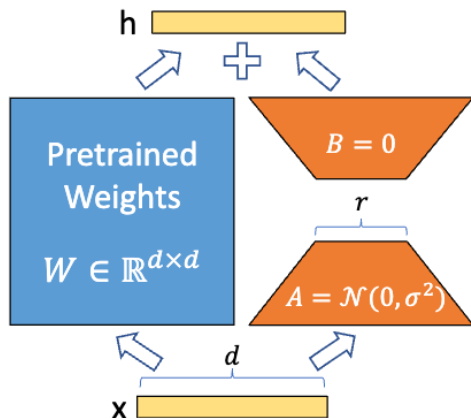


Рис. 2: Иллюстрация LoRA