

Вспоминаем линейную алгебру.

Даниил Меркулов

Методы оптимизации. МФТИ

## Вспоминаем линейную алгебру

## Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины  $n$  обозначается  $\mathbb{R}^n$ , а пространство матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . То есть<sup>1</sup>:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

---

<sup>1</sup>Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге *Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares* – книга от Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, которая указана в источнике. Также полезен материал по линейной алгебре приведенный в приложении A книги *Numerical Optimization* by Jorge Nocedal Stephen J. Wright.

## Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины  $n$  обозначается  $\mathbb{R}^n$ , а пространство матриц размера  $m \times n$  с вещественными элементами обозначается  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . То есть<sup>1</sup>:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Аналогично, если  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  мы обозначаем транспонирование как  $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать  $x \geq 0$  и  $x \neq 0$  для обозначения покомпонентных неравенств

---

<sup>1</sup>Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге Introduction to Applied Linear Algebra – Vectors, Matrices, and Least Squares - книга от Stephen Boyd & Lieven Vandenberghe, которая указана в источнике. Также полезен материал по линейной алгебре приведенный в приложении A книги Numerical Optimization by Jorge Nocedal Stephen J. Wright.



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

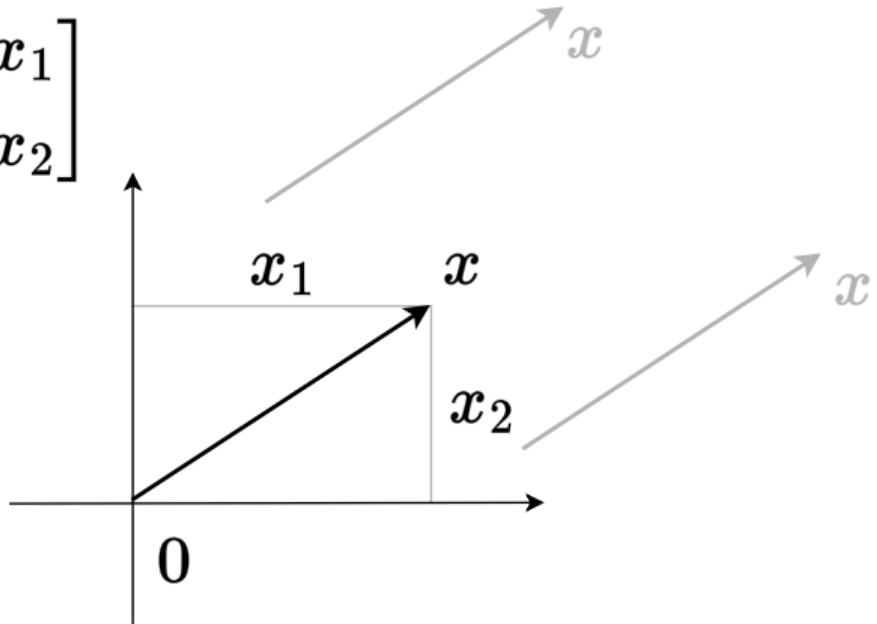


Рис. 1: Эквивалентные представления вектора

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех  $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$ . Обозначается как  $A \succ (\prec)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_{++}^n(\mathbb{S}_{--}^n)$

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех  $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$ . Обозначается как  $A \succ (\prec)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_{++}^n(\mathbb{S}_{--}^n)$

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех  $x : x^T Ax \geq (\leq)0$ . Обозначается как  $A \succeq (\preceq)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_+^n(\mathbb{S}_-^n)$

### Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех  $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$ . Обозначается как  $A \succ (\prec)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_{++}^n(\mathbb{S}_{--}^n)$

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех  $x : x^T Ax \geq (\leq)0$ . Обозначается как  $A \succeq (\preceq)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_+^n(\mathbb{S}_-^n)$

### Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

### Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она должна быть положительно определенной?

Матрица  $A$  называется симметричной, если  $A = A^T$ . Обозначается как  $A \in \mathbb{S}^n$  (множество квадратных симметричных матриц размерности  $n$ ). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех  $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$ . Обозначается как  $A \succ (\prec)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_{++}^n(\mathbb{S}_{--}^n)$

Матрица  $A \in \mathbb{S}^n$  называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех  $x : x^T Ax \geq (\leq)0$ . Обозначается как  $A \succeq (\preceq)0$ . Множество таких матриц обозначается как  $\mathbb{S}_+^n(\mathbb{S}_-^n)$

### Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

### Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она должна быть положительно определенной?

### Question

Верно ли, что если матрица положительно определена, то она должна быть симметричной?

## Матричное умножение (matmul)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $B$  - матрица размера  $n \times p$ , тогда их произведение  $AB$  равно:

$$C = AB$$

Тогда  $C$  - матрица размера  $m \times p$ , элемент  $(i, j)$  которой равен:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^3)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью матриц.

## Матричное умножение (matmul)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $B$  - матрица размера  $n \times p$ , тогда их произведение  $AB$  равно:

$$C = AB$$

Тогда  $C$  - матрица размера  $m \times p$ , элемент  $(i, j)$  которой равен:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^3)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью матриц.

### Question

Возможно ли умножить две матрицы быстрее, чем за  $\mathcal{O}(n^3)$ ? Как насчет  $\mathcal{O}(n^2)$ ,  $\mathcal{O}(n)$ ?

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$  (но если  $A$  и  $B$  коммутируют, то есть  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ )

## Умножение матрицы на вектор (matvec)

Пусть  $A$  - матрица размера  $m \times n$ , а  $x$  - вектор длины  $n$ , тогда  $i$ -й элемент произведения  $Ax$  равен:

$$z = Ax$$

равен:

$$z_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной форме требует  $\mathcal{O}(n^2)$  арифметических операций, где  $n$  обычно считается наибольшей размерностью входов.

Отметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$  (но если  $A$  и  $B$  коммутируют, то есть  $AB = BA$ , то  $e^{A+B} = e^A e^B$ )
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

## Пример. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Пример. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Пример. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Пример. Простая, но важная идея о матричных вычислениях.

Предположим, у вас есть следующее выражение

$$b = A_1 A_2 A_3 x,$$

где  $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  - случайные квадратные плотные матрицы, и  $x \in \mathbb{R}^n$  - вектор. Вам нужно вычислить  $b$ .

Какой способ лучше всего использовать?

1.  $A_1 A_2 A_3 x$  (слева направо)
2.  $(A_1 (A_2 (A_3 x)))$  (справа налево)
3. Не имеет значения
4. Результаты первых двух вариантов не будут одинаковыми.

Проверьте простой  код после вашего интуитивного ответа.

## Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$

## Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)

## Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)
3. Если  $\|x\| = 0$ , то  $x = 0$

## Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)
3. Если  $\|x\| = 0$ , то  $x = 0$

## Нормы

Норма - это **количественная мера малости вектора** и обычно обозначается как  $\|x\|$ .

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$
2.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (неравенство треугольника)
3. Если  $\|x\| = 0$ , то  $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **Евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей реальной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса  $p$ -норм:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

## *p*-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность-норма, или норма Чебышева, определяется как максимальное абсолютное значение элемента вектора:

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

## *p*-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность-норма, или норма Чебышева, определяется как максимальное абсолютное значение элемента вектора:

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i|$$

$l_1$  норма (или манхэттенское расстояние) определяется как сумма модулей элементов вектора  $x$ :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

## *p*-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность-норма, или норма Чебышева, определяется как максимальное абсолютное значение элемента вектора:

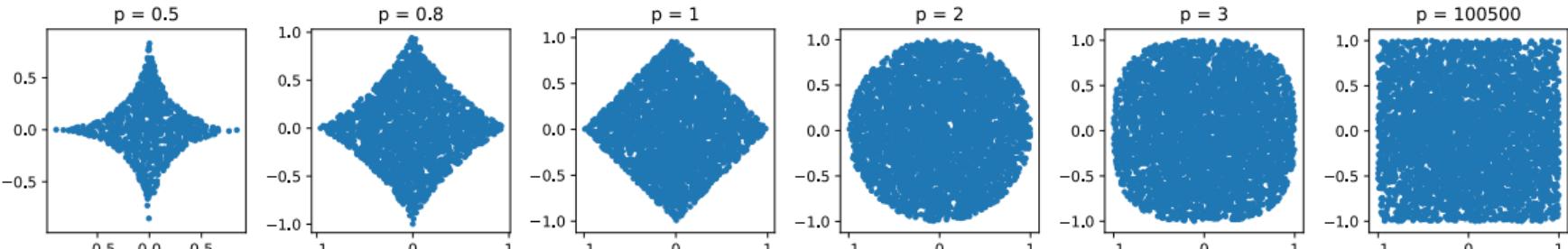
$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

$l_1$  норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора  $x$ :

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

$l_1$  норма играет очень важную роль: она все связана с методами **compressed sensing**, которые появились в середине 00-х как одна из популярных тем исследований. Код для изображения ниже доступен [здесь](#). Также посмотрите [это видео](#).

Unit disk in the  $p$ -th norm



## Матричные нормы

В некотором смысле между матрицами и векторами нет большой разницы (вы можете векторизовать матрицу), и здесь появляется самая простая матричная норма **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

## Матричные нормы

В некотором смысле между матрицами и векторами нет большой разницы (вы можете векторизовать матрицу), и здесь появляется самая простая матричная норма **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Спектральная норма,  $\|A\|_2$  является одной из наиболее широко используемых матричных норм (наряду с нормой Фробениуса).

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Она не может быть вычислена непосредственно из элементов с помощью простой формулы, как в случае нормы Фробениуса, однако, существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она напрямую связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Для неё справедливо:

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

где  $\sigma_1(A)$  - наибольшее сингулярное значение матрицы  $A$ .

## Скалярное произведение

Стандартное скалярное произведение между векторами  $x$  и  $y$  из  $\mathbb{R}^n$  равно:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  -  $i$ -ые компоненты соответствующих векторов.

### Example

Докажите, что вы можете переставить матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием:  
 $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$  и  $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

## Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное произведение** между матрицами  $X$  и  $Y$  из  $\mathbb{R}^{m \times n}$  равно:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle$$

### Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса  $\|\cdot\|_F$  и скалярным произведением между матрицами  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ?

## Собственные векторы и собственные значения

Число  $\lambda$  является собственным значением квадратной матрицы  $A$  размера  $n \times n$ , если существует ненулевой вектор  $q$  такой, что

$$Aq = \lambda q.$$

Вектор  $q$  называется собственным вектором матрицы  $A$ . Матрица  $A$  невырожденная, если ни одно из её собственных значений не равно нулю. Собственные значения симметричных матриц являются вещественными числами, в то время как несимметричные матрицы могут иметь комплексные собственные значения. Если матрица положительно определена и симметрична, то все её собственные значения являются положительными вещественными числами.

# Собственные векторы и собственные значения

## Theorem

$$A \succeq (\succ)0 \Leftrightarrow \text{все собственные значения } A \geq (>)0$$

### Proof

1. → Предположим, что некоторое собственное значение  $\lambda$  отрицательно, и пусть  $x$  обозначает соответствующий собственный вектор. Тогда

$$Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x < 0$$

что противоречит условию  $A \succeq 0$ .

# Собственные векторы и собственные значения

## Theorem

$$A \succeq (\succ)0 \Leftrightarrow \text{все собственные значения } A \geq (>)0$$

### Proof

1. → Предположим, что некоторое собственное значение  $\lambda$  отрицательно, и пусть  $x$  обозначает соответствующий собственный вектор. Тогда

$$Ax = \lambda x \rightarrow x^T Ax = \lambda x^T x < 0$$

что противоречит условию  $A \succeq 0$ .

2. ← Для любой симметричной матрицы мы можем выбрать набор собственных векторов  $v_1, \dots, v_n$ , которые образуют ортонормированный базис в  $\mathbb{R}^n$ . Возьмем любой вектор  $x \in \mathbb{R}^n$ .

$$\begin{aligned}x^T Ax &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)^T A (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\&= \sum \alpha_i^2 v_i^T A v_i = \sum \alpha_i^2 \lambda_i v_i^T v_i \geq 0\end{aligned}$$

Здесь мы использовали тот факт, что  $v_i^T v_j = 0$ , для  $i \neq j$ .

## Спектральное разложение (eigendecomposition)

Пусть  $A \in S_n$ , т.е.  $A$  - вещественная симметричная матрица размера  $n \times n$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

<sup>2</sup>Хорошая шпаргалка с разложением матриц доступна на сайте курса по линейной алгебре website.

## Спектральное разложение (eigendecomposition)

Пусть  $A \in S_n$ , т.е.  $A$  - вещественная симметричная матрица размера  $n \times n$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

где  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ортогональная, т.е. удовлетворяет  $Q^T Q = I$ , и  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Вещественные числа  $\lambda_i$  являются собственными значениями  $A$  и являются корнями характеристического полинома  $\det(A - \lambda I)$ . Столбцы  $Q$  образуют ортонормированный набор собственных векторов  $A$ . Такое разложение называется спектральным.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Хорошая шпаргалка с разложением матриц доступна на сайте курса по линейной алгебре website.

## Спектральное разложение (eigendecomposition)

Пусть  $A \in S_n$ , т.е.  $A$  - вещественная симметричная матрица размера  $n \times n$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = Q\Lambda Q^T,$$

где  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ортогональная, т.е. удовлетворяет  $Q^T Q = I$ , и  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Вещественные числа  $\lambda_i$  являются собственными значениями  $A$  и являются корнями характеристического полинома  $\det(A - \lambda I)$ . Столбцы  $Q$  образуют ортонормированный набор собственных векторов  $A$ . Такое разложение называется спектральным.<sup>2</sup>

Мы обычно упорядочиваем вещественные собственные значения как  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ . Мы используем обозначение  $\lambda_i(A)$  для обозначения  $i$ -го наибольшего собственного значения  $A \in S$ . Мы обычно пишем наибольшее или максимальное собственное значение как  $\lambda_1(A) = \lambda_{\max}(A)$ , и наименьшее или минимальное собственное значение как  $\lambda_n(A) = \lambda_{\min}(A)$ .

<sup>2</sup>Хорошая шпаргалка с разложением матриц доступна на сайте курса по линейной алгебре website.

## Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

## Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

и, следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (соотношение Рэлея):

$$\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)x^T x$$

## Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

и, следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (соотношение Рэлея):

$$\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)x^T x$$

**Число обусловленности** невырожденной матрицы определяется как

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

## Собственные значения

Наибольшее и наименьшее вещественные собственные значения удовлетворяют

$$\lambda_{\min}(A) = \inf_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}, \quad \lambda_{\max}(A) = \sup_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}$$

и, следовательно,  $\forall x \in \mathbb{R}^n$  (соотношение Рэлея):

$$\lambda_{\min}(A)x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_{\max}(A)x^T x$$

**Число обусловленности** невырожденной матрицы определяется как

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

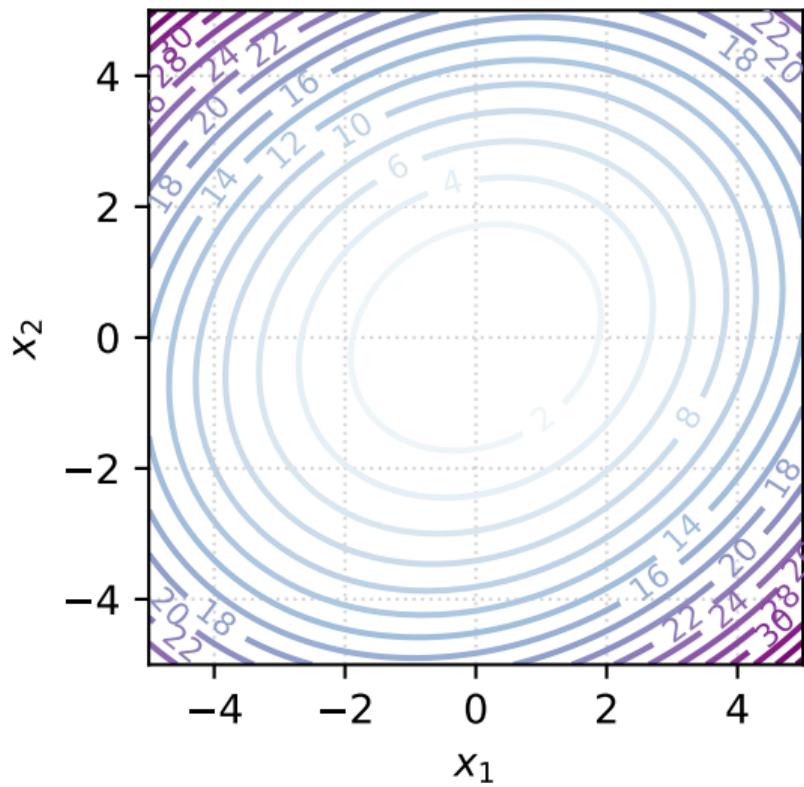
Если мы используем спектральную матричную норму, мы можем получить:

$$\kappa(A) = \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)}$$

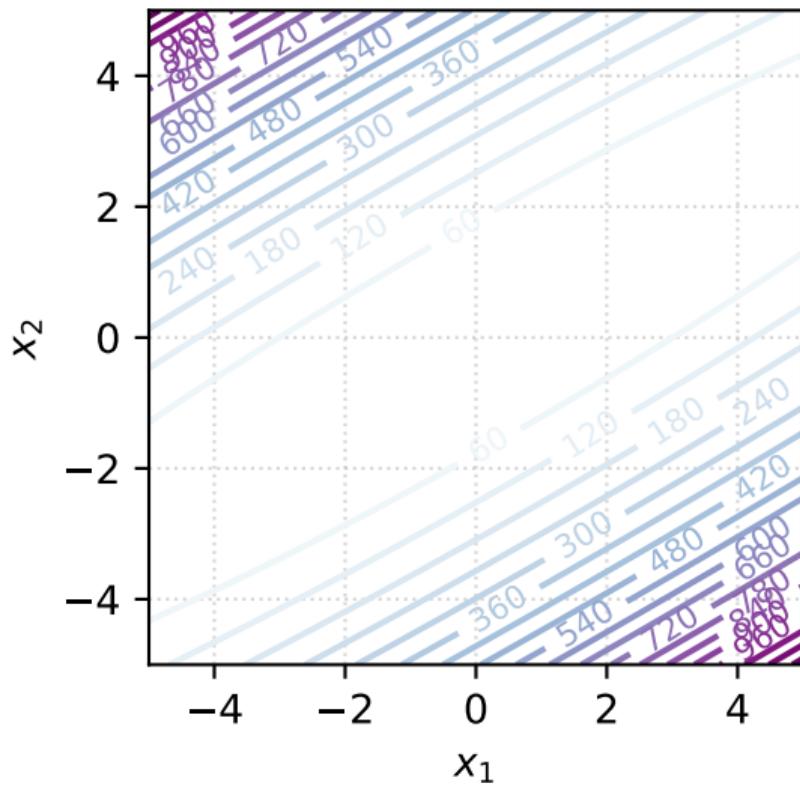
Если, кроме того,  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ :  $\kappa(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)}$

## Число обусловленности

$$\kappa = 1.5$$



$$\kappa = 50$$



## Сингулярное разложение (SVD)

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с рангом  $A = r$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = U\Sigma V^T$$

## Сингулярное разложение (SVD)

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с рангом  $A = r$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = U\Sigma V^T$$

где  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$  удовлетворяет  $U^T U = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  удовлетворяет  $V^T V = I$ , и  $\Sigma$  является диагональной матрицей с  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , такой что

## Сингулярное разложение (SVD)

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с рангом  $A = r$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = U\Sigma V^T$$

где  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$  удовлетворяет  $U^T U = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  удовлетворяет  $V^T V = I$ , и  $\Sigma$  является диагональной матрицей с  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , такой что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

## Сингулярное разложение (SVD)

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  с рангом  $A = r$ . Тогда  $A$  может быть разложена как

$$A = U\Sigma V^T$$

где  $U \in \mathbb{R}^{m \times r}$  удовлетворяет  $U^T U = I$ ,  $V \in \mathbb{R}^{n \times r}$  удовлетворяет  $V^T V = I$ , и  $\Sigma$  является диагональной матрицей с  $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ , такой что

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0.$$

Это разложение называется **сингулярным разложением (SVD)** матрицы  $A$ . Столбцы  $U$  называются левыми сингулярными векторами  $A$ , столбцы  $V$  называются правыми сингулярными векторами, и числа  $\sigma_i$  являются сингулярными значениями. Сингулярное разложение может быть записано как

$$A = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T,$$

где  $u_i \in \mathbb{R}^m$  являются левыми сингулярными векторами, и  $v_i \in \mathbb{R}^n$  являются правыми сингулярными векторами.

# Сингулярное разложение

## Question

Пусть  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Что мы можем сказать о связи между его собственными значениями и сингулярными значениями?

# Сингулярное разложение

## Question

Пусть  $A \in \mathbb{S}_{++}^n$ . Что мы можем сказать о связи между его собственными значениями и сингулярными значениями?

## Question

Как сингулярные значения матрицы связаны с её собственными значениями, особенно для симметричной матрицы?

## Пример. Связь между Фробениусовой нормой и сингулярными значениями.

Пусть  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , и пусть  $q := \min\{m, n\}$ . Докажите, что

$$\|A\|_F^2 = \sum_{i=1}^q \sigma_i^2(A),$$

где  $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_q(A) \geq 0$  - сингулярные значения матрицы  $A$ . Подсказка: используйте связь между Фробениусовой нормой и скалярным произведением и SVD.

## Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

## Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать  $r$  линейно независимых столбцов матрицы и любые  $r$  линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

## Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать  $r$  линейно независимых столбцов матрицы и любые  $r$  линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

Применения для рангового разложения:

- Сжатие модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численном анализе: для матрицы ранга  $r$  с  $r \ll n, m$  необходимо хранить  $\mathcal{O}((n+m)r) \ll nm$  элементов.

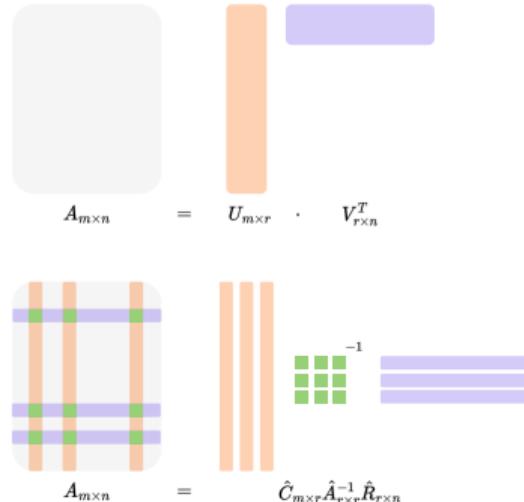


Рис. 3: Иллюстрация рангового разложения

## Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать  $r$  линейно независимых столбцов матрицы и любые  $r$  линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

Применения для рангового разложения:

- Сжатие модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численном анализе: для матрицы ранга  $r$  с  $r \ll n, m$  необходимо хранить  $\mathcal{O}((n + m)r) \ll nm$  элементов.
- Извлечение признаков в машинном обучении

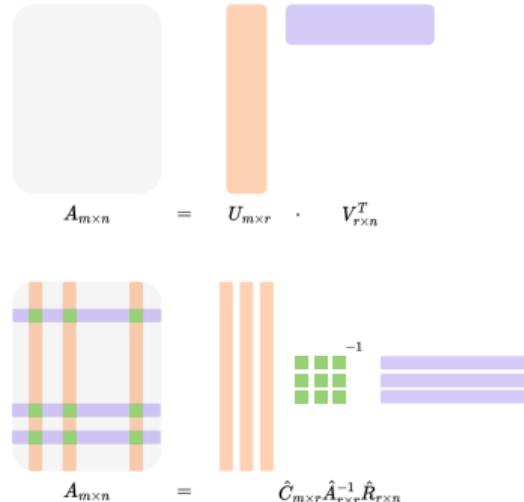


Рис. 3: Иллюстрация рангового разложения

## Ранговое разложение (Skeleton decomposition)

Простое, но очень интересное разложение - это ранговое разложение, которое может быть записано в двух формах:

$$A = UV^T \quad A = \hat{C}\hat{A}^{-1}\hat{R}$$

Последнее выражение относится к забавному факту: вы можете случайным образом выбрать  $r$  линейно независимых столбцов матрицы и любые  $r$  линейно независимых строк матрицы и хранить только их с возможностью точно (!) восстановить всю матрицу.

Применения для рангового разложения:

- Сжатие модели, сжатие данных и ускорение вычислений в численном анализе: для матрицы ранга  $r$  с  $r \ll n, m$  необходимо хранить  $\mathcal{O}((n + m)r) \ll nm$  элементов.
- Извлечение признаков в машинном обучении
- Все приложения, где применяется SVD, так как ранговое разложение может быть преобразовано в форму усеченного SVD.

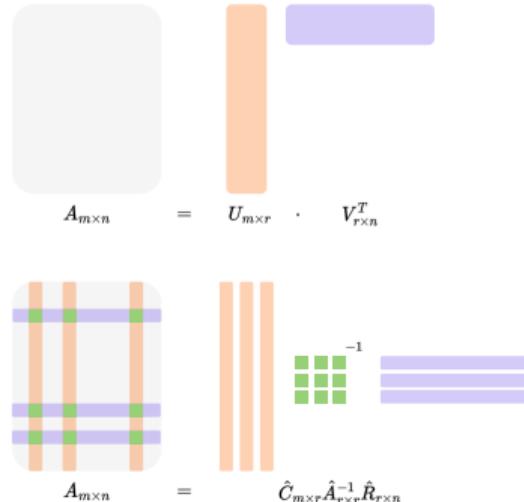


Рис. 3: Иллюстрация рангового разложения

## Каноническое тензорное разложение

Можно рассмотреть обобщение рангового разложения на структуры данных более высокого порядка, такие как тензоры, что означает представление тензора в виде суммы  $r$  простых тензоров.

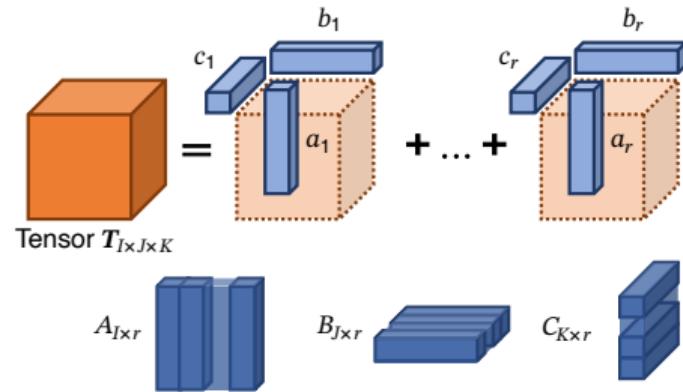


Рис. 4: Иллюстрация канонического тензорного разложения

### Example

Заметьте, что существует множество тензорных разложений: каноническое, Таккера, тензорный поезд (TT), тензорное кольцо (TR) и другие. В случае тензоров мы не имеем прямого определения **ранга** для всех типов разложений. Например, для разложения Тензорного поезда ранг является не скаляром, а вектором.

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

Не забывайте о циклическом свойстве следа для произвольных матриц  $A, B, C, D$  (предполагая, что все размерности согласованы):

$$\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}(DABC) = \operatorname{tr}(CDAB) = \operatorname{tr}(BCDA)$$

## Определитель и след матрицы

Определитель и след матрицы могут быть выражены через собственные значения

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad \operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

Определитель имеет несколько интересных свойств. Например,

- $\det A = 0$  тогда и только тогда, когда  $A$  является вырожденной;
- $\det AB = (\det A)(\det B)$ ;
- $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$ .

Не забывайте о циклическом свойстве следа для произвольных матриц  $A, B, C, D$  (предполагая, что все размерности согласованы):

$$\operatorname{tr}(ABCD) = \operatorname{tr}(DABC) = \operatorname{tr}(CDAB) = \operatorname{tr}(BCDA)$$

### Question

Как определитель матрицы связан с её обратимостью?

## Задача. Знайте свое скалярное произведение.

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^n \langle S^{-1}a_i, a_i \rangle,$$

где  $S = \sum_{i=1}^n a_i a_i^T$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $\det(S) \neq 0$

## Пример. LoRA: Low-Rank Adaptation of Large Language Models (arXiv:2106.09685)

Поскольку современные LLM слишком большие, чтобы вместиться в память среднего пользователя, мы используем некоторые трюки, чтобы сделать их потребление памяти меньше. Одним из наиболее популярных трюков является LoRA (Low-Rank Adaptation of Large Language Models).

Предположим, у нас есть матрица  $W \in \mathbb{R}^{d \times k}$  и мы хотим выполнить следующее обновление:

$$W = W_0 + \Delta W.$$

Основная идея LoRA состоит в том, чтобы разложить обновление  $\Delta W$  на две низкоранговые матрицы:

$$W = W_0 + \Delta W = W_0 + BA, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times r}, A \in \mathbb{R}^{r \times k}, \\ rank(A) = rank(B) = r \ll \min\{d, k\}.$$

Проверьте ноутбук для примера реализации LoRA.

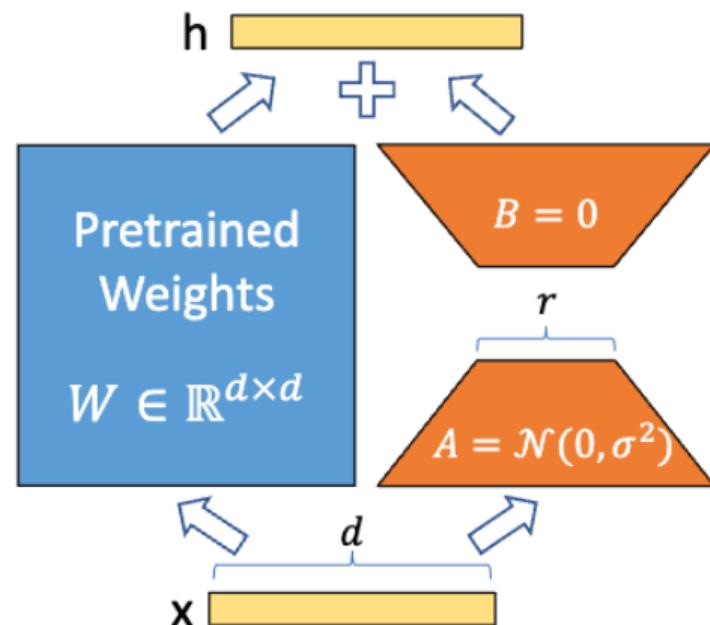


Рис. 5: Иллюстрация LoRA