

Линейные системы. Собственные векторы и
собственные значения. PageRank.

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Линейные системы

Матричные разложения и линейные системы

В задаче наименьших квадратов (aka линейной регрессии) мы имеем измерения $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ и $y \in \mathbb{R}^m$ и ищем вектор $\theta \in \mathbb{R}^n$ такой, что $X\theta$ близок к y . Близость определяется как сумма квадратов разностей:

$$X_i^\top \theta = \sum_{j=1}^n X_{ij} \theta_j$$

$$\sum_{i=1}^m (x_i^\top \theta - y_i)^2$$

$$\|X\theta - y\|_2^2 \rightarrow \min_{\theta \in \mathbb{R}^n}$$

$$X\theta^* = y$$

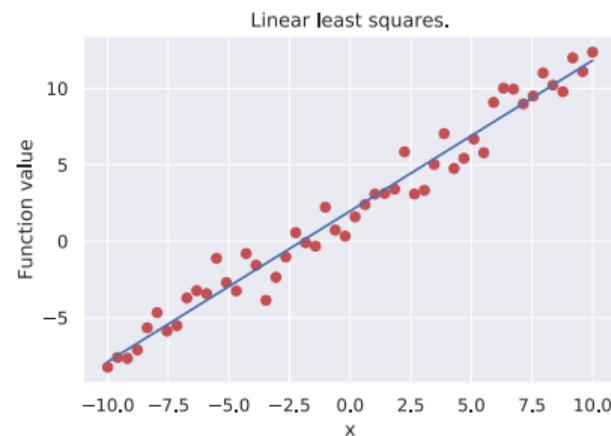
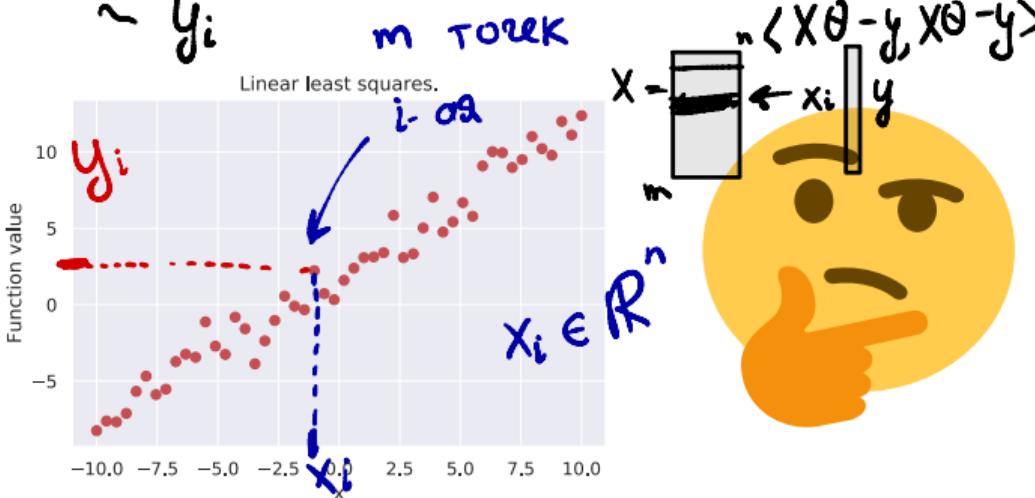


Рис. 1: Illustration of linear system aka least squares

Nur. cekileme:

$$X \cdot G = Y$$

gantibile

mogenb

METKU

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$\frac{m=n}{X^* = A^{-1} B}$$

$O(n^3)$

$$(A^T A) \underset{\substack{m \times m \\ m \times m}}{X} = A^T B \underset{\substack{m \times m \\ m \times 1}}{B}$$

$$X^* = (A^T A)^{-1} \underset{\substack{m \times m \\ m \times m}}{A^T B} \underset{\substack{m \times 1 \\ m \times 1}}{B}$$

$m < n$

$$X + Y = 0$$

$$X^* = \bar{A} (A A^T)^{-1} B \underset{\substack{m \times m \\ m \times m}}{B}$$

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

$$\chi = \|A\| \cdot \|A^\dagger\|$$

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где X^\dagger называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где X^\dagger называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где X^\dagger называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

$$X\theta = y$$

где Q – ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и R – верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку $Q^{-1} = Q^\top$, мы имеем:

$$QR\theta = y \rightarrow R\theta = Q^\top y$$

$$\tilde{y}$$

$$R\theta = \tilde{y}$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение X .

Матричные разложения и линейные системы

Moore–Penrose inverse

Если матрица X относительно мала, мы можем записать и вычислить точное решение:

$$\theta^* = (X^\top X)^{-1} X^\top y = X^\dagger y,$$

где X^\dagger называется псевдо-обратной матрицей. Однако, этот подход возводит в квадрат число обусловленности задачи, что может быть проблемой для больших и плохо обусловленных задач.

QR разложение

Для любой матрицы $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$ существует QR разложение:

$$X = Q \cdot R,$$

где Q – ортогональная матрица (ее столбцы ортогональные единичные векторы) и R – верхняя треугольная матрица. Важно отметить, что поскольку $Q^{-1} = Q^\top$, мы имеем:

$$QR\theta = y \quad \rightarrow \quad R\theta = Q^\top y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите QR разложение X .
2. Решите треугольную систему $R\theta = Q^\top y$, которая треугольная и, следовательно, легко решаемая.

Матричные разложения и линейные системы

$$\cancel{X^T X \theta = y}$$

A

$$A \in S^n_{++}$$

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^T X = A = L^T \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^T L \theta = y \rightarrow L^T z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого $X^T X$.

$$z_\theta$$

$$L^T z_\theta = y$$

$$L \theta = z_\theta$$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^\top X = A = L^\top \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^\top L\theta = y \quad \rightarrow \quad L^\top z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого $X^\top X$.
2. Найдите $z_\theta = L\theta$ путем решения треугольной системы $L^\top z_\theta = y$

Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы

Разложение Холецкого

Для любой положительно определенной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ существует разложение Холецкого:

$$X^\top X = A = L^\top \cdot L,$$

где L - нижняя треугольная матрица. Мы имеем:

$$L^\top L\theta = y \quad \rightarrow \quad L^\top z_\theta = y$$

Теперь процесс нахождения θ состоит из двух шагов:

1. Найдите разложение Холецкого $X^\top X$.
2. Найдите $z_\theta = L\theta$ путем решения треугольной системы $L^\top z_\theta = y$
3. Найдите θ путем решения треугольной системы $L\theta = z_\theta$

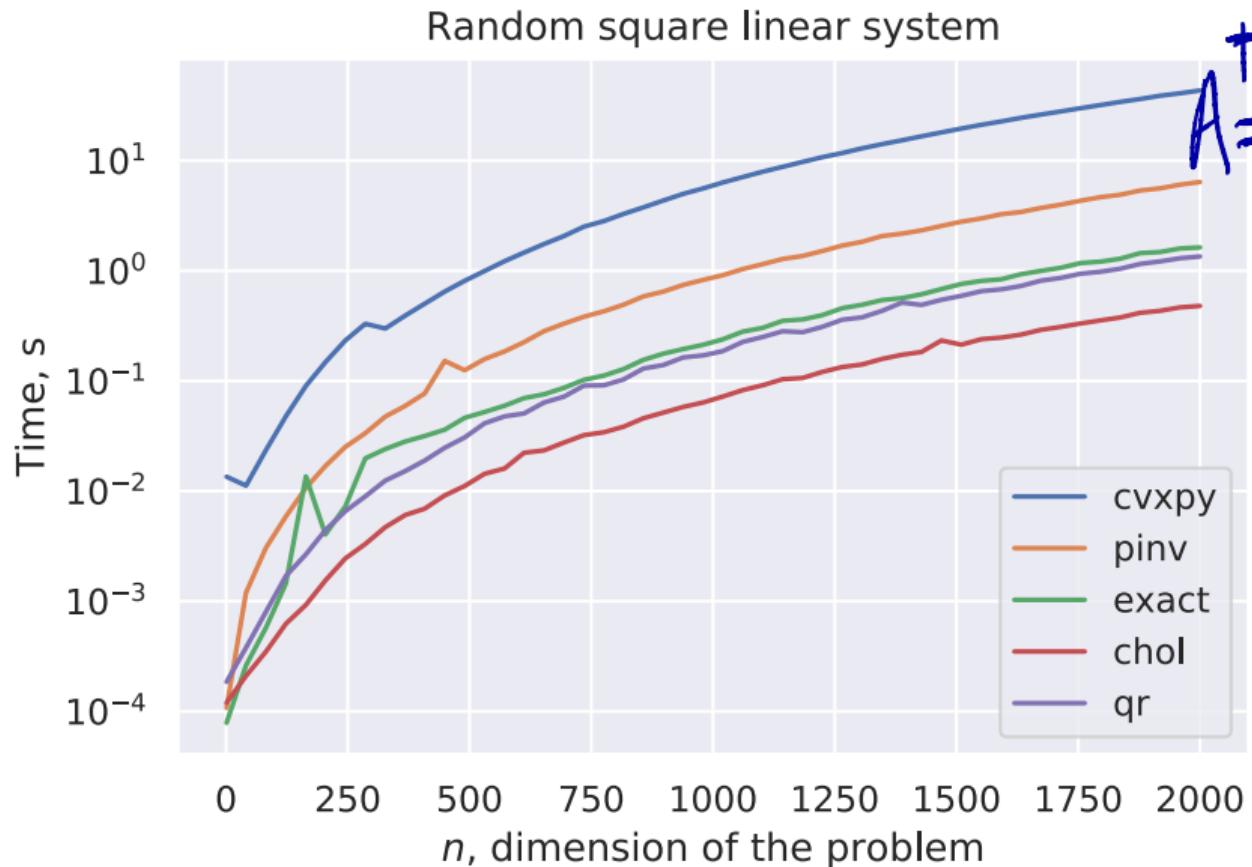
Обратите внимание, что в этом случае ошибка пропорциональна квадрату числа обусловленности.

Матричные разложения и линейные системы

$$A = LL^T$$

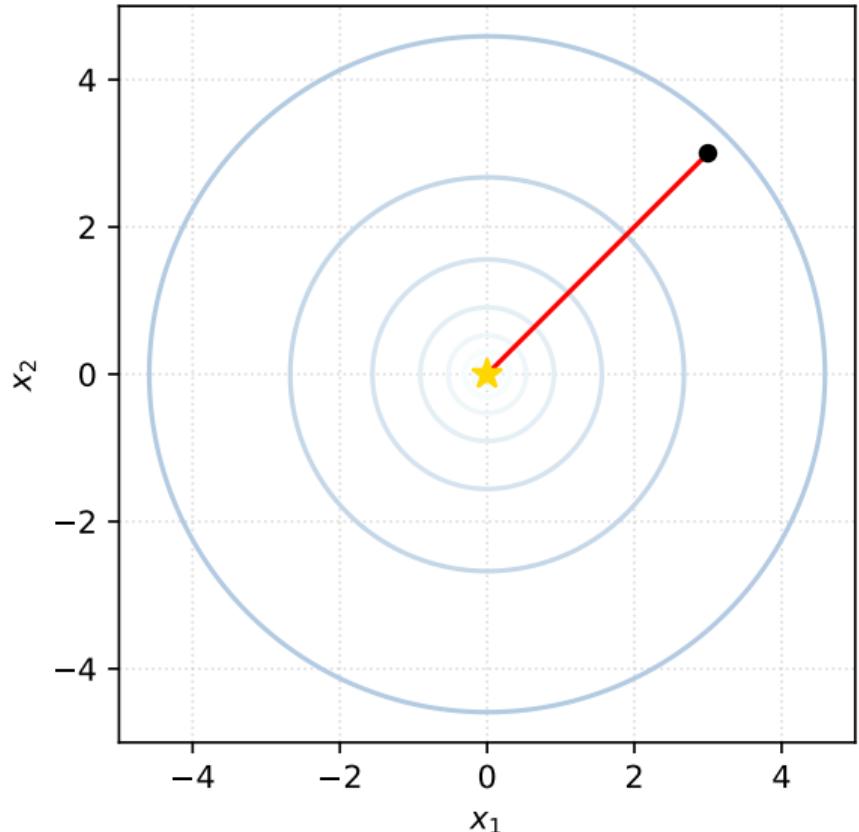
$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

$A^\wedge \backslash \text{dagger}$



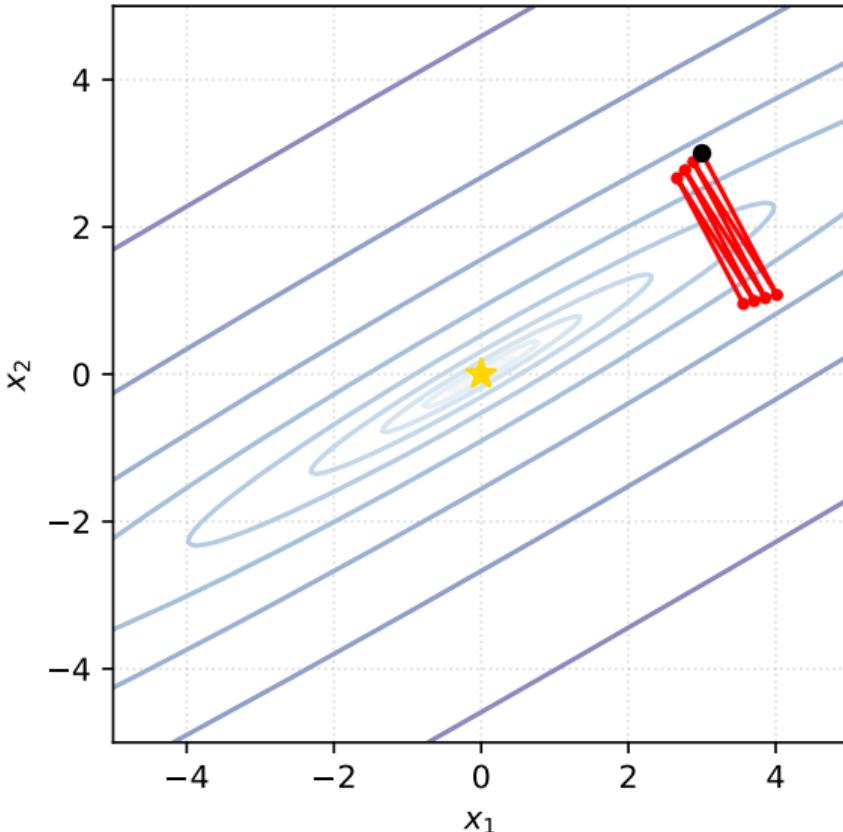
Число обусловленности κ

$$\kappa = 1.0$$



$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$$

$$\kappa = 100.0$$

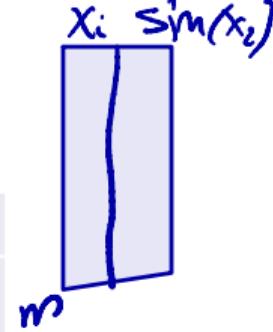
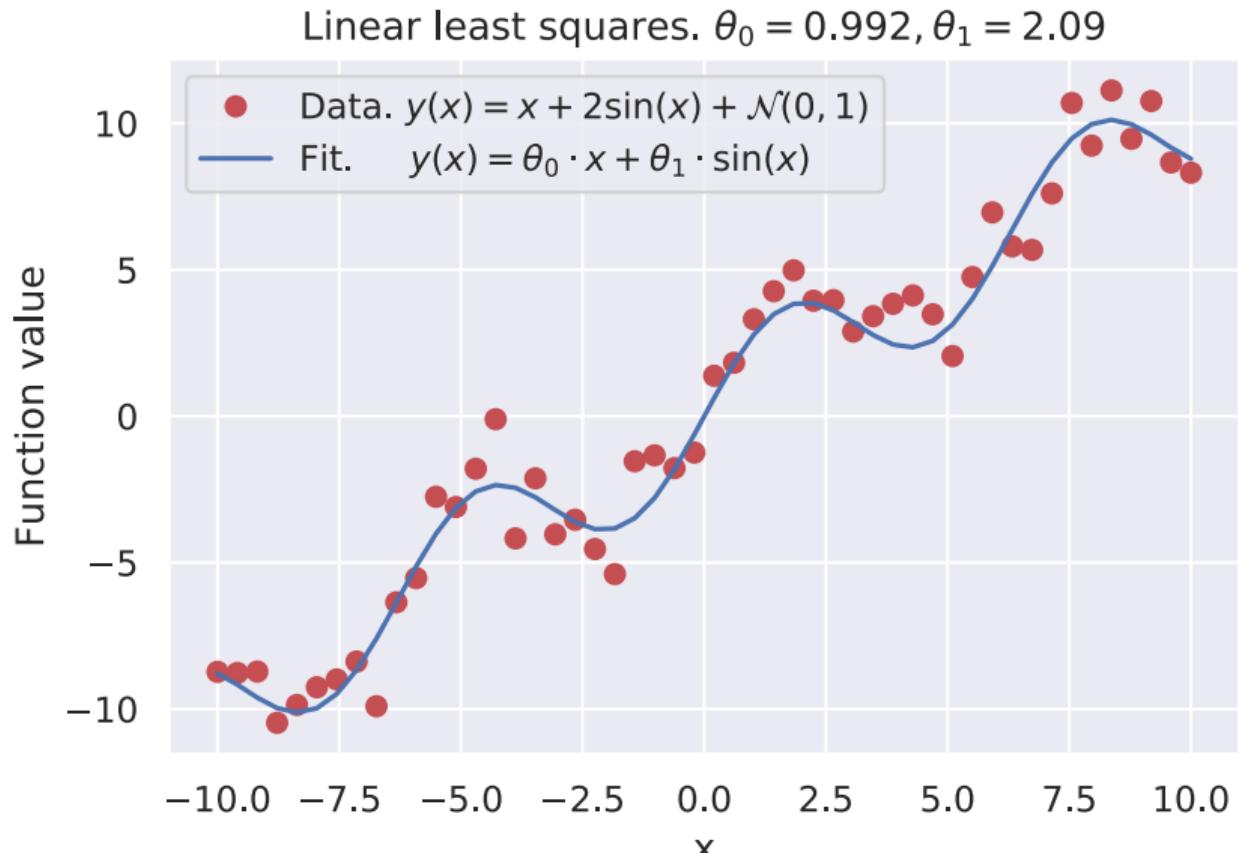


$$f \rightarrow \min_{x,y,z}$$

Линейные системы



Матричные разложения и линейные системы



Собственные векторы и собственные значения

Что такое собственный вектор?

- **Определение.** Вектор $x \neq 0$ называется **собственным вектором** квадратной матрицы A , если существует число λ такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

$$3\tilde{x}$$

$$A\tilde{x} = \lambda\tilde{x}$$

$$A \cdot 3\tilde{x} = \underline{\lambda \cdot 3\tilde{x}}$$

Что такое собственный вектор?

- **Определение.** Вектор $x \neq 0$ называется **собственным вектором** квадратной матрицы A , если существует число λ такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

- Число λ называется **собственным значением**. Иногда используется термин **собственная пара**.

ПАРА вида (λ, x) наз.
составной
парой

Что такое собственный вектор?

ЛЮБАЯ КВ. матрица

$$\ell^{i\pi} + 1 = 0$$

имеет n C3.

- Определение. Вектор $x \neq 0$ называется **собственным вектором** квадратной матрицы A , если существует число λ такое, что

$$Ax = \lambda x.$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

- Число λ называется **собственным значением**. Иногда используется термин **собственная пара**.
- Поскольку $A - \lambda I$ должна иметь нетривиальное ядро, собственные значения являются корнями характеристического полинома

полином
степени n



$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

$$(A - \lambda \cdot I)x = 0$$

характер. ур-ие для поиска C3
матрицы (A)

Спектральное разложение



Если матрица A размера $n \times n$ имеет n собственных векторов $s_i, i = 1, \dots, n$:

$$As_i = \lambda_i s_i,$$

то это можно записать как

$$S^{-1} \quad S^{-1}$$

$$AS = S\Lambda,$$

где $S = (s_1, \dots, s_n)$, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$,

или эквивалентно

$$A = S\Lambda S^{-1}.$$

Это называется **спектральным разложением** матрицы. Матрицы, которые могут быть представлены в виде спектрального разложения, называются **диагонализируемыми**.

$$A_{n \times n} = S_{n \times n} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix} S_{n \times n}^{-1}$$

Вычисление собственных значений и собственных векторов

Как вычислить собственные значения и собственные векторы?

Существуют два типа задач на собственные значения:

- вычисление всех собственных значений и собственных векторов или полного спектра (требуются все собственные значения и собственные векторы)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
$$(2-\lambda)(1-\lambda) = 0$$
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$
$$\left| \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = 0$$

$\lambda = 1$
 $\lambda = 2$

Вычисление собственных значений и собственных векторов

Как вычислить собственные значения и собственные векторы?

Существуют два типа задач на собственные значения:

- вычисление всех собственных значений и собственных векторов или полного спектра (требуются все собственные значения и собственные векторы)
- вычисление части спектра (минимальные/максимальные собственные значения, собственные значения в заданной области)

Вычисление собственных значений через характеристическое уравнение

Задача на собственные значения имеет вид

$$Ax = \lambda x,$$

или

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

следовательно, матрица $A - \lambda I$ имеет нетривиальное ядро и должна быть сингулярной.

Это означает, что определитель

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

- Уравнение называется **характеристическим уравнением**, а левая часть является полиномом степени n .

Вычисление собственных значений через характеристическое уравнение

Задача на собственные значения имеет вид

$$Ax = \lambda x,$$

или

$$(A - \lambda I)x = 0,$$

следовательно, матрица $A - \lambda I$ имеет нетривиальное ядро и должна быть сингулярной.

Это означает, что определитель

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

- Уравнение называется **характеристическим уравнением**, а левая часть является полиномом степени n .
- Полином n -й степени имеет n комплексных корней!

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

Собственные значения и характеристическое уравнение

- Теперь мы вернемся к собственным значениям.
- Характеристическое уравнение можно использовать для вычисления собственных значений, что приводит к **наивному** алгоритму:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

1. Вычислите коэффициенты полинома
2. Вычислите корни

Это хорошая идея?

Степенной метод

POWER METHOD

наиб. по модулю с 3

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.

Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные (докажите это!).

Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные (докажите это!).
- Степенной метод является самым простым методом для вычисления **наибольшего по модулю собственного значения**.

Степенной метод

- Мы часто интересуемся вычислением части спектра, например, наибольших или наименьших собственных значений.
- Также интересно отметить, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные (докажите это!).
- Степенной метод является самым простым методом для вычисления **наибольшего по модулю собственного значения**.
- Он также является нашим первым примером **итерационного метода и метода Крылова**.

Упражнение

$c \in \mathbb{R}$

Докажите, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные.

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$Ax = \lambda x$$

$n \times n \quad n \times 1 \quad 1 \times 1 \quad n \times 1$

если

$$\lambda \in \mathbb{R}: \quad \lambda^* = \lambda$$

$$\lambda = \operatorname{Re}(\lambda) + i \cdot \operatorname{Im}(\lambda)$$

$$\lambda^* = \operatorname{Re}(\lambda) - i \cdot \operatorname{Im}(\lambda)$$

Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные.

Решение.

- Пусть λ - собственное значение матрицы A , а $x \neq 0$ - собственный вектор, тогда:

$$\begin{aligned} x^* Ax &= \lambda x \\ x^* Ax &= \lambda x^* x \end{aligned}$$

$$x^* x = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные.

Решение.

- Пусть λ - собственное значение матрицы A , а $x \neq 0$ - собственный вектор, тогда:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^* Ax = \lambda x^* x$$

- Так как $A = A^*$, выражение слева эрмитово (вещественное) число, значит:

$$(x^* Ax)^* = x^* A^* x = x^* Ax$$

$$(\lambda x^* x)^* = \lambda^* x^* x = (x^* Ax)^* = \lambda x^* x$$

$$(Ax)^* \cdot x^* x = x^* A^* x$$

$$\lambda x^* x = x^* Ax = x^* A^* x = \lambda^* x^* x$$

$$x^* x \neq 0$$

$$\lambda = \lambda^*$$

Упражнение

Докажите, что для эрмитовых матриц ($A = A^*$) собственные значения всегда действительные.

Решение.

1. Пусть λ - собственное значение матрицы A , а $x \neq 0$ - собственный вектор, тогда:

$$Ax = \lambda x$$

$$x^*Ax = \lambda x^*x$$

2. Так как $A = A^*$, выражение слева - эрмитово (вещественное) число, значит:

$$(x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*Ax$$

$$(\lambda x^*x)^* = \lambda^*x^*x = (x^*Ax)^* = \lambda x^*x$$

3. Поскольку $x^*x > 0$, отсюда следует:

$$\lambda = \lambda^* \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и
находит наибольшее по модулю собственное
значение матрицы A .

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

$$x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$



где $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и λ_1 является наибольшим собственным значением и v_1 является соответствующим собственным вектором.



$$x_1 = \frac{Ax_0}{\|Ax_0\|}$$

$$x_2 = \frac{Ax_1}{\|Ax_1\|}$$

⋮

⋮

⋮

Степенной метод

- Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

- Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .
- Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и λ_1 является наибольшим собственным значением и v_1 является соответствующим собственным вектором.

- На $(k + 1)$ -й итерации приближение к λ_1 может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

$$Ax = \lambda x \quad | \quad x^T.$$

$$x^T A x = \lambda x^T x$$

$$\lambda = \frac{x^T A x}{x^T x}$$

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и λ_1 является наибольшим собственным значением и v_1 является соответствующим собственным вектором.

4. На $(k + 1)$ -й итерации приближение к λ_1 может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что $\lambda^{(k+1)}$ не требуется для $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения

ошибки на каждой итерации:
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|.$

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и λ_1 является наибольшим собственным значением и v_1 является соответствующим собственным вектором.

4. На $(k + 1)$ -й итерации приближение к λ_1 может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что $\lambda^{(k+1)}$ не требуется для $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения ошибки на каждой итерации:
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|.$

6. Скорость алгоритма геометрическая (линейная),
но показатель сходимости равен q^k , где
$$q = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1, \text{ для } \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \text{ и } k - \text{число итераций.}$$

С3

Степенной метод

1. Задача на собственные значения

$$Ax = \lambda x, \quad \|x\|_2 = 1 \text{ для стабильности.}$$

может быть переписана как **итерационный метод**.

2. Этот метод называется **степенным методом** и находит наибольшее по модулю собственное значение матрицы A .
3. Степенной метод имеет вид

$$x_{k+1} = Ax_k, \quad x_{k+1} := \frac{x_{k+1}}{\|x_{k+1}\|_2}$$

и

$$x_{k+1} \rightarrow v_1,$$

где $Av_1 = \lambda_1 v_1$ и λ_1 является наибольшим собственным значением и v_1 является соответствующим собственным вектором.

4. На $(k + 1)$ -й итерации приближение к λ_1 может быть найдено как

$$\lambda^{(k+1)} = (Ax_{k+1}, x_{k+1}),$$

5. Заметим, что $\lambda^{(k+1)}$ не требуется для $(k + 2)$ -й итерации, но может быть полезно для измерения ошибки на каждой итерации:
 $\|Ax_{k+1} - \lambda^{(k+1)}x_{k+1}\|.$
6. Скорость алгоритма геометрическая (линейная), но показатель сходимости равен q^k , где
 $q = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$, для $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ и k - число итераций.
7. Это означает, что сходимость может быть произвольно малой. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть 2×2 диагональную матрицу.

Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы

Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет $\mathcal{O}(n)$ matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших n .

Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет $\mathcal{O}(n)$ matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших n .
- Сходимость может быть медленной

Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

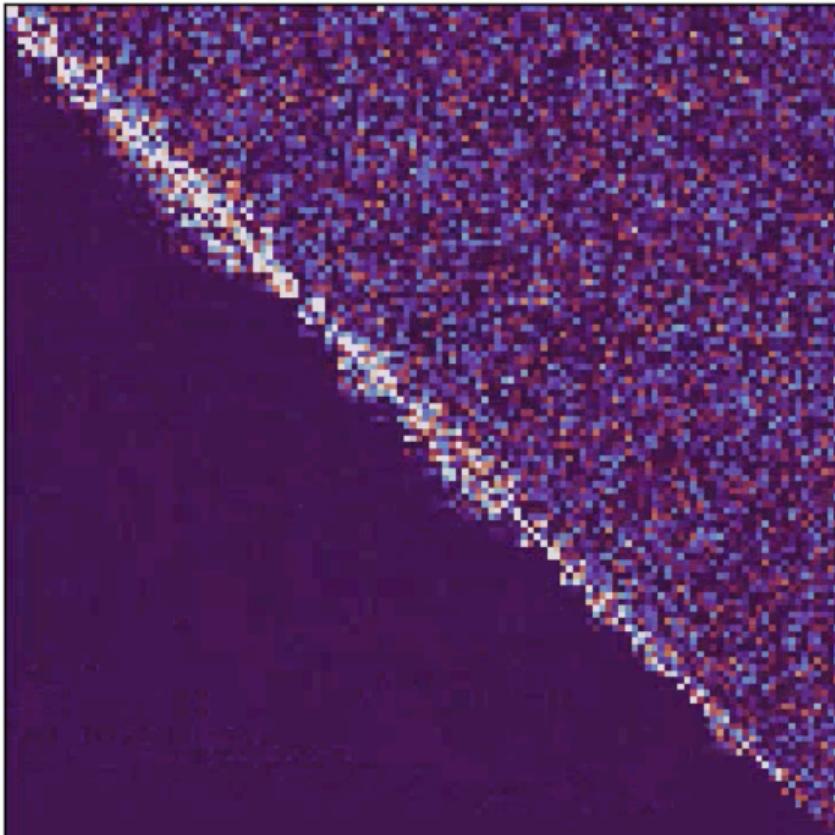
- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет $\mathcal{O}(n)$ matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших n .
- Сходимость может быть медленной
- Если нужна только грубая оценка, достаточно нескольких итераций

Вещи, которые стоит запомнить о степенном методе

- Степенной метод дает оценку наибольшего по модулю собственного значения или спектрального радиуса данной матрицы
- Один шаг требует одного матрично-векторного произведения. Если матрица позволяет $\mathcal{O}(n)$ matvec (например, она разрежена), то степенной метод можно использовать для больших n .
- Сходимость может быть медленной
- Если нужна только грубая оценка, достаточно нескольких итераций
- Решение вектор находится в **подпространстве Крылова** $\{x_0, Ax_0, \dots, A^k x_0\}$ и имеет вид $\mu A^k x_0$, где μ является нормирующим коэффициентом.

В следующих сериях: QR-алгоритм

Случайная матрица



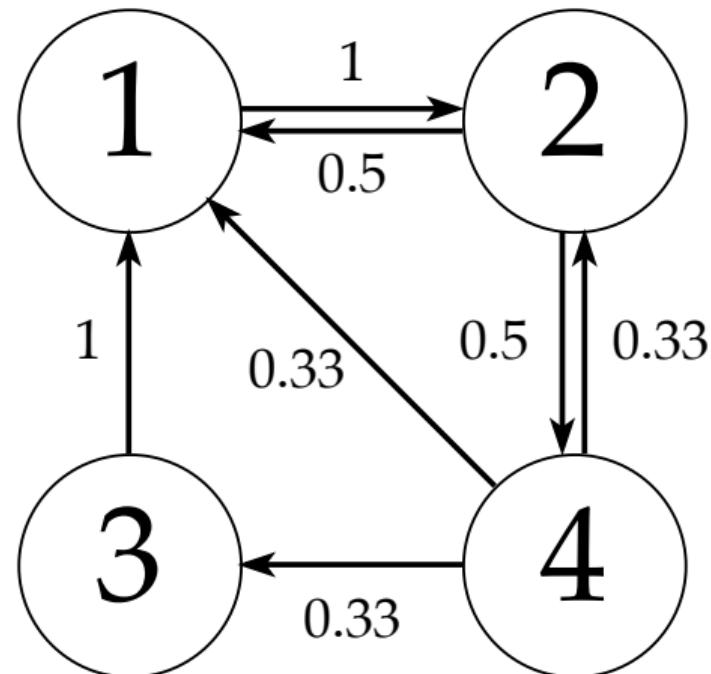
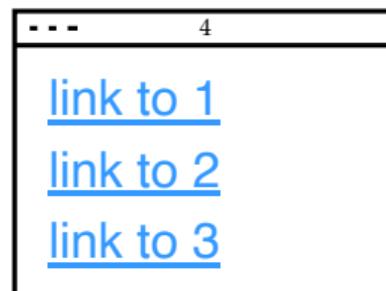
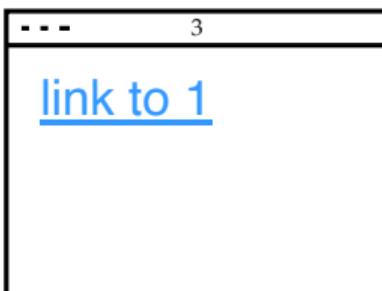
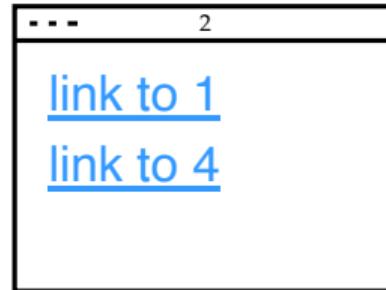
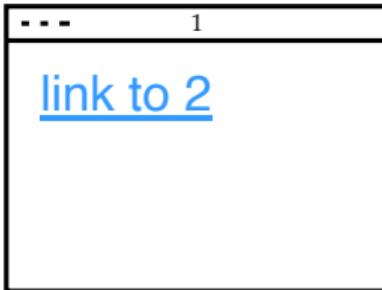
Симметричная матрица @fminxyz



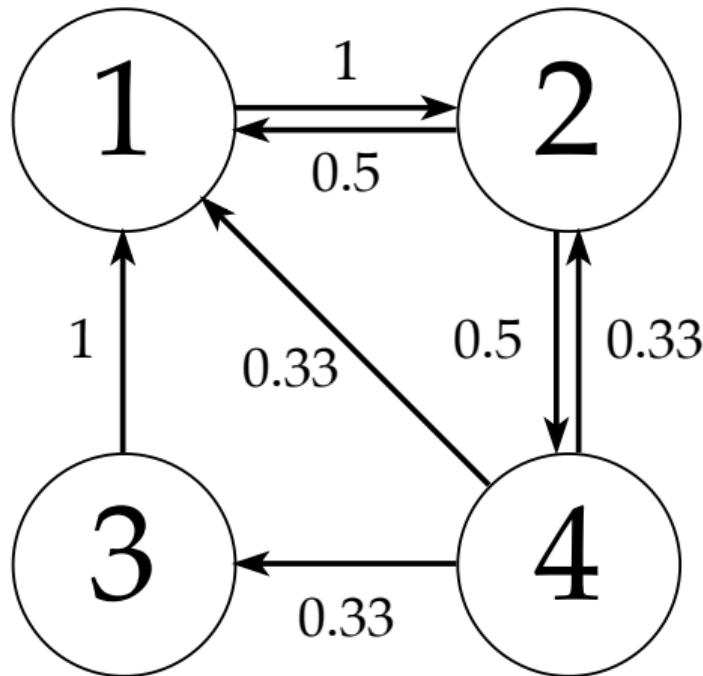
PageRank

PageRank

Рассмотрим простой пример. Предположим, что у нас есть 4 веб-сайта с некоторыми ссылками. Наша цель --- понять, насколько важен каждый из этих сайтов. Очевидно, что мы можем переформулировать эту проблему в терминах ориентированных графов. Здесь каждый узел представляет веб-сайт, а каждое ребро описывает ссылку с одного сайта на другой.



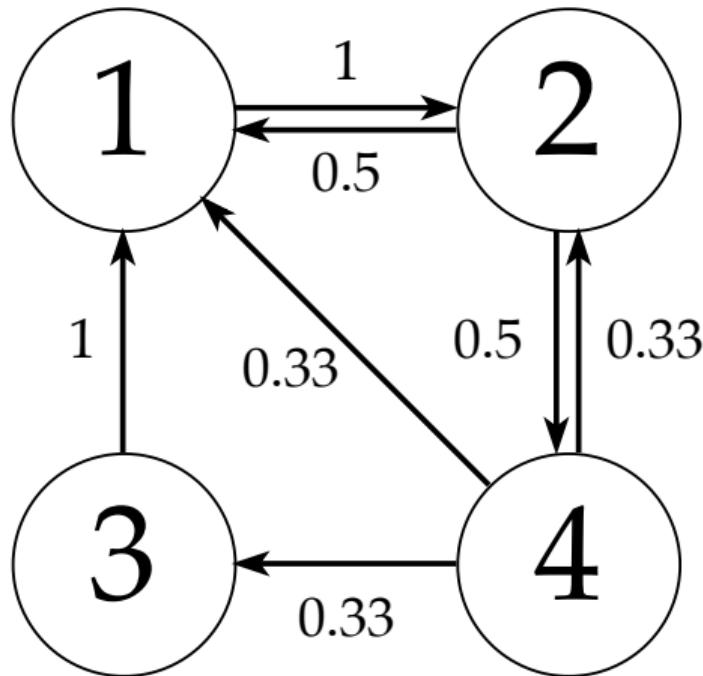
PageRank



Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PageRank



Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов A:

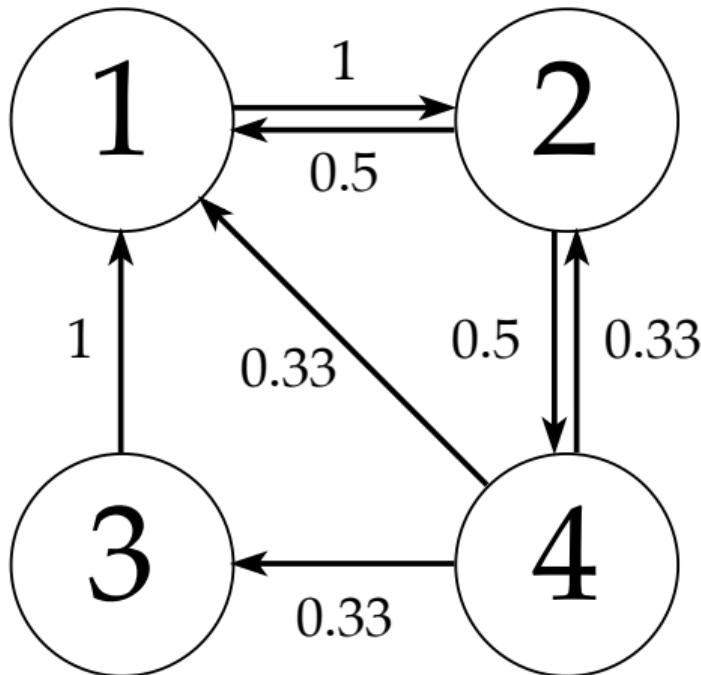
$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Давайте введём вектор PageRank x , который описывает важность каждого веб-сайта.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, где x_i - важность i -го веб-сайта

A X

PageRank



Таким образом, мы можем ввести матрицу переходов A :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Давайте введём вектор PageRank x , который описывает важность каждого веб-сайта.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, где x_i - важность i -го веб-сайта

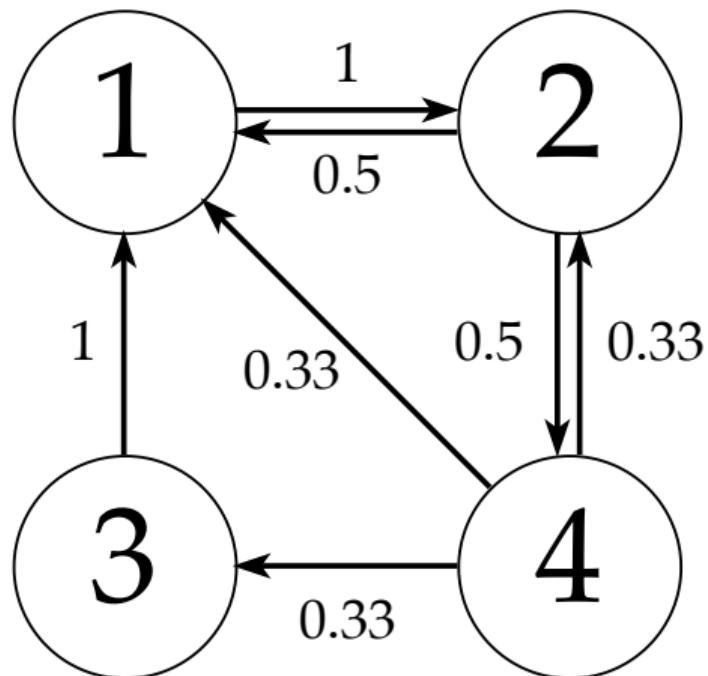
Предположим, что начальная важность равномерно распределена между всеми узлами. Тогда:

$$x^0 = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25)^T$$

Каждая входящая ссылка увеличивает важность узла. Таким образом, этот обновление может быть записано как умножение матрицы на вектор:

$$x^1 = A \cdot x^0 = (0.46, 0.33, 0.08, 0.125)^T$$

PageRank



Повторяя те же операции, мы можем легко увидеть сходимость:

$$\mathbf{x}^2 = A \cdot \mathbf{x}^1 = (0.29, 0.50, 0.04, 0.17)^T$$

$$\mathbf{x}^3 = A \cdot \mathbf{x}^2 = (0.35, 0.35, 0.06, 0.25)^T$$

...

$$\mathbf{x}^{14} = A \cdot \mathbf{x}^{13} = (0.33, 0.40, 0.07, 0.20)^T$$

$$\mathbf{x}^{15} = A \cdot \mathbf{x}^{14} = (0.33, 0.40, 0.07, 0.20)^T$$

Выполните упражнение PageRank.