A low-poly 3D illustration of a dog and a rock. The dog, on the right, is brown and white, sitting and looking towards the left. The rock, on the left, is yellow and green. Both are composed of many flat, triangular faces.

## Двухфазный симплекс-метод. Двойственность в ЛП

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

## Двойственность в линейном программировании

# Двойственность

Прямая задача:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } & Ax = b \\ & x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

# Двойственность

Прямая задача:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (1)$$

ККТ для оптимальных  $x^*, \nu^*, \lambda^*$ :

$$L(x, \nu, \lambda) = c^\top x + \nu^\top (Ax - b) - \lambda^\top x$$

$$-A^\top \nu^* + \lambda^* = c$$

$$Ax^* = b$$

$$x^* \succeq 0$$

$$\lambda^* \succeq 0$$

$$\lambda_i^* x_i^* = 0$$

# Двойственность

Прямая задача:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\ \text{s.t. } Ax = b \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

ККТ для оптимальных  $x^*, \nu^*, \lambda^*$ :

$$\begin{aligned} L(x, \nu, \lambda) &= c^\top x + \nu^\top (Ax - b) - \lambda^\top x \\ &\quad - A^\top \nu^* + \lambda^* = c \\ Ax^* &= b \\ x^* &\succeq 0 \\ \lambda^* &\succeq 0 \\ \lambda_i^* x_i^* &= 0 \end{aligned}$$

Имеет следующую двойственную:

$$\begin{aligned} \max_{\nu \in \mathbb{R}^m} -b^\top \nu \\ \text{s.t. } -A^\top \nu \preceq c \end{aligned} \tag{2}$$

Найдите двойственную задачу к задаче выше (она должна быть исходной задаче ЛП). Также запишите условия ККТ для двойственной задачи, чтобы убедиться, что они идентичны условиям ККТ для прямой задачи.

## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.
- (ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.
- (ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.



## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.
- (ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

**ДОК-ВО.** Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение  $x^*$ . Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы  $\lambda^*$  и  $\nu^*$  такие, что  $(x^*, \nu^*, \lambda^*)$  удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось,  $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$ . Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.
- (ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

**ДОК-ВО.** Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение  $x^*$ . Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы  $\lambda^*$  и  $\nu^*$  такие, что  $(x^*, \nu^*, \lambda^*)$  удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось,  $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$ . Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  такая, что

$$c^T x_k \downarrow -\infty, \quad A x_k = b, \quad x_k \geq 0.$$

## Сильная двойственность в линейном программировании

- (i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.
- (ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

**ДОК-ВО.** Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение  $x^*$ . Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы  $\lambda^*$  и  $\nu^*$  такие, что  $(x^*, \nu^*, \lambda^*)$  удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось,  $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$ . Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек  $x_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  такая, что

$$c^T x_k \downarrow -\infty, \quad A x_k = b, \quad x_k \geq 0.$$

Предположим также, что двойственная задача Equation 2 допустима, то есть существует вектор  $\bar{\nu}$  такой, что  $-A^T \bar{\nu} \leq c$ . Из последнего неравенства вместе с  $x_k \geq 0$  имеем, что  $-\bar{\nu}^T A x_k \leq c^T x_k$ , и поэтому

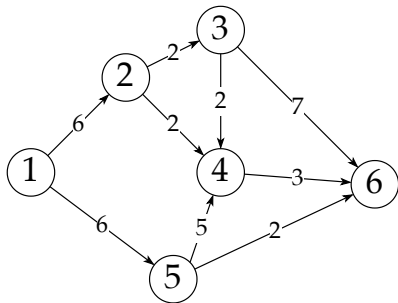
$$-\bar{\nu}^T b = -\bar{\nu}^T A x_k \leq c^T x_k \downarrow -\infty,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, двойственная задача должна быть недопустимой.

Аналогичный аргумент можно использовать, чтобы показать, что неограниченность двойственной задачи влечет недопустимость прямой.

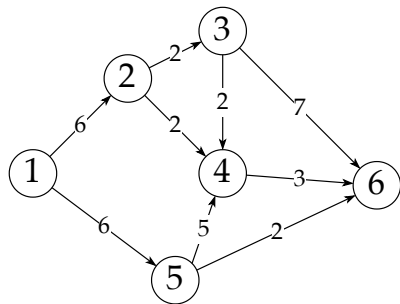
## Максимальный поток - минимальный разрез

## Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

# Задача максимального потока

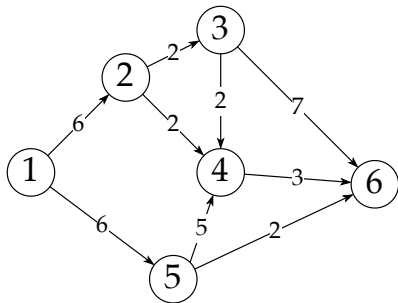


## Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.

Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

# Задача максимального потока

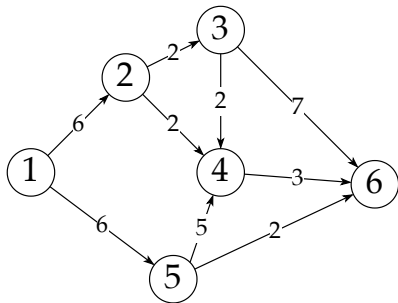


## Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

# Задача максимального потока



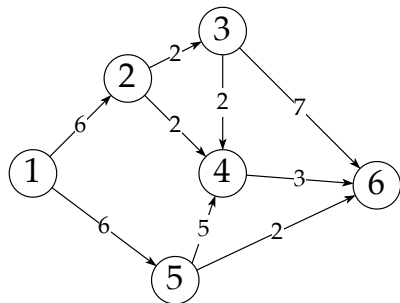
## Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.



# Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

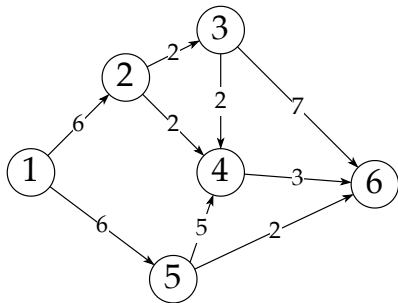
## Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

## Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

## Вопрос:

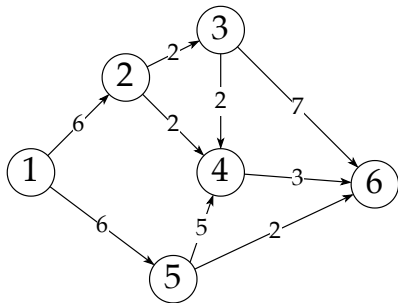
- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

## Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**Матрица потока:**  $X[i, j]$  представляет поток от узла  $i$  к узлу  $j$ .

# Задача максимального потока



## Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

## Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

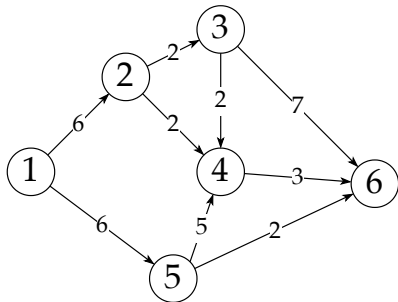
**Матрица потока:**  $X[i, j]$  представляет поток от узла  $i$  к узлу  $j$ .

## Ограничения:

$$0 \leq X \leq C$$

Сохранение потока: 
$$\sum_{j=2}^N X(i, j) = \sum_{k=1}^{N-1} X(k, i), \quad i = 2, \dots, N-1$$

## Задача максимального потока



При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^N X(1, i) \quad (\text{Поток})$$

## Задача максимального потока



$$\begin{aligned}
 & \max \langle X, S \rangle \\
 & \text{s.t. } -X \leq 0 \\
 & \quad X \leq C \\
 & \langle X, L_n \rangle = 0, \quad n = 2, \dots, N-1,
 \end{aligned}
 \quad (\text{Задача максимального потока})$$

$L_n$  составляется как вычитание двух матриц. Обе матрицы почти полностью состоят из нулей. Только в первой матрице  $n$ -ый столбец состоит из единиц (кроме последней строки). А во второй матрице только  $n$ -ая строка состоит из единиц (кроме первого столбца).

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^N X(1, i) \quad (\text{Поток})$$

# Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

## Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

$$\begin{aligned} & \min \langle \Lambda, C \rangle \\ & \Lambda, \nu \\ \text{s.t. } & \Lambda + Q \succeq S \\ & \Lambda \succeq 0 \end{aligned} \quad \text{(Двойственная задача максимального потока)}$$

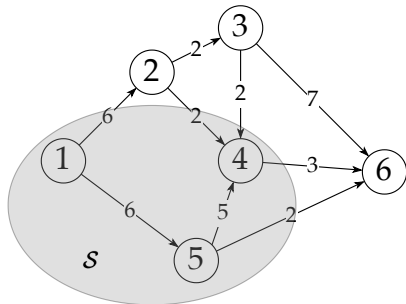
где

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{N-1} & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 - \nu_2 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_2 & -\nu_2 \\ 0 & \nu_2 - \nu_3 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_3 & -\nu_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \nu_2 - \nu_{N-1} & \nu_3 - \nu_{N-1} & \cdots & 0 & -\nu_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Задача минимального разреза

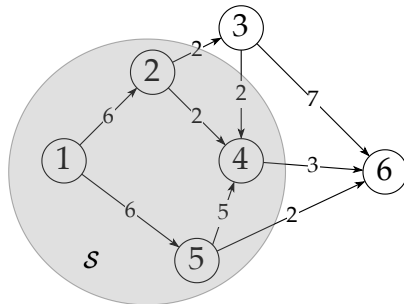
Разрез сети разделяет вершины на два множества: одно содержит источник (мы называем это множество  $\mathcal{S}$ ), а другое содержит сток. Пропускная способность разреза — это общее значение рёбер, выходящих из  $\mathcal{S}$  — мы разделяем множества, “отрезая поток” вдоль этих рёбер.

$$\mathcal{S} = \{1, 4, 5\}$$



Рёбра в разрезе:  $1 \rightarrow 2$ ,  $4 \rightarrow 6$ , и  $5 \rightarrow 6$ , пропускная способность этого разреза равна  $6 + 3 + 2 = 11$ .

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 4, 5\}$$



Рёбра в разрезе:  $2 \rightarrow 3$ ,  $4 \rightarrow 6$ , и  $5 \rightarrow 6$ , пропускная способность этого разреза равна  $2 + 3 + 2 = 7$ .



## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения  $d^*$  двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения  $d^*$  двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что  $\mathcal{S}$  — допустимый разрез. Из  $\mathcal{S}$  мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для  $n = 1, \dots, N$  возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1, j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения  $d^*$  двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что  $\mathcal{S}$  — допустимый разрез. Из  $\mathcal{S}$  мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для  $n = 1, \dots, N$  возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1, j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что  $\lambda_{i,j}$  будет равен 1, если  $i \rightarrow j$  разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\text{capacity}(\mathcal{S}) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}.$$

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения  $d^*$  двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что  $\mathcal{S}$  — допустимый разрез. Из  $\mathcal{S}$  мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для  $n = 1, \dots, N$  возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \quad \text{и} \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1, j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что  $\lambda_{i,j}$  будет равен 1, если  $i \rightarrow j$  разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\text{capacity}(\mathcal{S}) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}.$$

Каждый разрез допустим, поэтому

$$d^* \leq \text{MINCUT}.$$

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения  $\nu^*, \lambda^*$  двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более  $d^*$ . Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше  $d^*$  — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью  $d^*$  или меньше.

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения  $\nu^*, \lambda^*$  двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более  $d^*$ . Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше  $d^*$  — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью  $d^*$  или меньше.

Пусть  $Z$  — равномерная случайная величина на  $[0, 1]$ . Вместе с  $\lambda^*, \nu_2^*, \dots, \nu_{N-1}^*$ , полученными решением (Двойственная задача максимального потока), возьмём  $\nu_1 = 1$  и  $\nu_N = 0$ . Создадим разрез  $\mathcal{S}$  по правилу:

если  $\nu_n^* > Z$ , то возьмём  $n \in \mathcal{S}$ .

. . . Вероятность того, что конкретное ребро  $i \rightarrow j$  находится в этом разрезе, равна

$$\begin{aligned} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) &= P(\nu_j^* \leq Z \leq \nu_i^*) \\ &\leq \begin{cases} \max(\nu_i^* - \nu_j^*, 0), & 2 \leq i, j \leq N-1, \\ 1 - \nu_j^*, & i = 1; j = 2, \dots, N-1, \\ \nu_i^*, & i = 2, \dots, N-1; j = N, \\ 1, & i = 1; j = N. \end{cases} \\ &\leq \lambda_{i,j}^*, \end{aligned}$$

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\ &\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda_{i,j}^* = d^*.\end{aligned}$$

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\ &\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda_{i,j}^* = d^*.\end{aligned}$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более  $d^*$ . Это устанавливает, что

$$\text{MINCUT} \leq d^*.$$



## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\ &\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda_{i,j}^* = d^*.\end{aligned}$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более  $d^*$ . Это устанавливает, что

$$\text{MINCUT} \leq d^*.$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$d^* = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^*,$$

где  $p^*$  — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

## Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\ &\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda_{i,j}^* = d^*.\end{aligned}$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более  $d^*$ . Это устанавливает, что

$$\text{MINCUT} \leq d^*.$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$d^* = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^*,$$

где  $p^*$  — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

**i** Теорема максимального потока — минимального разреза.

Максимальное значение s-t потока равно минимальной пропускной способности среди всех s-t разрезов.

## Анализ чувствительности

# Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

# Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

## Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

## Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации      К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

Говоря о значении некоторого  $i$ -го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$  оставляет исходную задачу

## Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации      К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

Говоря о значении некоторого  $i$ -го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$  оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$  означает, что мы ослабили неравенство



## Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации      К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

Говоря о значении некоторого  $i$ -го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$  оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$  означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$  означает, что мы ужесточили ограничение

## Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации      К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

Говоря о значении некоторого  $i$ -го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$  оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$  означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$  означает, что мы ужесточили ограничение

# Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

К возмущённой версии:

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= 0, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{P})$$

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\ \text{s.t. } f_i(x) &\leq u_i, \quad i = 1, \dots, m \\ h_i(x) &= v_i, \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (\text{Per})$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная  $x \in \mathbb{R}^n$ , в то время как  $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$  мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что  $\text{Per}(u, v) \rightarrow P$ , если  $u = 0, v = 0$ . Мы будем обозначать оптимальное значение  $\text{Per}$  как  $p^*(u, v)$ , в то время как оптимальное значение исходной задачи  $P$  — просто  $p^*$ . Можно сразу сказать, что  $p^*(u, v) = p^*$ .

Говоря о значении некоторого  $i$ -го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$  оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$  означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$  означает, что мы ужесточили ограничение

Можно даже показать, что когда  $P$  является задачей выпуклой оптимизации,  $p^*(u, v)$  является выпуклой функцией.

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$p^*(0, 0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq$$

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) &\leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \end{aligned}$$

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \end{aligned}$$

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\ &\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i \end{aligned}$$

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\ &\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i \end{aligned}$$



## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\ &\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i \end{aligned}$$

Что означает

$$f_0(x) \geq p^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v$$

## Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что  $x$  — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$\begin{aligned} p^*(0, 0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\ &\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\ &= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\ &\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i \end{aligned}$$

Что означает

$$f_0(x) \geq p^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v$$

И взяв оптимальную  $x$  для возмущённой задачи, имеем:

$$p^*(u, v) \geq p^*(0, 0) - \lambda^{*T} u - \nu^{*T} v \quad (3)$$

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными  $\nu_i^*$ :**

Если  $\nu_i^*$  велик и положителен, и выбирается  $v_i < 0$ , или если  $\nu_i^*$  велик и отрицателен, и выбирается  $v_i > 0$ , то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  значительно увеличится.

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными  $\nu_i^*$ :**

Если  $\nu_i^*$  велик и положителен, и выбирается  $v_i < 0$ , или если  $\nu_i^*$  велик и отрицателен, и выбирается  $v_i > 0$ , то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  значительно увеличится.

- **Последствия ослабления ограничения (малое  $\lambda_i^*$ ):**

Если множитель Лагранжа  $\lambda_i^*$  для  $i$ -го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается  $u_i > 0$ ), ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  не значительно уменьшится.

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными  $\nu_i^*$ :**

Если  $\nu_i^*$  велик и положителен, и выбирается  $v_i < 0$ , или если  $\nu_i^*$  велик и отрицателен, и выбирается  $v_i > 0$ , то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  значительно увеличится.

- **Последствия ослабления ограничения (малое  $\lambda_i^*$ ):**

Если множитель Лагранжа  $\lambda_i^*$  для  $i$ -го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается  $u_i > 0$ ), ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  не значительно уменьшится.

- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми  $\nu_i^*$ :**

Когда  $\nu_i^*$  мал и положителен, и выбирается  $v_i > 0$ , или когда  $\nu_i^*$  мал и отрицателен, и выбирается  $v_i < 0$ , в обоих случаях оптимальное значение  $p^*(u, v)$  незначительно уменьшится.

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными  $\nu_i^*$ :**

Если  $\nu_i^*$  велик и положителен, и выбирается  $v_i < 0$ , или если  $\nu_i^*$  велик и отрицателен, и выбирается  $v_i > 0$ , то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  значительно увеличится.

- **Последствия ослабления ограничения (малое  $\lambda_i^*$ ):**

Если множитель Лагранжа  $\lambda_i^*$  для  $i$ -го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается  $u_i > 0$ ), ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  не значительно уменьшится.

- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми  $\nu_i^*$ :**

Когда  $\nu_i^*$  мал и положителен, и выбирается  $v_i > 0$ , или когда  $\nu_i^*$  мал и отрицателен, и выбирается  $v_i < 0$ , в обоих случаях оптимальное значение  $p^*(u, v)$  незначительно уменьшится.

## Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое  $\lambda_i^*$ ):**

Когда множитель Лагранжа  $i$ -го ограничения,  $\lambda_i^*$ , имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается  $u_i < 0$ ), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное  $p^*(u, v)$ , значительно увеличится.

- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными  $\nu_i^*$ :**

Если  $\nu_i^*$  велик и положителен, и выбирается  $v_i < 0$ , или если  $\nu_i^*$  велик и отрицателен, и выбирается  $v_i > 0$ , то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  значительно увеличится.

- **Последствия ослабления ограничения (малое  $\lambda_i^*$ ):**

Если множитель Лагранжа  $\lambda_i^*$  для  $i$ -го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается  $u_i > 0$ ), ожидается, что оптимальное значение  $p^*(u, v)$  не значительно уменьшится.

- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми  $\nu_i^*$ :**

Когда  $\nu_i^*$  мал и положителен, и выбирается  $v_i > 0$ , или когда  $\nu_i^*$  мал и отрицателен, и выбирается  $v_i < 0$ , в обоих случаях оптимальное значение  $p^*(u, v)$  незначительно уменьшится.

Эти интерпретации предоставляют основу для понимания того, как изменения в ограничениях, отражённые через соответствующие множители Лагранжа, влияют на оптимальное решение в задачах, где выполняется сильная двойственность.



## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного  $t < 0$  имеем:

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного  $t < 0$  имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$



## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

Та же идея может быть использована для установления факта о  $v_i$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного  $t < 0$  имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного  $t < 0$  имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Та же идея может быть использована для установления факта о  $v_i$ .

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение  $x^*$  задачи оптимизации. Если ограничение  $f_i(x^*)$  отрицательно в  $x^*$ , оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополнительной нежёсткости.

## Локальная чувствительность

Предположим теперь, что  $p^*(u, v)$  дифференцируема в точке  $u = 0, v = 0$ .

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial v_i} \quad (4)$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную  $p^*(u, v)$  вдоль направления некоторого  $i$ -го базисного вектора  $e_i$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0, 0)}{t} = \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел  $t \rightarrow 0$  с  $t > 0$ , имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного  $t < 0$  имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \rightarrow \frac{\partial p^*(0, 0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Та же идея может быть использована для установления факта о  $v_i$ .

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение  $x^*$  задачи оптимизации. Если ограничение  $f_i(x^*)$  отрицательно в  $x^*$ , оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополнительной нежёсткости.

Однако, если  $f_i(x^*) = 0$ , что означает, что ограничение точно выполняется в оптимуме, то ситуация иная.

Значение  $i$ -го оптимального множителя Лагранжа,  $\lambda_i^*$ , даёт нам понимание того, насколько “чувствительно” или “активно” это ограничение. Малое  $\lambda_i^*$  указывает на то, что небольшие корректировки ограничения не будут значительно влиять на оптимальное значение.

Наоборот, большое  $\lambda_i^*$  подразумевает, что даже незначительные изменения ограничения могут иметь значительное влияние на оптимальное решение.

- Теория оптимизации (MATH4230) курс @ CUHK, professor Tieyong Zeng