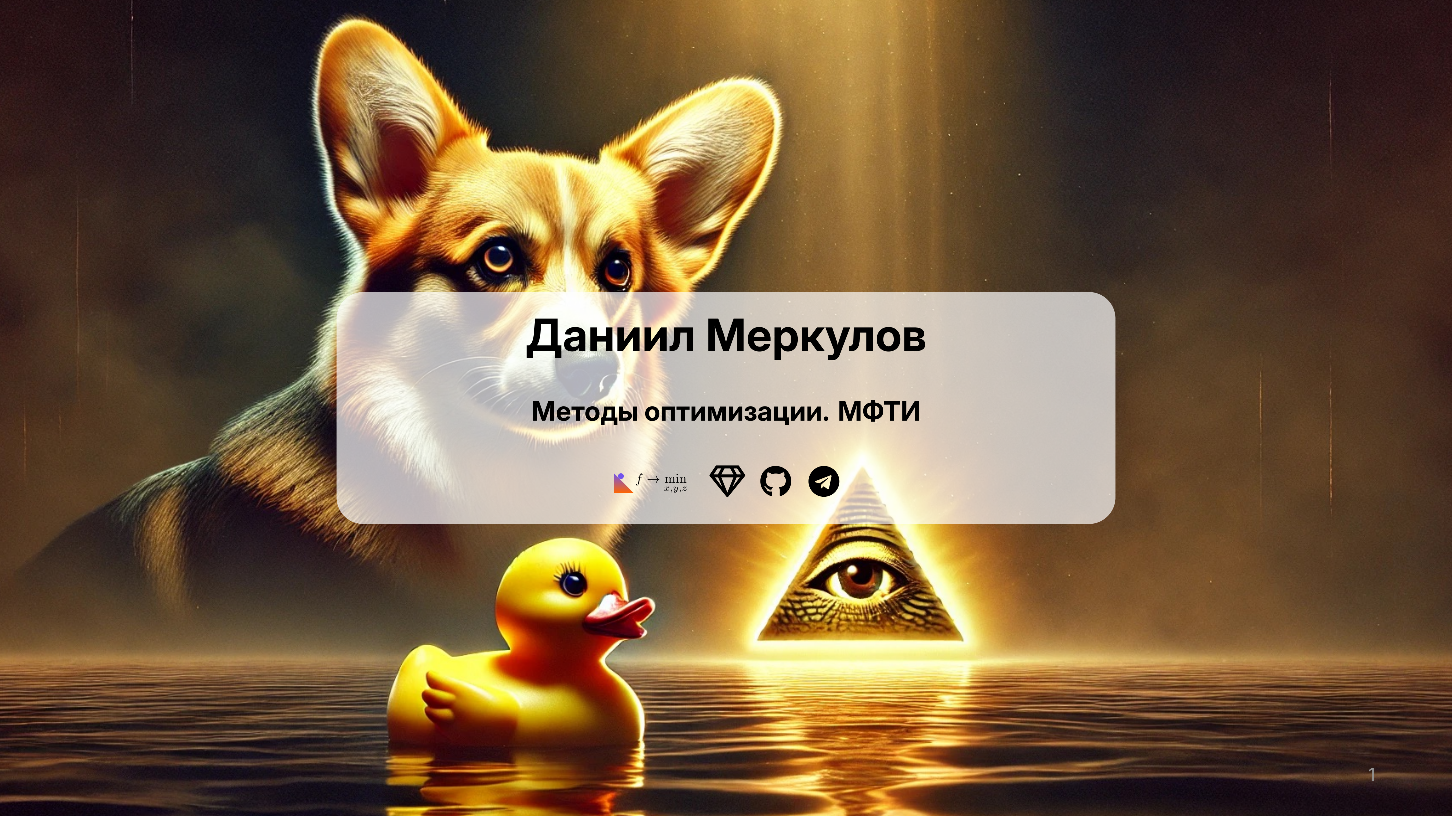


Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

$f \to \min\limits_{x,y,z}$

Градиентный спуск

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение
дифференцируемой функции f вдоль направления
h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение
дифференцируемой функции f вдоль направления
h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение
дифференцируемой функции f вдоль направления
h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции f.

Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции f вдоль направления h, где $\|h\|_2 = 1$:

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы h было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$:

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$|\langle \nabla f(x), h \rangle| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2$$
$$\langle \nabla f(x), h \rangle \geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального** убывания функции f.
Итерация метода имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где $x^k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ — шаг сетки.
Отсюда получаем выражение для x^{k+1}:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.
Открыть в Colab ♣

Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \tag{GF}$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом α:

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где $x^k \equiv x(t_k)$ и $\alpha = t_{k+1} - t_k$ — шаг сетки.
Отсюда получаем выражение для x^{k+1}:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.
Открыть в Colab ♣

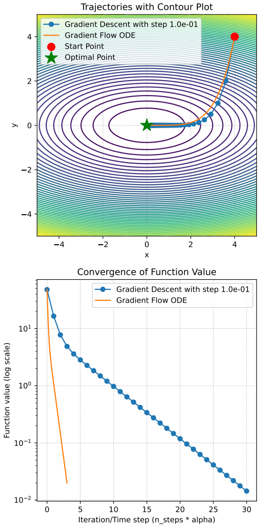
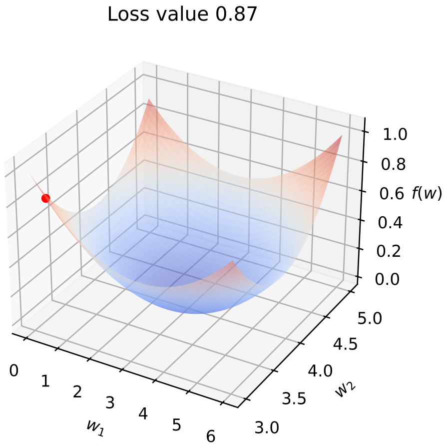


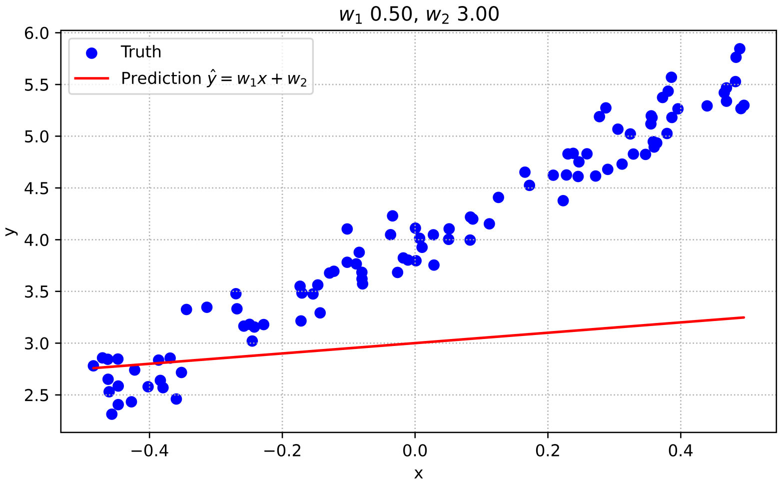
Figure 1. Траектория градиентного потока

Код для построения анимации ниже. Сходимость существенно зависит от выбора шага α:

Сходимость градиентного спуска

Существенно зависит от выбора шага α:





Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \operatorname*{arg\,min}_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^+}{\text{arg min}}\, f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.
Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$
\alpha_k = \underset{\alpha \in \mathbb{R}^+}{\text{arg min}}\, f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))
$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по α_k даёт

$$
\dfrac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))\Big|_{\alpha = \alpha_k} = 0.
$$

Условия оптимальности:

$$
\nabla f(x^{k+1})^\top \nabla f(x^k) = 0
$$

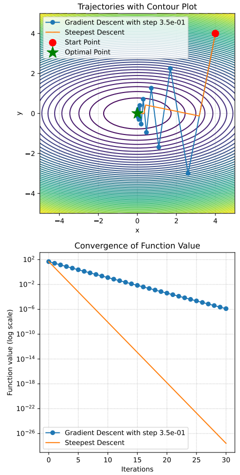


Figure 2. Наискорейший спуск

Открыть в Colab ♣

Сильно выпуклые квадратичные функции

Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

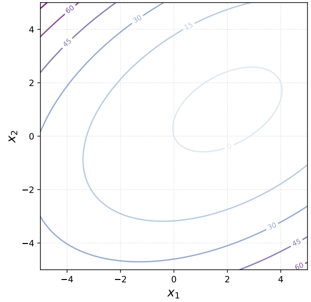
$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

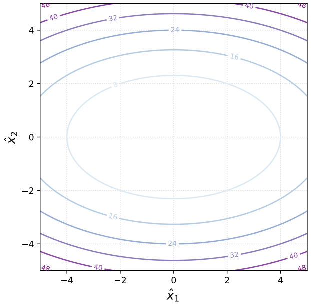
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.



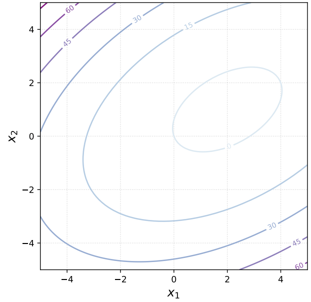


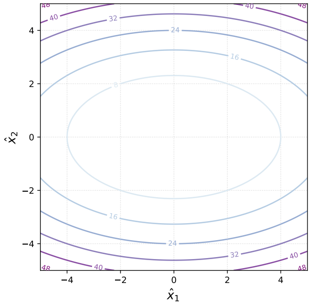
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.



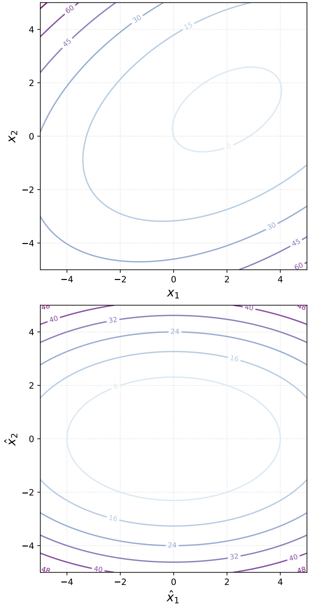


Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.



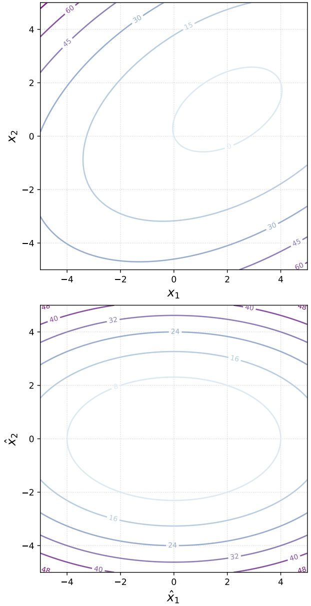
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*)$$



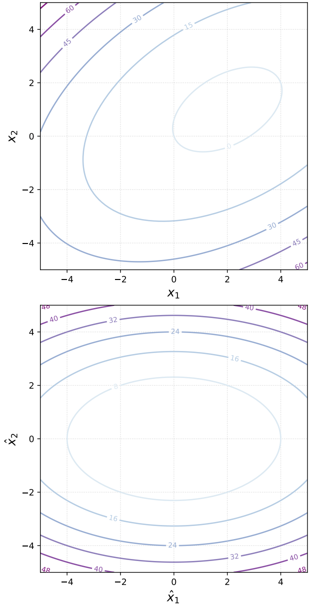
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q\hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T AQ\hat{x} - b^T Q\hat{x} - b^T x^* \end{aligned}$$



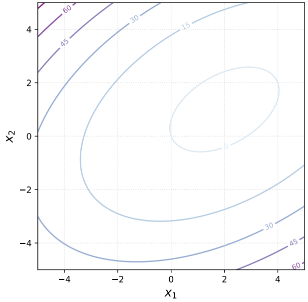
Сдвиг координат

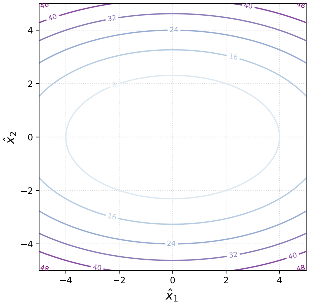
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q\hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q\hat{x} - b^T Q\hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A(x^*) + (x^*)^T A Q\hat{x} - (x^*)^T A^T Q\hat{x} - (x^*)^T A x^*
\end{aligned}$$





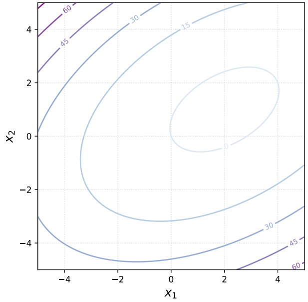
Сдвиг координат

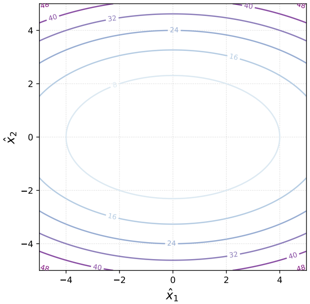
Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{1}{2}x^\top Ax - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q\Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^TQ^TAQ\hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^TA(x^*) + (x^*)^TAQ\hat{x} - b^TQ\hat{x} - b^Tx^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T\Lambda\hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^TA(x^*) + (x^*)^TAQ\hat{x} - (x^*)^TA^TQ\hat{x} - (x^*)^TAx^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T\Lambda\hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^TAx^*
\end{aligned}$$





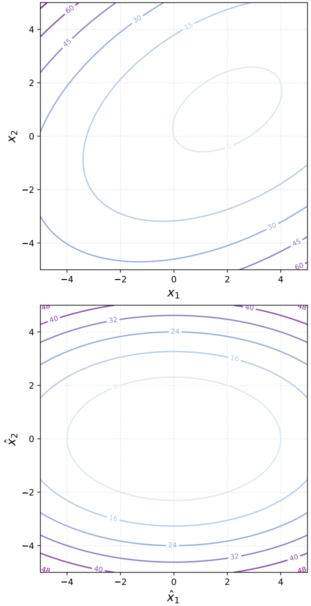
Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}^d_{++}.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить $c = 0$, что не повлияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы $A = Q \Lambda Q^T$.
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$, где x^* — точка минимума исходной функции, определяемая как $Ax^* = b$. При этом $x = Q\hat{x} + x^*$.

$$\begin{aligned}
f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A (Q\hat{x} + x^*) - b^\top (Q\hat{x} + x^*) \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - b^T Q \hat{x} - b^T x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^T A (x^*) + (x^*)^T A Q \hat{x} - (x^*)^T A^T Q \hat{x} - (x^*)^T A x^* \\
&= \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^T A x^* \simeq \frac{1}{2}\hat{x}^T \Lambda \hat{x}
\end{aligned}$$



Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
|1 - \alpha\mu| < 1
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x_{(i)}^{k+1} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x_{(i)}^k &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0
\end{aligned}
$$

$$
|1 - \alpha L| < 1
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 &&
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha)
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^k_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{ |1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L| \right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \left\{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\right\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$
$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$
$$x^{k+1}_{(i)} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$
$$x^{k}_{(i)} = (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1 \qquad\qquad |1 - \alpha L| < 1$$
$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \qquad\qquad -1 < 1 - \alpha L < 1$$
$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 \qquad\qquad \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$
$$= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\}$$
$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$
$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \qquad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$
$$|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$
$$= (I - \alpha^k \Lambda) x^k$$
$$x^{k+1}_{(i)} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$
$$x^k_{(i)} = (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$|1 - \alpha\mu| < 1 \qquad\qquad |1 - \alpha L| < 1$$
$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1 \qquad\qquad -1 < 1 - \alpha L < 1$$
$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0 \qquad\qquad \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}|$$
$$= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\}$$
$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1$$
$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$
$$|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|$$
$$\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2$$

Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией $f(x) = \frac{1}{2}x^T\Lambda x$ с $x^* = 0$ без ограничения общности (убрав крышку из $\hat{x}$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\
&= (I - \alpha^k \Lambda) x^k \\
x^{k+1}_{(i)} &= (1 - \alpha^k \lambda_{(i)})\, x^k_{(i)} \quad \text{для } i\text{-й координаты} \\
x^{k}_{(i)} &= (1 - \alpha\, \lambda_{(i)})^k\, x^0_{(i)} \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha
\end{aligned}
$$

Используем постоянный шаг $\alpha^k = \alpha$. Условие сходимости:

$$
\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| < 1
$$

Помним, что $\lambda_{\text{min}} = \mu > 0$, $\lambda_{\text{max}} = L \geq \mu$.

$$
\begin{aligned}
&|1 - \alpha\mu| < 1 && |1 - \alpha L| < 1 \\
&-1 < 1 - \alpha\mu < 1 && -1 < 1 - \alpha L < 1 \\
&\alpha < \frac{2}{\mu} \qquad \alpha\mu > 0 && \alpha < \frac{2}{L} \qquad \alpha L > 0
\end{aligned}
$$

Выберем α, минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$
\begin{aligned}
\rho^* &= \min_\alpha \rho(\alpha) = \min_\alpha \max_i |1 - \alpha\lambda_{(i)}| \\
&= \min_\alpha \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \\
\alpha^* &: \quad 1 - \alpha^*\mu = \alpha^* L - 1 \\
\alpha^* &= \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}
\end{aligned}
$$

$$
|x^k_{(i)}| \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k |x^0_{(i)}|
$$

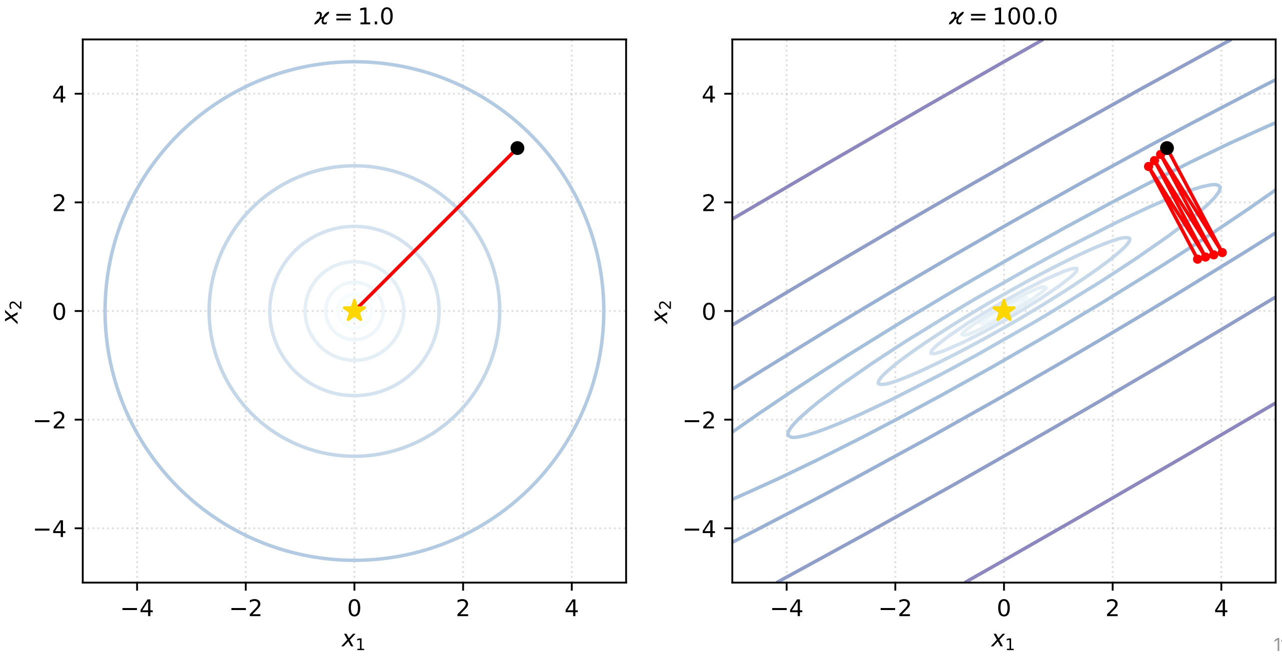
$$
\|x^k\|_2 \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left(\frac{L - \mu}{L + \mu}\right)^{2k} f(x^0)
$$

Анализ сходимости

Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью $\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1 - \frac{2}{\varkappa+1}$, где $\varkappa = \frac{L}{\mu}$ — *число обусловленности* квадратичной задачи.

$\varkappa$	ρ	Итераций до уменьшения ошибки по аргументу в 10 раз	Итераций до уменьшения ошибки по функции в 10 раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

Число обусловленности $\varkappa$



Случай PL-функций

PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

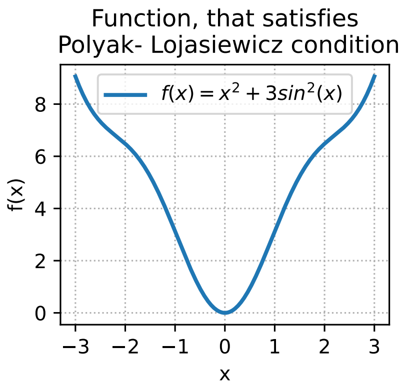
Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$



PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что f удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого $\mu > 0$ выполняется

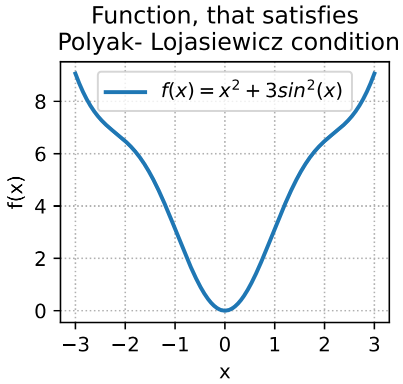
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

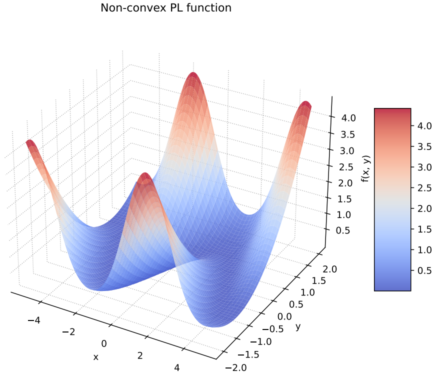
Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

$$f(x,y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$





Анализ сходимости

Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что f является PL-функцией с константой μ и L-гладкой, для некоторых $L \geq \mu > 0$.
Рассмотрим последовательность $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, сгенерированную методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \left(2 - L\alpha\right) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned}
$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Анализ сходимости

Используем L-гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге $\alpha L \leq 1$.

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha\mu(f(x^k) - f^*).$$

Вычтя f^* из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

> **Theorem**
>
> Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

> **Theorem**
>
> Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$
f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2
$$

Положим $y = x^*$:

$$
\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)
\end{aligned}
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

> **Theorem**
>
> Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) + \frac{\mu}{2}\|y-x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^*-x) + \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x-x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^*-x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^*-x)\right)^T(x-x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^*-x)\right)^T\sqrt{\mu}(x-x^*)
\end{aligned}$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

ℹ Theorem

Если функция $f(x)$ дифференцируема и μ-сильно выпукла, то она является PL-функцией.

Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим $y = x^*$:

$$\begin{aligned}
f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\
f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\
&= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T (x - x^*) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*)
\end{aligned}$$

Пусть $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$ и
$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$
Тогда $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$ и
$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,$$

Любая μ-сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\|\sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)\right\|_2^2\right)
$$

$$
f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu}\|\nabla f(x)\|_2^2,
$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

Выпуклый гладкий случай

Выпуклый гладкий случай

Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что f является выпуклой и L-гладкой функцией, для некоторого $L > 0$.
Пусть $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки x^0 с постоянным шагом α, удовлетворяющим $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$. Пусть $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$. Тогда для всех $x^* \in \text{argmin}\, f$ и всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо:

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

(1)

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \tag{1}$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \left(2 - L\alpha\right) \|\nabla f(x^k)\|^2
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2,
\end{aligned} \tag{1}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \left(2 - L\alpha\right) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\le f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\le f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\ge \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\le f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\le f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\ge \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут $\alpha = \frac{1}{L}$.

- После этого используем выпуклость:

(2)

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\le f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha\|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\le f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\ f(x^k) - f(x^{k+1}) &\ge \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L} \end{aligned} \tag{1}$$

  Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут $\alpha = \frac{1}{L}$.

- После этого используем выпуклость:

$$f(y) \ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \tag{2}$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\geq \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут $\alpha = \frac{1}{L}$.

- После этого используем выпуклость:

$$
f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ где } y = x^*, x = x^k
\tag{2}
$$

Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\le f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
&= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\left(2 - L\alpha\right)\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&\le f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2, \\
f(x^k) - f(x^{k+1}) &\ge \frac{1}{2L}\|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \tfrac{1}{L}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут $\alpha = \frac{1}{L}$.

- После этого используем выпуклость:

$$
\begin{aligned}
f(y) &\ge f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ где } y = x^*, x = x^k \\
f(x^k) - f^* &\le \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha\nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$.

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
f(x^{k+1}) \leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right]
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right]
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha\nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha\nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Просуммируем по $i = 0, \ldots, k-1$. Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

(3)

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\le f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \le f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha \nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\le f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\le f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\le \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Просуммируем по $i = 0, \ldots, k-1$. Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$
2\alpha \sum_{i=0}^{k-1}\left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \le \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \tag{3}
$$

Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 &\leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|\nabla f(x^k)\|^2 \\
&= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k) \rangle \\
&= f^* + \frac{1}{2\alpha}\left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)\right\rangle
\end{aligned}
$$

Пусть $a = x^k - x^*$ и $b = x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)$. Тогда $a + b = \alpha\nabla f(x^k)$ и $a - b = 2\left(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2}\nabla f(x^k)\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha\nabla f(x^k)\|_2^2\right] \\
&\leq f^* + \frac{1}{2\alpha}\left[\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2\right] \\
2\alpha\left(f(x^{k+1}) - f^*\right) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
\end{aligned}
$$

- Просуммируем по $i = 0, \ldots, k-1$. Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$
2\alpha \sum_{i=0}^{k-1}\left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \tag{3}
$$

Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$, то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$, то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$, то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$2\alpha k f(x^k) - 2\alpha k f^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^* \right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$, то

$$
kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})
$$

- Теперь подставим это в (3):

$$
2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^* \right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2
$$

$$
f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k}
$$

Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$, то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} \left(f(x^{i+1}) - f^*\right) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \leq \frac{L\|x^0 - x^*\|_2^2}{2k}$$

Итог

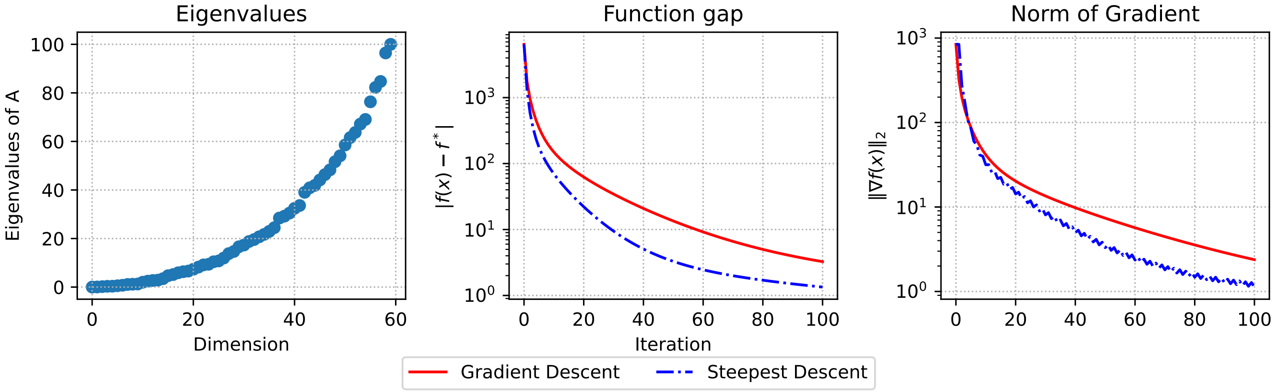
Градиентный спуск: $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ $\qquad x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$

гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\|\nabla f(x^k)\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right)$	$\|x^k - x^*\|^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \dfrac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\varkappa \log \dfrac{1}{\varepsilon}\right)$

Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

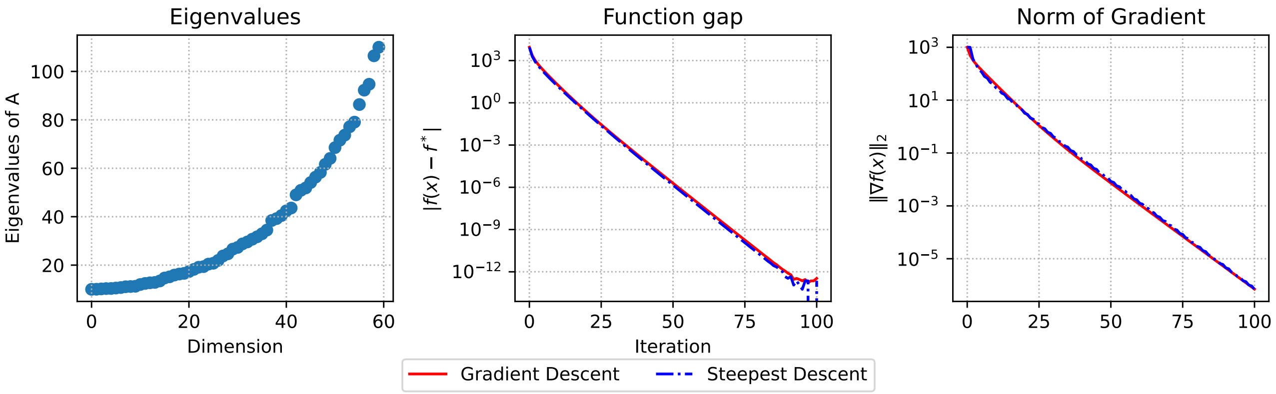
Convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

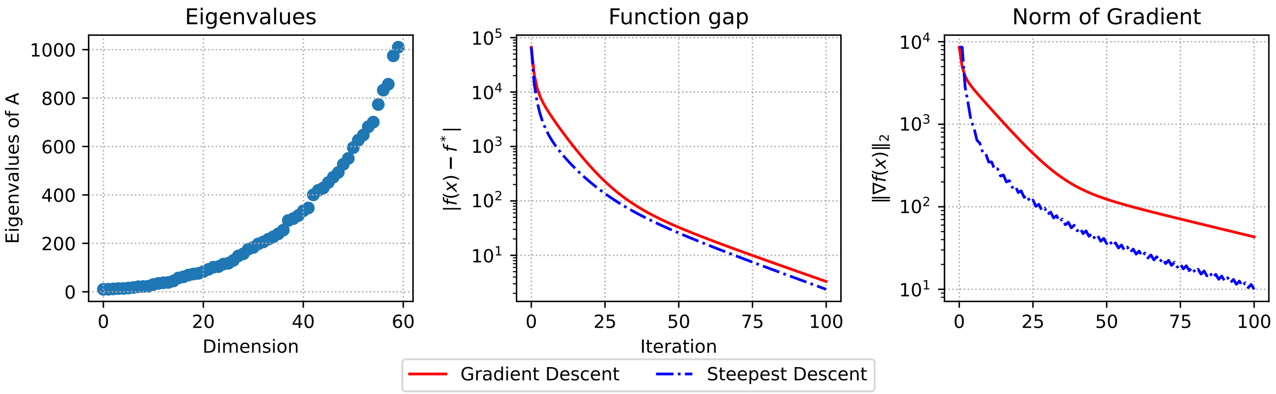
Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



Численные эксперименты

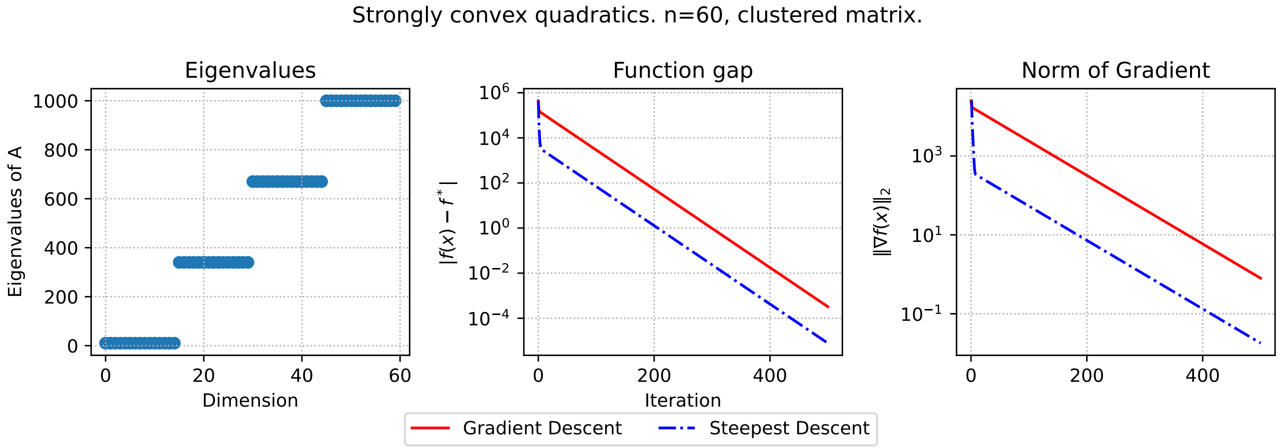
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex quadratics. n=60, random matrix.



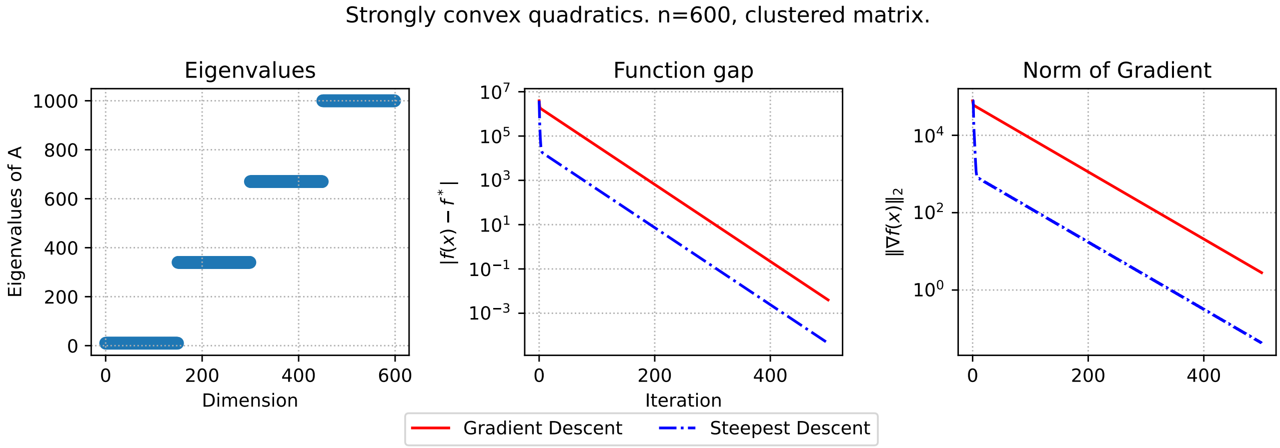
Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$



Численные эксперименты

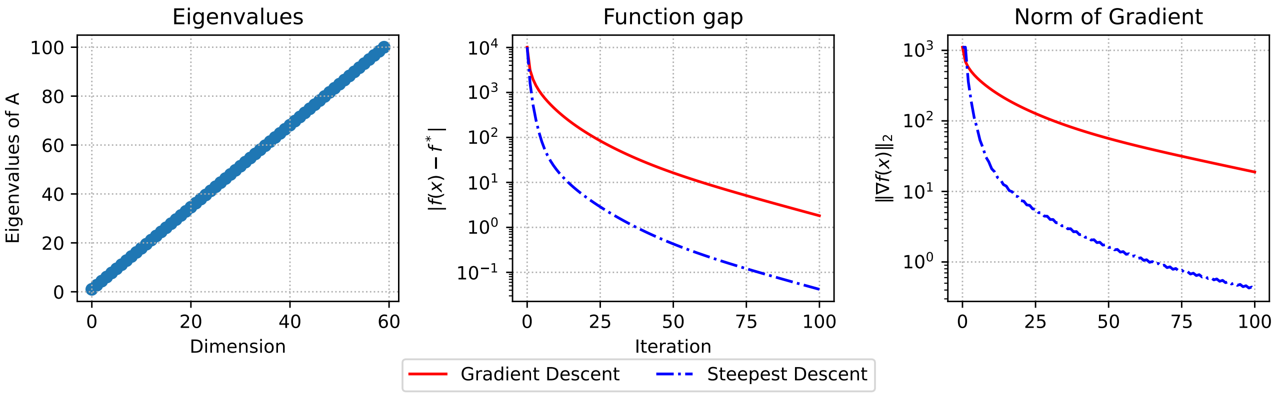
$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$



Численные эксперименты

$$
f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}
$$

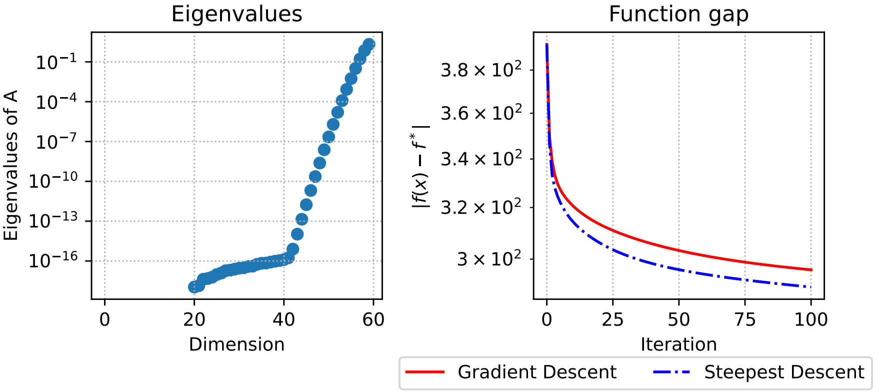
Strongly convex quadratics. n=60, uniform spectrum matrix.



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T A x - b^T x \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

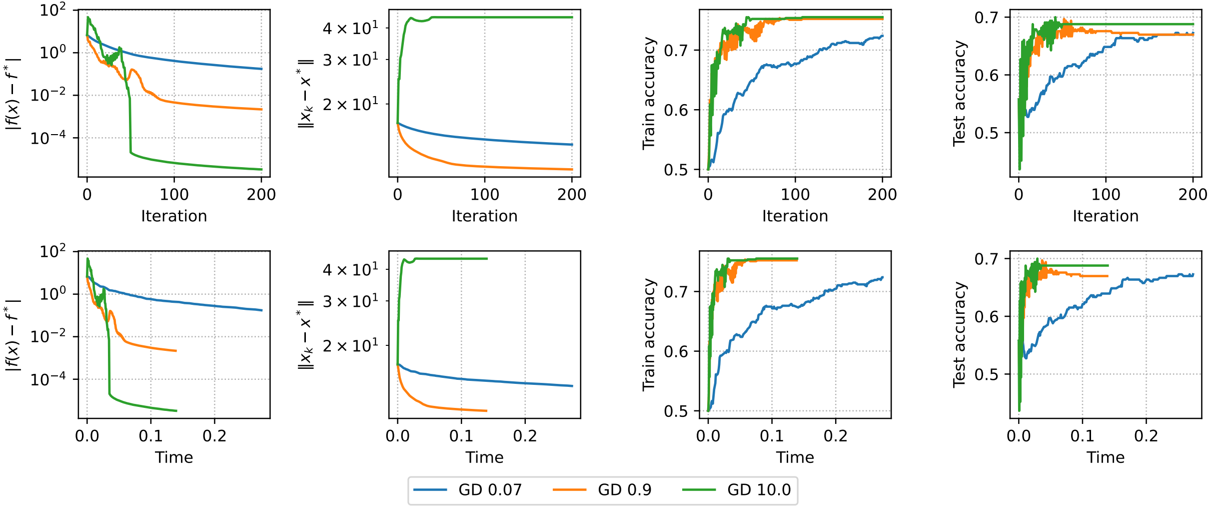
Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}$$

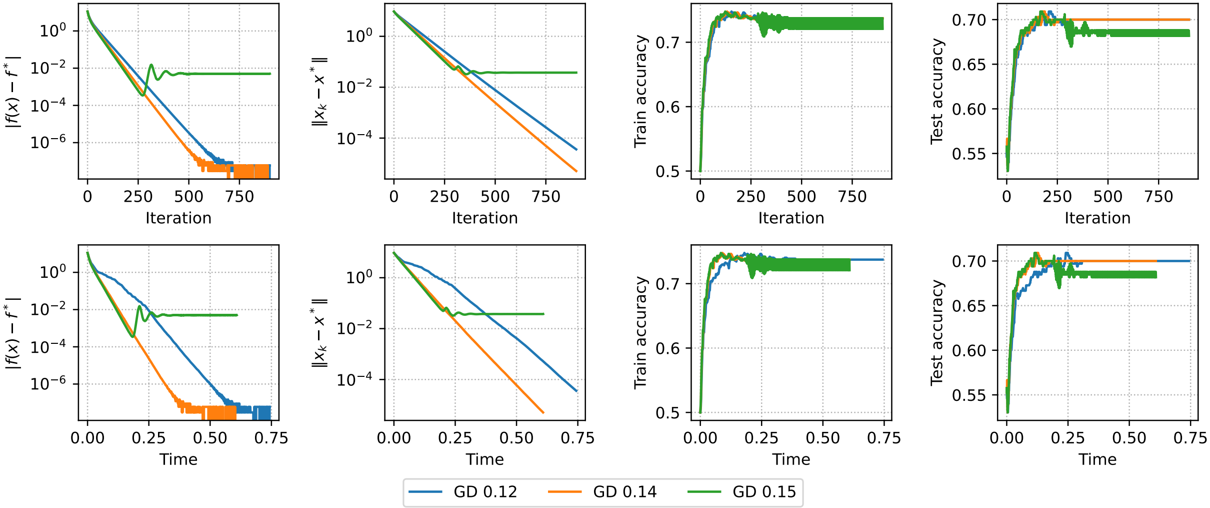
Convex binary logistic regression. mu=0.



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}$$

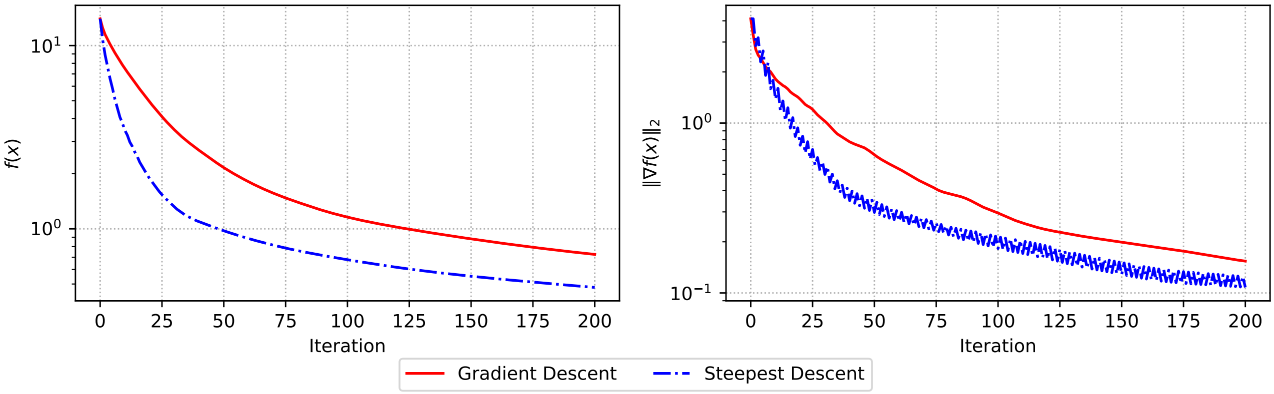
Strongly convex binary logistic regression. mu=0.1.



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x\in\mathbb{R}^n}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000. μ=0



Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2 + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \log(1 + \exp(-y_i\langle a_i, x\rangle)) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$