



Нижние оценки для градиентного спуска.  
Ускорение с помощью полиномов  
Чебышёва

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

## Повторение

## Результаты сходимости градиентного спуска для гладких функций

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

## Результаты сходимости градиентного спуска для гладких функций

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладких сильно выпуклых функций имеем:

$$f(x^k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x^0) - f^*).$$

Заметим, что для любого  $x$ , вследствие того, что  $e^{-x}$  выпукла и  $1 - x$  - его касательная в точке  $x = 0$ ,  
имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

## Результаты сходимости градиентного спуска для гладких функций

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая)	гладкая & выпуклая	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$	$\ x_k - x^*\ ^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$ $k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

Для гладких сильно выпуклых функций имеем:

$$f(x^k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x^0) - f^*).$$

Заметим, что для любого  $x$ , вследствие того, что  $e^{-x}$  выпукла и  $1 - x$  - его касательная в точке  $x = 0$ , имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

В конечном итоге имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= f(x^{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x^0) - f^*) \\ &\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x^0) - f^*) \\ k_\varepsilon &\geq \nu \log \frac{f(x^0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

## Результаты сходимости градиентного спуска для гладких функций

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

$$\lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладких сильно выпуклых функций имеем:

$$f(x^k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x^0) - f^*).$$

Заметим, что для любого  $x$ , вследствие того, что  $e^{-x}$  выпукла и  $1 - x$  - его касательная в точке  $x = 0$ , имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

В конечном итоге имеем:

$$\varepsilon = f(x^{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x^0) - f^*)$$

$$\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x^0) - f^*)$$

$$k_\varepsilon \geq \nu \log \frac{f(x^0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

**Question:** Можно ли быстрее, используя лишь информацию первого порядка (градиенты)?

## Результаты сходимости градиентного спуска для гладких функций

Градиентный спуск:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

$$\lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \nu = \frac{L}{\mu}$$

выпуклая (негладкая)

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая (невыпуклая)

$$\min_{0 \leq i \leq k} \|\nabla f(x_i)\| = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$$

гладкая & выпуклая

$$f(x_k) - f^* = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

гладкая & сильно выпуклая

$$\|x_k - x^*\|^2 = \mathcal{O}\left((1 - \frac{\mu}{L})^k\right)$$

$$k_\varepsilon = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

Для гладких сильно выпуклых функций имеем:

$$f(x^k) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^k (f(x^0) - f^*).$$

Заметим, что для любого  $x$ , вследствие того, что  $e^{-x}$  выпукла и  $1 - x$  - его касательная в точке  $x = 0$ , имеем:

$$1 - x \leq e^{-x}$$

В конечном итоге имеем:

$$\varepsilon = f(x^{k_\varepsilon}) - f^* \leq \left(1 - \frac{\mu}{L}\right)^{k_\varepsilon} (f(x^0) - f^*)$$

$$\leq \exp\left(-k_\varepsilon \frac{\mu}{L}\right) (f(x^0) - f^*)$$

$$k_\varepsilon \geq \nu \log \frac{f(x^0) - f^*}{\varepsilon} = \mathcal{O}\left(\nu \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

**Question:** Можно ли быстрее, используя лишь информацию первого порядка (градиенты)? **Да, можно.**



# Нижние оценки для произвольных методов I порядка на классе гладких функций

Произвольный метод I порядка:  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad x_{k+1} = x_k - \sum_{i=0}^k \alpha_i \nabla f(x_i) \quad \lambda(\nabla^2 f(x)) \in [\mu, L], \varkappa = \frac{L}{\mu}$

выпуклая (негладкая)	гладкая (невыпуклая) <sup>1</sup>	гладкая & выпуклая <sup>2</sup>	гладкая & сильно выпуклая
$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$\min_{0 \leq i \leq k} \ \nabla f(x_i)\  = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\frac{1}{k^2}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$	$f(x_k) - f^* = \Omega\left(\left(\frac{\sqrt{\varkappa}-1}{\sqrt{\varkappa}+1}\right)^{2k}\right)$ $k_\varepsilon = \Omega\left(\sqrt{\varkappa} \log \frac{1}{\varepsilon}\right)$

<sup>1</sup>Carmon, Duchi, Hinder, Sidford, 2017

<sup>2</sup>Nemirovski, Yudin, 1979

# Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k)$$

# Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k)\end{aligned}$$

# Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots\end{aligned}$$

# Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

# Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f \text{ — гладкая} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ где } g_i \in \partial f(x_i) && f \text{ — негладкая}\end{aligned}\tag{1}$$

## Чёрный ящик

Итерация градиентного спуска:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&= x_{k-1} - \alpha_{k-1} \nabla f(x_{k-1}) - \alpha_k \nabla f(x_k) \\&\quad \vdots \\&= x_0 - \sum_{i=0}^k \alpha_{k-i} \nabla f(x_{k-i})\end{aligned}$$

Рассмотрим семейство методов первого порядка, где

$$\begin{aligned}x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin}\{\nabla f(x_0), \nabla f(x_1), \dots, \nabla f(x_k)\} && f \text{ — гладкая} \\x_{k+1} &\in x_0 + \text{Lin}\{g_0, g_1, \dots, g_k\}, \text{ где } g_i \in \partial f(x_i) && f \text{ — негладкая}\end{aligned}\tag{1}$$

Чтобы построить нижнюю оценку, нам нужно найти функцию  $f$  из соответствующего класса, такую, что любой метод из семейства (1) будет работать не быстрее этой нижней оценки.

## Гладкий случай

### Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

## Гладкий случай

### Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .

## Гладкий случай

### Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .

## Гладкий случай

### Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:

# Гладкий случай

## Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - а. Нижняя оценка не является точной.

# Гладкий случай

## Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - Нижняя оценка не является точной.
  - Метод градиентного спуска не является оптимальным для этой задачи.

# Гладкий случай

## Theorem

Существует  $L$ -гладкая и выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод (1) для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

- Какой бы метод из семейства методов первого порядка вы ни использовали, найдётся функция  $f$ , на которой скорость сходимости не лучше  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .
- Ключом к доказательству является явное построение специальной функции  $f$ .
- Обратите внимание, что эта граница  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$  не соответствует скорости градиентного спуска  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right)$ . Два возможных варианта:
  - Нижняя оценка не является точной.
  - Метод градиентного спуска не является оптимальным для этой задачи.**

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть,  
что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть,  
что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$x^T A x = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \end{aligned}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2 x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 x_2 - 2x_2 x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1 x_2 + 2x_2 x_3 \\ 0 &\leq x_1^2 + x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2 x_3 + x_3^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Пусть  $n = 2k + 1$  и  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

- Обратите внимание, что

$$x^T A x = x_1^2 + x_n^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1})^2,$$

Следовательно,  $x^T A x \geq 0$ . Также легко увидеть, что  $0 \preceq A \preceq 4I$ .

Пример, когда  $n = 3$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Нижняя оценка:

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ &= x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + x_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Верхняя оценка

$$\begin{aligned} x^T A x &= 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 \\ &\leq 4(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ 0 &\leq 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ 0 &\leq x_1^2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + x_3^2 \\ 0 &\leq x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2}x^T Ax - e_1^T x \right) = \frac{L}{8}x^T Ax - \frac{L}{4}e_1^T x.$

## Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2}x^T Ax - e_1^T x \right) = \frac{L}{8}x^T Ax - \frac{L}{4}e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2}x^T Ax - e_1^T x \right) = \frac{L}{8}x^T Ax - \frac{L}{4}e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.

## Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2}x^T Ax - e_1^T x \right) = \frac{L}{8}x^T Ax - \frac{L}{4}e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.
- Решение:

$$x_i^* = 1 - \frac{i}{n+1},$$

## Наихудшая функция Нестерова

- Определим следующую  $L$ -гладкую выпуклую функцию:  $f(x) = \frac{L}{4} \left( \frac{1}{2}x^T Ax - e_1^T x \right) = \frac{L}{8}x^T Ax - \frac{L}{4}e_1^T x$ .
- Оптимальное решение  $x^*$  удовлетворяет  $Ax^* = e_1$ , и решение этой системы уравнений дает:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x_1^* - x_2^* = 1 \\ -x_{i-1}^* + 2x_i^* - x_{i+1}^* = 0, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ -x_{n-1}^* + 2x_n^* = 0 \end{cases}$$

- Гипотеза:  $x_i^* = a + bi$  (вдохновлённая физикой). Проверьте, что выполнено второе уравнение, в то время как  $a$  и  $b$  вычисляются из первого и последнего уравнений.
- Решение:

$$x_i^* = 1 - \frac{i}{n+1},$$

- И значение функции равно

$$f(x^*) = \frac{L}{8}x^{*T}Ax^* - \frac{L}{4}\langle x^*, e_1 \rangle = -\frac{L}{8}\langle x^*, e_1 \rangle = -\frac{L}{8} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right).$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ .

Запросив у оракула градиент, мы получаем

$g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ .

Запросив у оракула градиент, мы получаем

$g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ .

Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Из-за структуры матрицы  $A$  можно показать, что после  $k$  итераций все последние  $n - k$  компоненты  $x_k$  равны нулю.

$$x_k = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Предположим, что мы начинаем с  $x_0 = 0$ .

Запросив у оракула градиент, мы получаем  $g_0 = -\frac{L}{4}e_1$ . Тогда,  $x_1$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$ . В этой точке все компоненты  $x_1$  равны нулю, кроме первой, поэтому

$$x_1 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- На второй итерации оракул возвращает градиент  $g_1 = \frac{L}{4}(Ax_1 - e_1)$ . Тогда,  $x_2$  должен лежать на линии, генерируемой  $e_1$  и  $Ax_1 - e_1$ . Все компоненты  $x_2$  равны нулю, кроме первых двух, поэтому

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = \begin{bmatrix} \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Из-за структуры матрицы  $A$  можно показать, что после  $k$  итераций все последние  $n - k$  компоненты  $x_k$  равны нулю.

$$x_k = \begin{bmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \vdots \\ \bullet \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k \\ k+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

- Однако, поскольку каждая итерация  $x_k$ , произведенная нашим методом, лежит в  $S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  (т.е. имеет нули в координатах  $k + 1, \dots, n$ ), она не может “достичь” полного оптимального вектора  $x^*$ . Другими словами, даже если бы мы выбрали лучший возможный вектор из  $S_k$ , обозначаемый

$$\tilde{x}_k = \arg \min_{x \in S_k} f(x),$$

значение функции в нём  $f(\tilde{x}_k)$  будет выше, чем  $f(x^*)$ .

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k_{(i)}} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k_{(i)}} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .

- Теперь мы имеем:

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*)$$

(2)

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k_{(i)}} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .

- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \end{aligned} \tag{2}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k_{(i)}} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .

- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{n-k}{(k+1)(n+1)}\right) \end{aligned} \tag{2}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Поскольку  $x_k \in S_k = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$  и  $\tilde{x}_k$  является лучшим возможным приближением к  $x^*$  в  $S_k$ , мы имеем

$$f(x_k) \geq f(\tilde{x}_k).$$

- Следовательно,

$$f(x_k) - f(x^*) \geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*).$$

- Аналогично, для оптимума исходной функции, мы имеем  $\tilde{x}_{k_{(i)}} = 1 - \frac{i}{k+1}$  и  $f(\tilde{x}_k) = -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$ .
- Теперь мы имеем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq f(\tilde{x}_k) - f(x^*) \\ &= -\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) - \left(-\frac{L}{8} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\ &= \frac{L}{8} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{L}{8} \left(\frac{n-k}{(k+1)(n+1)}\right) \\ &\stackrel{n=2k+1}{=} \frac{L}{16(k+1)} \end{aligned} \tag{2}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\|x_0 - x^*\|_2^2 = \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2\end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3}\end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

## Гладкий случай (доказательство)

- Теперь мы ограничиваем  $R = \|x_0 - x^*\|_2$ :

$$\begin{aligned}\|x_0 - x^*\|_2^2 &= \|0 - x^*\|_2^2 = \|x^*\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)^2 \\ &= n - \frac{2}{n+1} \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\leq n - \frac{2}{n+1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{(n+1)^3}{3} \\ &= \frac{n+1}{3} \stackrel{n=2k+1}{=} \frac{2(k+1)}{3}.\end{aligned}$$

- Следовательно,

$$k+1 \geq \frac{3}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 = \frac{3}{2} R^2 \quad (3)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\leq \frac{(n+1)^3}{3}\end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$f(x_k) - f(x^*) \geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2}$$

## Гладкий случай (доказательство)

Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \\ &= \frac{3LR^2}{32(k+1)^2} \end{aligned}$$

## Гладкий случай (доказательство)

Наконец, используя (2) и (3), мы получаем:

$$\begin{aligned} f(x_k) - f(x^*) &\geq \frac{L}{16(k+1)} = \frac{L(k+1)}{16(k+1)^2} \\ &\geq \frac{L}{16(k+1)^2} \frac{3}{2} R^2 \\ &= \frac{3LR^2}{32(k+1)^2} \end{aligned}$$

Это завершает доказательство с желаемой скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ .

## Нижние оценки для гладкого случая

### Гладкий выпуклый случай

Существует  $L$ -гладкая выпуклая функция  $f$ , такая, что любой метод в форме 1 для всех  $k$ ,  $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ , удовлетворяет:

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{3L\|x_0 - x^*\|_2^2}{32(k+1)^2}$$

### Гладкий сильно выпуклый случай

Для любого  $x_0$  и любого  $\mu > 0$ ,  $\varkappa = \frac{L}{\mu} > 1$ , существует  $L$ -гладкая и  $\mu$ -сильно выпуклая функция  $f$ , такая, что для любого метода в форме 1 выполняются неравенства:

$$\|x_k - x^*\|_2 \geq \left( \frac{\sqrt{\varkappa} - 1}{\sqrt{\varkappa} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|_2$$

$$f(x_k) - f^* \geq \frac{\mu}{2} \left( \frac{\sqrt{\varkappa} - 1}{\sqrt{\varkappa} + 1} \right)^{2k} \|x_0 - x^*\|_2^2$$

# Ускорение для квадратичных функций

## Результат сходимости для квадратичных функций

Предположим, что мы решаем задачу минимизации сильно выпуклой квадратичной функции, с помощью метода градиентного спуска:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

## Результат сходимости для квадратичных функций

Предположим, что мы решаем задачу минимизации сильно выпуклой квадратичной функции, с помощью метода градиентного спуска:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

### Theorem

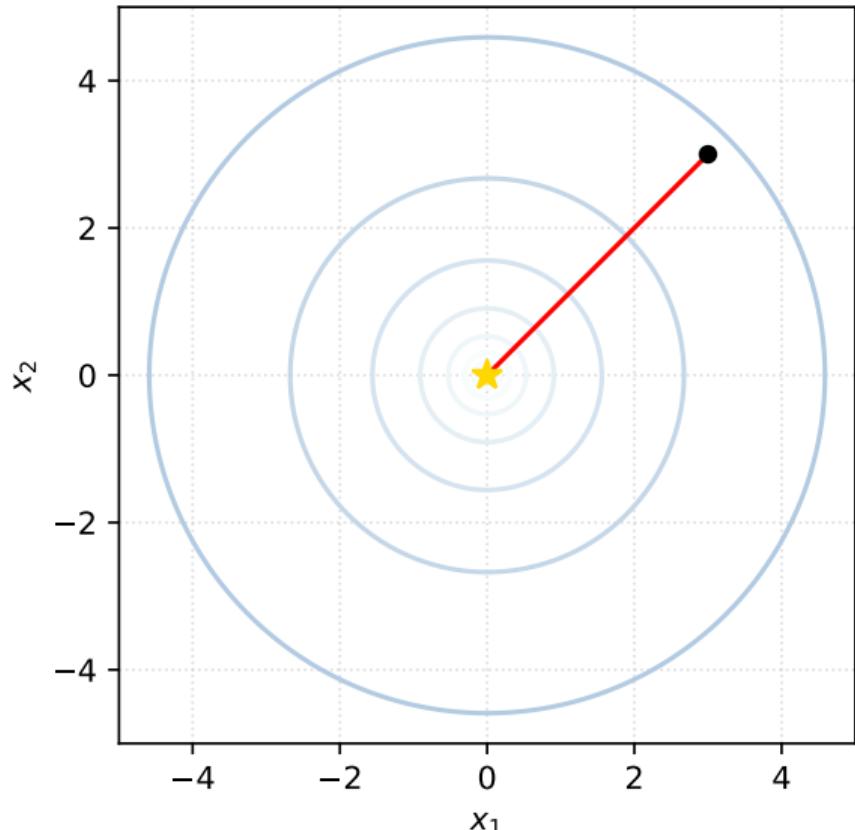
Градиентный спуск с шагом  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$  сходится к оптимальному решению  $x^*$  со следующей гарантией:

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)^k \|x_0 - x^*\|_2 \quad f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \left(\frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}\right)^{2k} (f(x_0) - f(x^*))$$

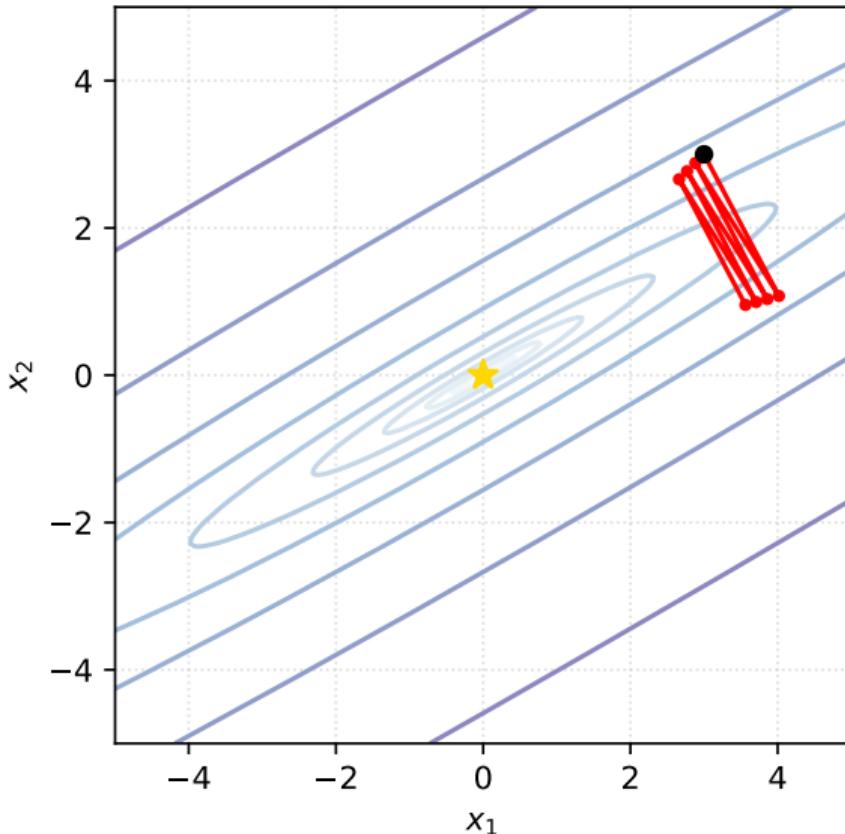
где  $\varkappa = \frac{L}{\mu}$  является числом обусловленности  $A$ .

## Число обусловленности $\kappa$

$$\kappa = 1.0$$



$$\kappa = 100.0$$



## Ускорение из первых принципов

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

## Ускорение из первых принципов

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

### Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ ,  
где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

## Ускорение из первых принципов

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

### Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ ,  
где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

Мы можем ограничить норму ошибки как

$$\|e_k\| \leq \|p_k(A)\| \cdot \|e_0\|.$$

## Ускорение из первых принципов

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x \quad x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k).$$

Пусть  $x^*$  будет единственным решением системы линейных уравнений  $Ax = b$  и пусть  $e_k = x_k - x^*$ , где  $x_{k+1} = x_k - \alpha_k(Ax_k - b)$  определяется рекурсивно, начиная с некоторого  $x_0$ , а  $\alpha_k$  — шаг, который мы определим позже.

$$e_{k+1} = (I - \alpha_k A)e_k.$$

### Полиномы

Вышеуказанный расчет дает нам  $e_k = p_k(A)e_0$ ,  
где  $p_k$  является полиномом

$$p_k(a) = \prod_{i=1}^k (1 - \alpha_i a).$$

Мы можем ограничить норму ошибки как

$$\|e_k\| \leq \|p_k(A)\| \cdot \|e_0\|.$$

Поскольку  $A$  является симметричной матрицей с собственными значениями в  $[\mu, L]$ :

$$\|p_k(A)\| \leq \max_{\mu \leq a \leq L} |p_k(a)|.$$

Это приводит к интересной постановке задачи: среди всех полиномов, удовлетворяющих  $p_k(0) = 1$ , мы ищем полином, значение которого как можно меньше отклоняется от нуля на интервале  $[\mu, L]$ .

## Наивное полиномиальное решение

Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

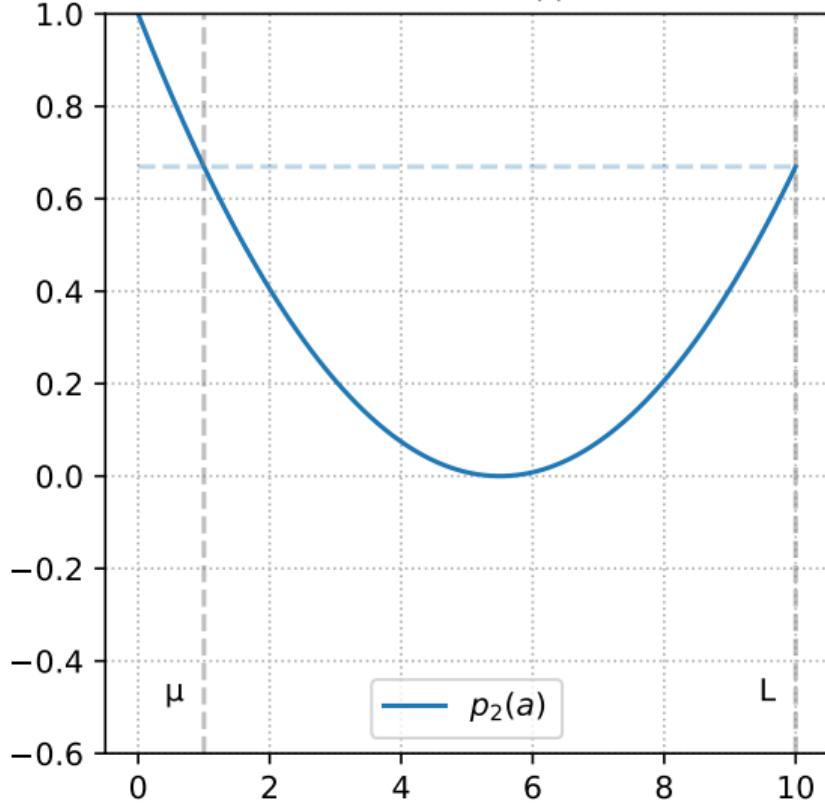
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ . Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.

## Наивные полиномы до 2 степени



## Наивное полиномиальное решение

Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

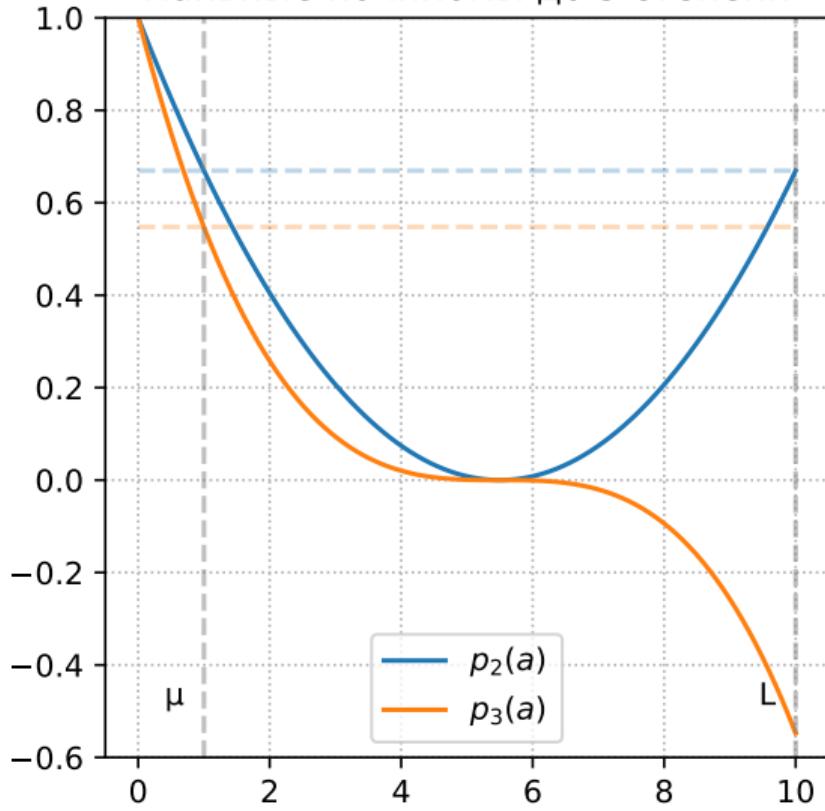
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ . Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.

## Наивные полиномы до 3 степени



## Наивное полиномиальное решение

Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

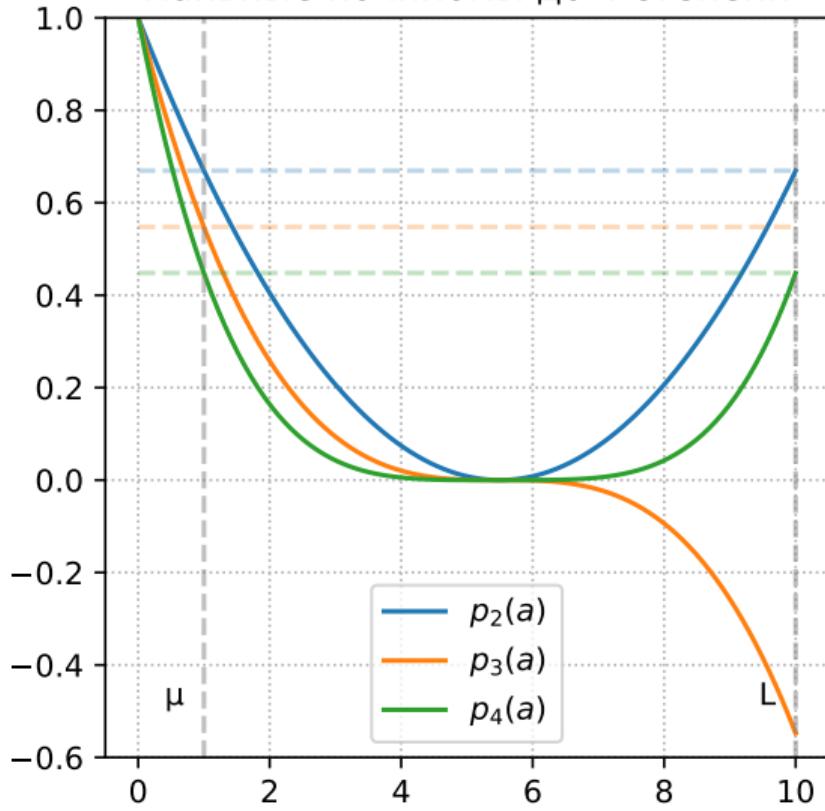
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ . Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.

Наивные полиномы до 4 степени



## Наивное полиномиальное решение

Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

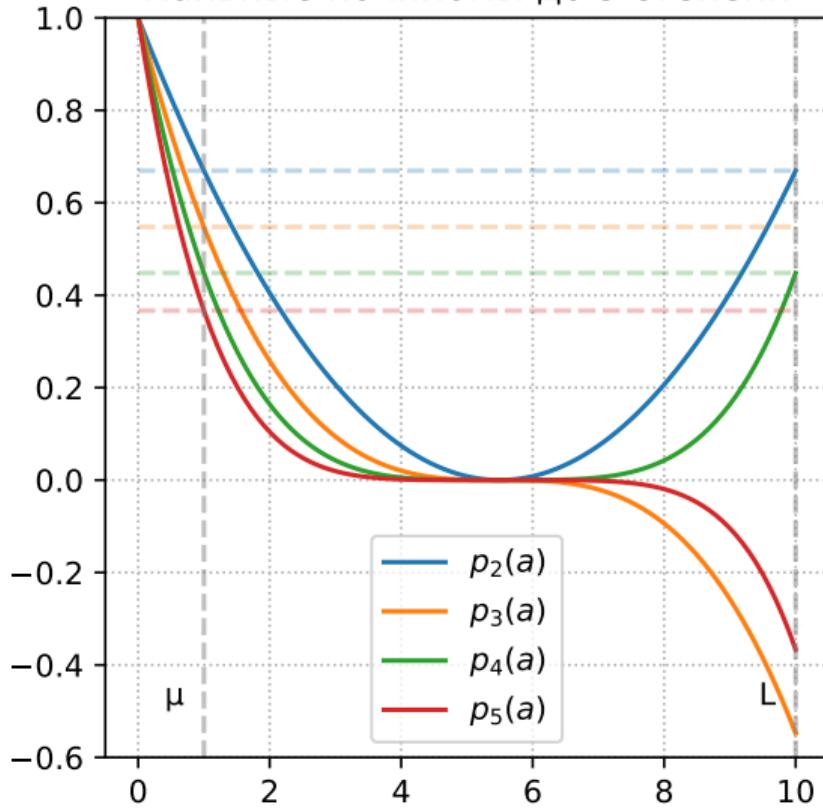
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ . Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.

## Наивные полиномы до 5 степени



## Наивное полиномиальное решение

Наивное решение состоит в том, чтобы выбрать равномерный шаг  $\alpha_k = \frac{2}{\mu+L}$ . Благодаря этому  $|p_k(\mu)| = |p_k(L)|$ .

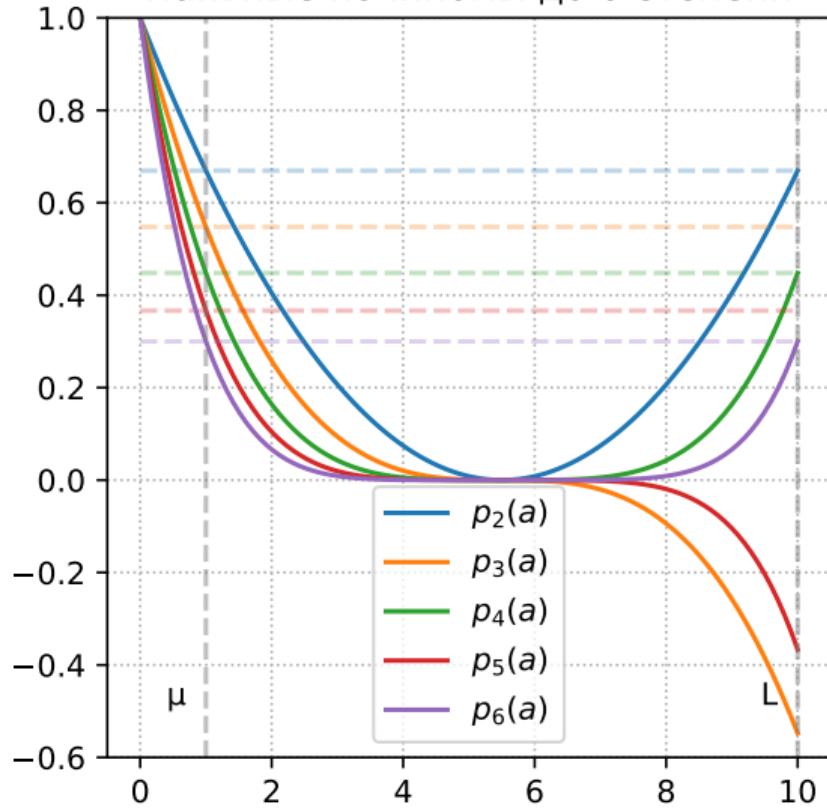
$$\|e_k\| \leq \left( \frac{\mu - 1}{\mu + 1} \right)^k \|e_0\|$$

Это точно та же скорость, которую мы доказали в предыдущей лекции для любой гладкой и сильно выпуклой функции.

Давайте посмотрим на этот полином поближе. На правом рисунке мы выбираем  $\mu = 1$  и  $L = 10$  так, что  $\varkappa = 10$ . Следовательно, соответствующий интервал равен  $[1, 10]$ .

Можем ли мы сделать лучше? Ответ — да.

## Наивные полиномы до 6 степени



## Полиномы Чебышева

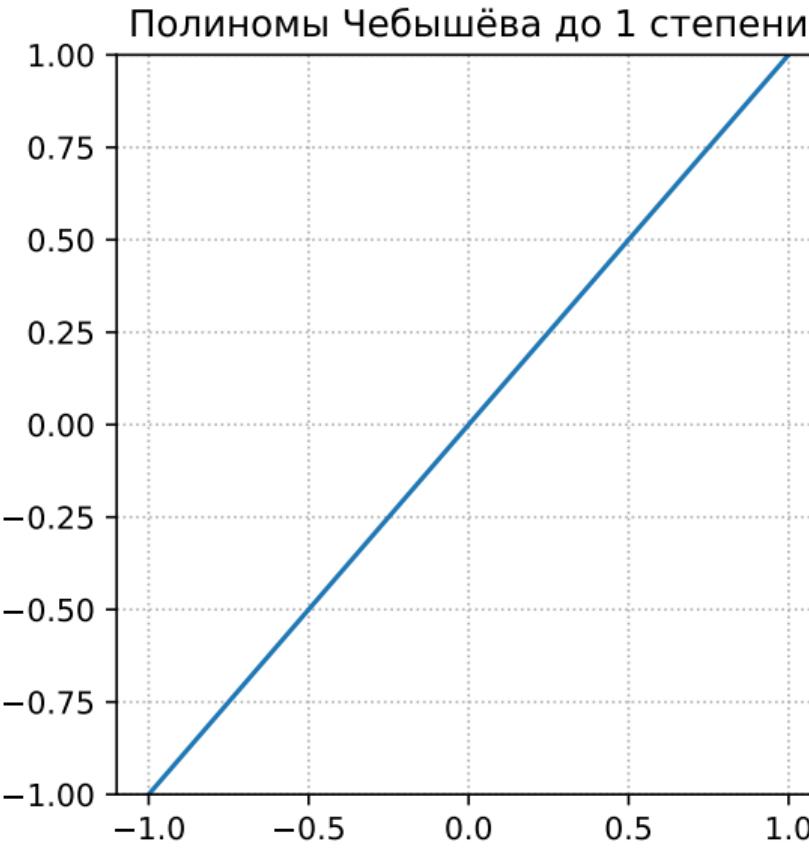
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



## Полиномы Чебышева

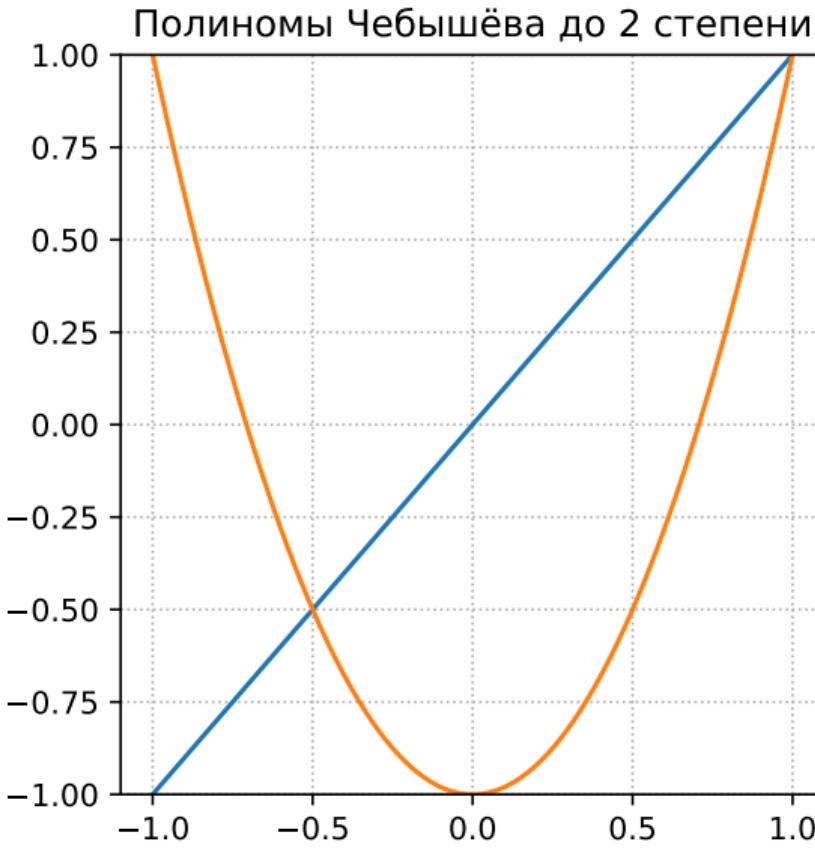
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



## Полиномы Чебышева

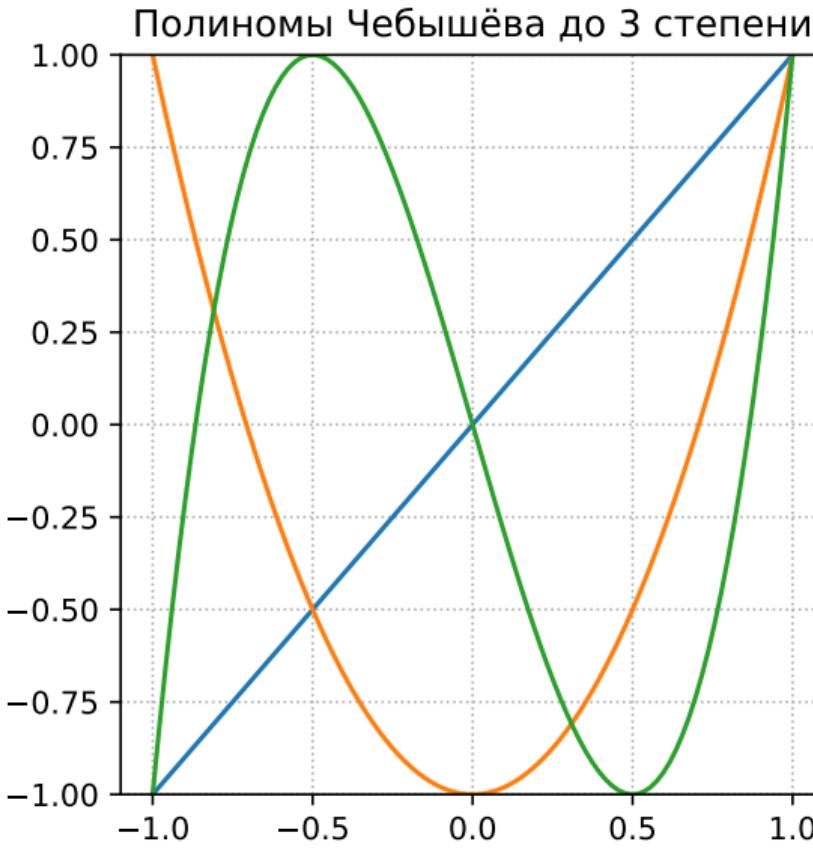
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



## Полиномы Чебышева

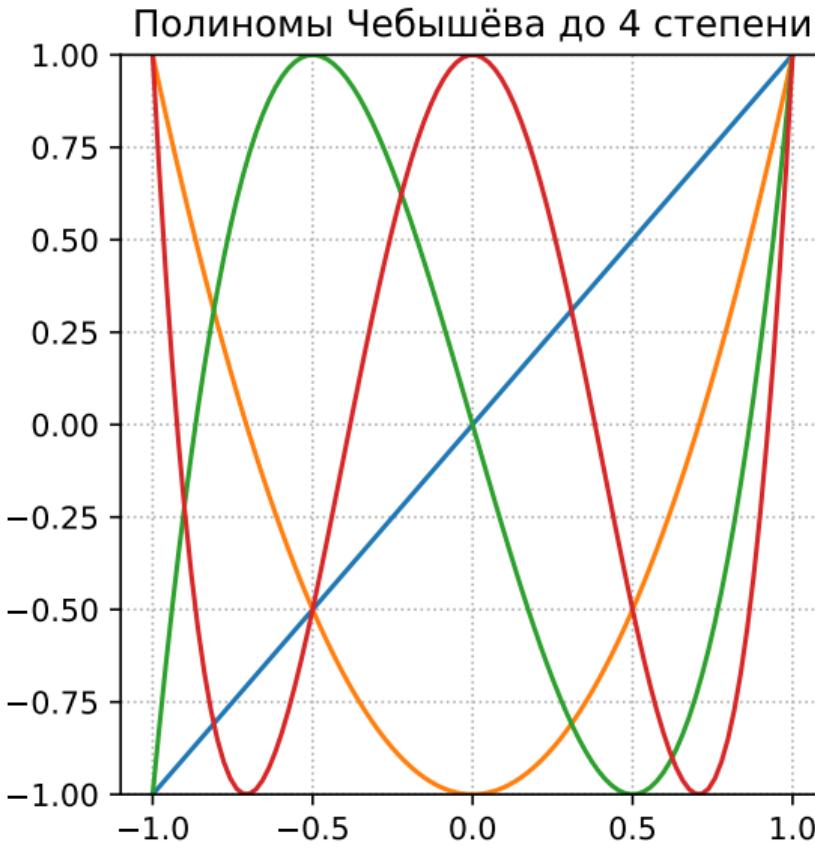
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



## Полиномы Чебышева

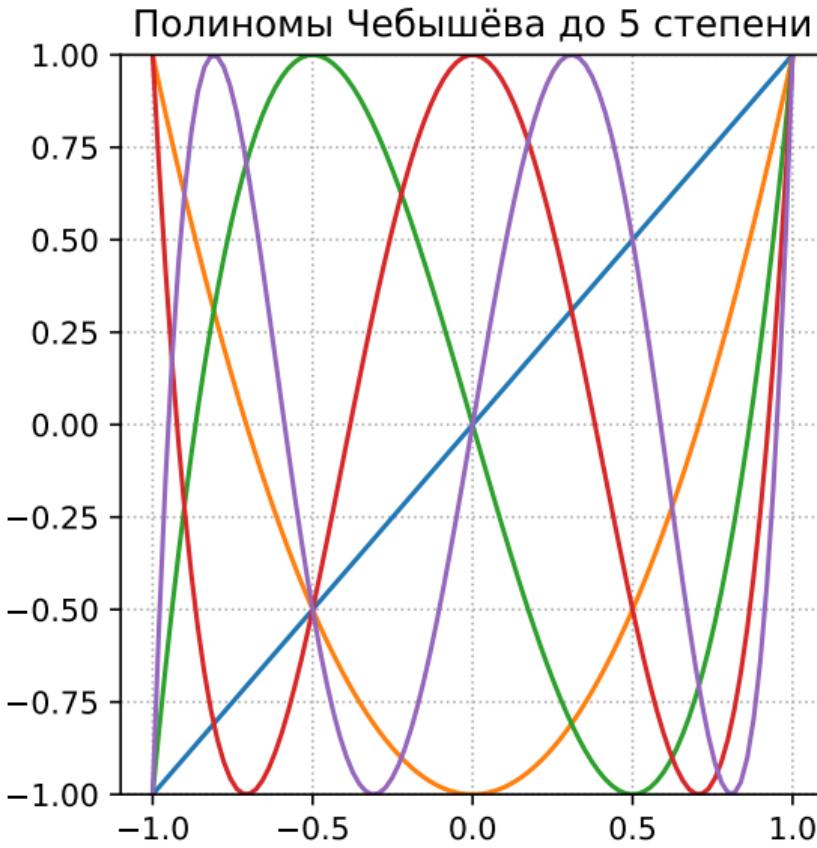
Полиномы Чебышёва дают оптимальный ответ на поставленный вопрос. При соответствующем шкалировании они минимизируют абсолютное значение на заданном интервале  $[\mu, L]$ , одновременно удовлетворяя нормировочному условию  $p(0) = 1$ .

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_k(x) = 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geq 2.$$

Давайте построим стандартные полиномы Чебышёва (без масштабирования):



## Отшкалированные полиномы Чебышёва

Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

## Отшкалированные полиномы Чебышёва

Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

## Отшкалированные полиномы Чебышёва

Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

В нашем анализе ошибок мы требуем, чтобы полином был равен 1 в 0 (т.е.  $p_k(0) = 1$ ). После применения преобразования значение  $T_k$  в точке, соответствующей  $a = 0$ , может не быть 1. Следовательно, мы умножаем на обратную величину  $T_k$  в точке

$$\frac{L + \mu}{L - \mu}, \quad \text{что обеспечивает} \quad P_k(0) = T_k \left( \frac{L + \mu - 0}{L - \mu} \right) \cdot T_k \left( \frac{L + \mu}{L - \mu} \right)^{-1} = 1.$$

## Отшкалированные полиномы Чебышёва

Оригинальные полиномы Чебышёва определены на интервале  $[-1, 1]$ . Чтобы использовать их для наших целей, мы должны отшкалировать их на интервал  $[\mu, L]$ .

Мы будем использовать следующее аффинное преобразование:

$$x = \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}, \quad a \in [\mu, L], \quad x \in [-1, 1].$$

Обратите внимание, что  $x = 1$  соответствует  $a = \mu$ ,  $x = -1$  соответствует  $a = L$  и  $x = 0$  соответствует  $a = \frac{\mu+L}{2}$ . Это преобразование гарантирует, что поведение полинома Чебышёва на интервале  $[-1, 1]$  транслируется на интервал  $[\mu, L]$ .

В нашем анализе ошибок мы требуем, чтобы полином был равен 1 в 0 (т.е.  $p_k(0) = 1$ ). После применения преобразования значение  $T_k$  в точке, соответствующей  $a = 0$ , может не быть 1. Следовательно, мы умножаем на обратную величину  $T_k$  в точке

$$\frac{L + \mu}{L - \mu}, \quad \text{что обеспечивает} \quad P_k(0) = T_k\left(\frac{L + \mu - 0}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1} = 1.$$

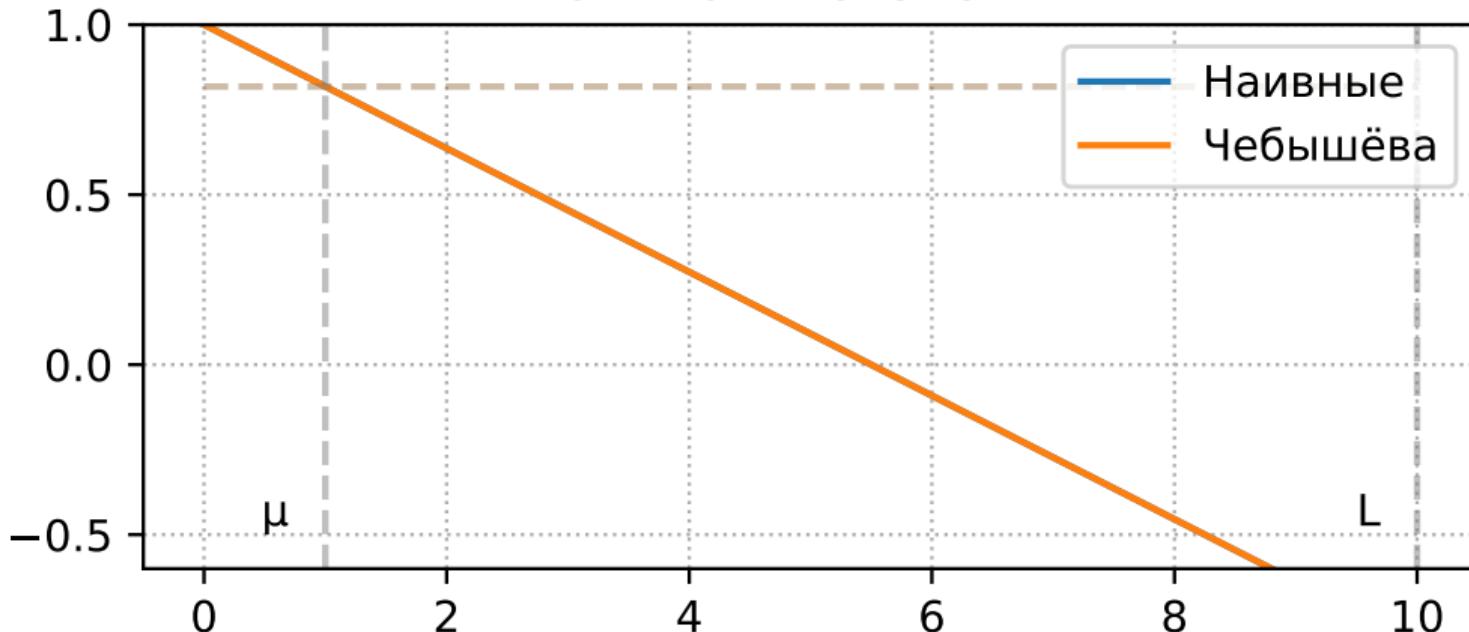
Построим отшкалированные полиномы Чебышёва

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L + \mu - 2a}{L - \mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L + \mu}{L - \mu}\right)^{-1}$$

и увидим, что они больше подходят для нашей задачи, чем наивные полиномы на интервале  $[\mu, L]$ .

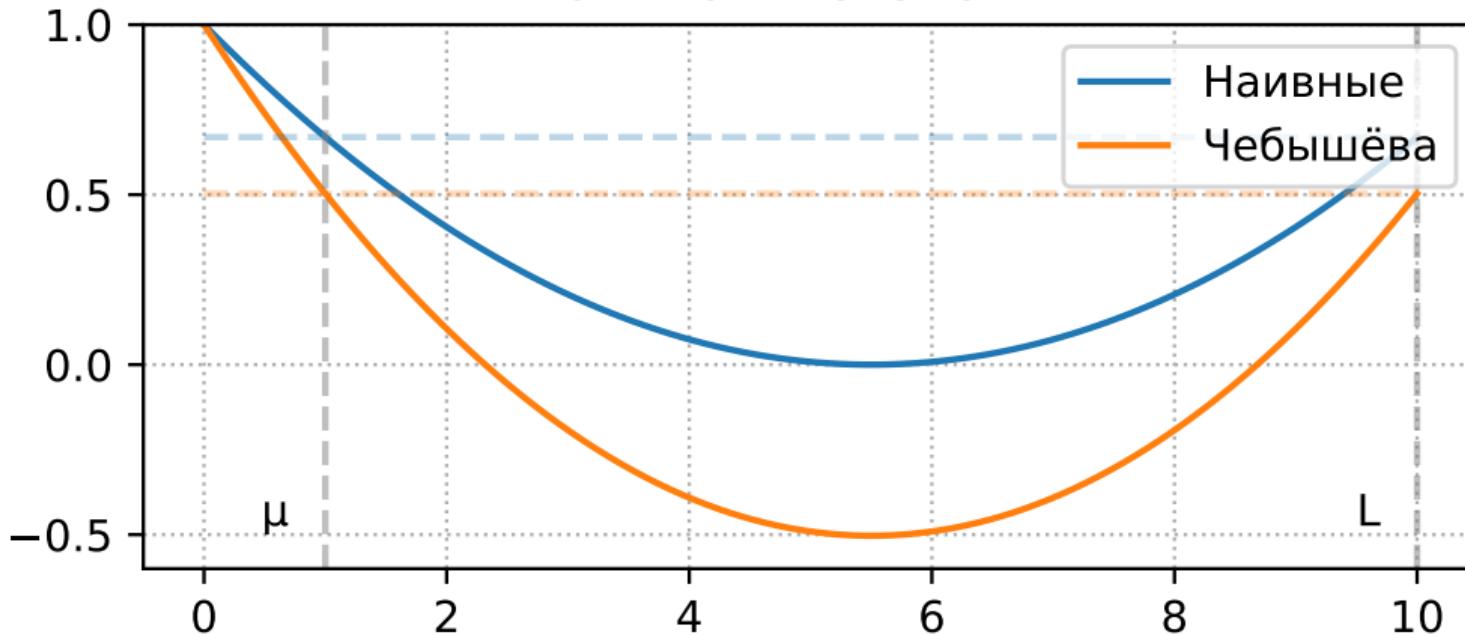
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 1



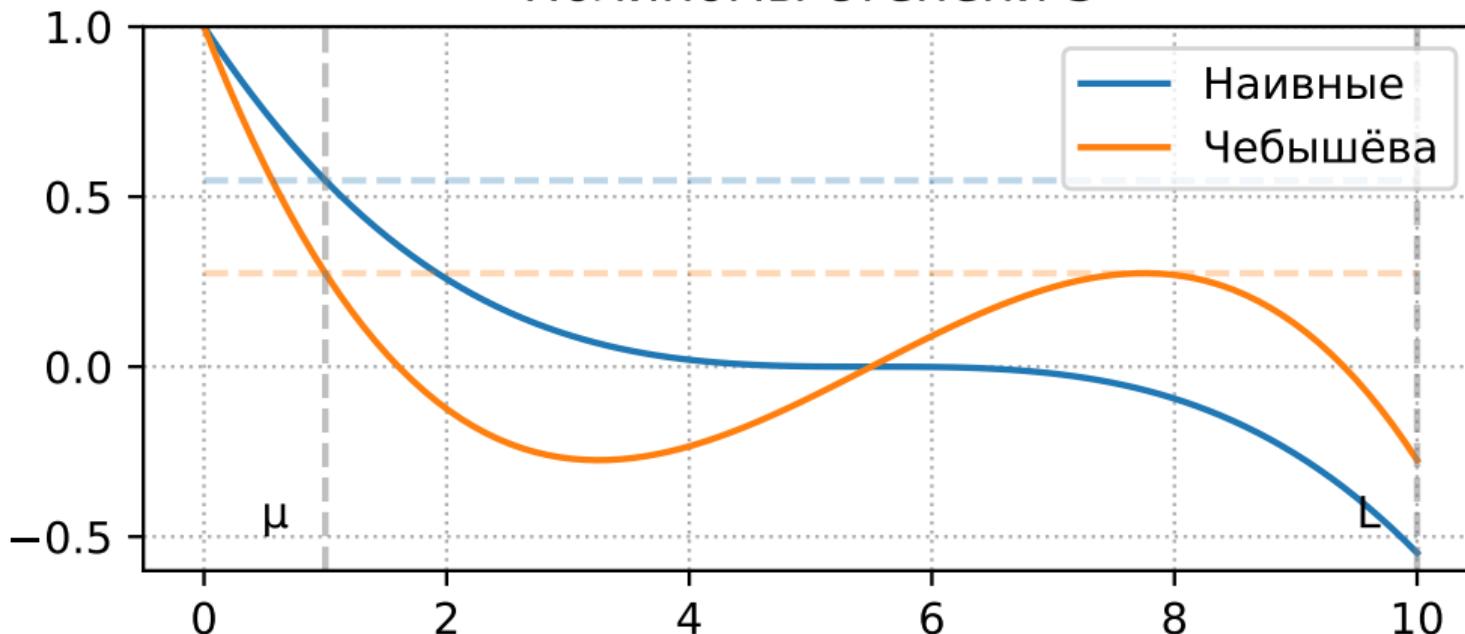
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 2



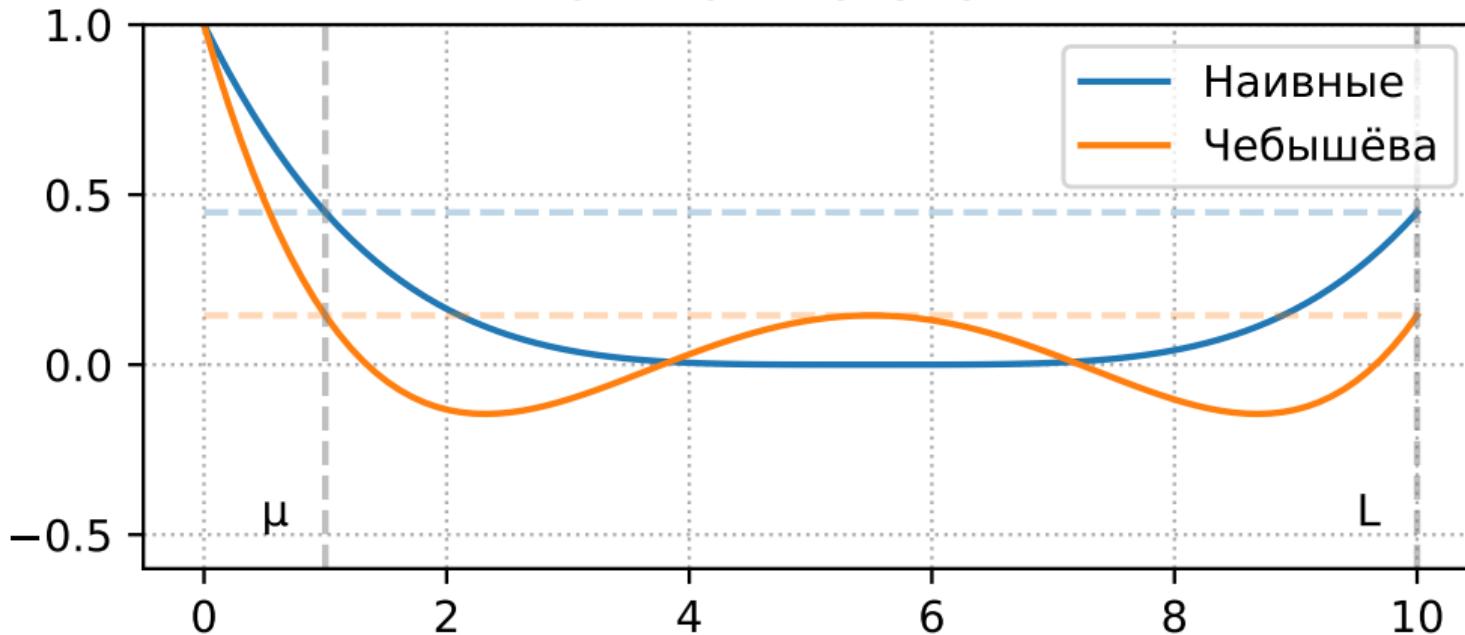
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 3



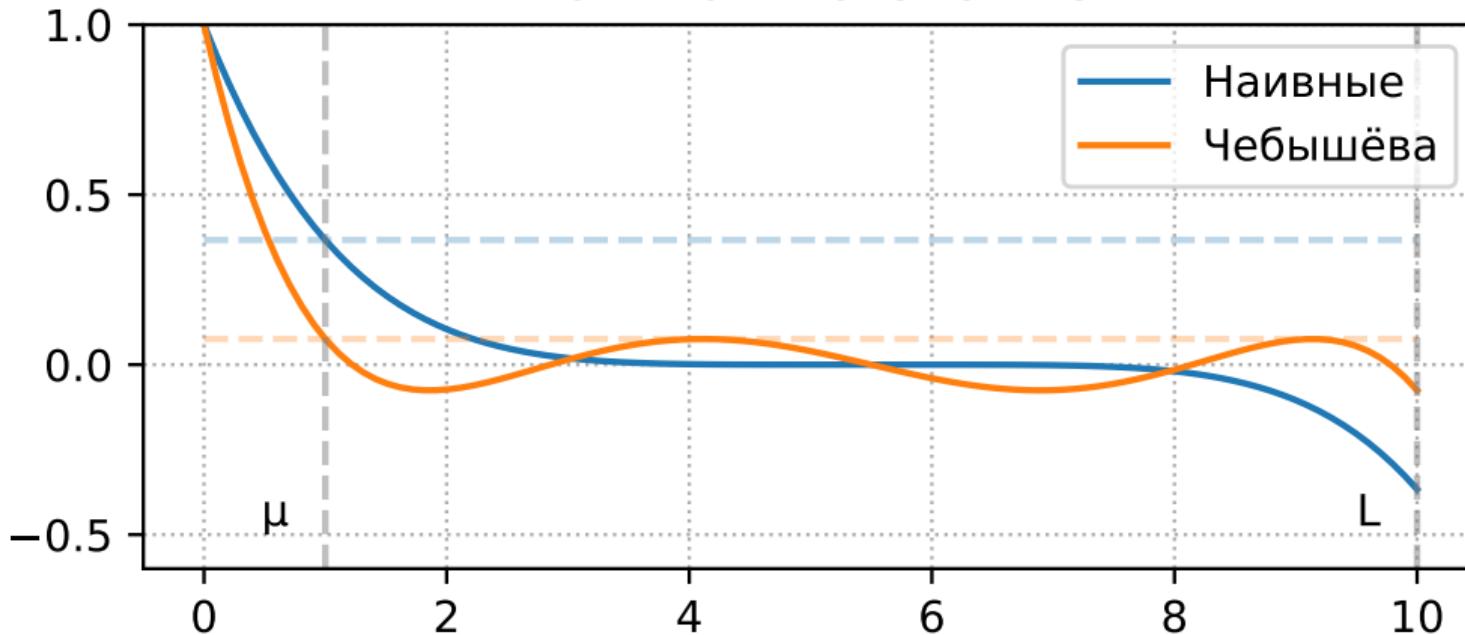
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 4



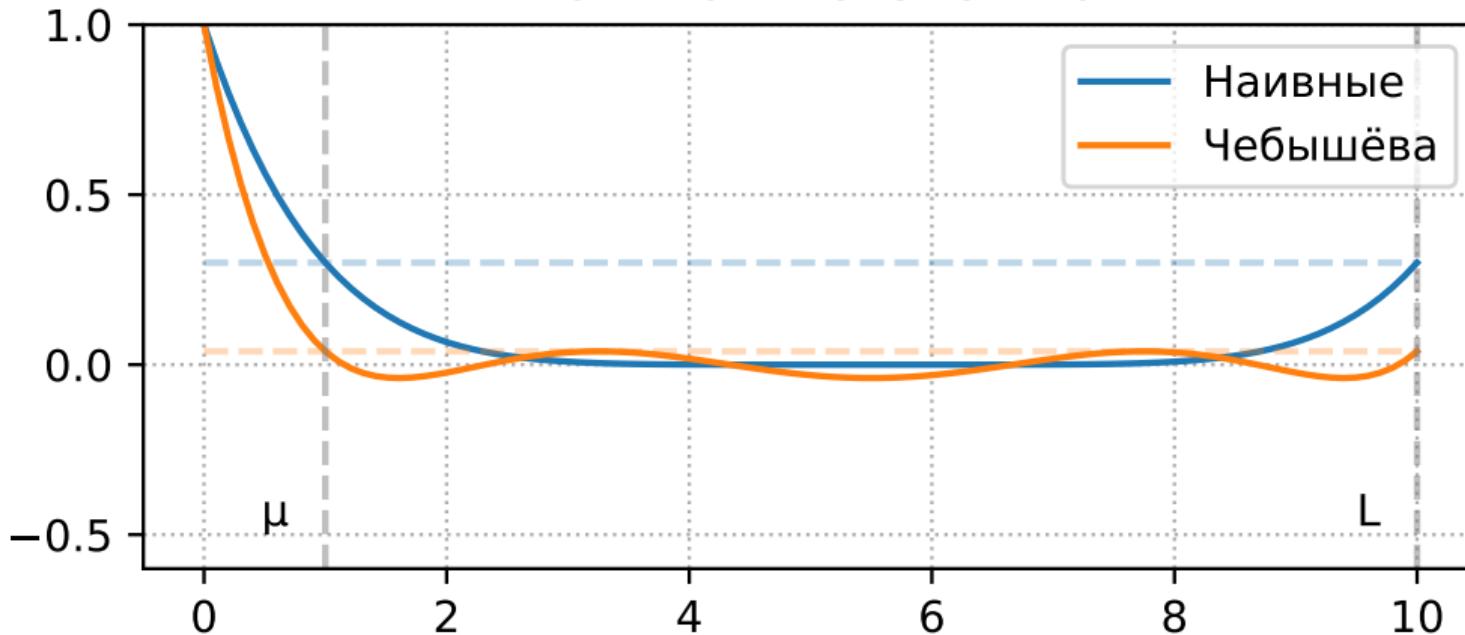
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 5



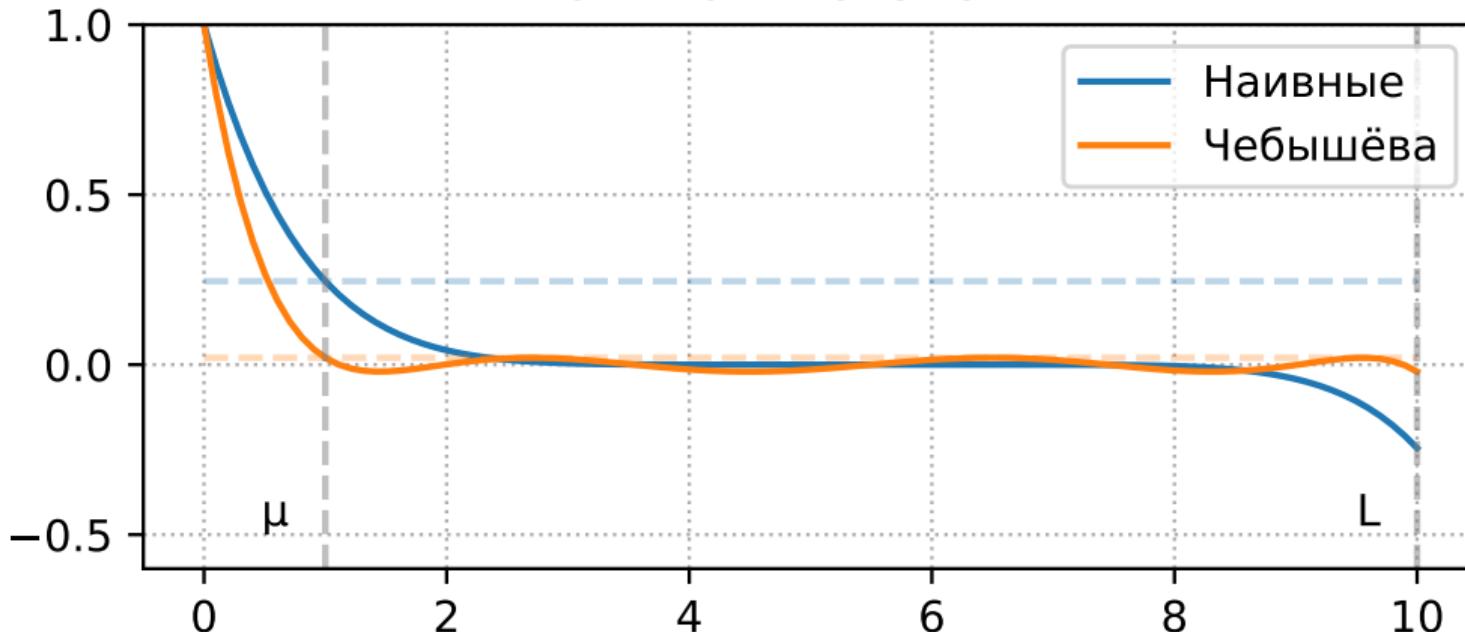
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 6



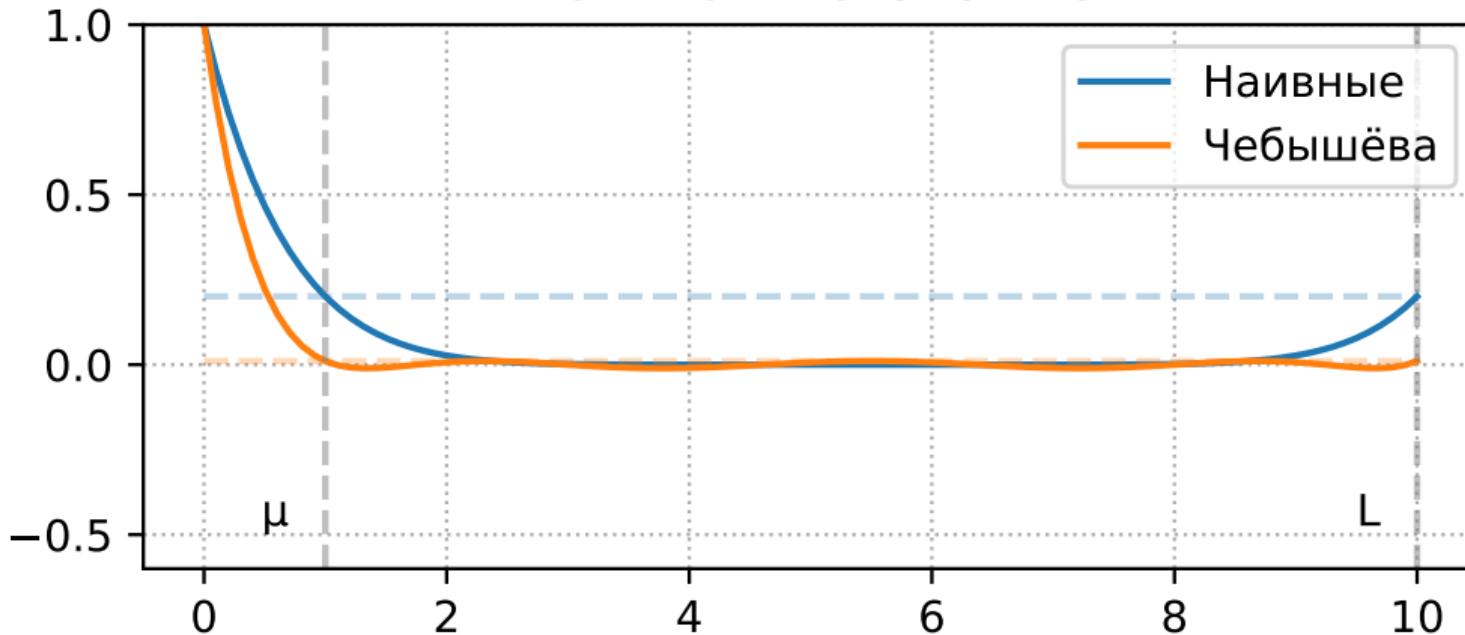
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 7



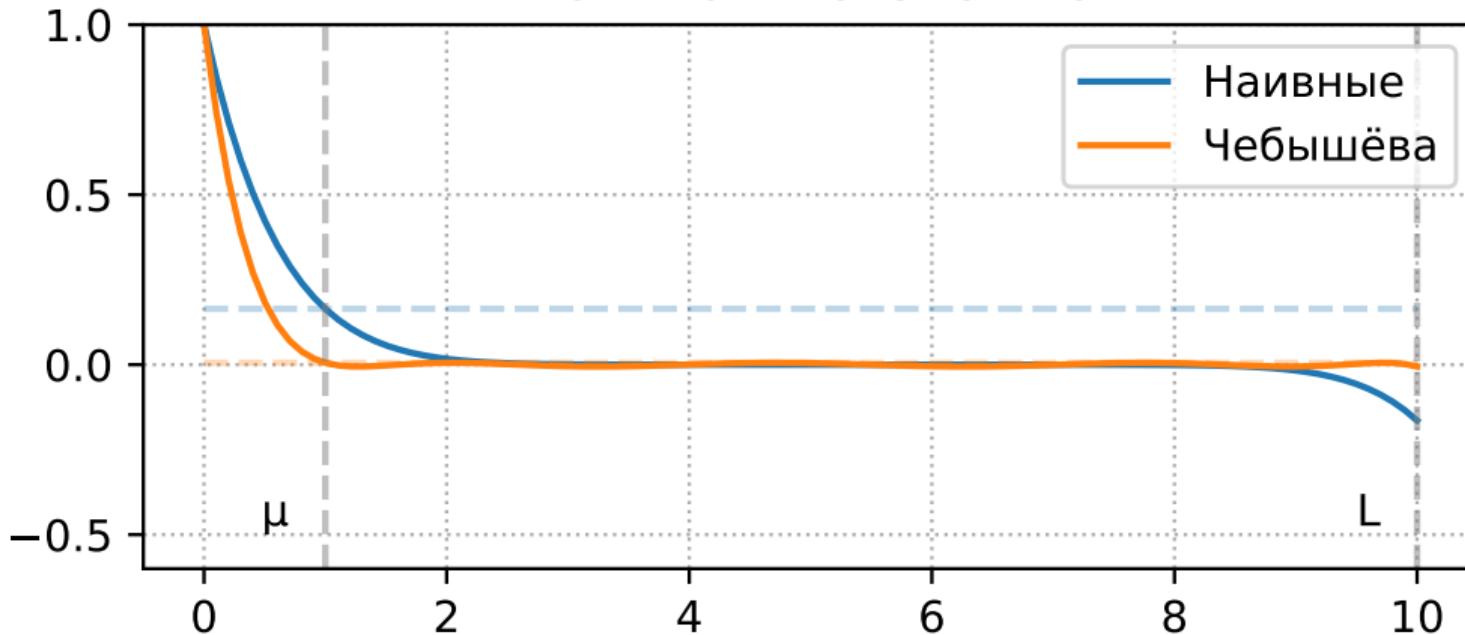
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 8



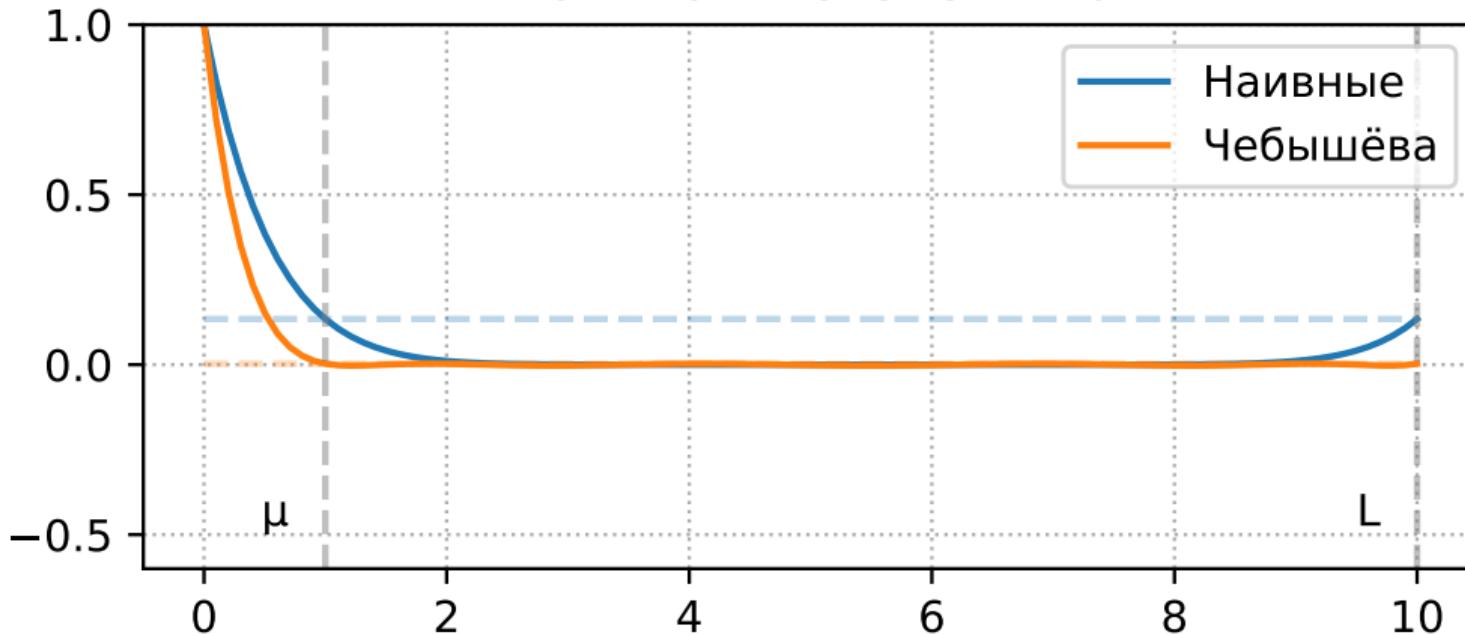
## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 9



## Отшкалированные полиномы Чебышёва

### Полиномы степени 10



## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k \left( \frac{L + \mu - 2\mu}{L - \mu} \right) \cdot T_k \left( \frac{L + \mu}{L - \mu} \right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k \left( \frac{L + \mu}{L - \mu} \right)^{-1} = T_k \left( \frac{L + \mu}{L - \mu} \right)^{-1}$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k\left(\frac{L+\mu-2\mu}{L-\mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

Используя определение числа обусловленности  $\kappa = \frac{L}{\mu}$ , мы получаем:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq T_k\left(\frac{\kappa+1}{\kappa-1}\right)^{-1} = T_k\left(1 + \frac{2}{\kappa-1}\right)^{-1} = T_k(1+\epsilon)^{-1}, \quad \epsilon = \frac{2}{\kappa-1}.$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Мы можем видеть, что максимальное значение полинома Чебышёва на интервале  $[\mu, L]$  достигается на концах отрезка в точках  $a = \mu$  и  $a = L$ . Следовательно, мы можем использовать следующую верхнюю оценку:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq P_k(\mu) = T_k\left(\frac{L+\mu-2\mu}{L-\mu}\right) \cdot T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} = T_k(1) \cdot T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1} = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

Используя определение числа обусловленности  $\varkappa = \frac{L}{\mu}$ , мы получаем:

$$\|P_k(A)\|_2 \leq T_k\left(\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}\right)^{-1} = T_k\left(1 + \frac{2}{\varkappa-1}\right)^{-1} = T_k(1+\epsilon)^{-1}, \quad \epsilon = \frac{2}{\varkappa-1}.$$

Именно в этот момент явно возникнет ускорение. Мы ограничим значение  $\|P_k(A)\|_2$  сверху величиной  $\left(\frac{1}{1+\sqrt{\epsilon}}\right)^k$ . Для этого детально изучим величину  $|T_k(1+\epsilon)|$ .

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(x))$$

$$T_k(1 + \epsilon) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(x))$$
$$T_k(1 + \epsilon) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(x))$$
$$T_k(1 + \epsilon) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как
4. Следовательно,

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(x))$$

$$T_k(1 + \epsilon) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

$$\begin{aligned} T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)) \\ &= \cosh(k\phi) \\ &= \frac{e^{k\phi} + e^{-k\phi}}{2} \geq \frac{e^{k\phi}}{2} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{\epsilon})^k}{2}. \end{aligned}$$

## Верхняя оценка для полиномов Чебышёва

Чтобы ограничить  $|P_k|$  сверху, мы должны ограничить  $|T_k(1 + \epsilon)|$  снизу.

1. Для любого  $x \geq 1$ , полиномы Чебышёва первого рода могут быть записаны как

$$T_k(x) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(x))$$

$$T_k(1 + \epsilon) = \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)).$$

2. Помните, что:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{arccosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

3. Теперь, пусть  $\phi = \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)$ ,

$$e^\phi = 1 + \epsilon + \sqrt{2\epsilon + \epsilon^2} \geq 1 + \sqrt{\epsilon}.$$

4. Следовательно,

$$\begin{aligned} T_k(1 + \epsilon) &= \cosh(k \operatorname{arccosh}(1 + \epsilon)) \\ &= \cosh(k\phi) \\ &= \frac{e^{k\phi} + e^{-k\phi}}{2} \geq \frac{e^{k\phi}}{2} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{\epsilon})^k}{2}. \end{aligned}$$

5. Наконец, мы получаем:

$$\begin{aligned} \|e_k\| &\leq \|P_k(A)\| \|e_0\| \leq \frac{2}{(1 + \sqrt{\epsilon})^k} \|e_0\| \\ &\leq 2 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\nu - 1}}\right)^{-k} \|e_0\| \\ &\leq 2 \exp\left(-\sqrt{\frac{2}{\nu - 1}} k\right) \|e_0\| \end{aligned}$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k \left( \frac{L + \mu - 2a}{L - \mu} \right) T_k \left( \frac{L + \mu}{L - \mu} \right)^{-1}$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a)T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a)T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a)T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a)T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a)T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a)T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a)T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a)t_{k+1} = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)t_k - P_{k-1}(a)t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a)T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a)T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a)T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a)t_{k+1} = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)t_k - P_{k-1}(a)t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)\frac{t_k}{t_{k+1}} - P_{k-1}(a)\frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}$$

## Ускоренный метод [1/2]

Из-за рекурсивного определения полиномов Чебышёва мы непосредственно получаем итерационную схему ускоренного алгоритма. Переформулируя рекурсию в терминах наших отшкалированных полиномов Чебышёва, мы получаем:

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$$

Принимая во внимание, что  $x = \frac{L+\mu-2a}{L-\mu}$ , и:

$$P_k(a) = T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)^{-1}$$

$$T_k\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_k(a)T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k-1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k-1}(a)T_{k-1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$T_{k+1}\left(\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}\right) = P_{k+1}(a)T_{k+1}\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a)t_{k+1} = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)t_k - P_{k-1}(a)t_{k-1}, \text{ где } t_k = T_k\left(\frac{L+\mu}{L-\mu}\right)$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu-2a}{L-\mu}P_k(a)\frac{t_k}{t_{k+1}} - P_{k-1}(a)\frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}$$

Поскольку мы имеем  $P_{k+1}(0) = P_k(0) = P_{k-1}(0) = 1$ , получаем рекуррентную формулу вида:

$$P_{k+1}(a) = (1 - \alpha_k a)P_k(a) + \beta_k (P_k(a) - P_{k-1}(a)).$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu} \frac{t_k}{t_{k+1}} P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}} P_{k-1}(a)$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{\frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}}, \\ \alpha_k = \frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$x_{k+1} = P_{k+1}(A)x_0$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$x_{k+1} = P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0 \\ &= (I - \alpha_k A)x_k + \beta_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

## Ускоренный метод [2/2]

Перегруппируя члены, мы получаем:

$$P_{k+1}(a) = (1 + \beta_k)P_k(a) - \alpha_k a P_k(a) - \beta_k P_{k-1}(a),$$

$$P_{k+1}(a) = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{4a}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}P_k(a) - \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}P_{k-1}(a)$$

$$\begin{cases} \beta_k = \frac{t_{k-1}}{t_{k+1}}, \\ \alpha_k = \frac{4}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}}, \\ 1 + \beta_k = 2\frac{L+\mu}{L-\mu}\frac{t_k}{t_{k+1}} \end{cases}$$

Мы почти закончили :) Помним, что  $e_{k+1} = P_{k+1}(A)e_0$ . Также обратим внимание, что мы работаем с квадратичной задачей, поэтому мы можем предположить  $x^* = 0$  без ограничения общности. В этом случае  $e_0 = x_0$  и  $e_{k+1} = x_{k+1}$ .

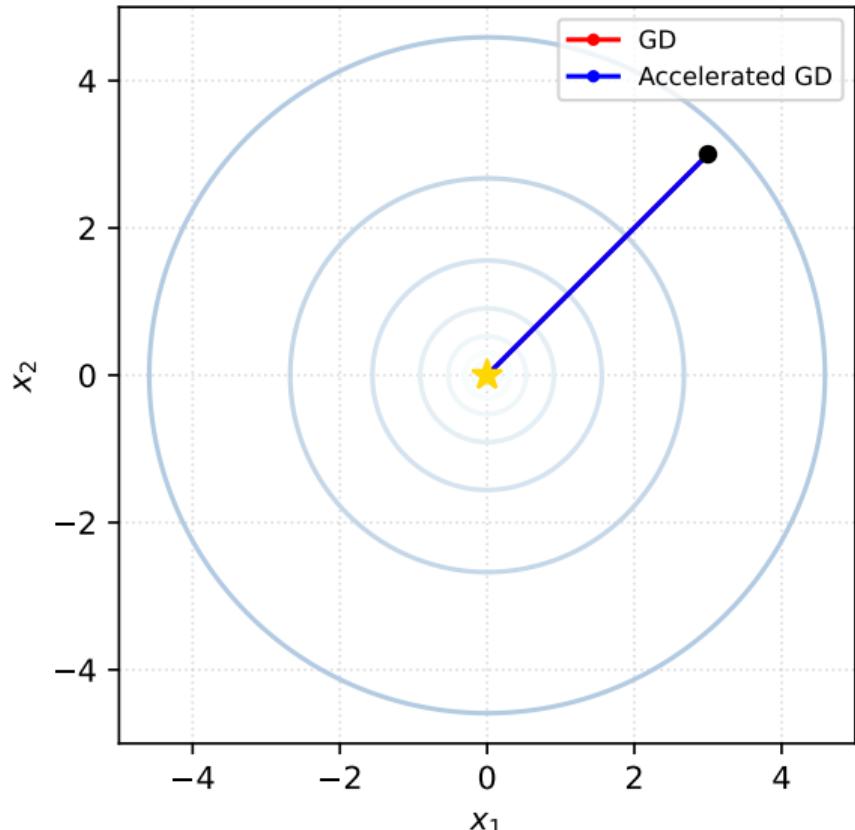
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= P_{k+1}(A)x_0 = (I - \alpha_k A)P_k(A)x_0 + \beta_k (P_k(A) - P_{k-1}(A))x_0 \\ &= (I - \alpha_k A)x_k + \beta_k (x_k - x_{k-1}) \end{aligned}$$

Для квадратичной задачи мы имеем  $\nabla f(x_k) = Ax_k$ , поэтому мы можем переписать обновление как:

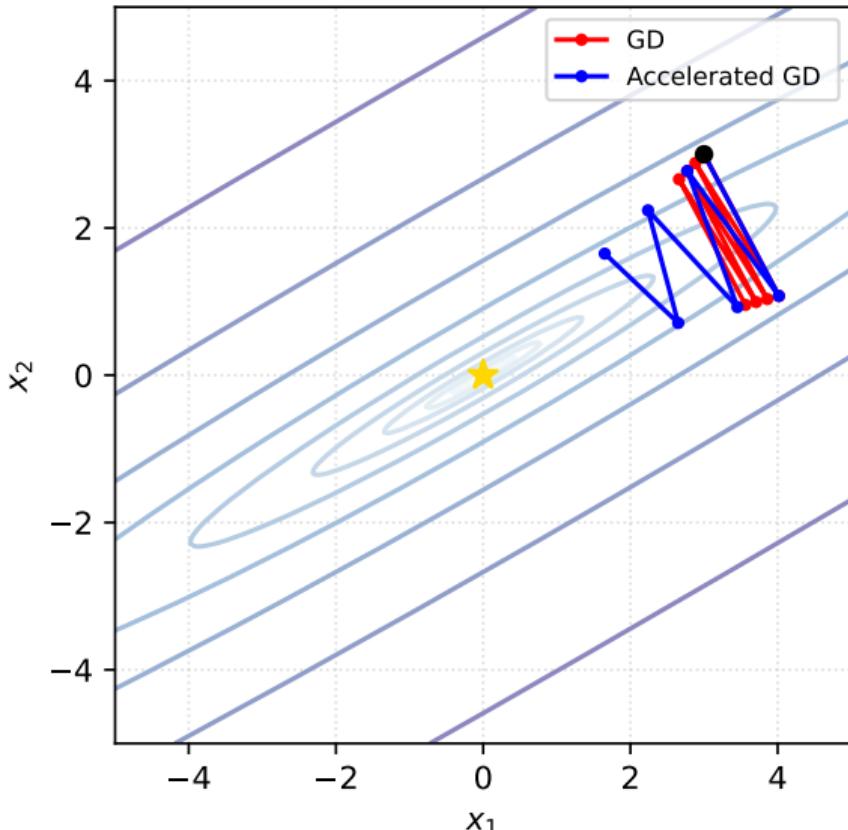
$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k \nabla f(x_k) + \beta_k (x_k - x_{k-1})$$

# Ускорение из первых принципов

$$\alpha = 1.0$$



$$\alpha = 100.0$$

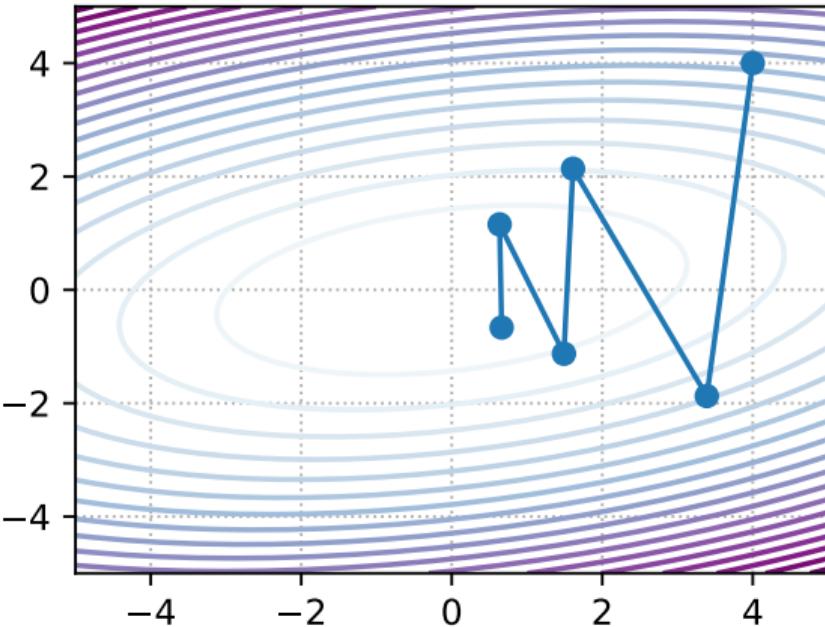


## Метод тяжёлого шарика

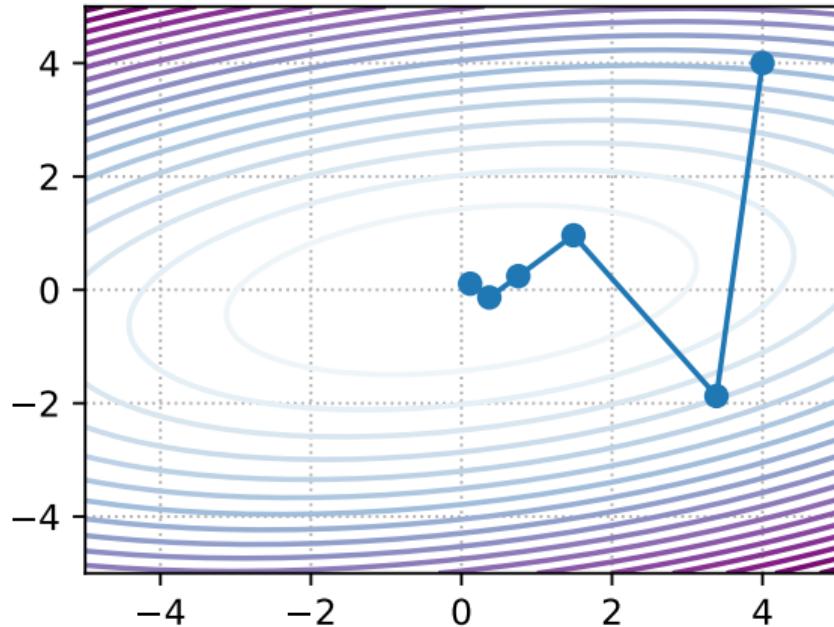
## Колебания и ускорение

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

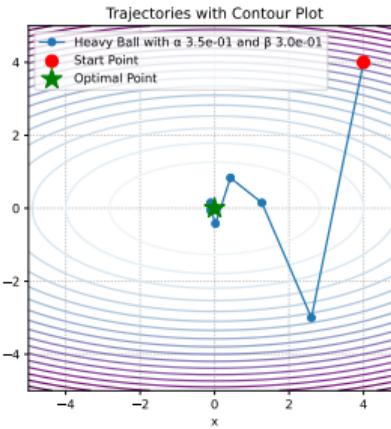
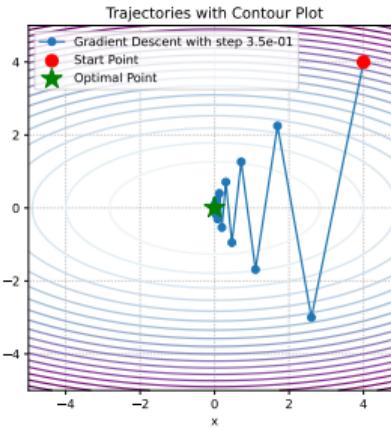
Gradient Descent



Heavy Ball



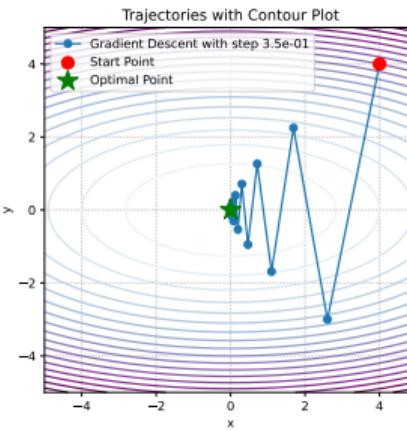
# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею момента (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

# Метод тяжёлого шарика Поляка

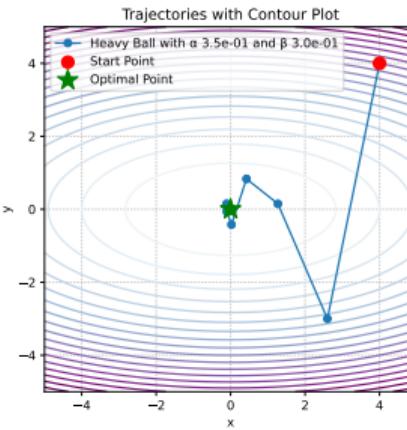


Давайте представим идею момента (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

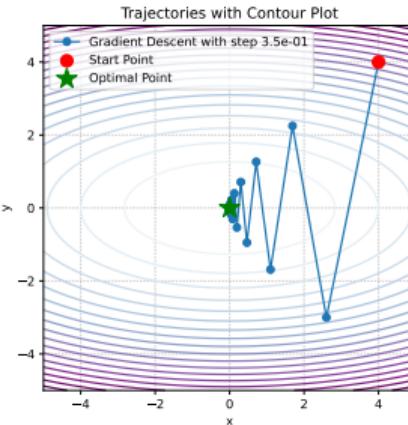
$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$



# Метод тяжёлого шарика Поляка



Давайте представим идею момента (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

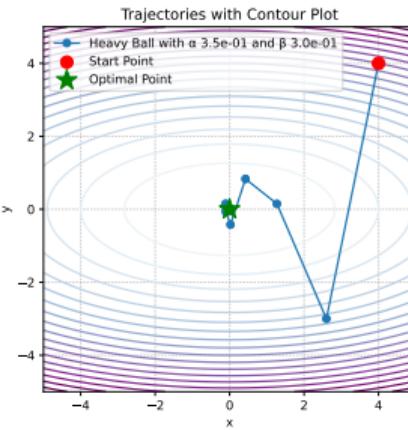
$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

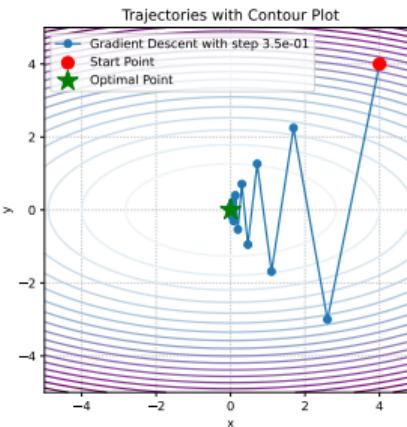
$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

Это можно переписать как

$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k.\end{aligned}$$



# Метод тяжёлого шарика Поляка



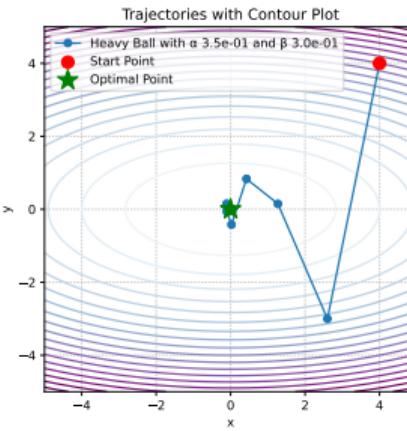
Давайте представим идею момента (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

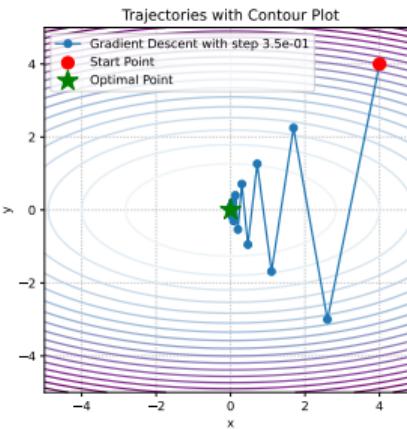
Это можно переписать как



$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k.\end{aligned}$$

Давайте введем следующее обозначение:  $\hat{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}$ . Следовательно,  $\hat{z}_{k+1} = M\hat{z}_k$ , где матрица итерации  $M$  имеет вид:

# Метод тяжёлого шарика Поляка



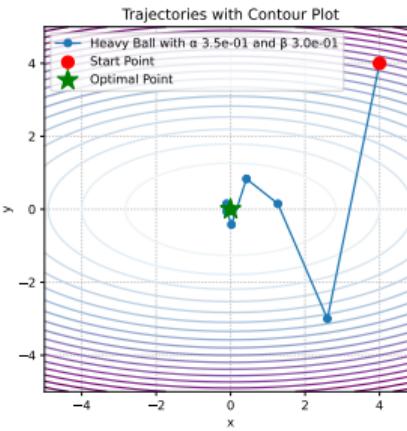
Давайте представим идею момента (импульса, тяжёлого шарика), предложенную Б.Т. Поляком в 1964 году. Обновление метода тяжёлого шарика имеет вид

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1}).$$

В нашем (квадратичном) случае это

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k - \alpha \Lambda \hat{x}_k + \beta(\hat{x}_k - \hat{x}_{k-1}) = (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}$$

Это можно переписать как



$$\begin{aligned}\hat{x}_{k+1} &= (I - \alpha \Lambda + \beta I)\hat{x}_k - \beta \hat{x}_{k-1}, \\ \hat{x}_k &= \hat{x}_k.\end{aligned}$$

Давайте введем следующее обозначение:  $\hat{z}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{x}_k \end{bmatrix}$ . Следовательно,  $\hat{z}_{k+1} = M\hat{z}_k$ , где матрица итерации  $M$  имеет вид:

$$M = \begin{bmatrix} I - \alpha \Lambda + \beta I & -\beta I \\ I & 0_d \end{bmatrix}.$$

## Сведение к скалярному случаю

Обратим внимание, что  $M$  является матрицей  $2d \times 2d$  с четырьмя блочно-диагональными матрицами размера  $d \times d$  внутри. Это означает, что мы можем изменить порядок координат, чтобы сделать  $M$  блочно-диагональной. Обратите внимание, что в уравнении ниже матрица  $M$  обозначает то же самое, что и в обозначении выше, за исключением описанной перестановки строк и столбцов. Мы используем эту небольшую перегрузку обозначений для простоты.

## Сведение к скалярному случаю

Обратим внимание, что  $M$  является матрицей  $2d \times 2d$  с четырьмя блочно-диагональными матрицами размера  $d \times d$  внутри. Это означает, что мы можем изменить порядок координат, чтобы сделать  $M$  блочно-диагональной. Обратите внимание, что в уравнении ниже матрица  $M$  обозначает то же самое, что и в обозначении выше, за исключением описанной перестановки строк и столбцов. Мы используем эту небольшую перегрузку обозначений для простоты.

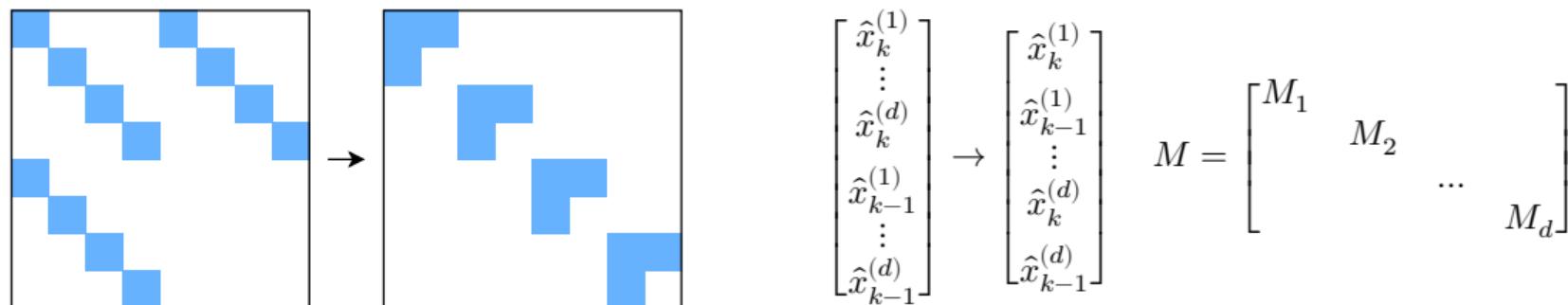


Рис. 1: Иллюстрация перестановки матрицы  $M$

где  $\hat{x}_k^{(i)}$  является  $i$ -й координатой вектора  $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^d$  и  $M_i$  обозначает  $2 \times 2$  матрицу. Переупорядочение позволяет нам исследовать динамику метода независимо от размерности. Асимптотическая скорость сходимости  $2d$ -мерной последовательности векторов  $\hat{x}_k$  определяется наихудшей скоростью сходимости среди его блока координат. Следовательно, достаточно исследовать оптимизацию в одномерном случае.

## Сведение к скалярному случаю

Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

## Сведение к скалярному случаю

Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод будет сходиться, если  $\rho(M) < 1$ , и оптимальные параметры могут быть вычислены путем оптимизации спектрального радиуса

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_{\alpha, \beta} \max_i \rho(M_i), \quad \alpha^* = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \beta^* = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2.$$

## Сведение к скалярному случаю

Для  $i$ -й координаты, где  $\lambda_i$  —  $i$ -е собственное значение матрицы  $A$ , имеем:

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод будет сходиться, если  $\rho(M) < 1$ , и оптимальные параметры могут быть вычислены путем оптимизации спектрального радиуса

$$\alpha^*, \beta^* = \arg \min_{\alpha, \beta} \max_i \rho(M_i), \quad \alpha^* = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \beta^* = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2.$$

Можно показать, что для таких параметров матрица  $M$  имеет комплексные собственные значения, которые образуют комплексно-сопряжённую пару, поэтому расстояние до оптимума (в этом случае  $\|z_k\|$ ) обычно не убывает монотонно.

## Вывод оптимальных гиперпараметров [1/3]

Характеристический полином матрицы  $M_i$  имеет вид:

$$\det(M_i - \lambda I) = \lambda^2 - (1 - \alpha\lambda_i + \beta)\lambda + \beta = 0.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [1/3]

Характеристический полином матрицы  $M_i$  имеет вид:

$$\det(M_i - \lambda I) = \lambda^2 - (1 - \alpha\lambda_i + \beta)\lambda + \beta = 0.$$

Собственные значения матрицы  $M_i$ :

$$\lambda_{1,2}^M = \frac{(1 + \beta - \alpha\lambda_i) \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [1/3]

Характеристический полином матрицы  $M_i$  имеет вид:

$$\det(M_i - \lambda I) = \lambda^2 - (1 - \alpha\lambda_i + \beta)\lambda + \beta = 0.$$

Собственные значения матрицы  $M_i$ :

$$\lambda_{1,2}^M = \frac{(1 + \beta - \alpha\lambda_i) \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Спектральный радиус  $\rho(M_i)$  зависит от знака дискриминанта  $\Delta_i = (1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta$ :

**Случай 1:**  $\Delta_i \geq 0$  (**вещественные с.з.**)

Собственные значения вещественны и спектральный радиус равен

$$\rho(M_i) = \max(|\lambda_1^M|, |\lambda_2^M|).$$

Заметим, что  $\lambda_1^M \cdot \lambda_2^M = \beta$  (свободный член характеристического полинома), поэтому оба с.з. неотрицательны при  $\beta > 0$  и  $\rho(M_i) \geq \sqrt{\beta}$ .

## Вывод оптимальных гиперпараметров [1/3]

Характеристический полином матрицы  $M_i$  имеет вид:

$$\det(M_i - \lambda I) = \lambda^2 - (1 - \alpha\lambda_i + \beta)\lambda + \beta = 0.$$

Собственные значения матрицы  $M_i$ :

$$\lambda_{1,2}^M = \frac{(1 + \beta - \alpha\lambda_i) \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Спектральный радиус  $\rho(M_i)$  зависит от знака дискриминанта  $\Delta_i = (1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta$ :

**Случай 1:**  $\Delta_i \geq 0$  (**вещественные с.з.**)

Собственные значения вещественны и спектральный радиус равен

$$\rho(M_i) = \max(|\lambda_1^M|, |\lambda_2^M|).$$

Заметим, что  $\lambda_1^M \cdot \lambda_2^M = \beta$  (свободный член хар. полинома), поэтому оба с.з. неотрицательны при  $\beta > 0$  и  $\rho(M_i) \geq \sqrt{\beta}$ .

**Случай 2:**  $\Delta_i < 0$  (**комплексные с.з.**)

Собственные значения комплексно-сопряжённые:

$\lambda_1^M = \overline{\lambda_2^M}$ . По теореме Виета, произведение корней хар. полинома  $\lambda^2 - (1 + \beta - \alpha\lambda_i)\lambda + \beta = 0$  равно свободному члену:

$$\lambda_1^M \cdot \lambda_2^M = |\lambda_1^M|^2 = \beta \quad \Rightarrow \quad \rho(M_i) = \sqrt{\beta}.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [1/3]

Характеристический полином матрицы  $M_i$  имеет вид:

$$\det(M_i - \lambda I) = \lambda^2 - (1 - \alpha\lambda_i + \beta)\lambda + \beta = 0.$$

Собственные значения матрицы  $M_i$ :

$$\lambda_{1,2}^M = \frac{(1 + \beta - \alpha\lambda_i) \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Спектральный радиус  $\rho(M_i)$  зависит от знака дискриминанта  $\Delta_i = (1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta$ :

**Случай 1:**  $\Delta_i \geq 0$  (**вещественные с.з.**)

Собственные значения вещественны и спектральный радиус равен

$$\rho(M_i) = \max(|\lambda_1^M|, |\lambda_2^M|).$$

Заметим, что  $\lambda_1^M \cdot \lambda_2^M = \beta$  (свободный член хар. полинома), поэтому оба с.з. неотрицательны при  $\beta > 0$  и  $\rho(M_i) \geq \sqrt{\beta}$ .

**Случай 2:**  $\Delta_i < 0$  (**комплексные с.з.**)

Собственные значения комплексно-сопряжённые:

$\lambda_1^M = \overline{\lambda_2^M}$ . По теореме Виета, произведение корней хар. полинома  $\lambda^2 - (1 + \beta - \alpha\lambda_i)\lambda + \beta = 0$  равно свободному члену:

$$\lambda_1^M \cdot \lambda_2^M = |\lambda_1^M|^2 = \beta \Rightarrow \rho(M_i) = \sqrt{\beta}.$$

Ключевое наблюдение: в комплексном режиме  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  **не зависит от**  $\lambda_i$ . Значит, если мы подберём  $\alpha, \beta$  так, чтобы все  $M_i$  были в комплексном режиме, то  $\rho(M) = \sqrt{\beta}$  для всех  $i$  одновременно.

## Вывод оптимальных гиперпараметров [2/3]

Условие  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  (комплексные с.з. или кратный вещественный корень) для всех  $\lambda_i \in [\mu, L]$ :

$$(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 \leq 4\beta \Leftrightarrow (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\lambda_i \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [2/3]

Условие  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  (комплексные с.з. или кратный вещественный корень) для всех  $\lambda_i \in [\mu, L]$ :

$$(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 \leq 4\beta \Leftrightarrow (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\lambda_i \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Заметим, что при  $\Delta_i = 0$  собственное значение кратное и равно  $\frac{1+\beta-\alpha\lambda_i}{2}$ , а его квадрат равен  $\beta$  (т. Виета), так что  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  и в граничном случае. Для выполнения при **всех**  $\lambda_i \in [\mu, L]$  необходимо и достаточно:

$$(1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\mu \quad \text{и} \quad \alpha L \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [2/3]

Условие  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  (комплексные с.з. или кратный вещественный корень) для всех  $\lambda_i \in [\mu, L]$ :

$$(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 \leq 4\beta \Leftrightarrow (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\lambda_i \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Заметим, что при  $\Delta_i = 0$  собственное значение кратное и равно  $\frac{1+\beta-\alpha\lambda_i}{2}$ , а его квадрат равен  $\beta$  (т. Виета), так что  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  и в граничном случае. Для выполнения при **всех**  $\lambda_i \in [\mu, L]$  необходимо и достаточно:

$$(1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\mu \quad \text{и} \quad \alpha L \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Минимизируем  $\rho(M) = \sqrt{\beta}$ , т.е. минимизируем  $\beta$  при условии существования  $\alpha$ . Из двух неравенств выше получаем необходимое условие на  $\alpha$ :

$$\frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{\mu} \leq \alpha \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{L}.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [2/3]

Условие  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  (комплексные с.з. или кратный вещественный корень) для всех  $\lambda_i \in [\mu, L]$ :

$$(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 \leq 4\beta \Leftrightarrow (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\lambda_i \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Заметим, что при  $\Delta_i = 0$  собственное значение кратное и равно  $\frac{1+\beta-\alpha\lambda_i}{2}$ , а его квадрат равен  $\beta$  (т. Виета), так что  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  и в граничном случае. Для выполнения при **всех**  $\lambda_i \in [\mu, L]$  необходимо и достаточно:

$$(1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\mu \quad \text{и} \quad \alpha L \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Минимизируем  $\rho(M) = \sqrt{\beta}$ , т.е. минимизируем  $\beta$  при условии существования  $\alpha$ . Из двух неравенств выше получаем необходимое условие на  $\alpha$ :

$$\frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{\mu} \leq \alpha \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{L}.$$

Такое  $\alpha$  существует тогда и только тогда, когда  $\frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{\mu} \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{L}$ , т.е.  $\nu \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{(1 - \sqrt{\beta})^2}$ . Правая часть монотонно возрастает по  $\beta$ , поэтому минимальное  $\beta$  достигается, когда неравенство обращается в равенство:

$$\alpha\mu = (1 - \sqrt{\beta})^2, \quad \alpha L = (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [2/3]

Условие  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  (комплексные с.з. или кратный вещественный корень) для всех  $\lambda_i \in [\mu, L]$ :

$$(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 \leq 4\beta \Leftrightarrow (1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\lambda_i \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Заметим, что при  $\Delta_i = 0$  собственное значение кратное и равно  $\frac{1+\beta-\alpha\lambda_i}{2}$ , а его квадрат равен  $\beta$  (т. Виета), так что  $\rho(M_i) = \sqrt{\beta}$  и в граничном случае. Для выполнения при **всех**  $\lambda_i \in [\mu, L]$  необходимо и достаточно:

$$(1 - \sqrt{\beta})^2 \leq \alpha\mu \quad \text{и} \quad \alpha L \leq (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Минимизируем  $\rho(M) = \sqrt{\beta}$ , т.е. минимизируем  $\beta$  при условии существования  $\alpha$ . Из двух неравенств выше получаем необходимое условие на  $\alpha$ :

$$\frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{\mu} \leq \alpha \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{L}.$$

Такое  $\alpha$  существует тогда и только тогда, когда  $\frac{(1 - \sqrt{\beta})^2}{\mu} \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{L}$ , т.е.  $\mu \leq \frac{(1 + \sqrt{\beta})^2}{(1 - \sqrt{\beta})^2}$ . Правая часть монотонно возрастает по  $\beta$ , поэтому минимальное  $\beta$  достигается, когда неравенство обращается в равенство:

$$\alpha\mu = (1 - \sqrt{\beta})^2, \quad \alpha L = (1 + \sqrt{\beta})^2.$$

Разделим второе на первое:

$$f \rightarrow \min_{x,y,z} \quad \frac{L}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\mu} = \frac{1 + \sqrt{\beta}}{1 - \sqrt{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \beta^* = \left( \frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1} \right)^2 \equiv \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [3/3]

Подставим  $\beta^*$  в  $\alpha L = (1 + \sqrt{\beta^*})^2$ :

$$\alpha^* = \frac{(1 + \sqrt{\beta^*})^2}{L} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^2}{L} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^2}{L} = \boxed{\frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}}$$

## Вывод оптимальных гиперпараметров [3/3]

Подставим  $\beta^*$  в  $\alpha L = (1 + \sqrt{\beta^*})^2$ :

$$\alpha^* = \frac{(1 + \sqrt{\beta^*})^2}{L} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^2}{L} = \frac{\left(\frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}\right)^2}{L} = \boxed{\frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}}$$

Итого, оптимальная скорость сходимости метода тяжёлого шарика для квадратичной задачи:

$$\rho(M) = \sqrt{\beta^*} = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} = \frac{\sqrt{\kappa} - 1}{\sqrt{\kappa} + 1}$$

## Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

## Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны  $(\alpha^*, \beta^*)$ , собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

## Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны  $(\alpha^*, \beta^*)$ , собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

$$\operatorname{Re}(\lambda^M) = \frac{L + \mu - 2\lambda_i}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \operatorname{Im}(\lambda^M) = \frac{\pm 2\sqrt{(L - \lambda_i)(\lambda_i - \mu)}}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad |\lambda^M| = \frac{L - \mu}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}.$$

## Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

Мы можем явно вычислить собственные значения  $M_i$ :

$$\lambda_1^M, \lambda_2^M = \lambda \left( \begin{bmatrix} 1 - \alpha\lambda_i + \beta & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1 + \beta - \alpha\lambda_i \pm \sqrt{(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta}}{2}.$$

Когда  $\alpha$  и  $\beta$  оптимальны  $(\alpha^*, \beta^*)$ , собственные значения являются комплексно-сопряженной парой  $(1 + \beta - \alpha\lambda_i)^2 - 4\beta \leq 0$ , т.е.  $\beta \geq (1 - \sqrt{\alpha\lambda_i})^2$ .

$$\operatorname{Re}(\lambda^M) = \frac{L + \mu - 2\lambda_i}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad \operatorname{Im}(\lambda^M) = \frac{\pm 2\sqrt{(L - \lambda_i)(\lambda_i - \mu)}}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \quad |\lambda^M| = \frac{L - \mu}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}.$$

И скорость сходимости не зависит от шага и равна  $\sqrt{\beta^*}$ .

# Сходимость метода тяжёлого шарика для квадратичной функции

## i Theorem

Предположим, что  $f$  является  $\mu$ -сильно выпуклой и  $L$ -гладкой квадратичной функцией. Тогда метод тяжёлого шарика с параметрами

$$\alpha = \frac{4}{(\sqrt{L} + \sqrt{\mu})^2}, \beta = \left( \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}} \right)^2$$

сходится линейно:

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq \left( \frac{\sqrt{\mu} - 1}{\sqrt{\mu} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|$$

## Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика<sup>3</sup>

### i Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и выпуклой и что

$$\beta \in [0, 1), \quad \alpha \in \left(0, \frac{2(1-\beta)}{L}\right).$$

Тогда последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерациями тяжёлого шарика, удовлетворяет

$$f(\bar{x}_T) - f^* \leq \begin{cases} \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)} \left( \frac{L\beta}{1-\beta} + \frac{1-\beta}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in (0, \frac{1-\beta}{L}], \\ \frac{\|x_0 - x^*\|^2}{2(T+1)(2(1-\beta)-\alpha L)} \left( L\beta + \frac{(1-\beta)^2}{\alpha} \right), & \text{if } \alpha \in [\frac{1-\beta}{L}, \frac{2(1-\beta)}{L}), \end{cases}$$

где  $\bar{x}_T$  среднее Чезаро последовательности итераций, т.е.

$$\bar{x}_T = \frac{1}{T+1} \sum_{k=0}^T x_k.$$

<sup>3</sup>Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et al.

## Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика<sup>4</sup>

### Theorem

Предположим, что  $f$  является гладкой и сильно выпуклой и что

$$\alpha \in \left(0, \frac{2}{L}\right), \quad 0 \leq \beta < \frac{1}{2} \left( \frac{\mu\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\mu^2\alpha^2}{4} + 4(1 - \frac{\alpha L}{2})} \right).$$

Тогда последовательность  $\{x_k\}$ , генерируемая итерациями метода тяжёлого шарика, сходится линейно к единственному оптимальному решению  $x^*$ . В частности,

$$f(x_k) - f^* \leq q^k(f(x_0) - f^*),$$

где  $q \in [0, 1)$ .

<sup>4</sup>Глобальная сходимость метода тяжёлого шарика для выпуклой оптимизации, Euhanna Ghadimi et al.

## Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.

## Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.

## Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно <sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method

## Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно <sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.
- Метод не был чрезвычайно популярен до ML-бума.

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method

## Итоги по методу тяжёлого шарика

- Обеспечивает ускоренную сходимость для сильно выпуклых квадратичных задач.
- Локально ускоренная сходимость была доказана в оригинальной статье.
- Недавно <sup>5</sup> было доказано, что глобального ускорения сходимости для метода не существует.
- Метод не был чрезвычайно популярен до ML-бума.
- Сейчас он фактически является стандартом для практического ускорения методов градиентного спуска, в том числе для невыпуклых задач (обучение нейронных сетей).

---

<sup>5</sup>Provable non-accelerations of the heavy-ball method

## Ускоренный градиентный метод Нестерова

## Концепция ускоренного градиентного метода Нестерова

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_{k+1} - \alpha \nabla f(y_{k+1}) \end{cases}$$

# Концепция ускоренного градиентного метода Нестерова

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) \quad x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k) + \beta(x_k - x_{k-1})$$

Давайте определим следующие обозначения

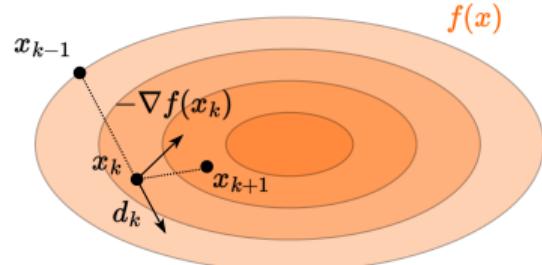
$$\begin{aligned} x^+ &= x - \alpha \nabla f(x) && \text{Градиентный шаг} \\ d_k &= \beta_k(x_k - x_{k-1}) && \text{Импульс} \end{aligned}$$

Тогда мы можем записать:

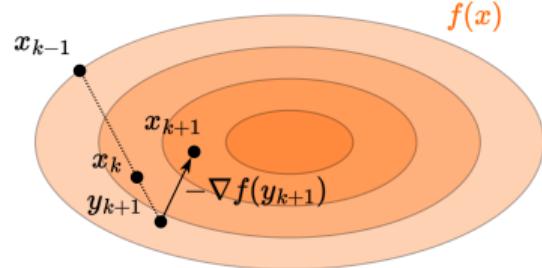
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k^+ && \text{Градиентный спуск} \\ x_{k+1} &= x_k^+ + d_k && \text{Метод тяжёлого шарика} \\ x_{k+1} &= (x_k + d_k)^+ && \text{Ускоренный градиентный метод Нестерова} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y_{k+1} = x_k + \beta(x_k - x_{k-1}) \\ x_{k+1} = y_{k+1} - \alpha \nabla f(y_{k+1}) \end{cases}$$

Polyak momentum



Nesterov momentum



# Сходимость для выпуклых функций

## Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является выпуклой и  $L$ -гладкой. Ускоренный градиентный метод Нестерова (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:

**Обновление градиента:**  $x_{k+1} = y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k)$

**Вес экстраполяции:**  $\lambda_{k+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda_k^2}}{2}$

$$\gamma_k = \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_{k+1}}$$

**Экстраполяция:**  $y_{k+1} = x_{k+1} + \gamma_k (x_{k+1} - x_k)$

Последовательность  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемая алгоритмом, сходится к оптимальному значению  $f^*$  со скоростью  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ , в частности:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{2L\|x_0 - x^*\|^2}{k^2}$$

# Ускоренная сходимость для сильно выпуклых функций

## Theorem

Предположим, что  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $\mu$ -сильно выпуклой и  $L$ -гладкой. Ускоренный градиентный метод Нестерова (NAG) предназначен для решения задачи минимизации, начиная с начальной точки  $x_0 = y_0 \in \mathbb{R}^n$  и  $\lambda_0 = 0$ . Алгоритм выполняет следующие шаги:

**Обновление градиента:**  $x_{k+1} = y_k - \frac{1}{L} \nabla f(y_k)$

**Экстраполяция:**  $y_{k+1} = x_{k+1} - \gamma (x_{k+1} - x_k)$

**Вес экстраполяции:**  $\gamma = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{\mu}}{\sqrt{L} + \sqrt{\mu}}$

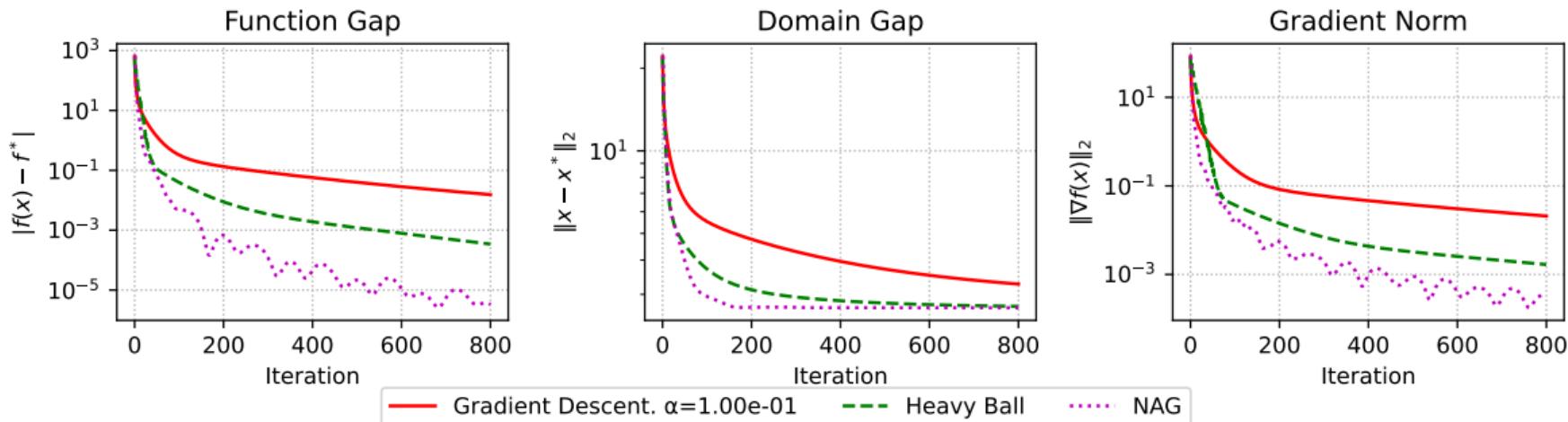
Последовательность  $\{f(x_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ , генерируемая алгоритмом, сходится к оптимальному значению  $f^*$  линейно:

$$f(x_k) - f^* \leq \frac{\mu + L}{2} \|x_0 - x^*\|_2^2 \exp\left(-\frac{k}{\sqrt{\mu}}\right)$$

## Численные эксперименты

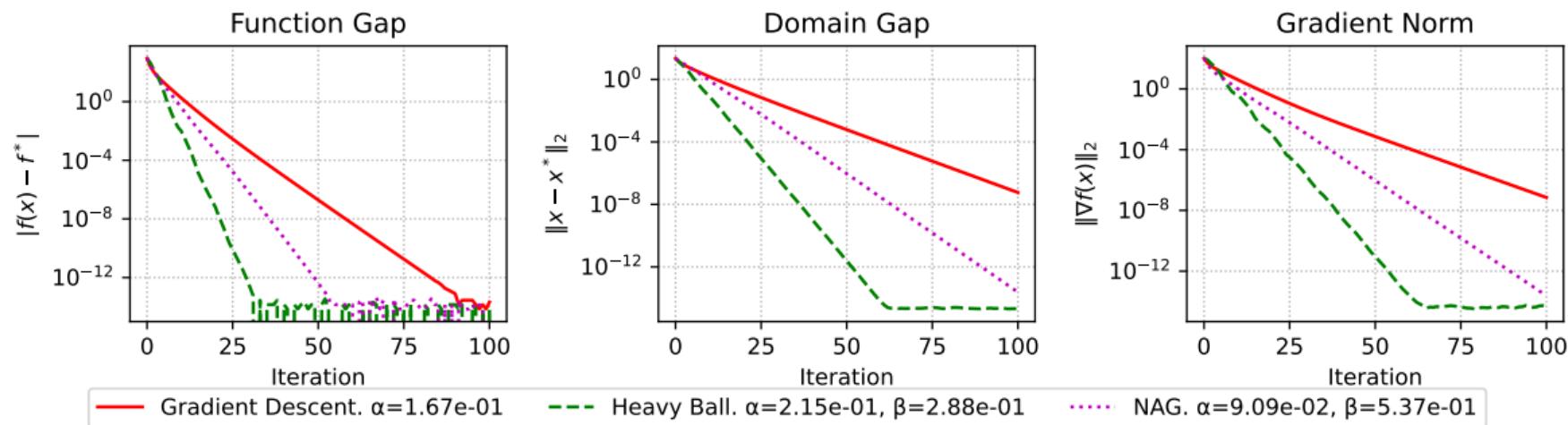
# Выпуклая квадратичная задача (линейная регрессия)

Convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=0$ ,  $L=10$



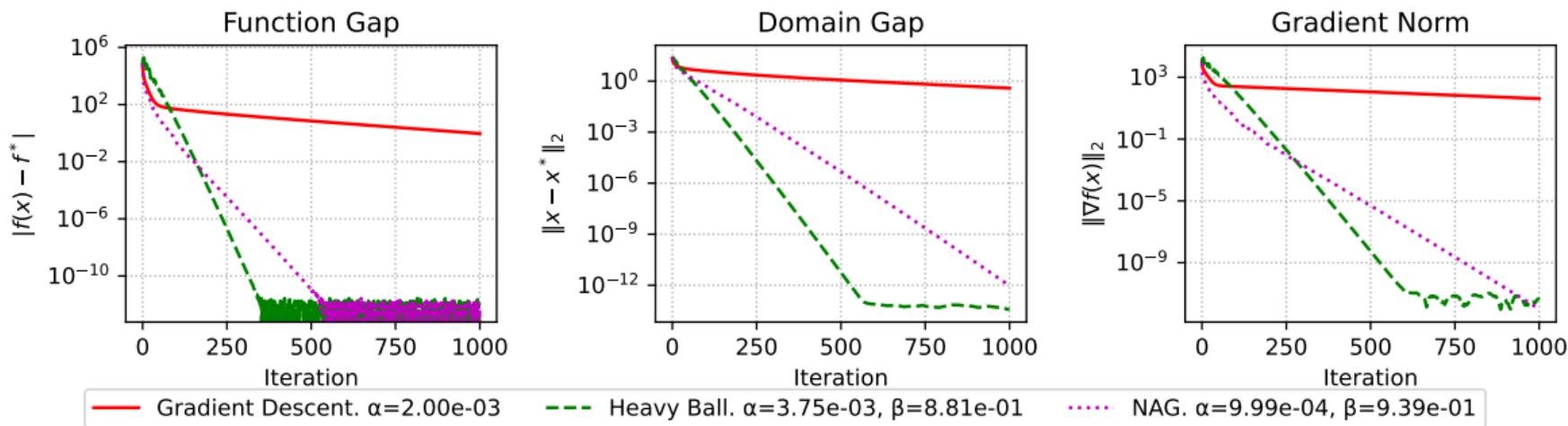
# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=10$



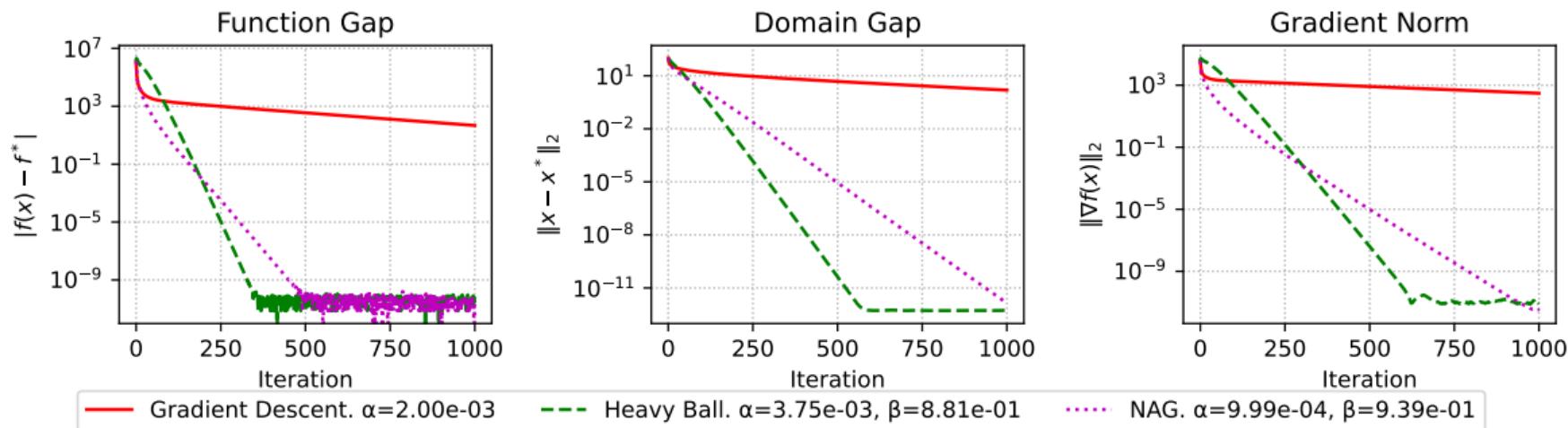
# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)

Strongly convex quadratics:  $n=60$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$



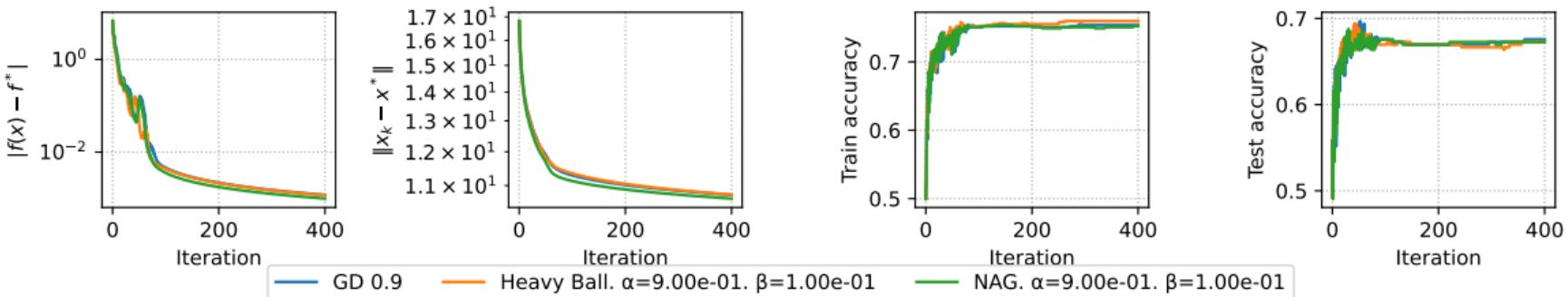
# Сильно выпуклая квадратичная задача (регуляризованная линейная регрессия)

Strongly convex quadratics:  $n=1000$ , random matrix,  $\mu=1$ ,  $L=1000$



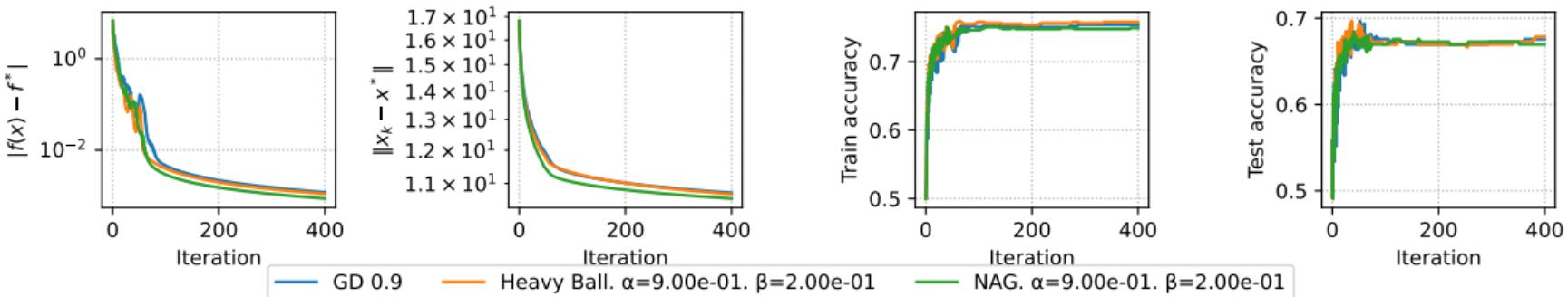
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



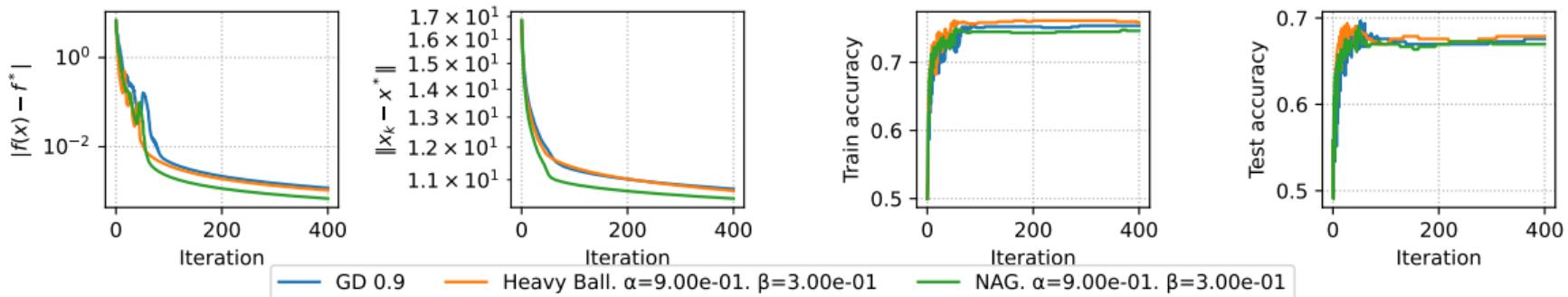
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



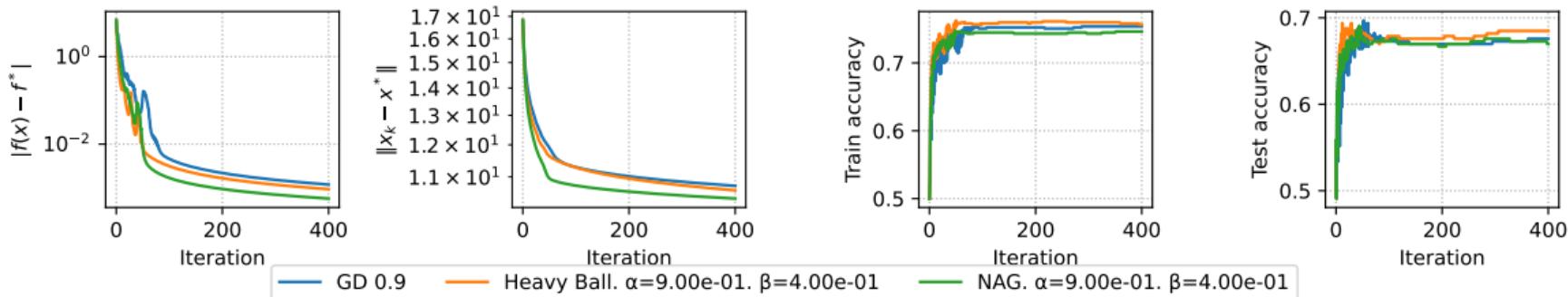
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



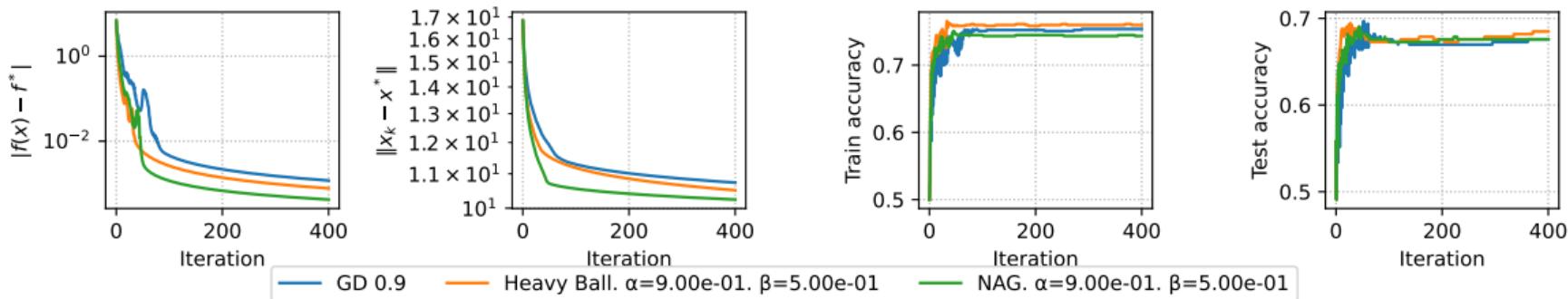
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



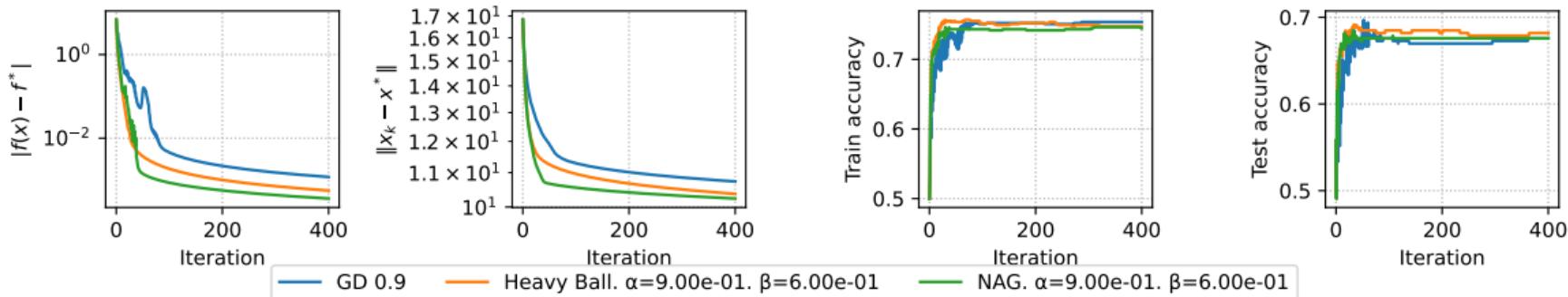
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



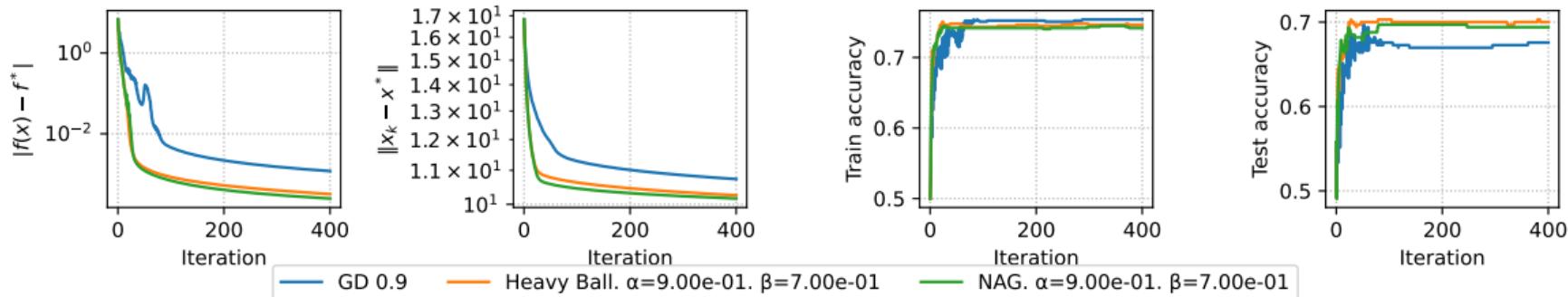
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



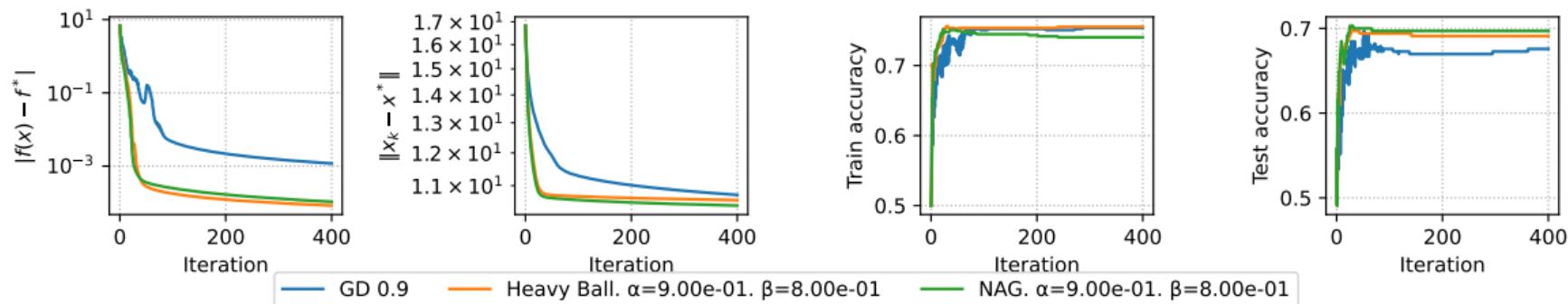
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



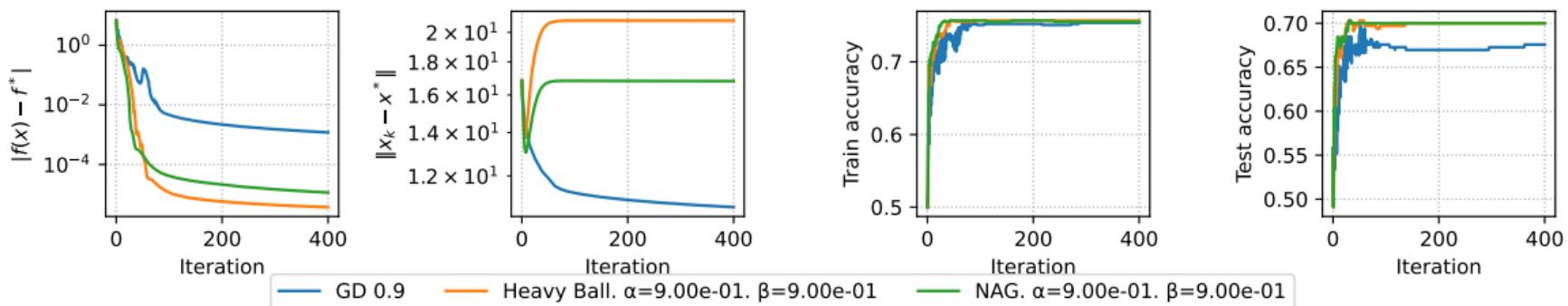
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



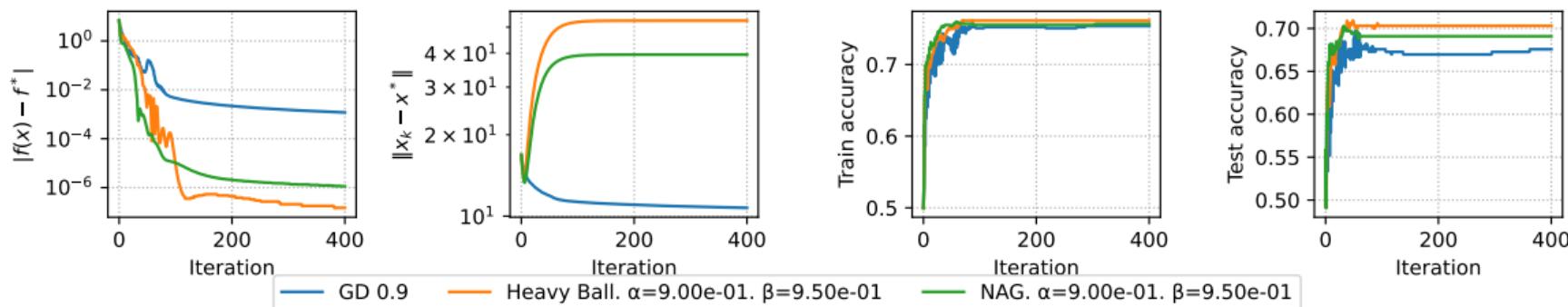
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



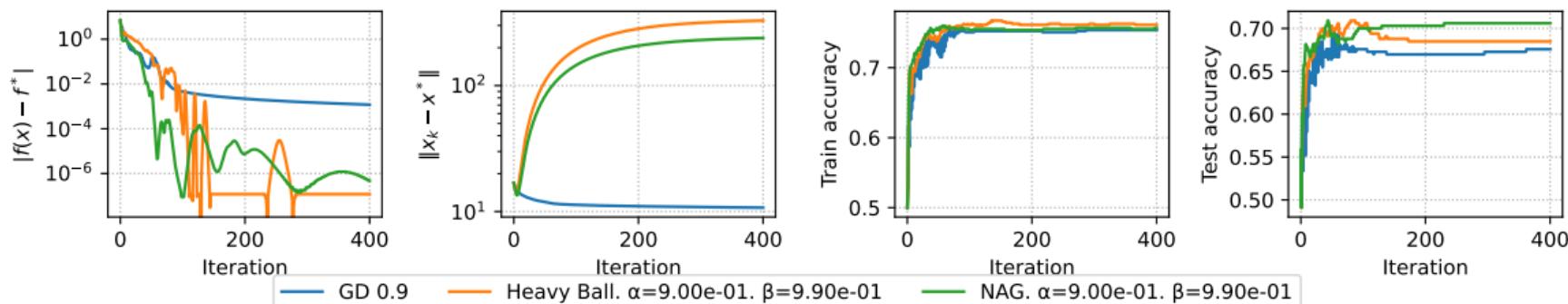
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



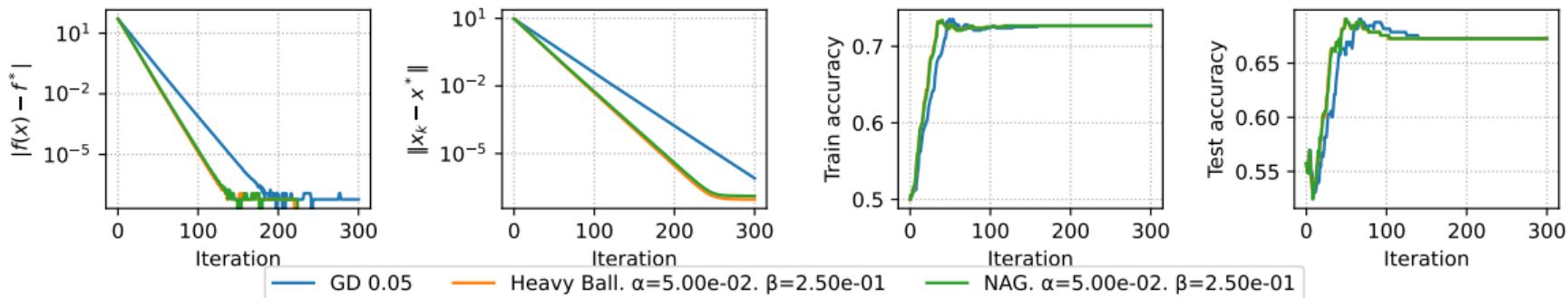
# Выпуклая бинарная логистическая регрессия

Convex binary logistic regression. mu=0.



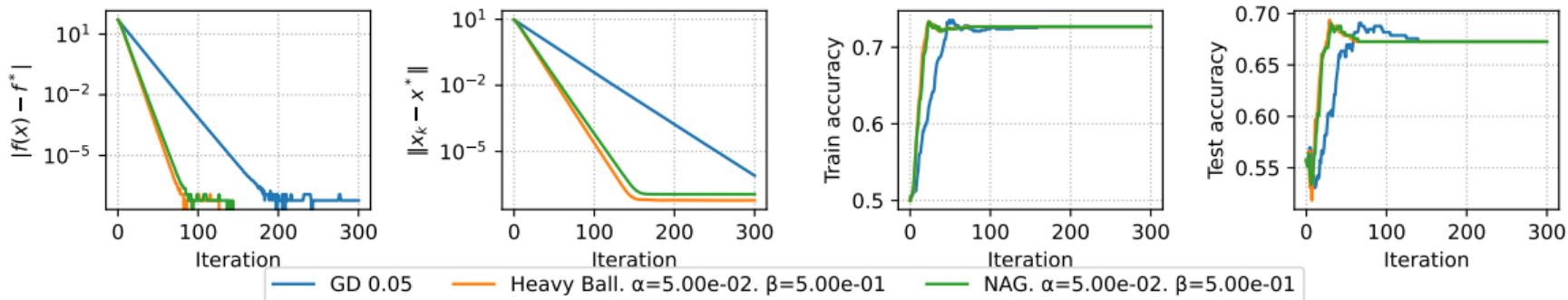
# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



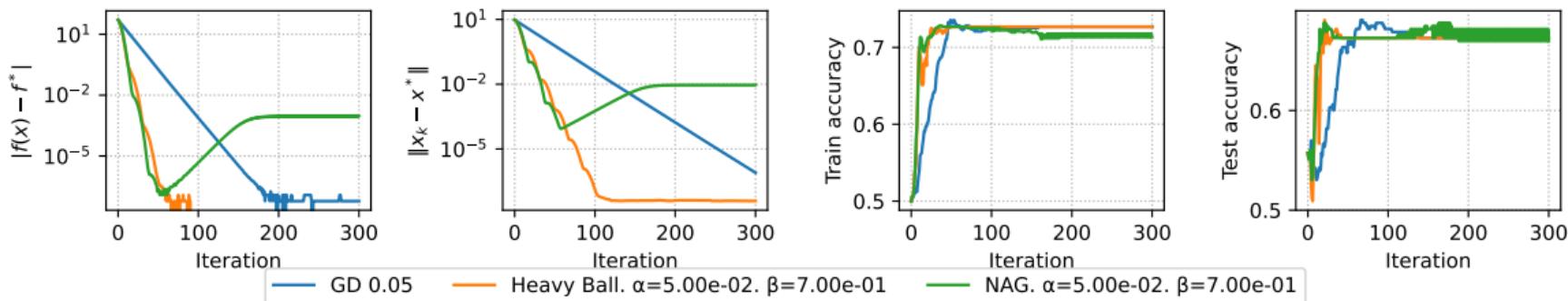
# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .



# Сильно выпуклая бинарная логистическая регрессия

Strongly convex binary logistic regression.  $\mu=1$ .

