

## Определения и формулировки

1. Положительно определённая матрица.
2. Евклидова норма вектора.
3. Неравенство треугольника для нормы.
4.  $p$ -норма вектора.
5. Как выглядит единичный шар в  $p$ -норме на плоскости для  $p = 1, 2, \infty$ ?
6. Норма Фробениуса для матрицы.
7. Спектральная норма матрицы.
8. Скалярное произведение двух векторов.
9. Скалярное произведение двух матриц, согласованное с нормой Фробениуса.
10. Собственные значения матрицы. Спектр матрицы.
11. Связь спектра матрицы и её определенности.
12. Спектральное разложение матрицы.
13. Сингулярное разложение матрицы.
14. Связь определителя и собственных чисел для квадратной матрицы.
15. Связь следа и собственных чисел для квадратной матрицы.
16. Градиент функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
17. Гессиан функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
18. Якобиан функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
19. Формула для аппроксимации Тейлора первого порядка  $f_{x_0}^I(x)$  функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ .
20. Формула для аппроксимации Тейлора второго порядка  $f_{x_0}^{II}(x)$  функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ .
21. Определение дифференцируемости функции в точке через производную как линейный оператор.
22. Связь дифференциала функции  $df$  и градиента  $\nabla f$  для функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
23. Связь второго дифференциала функции  $d^2f$  и гессиана  $\nabla^2 f$  для функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
24. Формула для приближенного вычисления производной функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по  $k$ -ой координате с помощью метода конечных разностей.
25. Пусть  $f = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Формула для вычисления  $\frac{\partial f}{\partial t}$  через  $\frac{\partial x_i}{\partial t}$  (Forward chain rule).
26. Пусть  $L$  - функция, возвращающая скаляр, а  $v_k$  - функция, возвращающая вектор  $x \in \mathbb{R}^t$ . Формула для вычисления  $\frac{\partial L}{\partial v_k}$  через  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  (Backward chain rule).
27. Аффинное множество. Аффинная комбинация. Аффинная оболочка.
28. Выпуклое множество. Выпуклая комбинация. Выпуклая оболочка.
29. Конус. Выпуклый конус. Коническая комбинация. Коническая оболочка.
30. Внутренность множества.
31. Относительная внутренность множества.
32. Сумма Минковского.
33. Любые 2 операции с множествами, сохраняющие выпуклость.
34. Выпуклая функция.
35. Строго выпуклая функция.
36. Надграфик функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
37. Множество подуровней функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
38. Дифференциальный критерий выпуклости первого порядка.
39. Дифференциальный критерий выпуклости второго порядка.
40. Связь выпуклости функции и её надграфика.
41.  $\mu$ -сильно выпуклая функция.
42. Дифференциальный критерий сильной выпуклости первого порядка.
43. Дифференциальный критерий сильной выпуклости второго порядка.
44. Любые 2 операции с функциями, сохраняющие выпуклость.

45. Любые 2 нетривиальных свойства сопряженного множества.
46. Является ли задача линейных наименьших квадратов для переопределенной линейной системы выпуклой / сильно выпуклой?
47. Является ли задача линейных наименьших квадратов для недоопределенной линейной системы выпуклой / сильно выпуклой?
48. Сопряжённое множество.
49. Сопряжённый конус.
50. Сопряженная функция.
51. Связь сильной выпуклости функции и гладкости сопряженной функции.
52. Сопряжённая норма. Сопряжённая норма к векторной  $p$ -норме.
53. Субградиент. Субдифференциал.
54. Нормальный конус.
55. Теорема Моро - Рокафеллара.
56. Теорема Дубовицкого - Милютина.
57. Теорема Вейерштрасса.
58. Теорема Тейлора.
59. Необходимые условия локального экстремума.
60. Достаточные условия локального экстремума.
61. Принцип Ферма для минимума функции.
62. Общая задача математического программирования. Функция Лагранжа.
63. Теорема Каруша - Куна - Таккера в форме необходимых условий решения задачи математического программирования.
64. Условие Слейтера.
65. Задача выпуклого программирования.
66. Двойственная функция в задаче математического программирования.
67. Двойственная задача для задачи математического программирования.
68. Сильная двойственность. Зазор двойственности.
69. Локальный анализ чувствительности с помощью множителей Лагранжа.
70. Задача линейного программирования. Задача линейного программирования в стандартной форме.
71. Возможные случаи двойственности в задаче линейного программирования.
72. Симплекс метод.
73. Нахождение первоначальной угловой точки с помощью двухфазного симплекс метода.
74. Сходимость симплекс метода.
75. Теорема о связи задач  $\max$ -flow и  $\min$ -cut (надо суметь описать обе задачи).
76. Линейная сходимость последовательности.
77. Сублинейная сходимость последовательности.
78. Сверхлинейная сходимость последовательности.
79. Квадратичная сходимость последовательности.
80. Тест корней для определения скорости сходимости последовательности.
81. Тест отношений для определения скорости сходимости последовательности.
82. Унимодальная функция.
83. Метод дихотомии.
84. Метод золотого сечения.
85. Метод параболической интерполяции (без точных формул).
86. Условие достаточного убывания для неточного линейного поиска.
87. Условия Гольдштейна для неточного линейного поиска.
88. Условие ограничения на кривизну для неточного линейного поиска.

## Теоремы с доказательствами

1. Критерий положительной определенности матрицы через знаки собственных значений матрицы.
2. Связь  $\frac{\partial L}{\partial W}$  и  $\frac{\partial L}{\partial \Sigma}$ , если  $W = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , при этом

$$U^T U = I, \quad V^T V = I, \quad \Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_{\min(m,n)})$$

3. Базовые операции, сохраняющие выпуклость множеств: пересечение бесконечного числа множеств, линейная комбинация множеств, образ аффинного отображения.
4. Неравенство Йенсена для выпуклой функции и выпуклой комбинации точек.
5. Выпуклость надграфика как критерий выпуклости функции.
6. Дифференциальный критерий сильной выпуклости первого порядка.
7. Дифференциальный критерий сильной выпуклости второго порядка.
8. Теорема о построении сопряженного множества к многогранному множеству.
9. Вывод сопряженной функции к норме.
10. Вывод субдифференциала нормы.
11. Связь субградиента сопряженной функции и субградиента функции.
12. Субдифференциальное условие оптимальности для условных выпуклых задач.
13. Необходимые условия безусловного экстремума.
14. Достаточные условия безусловного экстремума.
15. Субдифференциальная форма теоремы Каруша Куна Таккера (доказательство). Необходимые условия ККТ для произвольной задачи математического программирования (только формулировка).
16. Формулировка симплекс метода для задачи линейного программирования в стандартной форме. Теорема о проверке оптимальности решения.
17. Доказательство работы теста корней
18. Метод дихотомии и золотого сечения для унимодальных функций. Скорость сходимости.