

Сопряжённые множества. Сопряжённые  
конусы. Многогранники. Сопряжённые  
функции и преобразование Лежандра

Даниил Меркулов

Методы Оптимизации. МФТИ

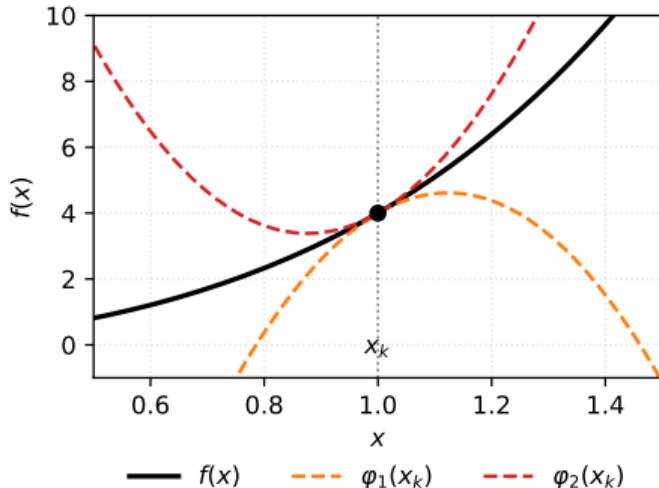
## Повторение

## Виды выпуклости



Рис. 1: Примеры выпуклых функций

## Гладкость

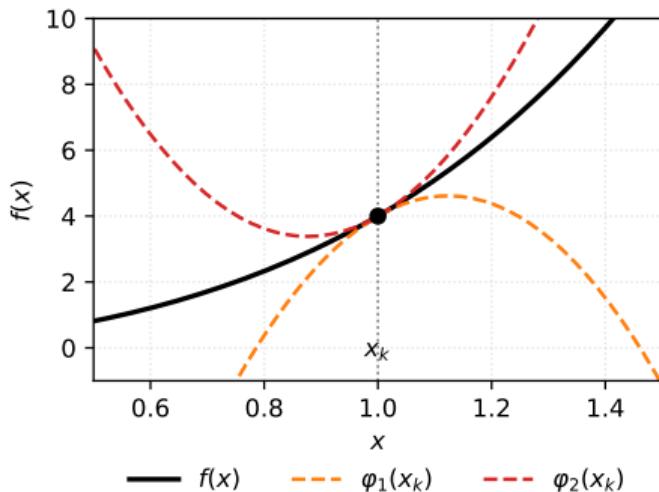


**Определение:** Будем говорить, что функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $L$ -гладкой, если  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

## Гладкость



**Определение:** Будем говорить, что функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $L$ -гладкой, если  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой  $L$ , то  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle\| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

## Гладкость

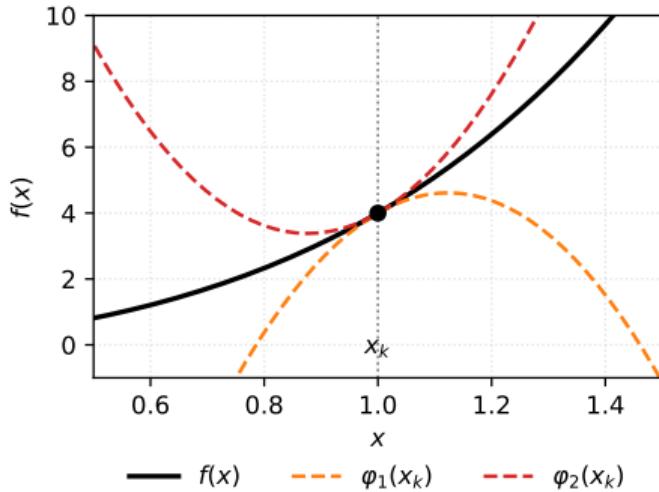


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

**Определение:** Будем говорить, что функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $L$ -гладкой, если  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой  $L$ , то  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle\| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Если зафиксируем  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , то:

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

## Гладкость

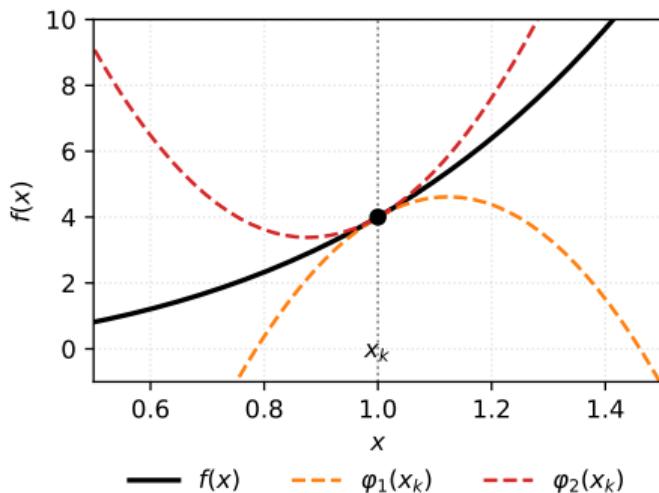


Рис. 2: Иллюстрация Липшицевых парабол, между которыми зажата гладкая функция. Чаще нас интересует мажорирующая из них.

**Определение:** Будем говорить, что функция  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  является  $L$ -гладкой, если  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$  выполнено:

$$\|\nabla f(y) - \nabla f(x)\| \leq L\|y - x\|$$

Обратим внимание, что значение константы гладкости (Липшицевости градиента) зависит от выбора нормы. Если  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  - непрерывно дифференцируема и градиент Липшицев с константой  $L$ , то  $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x), y - x \rangle\| \leq \frac{L}{2}\|y - x\|^2$$

Если зафиксируем  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , то:

$$\varphi_1(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0 \rangle - \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + \langle f(x_0), x - x_0 \rangle + \frac{L}{2}\|x - x_0\|^2$$

Это две параболы, и для них верно, что

$$\varphi_1(x) \leq f(x) \leq \varphi_2(x) \quad \forall x$$

## Гладкость и сильная выпуклость



## Гладкость и сильная выпуклость



Гладкая  
Выпуклая



Гладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая



Негладкая  
Выпуклая



Негладкая  
 $\mu$  - сильно выпуклая

## Сопряженные множества

## Сопряженное множество

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — произвольное непустое множество.

Тогда его сопряжённое множество определяется как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$$

## Сопряженное множество

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — произвольное непустое множество.

Тогда его сопряжённое множество определяется как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$$

Множество  $S^{**}$  называется двойным сопряжённым множеством к  $S$ , если:

$$S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S^*\}$$

## Сопряженное множество

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — произвольное непустое множество.

Тогда его сопряжённое множество определяется как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$$

Множество  $S^{**}$  называется двойным сопряжённым множеством к  $S$ , если:

$$S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S^*\}$$

- Множества  $S_1$  и  $S_2$  называются **взаимно сопряжёнными**, если  $S_1^* = S_2$ ,  $S_2^* = S_1$ .

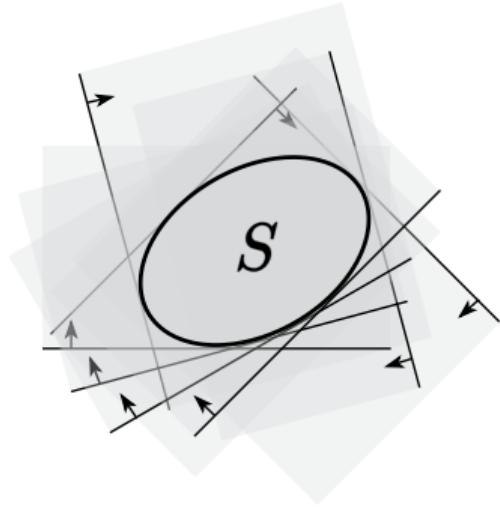
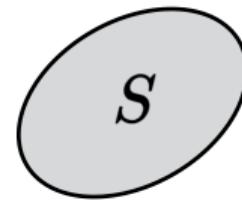


Рис. 3: Выпуклые множества можно описывать двойственным образом — через элементы множества и через множество опорных гиперплоскостей

## Сопряженное множество

Пусть  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  — произвольное непустое множество.

Тогда его сопряжённое множество определяется как:

$$S^* = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\}$$

Множество  $S^{**}$  называется двойным сопряжённым множеством к  $S$ , если:

$$S^{**} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S^*\}$$

- Множества  $S_1$  и  $S_2$  называются **взаимно сопряжёнными**, если  $S_1^* = S_2$ ,  $S_2^* = S_1$ .
- Множество  $S$  называется **самосопряжённым**, если  $S^* = S$ .

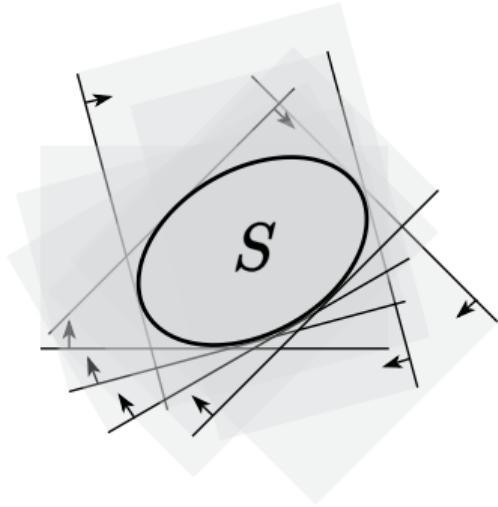
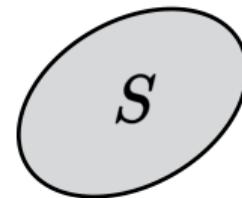


Рис. 3: Выпуклые множества можно описывать двойственным образом — через элементы множества и через множество опорных гиперплоскостей

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$S^{**} = \overline{\text{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если  $S_1 \subseteq S_2$ , то  $S_2^* \subseteq S_1^*$ .

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если  $S_1 \subseteq S_2$ , то  $S_2^* \subseteq S_1^*$ .

- $\left( \bigcup_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m S_i^*$ .

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$S^{**} = \overline{\mathbf{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если  $S_1 \subseteq S_2$ , то  $S_2^* \subseteq S_1^*$ .
- $\left( \bigcup_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m S_i^*$ .
- Если  $S$  замкнуто, выпукло и содержит 0, то  $S^{**} = S$ .

## Свойства сопряжённых множеств

- Сопряжённое множество всегда замкнуто, выпукло и содержит нуль.
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$S^{**} = \overline{\text{conv}(S \cup \{0\})}$$

- Если  $S_1 \subseteq S_2$ , то  $S_2^* \subseteq S_1^*$ .
- $\left( \bigcup_{i=1}^m S_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m S_i^*$ .
- Если  $S$  замкнуто, выпукло и содержит 0, то  $S^{**} = S$ .
- $S^* = (\overline{S})^*$ .

## Пример 1

 Example

Доказать, что  $S^* = (\overline{S})^*$ .

## Пример 1

### Example

Доказать, что  $S^* = (\overline{S})^*$ .

- $S \subset \overline{S} \Rightarrow (\overline{S})^* \subset S^*$ .

## Пример 1

### Example

Доказать, что  $S^* = (\overline{S})^*$ .

- $S \subset \overline{S} \Rightarrow (\overline{S})^* \subset S^*$ .
- Пусть  $p \in S^*$  и  $x_0 \in \overline{S}$ ,  $x_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ . Тогда в силу непрерывности функции  $f(x) = p^T x$  имеем:  
 $p^T x_k \geq -1 \Rightarrow p^T x_0 \geq -1$ . Следовательно,  $p \in (\overline{S})^*$ , и значит  $S^* \subset (\overline{S})^*$ .

## Пример 2

### Example

Доказать, что  $(\text{conv}(S))^* = S^*$ .

## Пример 2

### Example

Доказать, что  $(\mathbf{conv}(S))^* = S^*$ .

- $S \subset \mathbf{conv}(S) \Rightarrow (\mathbf{conv}(S))^* \subset S^*$ .

## Пример 2

### Example

Доказать, что  $(\text{conv}(S))^* = S^*$ .

- $S \subset \text{conv}(S) \Rightarrow (\text{conv}(S))^* \subset S^*$ .
- Пусть  $p \in S^*$  и  $x_0 \in \text{conv}(S)$ , то есть

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \quad x_i \in S, \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0$$

## Пример 2

### Example

Доказать, что  $(\text{conv}(S))^* = S^*$ .

- $S \subset \text{conv}(S) \Rightarrow (\text{conv}(S))^* \subset S^*$ .
- Пусть  $p \in S^*$  и  $x_0 \in \text{conv}(S)$ , то есть

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \quad x_i \in S, \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0$$

- Тогда

$$p^T x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i p^T x_i \geq \sum_{i=1}^k \theta_i \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

## Пример 2

### Example

Доказать, что  $(\text{conv}(S))^* = S^*$ .

- $S \subset \text{conv}(S) \Rightarrow (\text{conv}(S))^* \subset S^*$ .
- Пусть  $p \in S^*$  и  $x_0 \in \text{conv}(S)$ , то есть

$$x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i x_i, \quad x_i \in S, \quad \sum_{i=1}^k \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0$$

- Тогда

$$p^T x_0 = \sum_{i=1}^k \theta_i p^T x_i \geq \sum_{i=1}^k \theta_i \cdot (-1) = 1 \cdot (-1) = -1.$$

- Значит,  $p \in (\text{conv}(S))^*$ , и, следовательно,  $S^* \subset (\text{conv}(S))^*$ .

## Пример 3

### Example

Докажите, что если  $B(0, r)$  — это шар радиуса  $r$  в некоторой норме с центром в нуле, то  $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$ .

## Пример 3

### Example

Докажите, что если  $B(0, r)$  — это шар радиуса  $r$  в некоторой норме с центром в нуле, то  $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$ .

- Пусть  $B(0, r) = X$ ,  $B(0, 1/r) = Y$ . Возьмём вектор  $p \in X^*$ , тогда для любого  $x \in X$ :  
$$p^T x \geq -1.$$

## Пример 3

### Example

Докажите, что если  $B(0, r)$  — это шар радиуса  $r$  в некоторой норме с центром в нуле, то  $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$ .

- Пусть  $B(0, r) = X$ ,  $B(0, 1/r) = Y$ . Возьмём вектор  $p \in X^*$ , тогда для любого  $x \in X$ :  
$$p^T x \geq -1.$$
- Среди всех точек шара  $X$  возьмём такую  $x \in X$ , для которой скалярное произведение с  $p$  минимально:  $p^T x$ . Это точка  $x = -\frac{p}{\|p\|}r$ .

$$p^T x = p^T \left( -\frac{p}{\|p\|}r \right) = -\|p\|r \geq -1$$

$$\|p\| \leq \frac{1}{r} \in Y$$

Следовательно,  $X^* \subset Y$ .

## Пример 3

### Example

Докажите, что если  $B(0, r)$  — это шар радиуса  $r$  в некоторой норме с центром в нуле, то  $(B(0, r))^* = B(0, 1/r)$ .

- Пусть  $B(0, r) = X$ ,  $B(0, 1/r) = Y$ . Возьмём вектор  $p \in X^*$ , тогда для любого  $x \in X$ :  
$$p^T x \geq -1.$$
- Среди всех точек шара  $X$  возьмём такую  $x \in X$ , для которой скалярное произведение с  $p$  минимально:  $p^T x$ . Это точка  $x = -\frac{p}{\|p\|}r$ .

$$p^T x = p^T \left( -\frac{p}{\|p\|}r \right) = -\|p\|r \geq -1$$

$$\|p\| \leq \frac{1}{r} \in Y$$

Следовательно,  $X^* \subset Y$ .

- Теперь пусть  $p \in Y$ . Нужно показать, что  $p \in X^*$ , то есть  $\langle p, x \rangle \geq -1$ . Достаточно применить неравенство Коши–Буняковского:

$$\|\langle p, x \rangle\| \leq \|p\| \|x\| \leq \frac{1}{r} \cdot r = 1$$

Последнее верно, так как  $p \in B(0, 1/r)$  и  $x \in B(0, r)$ .

Следовательно,  $Y \subset X^*$ .

## Двойственный конус

Сопряжённым (двойственным) к конусу  $K$  называется множество  $K^*$  такое, что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

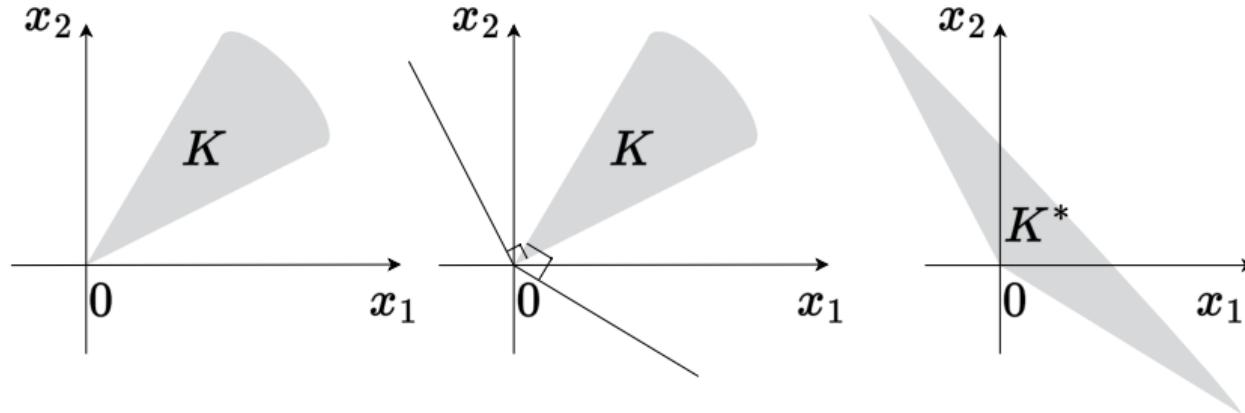
## Двойственный конус

Сопряжённым (двойственным) к конусу  $K$  называется множество  $K^*$  такое, что:

$$K^* = \{y \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$$

Чтобы показать, что это определение напрямую вытекает из предыдущих определений, напомним, что такое сопряжённое множество и что такое конус при  $\forall \lambda > 0$ .

$$\{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -1 \quad \forall x \in S\} \rightarrow \{\lambda y \in \mathbb{R}^n \mid \langle y, x \rangle \geq -\frac{1}{\lambda} \quad \forall x \in S\}$$



## Свойства двойственных конусов

- Пусть  $K$  — замкнутый выпуклый конус. Тогда  $K^{**} = K$ .

## Свойства двойственных конусов

- Пусть  $K$  — замкнутый выпуклый конус. Тогда  $K^{**} = K$ .
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и конуса  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

## Свойства двойственных конусов

- Пусть  $K$  — замкнутый выпуклый конус. Тогда  $K^{**} = K$ .
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и конуса  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть  $K_1, \dots, K_m$  — конусы в  $\mathbb{R}^n$ , тогда:

$$\left( \sum_{i=1}^m K_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

## Свойства двойственных конусов

- Пусть  $K$  — замкнутый выпуклый конус. Тогда  $K^{**} = K$ .
- Для произвольного множества  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  и конуса  $K \subseteq \mathbb{R}^n$ :

$$(S + K)^* = S^* \cap K^*$$

- Пусть  $K_1, \dots, K_m$  — конусы в  $\mathbb{R}^n$ , тогда:

$$\left( \sum_{i=1}^m K_i \right)^* = \bigcap_{i=1}^m K_i^*$$

- Пусть  $K_1, \dots, K_m$  — конусы в  $\mathbb{R}^n$ . Если их пересечение имеет внутреннюю точку, то:

$$\left( \bigcap_{i=1}^m K_i \right)^* = \sum_{i=1}^m K_i^*$$

## Пример

### Example

Найдите сопряжённый конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

## Пример

### Example

Найдите сопряжённый конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = y_1(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_3) + \dots + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})(x_{n-1} - x_n) + (y_1 + \dots + y_n)x_n$$

## Пример

### Example

Найдите сопряжённый конус для монотонного неотрицательного конуса:

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq 0\}$$

Заметим, что:

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = y_1(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2)(x_2 - x_3) + \dots + (y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})(x_{n-1} - x_n) + (y_1 + \dots + y_n)x_n$$

Так как во всей представленной сумме второй множитель в каждом слагаемом неотрицателен, то:

$$y_1 \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 0, \quad \dots, \quad y_1 + \dots + y_n \geq 0$$

Следовательно,  $K^* = \left\{ y \mid \sum_{i=1}^k y_i \geq 0, \quad k = \overline{1, n} \right\}.$

## Многогранники

Множество решений системы линейных неравенств и равенств является многогранником:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , а знак неравенства понимается покомпонентно.

# Многогранники

Множество решений системы линейных неравенств и равенств является многогранником:

$$Ax \preceq b, \quad Cx = d$$

Здесь  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , а знак неравенства понимается покомпонентно.

## i Theorem

Пусть  $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ . Тогда сопряжённым к многогранному множеству

$$S = \mathbf{conv}(x_1, \dots, x_k) + \mathbf{cone}(x_{k+1}, \dots, x_m)$$

является многогранник:

$$S^* = \left\{ p \in \mathbb{R}^n \mid \langle p, x_i \rangle \geq -1, \quad i = \overline{1, k}; \quad \langle p, x_i \rangle \geq 0, \quad i = \overline{k+1, m} \right\}$$

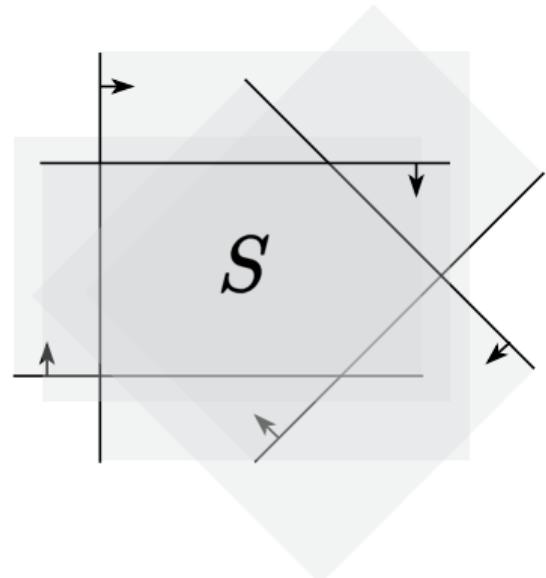


Рис. 5: Polyhedra

## Доказательство

- Пусть  $S = X$ ,  $S^* = Y$ . Возьмём некоторое  $p \in X^*$ , тогда  $\langle p, x_i \rangle \geq -1$ ,  $i = \overline{1, k}$ . В то же время, для любого  $\theta > 0$ ,  $i = \overline{k+1, m}$ :

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \rightarrow \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \rightarrow \langle p, x_i \rangle \geq 0.$$

Следовательно,  $p \in Y \rightarrow X^* \subset Y$ .

## Доказательство

- Пусть  $S = X$ ,  $S^* = Y$ . Возьмём некоторое  $p \in X^*$ , тогда  $\langle p, x_i \rangle \geq -1$ ,  $i = \overline{1, k}$ . В то же время, для любого  $\theta > 0$ ,  $i = \overline{k+1, m}$ :

$$\langle p, x_i \rangle \geq -1 \rightarrow \langle p, \theta x_i \rangle \geq -1$$

$$\langle p, x_i \rangle \geq -\frac{1}{\theta} \rightarrow \langle p, x_i \rangle \geq 0.$$

Следовательно,  $p \in Y \rightarrow X^* \subset Y$ .

- Предположим, наоборот, что  $p \in Y$ . Для любой точки  $x \in X$ :  $x = \sum_{i=1}^m \theta_i x_i$ ,  $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$ ,  $\theta_i \geq 0$

Тогда:

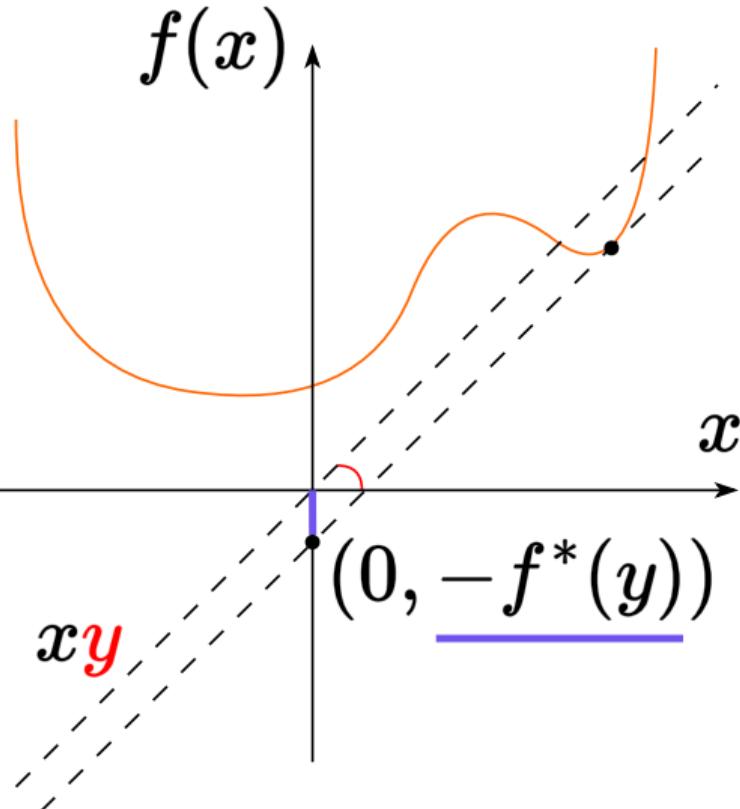
$$\langle p, x \rangle = \sum_{i=1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle = \sum_{i=1}^k \theta_i \langle p, x_i \rangle + \sum_{i=k+1}^m \theta_i \langle p, x_i \rangle \geq \sum_{i=1}^k \theta_i (-1) + \sum_{i=1}^k \theta_i \cdot 0 = -1.$$

Следовательно,  $p \in X^* \rightarrow Y \subset X^*$ .

## Пример

## Сопряжённые функции

## Сопряжённые функции

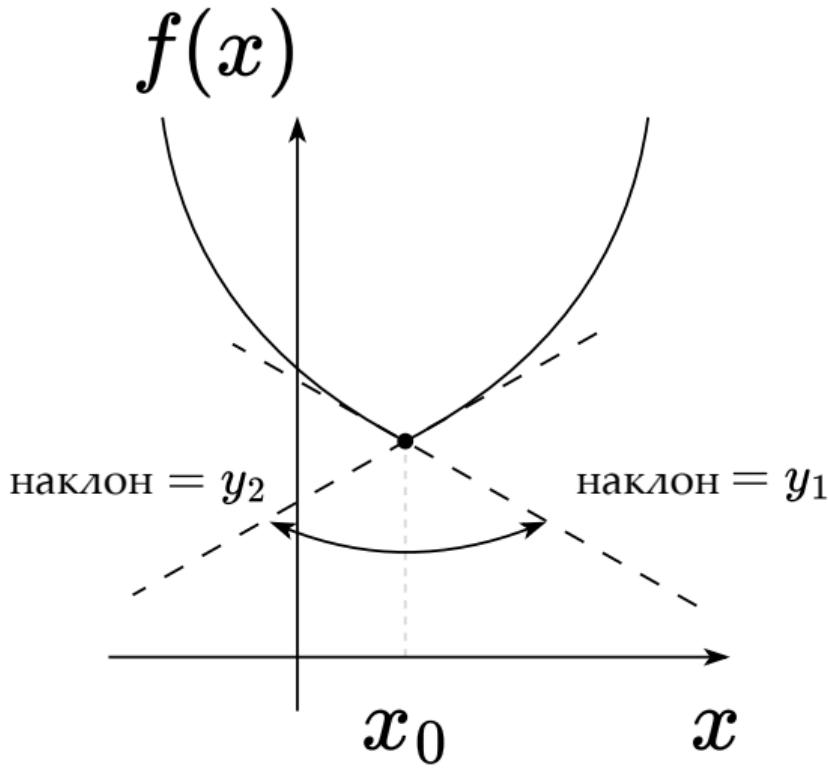


Напомним, что для отображения  
 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функция, определяемая как

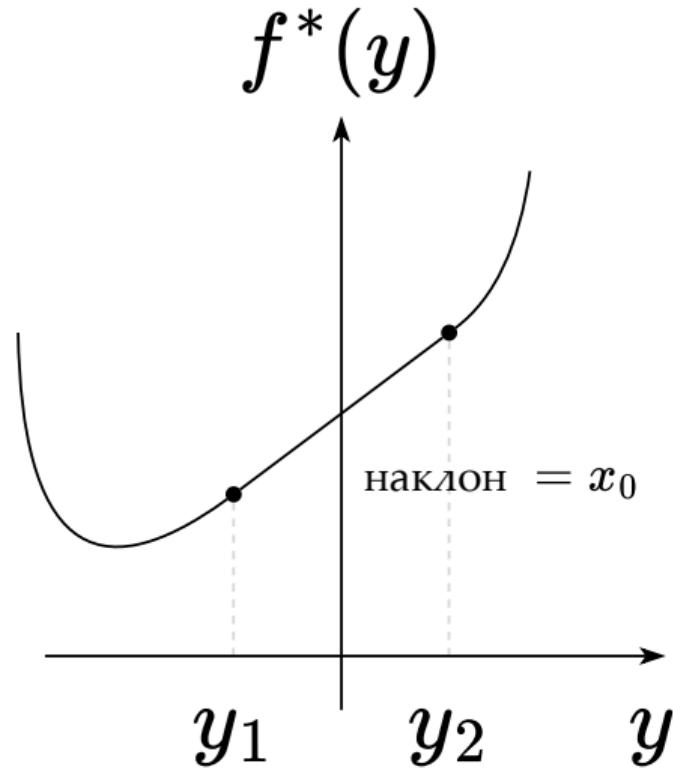
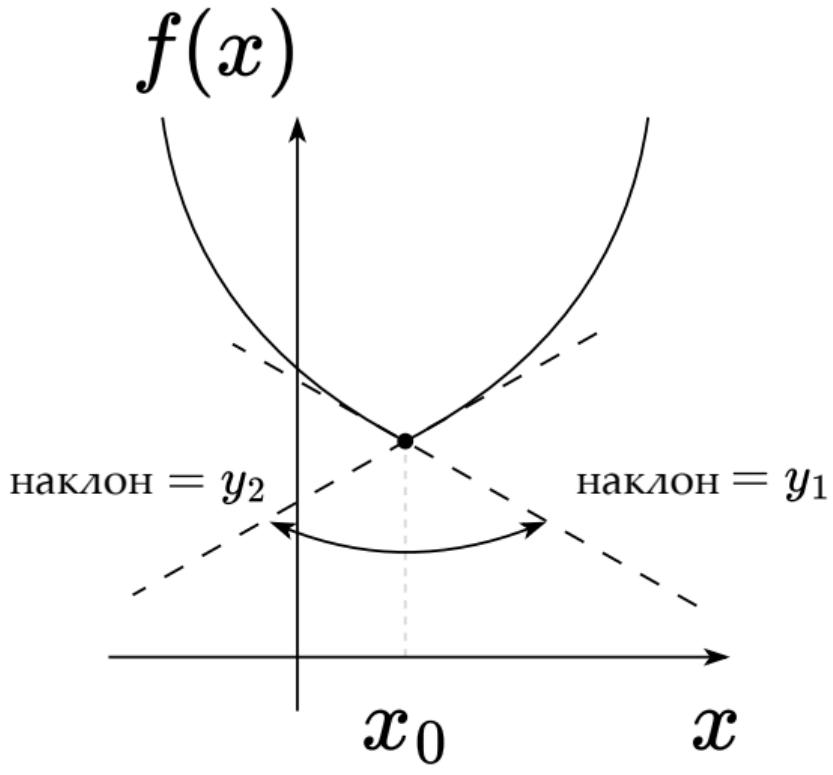
$$f^*(y) = \max_x [y^T x - f(x)]$$

называется его сопряжённой. Выражение выше называется преобразованием Лежандра.

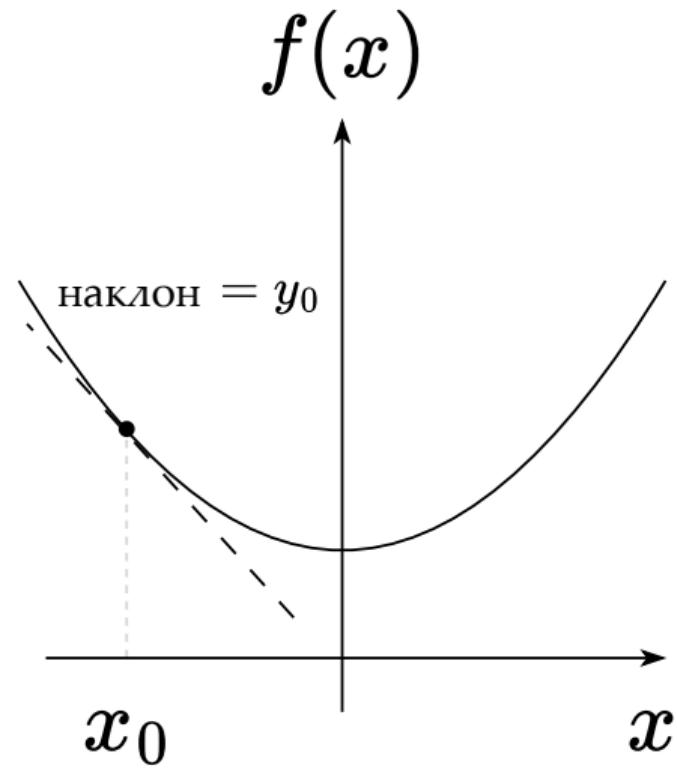
## Геометрическая интуиция



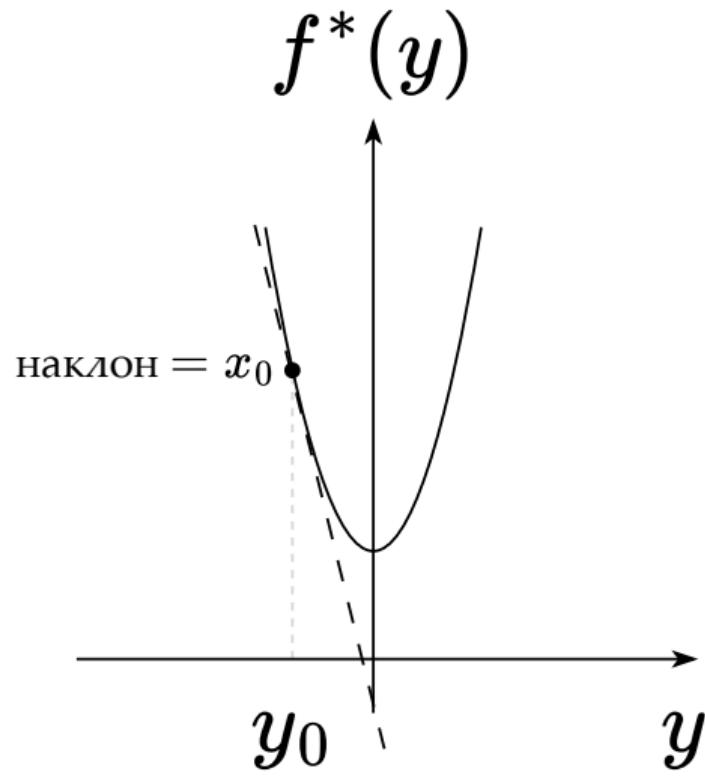
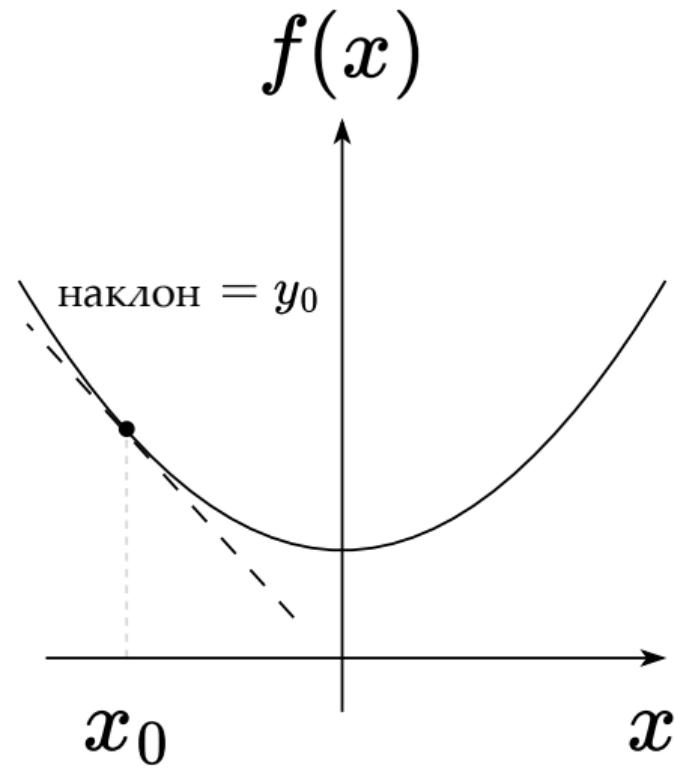
## Геометрическая интуиция



## Наклон $f$ и $f^*$



## Наклон $f$ и $f^*$



## Наклон $f$ и $f^*$

Предположим, что  $f$  — замкнутая и выпуклая функция. Тогда  $f$  сильно выпукла с параметром  $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$  является липшицевой с параметром  $1/\mu$ .

## Наклон $f$ и $f^*$

Предположим, что  $f$  — замкнутая и выпуклая функция. Тогда  $f$  сильно выпукла с параметром  $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$  является липшицевой с параметром  $1/\mu$ .

**Доказательство “ $\Rightarrow$ ”:** напомним, если  $g$  сильно выпукла с минимайзером  $x$ , то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

## Наклон $f$ и $f^*$

Предположим, что  $f$  — замкнутая и выпуклая функция. Тогда  $f$  сильно выпукла с параметром  $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$  является липшицевой с параметром  $1/\mu$ .

**Доказательство “ $\Rightarrow$ ”:** напомним, если  $g$  сильно выпукла с минимайзером  $x$ , то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

Введём обозначения  $x_u = \nabla f^*(u)$  и  $x_v = \nabla f^*(v)$ , тогда

$$\begin{aligned} f(x_v) - u^T x_v &\geq f(x_u) - u^T x_u + \frac{\mu}{2} \|x_u - x_v\|^2 \\ f(x_u) - v^T x_u &\geq f(x_v) - v^T x_v + \frac{\mu}{2} \|x_u - x_v\|^2 \end{aligned}$$

## Наклон $f$ и $f^*$

Предположим, что  $f$  — замкнутая и выпуклая функция. Тогда  $f$  сильно выпукла с параметром  $\mu \Leftrightarrow \nabla f^*$  является липшицевой с параметром  $1/\mu$ .

**Доказательство “ $\Rightarrow$ ”:** напомним, если  $g$  сильно выпукла с минимайзером  $x$ , то

$$g(y) \geq g(x) + \frac{\mu}{2} \|y - x\|^2, \quad \text{для всех } y$$

Введём обозначения  $x_u = \nabla f^*(u)$  и  $x_v = \nabla f^*(v)$ , тогда

$$\begin{aligned} f(x_v) - u^T x_v &\geq f(x_u) - u^T x_u + \frac{\mu}{2} \|x_u - x_v\|^2 \\ f(x_u) - v^T x_u &\geq f(x_v) - v^T x_v + \frac{\mu}{2} \|x_u - x_v\|^2 \end{aligned}$$

Сложив эти неравенства, применяя неравенство Коши–Буняковского–Шварца и преобразуя, получаем:

$$\|x_u - x_v\| \leq \frac{1}{\mu} \|u - v\|$$

## Наклон $f$ и $f^*$

**Доказательство “ $\Leftarrow$ ”:** для простоты обозначим  $g = f^*$  и  $L = \frac{1}{\mu}$ . Так как  $\nabla g$  является липшицевой с константой  $L$ , то и  $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$  также липшицева, следовательно

$$g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T (z - y) + \frac{L}{2} \|z - y\|_2^2$$

## Наклон $f$ и $f^*$

**Доказательство “ $\Leftarrow$ ”:** для простоты обозначим  $g = f^*$  и  $L = \frac{1}{\mu}$ . Так как  $\nabla g$  является липшицевой с константой  $L$ , то и  $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$  также липшицева, следовательно

$$g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T (z - y) + \frac{L}{2} \|z - y\|_2^2$$

Минимизируя обе части по  $z$  и преобразуя, получаем

$$\frac{1}{2L} \|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T (x - y)$$

## Наклон $f$ и $f^*$

**Доказательство “ $\Leftarrow$ ”:** для простоты обозначим  $g = f^*$  и  $L = \frac{1}{\mu}$ . Так как  $\nabla g$  является липшицевой с константой  $L$ , то и  $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$  также липшицева, следовательно

$$g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T(z - y) + \frac{L}{2}\|z - y\|_2^2$$

Минимизируя обе части по  $z$  и преобразуя, получаем

$$\frac{1}{2L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T(x - y)$$

Меняя местами  $x, y$  и складывая, получаем

$$\frac{1}{L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq (\nabla g(x) - \nabla g(y))^T(x - y)$$

## Наклон $f$ и $f^*$

**Доказательство “ $\Leftarrow$ ”:** для простоты обозначим  $g = f^*$  и  $L = \frac{1}{\mu}$ . Так как  $\nabla g$  является липшицевой с константой  $L$ , то и  $g_x(z) = g(z) - \nabla g(x)^T z$  также липшицева, следовательно

$$g_x(z) \leq g_x(y) + \nabla g_x(y)^T(z - y) + \frac{L}{2}\|z - y\|_2^2$$

Минимизируя обе части по  $z$  и преобразуя, получаем

$$\frac{1}{2L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq g(y) - g(x) + \nabla g(x)^T(x - y)$$

Меняя местами  $x, y$  и складывая, получаем

$$\frac{1}{L}\|\nabla g(x) - \nabla g(y)\|^2 \leq (\nabla g(x) - \nabla g(y))^T(x - y)$$

Положим  $u = \nabla f(x)$ ,  $v = \nabla g(y)$ ; тогда  $x \in \partial g^*(u)$ ,  $y \in \partial g^*(v)$ , и выше получаем

$$(x - y)^T(u - v) \geq \frac{\|u - v\|^2}{L},$$

что и доказывает утверждение.

## Свойства сопряжённых функций

Напомним, что для отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x [y^T x - f(x)]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x [f(x) - y^T x]$$

## Свойства сопряжённых функций

Напомним, что для отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x [y^T x - f(x)]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x [f(x) - y^T x]$$

- Если  $f$  замкнута и выпукла, то  $f^{**} = f$ . Кроме того,

$$x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg \min_z [f(z) - y^T z]$$

## Свойства сопряжённых функций

Напомним, что для отображения  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  функция, определяемая как

$$f^*(y) = \max_x [y^T x - f(x)]$$

называется его сопряжённой.

- Сопряжённые функции часто возникают в двойственных задачах, так как

$$-f^*(y) = \min_x [f(x) - y^T x]$$

- Если  $f$  замкнута и выпукла, то  $f^{**} = f$ . Кроме того,

$$x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg \min_z [f(z) - y^T z]$$

- Если  $f$  строго выпукла, то

$$\nabla f^*(y) = \arg \min_z [f(z) - y^T z]$$

## Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что  $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$ , предполагая, что  $f$  выпукла и замкнута.

- **Доказательство**  $\Leftarrow$ : Пусть  $y \in \partial f(x)$ . Тогда  $x \in M_y$  — множество точек максимума  $y^T z - f(z)$  по  $z$ . Но

$$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

Следовательно,  $x \in \partial f^*(y)$ .

## Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что  $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$ , предполагая, что  $f$  выпукла и замкнута.

- **Доказательство  $\Leftarrow$ :** Пусть  $y \in \partial f(x)$ . Тогда  $x \in M_y$  — множество точек максимума  $y^T z - f(z)$  по  $z$ . Но

$$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

Следовательно,  $x \in \partial f^*(y)$ .

- **Доказательство  $\Rightarrow$ :** Из показанного выше, если  $x \in \partial f^*(y)$ , то  $y \in \partial f^*(x)$ , но  $f^{**} = f$ .

## Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что  $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$ , предполагая, что  $f$  выпукла и замкнута.

- **Доказательство  $\Leftarrow$ :** Пусть  $y \in \partial f(x)$ . Тогда  $x \in M_y$  — множество точек максимума  $y^T z - f(z)$  по  $z$ . Но

$$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

Следовательно,  $x \in \partial f^*(y)$ .

- **Доказательство  $\Rightarrow$ :** Из показанного выше, если  $x \in \partial f^*(y)$ , то  $y \in \partial f^*(x)$ , но  $f^{**} = f$ .

## Свойства сопряжённой функции (доказательства)

Покажем, что  $x \in \partial f^*(y) \Leftrightarrow y \in \partial f(x)$ , предполагая, что  $f$  выпукла и замкнута.

- **Доказательство  $\Leftarrow$ :** Пусть  $y \in \partial f(x)$ . Тогда  $x \in M_y$  — множество точек максимума  $y^T z - f(z)$  по  $z$ . Но

$$f^*(y) = \max_z \{y^T z - f(z)\} \quad \text{and} \quad \partial f^*(y) = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{z \in M_y} \{z\})).$$

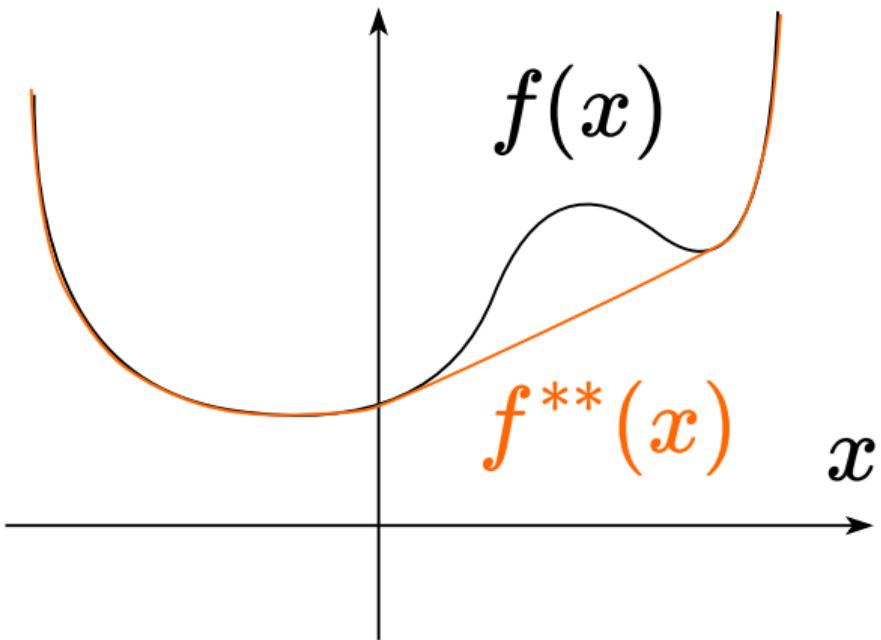
Следовательно,  $x \in \partial f^*(y)$ .

- **Доказательство  $\Rightarrow$ :** Из показанного выше, если  $x \in \partial f^*(y)$ , то  $y \in \partial f^*(x)$ , но  $f^{**} = f$ .

Очевидно,  $y \in \partial f(x) \Leftrightarrow x \in \arg \min_z \{f(z) - y^T z\}$

Наконец, если  $f$  строго выпукла, то мы знаем, что  $f(z) - y^T z$  имеет единственный минимизатор по  $z$ , и им должна быть  $\nabla f^*(y)$ .

Прямое следствие неравенства Фенхеля-Юнга  $f(x) \geq f^{**}(x)$ .



## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = ax + b$ .

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \text{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = ax + b$ .

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \text{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y - a) - b.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = ax + b$ .

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \text{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y - a) - b.$$

3. Зададим область определения функции (т.е. те  $y$ , для которых sup конечен). Это единственная точка,  $y = a$ . В противном случае можно выбрать такое  $x$ , что супремум будет бесконечен.

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = ax + b$ .

1. По определению:

$$f^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [yx - f(x)] = \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \quad \text{dom } f^* = \{y \in \mathbb{R} : \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x, y) \text{ is finite}\}$$

2. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = yx - f(x) = yx - ax - b = x(y - a) - b.$$

3. Зададим область определения функции (т.е. те  $y$ , для которых sup конечен). Это единственная точка,  $y = a$ . В противном случае можно выбрать такое  $x$ , что супремум будет бесконечен.
4. Таким образом, имеем:  $\text{dom } f^* = \{a\}; f^*(a) = -b$

## Пример

### Question

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R}_{++}$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = -\log x$ ,  $x \in \mathbb{R}_{++}$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = -\log x$ ,  $x \in \mathbb{R}_{++}$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при  $y \geq 0$ . Следовательно, область определения  $f^*$  является  $\text{dom } f^* = \{y < 0\}$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = -\log x$ ,  $x \in \mathbb{R}_{++}$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx + \log x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при  $y \geq 0$ . Следовательно, область определения  $f^*$  является  $\text{dom } f^* = \{y < 0\}$ .
3. Эта функция выпукла и её максимум достигается в точке с нулевым градиентом:

$$\frac{\partial}{\partial x} (yx + \log x) = \frac{1}{x} + y = 0.$$

Таким образом, имеем  $x = -\frac{1}{y}$  и сопряжённая функция:

$$f^*(y) = -\log(-y) - 1.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = e^x$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = e^x$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при  $y < 0$ . Следовательно, область определения  $f^*$  является  $\text{dom } f^* = \{y \geq 0\}$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = e^x$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = yx - e^x.$$

2. Эта функция неограничена сверху при  $y < 0$ . Следовательно, область определения  $f^*$  является  $\text{dom } f^* = \{y \geq 0\}$ .
3. Максимум этой функции достигается при  $x = \log y$ . Следовательно:

$$f^*(y) = y \log y - y,$$

полагая  $0 \log 0 = 0$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = x \log x$ ,  $x \neq 0$ , и  $f(0) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = x \log x$ ,  $x \neq 0$ , и  $f(0) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех  $y$ . Следовательно,  $\text{dom } f^* = \mathbb{R}$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = x \log x$ ,  $x \neq 0$ , и  $f(0) = 0$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = xy - x \log x.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех  $y$ . Следовательно,  $\text{dom } f^* = \mathbb{R}$ .
3. Максимум этой функции достигается при  $x = e^{y-1}$ . Следовательно:

$$f^*(y) = e^{y-1}.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ ,  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2}x^T Ax.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ ,  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2}x^T Ax.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех  $y$ . Следовательно,  $\text{dom } f^* = \mathbb{R}$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ ,  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \frac{1}{2}x^T Ax.$$

2. Эта функция ограничена сверху для всех  $y$ . Следовательно,  $\text{dom } f^* = \mathbb{R}$ .
3. Максимум этой функции достигается при  $x = A^{-1}y$ . Следовательно:

$$f^*(y) = \frac{1}{2}y^T A^{-1}y.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор  $y$  имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по  $x$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор  $y$  имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по  $x$ .
3. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y > 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор  $y$  имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по  $x$ .
3. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y > 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .
4. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y < 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор  $y$  имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по  $x$ .
3. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y > 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .
4. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y < 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .
5. Остается только случай  $y \succeq 0$  и  $1^T y = 1$ . В этом случае,  $x^T y \leq \max_i x_i$ .

## Пример

### Example

Найдите  $f^*(y)$ , если  $f(x) = \max_i x_i$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Рассмотрим функцию, поточечным супремумом которой является сопряжённая:

$$g(x, y) = \langle y, x \rangle - f(x) = y^T x - \max_i x_i.$$

2. Обратим внимание, что если вектор  $y$  имеет хотя бы одну отрицательную компоненту, эта функция не ограничена по  $x$ .
3. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y > 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .
4. Если  $y \succeq 0$  и  $1^T y < 1$ , то  $y \notin \text{dom } f^*(y)$ .
5. Остается только случай  $y \succeq 0$  и  $1^T y = 1$ . В этом случае,  $x^T y \leq \max_i x_i$ .
6. Следовательно,  $f^*(y) = 0$ .