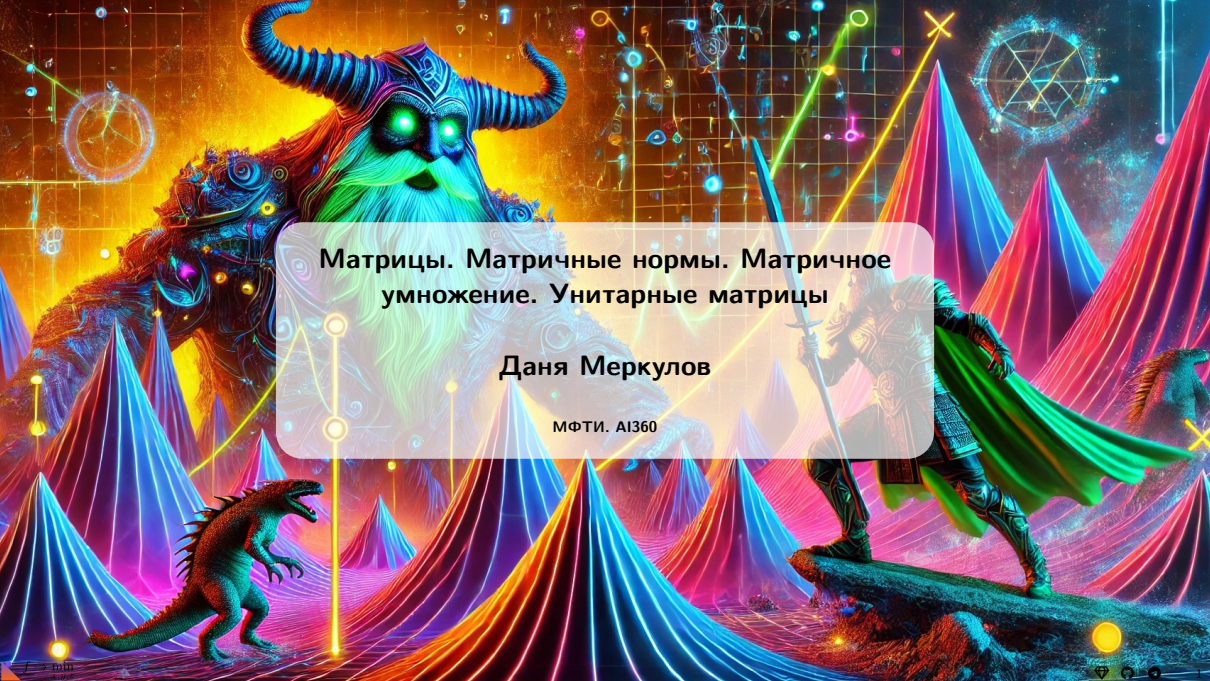


Матрицы. Матричные нормы. Матричное умножение. Унитарные матрицы

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Базовые понятия линейной алгебры

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$. [1]

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

[1] Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге Introduction to Applied Linear Algebra -- Vectors, Matrices, and Least Squares - книга Стивена Бойда и Ливена Ванденбергена, которая указана в источнике. Также полезной книгой по линейной алгебре является приложение A в книге Numerical Optimization Джорджа Носедаля и Стивена Райта.

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$. [1]

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Аналогично, если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ мы обозначаем транспонирование как $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать $x \geq 0$ и $x \neq 0$ для обозначения покомпонентного неравенства.

[1] Подробный вводный курс по прикладной линейной алгебре можно найти в книге Introduction to Applied Linear Algebra -- Vectors, Matrices, and Least Squares - книга Стивена Бойда и Ливена Ванденбергена, которая указана в источнике. Также полезной книгой по линейной алгебре является приложение A в книге Numerical Optimization Джорджа Носедаля и Стивена Райта.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

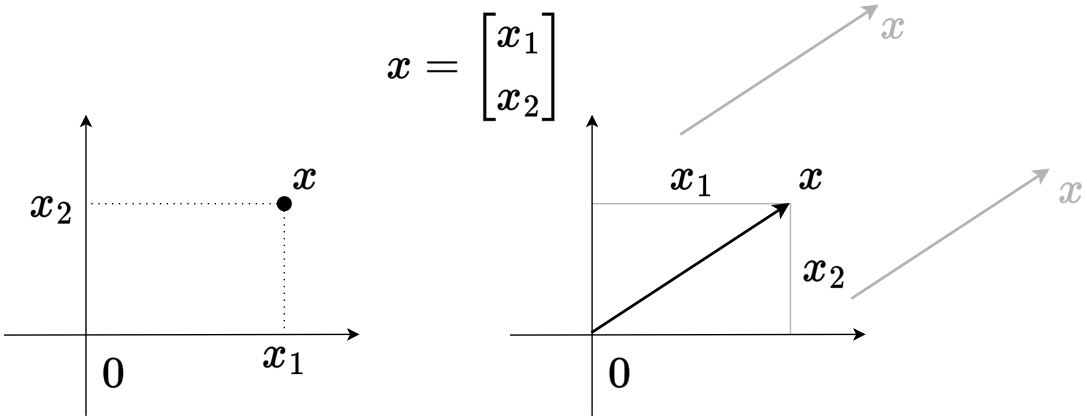


Рис. 1: Эквивалентные представления вектора

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++}(\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++}(\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T Ax \geq (\leq)0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+}(\mathbb{S}^n_{-})$.

> **Question**
>
> Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++}(\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T Ax \geq (\leq)0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+}(\mathbb{S}^n_{-})$.

Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T Ax > (<)0$. Обозначается как $A \succ (\prec)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++}(\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T Ax \geq (\leq)0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq)0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+}(\mathbb{S}^n_{-})$.

Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

Question

Верно ли, что если матрица положительно определена, то она симметрична?

Умножение матриц

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и B - матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C - матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Умножение матриц

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и B - матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C - матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Question

Можно ли умножить две матрицы быстрее, чем за $\mathcal{O}(n^3)$? Как насчет $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n)$?

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B - коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)

Умножение матрицы на вектор

Пусть A - матрица размера $m \times n$, и x - вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n - наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B - коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма - это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей повседневной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса p-норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

L_1 норма играет очень важную роль: она связана с методами **compressed sensing**, которые стали одной из популярных тем исследований в середине 00-х. Код для изображения ниже доступен *здесь:*. Также можно посмотреть *этот* видео.

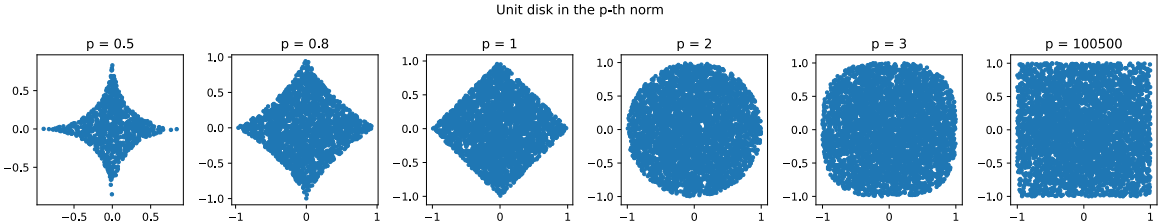


Рис. 2: Шары в разных нормах на плоскости

Матричные нормы

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

  Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

- Пример несубмультипликативной нормы - норма Чебышёва:

$$\|A\|_C = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Пример

Придумайте контрпример

Покажите, что норма Чебышёва не является субмультипликативной.

Пример

Придумайте контрпример

Покажите, что норма Чебышёва не является субмультипликативной.

Рассмотрим матрицы

$$A = B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для каждой из них

$$\|A\|_C = \|B\|_C = 1.$$

Вычислим произведение:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если норма была бы субмультипликативной, то должно выполняться

$$2 = \|AB\|_C \leq \|A\|_C \cdot \|B\|_C = 1 \cdot 1 = 1,$$

но $2 > 1$.

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Спектральная норма, $\|A\|_2$ является одной из наиболее широко используемых норм матриц (вместе с нормой Фробениуса).

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Её нельзя вычислить непосредственно из элементов, используя простую формулу, как норму Фробениуса, однако существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она непосредственно связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Она удовлетворяет следующему свойству:

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

где $\sigma_1(A)$ является наибольшим сингулярным значением матрицы A.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм - это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.

- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.

- Это нетривиальный факт и общий критерий матричной нормы для того, чтобы быть операторной нормой можно найти в Теореме 6 и следствии 4.

Пример

Question

Покажите, что операторная норма $\|\cdot\|_{\alpha\to\alpha}$ является субмультипликативной.

Пример

Question

Покажите, что операторная норма $\|\cdot\|_{\alpha\to\alpha}$ является субмультипликативной.

Определим операторную норму для матрицы A как

$$\|A\|_{\alpha\to\alpha} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\alpha}.$$

Для двух матриц A и B рассмотрим для любого $x \neq 0$:

$$\|ABx\|_\alpha \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|Bx\|_\alpha \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|B\|_{\alpha\to\alpha}\|x\|_\alpha.$$

Делим на $\|x\|_\alpha$ и берем супремум по $x \neq 0$:

$$\|AB\|_{\alpha\to\alpha} \leq \|A\|_{\alpha\to\alpha}\|B\|_{\alpha\to\alpha}.$$

Таким образом, операторная норма с одинаковыми векторными нормами является субмультипликативной.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$
- $p = 2, \quad$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм - это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$
- $p = 2, \quad$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.
- $p = \infty, \quad \|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{m} |a_{ij}|.$

Пример

Покажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$.

Пример

Покажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Решениеможно разбить на две части: показать, что норма не превосходит максимальной суммы модулей столбца, и построить вектор, для которого достигается это значение. Норма $\|A\|_1$ определяется как операторная норма, индуцированная векторной 1-нормой:

$$\|A\|_1 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

При этом можно показать, что

$$\|Ax\|_1 = \sum_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}||x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Если выбрать x так, чтобы вся масса $\|x\|_1 = 1$ приходилась на столбец с максимальной суммой модулей, получим, что супремум равен

$$\max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Пример

Покажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$.

Пример

Покажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$.

Аналогично, операторная норма, индуцированная ∞-нормой, определяется как

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}.$$

При этом легко доказать, что

$$\|Ax\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \, \|x\|_\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|.$$

Скалярное произведение

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между векторами x и y из $\mathbb{R}^n$ определяется как:

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle$$

Здесь x_i и y_i являются i-ми компонентами соответствующих векторов.

Example

Докажите, что можно перемещать матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием: $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ и $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между матрицами X и Y из $\mathbb{R}^{m \times n}$ определяется как:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle$$

Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса $\|\cdot\|_F$ и скалярным произведением между матрицами $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Пример

Question

Посчитайте скалярное произведение матриц

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Пример

Question

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle,$$

где $S = \sum_{i=1}^{n} a_i a_i^T, a_i \in \mathbb{R}^n, \det(S) \neq 0$

Ортогональные матрицы

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U - матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n - единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для матрицы из комплексных чисел вводится аналогичное определение **унитарной матрицы**:

$$U^* U = U U^* = I_n,$$

где U^* - эрмитово сопряжение матрицы U.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$
  - $U U^T = I_m$ - матрица U называется **матрицей с ортогональными строками** для $m < n$

Ортогональные матрицы

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T V = I,$$

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу

Ортогональные матрицы

Важное свойство: **произведение двух ортогональных матриц является ортогональной матрицей:**

$$(UV)^T UV = V^T U^T UV = V^T V = I,$$

- Позже мы покажем, что существуют типы матриц (**отражения Хаусхолдера** и **вращения Гивенса**) композиция которых способна произвести любую унитарную матрицу
- Эта идея является основой некоторых алгоритмов, например, QR-разложения

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.

Ортогональная инвариантность $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$ норм

- Для векторной 2-нормы мы уже видели, что $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для любой ортогональной U.
- Можно показать, что ортогональные матрицы не изменяют матричные нормы $\|\cdot\|_2$ и $\|\cdot\|_F$, т.е. для любой квадратной A и ортогональной U,V:

$$\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \qquad \|UAV\|_F = \|A\|_F.$$

- Для $\|\cdot\|_2$ это следует из определения операторной нормы и того факта, что векторная 2-норма является ортогонально инвариантной.
- Для $\|\cdot\|_F$ это следует из $\|A\|_F^2 = \mathrm{trace}(A^T A)$ и того факта, что $\mathrm{trace}(BC) = \mathrm{trace}(CB)$.

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки
- Матрица отражения Хаусхолдера

Примеры ортогональных матриц

- Матрица вращения
- Матрица перестановки
- Матрица отражения Хаусхолдера
- Матрица вращения Гивенса

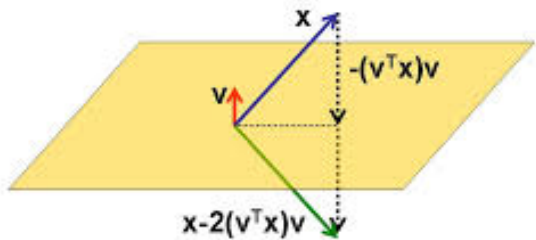
Матрица отражения Хаусхолдера

Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$H \equiv H(v) = I - 2vv^T,$$

где v - вектор длины n и $v^T v = 1$.

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.



Матрица отражения Хаусхолдера

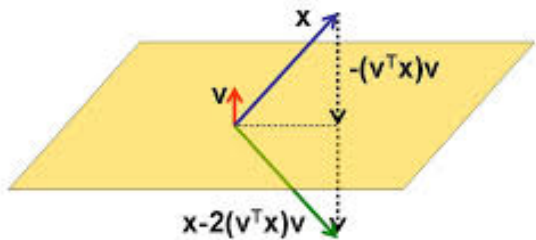
Матрица отражения Хаусхолдера - это ортогональная матрица, которая используется для отражения вектора относительно гиперплоскости. Она имеет следующий вид:

$$H \equiv H(v) = I - 2vv^T,$$

где v - вектор длины n и $v^T v = 1$.

- Покажите, что H - ортогональная матрица и $H^T = H$.
- Покажите, что H - отражение:

$$Hx = x - 2(v^T x)v$$



Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

- Следовательно,

$$(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.$$

Важное свойство матрицы отражения Хаусхолдера

Хорошее свойство матрицы отражения Хаусхолдера состоит в том, что она может обнулить все элементы вектора, кроме первого:

$$H \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Доказательство. Пусть $e_1 = (1, 0, \dots, 0)^T$, тогда мы хотим найти v такой, что

$$Hx = x - 2(v^T x)v = \alpha e_1,$$

где α - неизвестная константа.

- Так как $\|\cdot\|_2$ является унитарно инвариантной, мы получаем

$$\|x\|_2 = \|Hx\|_2 = \|\alpha e_1\|_2 = |\alpha|.$$

и $\alpha = \pm\|x\|_2$

- Также мы можем выразить v из $x - 2(v^T x)v = \alpha e_1$:

$$v = \frac{x - \alpha e_1}{2v^T x}$$

- Умножая последнее выражение на x^T мы получаем

$$x^T x - 2(v^T x)x^T v = \alpha x_1;$$

или

$$\|x\|_2^2 - 2(v^T x)^2 = \alpha x_1.$$

- Следовательно,

$$(v^T x)^2 = \frac{\|x\|_2^2 - \alpha x_1}{2}.$$

- Таким образом, v существует и равно

$$v = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{2v^T x} = \frac{x \mp \|x\|_2 e_1}{\pm\sqrt{2(\|x\|_2^2 \mp \|x\|_2 x_1)}}.$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.

Алгоритм Хаусхолдера для построения QR-разложения

- Используя полученное свойство мы можем сделать произвольную матрицу A нижней треугольной:

$$H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

- Затем находим $H_3 = \begin{bmatrix} I_2 & \\ & \widetilde{H}_3 \end{bmatrix}$ такую, что

$$\widetilde{H}_3 \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \times \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Получаем

$$H_3 H_2 H_1 A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

- Аналогично находим H_4 и получаем верхнюю треугольную матрицу.
- Так как произведение ортогональных и обратная к ортогональной матрицы являются ортогональными матрицами, мы получаем **следствие:** (QR-разложение) Любая $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ может быть представлена как

$$A = QR,$$

где Q - ортогональная и R - верхняя треугольная. См. постер, каковы размеры Q и R для $n > m$ и $n < m$.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

при этом остальные x_k остаются неизменными.

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

при этом остальные x_k остаются неизменными.

- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

Матрица вращения Гивенса (Якоби)

- Матрица вращения Гивенса (Якоби) - это ортогональная матрица, которая используется для вращения вектора в плоскости на угол α. Она имеет следующий вид:

$$G = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Легко проверить, что $G^T G = GG^T = I$, то есть матрица является ортогональной.

- Для общего случая размерности n мы выбираем две координаты (i, j) и выполняем вращение вектора x только в этой плоскости:

$$x' = Gx,$$

где изменяются только i-я и j-я координаты:

$$x'_i = x_i \cos\alpha - x_j \sin\alpha, \quad x'_j = x_i \sin\alpha + x_j \cos\alpha,$$

при этом остальные x_k остаются неизменными.

- Чтобы обнулить j-ю координату вектора, выбираем угол α так, что:

$$\cos\alpha = \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{x_j}{\sqrt{x_i^2 + x_j^2}}$$

- Применяя последовательно матрицы Гивенса, можно привести матрицу к верхнетреугольному виду: для этого нужно $n - 1$ вращений, чтобы обнулить элементы под главной диагональю в каждом столбце.

QR через вращения Гивенса

Также мы можем сделать матрицу верхнетреугольной с помощью вращений Гивенса:

$$\begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ * & \times & \times \\ * & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} * & \times & \times \\ * & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & * & \times \\ 0 & * & \times \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.

Вращения Гивенса vs. отражения Хаусхолдера

- Отражения Хаусхолдера полезны для плотных матриц (сложность приблизительно в два раза меньше, чем для Якоби) и мы должны обнулить большое количество элементов.
- Вращения Гивенса более подходят для разреженных матриц или параллельных вычислений, так как они действуют локально на элементах.