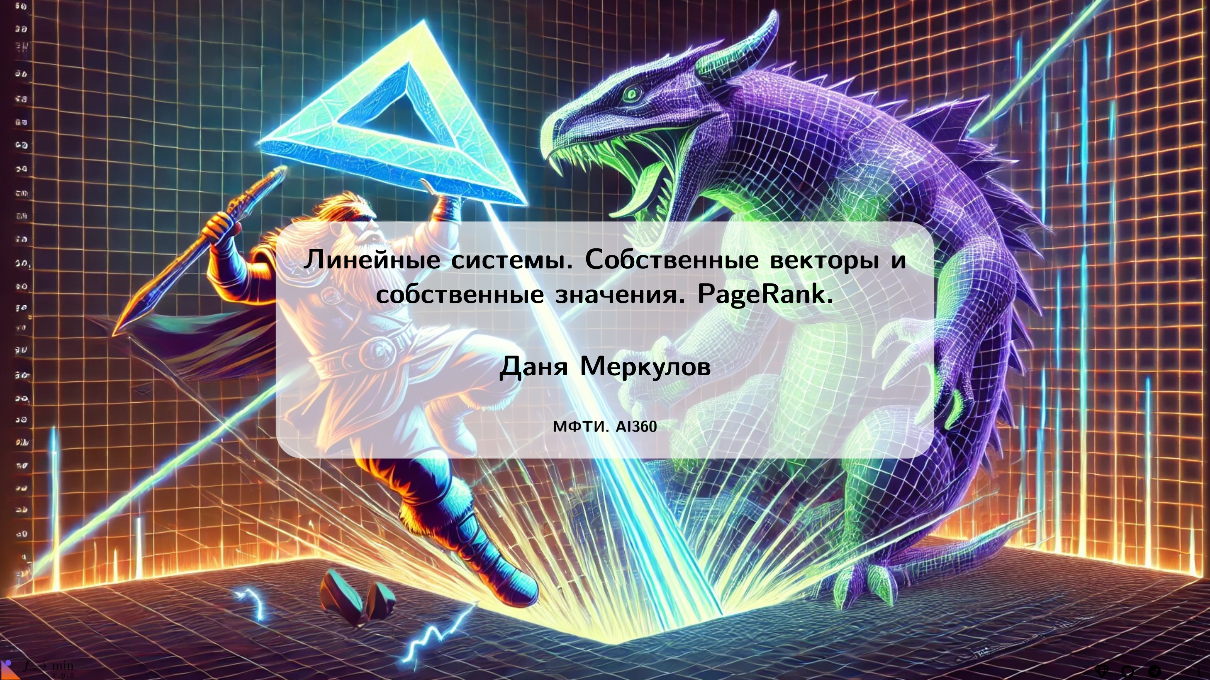


Линейные системы. Собственные векторы и собственные значения. PageRank.

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Линейные системы

Матричные разложения и линейные системы

В задаче наименьших квадратов (aka линейной регрессии) мы имеем измерения $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $y \in \mathbb{R}^m$ и ищем вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$ такой, что $X\theta$ близок к y. Близость определяется как сумма квадратов разностей:

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^\top \theta - y_i)^2 \qquad \|X\theta - y\|_2^2 \to \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} \qquad X\theta^* = y$$

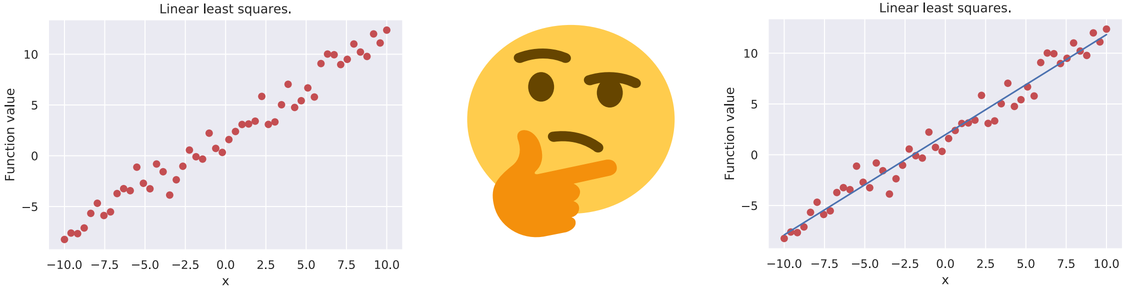


Рис. 1: Illustration of linear system aka least squares

Матричные разложения и линейные системы

Moore--Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

Матричные разложения и линейные системы

Moore--Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где $X^\dagger$ называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

Матричные разложения и линейные системы

Moore–-Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где $X^\dagger$ называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где $X^\dagger$ называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

где Q - ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и R - верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку $Q^{-1} = Q^\top$, мы имеем:

$$QR\theta = y \quad \longrightarrow \quad R\theta = Q^\top y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение X.

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где $X^\dagger$ называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

где Q - ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и R - верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку $Q^{-1} = Q^\top$, мы имеем:

$$QR\theta = y \quad \longrightarrow \quad R\theta = Q^\top y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение X.
2. Решите треугольную систему $R\theta = Q^\top y$, которая треугольная и, следовательно, легко решаемая.

Матричные разложения и линейные системы

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^\top X = A = L^\top \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^\top L\theta = y \quad \longrightarrow \quad L^\top z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого $X^\top X$.

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^\top X = A = L^\top \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^\top L\theta = y \quad \longrightarrow \quad L^\top z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого $X^\top X$.
2. Найдите $z_\theta = L\theta$ путем решения треугольной системы $L^\top z_\theta = y$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^\top X = A = L^\top \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

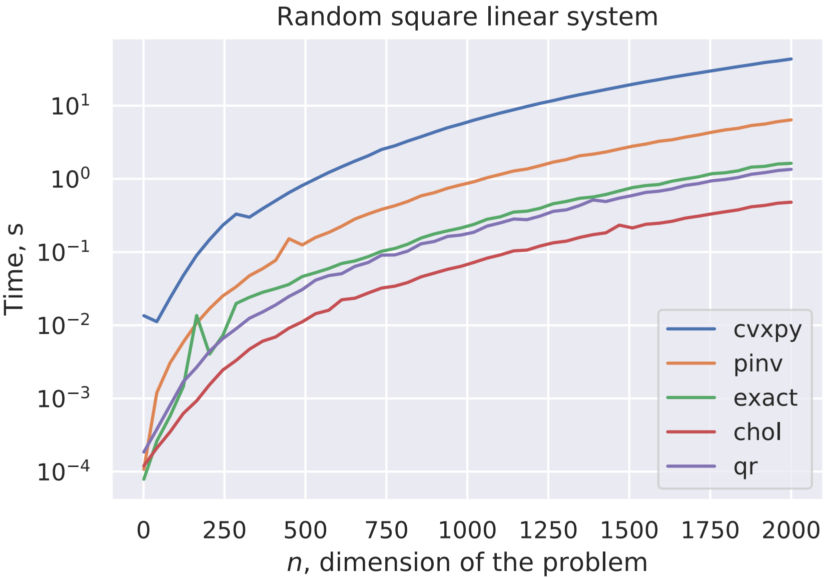
$$L^\top L\theta = y \quad \longrightarrow \quad L^\top z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

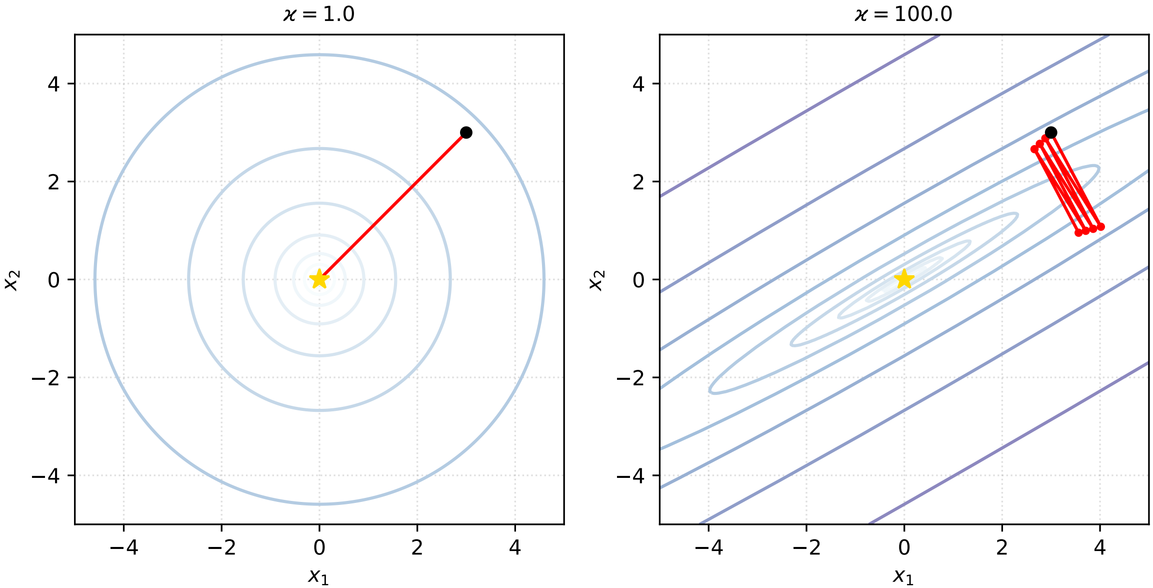
1. Найдите разложение Холецкого $X^\top X$.
2. Найдите $z_\theta = L\theta$ путем решения треугольной системы $L^\top z_\theta = y$
3. Найдите θ путем решения треугольной системы $L\theta = z_\theta$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы



Число обусловленности $\varkappa$



Матричные разложения и линейные системы