

# Условия оптимальности. Функция Лагранжа. Условия Каруша-Куна-Таккера

Даня Меркулов

В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному алгоритму.

—*Предисловие к “Аналитической механике”*



Рисунок 1: Жозеф Луи Лагранж

# 1 Условия оптимальности

## 1.1 Теория

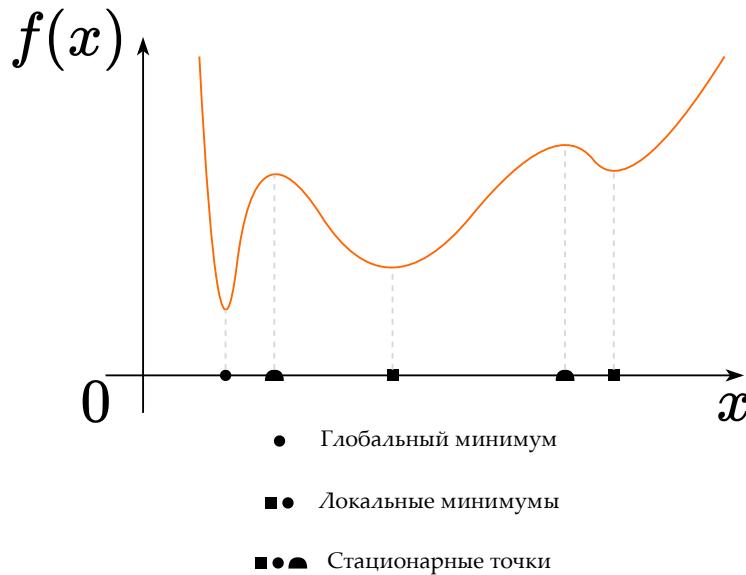


Рисунок 2: Иллюстрация различных стационарных (критических) точек

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in S}$$

Множество  $S$  обычно называется **допустимым множеством** (или **бюджетным множеством**).

Мы говорим, что задача имеет решение, если бюджетное множество, в котором достигается минимум или инфимум данной функции, не пусто:  $x^* \in S$ .

- Точка  $x^*$  является **глобальным минимумом**, если  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in S$ .
- Точка  $x^*$  является **локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) \leq f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$ .
- Точка  $x^*$  является **строгим локальным минимумом**, если существует окрестность  $N$  точки  $x^*$  такая, что  $f(x^*) < f(x)$  для всех  $x \in N \cap S$  с  $x \neq x^*$ .
- Мы называем точку  $x^*$  **стационарной точкой** (или **критической точкой**), если  $\nabla f(x^*) = 0$ . Любой локальный минимум дифференцируемой функции должен быть стационарной точкой.

## 1.2 Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях

### Theorem

Пусть  $S \subset \mathbb{R}^n$  - компактное множество и  $f(x)$  - непрерывная функция на  $S$ . Тогда точка глобального минимума функции  $f(x)$  на  $S$  существует.

# GOOD NEWS EVERYONE!



Рисунок 3: Многие практические задачи теоретически разрешимы

## ■ Теорема Тейлора

Пусть  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно дифференцируемая функция и  $p \in \mathbb{R}^n$ . Тогда мы имеем:

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x + tp)^T p \quad \text{для некоторого } t \in (0, 1)$$

Кроме того, если  $f$  дважды непрерывно дифференцируема, то мы имеем:

$$\nabla f(x + p) = \nabla f(x) + \int_0^1 \nabla^2 f(x + tp)p dt$$

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x + tp)p$$

для некоторого  $t \in (0, 1)$ .

## 2 Безусловная оптимизация

### 2.1 Необходимые условия

#### ■ Необходимое условие оптимальности первого порядка

Если  $x^*$  - локальный минимум и  $f$  непрерывно дифференцируема в открытой окрестности, то

$$\nabla f(x^*) = 0$$

#### Доказательство

Предположим от противного, что  $\nabla f(x^*) \neq 0$ . Определим вектор  $p = -\nabla f(x^*)$  и заметим, что

$$p^T \nabla f(x^*) = -\|\nabla f(x^*)\|^2 < 0$$

Поскольку  $\nabla f$  непрерывна в окрестности  $x^*$ , существует скаляр  $T > 0$  такой, что

$$p^T \nabla f(x^* + tp) < 0, \text{ для всех } t \in [0, T]$$

Для любого  $\bar{t} \in (0, T]$ , мы имеем по теореме Тейлора, что

$$f(x^* + \bar{t}p) = f(x^*) + \bar{t} p^T \nabla f(x^* + tp), \text{ для некоторого } t \in (0, \bar{t})$$

Следовательно,  $f(x^* + \bar{t}p) < f(x^*)$  для всех  $\bar{t} \in (0, T]$ . Мы нашли направление из  $x^*$  вдоль которого  $f$  убывает, поэтому  $x^*$  не является локальным минимумом, что приводит к противоречию.

## 2.2 Достаточные условия

### Достаточные условия оптимальности второго порядка

Пусть  $\nabla^2 f$  непрерывна в открытой окрестности  $x^*$ , и выполнено

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \nabla^2 f(x^*) \succ 0.$$

Тогда  $x^*$  является строгим локальным минимумом функции  $f$ .

#### Доказательство

Поскольку гессиан непрерывен и положительно определен в  $x^*$ , мы можем выбрать радиус  $r > 0$  такой, что  $\nabla^2 f(x)$  остается положительно определенным для всех  $x$  в открытом шаре  $B = \{z \mid \|z - x^*\| < r\}$ . Возьмем любой ненулевой вектор  $p$  с  $\|p\| < r$ , тогда  $x^* + p \in B$  и поэтому

$$\begin{aligned} f(x^* + p) &= f(x^*) + p^T \nabla f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z)p \\ &= f(x^*) + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(z)p \end{aligned}$$

где  $z = x^* + tp$  для некоторого  $t \in (0, 1)$ . Поскольку  $z \in B$ , то  $p^T \nabla^2 f(z)p > 0$ , и поэтому  $f(x^* + p) > f(x^*)$ , что доказывает утверждение.

## 2.3 Контрпример Пеано

Заметим, что если  $\nabla f(x^*) = 0$ ,  $\nabla^2 f(x^*) \succeq 0$  (гессиан положительно полуопределен), то мы не можем быть уверены, что  $x^*$  является локальным минимумом.

$$f(x, y) = (2x^2 - y)(x^2 - y)$$

Хотя поверхность не имеет локального минимума в начале координат, ее пересечение с любой вертикальной плоскостью, проходящей через начало координат (плоскость с уравнением  $y = tx$  или  $x = 0$ ) является кривой, которая имеет локальный минимум в начале координат. Другими словами, если точка начинает движение в начале координат  $(0, 0)$  вдоль любой прямой линии, то значение  $(2x^2 - y)(x^2 - y)$  будет увеличиваться в начале движения. Тем не менее,  $(0, 0)$  не является локальным минимумом функции, потому что движение вдоль параболы, такой как  $y = \sqrt{2}x^2$ , приведет к уменьшению значения функции.

## Non-convex PL function



### 3 Условная оптимизация

#### 3.1 Общее условие локальной оптимальности первого порядка

Вектор  $d \in \mathbb{R}^n$  является допустимым направлением в точке  $x^* \in S \subseteq \mathbb{R}^n$ , если малые шаги вдоль  $d$  не выводят нас за пределы  $S$ .

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Предположим, что  $x^* \in S$  является точкой локального минимума для  $f$  над  $S$ , и предположим далее, что  $f$  непрерывно дифференцируема в окрестности  $x^*$ .

1. Тогда для любого допустимого направления  $d \in \mathbb{R}^n$  в  $x^*$  выполняется  $\nabla f(x^*)^\top d \geq 0$ .
2. Если, кроме того,  $S$  выпукло, то

$$\nabla f(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0, \forall x \in S.$$

$$f(x) = x_1 + x_2 \rightarrow \min_{x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2}$$



Рисунок 4: Общее условие локальной оптимальности первого порядка

### 3.2 Выпуклый случай

Следует отметить, что в **выпуклом** случае (то есть при выпуклых  $f$  и  $S$ ) необходимое условие становится достаточным.

Еще один важный результат для выпуклого случая звучит следующим образом: если  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  — выпуклая функция, определённая на выпуклом множестве  $S$ , то:

- Любой локальный минимум является глобальным.
- Множество локальных минимумов  $S^*$  выпукло.
- Если  $f(x)$  — строго или сильно выпуклая функция, то  $S^*$  содержит только одну точку:  $S^* = \{x^*\}$ .

### 3.3 Задачи с ограничениями-равенствами

В задачах без ограничений всё довольно интуитивно. В этом разделе мы добавим одно ограничение-равенство, то есть:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } h(x) &= 0 \end{aligned}$$

Мы попробуем проиллюстрировать подход к решению этой задачи через простой пример с  $f(x) = x_1 + x_2$  и  $h(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2$ .

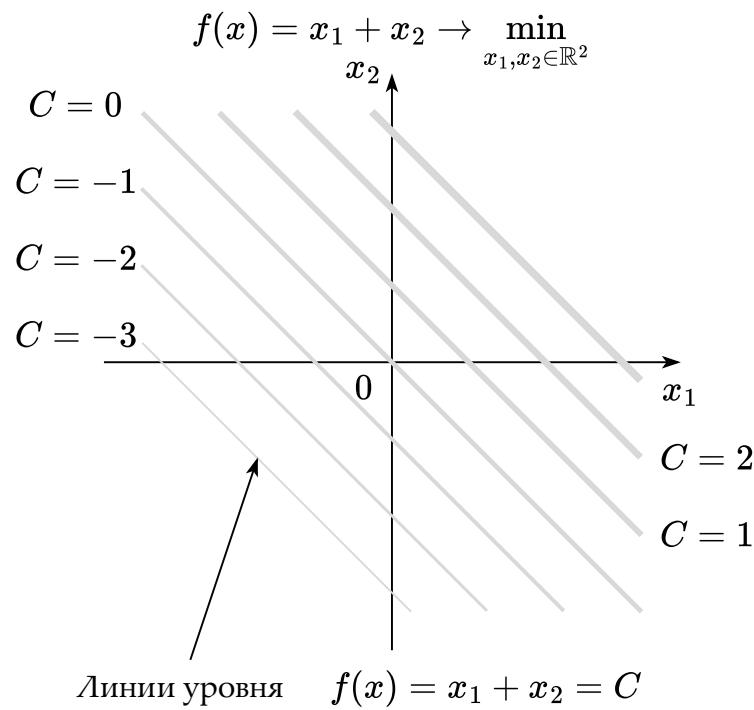


Рисунок 5: Иллюстрация ККТ

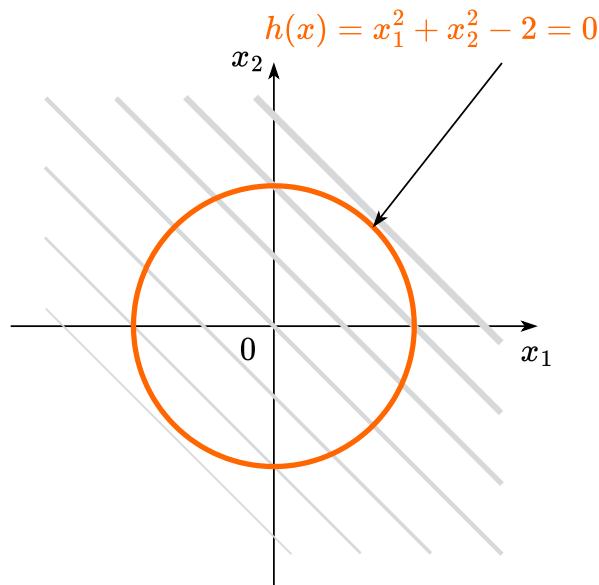


Рисунок 6: Иллюстрация ККТ

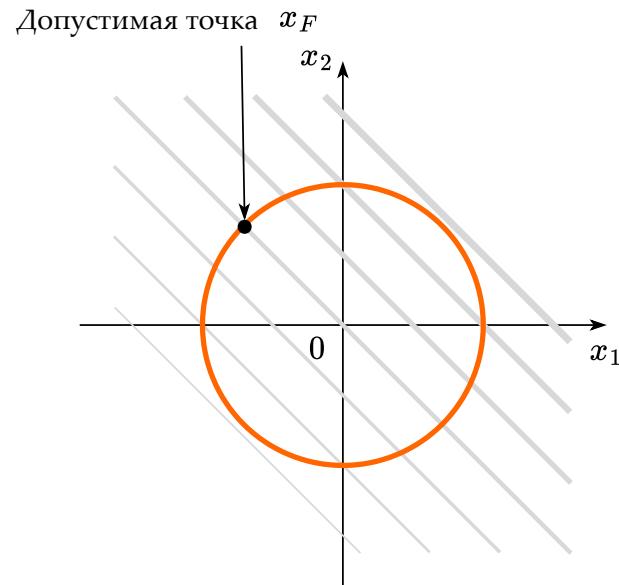


Рисунок 7: Иллюстрация ККТ

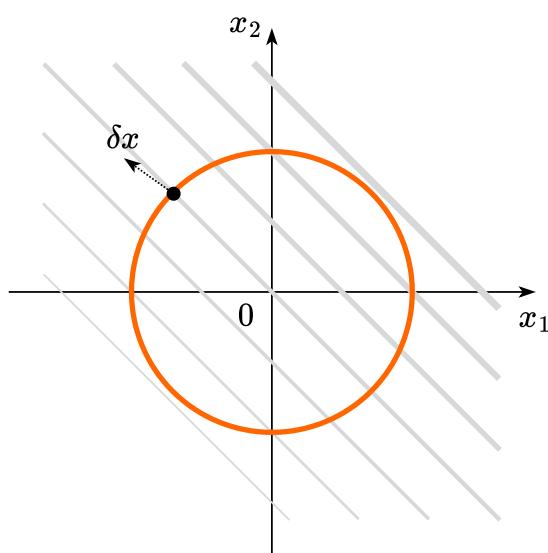


Рисунок 8: Иллюстрация ККТ



Рисунок 9: Иллюстрация ККТ

Мы хотим:  $f(x_F + \delta x) \leq f(x_F)$ 

Рисунок 10: Иллюстрация ККТ

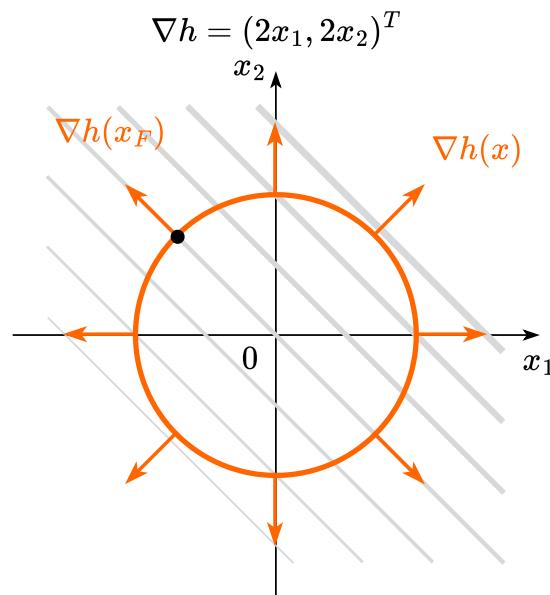


Рисунок 11: Иллюстрация ККТ

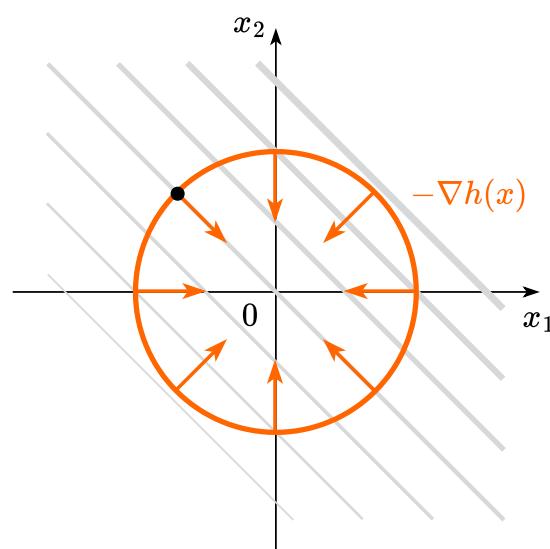


Рисунок 12: Иллюстрация ККТ

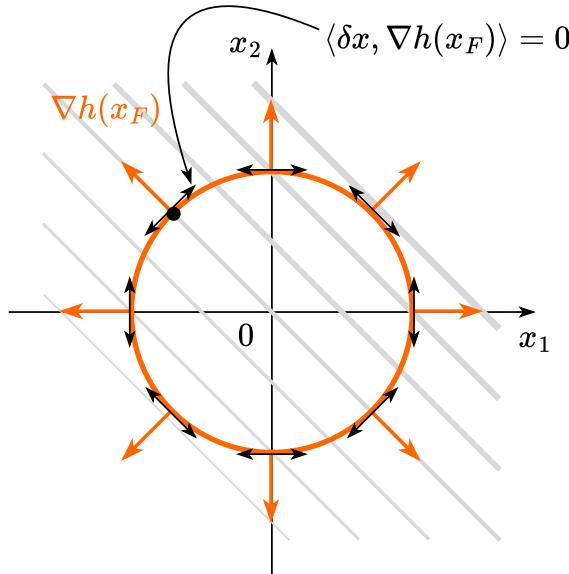


Рисунок 13: Иллюстрация ККТ

В общем случае, чтобы двигаться от  $x_F$  вдоль допустимого множества и уменьшать значение функции, необходимо обеспечить два условия:

$$\langle \delta x, \nabla h(x_F) \rangle = 0$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x_F) \rangle > 0$$

Предположим, что в процессе такого движения мы пришли в точку, где

$$-\nabla f(x) = \nu \nabla h(x)$$

$$\langle \delta x, -\nabla f(x) \rangle = \langle \delta x, \nu \nabla h(x) \rangle = 0$$

Тогда мы достигли такой точки допустимого множества, из которой нельзя уменьшить значение функции при допустимых малых сдвигах. Это и есть условие локального минимума в задаче с ограничением.

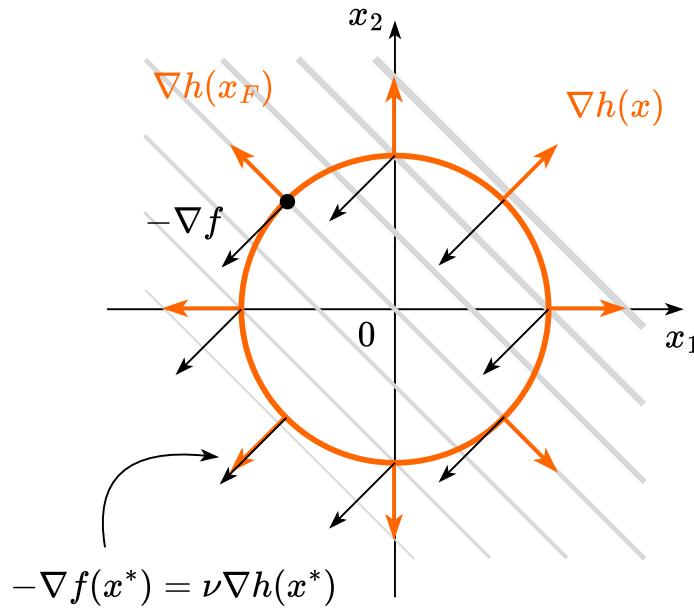


Рисунок 14: Иллюстрация ККТ

### 3.4 Лагранжиан

Давайте определим лагранжиан (для удобства):

$$L(x, \nu) = f(x) + \nu h(x)$$

Если задача *регулярная* (мы определим это понятие позже) и точка  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует  $\nu^*$ :

Необходимые условия

$\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0$  это мы уже написали выше

$\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0$  бюджетное ограничение

Важно отметить, что  $L(x^*, \nu^*) = f(x^*)$ .

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \tag{ECP}$$

$$L(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x) = f(x) + \nu^\top h(x)$$

Пусть  $f(x)$  и  $h_i(x)$  дважды дифференцируемы в точке  $x^*$  и непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности  $x^*$ . Условия локального минимума для  $x \in \mathbb{R}^n, \nu \in \mathbb{R}^p$  записываются как

Необходимые условия

$$\nabla_x L(x^*, \nu^*) = 0$$

$$\nabla_\nu L(x^*, \nu^*) = 0$$

### 3.5 Задача наименьших квадратов

#### Example

Поставим задачу оптимизации и решим ее для линейной системы  $Ax = b, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  для трех случаев (предполагая, что матрица имеет полный ранг):

- $m < n$
- $m = n$
- $m > n$

## 4 Задачи с ограничениями-неравенствами

### 4.1 Пример задачи с ограничениями-неравенствами

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

## 4.2 Задачи с ограничениями-неравенствами

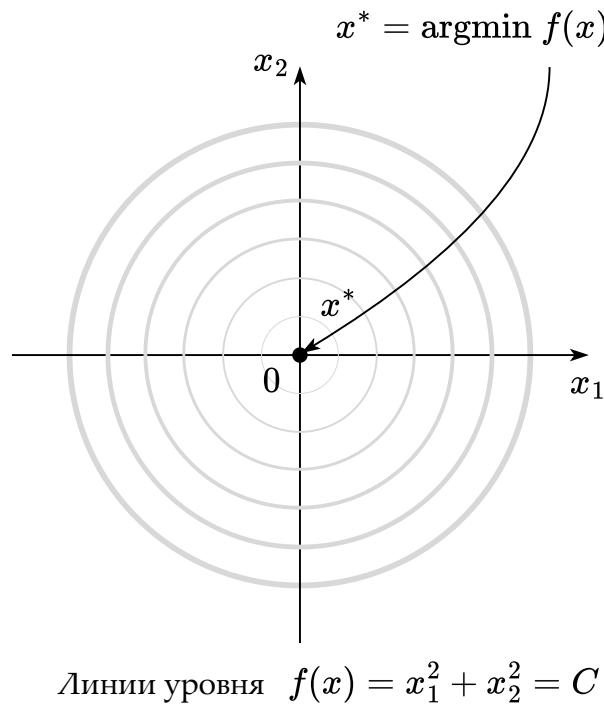


Рисунок 15: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)



Рисунок 16: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Как понять, что некоторая допустимая  
точка является локальным минимумом?



Рисунок 17: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Просто! Проверим достаточные условия  
локального экстремума

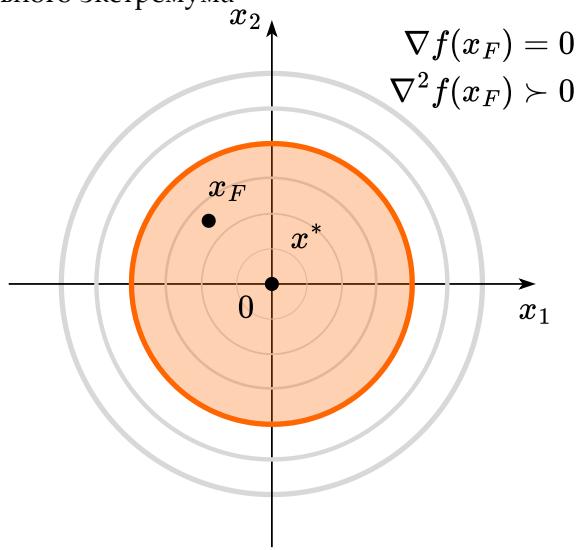


Рисунок 18: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Таким образом, если ограничения типа неравенства неактивны в условной задаче, то мы можем решать задачу без ограничений. Однако так бывает не всегда. Рассмотрим второй простой пример.

$$f(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \quad g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1$$

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

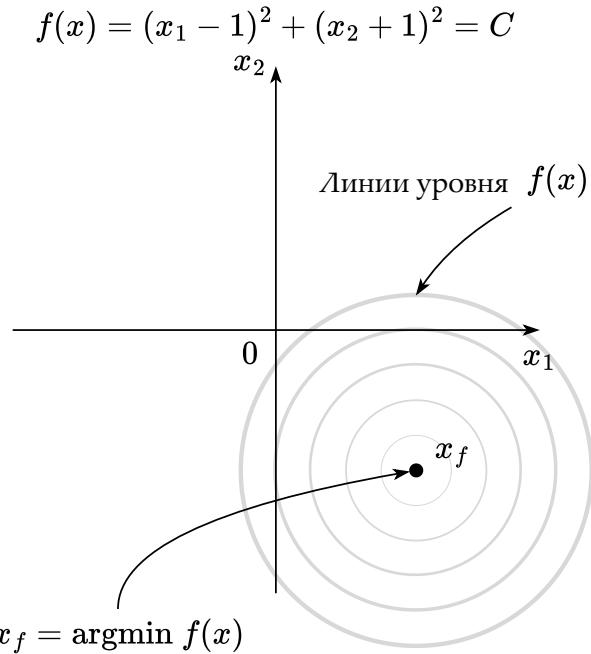


Рисунок 19: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Бюджетное множество  $g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

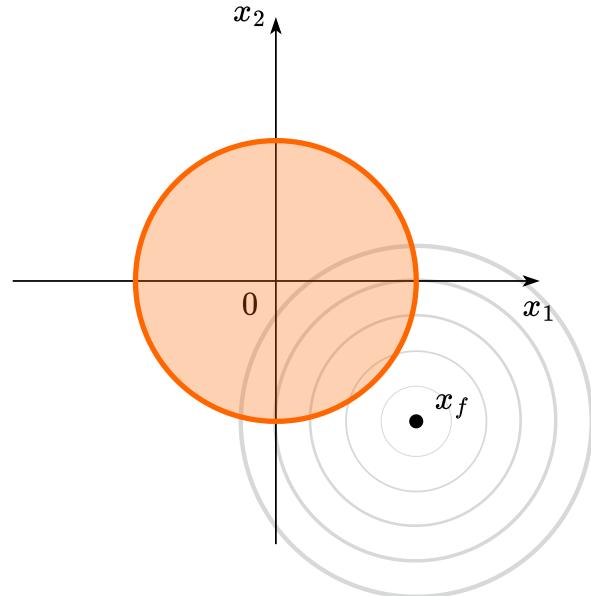


Рисунок 20: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Как понять, что некоторая допустимая  
точка является локальным минимумом?



Рисунок 21: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Не так просто! Даже градиент  
в оптимальной точке не равен нулю 😱

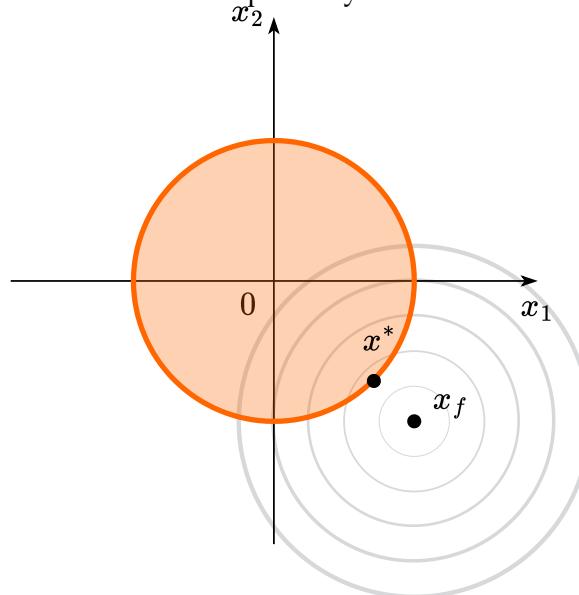


Рисунок 22: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Фактически имеем задачу  
с ограничением-равенством

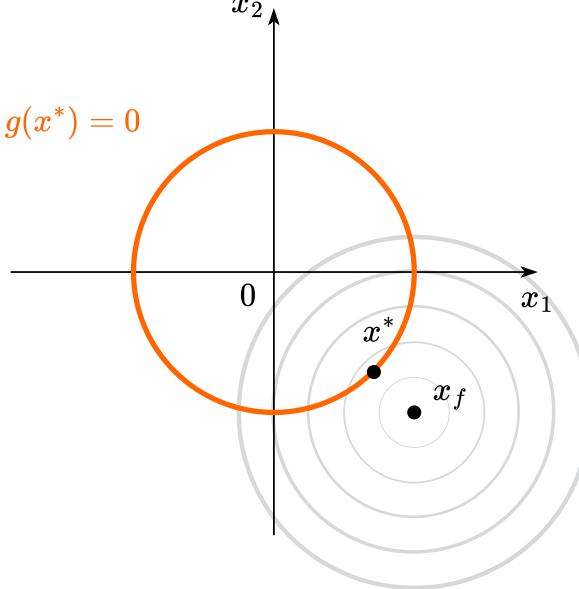


Рисунок 23: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)



Рисунок 24: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Не является локальным минимумом, т.к.  $-\nabla f(x)$  направлен внутрь бюджетного множества

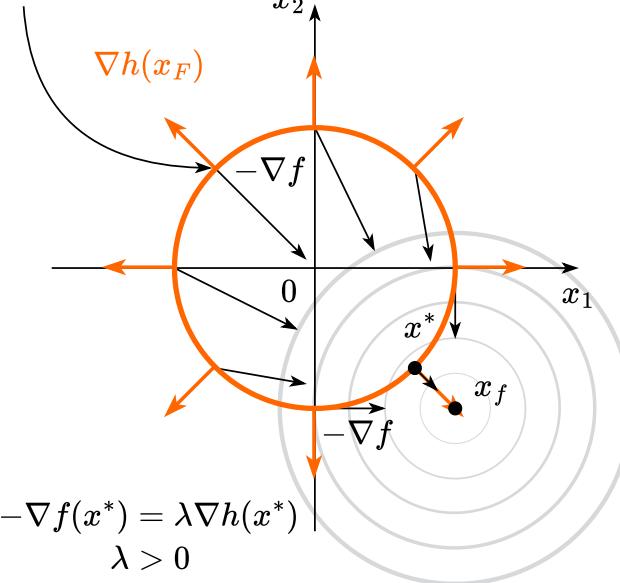


Рисунок 25: Иллюстрация ККТ (случай неравенства)

Итак, у нас есть задача:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Два возможных случая:

$g(x) \leq 0$  неактивно.  $g(x^*) < 0$

- $g(x^*) < 0$
- $\nabla f(x^*) = 0$
- $\nabla^2 f(x^*) > 0$

$g(x) \leq 0$  активно.  $g(x^*) = 0$

- $g(x^*) = 0$
- Необходимые условия:  $-\nabla f(x^*) = \lambda \nabla g(x^*)$ ,  $\lambda > 0$

### 4.3 Лагранжиан для задач с ограничениями-неравенствами

Объединяя два возможных случая, мы можем записать общие условия для задачи:

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } g(x) &\leq 0 \end{aligned}$$

Определим функцию Лагранжа:

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$$

Классические условия Каруша-Куна-Таккера для локального минимума  $x^*$ , сформулированные при некоторых условиях регулярности, можно записать следующим образом.

Если  $x^*$  является локальным минимумом для описанной выше задачи, то существует единственный множитель Лагранжа  $\lambda^*$  такой, что:

- (1)  $\nabla_x L(x^*, \lambda^*) = 0$
- (2)  $\lambda^* \geq 0$
- (3)  $\lambda^* g(x^*) = 0$
- (4)  $g(x^*) \leq 0$

#### 4.4 Общая формулировка

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Данная формулировка является общей задачей математического программирования.

Решение включает в себя построение лагранжиана:

$$L(x, \lambda, \nu) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(x)$$

#### 4.5 Необходимые условия

Пусть  $x^*, (\lambda^*, \nu^*)$  является решением задачи математического программирования с нулевым зазором двойственности (оптимальное значение для исходной задачи  $p^*$  равно оптимальному значению для двойственной задачи  $d^*$ ). Пусть также функции  $f_0, f_i, h_i$  дифференцируемы.

- $\nabla_x L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\nabla_\nu L(x^*, \lambda^*, \nu^*) = 0$
- $\lambda_i^* \geq 0, i = 1, \dots, m$
- $\lambda_i^* f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m$
- $f_i(x^*) \leq 0, i = 1, \dots, m$

#### 4.6 Некоторые условия регулярности

Эти условия необходимы для того, чтобы условия Каруша-Куна-Таккера стали необходимыми условиями. Некоторые из них даже превращают необходимые условия в достаточные (например, условие Слейтера).

- **Условие Слейтера.** Если для выпуклой задачи (при минимизации, с выпуклыми  $f_0, f_i$  и аффинными  $h_i$ ) существует точка  $x$  такая, что  $h(x) = 0$  и  $f_i(x) < 0$  (существует строго допустимая точка), то зазор двойственности равен нулю, и условия Каруша-Куна-Таккера становятся необходимыми и достаточными.
- **Условие линейной квалификации ограничений.** Если  $f_i$  и  $h_i$  являются аффинными функциями, то никаких других условий не требуется.

- **Условие линейной независимости ограничений.** Градиенты активных ограничений неравенства и градиенты ограничений равенства линейно независимы в точке  $x^*$ .
- Для других примеров см. [wiki](#).

## 4.7 Проекция на гиперплоскость

$$\min \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{a}^T \mathbf{x} = b.$$

### Решение

Лагранжиан:

$$L(\mathbf{x}, \nu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 + \nu(\mathbf{a}^T \mathbf{x} - b)$$

Производная  $L$  по  $\mathbf{x}$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{x} - \mathbf{y} + \nu \mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}$$

$$\mathbf{a}^T \mathbf{x} = \mathbf{a}^T \mathbf{y} - \nu \mathbf{a}^T \mathbf{a} \quad \nu = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} - \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{y} - b}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a}$$

## 4.8 Проекция на единичный симплекс

$$\min \frac{1}{2} \|x - y\|^2, \quad \text{s.t.} \quad x^\top \mathbf{1} = 1, \quad x \geq 0.$$

### 4.8.0.1 Условия ККТ

Лагранжиан задается следующим образом:

$$L = \frac{1}{2} \|x - y\|^2 - \sum_i \lambda_i x_i + \nu(x^\top \mathbf{1} - 1)$$

Взяв производную  $L$  по  $x_i$  и записав ККТ, мы получаем:

- $\frac{\partial L}{\partial x_i} = x_i - y_i - \lambda_i + \nu = 0$
- $\lambda_i x_i = 0$
- $\lambda_i \geq 0$
- $x^\top \mathbf{1} = 1, \quad x \geq 0$

### Question

Решите систему выше за  $O(n \log n)$ .

### Question

Решите систему выше за  $O(n)$ .

## 4.9 Ссылки

- [Лекция](#) по условиям ККТ (очень интуитивное объяснение) в курсе “Элементы статистического обучения” @ KTH.
- [Однострочное доказательство ККТ](#)
- [О втором порядке оптимальности для задач оптимизации с ограничениями неравенства](#)
- [О втором порядке оптимальности в нелинейной оптимизации](#)
- [Численная оптимизация](#) by Jorge Nocedal and Stephen J. Wright.

## 5 Задачи

### Задача 1

Функция  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  определена как

$$f(x) = \ln(-Q(x))$$

где  $E = \{x \in \mathbb{R}^n : Q(x) < 0\}$  и

$$Q(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax + b^\top x + c$$

с  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Найдите точку максимума  $x^*$  функции  $f$ .

### Задача 2

Найдите явное решение следующей задачи.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x + y \rightarrow \min \\ \text{s.t. } &x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

где  $x, y \in \mathbb{R}$ .

### Задача 3

Найдите явное решение следующей задачи.

$$\begin{aligned} \langle c, x \rangle + \sum_{i=1}^n x_i \log x_i &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } &\sum_{i=1}^n x_i = 1, \end{aligned}$$

где  $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ ,  $c \neq 0$ .

### Задача 4

Пусть  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $b > 0$  покажите, что:

$$\det(X) \rightarrow \max_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \text{s.t. } \langle A, X \rangle \leq b$$

Имеет единственное решение и найдите его.

### Задача 5

Пусть  $y \in \{-1, 1\}$ , и  $X \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , задача опорных векторов (Support Vector Machine) задается следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|w\|_2^2 + C \sum_{i=1}^n \xi_i \rightarrow \min_{w, w_0, \xi_i} \\ & \text{s.t. } \xi_i \geq 0, i = 1, \dots, n \\ & y_i (x_i^T w + w_0) \geq 1 - \xi_i, i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

найдите условие стационарности ККТ.

### Задача 6

Покажите, что следующая задача оптимизации с ограничениями имеет единственное решение и найдите его.

$$\langle C^{-1}, X \rangle - \log \det(X) \rightarrow \min_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \text{s.t. } a^T X a \leq 1$$

$$C \in \mathbb{S}_{++}^n, a \neq 0$$

В ответе следует избежать явного обращения матрицы  $C$ .

### Задача 7 (БОНУС)

Для некоторых  $\Sigma, \Sigma_0 \in \mathbb{S}_{++}^n$  определим KL-расхождение между двумя гауссовыми распределениями как:

$$D(\Sigma, \Sigma_0) = \frac{1}{2} (\langle \Sigma_0^{-1}, \Sigma \rangle - \log \det(\Sigma_0^{-1} \Sigma) - n)$$

Теперь пусть  $H \in \mathbb{S}_{++}^n$  и  $y, x \in \mathbb{R}^n : \langle y, s \rangle > 0$

Мы хотим решить следующую задачу минимизации с ограничениями.

$$\min_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \{D(X^{-1}, H^{-1}) | Xy = s\}$$

Покажите, что она имеет единственное решение и оно равно:

$$(I_n - \frac{sy^T}{y^T s})H(I_n - \frac{ys^T}{y^T s}) + \frac{ss^T}{y^T s}$$

### Задача 8 (БОНУС)

Пусть  $e_1, \dots, e_n$  будет стандартным базисом в  $\mathbb{R}^n$ . Покажите, что:

$$\max_{X \in \mathbb{S}_{++}^n} \det(X) : \|X e_i\| \leq 1 \forall i \in 1, \dots, n$$

Имеет единственное решение  $I_n$ , и выведите неравенство Гильберта:

$$\det(X) \leq \prod_{i=1}^n \|X e_i\| \forall X \in \mathbb{S}_{++}^n$$

## 6 Задачи на дом

В этом разделе вы можете рассматривать произвольную норму или евклидову норму, если не указано иное.

### 1. Простой пример [10 баллов]

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} \\ \text{s.t. } (x-2)(x-4) &\leq 0 \end{aligned}$$

1. Найдите допустимое множество, оптимальное значение и оптимальное решение.
2. Постройте график функции  $x^2 + 1$  в зависимости от  $x$ . На том же графике покажите допустимое множество, оптимальную точку и значение, а также постройте график лагранжиана  $L(x, \mu)$  в зависимости от  $x$  для нескольких положительных значений  $\mu$ . Проверьте свойство нижней границы ( $p^* \geq \inf_x L(x, \mu)$  для  $\mu \geq 0$ ). Выведите и нарисуйте функцию Лагранжа  $g$ .
3. Пусть  $p^*(u)$  обозначает оптимальное значение следующей задачи:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}} \\ \text{s.t. } (x-2)(x-4) &\leq u \end{aligned}$$

как функции параметра  $u$ . Постройте график  $p^*(u)$ . Проверьте, что  $\frac{dp^*(0)}{du} = -\mu^*$

2. Рассмотрим гладкую выпуклую функцию  $f(x)$  в некоторой точке  $x_k$ . Её разложение Тейлора первого порядка имеет вид:

$$f_{x_k}^I(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^\top (x - x_k),$$

где мы можем определить  $\delta x = x - x_k$  и  $g = \nabla f(x_k)$ . Таким образом, разложение можно переписать как:

$$f_{x_k}^I(\delta x) = f(x_k) + g^\top \delta x.$$

Предположим, мы хотим построить семейство методов оптимизации, которое будет определяться следующим образом:

$$x_{k+1} = \arg \min_x \left\{ f_{x_k}^I(\delta x) + \frac{\lambda}{2} \|\delta x\|^2 \right\},$$

где  $\lambda > 0$  является параметром.

1. [5 баллов] Покажите, что этот метод эквивалентен методу градиентного спуска с выбором евклидовой нормы вектора  $\|\delta x\| = \|\delta x\|_2$ . Найдите соответствующий коэффициент обучения.

2. [5 баллов] Докажите, что следующее утверждение верно:

$$\arg \min_{\delta x \in \mathbb{R}^n} \left\{ g^T \delta x + \frac{\lambda}{2} \|\delta x\|^2 \right\} = -\frac{\|g\|_*}{\lambda} \arg \max_{\|t\|=1} \{t^T g\},$$

где  $\|g\|_*$  является двойственной нормой  $g$ .

3. [3 балла] Рассмотрим другую векторную норму  $\|\delta x\| = \|\delta x\|_\infty$ . Запишите явное выражение для соответствующего метода.
4. [2 балла] Рассмотрим индуцированную операторную матричную норму для любой матрицы  $W \in \mathbb{R}^{d_{out} \times d_{in}}$

$$\|W\|_{\alpha \rightarrow \beta} = \max_{x \in \mathbb{R}^{d_{in}}} \frac{\|Wx\|_\beta}{\|x\|_\alpha}.$$

Обычно, когда мы решаем оптимизационные задачи в глубоком обучении, мы складываем матрицы весов для всех слоев  $l = [1, L]$  в один вектор.

$$w = \text{vec}(W_1, W_2, \dots, W_L) \in \mathbb{R}^n,$$

Можете ли вы записать явное выражение, которое связывает

$$\|w\|_\infty \quad \text{and} \quad \|W_l\|_{\alpha \rightarrow \beta}, \quad l = [1, L]?$$

3. [10 баллов] Найдите явное решение следующей задачи линейного программирования.

$$\begin{aligned} c^\top x &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } 1^\top x &= 1, \\ x &\succeq 0 \end{aligned}$$

Эта задача может быть рассмотрена как самый простой пример задачи оптимизации портфеля.

4. [20 баллов] Покажите, что следующая задача имеет единственное решение и найдите его:

$$\begin{aligned} \langle C^{-1}, X \rangle - \log \det X &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^{n \times n}} \\ \text{s.t. } \langle Xa, a \rangle &\leq 1, \end{aligned}$$

где  $C \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $a \in \mathbb{R}^n \neq 0$ . Ответ не должен включать обращение матрицы  $C$ .

5. [20 баллов] Найдите явное решение следующей задачи квадратичного программирования.

$$\begin{aligned} c^\top x &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } (x - x_c)^\top A(x - x_c) &\leq 1, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ ,  $c \neq 0$ ,  $x_c \in \mathbb{R}^n$ .

6. [10 баллов] Рассмотрим задачу наименьших квадратов с ограничениями равенства.

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|_2^2 &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } &Cx = d, \end{aligned}$$

где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с  $\text{rank}A = n$ , и  $C \in \mathbb{R}^{k \times n}$  с  $\text{rank}C = k$ . Запишите условия ККТ, и выведите выражения для решения  $x^*$ .

7. **Интерпретация условий ККТ в терминах опорной гиперплоскости.** [10 баллов] Рассмотрим выпуклую задачу без ограничений равенства.

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } &f_i(x) \leq 0, \quad i = [1, m] \end{aligned}$$

Предположим, что  $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, \mu^* \in \mathbb{R}^m$  удовлетворяют условиям ККТ

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x^*, \mu^*) &= \nabla f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla f_i(x^*) = 0 \\ \mu_i^* &\geq 0, \quad i = [1, m] \\ \mu_i^* f_i(x^*) &= 0, \quad i = [1, m] \\ f_i(x^*) &\leq 0, \quad i = [1, m] \end{aligned}$$

Покажите, что

$$\nabla f_0(x^*)^\top (x - x^*) \geq 0$$

для всех допустимых  $x$ . Другими словами, условия ККТ подразумевают простой критерий оптимальности или  $\nabla f_0(x^*)$  определяет опорную гиперплоскость к допустимому множеству в точке  $x^*$ .

8. **Метод штрафов для ограничений равенства.** [10 баллов] Рассмотрим задачу минимизации

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } &Ax = b, \end{aligned}$$

где  $f_0(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  выпукла и дифференцируема, и  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с  $\text{rank}A = m$ . В методе квадратичных штрафов мы формируем вспомогательную функцию

$$\phi(x) = f_0(x) + \alpha \|Ax - b\|_2^2,$$

где  $\alpha > 0$  является параметром. Эта вспомогательная функция состоит из целевой функции плюс штрафное слагаемое  $\alpha \|Ax - b\|_2^2$ . Идея состоит в том, что минимизатор вспомогательной функции,

$\tilde{x}$ , должен быть приближенным решением исходной задачи. Интуиция подсказывает, что чем больше вес штрафа  $\alpha$ , тем лучше приближение  $\tilde{x}$  к решению исходной задачи. Предположим, что  $\tilde{x}$  является минимизатором  $\phi(x)$ . Найдите соответствующую нижнюю границу для оптимального значения исходной задачи.