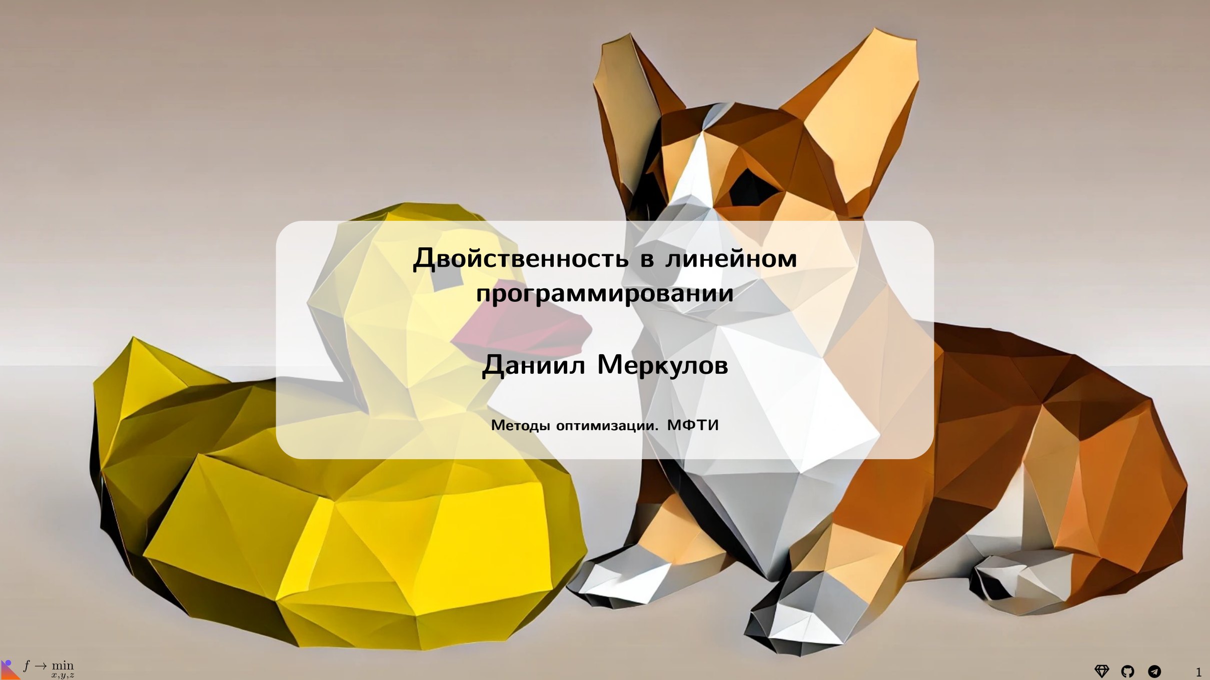


Двойственность в линейном программировании

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

Двойственность в линейном программировании

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
&\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^\top x \\
\text{s.t. } & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ККТ для оптимальных x^*, ν^*, λ^*:

$$
\begin{aligned}
&L(x, \nu, \lambda) = c^T x + \nu^T (Ax - b) - \lambda^T x \\
&-A^T \nu^* + \lambda^* = c \\
&Ax^* = b \\
&x^* \succeq 0 \\
&\lambda^* \succeq 0 \\
&\lambda_i^* x_i^* = 0
\end{aligned}
$$

Двойственность

Прямая задача:

$$
\begin{aligned}
\min_{x \in \mathbb{R}^n} \; & c^\top x \\
\text{s.t. } \; & Ax = b \\
& x_i \geq 0, \; i = 1, \dots, n
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ККТ для оптимальных x^*, ν^*, λ^*:

$$
\begin{aligned}
& L(x, \nu, \lambda) = c^T x + \nu^T (Ax - b) - \lambda^T x \\
& -A^T \nu^* + \lambda^* = c \\
& Ax^* = b \\
& x^* \succeq 0 \\
& \lambda^* \succeq 0 \\
& \lambda_i^* x_i^* = 0
\end{aligned}
$$

Имеет следующую двойственную:

$$
\begin{aligned}
\max_{\nu \in \mathbb{R}^m} \; & -b^\top \nu \\
\text{s.t. } \; & -A^T \nu \preceq c
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Найдите двойственную задачу к задаче выше (она должна быть исходной задаче ЛП). Также запишите условия ККТ для двойственной задачи, чтобы убедиться, что они идентичны условиям ККТ для прямой задачи.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T\nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T\nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек x_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ такая, что

$$c^T x_k \downarrow -\infty, \quad Ax_k = b, \quad x_k \geq 0.$$

Сильная двойственность в линейном программировании

(i) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 имеет (конечное) решение, то и другая имеет, и значения целевых функций равны.

(ii) Если любая из задач Equation 1 или Equation 2 неограничена, то другая задача недопустима.

ДОК-ВО. Для (i) предположим, что Equation 1 имеет конечное оптимальное решение x^*. Из ККТ следует, что существуют оптимальные векторы λ^* и ν^* такие, что (x^*, ν^*, λ^*) удовлетворяет ККТ. Мы отметили выше, что ККТ для Equation 1 и Equation 2 эквивалентны. Более того, как утверждалось, $c^T x^* = (-A^T \nu^* + \lambda^*)^T x^* = -(\nu^*)^T A x^* = -b^T \nu^*$. Симметричный аргумент справедлив, если мы начнем с предположения, что двойственная задача Equation 2 имеет решение.

Чтобы доказать (ii), предположим, что прямая задача неограничена, то есть существует последовательность точек x_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ такая, что

$$c^T x_k \downarrow -\infty, \quad A x_k = b, \quad x_k \geq 0.$$

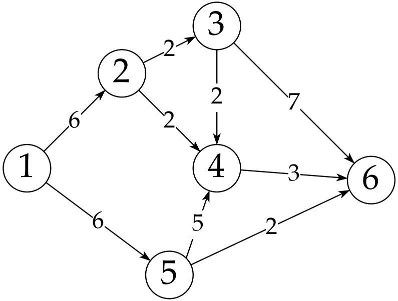
Предположим также, что двойственная задача Equation 2 допустима, то есть существует вектор $\bar{\nu}$ такой, что $-A^T \bar{\nu} \leq c$. Из последнего неравенства вместе с $x_k \geq 0$ имеем, что $-\bar{\nu}^T A x_k \leq c^T x_k$, и поэтому

$$-\bar{\nu}^T b = -\bar{\nu}^T A x_k \leq c^T x_k \downarrow -\infty,$$

что приводит к противоречию. Следовательно, двойственная задача должна быть недопустимой. Аналогичный аргумент можно использовать, чтобы показать, что неограниченность двойственной задачи влечет недопустимость прямой.

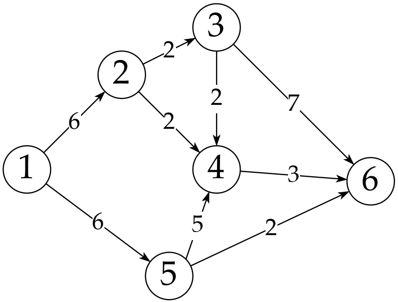
Максимальный поток - минимальный разрез

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Задача максимального потока

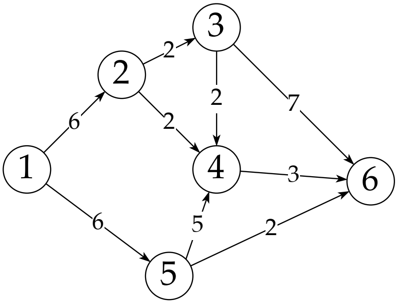


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.

Задача максимального потока

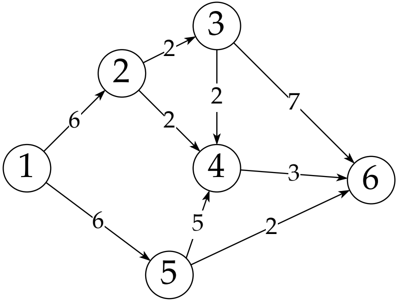


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Задача максимального потока

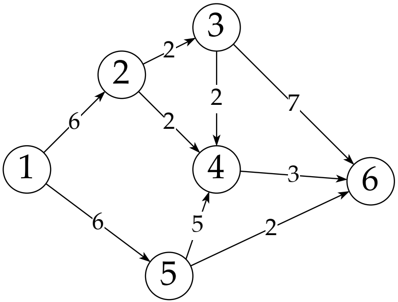


Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

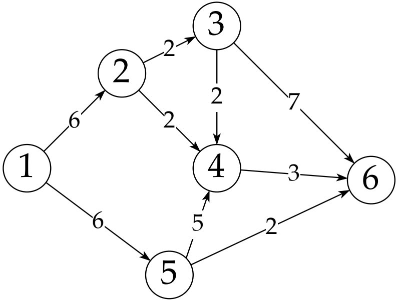
Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

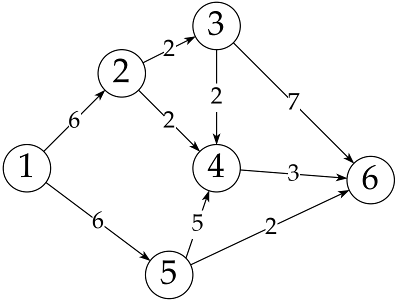
- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица потока: $X[i, j]$ представляет поток от узла i к узлу j.

Задача максимального потока



Узлы — это маршрутизаторы, рёбра — это каналы связи; с каждым узлом связана пропускная способность — узел 1 может передавать узлу 2 до 6 Мбит/с, узел 2 может передавать узлу 4 до 2 Мбит/с и т.д.

Вопрос:

- Сеть узлов и рёбер представляет каналы связи, каждый с указанной пропускной способностью.
- Пример: Может ли узел 1 (источник) передавать узлу 6 (сток) со скоростью 6 Мбит/с? 12 Мбит/с? Какова максимальная скорость?

Матрица пропускной способности:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

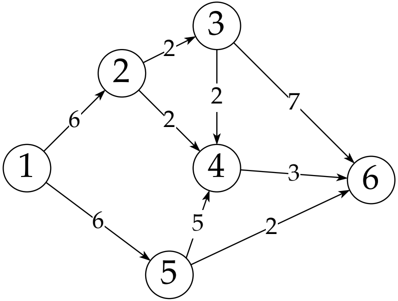
Матрица потока: $X[i, j]$ представляет поток от узла i к узлу j.

Ограничения:

$$0 \preceq X \qquad X \preceq C$$

Сохранение потока: $\displaystyle\sum_{j=2}^{N} X(i,j) = \sum_{k=1}^{N-1} X(k,i), \; i = 2, \ldots, N-1$

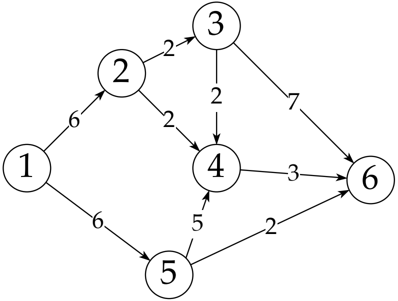
Задача максимального потока



При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$\sum_{i=2}^{N} X(1,i) \qquad \text{(Поток)}$$

Задача максимального потока



$$
\begin{aligned}
& \text{max } \langle X, S \rangle \\
\text{s.t. } & -X \preceq 0 \\
& X \preceq C \\
& \langle X, L_n \rangle = 0, \; n = 2, \dots, N-1,
\end{aligned} \qquad \text{(Задача максимального потока)}
$$

L_n составляется как вычитание двух матриц. Обе матрицы почти полностью состоят из нулей. Только в первой матрице n-ый столбец состоит из единиц (кроме последней строки). А во второй матрице только n-ая строка состоит из единиц (кроме первого столбца).

$$
S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.
$$

При данной настройке, когда всё, что производится источником, пойдёт к стоку, поток сети — это просто сумма всего, что выходит из источника:

$$
\sum_{i=2}^{N} X(1, i) \qquad \text{(Поток)}
$$

Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

Вывод двойственной задачи к максимальному потоку

$$
\begin{aligned}
\min_{\Lambda, \nu} \ & \langle \Lambda, C \rangle \\
\text{s.t. } & \Lambda + Q \succeq S \\
& \Lambda \succeq 0
\end{aligned}
\qquad \text{(Двойственная задача максимального потока)}
$$

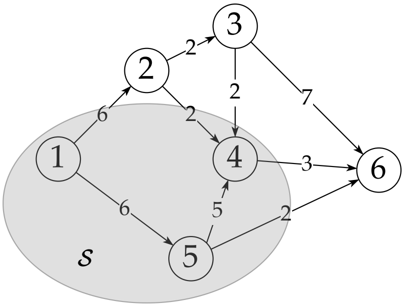
где

$$
Q = \begin{bmatrix}
0 & \nu_2 & \nu_3 & \cdots & \nu_{N-1} & 0 \\
0 & 0 & \nu_3 - \nu_2 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_2 & -\nu_2 \\
0 & \nu_2 - \nu_3 & 0 & \cdots & \nu_{N-1} - \nu_3 & -\nu_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \nu_2 - \nu_{N-1} & \nu_3 - \nu_{N-1} & \cdots & 0 & -\nu_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$

Задача минимального разреза

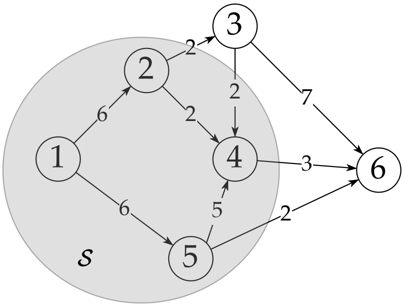
Разрез сети разделяет вершины на два множества: одно содержит источник (мы называем это множество $\mathcal{S}$), а другое содержит сток. Пропускная способность разреза — это общее значение рёбер, выходящих из $\mathcal{S}$ — мы разделяем множества, "отрезая поток" вдоль этих рёбер.

$\mathcal{S} = \{1, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $1 \to 2, 4 \to 6$, и $5 \to 6$, пропускная способность этого разреза равна $6 + 3 + 2 = 11$.

$\mathcal{S} = \{1, 2, 4, 5\}$



Рёбра в разрезе: $2 \to 3, 4 \to 6$, и $5 \to 6$, пропускная способность этого разреза равна $2 + 3 + 2 = 7$.

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \dots, N$ возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1,\, j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \ldots, N$ возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1,\ j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что $\lambda_{i,j}$ будет равен 1, если $i \to j$ разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\text{capacity}(S) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}.$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Каково минимальное значение наименьшего разреза? Мы докажем, что оно равно оптимальному значению решения d^* двойственной программы (Двойственная задача максимального потока).

Сначала предположим, что $\mathcal{S}$ — допустимый разрез. Из $\mathcal{S}$ мы можем легко найти двойственную допустимую точку, которая соответствует его пропускной способности: для $n = 1, \ldots, N$ возьмём

$$\nu_n = \begin{cases} 1, & n \in \mathcal{S}, \\ 0, & n \notin \mathcal{S}, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \lambda_{i,j} = \begin{cases} \max(\nu_i - \nu_j, 0), & i \neq 1,\ j \neq N, \\ 1 - \nu_j, & i = 1, \\ \nu_i, & j = N. \end{cases}$$

Заметим, что эти выборы подчиняются ограничениям в двойственной задаче, и что $\lambda_{i,j}$ будет равен 1, если $i \to j$ разрезан, и 0 в противном случае, поэтому

$$\text{capacity}(S) = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} C_{i,j}.$$

Каждый разрез допустим, поэтому

$$d^\star \leq \text{MINCUT}.$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения ν^*, λ^* двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более d^*. Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше d^* — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью d^* или меньше.

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Теперь мы покажем, что для каждого решения ν^*, λ^* двойственной задачи существует разрез с пропускной способностью не более d^*. Мы генерируем разрез *случайно*, а затем показываем, что ожидаемое значение пропускной способности разреза меньше d^* — это означает, что должен существовать хотя бы один с пропускной способностью d^* или меньше.

Пусть Z — равномерная случайная величина на $[0, 1]$. Вместе с $\lambda^*, \nu_2^*, \ldots, \nu_{N-1}^*$, полученными решением (Двойственная задача максимального потока), возьмём $\nu_1 = 1$ и $\nu_N = 0$. Создадим разрез $\mathcal{S}$ по правилу:

$$\text{если } \nu_n^* > Z, \text{ то возьмём } n \in \mathcal{S}.$$

. . . Вероятность того, что конкретное ребро $i \to j$ находится в этом разрезе, равна

$$\begin{aligned}
P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) &= P\left(\nu_j^\star \leq Z \leq \nu_i^\star\right) \\
&\leq \begin{cases} \max(\nu_i^\star - \nu_j^\star, 0), & 2 \leq i, j \leq N-1, \\ 1 - \nu_j^\star, & i = 1;\ j = 2, \ldots, N-1, \\ \nu_i^\star, & i = 2, \ldots, N-1;\ j = N, \\ 1, & i = 1;\ j = N. \end{cases} \\
&\leq \lambda_{i,j}^\star,
\end{aligned}$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^\star$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^\star.
$$

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^{\star}_{i,j} = d^{\star}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^{\star}$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^{\star}.
$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$
d^{\star} = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^{\star},
$$

где $p^{\star}$ — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

Минимальный разрез является двойственным к максимальному потоку

Последнее неравенство следует просто из ограничений в двойственной программе (Двойственная задача максимального потока). Этот разрез случайный, поэтому его пропускная способность — случайная величина, и её ожидание равно

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\text{capacity}(\mathcal{S})] &= \sum_{i,j} C_{i,j} P(i \in \mathcal{S}, j \notin \mathcal{S}) \\
&\leq \sum_{i,j} C_{i,j} \lambda^\star_{i,j} = d^\star.
\end{aligned}
$$

Таким образом, должен существовать разрез, пропускная способность которого не более $d^\star$. Это устанавливает, что

$$
\text{MINCUT} \leq d^\star.
$$

Объединяя эти два факта, конечно, получаем, что

$$
d^\star = \text{MINCUT} = \text{MAXFLOW} = p^\star,
$$

где $p^\star$ — решение прямой задачи, и равенство следует из сильной двойственности для линейного программирования.

Теорема максимального потока — минимального разреза.

Максимальное значение s-t потока равно минимальной пропускной способности среди всех s-t разрезов.

Анализ чувствительности

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что $\text{Per}(u, v) \to \text{P}$, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
&h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
&h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \ i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \ i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \ i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \ i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённной версии:

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
&h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{P}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_0(x) \to \min_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } &f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
&h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{aligned}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Анализ чувствительности

Давайте перейдём от исходной задачи оптимизации К возмущённой версии:

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq 0, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = 0, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{P}
$$

$$
\begin{split}
& f_0(x) \to \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \\
\text{s.t. } & f_i(x) \leq u_i, \; i = 1, \ldots, m \\
& h_i(x) = v_i, \; i = 1, \ldots, p
\end{split}
\tag{Per}
$$

Заметим, что у нас по-прежнему есть только переменная $x \in \mathbb{R}^n$, в то время как $u \in \mathbb{R}^m, v \in \mathbb{R}^p$ мы рассматриваем как параметры. Очевидно, что Per$(u, v) \to$ P, если $u = 0, v = 0$. Мы будем обозначать оптимальное значение Per как $p^*(u, v)$, в то время как оптимальное значение исходной задачи P — просто p^*. Можно сразу сказать, что $p^*(u, v) = p^*$.

Говоря о значении некоторого i-го ограничения, можно сказать, что

- $u_i = 0$ оставляет исходную задачу
- $u_i > 0$ означает, что мы ослабили неравенство
- $u_i < 0$ означает, что мы ужесточили ограничение

Можно даже показать, что когда P является задачей выпуклой оптимизации, $p^*(u, v)$ является выпуклой функцией.

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) =
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) &= p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Что означает

$$
f_0(x) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T u - {\nu^*}^T v
$$

Анализ чувствительности

Предположим, что сильная двойственность выполняется для исходной задачи, и предположим, что x — любая допустимая точка для возмущённой задачи:

$$
\begin{aligned}
p^*(0,0) = p^* = d^* = g(\lambda^*, \nu^*) \leq \\
&\leq L(x, \lambda^*, \nu^*) = \\
&= f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* f_i(x) + \sum_{i=1}^p \nu_i^* h_i(x) \leq \\
&\leq f_0(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* u_i + \sum_{i=1}^p \nu_i^* v_i
\end{aligned}
$$

Что означает

$$
f_0(x) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T u - {\nu^*}^T v
$$

И взяв оптимальную x для возмущённой задачи, имеем:

$$
p^*(u,v) \geq p^*(0,0) - {\lambda^*}^T u - {\nu^*}^T v \tag{3}
$$

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**: Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**: Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**: Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**: Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**:
  Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Анализ чувствительности

В сценариях, где выполняется сильная двойственность, мы можем сделать несколько выводов о чувствительности оптимальных решений по отношению к множителям Лагранжа.

- **Влияние ужесточения ограничения (большое $\lambda_i^\star$)**:
  Когда множитель Лагранжа i-го ограничения, $\lambda_i^\star$, имеет существенное значение, и если это ограничение ужесточается (выбирается $u_i < 0$), гарантируется, что оптимальное значение, обозначенное $p^\star(u, v)$, значительно увеличится.
- **Эффект корректировки ограничений с большими положительными или отрицательными $\nu_i^\star$**:
  Если $\nu_i^\star$ велик и положителен, и выбирается $v_i < 0$, или если $\nu_i^\star$ велик и отрицателен, и выбирается $v_i > 0$, то в любом сценарии ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ значительно увеличится.
- **Последствия ослабления ограничения (малое $\lambda_i^\star$)**:
  Если множитель Лагранжа $\lambda_i^\star$ для i-го ограничения относительно мал, и ограничение ослабляется (выбирается $u_i > 0$), ожидается, что оптимальное значение $p^\star(u, v)$ не значительно уменьшится.
- **Результаты крошечных корректировок в ограничениях с малыми $\nu_i^\star$**:
  Когда $\nu_i^\star$ мал и положителен, и выбирается $v_i > 0$, или когда $\nu_i^\star$ мал и отрицателен, и выбирается $v_i < 0$, в обоих случаях оптимальное значение $p^\star(u, v)$ незначительно уменьшится.

Эти интерпретации предоставляют основу для понимания того, как изменения в ограничениях, отражённые через соответствующие множители Лагранжа, влияют на оптимальное решение в задачах, где выполняется сильная двойственность.

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u,v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*
$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*
$$

Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u, v)$ дифференцируема в точке $u = 0, v = 0$.

$$
\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \quad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}
$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u, v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$
\lim_{t \to 0} \frac{p^*(te_i, 0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}
$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*
$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$
\frac{p^*(te_i, 0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*
$$

Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение x^* задачи оптимизации. Если ограничение $f_i(x^*)$ отрицательно в x^*, оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополнительной нежёсткости.

Локальная чувствительность

Предположим теперь, что $p^*(u,v)$ дифференцируема в точке $u=0, v=0$.

$$\lambda_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \qquad \nu_i^* = -\frac{\partial p^*(0,0)}{\partial v_i} \tag{4}$$

Чтобы показать этот результат, мы рассматриваем направленную производную $p^*(u,v)$ вдоль направления некоторого i-го базисного вектора e_i:

$$\lim_{t\to 0} \frac{p^*(te_i,0) - p^*(0,0)}{t} = \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i}$$

Из неравенства Equation 3 и взяв предел $t \to 0$ с $t > 0$, имеем

$$\frac{p^*(te_i,0) - p^*}{t} \geq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \geq -\lambda_i^*$$

Для отрицательного $t < 0$ имеем:

$$\frac{p^*(te_i,0) - p^*}{t} \leq -\lambda_i^* \to \frac{\partial p^*(0,0)}{\partial u_i} \leq -\lambda_i^*$$

Та же идея может быть использована для установления факта о v_i.

Результат локальной чувствительности Equation 4 предоставляет способ понять влияние ограничений на оптимальное решение x^* задачи оптимизации. Если ограничение $f_i(x^*)$ отрицательно в x^*, оно не влияет на оптимальное решение, что означает, что небольшие изменения в этом ограничении не изменят оптимальное значение. В этом случае соответствующий оптимальный множитель Лагранжа будет равен нулю, согласно принципу дополнительной нежёсткости.

Однако, если $f_i(x^*) = 0$, что означает, что ограничение точно выполняется в оптимуме, то ситуация иная. Значение i-го оптимального множителя Лагранжа, λ_i^*, даёт нам понимание того, насколько "чувствительно" или "активно" это ограничение. Малое λ_i^* указывает на то, что небольшие корректировки ограничения не будут значительно влиять на оптимальное значение. Наоборот, большое λ_i^* подразумевает, что даже незначительные изменения ограничения могут иметь значительное влияние на оптимальное решение.

Источники

- Теория оптимизации (MATH4230) курс @ CUHK, professor Tieyong Zeng