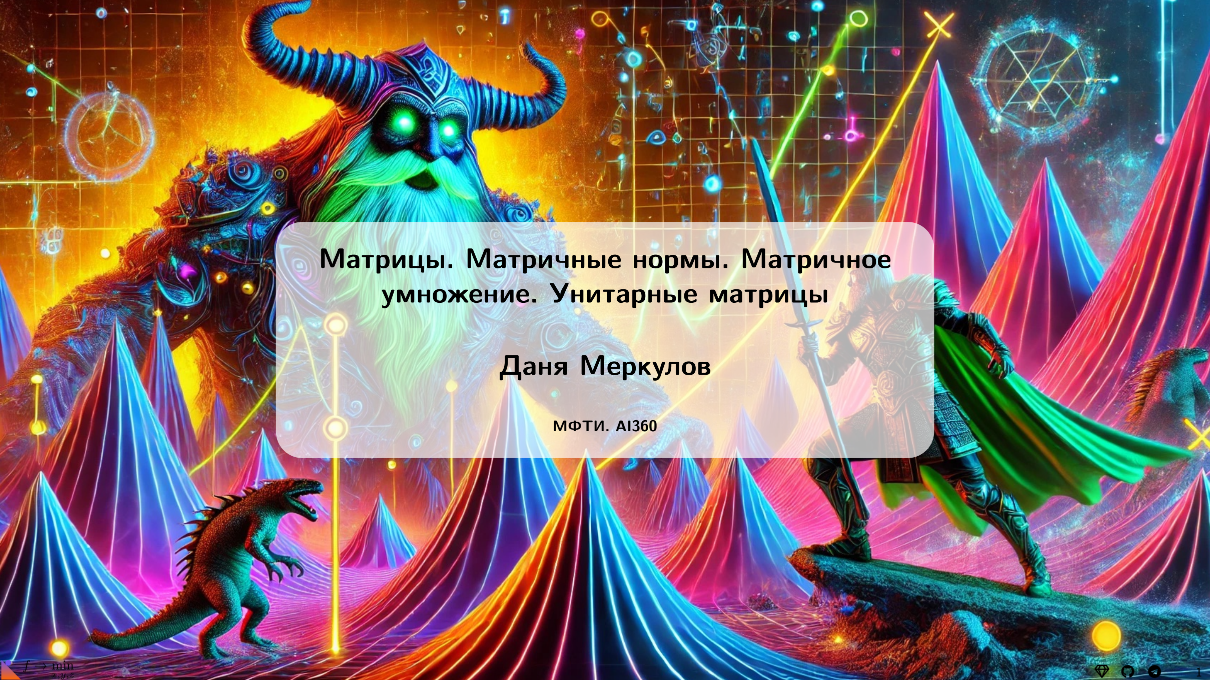

Матрицы. Матричные нормы. Матричное умножение. Унитарные матрицы

Даня Меркулов

МФТИ. AI360

Базовые понятия линейной алгебры

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$.

$$
x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}
$$

Векторы и матрицы

Мы будем считать, что все векторы являются столбцами по умолчанию. Пространство векторов длины n обозначается $\mathbb{R}^n$, а пространство вещественных $m \times n$ матриц обозначается $\mathbb{R}^{m \times n}$.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^n, x_i \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Аналогично, если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ мы обозначаем транспонирование как $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Мы будем писать $x \geq 0$ и $x \neq 0$ для обозначения покомпонентного неравенства.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

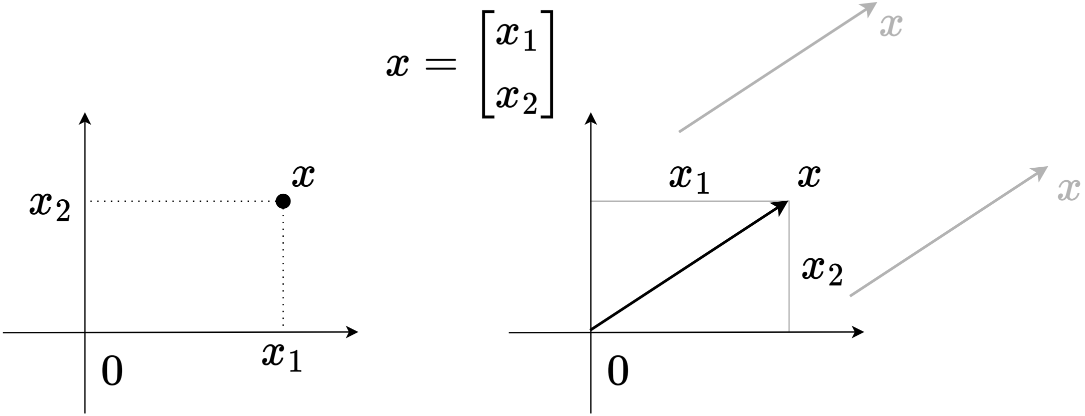

Рис. 1: Эквивалентные представления вектора

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T A x \geq (\leq) 0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+} (\mathbb{S}^n_{-})$.

> **Question**
>
> Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T A x \geq (\leq) 0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+} (\mathbb{S}^n_{-})$.

> **Question**
>
> Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

> **Question**
>
> Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

Матрица A называется симметричной, если $A = A^T$. Обозначается как $A \in \mathbb{S}^n$ (множество квадратных симметричных матриц размерности n). Заметим, что только квадратная матрица может быть симметричной по определению.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) определенной**, если для всех $x \neq 0 : x^T A x > (<) 0$. Обозначается как $A \succ (\prec) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{++} (\mathbb{S}^n_{--})$.

Матрица $A \in \mathbb{S}^n$ называется **положительно (отрицательно) полуопределенной**, если для всех $x : x^T A x \geq (\leq) 0$. Обозначается как $A \succeq (\preceq) 0$. Множество таких матриц обозначается как $\mathbb{S}^n_{+} (\mathbb{S}^n_{-})$.

Question

Верно ли, что положительно определенная матрица имеет все положительные элементы?

Question

Верно ли, что если матрица симметрична, то она положительно определена?

Question

Верно ли, что если матрица положительно определена, то она симметрична?

Умножение матриц

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и B --- матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C --- матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Умножение матриц

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и B --- матрица размера $n \times p$, и пусть произведение AB задается как:

$$C = AB$$

тогда C --- матрица размера $m \times p$, с элементом (i, j) задаваемым как:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^3)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Question

Можно ли умножить две матрицы быстрее, чем за $\mathcal{O}(n^3)$? Как насчет $\mathcal{O}(n^2)$, $\mathcal{O}(n)$?

Умножение матрицы на вектор

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и x --- вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и x --- вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и x --- вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$

Умножение матрицы на вектор

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и x --- вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B --- коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)

Умножение матрицы на вектор

Пусть A --- матрица размера $m \times n$, и x --- вектор длины n, тогда i-й компонент произведения:

$$z = Ax$$

определяется как:

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$$

Эта операция в наивной реализации требует $\mathcal{O}(n^2)$ арифметических операций, где n --- наибольший размер матриц.

Заметим, что:

- $C = AB \quad C^T = B^T A^T$
- $AB \neq BA$
- $e^A = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$
- $e^{A+B} \neq e^A e^B$ (но если A и B --- коммутирующие матрицы, то есть $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$)
- $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$

Нормы

Норма --- это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Нормы

Норма --- это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)

Нормы

Норма --- это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма --- это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Нормы

Норма --- это **количественная мера маленькости вектора** и обычно обозначается как $\|x\|$.

Норма должна удовлетворять определенным свойствам:

1. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (неравенство треугольника)
3. Если $\|x\| = 0$ то $x = 0$

Расстояние между двумя векторами определяется как:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Наиболее широко используемой нормой является **евклидова норма**:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

которая соответствует расстоянию в нашей повседневной жизни. Если векторы имеют комплексные элементы, мы используем их модуль. Евклидова норма, или 2-норма, является подклассом важного класса p-норм:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

p-норма вектора

Существуют два очень важных частных случая. Бесконечность норма, или норма Чебышёва, определяется как максимальный абсолютный элемент:

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

L_1 норма (или **манхэттенское расстояние**) определяется как сумма модулей элементов вектора:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

L_1 норма играет очень важную роль: она связана с методами **compressed sensing**, которые стали одной из популярных тем исследований в середине 00-х. Код для изображения ниже доступен *здесь:*. Также можно посмотреть *этот* видео.

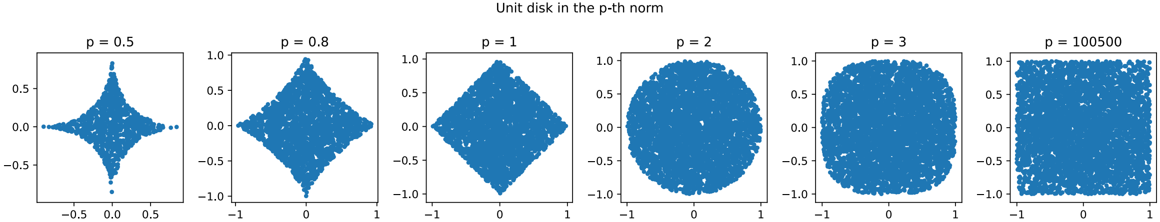

Рис. 2: Шары в разных нормах на плоскости

Матричные нормы

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

  Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

Матричные нормы

$\|\cdot\|$ называется **матричной нормой**, если она является векторной нормой на векторном пространстве $n \times m$ матриц:

1. $\|A\| \geq 0$ и если $\|A\| = 0$, то $A = O$
2. $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (неравенство треугольника)

- Дополнительно, некоторые нормы могут удовлетворять **свойству субмультипликативности**:

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

  Эти нормы называются **субмультипликативными нормами**.

- Пример несубмультипликативной нормы --- норма Чебышёва:

$$\|A\|_C = \max_{i,j} |a_{ij}|$$

Пример

Придумайте контрпример

Покажите, что норма Чебышёва не является субмультипликативной.

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

Нормы матриц

В некотором смысле нет большой разницы между матрицами и векторами (можно векторизовать матрицу), таким образом вводится простейшая норма матрицы **Фробениуса**:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Спектральная норма, $\|A\|_2$ является одной из наиболее широко используемых норм матриц (вместе с нормой Фробениуса).

$$\|A\|_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2},$$

Её нельзя вычислить непосредственно из элементов, используя простую формулу, как норму Фробениуса, однако существуют эффективные алгоритмы для ее вычисления. Она непосредственно связана с **сингулярным разложением** (SVD) матрицы. Она удовлетворяет следующему свойству:

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

где $\sigma_1(A)$ является наибольшим сингулярным значением матрицы A.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм --- это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_{\alpha}}{\|x\|_{\beta}},$$

где $\|\cdot\|_{\alpha}$ и $\|\cdot\|_{\beta}$ являются **векторными нормами**.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм --- это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha \to \beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.
- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм --- это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha \to \beta} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.
- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.
- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.

Операторные нормы

- Наиболее важный класс матричных норм --- это класс **операторных норм**. Они определяются как

$$\|A\|_{\alpha\to\beta} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_\alpha}{\|x\|_\beta},$$

  где $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ являются **векторными нормами**.
- Легко проверить, что они субмультипликативны, если $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta$. Иначе они не субмультипликативны, придумайте пример.
- **Норма Фробениуса** является матричной нормой, но не является операторной нормой, т.е. нельзя найти $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ такие, чтобы они её порождали.
- Это нетривиальный факт и общий критерий матричной нормы для того, чтобы быть операторной нормой можно найти в Теореме 6 и следствии 4.

Пример

Question

Покажите, что операторная норма $\|\cdot\|_{\alpha \to \alpha}$ является субмультипликативной.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм --- это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|.$

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм --- это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$
- $p = 2,$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.

Матричные p-нормы

Важный частный случай операторных норм --- это матричные p-нормы, которые определяются для $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_\beta = \|\cdot\|_p$.

Среди всех p-норм три наиболее часто используемые нормы:

- $p = 1, \quad \|A\|_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^n |a_{ij}|.$
- $p = 2,$ спектральная норма, обозначаемая как $\|A\|_2$.
- $p = \infty, \quad \|A\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^m |a_{ij}|.$

Пример

Покажите, что $\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$.

Пример

Покажите, что $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^m |a_{ij}|$.

Скалярное произведение

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между векторами x и y из $\mathbb{R}^n$ определяется как:

$$
\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i = y^T x = \langle y, x \rangle
$$

Здесь x_i и y_i являются i-ми компонентами соответствующих векторов.

Example

Докажите, что можно перемещать матрицу внутри скалярного произведения с транспонированием: $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$ и $\langle x, yB \rangle = \langle xB^T, y \rangle$

Скалярное произведение матриц

Стандартное **скалярное (внутреннее) произведение** между матрицами X и Y из $\mathbb{R}^{m \times n}$ определяется как:

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X^T Y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} Y_{ij} = \text{tr}(Y^T X) = \langle Y, X \rangle$$

Question

Существует ли связь между нормой Фробениуса $\| \cdot \|_F$ и скалярным произведением между матрицами $\langle \cdot, \cdot \rangle$?

Пример

Упростите следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{n} \langle S^{-1} a_i, a_i \rangle,$$

где $S = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i a_i^T, a_i \in \mathbb{R}^n, \det(S) \neq 0$

Ортогональные матрицы

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n --- единичная матрица $n \times n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n --- единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n --- единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n --- единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ ---- матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$

Ортогональные (унитарные) матрицы

- Пусть U --- матрица размера $n \times n$, и $\|Uz\|_2 = \|z\|_2$ для всех z.
- Это может произойти **тогда и только тогда**, когда

$$U^T U = I_n,$$

где I_n --- единичная матрица $n \times n$.

- Квадратная матрица размера $n \times n$ называется **ортогональной**, если

$$U^T U = U U^T = I_n,$$

что означает, что столбцы и строки ортогональной матрицы образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$.

- Для прямоугольных матриц размера $m \times n$ $(n \neq m)$ только одно из равенств может выполняться
  - $U^T U = I_n$ ---- матрица U называется **матрицей с ортогональными столбцами** для $m > n$
  - $U U^T = I_m$ ---- матрица U называется **матрицей с ортогональными строками** для $m < n$