

# Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ



# Градиентный спуск

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение  
дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  
 $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального убывания** функции  $f$ .

# Направление локального наискорейшего спуска

Рассмотрим линейное приближение дифференцируемой функции  $f$  вдоль направления  $h$ , где  $\|h\|_2 = 1$ :

$$f(x + \alpha h) = f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha)$$

Хотим, чтобы  $h$  было направлением убывания:

$$f(x + \alpha h) < f(x)$$

$$f(x) + \alpha \langle \nabla f(x), h \rangle + o(\alpha) < f(x)$$

Переходя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ :

$$\langle \nabla f(x), h \rangle \leq 0$$

Также из неравенства Коши–Буняковского получаем:

$$\begin{aligned} |\langle \nabla f(x), h \rangle| &\leq \|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 \\ \langle \nabla f(x), h \rangle &\geq -\|\nabla f(x)\|_2 \|h\|_2 = -\|\nabla f(x)\|_2 \end{aligned}$$

Таким образом, направление антиградиента

$$h = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2}$$

представляет собой направление **наискорейшего локального убывания** функции  $f$ .

Итерация метода имеет вид:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k)$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

# Дифференциальное уравнение градиентного потока

Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)). \quad (\text{GF})$$

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab 

# Дифференциальное уравнение градиентного потока



Рассмотрим дифференциальное уравнение градиентного потока:

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x(t)).$$

(GF)

Дискретизируем его на равномерной сетке с шагом  $\alpha$ :

$$\frac{x^{k+1} - x^k}{\alpha} = -\nabla f(x^k),$$

где  $x^k \equiv x(t_k)$  и  $\alpha = t_{k+1} - t_k$  — шаг сетки.

Отсюда получаем выражение для  $x^{k+1}$ :

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \nabla f(x^k),$$

являющееся точной формулой обновления градиентного спуска.

Открыть в Colab

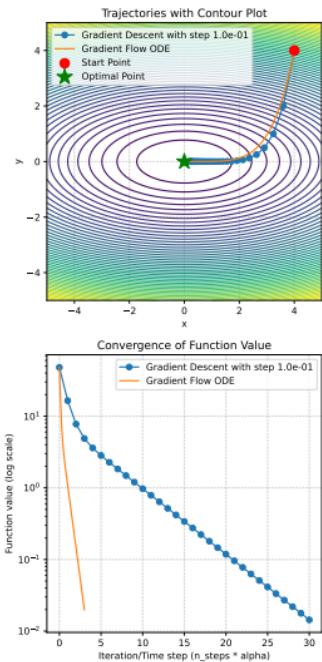
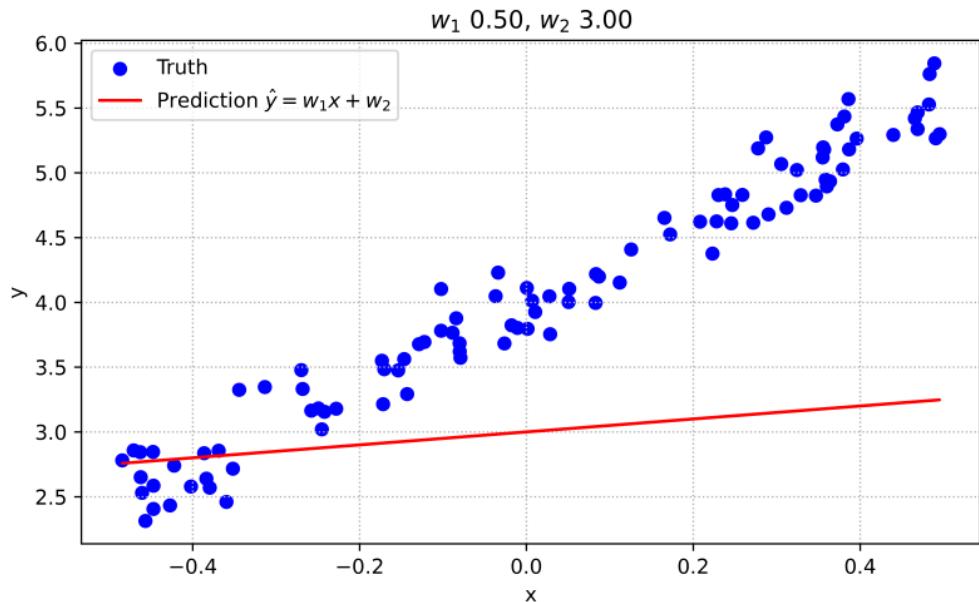
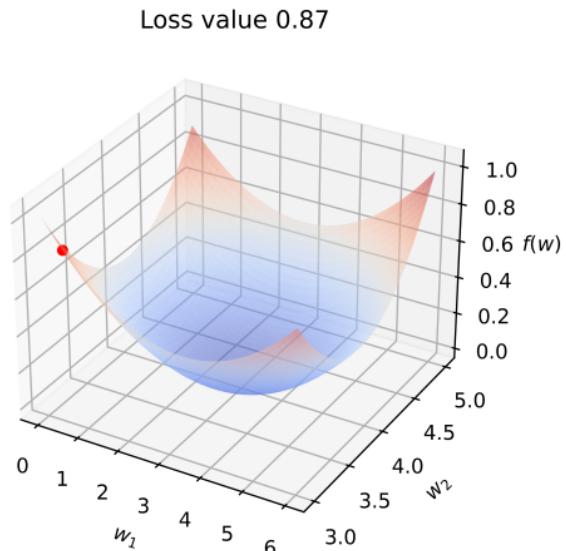


Figure 1. Траектория градиентного потока

Код для построения анимации ниже. Сходимость существенно зависит от выбора шага  $\alpha$ :

# Сходимость градиентного спуска

Существенно зависит от выбора шага  $\alpha$ :



# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

# Точный линейный поиск (метод наискорейшего спуска)

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha \in \mathbb{R}^+} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k))$$

Подход скорее теоретический, чем практический: он удобен для анализа сходимости, но точный линейный поиск часто затруднён, если вычисление функции занимает слишком много времени или стоит слишком дорого.

Интересное теоретическое свойство этого метода заключается в том, что градиенты на соседних итерациях ортогональны. Условие оптимальности по  $\alpha_k$  даёт

$$\frac{d}{d\alpha} f(x^k - \alpha \nabla f(x^k)) \Big|_{\alpha=\alpha_k} = 0.$$

Условия оптимальности:

$$\nabla f(x^{k+1})^\top \nabla f(x^k) = 0$$

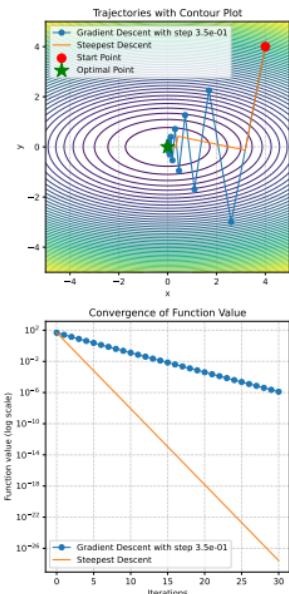


Figure 2. Наискорейший спуск

# Сильно выпуклые квадратичные функции

# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

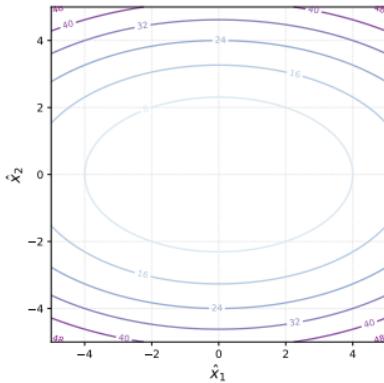
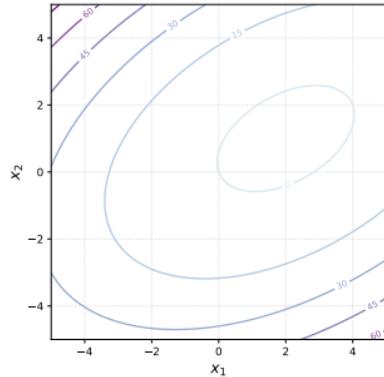
$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.

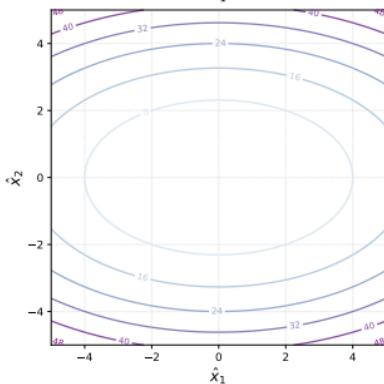
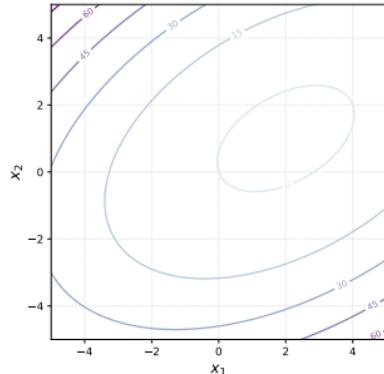


# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .

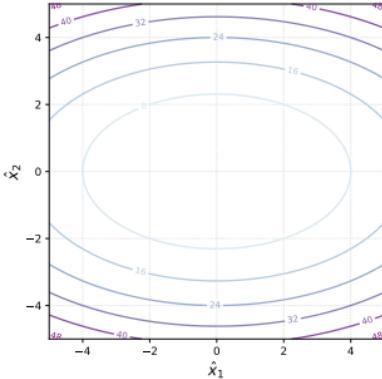
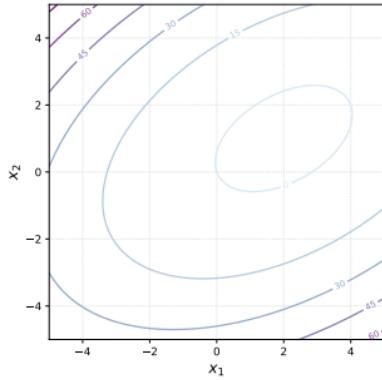


# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .



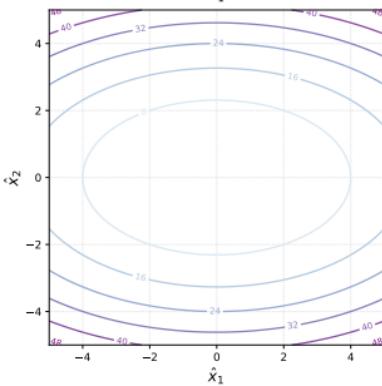
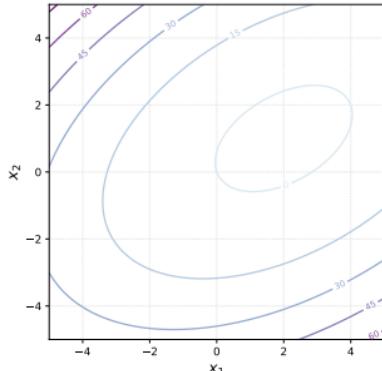
# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*)$$



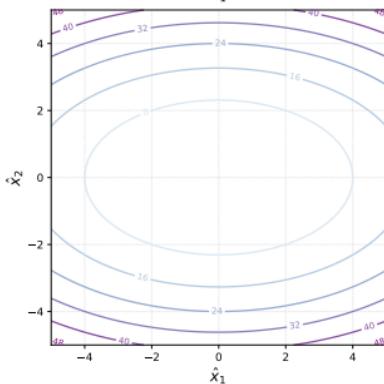
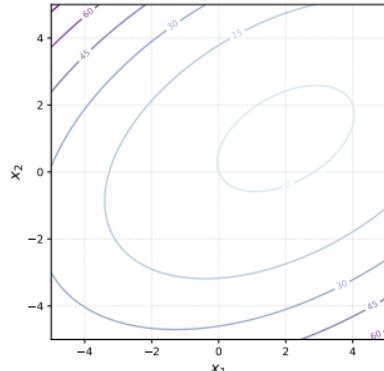
# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \end{aligned}$$



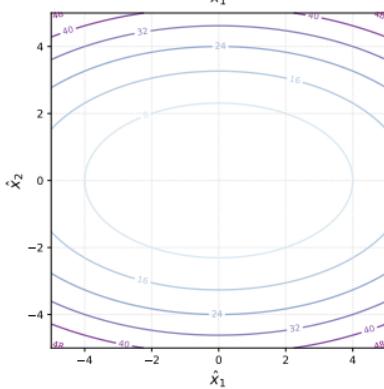
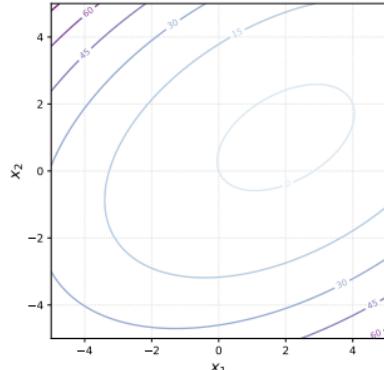
# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



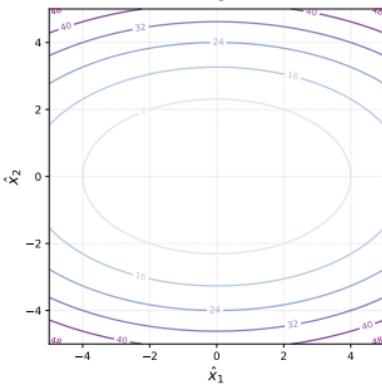
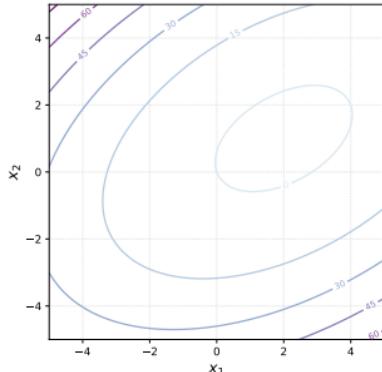
# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^\top A x^* \end{aligned}$$



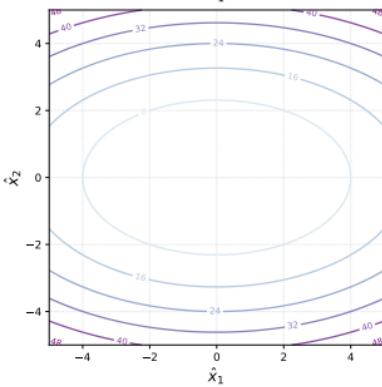
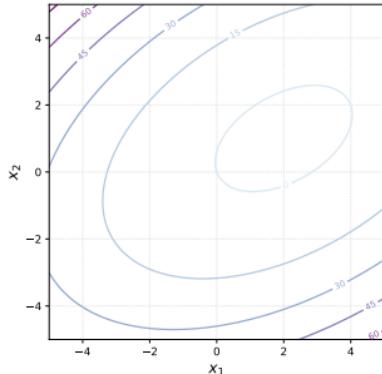
# Сдвиг координат

Рассмотрим следующую задачу квадратичной оптимизации:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) = \min_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{1}{2} x^\top A x - b^\top x + c, \text{ где } A \in \mathbb{S}_{++}^d.$$

- Во-первых, без ограничения общности мы можем установить  $c = 0$ , что не влияет на процесс оптимизации.
- Во-вторых, у нас есть спектральное разложение матрицы  $A = Q\Lambda Q^T$ .
- Покажем, что мы можем сделать сдвиг координат, чтобы сделать анализ немного проще. Пусть  $\hat{x} = Q^T(x - x^*)$ , где  $x^*$  — точка минимума исходной функции, определяемая как  $Ax^* = b$ . При этом  $x = Q\hat{x} + x^*$ .

$$\begin{aligned} f(\hat{x}) &= \frac{1}{2}(Q\hat{x} + x^*)^\top A(Q\hat{x} + x^*) - b^\top(Q\hat{x} + x^*) \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top Q^T A Q \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - b^\top Q \hat{x} - b^\top x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} + \frac{1}{2}(x^*)^\top A(x^*) + (x^*)^\top A Q \hat{x} - (x^*)^\top A^T Q \hat{x} - (x^*)^\top A x^* \\ &= \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} - \frac{1}{2}(x^*)^\top A x^* \simeq \frac{1}{2}\hat{x}^\top \Lambda \hat{x} \end{aligned}$$



# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\&= (I - \alpha^k \Lambda)x^k\end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1 \quad |1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k$$

$$= (I - \alpha^k \Lambda)x^k$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha)$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$\begin{aligned} |1 - \alpha\mu| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha\mu &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha L| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L &> 0 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\rho^* = \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}|$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$\begin{aligned} |1 - \alpha \mu| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha \mu &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha L| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L &> 0 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \\ \alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu &= \alpha^* L - 1 \end{aligned}$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$\begin{aligned} |1 - \alpha \mu| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha \mu &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |1 - \alpha L| &< 1 \\ -1 < 1 - \alpha L &< 1 \\ \alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L &> 0 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha \mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha \mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha \mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha \mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2$$

# Анализ сходимости

Теперь мы можем работать с функцией  $f(x) = \frac{1}{2}x^T \Lambda x$  с  $x^* = 0$  без ограничения общности (убрав крышку из  $\hat{x}$ )

$$\begin{aligned} x^{k+1} &= x^k - \alpha^k \nabla f(x^k) = x^k - \alpha^k \Lambda x^k \\ &= (I - \alpha^k \Lambda)x^k \end{aligned}$$

$$x_{(i)}^{k+1} = (1 - \alpha^k \lambda_{(i)}) x_{(i)}^k \quad \text{для } i\text{-й координаты}$$

$$x_{(i)}^k = (1 - \alpha \lambda_{(i)})^k x_{(i)}^0 \quad \text{при постоянном шаге } \alpha^k = \alpha$$

Используем постоянный шаг  $\alpha^k = \alpha$ . Условие сходимости:

$$\rho(\alpha) = \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| < 1$$

Помним, что  $\lambda_{\min} = \mu > 0$ ,  $\lambda_{\max} = L \geq \mu$ .

$$|1 - \alpha\mu| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha\mu < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{\mu} \quad \alpha\mu > 0$$

$$|1 - \alpha L| < 1$$

$$-1 < 1 - \alpha L < 1$$

$$\alpha < \frac{2}{L} \quad \alpha L > 0$$

Выберем  $\alpha$ , минимизирующий худший знаменатель прогрессии

$$\begin{aligned} \rho^* &= \min_{\alpha} \rho(\alpha) = \min_{\alpha} \max_i |1 - \alpha \lambda_{(i)}| \\ &= \min_{\alpha} \max \{|1 - \alpha\mu|, |1 - \alpha L|\} \end{aligned}$$

$$\alpha^* : \quad 1 - \alpha^* \mu = \alpha^* L - 1$$

$$\alpha^* = \frac{2}{\mu + L} \quad \rho^* = \frac{L - \mu}{L + \mu}$$

$$|x_{(i)}^k| \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k |x_{(i)}^0|$$

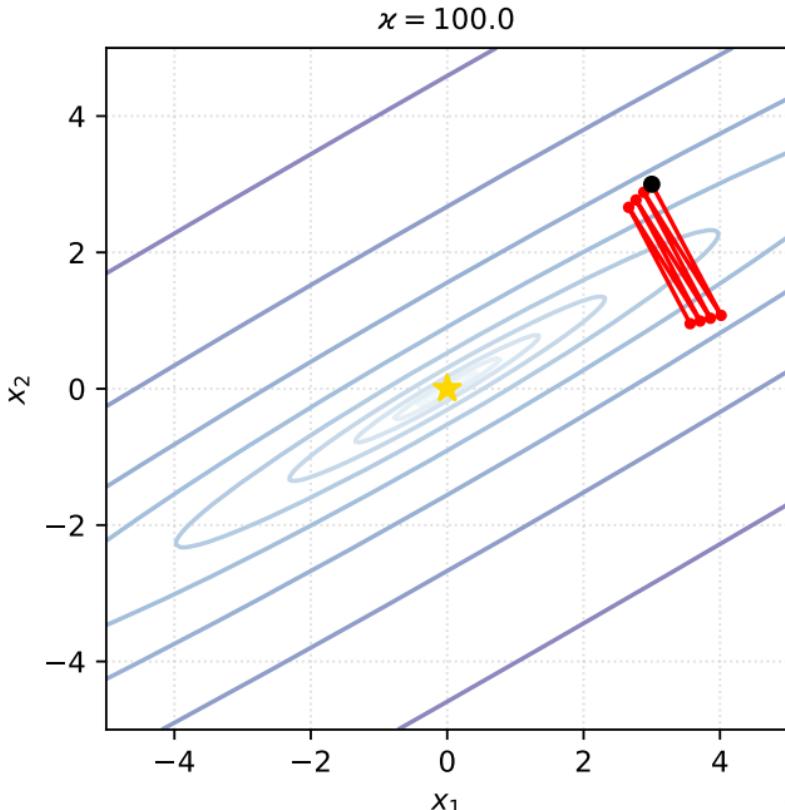
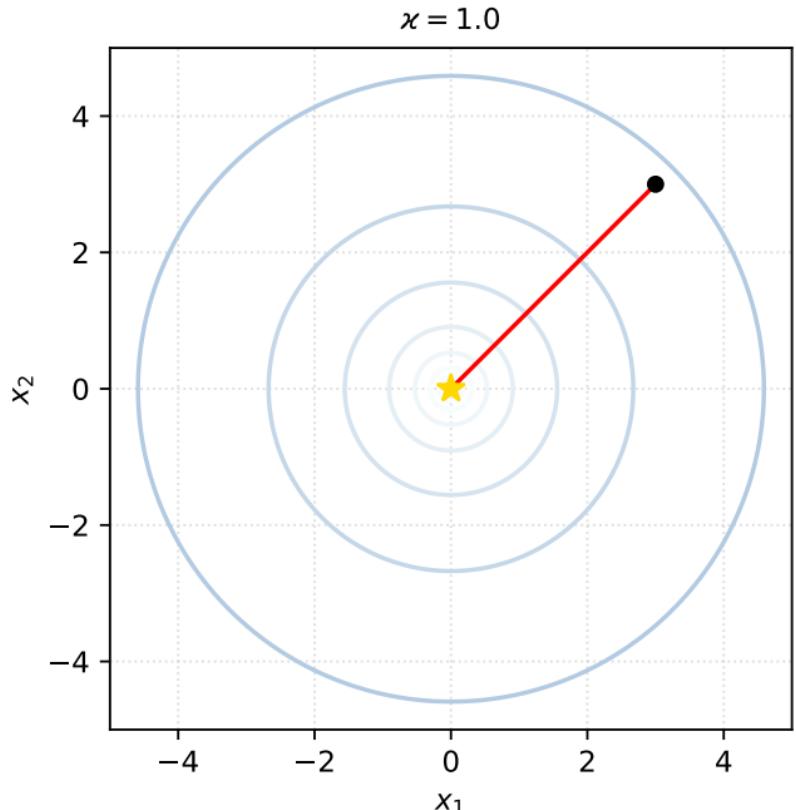
$$\|x^k\|_2 \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^k \|x^0\|_2 \quad f(x^k) \leq \left( \frac{L - \mu}{L + \mu} \right)^{2k} f(x^0)$$

# Анализ сходимости

Таким образом, имеем линейную сходимость по аргументу со скоростью  $\frac{\kappa-1}{\kappa+1} = 1 - \frac{2}{\kappa+1}$ , где  $\kappa = \frac{L}{\mu}$  — число обусловленности квадратичной задачи.

$\kappa$	$\rho$	Итераций до уменьшения ошибки	
		по аргументу в 10 раз	по функции в 10 раз
1.1	0.05	1	1
2	0.33	3	2
5	0.67	6	3
10	0.82	12	6
50	0.96	58	29
100	0.98	116	58
500	0.996	576	288
1000	0.998	1152	576

# Число обусловленности $\kappa$





# Случай PL-функций

# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

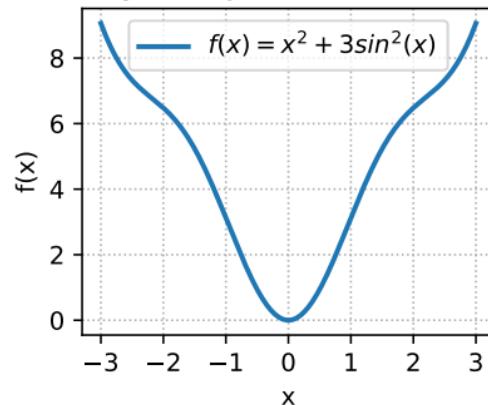
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

$$f(x) = x^2 + 3\sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak- Lojasiewicz condition



# PL-функции. Линейная сходимость градиентного спуска без выпуклости

Говорят, что  $f$  удовлетворяет условию Поляка-Лоясиевича (PL), если для некоторого  $\mu > 0$  выполняется

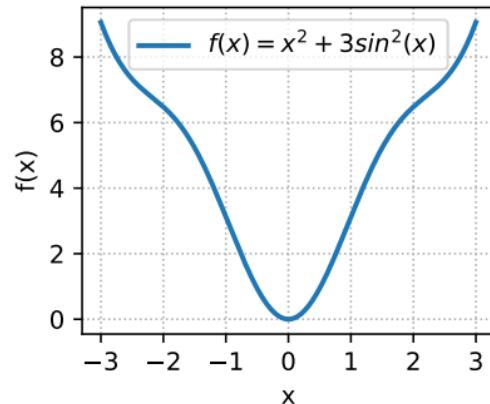
$$\|\nabla f(x)\|^2 \geq 2\mu(f(x) - f^*) \quad \forall x$$

Интересно, что градиентный спуск может сходиться линейно даже без выпуклости.

Следующие функции удовлетворяют условию PL, но не являются выпуклыми. Код

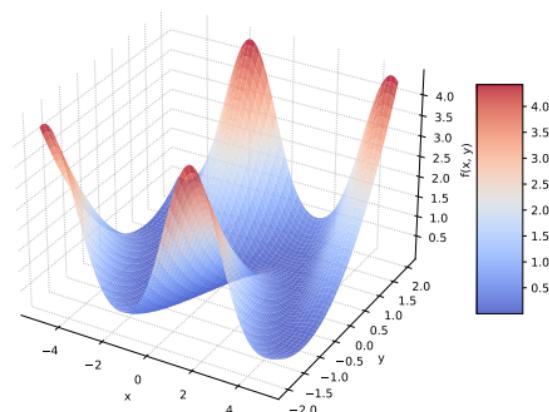
$$f(x) = x^2 + 3 \sin^2(x)$$

Function, that satisfies  
Polyak- Lojasiewicz condition



$$f(x, y) = \frac{(y - \sin x)^2}{2}$$

Non-convex PL function



# Анализ сходимости

## Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что  $f$  является PL-функцией с константой  $\mu$  и  $L$ -гладкой, для некоторых  $L \geq \mu > 0$ .

Рассмотрим последовательность  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ , сгенерированную методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Пусть  $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ . Тогда:

$$f(x^k) - f^* \leq (1 - \alpha\mu)^k (f(x^0) - f^*).$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2, \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

# Анализ сходимости

Используем  $L$ -гладкость вместе с правилом обновления, чтобы записать:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned}$$

где в последнем неравенстве использована гипотеза о шаге  $\alpha L \leq 1$ .

Теперь используем свойство PL-функции и получаем:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \alpha \mu (f(x^k) - f^*).$$

Вычтя  $f^*$  из обеих частей этого неравенства и применив рекурсию, мы получим искомый результат.

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$f(x^*) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2$$

$$f(x) - f(x^*) \leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 =$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T (x^* - x) + \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T (x - x^*) - \frac{\mu}{2} \|x^* - x\|_2^2 = \\ &= (\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2} (x^* - x))^T (x - x^*) = \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Пусть  $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$  и  
 $b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x) \right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

## Theorem

Если функция  $f(x)$  дифференцируема и  $\mu$ -сильно выпукла, то она является PL-функцией.

### Доказательство

По критерию сильной выпуклости первого порядка:

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{\mu}{2}\|y - x\|_2^2$$

Положим  $y = x^*$ :

$$\begin{aligned} f(x^*) &\geq f(x) + \nabla f(x)^T(x^* - x) + \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 \\ f(x) - f(x^*) &\leq \nabla f(x)^T(x - x^*) - \frac{\mu}{2}\|x^* - x\|_2^2 = \\ &= \left(\nabla f(x)^T - \frac{\mu}{2}(x^* - x)\right)^T(x - x^*) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)^T - \sqrt{\mu}(x^* - x)\right)^T \sqrt{\mu}(x - x^*) \end{aligned}$$

Пусть  $a = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$  и

$$b = \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x)$$

Тогда  $a + b = \sqrt{\mu}(x - x^*)$  и

$$a - b = \frac{2}{\sqrt{\mu}}\nabla f(x) - \sqrt{\mu}(x - x^*)$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right)$$
$$f(x) - f(x^*) \leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2,$$

# Любая $\mu$ -сильно выпуклая дифференцируемая функция является PL-функцией

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2 - \left\| \sqrt{\mu}(x - x^*) - \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla f(x) \right\|_2^2 \right) \\ f(x) - f(x^*) &\leq \frac{1}{2\mu} \|\nabla f(x)\|_2^2, \end{aligned}$$

которое является точным условием PL. Это означает, что мы уже имеем доказательство линейной сходимости для любой сильно выпуклой функции.

# Выпуклый гладкий случай

# Выпуклый гладкий случай

## Theorem

Рассмотрим задачу

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^d}$$

и предположим, что  $f$  является выпуклой и  $L$ -гладкой функцией, для некоторого  $L > 0$ .

Пусть  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  — последовательность итераций, сгенерированная методом градиентного спуска из точки  $x^0$  с постоянным шагом  $\alpha$ , удовлетворяющим  $0 < \alpha \leq \frac{1}{L}$ . Пусть  $f^* = \min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x)$ . Тогда для всех  $x^* \in \operatorname{argmin} f$  и всех  $k \in \mathbb{N}$  справедливо:

$$f(x^k) - f^* \leq \frac{\|x^0 - x^*\|^2}{2\alpha k}.$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

(1)

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

(1)

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned}$$

(1)

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\ &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \end{aligned} \tag{1}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

(2)

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \tag{2}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ где } y = x^*, x = x^k \tag{2}$$

# Анализ сходимости

- Как и раньше, сначала используем гладкость:

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2} \|x^{k+1} - x^k\|^2 \\
 &= f(x^k) - \alpha \|\nabla f(x^k)\|^2 + \frac{L\alpha^2}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f(x^k) - \frac{\alpha}{2} (2 - L\alpha) \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2,
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2L} \|\nabla f(x^k)\|^2 \quad \text{если } \alpha = \frac{1}{L}$$

Обычно для сходящегося градиентного спуска чем больше допустимый шаг, тем быстрее сходимость, поэтому часто берут  $\alpha = \frac{1}{L}$ .

- После этого используем выпуклость:

$$\begin{aligned}
 f(y) &\geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle \text{ где } y = x^*, x = x^k \\
 f(x^k) - f^* &\leq \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle
 \end{aligned} \tag{2}$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned} f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\ &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\ &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ .

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$f(x^{k+1}) \leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2]$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\
 &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2]
 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\
 &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\
 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
 \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\
 &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\
 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

(3)

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\
 &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\
 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \quad (3)$$

# Анализ сходимости

- Теперь подставляем (2) в (1):

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f(x^k) - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \leq f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* \rangle - \frac{\alpha}{2} \|\nabla f(x^k)\|^2 \\
 &= f^* + \langle \nabla f(x^k), x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \rangle \\
 &= f^* + \frac{1}{2\alpha} \left\langle \alpha \nabla f(x^k), 2 \left( x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k) \right) \right\rangle
 \end{aligned}$$

Пусть  $a = x^k - x^*$  и  $b = x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)$ . Тогда  $a - b = \alpha \nabla f(x^k)$  и  $a + b = 2(x^k - x^* - \frac{\alpha}{2} \nabla f(x^k))$ .

$$\begin{aligned}
 f(x^{k+1}) &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^* - \alpha \nabla f(x^k)\|_2^2] \\
 &\leq f^* + \frac{1}{2\alpha} [\|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2] \\
 2\alpha (f(x^{k+1}) - f^*) &\leq \|x^k - x^*\|_2^2 - \|x^{k+1} - x^*\|_2^2
 \end{aligned}$$

- Просуммируем по  $i = 0, \dots, k-1$ . Большинство слагаемых обнуляется из-за телескопической суммы:

$$2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 - \|x^k - x^*\|_2^2 \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \tag{3}$$

# Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

# Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

# Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* \leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2$$

# Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$\begin{aligned} 2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* &\leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \\ f(x^k) - f^* &\leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \end{aligned}$$

# Анализ сходимости

- Поскольку на каждой итерации  $f(x^{i+1}) \leq f(x^i)$ , то

$$kf(x^k) \leq \sum_{i=0}^{k-1} f(x^{i+1})$$

- Теперь подставим это в (3):

$$\begin{aligned} 2\alpha kf(x^k) - 2\alpha kf^* &\leq 2\alpha \sum_{i=0}^{k-1} (f(x^{i+1}) - f^*) \leq \|x^0 - x^*\|_2^2 \\ f(x^k) - f^* &\leq \frac{\|x^0 - x^*\|_2^2}{2\alpha k} \leq \frac{L\|x^0 - x^*\|_2^2}{2k} \end{aligned}$$

# Итог



Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x^{k+1} = x^k - \alpha^k \nabla f(x^k)$$

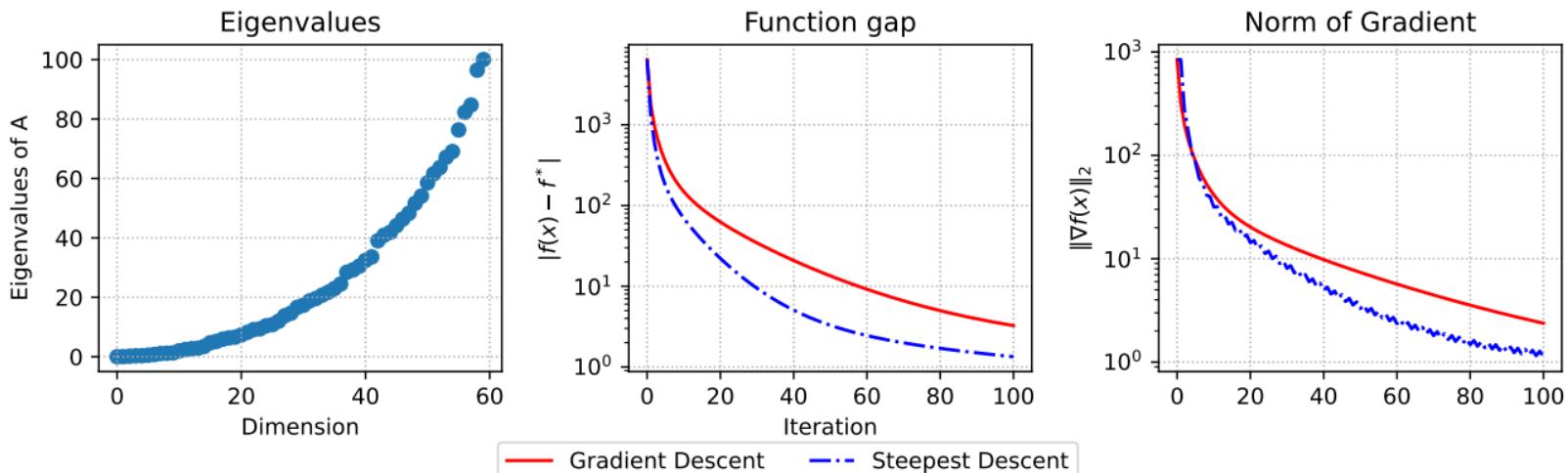
гладкий (не выпуклый)	гладкий и выпуклый	гладкий и сильно выпуклый (или PL)
$\ \nabla f(x^k)\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$f(x^k) - f^* \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x^k - x^*\ ^2 \sim \mathcal{O}\left(\left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k\right)$ $k_\varepsilon \sim \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

# Численные эксперименты



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

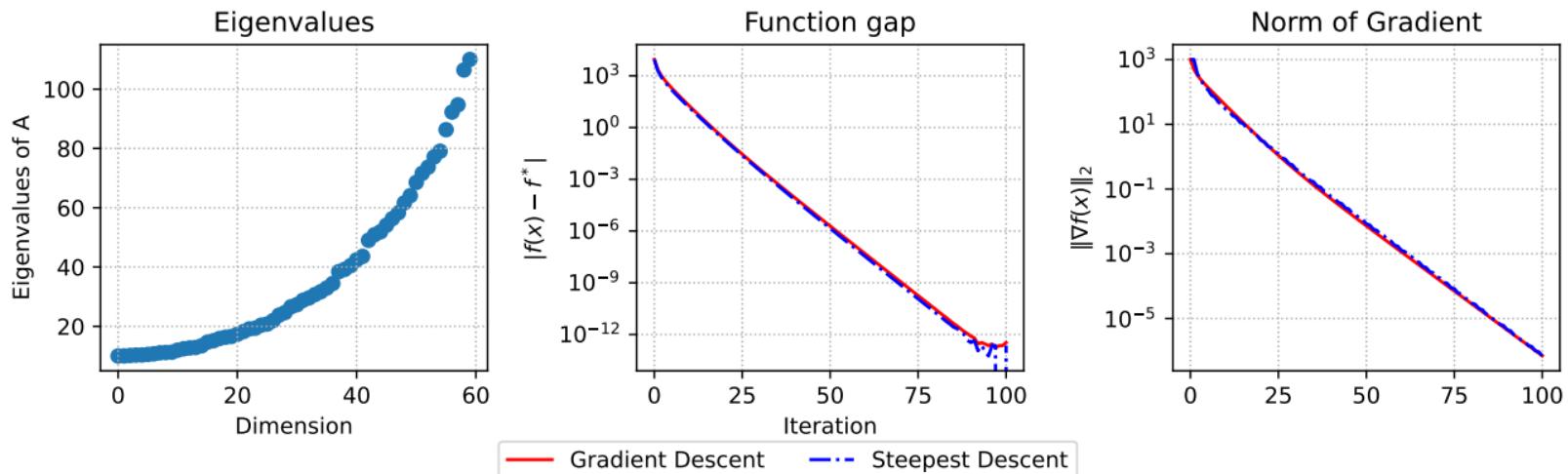
Convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

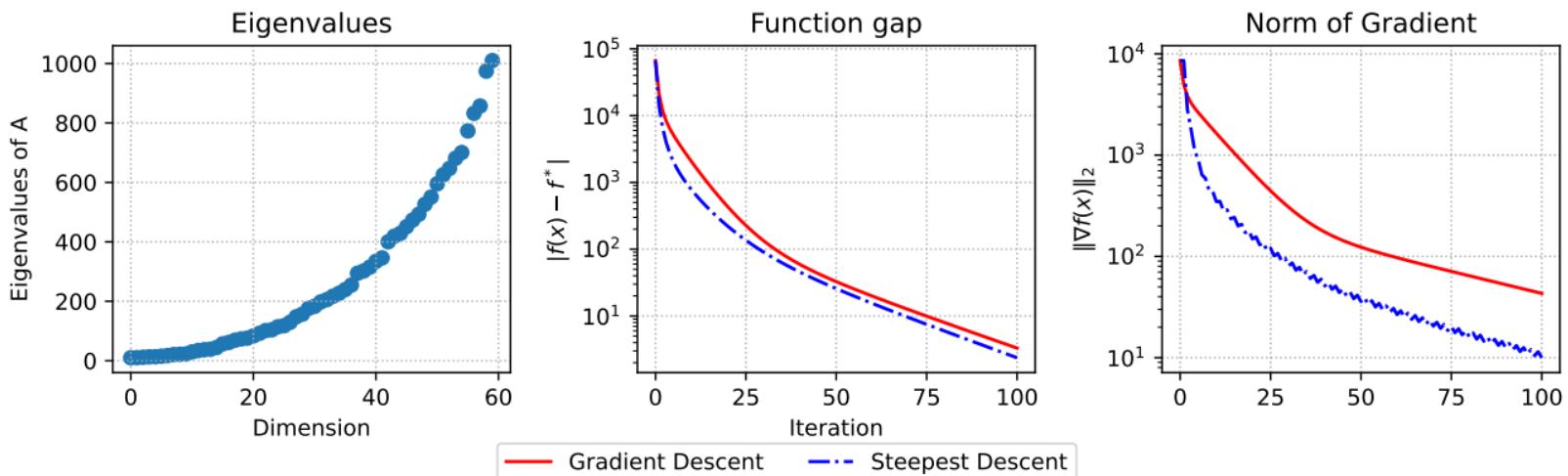
Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

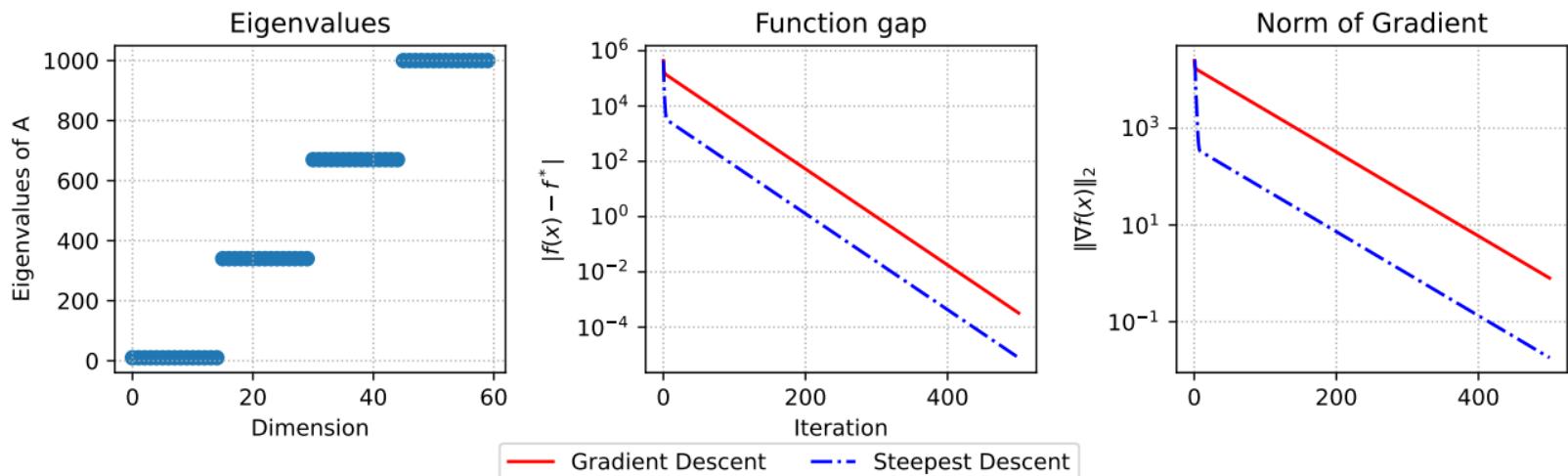
Strongly convex quadratics.  $n=60$ , random matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

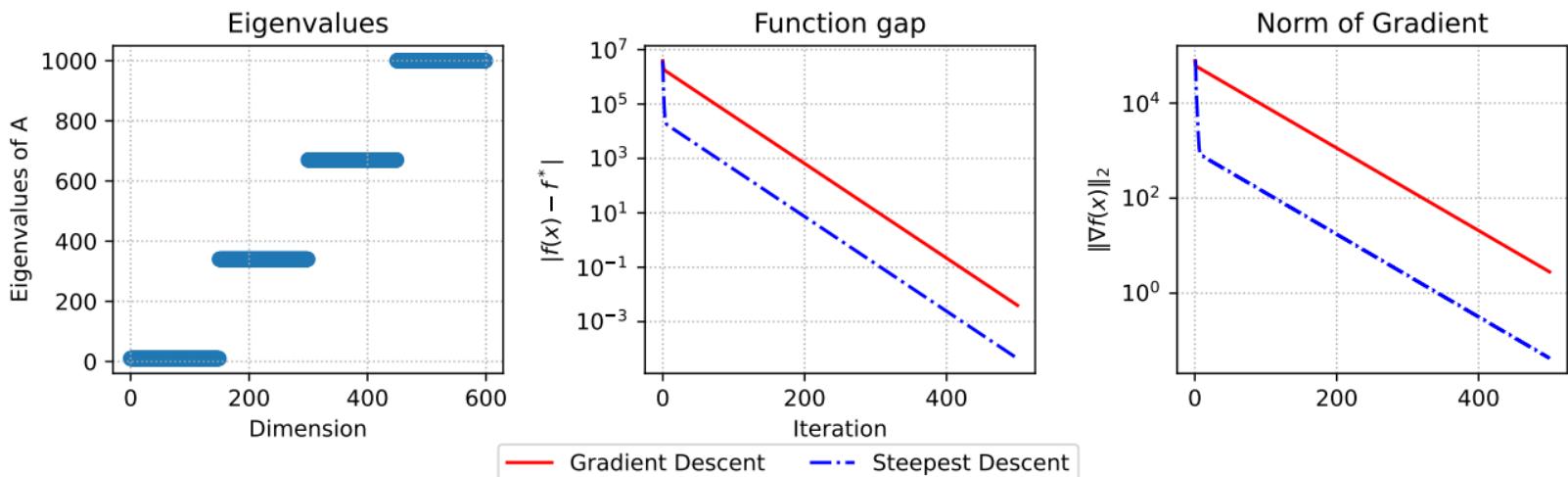
Strongly convex quadratics.  $n=60$ , clustered matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

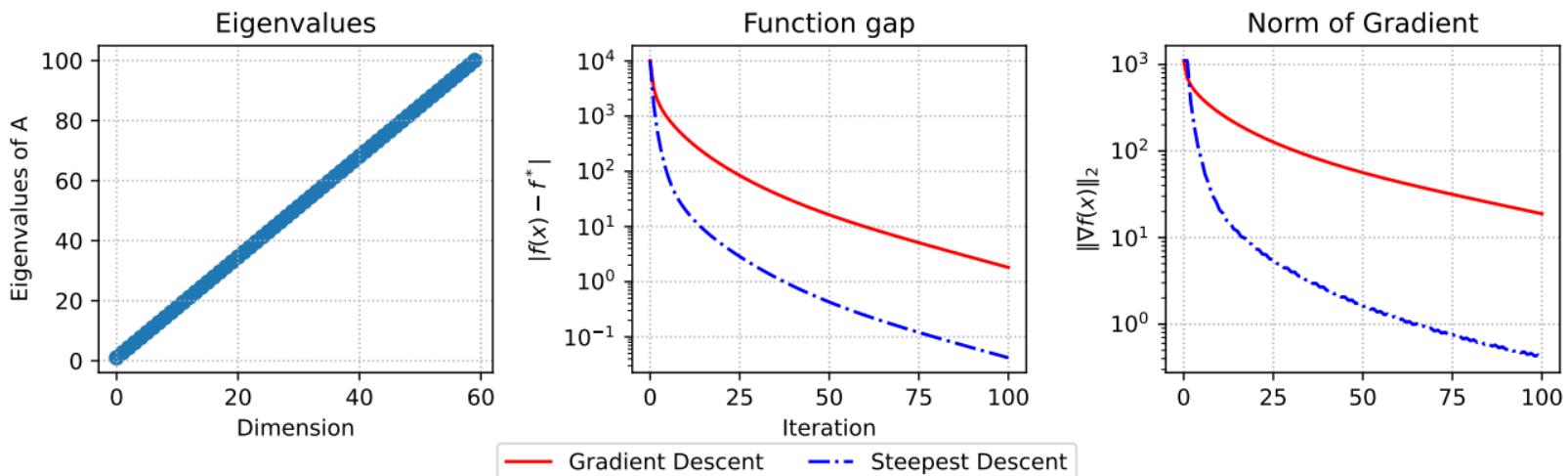
Strongly convex quadratics.  $n=600$ , clustered matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

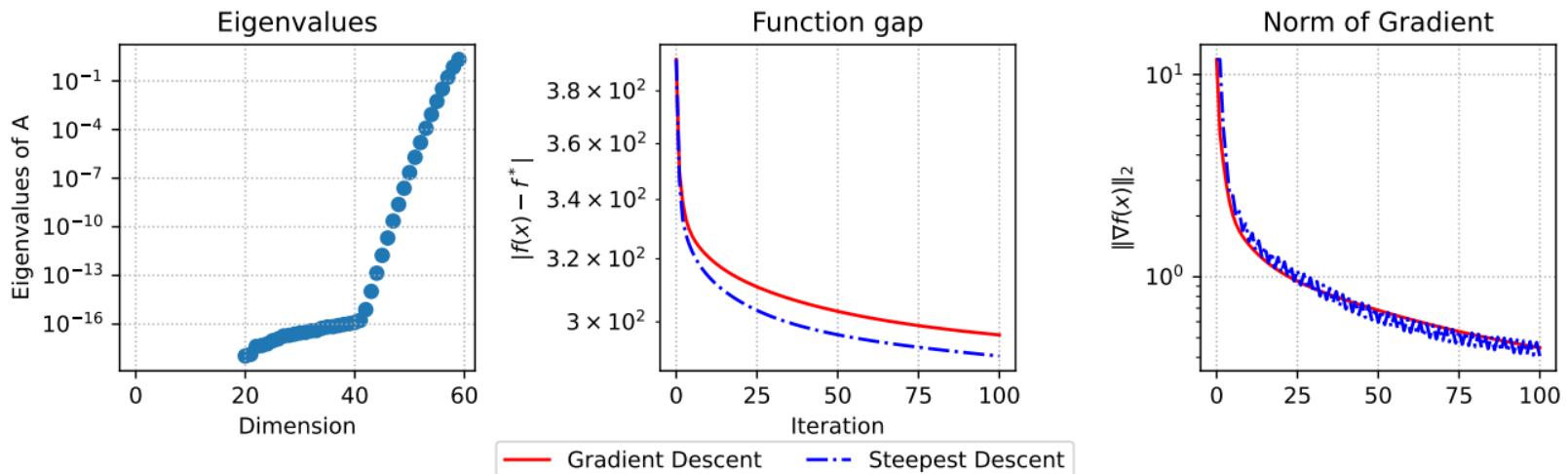
Strongly convex quadratics.  $n=60$ , uniform spectrum matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

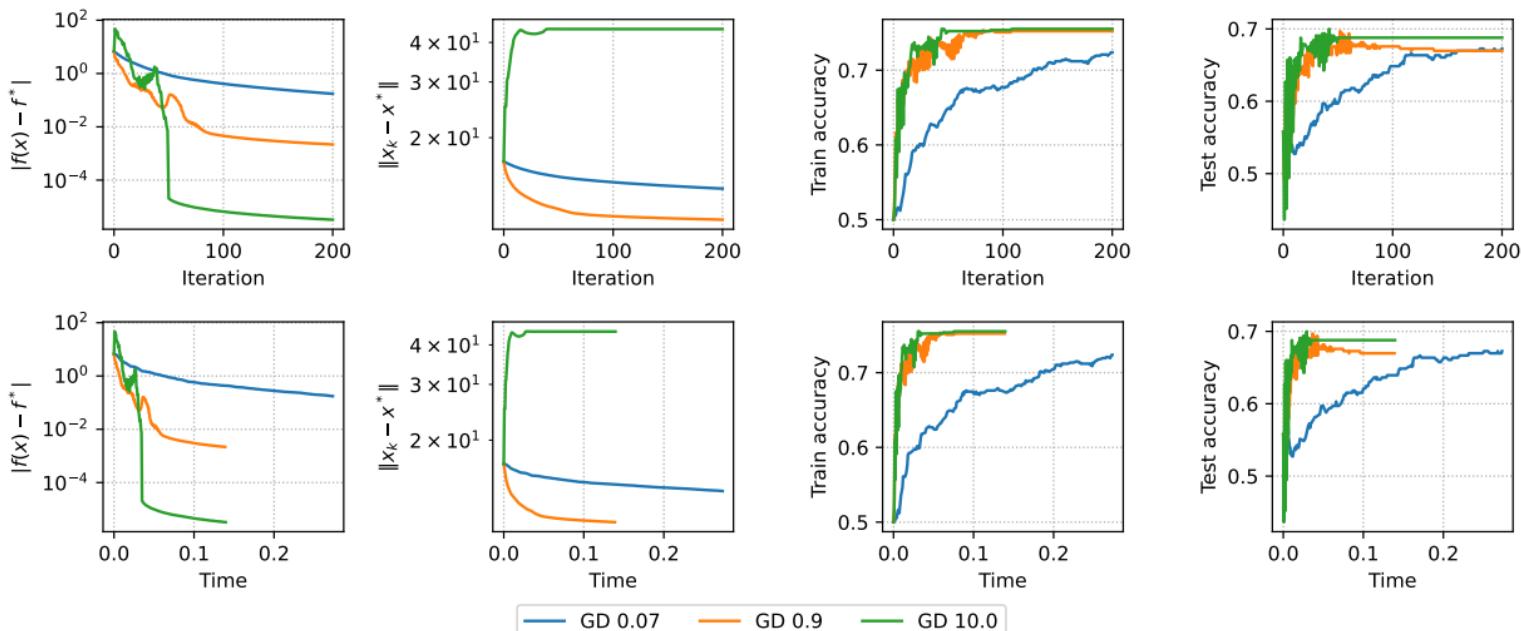
Strongly convex quadratics. n=60, Hilbert matrix.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

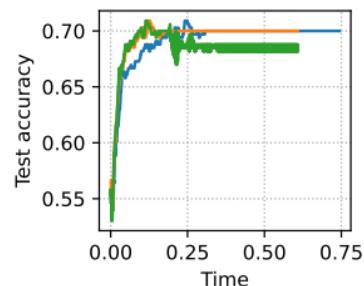
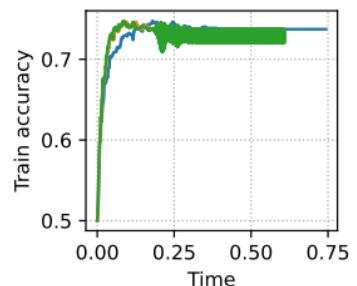
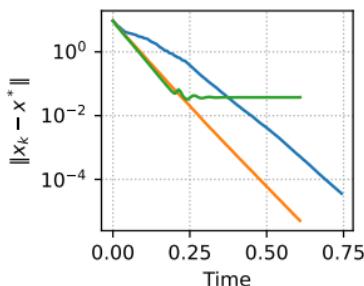
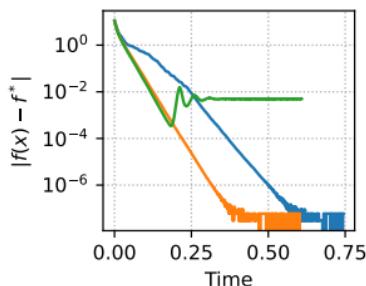
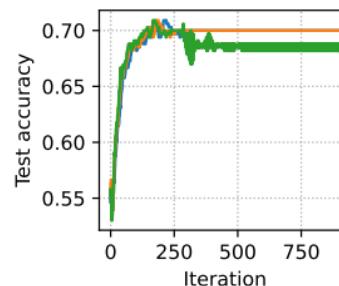
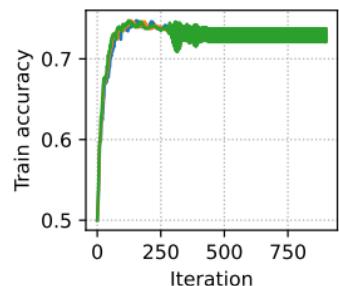
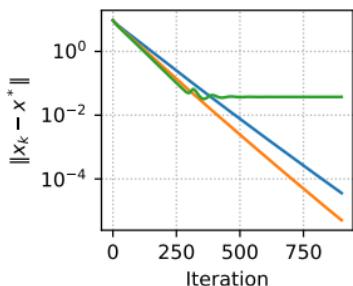
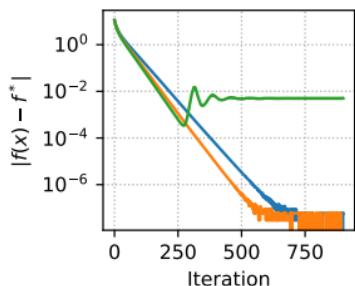
Convex binary logistic regression. mu=0.



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Strongly convex binary logistic regression. mu=0.1.

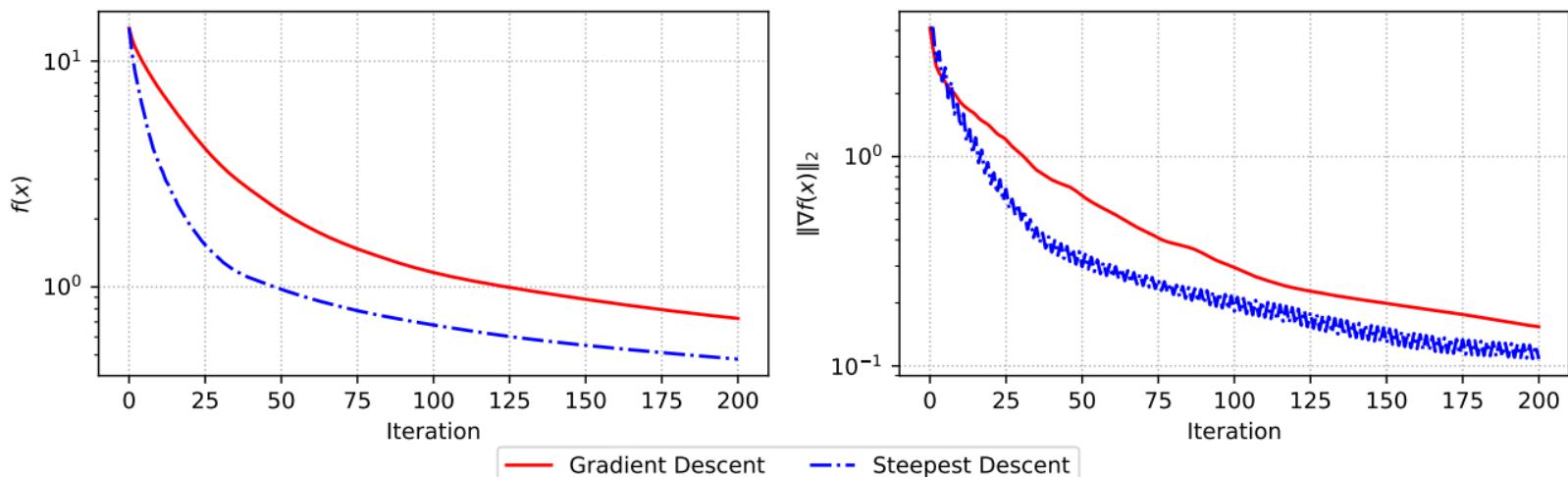


— GD 0.12   — GD 0.14   — GD 0.15

# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000.  $\mu=0$



# Численные эксперименты

$$f(x) = \frac{\mu}{2} \|x\|_2^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \log(1 + \exp(-y_i \langle a_i, x \rangle)) \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$$

Regularized binary logistic regression. n=300. m=1000.  $\mu=1$

