

## Определения и формулировки

1. Положительно определенная матрица.
2. Евклидова норма вектора.
3. Неравенство треугольника для нормы.
4.  $p$ -норма вектора.
5. Как выглядит единичный шар в  $p$ -норме на плоскости для  $p = 1, 2, \infty$ ?
6. Норма Фробениуса для матрицы.
7. Спектральная норма матрицы.
8. Скалярное произведение двух векторов.
9. Скалярное произведение двух матриц, согласованное с нормой Фробениуса.
10. Собственные значения матрицы. Спектр матрицы.
11. Связь спектра матрицы и ее определенности.
12. Спектральное разложение матрицы.
13. Сингулярное разложение матрицы.
14. Связь определителя и собственных чисел для квадратной матрицы.
15. Связь следа и собственных чисел для квадратной матрицы.
16. Градиент функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
17. Гессиан функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
18. Якобиан функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .
19. Формула для аппроксимации Тейлора первого порядка  $f_{x_0}^I(x)$  функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ .
20. Формула для аппроксимации Тейлора второго порядка  $f_{x_0}^{II}(x)$  функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$ .
21. Определение дифференцируемости функции в точке через производную как линейный оператор.
22. Связь дифференциала функции  $df$  и градиента  $\nabla f$  для функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
23. Связь второго дифференциала функции  $d^2f$  и гессиана  $\nabla^2 f$  для функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
24. Формула для приближенного вычисления производной функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  по  $k$ -ой координате с помощью метода конечных разностей.
25. Пусть  $f = f(x_1(t), \dots, x_n(t))$ . Формула для вычисления  $\frac{\partial f}{\partial t}$  через  $\frac{\partial x_i}{\partial t}$  (Forward chain rule).
26. Пусть  $L$  - функция, возвращающая скаляр, а  $v_k$  - функция, возвращающая вектор  $x \in \mathbb{R}^t$ . Формула для вычисления  $\frac{\partial L}{\partial v_k}$  через  $\frac{\partial L}{\partial x_i}$  (Backward chain rule).
27. Афинное множество. Аффинная комбинация. Аффинная оболочка.
28. Выпуклое множество. Выпуклая комбинация. Выпуклая оболочка.
29. Конус. Выпуклый конус. Коническая комбинация. Коническая оболочка.
30. Внутренность множества.
31. Относительная внутренность множества.
32. Сумма Минковского.
33. Любые 2 операции с множествами, сохраняющие выпуклость.
34. Выпуклая функция.
35. Строго выпуклая функция.
36. Надграфик функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
37. Множество подуровней функции  $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ .
38. Дифференциальный критерий выпуклости первого порядка.
39. Дифференциальный критерий выпуклости второго порядка.
40. Связь выпуклости функции и ее надграфика.
41.  $\mu$ -сильно выпуклая функция.
42. Дифференциальный критерий сильной выпуклости первого порядка.
43. Дифференциальный критерий сильной выпуклости второго порядка.
44. Любые 2 операции с функциями, сохраняющие выпуклость.
45. Является ли задача линейных наименьших квадратов для переопределенной линейной системы

- выпуклой/сильно выпуклой?
46. Является ли задача линейных наименьших квадратов для недоопределенной линейной системы выпуклой/сильно выпуклой?
  47. Сопряженное множество.
  48. Любые 2 нетривиальных свойства сопряженного множества.
  49. Сопряженный конус.
  50. Сопряженная функция.
  51. Связь сильной выпуклости функции и гладкости сопряженной функции.
  52. Сопряженная норма. Сопряженная норма к векторной  $p$ -норме.
  53. Субградиент. Субдифференциал.
  54. Нормальный конус.
  55. Теорема Моро - Рокафеллара.
  56. Теорема Дубовицкого - Милютина.
  57. Теорема Вейерштрасса.
  58. Теорема Тейлора.
  59. Необходимые условия локального экстремума.
  60. Достаточные условия локального экстремума.
  61. Принцип Ферма для минимума функции.
  62. Общая задача математического программирования. Функция Лагранжа.
  63. Теорема Каруша - Куна - Таккера в форме необходимых условий решения задачи математического программирования.
  64. Условие Слейтера.
  65. Задача выпуклого программирования.
  66. Двойственная функция в задаче математического программирования.
  67. Двойственная задача для задачи математического программирования.
  68. Сильная двойственность. Зазор двойственности.
  69. Локальный анализ чувствительности с помощью множителей Лагранжа.
  70. Задача линейного программирования.
  71. Стандартная форма задачи линейного программирования.
  72. Возможные случаи двойственности в задаче линейного программирования.
  73. Идея симплекс метода.
  74. Нахождение первоначальной угловой точки (идея).
  75. Сходимость симплекс метода.
  76. Теорема о связи задач max-flow и min-cut (надо суметь описать обе задачи).
  77. Линейная сходимость последовательности.
  78. Сублинейная сходимость последовательности.
  79. Сверхлинейная сходимость последовательности.
  80. Квадратичная сходимость последовательности.
  81. Тест корней для определения скорости сходимости последовательности.
  82. Тест отношений для определения скорости сходимости последовательности.
  83. Унимодальная функция.
  84. Метод дихотомии.
  85. Метод золотого сечения.
  86. Метод параболической интерполяции (без точных формул).
  87. Условие достаточного убывания для неточного линейного поиска.
  88. Условия Гольдштейна для неточного линейного поиска.
  89. Условие ограничения на кривизну для неточного линейного поиска.
  90. Показать, что направление антиградиента - направление наискорейшего локального убывания функции.
  91. Дифференциальное уравнение градиентного потока.

92. Метод градиентного спуска.
93. Наискорейший спуск.
94. Как направлены две соседние итерации метода наискорейшего спуска по отношению друг к другу?
95. Липшицева парабола для гладкой функции.
96. Размер шага наискорейшего спуска для квадратичной функции.
97. Характер сходимости градиентного спуска к локальному экстремуму для гладких невыпуклых функций в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
98. Характер сходимости градиентного спуска для гладких выпуклых функций в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
99. Характер сходимости градиентного спуска для гладких и сильно выпуклых функций в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
100. Связь спектра гессиана с константами сильной выпуклости и гладкости функции.
101. Условие Поляка-Лоясиевича (градиентного доминирования) для функций.
102. Сходимость градиентного спуска для сильно выпуклых квадратичных функций. Оптимальные гиперпараметры.
103. Связь PL-функций и сильно выпуклых функций.
104. Привести пример выпуклой, но не сильно выпуклой задачи линейных наименьших квадратов (возможно, с регуляризацией).
105. Привести пример сильно выпуклой задачи линейных наименьших квадратов (возможно, с регуляризацией).
106. Нижние оценки для гладкой выпуклой оптимизации с помощью методов первого порядка в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
107. Нижние оценки для гладкой сильно выпуклой оптимизации с помощью методов первого порядка в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
108. Отличие ускоренной и неускоренной линейной сходимости для методов первого порядка.
109. Метод тяжелого шарика (Поляка).
110. Понятие локальной и глобальной сходимости численного метода оптимизации.
111. Ускоренный градиентный метод Нестерова для выпуклых гладких функций.
112. Ускоренный градиентный метод Нестерова для сильно выпуклых гладких функций.
113.  $A$ -сопряженность двух векторов.  $A$ -ортогональность. Скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ .
114. Процедура ортогонализации Грама-Шмидта.
115. Метод сопряженных направлений.
116. Метод сопряженных градиентов.
117. Зависимость сходимости метода сопряженных градиентов от спектра матрицы.
118. Характер сходимости метода сопряженных градиентов в терминах  $\mathcal{O}$  от числа итераций метода.
119. Метод Флетчера-Ривза.
120. Метод Полака-Рибьера.

## Теоремы с доказательствами

1. Критерий положительной определенности матрицы через знаки собственных значений симметричной матрицы.
2. Базовые операции, сохраняющие выпуклость множеств: пересечение бесконечного числа множеств, линейная комбинация множеств, образ афинного отображения.
3. Неравенство Йенсена для выпуклой функции и выпуклой комбинации точек.
4. Выпуклость надграфика как критерий выпуклости функции.
5. Дифференциальный критерий сильной выпуклости первого порядка.
6. Дифференциальный критерий сильной выпуклости второго порядка.
7. Теорема о построении сопряженного множества к многогранному множеству.
8. Субдифференциальное условие оптимальности для условных выпуклых задач.
9. Необходимые условия безусловного экстремума.
10. Достаточные условия безусловного экстремума.
11. Субдифференциальная форма теоремы Каруша Куна Таккера (доказательство). Необходимые условия ККТ для произвольной задачи математического программирования (только формулировка).
12. Формулировка симплекс метода для задачи линейного программирования в стандартной форме.  
Теорема о проверке оптимальности решения.
13. Доказательство работы теста корней.
14. Метод дихотомии и золотого сечения для унимодальных функций. Скорость сходимости.
15. Теорема сходимости градиентного спуска для гладких выпуклых функций.
16. Теорема сходимости градиентного спуска для гладких PL функций.
17. Теорема сходимости градиентного спуска для сильно выпуклых квадратичных функций.  
Оптимальные гиперпараметры.
18. Вывод ускоренного метода для квадратичной функции с помощью полиномов Чебышёва.
19. Доказательство сходимости метода сопряженных градиентов и вывод формул метода (В этом вопросе необходимо доказать, за какое количество шагов сходится метод, как выбираются направления и почему в  $A$ -ортогонализации достаточно хранить лишь предыдущий шаг метода, а не все предыдущие).