В. Г. Жадан

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ. ЧАСТЬ III ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ

Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
высших учебных заведений Российской Федерации
по образованию в области
прикладных математики и физики
в качестве учебного пособия по направлению «Прикладные математика и физика»

МОСКВА
МФТИ
2017

30 апреля 2024 г.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73
Ж 15

Рецензенты:
Кафедра исследования операций факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова
(И.о. зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор *А. А. Васин*)
Доктор физико-математических наук, профессор *А. В.Лотов*

Жадан, В. Г.
Ж 15 Методы оптимизации. Часть III. Дополнительные главы: учебное пособие / В. Г. Жадан. – М.: МФТИ, 2017. – 243 с.
ISBN 978–5–7417–0514–8

Книга является учебным пособием по теории и численным методам решения вариационных неравенств, задач дополнительности и задач полуопределенного программирования. Она написана на основе материалов курса «Методы оптимизации», читаемого автором в течении несколько лет для студентов факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института.

Для студентов, специализирующихся в области прикладной математики. Может быть использовано для самостоятельного изучения перечисленных разделов теории оптимизации.

УДК 519.8(075)
ББК 22.18я73

ISBN 978–5–7417–0514–8

Оглавление

Предисловие

Данная книга написана на основе семестрового курса лекций, который читался автором в течении нескольких лет группе студентов факультета управления и прикладной математики Московского физико-технического института (ГУ), специализирующихся в области управления, исследования операций и экономического моделирования. Курс служит дополнением к основному годовому курсу "Методы оптимизации". Его цель заключается в желании познакомить студентов с некоторыми более общими постановками оптимизационных задач в конечномерных евклидовых пространствах. Были выбраны задачи дополнительности, вариационные неравенства и линейные задачи полуопределенного программирования. В последние десятилетия интерес к таким задачам значительно вырос. Это связано с возможностью их применения для исследования и решения экономических, транспортных и других проблем, а также поиска равновесных состояний в различных приложениях.

Поскольку результаты, полученные к настоящему времени и относящиеся как к области задач дополнительности, так и к области полуопределенного программирования, весьма обширны и вполне заслуживают того, чтобы им был посвящен отдельный курс, в пособии даются только начальные теоретические сведения о перечисленных задачах и рассматриваются лишь некоторые из методов их решения. Обоснование сходимости большинства численных методов оказываются достаточно трудоемкими. Однако они приводятся с целью дать студентам возможность ознакомиться при самостоятельной работе с подходами, которые в них заложены.

При подготовке иллюстративного материала большая помощь была оказана В.У. Малковой, за что автор приносит ей большую благодарность. Автор признателен также И.Е.Капорину за сделанные полезные замечания.

Введение

В учебном пособии рассматриваются задачи, которые можно считать некоторыми обобщениями классических оптимизационных постановок или тесно примыкают к ним. Во-первых, это *вариационные неравенства* и *задачи дополнительности*. Во-вторых, это линейные *задачи полуопределенного программирования*. К данным постановкам сводится решение многих экстремальных и равновесных задач, включая задачи геометрического характера, а также комбинаторной и дискретной оптимизации.

Задачи дополнительности состоят в нахождении пары ортогональных между собой векторов из неотрицательного ортанта пространства, связанных между собой функциональной зависимостью. Если данная зависимость линейная, то мы имеем дело с линейной задачей дополнительности, в противном случае — с нелинейной задачей дополнительности. Задачи дополнительности являются по существу задачами нахождения неотрицательных решений систем линейных и нелинейных уравнений специального вида, в них уже отсутствует целевая функция. Но именно в таком виде формулируются условия оптимальности во многих задачах условной минимизации, особенно при наличие базового допустимого множества, например, неотрицательного ортанта пространства. Но это касается не только оптимизационных задач. Оказывается, что необходимые условия, которые должны выполняться в решении ряда игровых задач и в задачах поиска равновесия также могут быть представлены в форме задачи дополнительности. Этим и объясняется интерес к задачам дополнительности — можно на единой основе строить численные методы нахождения решений разнообразных классов задач, включая оптимизационные.

Задачи дополнительности являются важным частным случаем вариационных неравенств. Хотя первоначально вариационные неравенства появились в вариационном исчислении, но конечномерные вариационные неравенства обязаны своим происхождением во многом благодаря опять же задачам математического программирования. В [11] уже приводились условия оптимальности в форме вариационного неравенства для задачи минимизации дифференцируемой функции на выпуклом множестве.

Для решения задач дополнительности предложено большое количество численных методов различных типов. Среди них особое место принадлежит итерационным методам, относящихся главным образом к классу *методов внутренней точки*. Имеются и другие методы, в частности, основанные на сведении решения задач дополнительности к решению систем уравнений с использованием специальных функций дополнительности. Для линейных задач дополнительности разработаны также методы симплексного типа.

Другим важным классом задач, рассмотренным в пособии, являются линейные задачи полуопределенного программирования. Такие задачи по своей сути оптимизационные и их можно трактовать как обобщения задач линейного программирования. Отличие состоит в том, что теперь переменные принадлежат не векторным пространствам, а матричным пространствам, более конкретно, *пространству симметричных положительно полуопределенных матриц*. Требуется найти такую положительно полуопределенную матрицу, которая минимизировала линейную целевую функцию и удовлетворяла дополнительно линейным ограничениям типа равенства или неравенства. Интерес к задачам полуопределенного программирования в течении более, чем двух последних десятилетий, огромен. Данные задачи играют существенную роль в таких областях как комбинаторная и квадратичная оптимизация, структурная оптимизация, теория управления, оптимизационные задачи на собственные числа.

Хотя впервые формулировка линейной задачи полуопределенного программирования была дана сравнительно давно (Р. Беллман и К. Фан, 1963 г.), основные результаты в данной области были получены после появления методов внутренней точки для линейного программирования и возможности их обобщения для решения задач полуопределенного программирования. Существенный толчок в развитии таких методов, в том числе полиномиальных методов, дали работы А.С.Немировского и Ю.Е.Нестерова. Наиболее эффективными среди них оказались прямо-двойственные методы, главным образом, методы центрального пути.

Цель настоящего учебного пособия дать студентам первоначальные сведения о теории и численных методах решения конечномерных вариационных неравенствах и задач дополнительности, а также о линейных задач полуопределенного программирования. Разумеется, временные рамки одного семестра не позволяют это сделать с надлежащей полнотой. В пособии совсем не затрагиваются более расширенные постановки вариационных неравенств, такие, как например, обобщенные вариационные неравенства, смешанные вариационные неравенства, вариационно-подобные неравенства.

Пособие состоит из четырех глав. В главе 1 рассматривается линейная задача дополнительности. Даются краткие сведения о теории таких задач и приводятся два численных метода, один из которых является методом симплексного типа. Глава 2 посвящена нелинейным задачам дополнительности и вариационным неравенствам. Здесь опять же помимо теоретических вопросов, касающихся существования и единственности решений, затрагиваются некоторые возможные подходы к их численному нахождению. В главах 3 и 4 излагаются некоторые аспекты теории линейных задач полуопределенного программирования, а также численные методы их решения, обобщающие соответствующие методы линейного программирования.

Литература по всем трем типам задач (линейные и нелинейные задачи дополнительности, вариационные неравенства, линейные задачи полуопределенного программирования) в настоящее время огромная. Издано много прекрасных монографий, правда, в основном на английском языке. При написании пособия автор использовал книги [34] и [35], где рассматриваются задачи дополнительности и вариационные неравенства. Материал по линейным задачам полуопределенного программирования заимствован главным образом из обширного справочника [54], использовались также книги [41], [44], [47].

Список основный обозначений

$J^n = [1:n]$ — множество целых чисел от 1 до n;

$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

$\mathbb{R}_+$ — множество неотрицательных вещественных чисел;

$\mathbb{R}_{++}$ — множество положительных вещественных чисел;

$\mathbb{R}^n$ — n-мерное пространство вещественных векторов;

$\mathbb{R}^n_+ = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \ge 0,\ 1 \le i \le n\right\}$ — неотрицательный ортант;

$\mathbb{R}^n_{++} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i > 0,\ 1 \le i \le n\right\}$ — положительный ортант;

$\mathbb{R}^n_- = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i \le 0,\ 1 \le i \le n\right\}$ — неположительный ортант;

$\mathbb{R}^n_{--} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ x^i < 0,\ 1 \le i \le n\right\}$ — отрицательный ортант;

$\mathbb{R}^n_{\uplus} = \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0_n\}$;

$\mathbb{R}^n_{\oplus} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \max_{i \in J^n} x^i \ge 0\}$;

$\mathbb{R}^n_{\oplus\oplus} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ \max_{i \in J^n} x^i > 0\}$;

x_+ — вектор с координатами $x^i_+ = \max\,[x^i, 0]$, $1 \le i \le n$;

x_- — вектор с координатами $x^i_- = \min\,[x^i, 0]$, $1 \le i \le n$;

$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i$ — евклидово скалярное произведение;

$0_n = [0, \ldots, 0]^T$ — нулевой n-мерный вектор;

0_{mn} — нулевая матрица размера $m \times n$;

I_n — единичная матрица порядка n;

$D(x)$ — диагональная матрица с вектором x на диагонали;

$\|x\|$ — норма вектора x (как правило, если не дано уточнения, имеется в виду евклидова норма);

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x^i|^p\right)^{1/p}$ — p-я гельдеровская норма вектора x, $1 \le p < \infty$ (при $p = 2$ совпадает с евклидовой нормой);

$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x^i|$ — чебышовская норма вектора x (называемая также максимальной или кубической нормой);

$\|A\|$ — норма матрицы A (согласованная с нормой в пространствах векторов).

Остальные обозначения вводятся по ходу изложения материала.

Глава 1

Линейные задачи дополнительности

1.1. Постановка и источники линейных задач дополнительности

1.1.1. Постановка задачи

Линейная задача дополнительности (ЛЗД) состоит в отыскании решения следующей системы равенств и неравенств:

$$\begin{array}{rcl} x & \geq & 0_n, \\ Mx + q & \geq & 0_n, \\ x^T(Mx + q) & = & 0, \end{array} \tag{1.1.1}$$

где M — квадратная матрица порядка n и q — n-мерный вектор. Ее принято обозначать $LCP(q, M)$, подчеркивая тем самым зависимость решения от матрицы M и от вектора q. Под *размерностью* задачи $LCP(q, M)$ понимают размерность вектора x, т.е. число n. Если в (1.1.1) вектор $q = 0_n$, то о такой задаче говорят как об *однородной* ЛЗД.

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ такой, что $x \geq 0_n$ и $Mx + q \geq 0_n$, называется *допустимым.* Совокупность всех допустимых точек составляет *допустимое множество* в задаче (1.1.1) и обозначается

$$X = X(q, M) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \ x \geq 0_n, \ Mx + q \geq 0_n \right\}.$$

Линейная задача дополнительности $LCP(q, M)$ называется *допустимой*, если множество $X(q, M)$ не пусто.

Вектор $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий равенствам

$$x^i(Mx+q)^i = 0, \quad i \in J^n, \tag{1.1.2}$$

называется *комплементарным.* Таким образом, решение ЛЗД состоит в нахождении такого вектора $x_* \in \mathbb{R}^n$, который одновременно являлся бы и допустимым и комплементарным. Множество всех решений $LCP(q, M)$ будем обозначать $X_*(q, M)$ (или просто X_*).

ЛЗД (1.1.1) можно представить в другой эквивалентной формулировке, если ввести дополнительный n-мерный вектор y, а именно,

$$\begin{array}{l} y = Mx + q, \\ x^T y = 0, \\ x \geq 0_n, \quad y \geq 0_n. \end{array} \tag{1.1.3}$$

В силу неотрицательности всех компонент векторов x и y, второе равенство в (1.1.3) распадается на n равносильных ему отдельных равенств: $x^i y^i = 0, \quad i \in J^n$, аналогичных (1.1.2). Хотя в (1.1.3) содержится б´льшее число переменных, чем в исходной задаче (1.1.1), в ряде случаев данная постановка может оказаться удобнее, особенно для теоретического исследования.

Нетрудно видеть, что $LCP(q, M)$ заведомо имеет тривиальное решение $x_* = 0_n$ при любой матрице M , если у вектора q все компоненты неотрицательны. В частности, однородная ЛЗД всегда имеет решение. Более того, если в однородной ЛЗД вектор x_* является решением, то и любой вектор вида λx_*, где $\lambda \geq 0$, также является её решением.

1.1.2. Источники линейных задач дополнительности

Приведем ряд постановок задач из математического программирования и теории игр, которые могут быть представлены также и как ЛЗД.

Задача линейного программирования.

Рассмотрим задачу линейного программирования в стандартной форме

$$\begin{array}{rcl} c^T z & \longrightarrow & \min \\ Az & \geq & b, \\ z & \geq & 0_n, \end{array} \tag{1.1.4}$$

где A — $m \times n$ матрица, $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Двойственная к (1.1.4) задача имеет вид

$$\begin{array}{rcl} b^T u & \longrightarrow & \max \\ A^T u & \leq & c, \\ u & \geq & 0_m. \end{array} \tag{1.1.5}$$

Согласно теореме двойственности, задачи (1.1.4) и (1.1.5) либо обе имеют решение, либо обе не имеют. Более того, если решения существуют, то для любых допустимых z и u выполняется неравенство $c^T z \geq b^T u$, а для оптимальных решений z_* и u_* — равенство

$$c^T z_* = b^T u_*. \tag{1.1.6}$$

Введем дополнительные неотрицательные переменные $v \in \mathbb{R}^n$ и $w \in \mathbb{R}^m$, чтобы в (1.1.4) и (1.1.5) перейти от ограничений-неравенств к ограничениям-равенствам:

$$\begin{array}{rcl} v &=& c - A^T u, \quad v \geq 0_n, \\ w &=& Az - b, \quad w \geq 0_m. \end{array} \tag{1.1.7}$$

Эту связь можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{nn} & -A^T \\ A & 0_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}$$

при условии

$$z \geq 0_n, \quad v \geq 0_n, \quad u \geq 0_m, \quad w \geq 0_m. \tag{1.1.8}$$

Положим

$$M = \begin{bmatrix} 0_{nn} & -A^T \\ A & 0_{mm} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}$$

и объединим переменные в векторы

$$x = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}.$$

Тогда на основании (1.1.7) и (1.1.8)

$$y = Mx + q, \quad x \geq 0_{n+m}, \quad y \geq 0_{n+m}.$$

Так как согласно (1.1.6)

$$x^T y = z^T v + u^T w = c^T z - z^T A^T u + u^T Az - b^T u = c^T z - b^T u = 0,$$

то отсюда приходим к ЛЗД. Заметим, что матрица M в этой ЛЗД является *кососимметричной*, а размерность ЛЗД равна $n + m$.

Задача квадратичного программирования.

Линейные задачи дополнительности самым тесным образом связаны с задачами квадратичного программирования (ЗКП), а именно, всегда можно свести ЛЗД к ЗКП и наоборот. Здесь ограничимся только показом того, каким образом от ЗКП можно перейти к соответствующей ЛЗД.

Пусть имеется симметричная матрица Q порядка n и матрица A размером $m \times n$. Пусть, кроме того, заданы векторы $c \in \mathbb{R}^n$ и $b \in \mathbb{R}^m$. Рассмотрим ЗКП следующего вида:

$$\begin{array}{rcl} c^T z + \frac{1}{2} z^T Q z & \longrightarrow & \min \\ Az & \geq & b, \\ z & \geq & 0_n. \end{array} \tag{1.1.9}$$

Если существует оптимальное решение z_* этой задачи, то данное решение вместе с некоторым вектором $u_* \in \mathbb{R}^m_+$ образуют ККТ пару $[z_*, u_*]$, т.е. пару точек, через которую выписываются необходимые условия оптимальности Каруша-Куна-Таккера в задаче (1.1.9).

Составим функцию Лагранжа для задачи (1.1.9) в виде

$$L(z,u) = c^T z + \frac{1}{2} z^T Q z + u^T (b - Az),$$

где $z \geq 0_n$ и $u \geq 0_m$. Тогда условия Каруша-Куна-Таккера принимают вид

$$\begin{array}{rcl} L_z(z,u) & = & c + Qz - A^T u \geq 0_n, \\ D(z) L_z(z,u) & = & D(z)(c + Qz - A^T u) = 0_n, \\ Az - b & \geq & 0_m, \\ D(u)(Az - b) & = & 0_m. \end{array} \tag{1.1.10}$$

Если опять ввести дополнительные неотрицательные переменные, чтобы свести условия-неравенства к условиям-равенствам, то получаем

$$v = c + Qz - A^T u, \quad w = Az - b,$$

причем все переменные должны быть неотрицательными

$$z \geq 0_n, \quad v \geq 0_n, \quad w \geq 0_m, \quad u \geq 0_m.$$

Кроме того, должны выполняться условия дополняющей нежесткости (второе и четвертое уравнения в (1.1.10)), которые из-за неотрицательности переменных, можно записать в виде

$$z^T v = 0, \quad u^T w = 0. \tag{1.1.11}$$

Если матрица Q положительно определенная, то данные условия оптимальности являются не только необходимыми, но и достаточными.

Объединим теперь попарно переменные, вводя

$$x = \begin{bmatrix} z \\ u \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix},$$

и положим

$$M = \begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0_{mm} \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}.$$

Тогда приходим к ЛЗД, так как согласно (1.1.11) должно выполняться равенство $x^T y = 0$. Размерность задачи дополнительности, как и в случае задачи линейного программирования (1.1.4), равняется $n + m$.

Заметим, что в получившейся ЛЗД матрица M принадлежит к так называемому классу *бисимметричных матриц*. Биссеметричными матрицами называются матрицы, имеющие блочный вид

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & H \end{bmatrix}, \tag{1.1.12}$$

где G и H — симметричные матрицы. Если G и H здесь положительно полуопределенные матрицы, то такая матрица (1.1.12), как можно проверить, также будет положительно полуопределенной. Таким образом, если в задаче квадратичного программирования матрица Q положительно полуопределена, то соответствующая матрица M в линейной задаче дополнительности оказывается положительно полуопределенной.

Если обратиться к частному случаю задачи (1.1.9)

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x & \longrightarrow & \min \\ x & \geq & 0_n, \end{array} \tag{1.1.13}$$

в которой Q — симметрическая положительно полуопределенная матрица, то эта задача полностью эквивалентна $LCP(c, Q)$.

Биматричная игра.

Рассмотрим *биматричную игру* $\Gamma(A, B)$, т.е. игру двух лиц с ненулевой суммой, задаваемой парой вещественных $m \times n$ матриц A и B. *Чистая стратегия* первого игрока состоит в выборе номера строки, а чистая стратегия второго игрока — в выборе номера столбца. Другими словами, первый игрок указывает индекс $i \in J^m$, а второй — индекс $j \in J^n$. Пусть a_{ij} и b_{ij} — (i, j)-е элементы соответственно матриц A и B. Если игроки выбирают чистые стратегии i и j, то первый игрок *проигрывает* величину a_{ij}, а второй — величину b_{ij}.

Смешанные стратегии игроков состоят в выборе векторов $p \in \Lambda^m$ и $q \in \Lambda^n$, где $\Lambda^k = \{x \in \mathbb{R}^k_+ \ : \ \sum_{i=1}^k x^i = 1\}$ — единичный вероятностный симплекс. Компоненты этих векторов можно трактовать как вероятности, с которыми каждый из игроков выбирает свои чистые стратегии. Тогда средние потери игроков (при проведении бесконечного числа партий) составят соответственно $p^T Aq$ и $p^T Bq$.

Пара смешанных стратегий p_* и q_* называется *точкой равновесия (по Нэшу)* в игре $\Gamma(A, B)$, если

$$p_*^T Aq_* \le p^T Aq_*, \quad \text{для всех } p \in \Lambda^m,$$

$$p_*^T Bq_* \le p_*^T Bq, \quad \text{для всех } q \in \Lambda^n.$$

Один из фундаментальных результатов теории игр состоит в том, что в игре $\Gamma(A, B)$ всегда существует *равновесие в смешанных стратегиях.*

Смешанные стратегии p_* и q_* образуют точку равновесия в том и только в том случае, когда они предпочтительнее каждой из чистых стратегий, т.е.

$$p_*^T Aq_* \le e_i^T Aq_* \quad i \in J^m,$$

$$p_*^T Bq_* \le p_*^T Be_j \quad j \in J^n,$$

где e_k — k-й единичный орт соответственно в пространствах $\mathbb{R}^m$ или $\mathbb{R}^n$. Данные неравенства можно представить в объединенном виде, если воспользоваться k-мерным вектором $\bar{e}_k$, состоящим из единиц,

$$Aq_* \ge (p_*^T Aq_*)\bar{e}_m, \quad B^T p_* \ge (p_*^T Bq_*)\bar{e}_n. \tag{1.1.14}$$

Введем теперь в рассмотрение следующую систему, состоящую из равенств и неравенств,

$$\begin{array}{rcl} u & = & Aq - \bar{e}_m \ge 0_m, \quad p \ge 0_m, \\ v & = & B^T p - \bar{e}_n \ge 0_n, \quad q \ge 0_n, \\ 0 & = & p^T u + q^T v. \end{array} \tag{1.1.15}$$

Она является линейной задачей дополнительности $LCP(-\bar{e}_{m+n}, M)$, в которой

$$x = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 0_{mm} & A \\ B^T & 0_{nn} \end{bmatrix}.$$

Далее, не умаляя общности, считаем, что матрицы A и B положительны, т.е. все их элементы больше нуля. Этого всегда можно добиться, прибавив ко всем элементам матриц A и B достаточно большую величину. На выбор равновесных стратегий такое прибавление одной и той же величины никоим образом не отразится. Имеет место следующий результат.

Утверждение 1.1.1. *Пусть $[p_*, q_*]$ — пара равновесных стратегий в игре $\Gamma(A, B)$ с положительными матрицами $A > 0$ и $B > 0$. Тогда векторы*

$$\bar{p} = \frac{p_*}{p_*^T B q_*}, \quad \bar{q} = \frac{q_*}{p_*^T A q_*}$$

удовлетворяют системе (1.1.15).

Обратно, если векторы p и q совместно с векторами u и v являются решениями системы (1.1.15), то смешанные стратегии

$$p_* = \frac{p}{\|p\|_1}, \quad q_* = \frac{q}{\|q\|_1}, \tag{1.1.16}$$

где

$$\|p\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |p^i|, \quad \|q\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |q^j|,$$

образуют точку равновесия в игре $\Gamma(A, B)$.

Доказательство. Убедимся сначала в справедливости первой части утверждения. Так как $[p_*, q_*]$ — точка равновесия, то выполнены неравенства (1.1.14), из которых с учетом того, что $p_*^T A q_* > 0$, $p_*^T B q_* > 0$, следует

$$\bar{u} = A\bar{q} - \bar{e}_m \geq 0_m, \quad \bar{v} = B^T \bar{p} - \bar{e}_n \geq 0_n.$$

Более того, поскольку $p_* \in \Lambda^m$ и $q_* \in \Lambda^n$, обязательно $\bar{p} \geq 0_m$, $\bar{q} \geq 0_n$.

Проверим теперь выполнение условия дополнительности $\bar{p}^T \bar{u} + \bar{q}^T \bar{v} = 0$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \bar{p}^T \bar{u} + \bar{q}^T \bar{v} = \bar{p}^T (A\bar{q} - \bar{e}_m) + \bar{q}^T \left(B^T \bar{p} - \bar{e}_n\right) = \\ = \left(p_*^T B q_*\right)^{-1} \left(1 - p_*^T \bar{e}_m\right) + \left(p_*^T A q_*\right)^{-1} \left(1 - q_*^T \bar{e}_n\right) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, пара $[\bar{p}, \bar{q}]$ удовлетворяет системе (1.1.15).

Докажем теперь вторую часть утверждения. Пусть $[p, q]$ и $[u, v]$ — решение системы (1.1.15) и пусть смешанные стратегии p_* и q_* определяются согласно (1.1.16). Из-за того, что $p^T u = 0$ и $q^T v = 0$, имеем

$$p^T u = p^T A q - \|p\|_1 = 0, \quad q^T v = q^T B^T p - \|q\|_1 = 0,$$

причем в силу двух левых неравенств из (1.1.15) векторы p и q не могут быть нулевыми, т.е. $\|p\|_1 > 0$, $\|q\|_1 > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} A q_* - \left(p_*^T A q_*\right) \bar{e}_m = \tfrac{1}{\|q\|_1} \left(A q - \tfrac{p^T A q}{\|p\|_1} \bar{e}_m\right) = \\ = \tfrac{1}{\|q\|_1} \left(A q - \bar{e}_m\right) \geq 0_m. \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$B^T p_* - \left(p_*^T B q_*\right) \bar{e}_n = \frac{1}{\|p\|_1} \left(B^T p - \frac{p^T B q}{\|q\|_1} \bar{e}_n\right) = \\ = \frac{1}{\|p\|_1} \left(B^T p - \bar{e}_n\right) \geq 0_n.$$

Отсюда на основании (1.1.14) делаем вывод, что стратегии p_* и q_* являются равновесными. ■

Размерность получившейся ЛЗД равняется $n + m$, а матрица M, если A и B положительны, неотрицательна. Вектор свободных переменных $\tilde{q}$ в этой задаче $LCP(\tilde{q}, M)$ также имеет специальный вид, а именно, $\tilde{q} = -\bar{e}_{n+m}$.

Задача рыночного равновесия.

Рассмотрим простейшую *линейную задачу рыночного равновесия*, в которой запросы потребителей и предложение производителей сбалансированы с помощью существующих цен. Пусть производство описывается следующей линейной оптимизационной моделью:

$$\begin{array}{rcl} c^T z & \to & \min, \\ Az & \geq & b, \\ Bz & \geq & d, \\ z & \geq & 0_n, \end{array} \qquad (1.1.17)$$

где компоненты вектора $z = [z^1, \ldots, z^n]$ указывают интенсивности, с которыми используются различные *технологии*, а компоненты вектора $c = [c^1, \ldots, c^n]$ — требуемые при этом затраты, отнесенные к единице интенсивности применяемой технологии. Неравенство $Az \geq b$, в котором A — матрица размером $l \times n$, описывает ограничения технического характера на использование различных технологий, в частности, ресурсные ограничения. Второе неравенство $Bz \geq d$ есть ограничение на потребление, при этом компоненты вектора $d = [d^1, \ldots, d^m]$ указывают *спрос*, т.е. количество денег, которое потребители могут потратить на приобретение тех или иных групп товаров, произведенных по используемым технологиям. Матрица B имеет размер $m \times n$.

Предположим также, что спрос d зависит от цен $p \in \mathbb{R}^m_+$ и эта зависимость задается следующей линейной функцией (*функцией спроса*)

$$d = Q(p) = d_0 + Cp.$$

Рыночное равновесие в данной модели означает, что цены p совпадают с “теневыми ценами” в оптимизационной задаче (1.1.17), т.е. с множителями Лагранжа, которые соответствуют ограничениям на потребление $Bz \geq d$ в оптимальном решении.

Если обратиться к условиям оптимальности для задачи минимизации (1.1.17), то после того, как составим функцию Лагранжа для (1.1.17)

$$L(z,u,w) = \langle c,z\rangle + \langle u, b - Az\rangle + \langle w, d - Bz\rangle, \quad u \geq 0_l, \quad w \geq 0_m,$$

и учтем, что $z \geq 0$, получаем: вектор z будет ее решением тогда и только тогда, когда он допустим и найдутся такие векторы u и w с неотрицательными компонентами, что

$$L_z(z,u,w) = c - A^T u - B^T w \geq 0_n, \quad z^T\left(c - A^T u - B^T w\right) = 0.$$

При этом векторы u и w удовлетворяют условиям дополняющей нежесткости:

$$\langle u, Az - b\rangle = 0, \qquad \langle w, Bz - d\rangle = 0.$$

Вводя дополнительные переменные, приходим к выводу, что должна выполняться следующая система равенств и неравенств:

$$\begin{array}{lcllll} v & = & c - A^T u - B^T w \geq 0_n, & z \geq 0_n, & v^T z = 0, \\ g & = & Az - b \geq 0_l, & u \geq 0_l, & g^T u = 0, \\ h & = & Bz - d \geq 0_m, & w \geq 0_m, & h^T w = 0. \end{array}$$

Отсюда, если подставить вместо d соотвествующую функцию спроса $d = d_0 + Cp$ и учесть, что при равновесии $p = w$, приходим к $LCP(q,M)$, в которой

$$x = \begin{bmatrix} z \\ u \\ w \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} v \\ g \\ h \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} c \\ -b \\ -d_0 \end{bmatrix}.$$

Матрица M имеет следующий вид

$$M = \begin{bmatrix} 0_{nn} & -A^T & -B^T \\ A & 0_{ll} & 0_{lm} \\ B & 0_{ml} & -C \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если матрица C симметричная, то матрица M оказывается бисимметричной. Но всегда M независимо от того, является ли C симметричной или нет, будет положительно полуопределенной, если C — отрицательно полуопределенная матрица.

1.2. Разрешимость линейных задач дополнительности

1.2.1. Комплементарная область значений

С каждой матрицей $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ может быть связан конус

$$\mathrm{pos} A = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : \ y = Ax, \ x \in \mathbb{R}^n_+ \right\}.$$

Этот конус, будучи конической оболочкой столбцов матрицы A, является выпуклым и многогранным. Он также есть образ выпуклого многогранного конуса $\mathbb{R}^n_+$ при линейном отображении $y = Ax$. Если A — невырожденная квадратная матрица порядка n, то такой конус называют *симплициальным.* Для симплициального конуса имеет место представление

$$\mathrm{pos} A = \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \ A^{-1} y \geq 0_n \right\}.$$

Когда решается ЛЗД в виде (1.1.3), то ищется пара $[x, y] \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ такая, что

$$\begin{array}{l} q = I_n y - Mx, \\ x \geq 0_n, \ y \geq 0_n, \\ x^i y^i = 0, \quad i \in J^n. \end{array} \tag{1.2.1}$$

Поэтому, если задача (1.1.3) имеет решение, то вектор q должен принадлежать конусу, порожденному столбцами $n \times 2n$ матрицы $[I_n, -M]$. Иначе говоря, должно выполняться включение $q \in \mathrm{pos}\,[I_n, -M]$. Однако не любой вектор из $\mathrm{pos}[I_n, -M]$ подходит для того, чтобы ему соответствовал вектор q в некоторой разрешимой $LCP(q, M)$, так как дополнительно должно выполняться условие комплементарности, заключающееся в равенствах: $x^i y^i = 0, \ 1 \leq i \leq n$.

Пусть J_B — подмножество индексов из J^n (быть может пустое или совпадающее со всем множеством J^n). Через $M_{*,j}$ будем обозначать j-й столбец матрицы M, через e_j — j-й единичный орт. Для $J_B \subseteq J^n$ квадратная матрица $C_B(M)$ порядка n со столбцами

$$C_B(M)_{*,j} = \begin{cases} -M_{*,j}, & j \in J_B, \\ e_j, & j \notin J_B, \end{cases}$$

называется *комплементарной* относительно матрицы M. Соответствующий конус $\mathrm{pos}\, C_B(M)$ называется *комплементарным конусом* по отношению к M. Если матрица $C_B(M)$ невырожденная, то такой комплементарный конус является симплициальным конусом и называется *комплементарным базисом.* Фактически решение ЛЗД сводится к проверке принадлежности вектора q одному из комплементарных конусов.

Обозначим через $K(M)$ объединение всех комлементарных конусов. Данное множество называется *комплементарной областью значений* матрицы M. Комплементарная область значений, как объединение конусов, является разумеется конусом, но не всегда выпуклым. Множество $K(M)$ содержит очевидно конусы $\mathbb{R}^n_+ = \operatorname{pos} I_n$ и $\operatorname{pos}(-M)$. С другой стороны, так как каждый из комплементарных конусов принадлежит $\operatorname{pos}[I_n, -M]$, то $K(M) \subseteq \operatorname{pos}[I_n, -M]$. Таким образом, имеют место включения

$$\operatorname{pos} I_n \cup \operatorname{pos}(-M) \quad \subseteq \quad K(M) \quad \subseteq \quad \operatorname{pos}[I_n, -M]. \tag{1.2.2}$$

На рис. 1.1 – 1.3 показаны возможные случаи комплементарных конусов для случая матрицы M размером 2×2. В первом случае (рис. 1.1) комплементарная область значений $K(M)$ есть все пространство $\mathbb{R}^2$. Рис. 1.2 иллюстрирует случай, когда $K(M)$ — выпуклый конус, отличный от $\mathbb{R}^2$. Напротив, на рис. 1.3 приведен пример матрицы M, у которой конус $K(M)$ не является выпуклым.

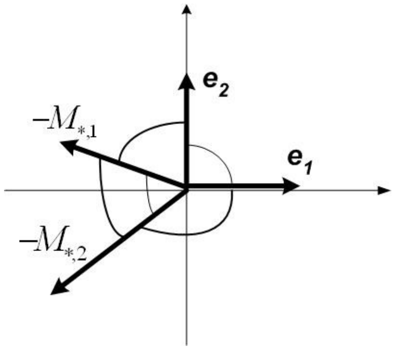

Рис. 1.1. Комплементарная область — все пространство

1.2.2. $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}_0$-матрицы

В теории линейных задач дополнительности среди всех квадратных матриц M выделяют два важных множества (класса), связанных с вопросом существования решения у этих задач.

Класс $\mathcal{Q}$. *Это совокупность матриц M, для которых $LCP(q, M)$ имеет решение для всех векторов $q \in \mathbb{R}^n$. Матрицы из этого класса*

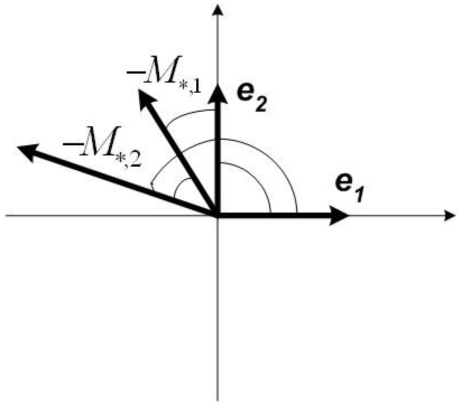

Рис. 1.2. Комплементарная область — выпуклый конус

называются $\mathcal{Q}$-матрицами.

Как нетрудно видеть, класс $\mathcal{Q}$ состоит из тех и только тех матриц M, у которых комплементарная область значений $K(M)$ совпадает с $\mathbb{R}^n$. Подклассом класса $\mathcal{Q}$ является совокупность тех матриц M, для которых решение $LCP(q, M)$ для всех $q \in \mathbb{R}^n$ существует и единственное.

Класс $\mathcal{Q}_0$. *Это совокупность матриц M, для которых, если задача $LCP(q, M)$ допустима, то она имеет решение. Матрицы из этого класса называются $\mathcal{Q}_0$-матрицами.*

Поясним смысл понятия $\mathcal{Q}_0$-матрицы. С этой целью введем множество

$$K_0(M) = \left\{q \in \mathbb{R}^n : \ X(q, M) \neq \emptyset\right\},$$

т.е. множество векторов q, для которых $LCP(q, M)$ является допустимой. Но согласно (1.2.1) вектор q в допустимых $LCP(q, M)$ представим в виде: $q = I_n y - Mx$, где $x \geq 0_n$, $y \geq 0_n$. Поэтому на самом деле $K_0(M) = \operatorname{pos}[I_n, -M]$. Данное множество $\operatorname{pos}[I_n, -M]$, как уже отмечалось, является конусом, причем выпуклым конусом.

Если M есть $\mathcal{Q}_0$-матрица, то для любого $q \in K_0(M)$ должен существовать по крайней мере один комплементарный конус $\operatorname{pos} C_B(M)$ такой, что $q \in C_B(M)$. Поскольку $\operatorname{pos} C_B(M) \in K(M)$, в этом случае заведомо $q \in \operatorname{pos} K(M)$. Обратим теперь внимание, что в силу (1.2.2) всегда справедливо включение: $K(M) \subseteq K_0(M)$. Однако для Q_0-матрицы M строгое включение $K(M) \subset K_0(M)$ невозможно, ибо

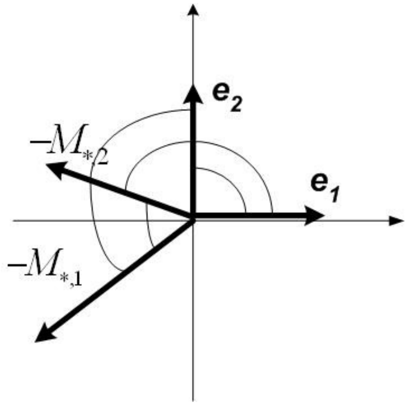

Рис. 1.3. Комплементарная область — невыпуклый конус

тогда можно указать такой вектор q, для которого $LCP(q, M)$ допустима, но для него нет комплементарного конуса из $K(M)$. Другими словами, Q_0-матрица M характеризуется тем, что у нее два этих множества $K(M)$ и $K_0(M)$ совпадают, т.е. $K(M) = K_0(M)$.

Утверждение 1.2.1. *Класс $\mathcal{Q}_0$ состоит из тех и только тех матриц M, у которых комплементарная область значений $K(M)$ выпукла.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $M \in \mathcal{Q}_0$. Тогда в силу вышесказанного $K(M) = K_0(M)$. Но конус $K_0(M)$ выпуклый. Стало быть, и у Q_0 матрицы M комплементарная область значений $K(M)$ также выпукла.

Достаточность. Предположим теперь, что $K(M)$ выпуклое множество. Так как выпуклые конусы $\operatorname{pos} I_n$ и $\operatorname{pos}(-M)$ содержатся в $K(M)$, то выпуклая оболочка $K(M)$, равная самому конусу $K(M)$, должна совпадать с $\operatorname{pos}[I_n, -M] = K_0(M)$, т.е. $K(M) = K_0(M)$. Отсюда делаем вывод, что M есть $\mathcal{Q}_0$-матрица. ■

Следствие 1.2.1. *Комплементарная область значений $K(M)$ выпукла тогда и только тогда, когда*

$$K(M) = K_0(M) = \operatorname{pos}\left[I_n, -M\right].$$

Утверждение 1.2.1 дает другую более конкретную характеристику класса $\mathcal{Q}_0$ через комплементарные области входящих в него матриц, а именно, $\mathcal{Q}_0$ состоит из таких и только таких матриц M, у которых $K(M)$ — выпуклое множество. Так как все пространство заведомо является выпуклым множеством, то отсюда следует, что класс матриц $\mathcal{Q}_0$ шире класса $\mathcal{Q}$.

Из вышесказанного вытекает также, что для того, чтобы выяснить имеет ли конкретная ЛЗД решение, можно проверить принадлежность матрицы M одному из классов $\mathcal{Q}$ или $\mathcal{Q}_0$. Конечно, в силу того, что класс $\mathcal{Q}$ содержится в классе $\mathcal{Q}_0$, это проще проделать для $\mathcal{Q}_0$. Фактически для этого надо определить комплементарную область значений матрицы M. Если окажется, что область $K(M)$ выпукла, то рассматриваемая матрица M является $\mathcal{Q}_0$-матрицей. Более того, если $K(M)$ совпадает со всем пространством, то M есть $\mathcal{Q}$-матрица. В случае, когда матрица M принадлежит классу $\mathcal{Q}_0$, остается только проверить находится ли вектор q в множестве $K_0(M) = \mathrm{pos}[I_n, -M]$ или нет. Если q находится в этом множестве, то задача $LCP(q, M)$ обязательно имеет решение.

Построение комплементарной области значений $K(M)$ в большинстве случаев оказывается весьма сложной проблемой, особенно если размерность матриц M большая. Поэтому представляет интерес рассмотрение других более частных классов матриц, для которых существуют сравнительно простые конструктивные способы проверки принадлежности матрицы к этому частному классу. Важно только, что об этих частных классах матриц можно заранее сказать, что они принадлежат либо классу $\mathcal{Q}$, либо классу $\mathcal{Q}_0$.

1.3. Классы матриц и их связь с $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}$-матрицами

Ниже рассматриваются некоторые классы квадратных матриц, а также конкретные матрицы, принадлежащие этим классам. В связи с этим возникает понятие полноты класса, которое заключается в следующем. Пусть $\mathcal{Y}$ — класс матриц, обладающих некоторым свойством. Мы скажем, что матрица M является *полной $\mathcal{Y}$-матрицей*, если она и все ее главные подматрицы принадлежат $\mathcal{Y}$. Класс полных $\mathcal{Y}$-матриц обозначается $\bar{\mathcal{Y}}$. Если $\mathcal{Y} = \bar{\mathcal{Y}}$, то такой класс матриц $\mathcal{Y}$ называется *полным.*

Для характеризации вводимых матриц и их свойств нам потребуются также ряд дополнительных обозначений.

Пусть M квадратная матрица порядка n. Область значений линейного преобразования $y = Mx$ при отображении множества X ниже обозначается через $M(X)$. Если X — выпуклое многогранное множество, то $M(X)$ также есть выпуклое многогранное множество.

Пусть J_B — произвольный непустой набор индексов из J^n. Ниже через M_{BB} обозначается главная подматрица матрицы M, содержащая строки и столбцы с номерами из J_B. Через x_B обозначается подвектор вектора x, в который входят только компоненты x^i, $i \in J_B$. Пусть J_N — дополнение множества индексов J_B до J^n, т.е. $J_N = J^n \setminus J_B$. Если данное множество J_N не пусто, то аналогичные обозначения используются для вектора x_N и для матриц, содержащих строки или столбцы с индексами из J_N, например, M_{NB} — подматрица матрицы M, состоящая из элементов M, стоящих на пересечении строк с номерами из J_N и столбцов с номерами из J_B.

Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^n$ введем в рассмотрение индексные множества

$$\begin{array}{rcl} J_0(x) & = & \{i \in J^n : \ x^i = 0\}, \\ J_+(x) & = & \{i \in J^n : \ x^i > 0\}, \\ J_-(x) & = & \{i \in J^n : \ x^i < 0\}. \end{array}$$

Множество $J_\pm(x) = J_+(x) \cup J_-(x)$ называется *носителем* вектора x, т.е. это совокупность тех индексов $i \in J^n$, для которых соответствующие компоненты x^i отличны от нуля. Везде ниже считаем также, что $\bar{e}$ есть вектор, все компоненты которого равны единице.

1.3.1. Положительно определенные и полуопределенные матрицы

Положительно определенные и положительно полуопределенные матрицы с точки зрения теории линейных задач дополнительности обладают многими привлекательными свойствами.

Определение 1.3.1. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется положительно определенной, если $x^T Mx > 0$ для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.*

Определение 1.3.2. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется положительно полуопределенной, если $x^T Mx \geq 0$ для любого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.*

Отметим, что от матрицы M здесь не требуется, чтобы она была симметричной. Так как любая квадратная матрица M может быть разложена на симметричную и кососимметричную части, то M является положительно определенной или положительно полуопределенной матрицей тогда и только тогда, когда соответственно положительно определенной или положительно полуопределенной оказывается ее симметричная часть. Оба класса положительно определенных и положительно полуопределенных матриц являются полными.

С помощью симметричных положительно определенных матриц определяются *положительно устойчивые матрицы.*

Определение 1.3.3. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется положительно устойчивой, если существует такая симметричная положительно определенная матрица H, что HM также является положительно определенной матрицей. Если при этом матрица H диагональна, то M называется диагонально (положительно) устойчивой.*

Матрица M диагонально устойчива в том и только в том случае, когда выполняется по крайней мере одно из следующих двух утверждений:

1. существуют такие диагональные матрицы D и E с положительными диагональными элементами, что DME есть положительно определенная матрица;

2. существуют такая диагональная матрица F с положительными диагональными элементами, что $F^{-1}MF$ есть положительно определенная матрица;

У диагонально устойчивой матрицы все действительные части собственных значений положительны.

1.3.2. $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_0$-матрицы

Дадим сначала определение $\mathcal{S}$-матрицы.

Определение 1.3.4. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ называется $\mathcal{S}$-матрицей, если существует такой вектор $x > 0_n$, что $Mx > 0_n$.*

На самом деле для того, чтобы M была $\mathcal{S}$-матрицей, достаточно потребовать, чтобы нашелся ненулевой вектор $x \geq 0_n$, для которого $Mx > 0_n$. Действительно, в силу непрерывности линейного отображения $y = Mx$, для достаточно малых положительных α выполняется: $\bar{x} = x + \alpha\bar{e} > 0_n$ и $M\bar{x} > 0_n$.

Определение 1.3.5. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется $\mathcal{S}_0$-матрицей, если существует такой ненулевой вектор $x \geq 0_n$, что $Mx \geq 0_n$.*

Матрица M заведомо является $\mathcal{S}$-матрицей, если среди ее столбцов имеется по крайней мере один столбец со всеми положительными элементами. Соответственно, если в M есть столбец со всеми неотрицательными элементами, то такая матрица M будет $\mathcal{S}_0$-матрицей. Как нетрудно видеть, оба класса $\mathcal{S}$-матриц и $\mathcal{S}_0$-матриц не являются полными.

Важность понятия $\mathcal{S}$-матрицы для теории ЛЗД заключается в следующем утверждении.

Теорема 1.3.1. *Задача $LCP(q, M)$ допустима для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$ в том и только в том случае, когда M есть $\mathcal{S}$-матрица.*

Доказательство. *Необходимость.* Предположим, что допустимое множество $X(q, M)$ не пусто для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$. Возьмем произвольный вектор $\tilde{q} < 0_n$. Для него, в частности, $X(\tilde{q}, M) \neq \emptyset$. Следовательно, найдется такой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$, что $Mx + \tilde{q} \geq 0_n$. Но тогда, $Mx \geq -\tilde{q} > 0_n$, причем, чтобы это неравенство выполнялось, вектор $x \geq 0_n$ обязательно должен быть ненулевым. Поэтому M является $\mathcal{S}$-матрицей.

Достаточность. Пусть M есть $\mathcal{S}$-матрица и пусть q — произвольный вектор. В силу определения $\mathcal{S}$-матрицы существует такой вектор $x > 0_n$, что $Mx > 0_n$. Но тогда для любого достаточно большого $\lambda > 0$ должно выполняться неравенство $M(\lambda x) = \lambda Mx \geq -q$. Поэтому все такие векторы $\tilde{x} = \lambda x$ оказываются принадлежащими множеству $X(q, M)$, т.е. задача $LCP(q, M)$ является допустимой. ■

Упражнение. Покажите, что $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ есть $\mathcal{S}$-матрица тогда и только тогда, когда $K_0(M) = \mathrm{pos}\,[I_n, -M] = \mathbb{R}^n$.

Убедимся теперь, что любая положительно определенная матрица является одновременно $\mathcal{S}$-матрицей. Для этого нам потребуется следующий результат, относящийся к теоремам об альтернативах для линейных однородных систем. Это один из вариантов так называемой теоремы Вилля, которую сформулируем следующим образом.

Теорема 1.3.2. *Пусть A — произвольная матрица размера $m \times n$. Тогда из двух систем*

$$Ax > 0_m, \quad x \geq 0_n, \quad x \neq 0_n \tag{1.3.1}$$

и

$$A^T y \leq 0_n, \quad y \geq 0_m, \quad y \neq 0_m \tag{1.3.2}$$

разрешима только одна.

Доказательство. Предположим, что первая система (1.3.1) разрешима и покажем, что вторая система (1.3.2) в этом случае оказывается неразрешимой. Для этого допустим противное, т.е. что система (1.3.2) также имеет решение. Пусть x и y решения соответственно (1.3.1) и (1.3.2). Тогда, умножая неравенство $Ax > 0_m$ слева на вектор y^T, получаем $y^T Ax > 0$. С другой стороны, если умножить неравенство $A^T y \leq 0_m$ слева на x^T, то приходим к $x^T A^T y = y^T Ax \leq 0$. Данное неравенство противоречит предыдущему.

Если первая система (1.3.1) не имеет решения, то тем более не имеет решения система

$$Ax \geq \bar{e}, \quad x \geq 0_n.$$

Но тогда согласно теореме 2.6.7 из [11] линейная неоднородная система

$$A^T y \leq 0_n, \quad y \geq 0_m, \quad \langle \bar{e}, y \rangle > 0$$

обязательно имеет решение. Следовательно имеет решение и система (1.3.2).

Аналогичным образом можно убедиться, что если система (1.3.2) разрешима, то система (1.3.1) неразрешима, и наоборот, (1.3.1) разрешима, если неразрешима (1.3.2). ■

Утверждение 1.3.1. *Положительно определенная матрица является полной $\mathcal{S}$-матрицей.*

Доказательство от противного. Предположим, что M — положительно определенная матрица, но в то же время не является $\mathcal{S}$-матрицей, т.е. не существует такого ненулевого вектора $x \geq 0_n$, для которого $Mx > 0_n$. Тогда по теореме Вилля 1.3.2 найдется ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^n_+$, который удовлетворяет системе линейных неравенств $M^T y \leq 0_n$. Отсюда следует, что $y^T M^T y = y^T My \leq 0$, что противоречит положительной определенности матрицы M. Таким образом, M является $\mathcal{S}$-матрицей. Но класс положительно определенных матриц полный. Поэтому любая главная подматрица положительно определенной матрицы также является $\mathcal{S}$-матрицей. Отсюда делаем вывод, что на самом деле M — полная $\mathcal{S}$-матрица. ■

Следствие 1.3.1. *Пусть M — положительно определенная матрица. Тогда матрица M^T является полной $\mathcal{S}$-матрицей.*

Доказательство. Так как матрица M^T наряду с M также является положительно определенной матрицей, то данный результат следует из приведенного утверждения 1.3.1. ■

В общем случае для произвольных, не обязательно положительно определенных, матриц M имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1.3.2. *Квадратная матрица M является полной $\mathcal{S}_0$-матрицей в том и только в том случае, когда полной $\mathcal{S}_0$-матрицей является M^T.*

Доказательство. Пусть M — полная $\mathcal{S}_0$-матрица. Покажем, что и M^T также полная $\mathcal{S}_0$-матрица. Доказательство по индукции относительно порядка n матрицы M. При $n = 1$ данное утверждение очевидно. Допустим, что оно верно для любой квадратной M порядка $n-1$ или меньше, и покажем, что оно сохраняется также для матрицы порядка n.

От противного, предположим, что это не так и что для матрицы M порядка n транспонированная матрица M^T не оказывается $\mathcal{S}_0$-матрицей, т.е. система

$$M^T x \geq 0_n, \quad x \geq 0_n, \quad x \neq 0_n$$

не имеет решения. Тогда по теореме Вилля об альтернативах можно указать такой вектор $x > 0_n$, что $Mx < 0_n$. Кроме того, поскольку M является $\mathcal{S}_0$-матрицей, существует такой ненулевой вектор $x_1 \in \mathbb{R}^n_+$, что $Mx_1 \geq 0_n$. Поэтому найдется множитель $\lambda > 0$, для которого вектор $y = x - \lambda x_1$ принадлежит ортанту $\mathbb{R}^n_+$, причем хотя бы одна его компонента равна нулю. Так как $Mx < 0_n$ и $-Mx_1 \leq 0_n$, то для этого y выполняется неравенство $My < 0_n$. Понятно, что оно может иметь место только если вектор y ненулевой.

Пусть J_B — носитель вектора y. В силу вышесказанного данное индексное множество не пусто и является собственным подмножеством множества J^n. Имеем для главной подматрицы M_{BB} матрицы M:

$$M_{BB} y_B < 0, \quad y_B > 0.$$

Но тогда опять по теореме Вилля система

$$M^T_{BB} z_B \geq 0, \quad z_B \geq 0, \quad z_B \neq 0$$

не может иметь решения. Мы приходим к тому, что квадратная матрица M^T_{BB} порядка меньше, чем n, не является $\mathcal{S}_0$-матрицей, что противоречит предположению индукции. Таким образом, M^T — полная $\mathcal{S}_0$-матрица.

Поскольку $(M^T)^T = M$, то, повторяя рассуждения, получаем обратное утверждение, что M будет полной $\mathcal{S}_0$-матрицей, если таковой является матрица M^T. ■

Результат, аналогичный утверждению 1.3.2, имеет место и для полных $\mathcal{S}$-матриц.

Утверждение 1.3.3. *Квадратная матрица M является полной $\mathcal{S}$-матрицей в том и только в том случае, когда полной $\mathcal{S}$-матрицей является M^T.*

Таким образом, чтобы убедиться в том, является ли матрица M полной S или полной S_0 матрицей, достаточно проверить, что либо она сама, либо ее транспонированная обладают этим свойством.

1.3.3. Полумонотонные и строго полумонотонные матрицы

Мы выяснили, что положительно определенные матрицы являются полными $\mathcal{S}$-матрицами. Рассмотрим теперь другие более широкие классы матриц, один из которых фактически совпадает с классом полных $\mathcal{S}$-матриц.

Определение 1.3.6. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется полумонотонной, если для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n_+$ найдется индекс $k \in J^n$, для которого $x^k > 0$ и $(Mx)^k \geq 0$.*

Непосредственно из определения следует, что класс полумонотонных матриц является полным. В частности, отсюда получаем, что у полумонотонной матрицы все диагональные элементы неотрицательны.

Для полумонотонной матрицы выполняется следующее включение: $M(\mathbb{R}^n_{\uplus}) \subseteq \mathbb{R}^n_{\oplus}$. Из полноты класса полумонотонных матриц следует, что аналогичные включения выполняются для всех главных подматриц матрицы M.

Лемма 1.3.1. *Пусть M — полумонотонная матрица. Тогда для любого вектора $q > 0_n$ задача $LCP(q, M)$ имеет лишь тривиальное решение $x_* = 0_n$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, если $q \geq 0_n$, то задача $LCP(q, M)$ с произвольной матрицей M всегда разрешима, так как $x_* = 0_n$ есть очевидное решение. Покажем, что в случае, когда матрица M полумонотонная, других решений при $q > 0_n$ быть не может.

От противного, предположим, что найдется вектор $\tilde{q} > 0_n$, для которого $LCP(\tilde{q}, M)$ имеет нетривиальное решение $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n_+$, $x \neq 0_n$. Тогда найдется индекс $k \in J^n$ такой, что $\tilde{x}^k > 0$ и $(M\tilde{x})^k \geq 0$. Но в этом случае $\tilde{y}^k = (M\tilde{x})^k + \tilde{q}^k > 0$ и мы получаем, что $\tilde{x}^k\tilde{y}^k > 0$.

Следовательно, вектор $\tilde{x}$ не является комплементарным, поэтому он не может быть решением задачи. ■

Лемма 1.3.2. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является полумонотонной тогда и только тогда, когда M^T есть полная $\mathcal{S}_0$-матрица.*

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть M — полумонотонная матрица. Возьмем произвольный непустой набор индексов $J_B \subseteq J^n$ и покажем, что система

$$M_{BB}x_B < 0, \quad x_B \geq 0 \tag{1.3.3}$$

не имеет решения. Действительно, если оно существует, то полагая $x_N = 0$ и

$$q_B = -M_{BB}x_B, \quad q_N > \max\{0, -M_{NB}x_B\},$$

получаем, что $q > 0_n$ и точка x есть нетривиальное решение задачи $LCP(q, M)$. Мы пришли к противоречию с утверждением леммы 1.3.1.

Таким образом, система (1.3.3) не имеет решения, поэтому по теореме Вилля имеет решение система

$$M_{BB}^T y_B \geq 0, \quad y_B \geq 0, \quad y_B \neq 0, \tag{1.3.4}$$

что означает, что M_{BB}^T является $\mathcal{S}_0$-матрицей. В силу произвольности набора индексов J_B, отсюда заключаем, что M^T - полная $\mathcal{S}_0$-матрица.

Обратно, предположим, что M^T есть полная $\mathcal{S}_0$-матрица. Тогда для любого непустого набора индексов $J_B \subseteq J^n$ система (1.3.4) обязательно имеет решение. Но тогда опять по теореме Вилля у системы (1.3.3) решения не существует. Но это означает, что для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n_+$ найдется индекс $k \in J^n$ такой, что $x^k > 0$ и $(Mx)^k \geq 0$. Поэтому матрица M является полумонотонной. ■

Учитывая лемму 1.3.2, а также утверждение 1.3.2, приходим к следующему важному результату.

Утверждение 1.3.4. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является полумонотонной в том и только в том случае, когда она есть полная $\mathcal{S}_0$-матрица.*

Итак, класс полумонотонных матриц и класс полных $\mathcal{S}_0$-матриц это по существу один и тот же класс. Из утверждения 1.3.2 приходим также к выводу, что если M является полумонотонной матрицей, то полумонотонной матрицей будет и M^T.

Определение 1.3.7. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется строго полумонотонной, если для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n_+$ найдется индекс $k \in J^n$, для которого $x^k > 0$ и $(Mx)^k > 0$.*

Если M — строго полумонотонная матрица, то M^T также строго полумонотонная матрица. У строго полумонотонных матриц все диагональные элементы положительны. Для нее выполняется включение $M(\mathbb{R}^n_{\uplus}) \subseteq \mathbb{R}^n_{\oplus\oplus}$. Вместо утверждения леммы 1.3.1 оказывается справедливым более сильное утверждение.

Лемма 1.3.3. *Пусть M — строго полумонотонная матрица. Тогда для любого вектора $q \geq 0_n$ задача $LCP(q, M)$ имеет единственное решение.*

С помощью леммы 1.3.3 можно доказать аналог леммы 1.3.2 для строго полумонотонных матриц.

Лемма 1.3.4. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является строго полумонотонной тогда и только тогда, когда M^T есть полная $\mathcal{S}$-матрица.*

Используя утверждение 1.3.3 и лемму 1.3.3, приходим к следующему результату относительно строго полумонотонных матриц.

Утверждение 1.3.5. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является строго полумонотонной в том и только в том случае, когда она есть полная $\mathcal{S}$-матрица.*

Таким образом, класс строго полумонотонных матриц совпадает с классом полных $\mathcal{S}$-матриц.

1.3.4. Коположительные и строго коположительные матрицы

Введем понятия коположительных и строго коположительных матриц.

Определение 1.3.8. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется коположительной, если $\langle x, Mx\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$.*

Определение 1.3.9. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется строго коположительной, если $\langle x, Mx\rangle > 0$ для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n_+$.*

Как следует из приведенных определений, при рассмотрении ЛЗД понятия коположительных и строго коположительных матриц оказываются более естественными по сравнению с соответственно положительно полуопределенными и положительнно определенными матрицами, поскольку как в определении этих матриц, так и в задании допустимого множества в ЛЗД, участвуют лишь векторы из неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^n_+$.

Понятно, что любая положительно полуопределенная матрица является заведомо коположительной матрицей, а любая положительно определенная матрица — строго коположительной. Однако, как показывает пример, первая из следующих двух матриц

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.3.5}$$

является строго коположительной, но не положительно определенной и даже не положительно полуопределенной. В этом можно убедиться, взяв вектор $x = [1, -1]$ и получив для него $\langle x, Mx \rangle = -2$. Вторая матрица в (1.3.5) является коположительной, но не строго коположительной. Нетрудно также видеть, что любая неотрицательная матрица всегда коположительна, а любая неотрицательная матрица с положительными диагональными элементами — строго коположительна.

Приведем несколько утверждений, касающихся симметричных коположительных и строго коположительных матриц.

Утверждение 1.3.6. *Симметричная матрица M является коположительной в том и только в том случае, когда она полумонотонная.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть M симметричная коположительная матрица. Тогда для любого непустого множества индексов $J_B \subseteq J^n$ система

$$M_{BB}x_B \geq 0, \quad x_B \geq 0 \tag{1.3.6}$$

имеет ненулевое решение. Действительно, если это не так, то согласно теореме Вилля 1.3.2 найдется такой ненулевой вектор y_B, что $y_B \geq 0$ и $M_{BB}y_B < 0$. Полагая $y_N = 0$, получаем, что $y \geq 0_n$ и $\langle y, My \rangle < 0$, что противоречит коположительности матрицы M. Следовательно, согласно (1.3.6) M является полной $\mathcal{S}_0$-матрицей. В силу утверждения 1.3.4 она должна быть полумонотонной матрицей.

Достаточность. Предположим, что симметричная матрица M является полумонотонной матрицей и, стало быть, полной $\mathcal{S}_0$-матрицей.

Покажем, что в этом случае она коположительна. В этом можно убедиться, проводя доказательство индукцией по n (порядку матрицы M). При $n = 1$ данное утверждение очевидно, так как M состоит из единственного неотрицательного элемента.

Пусть коположительность установлена для всех матриц M порядка меньше, чем n, и покажем, что она сохраняется, когда порядок M равен n. Учтем, что теперь любая собственная главная подматрица матрицы M является коположительной, а сама M — $\mathcal{S}_0$-матрицей. Возьмем такой ненулевой вектор $\bar{x} \geq 0_n$, что $M\bar{x} \geq 0_n$. Он всегда существует для $\mathcal{S}_0$-матрицы M и для него выполняется $\langle \bar{x}, M\bar{x} \rangle \geq 0$. Кроме того, для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^n_+$ можно указать $\lambda \geq 0$, для которого $x - \lambda\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$, причем $x - \lambda\bar{x} \notin \mathbb{R}^n_{++}$, т.е. число ненулевых компонент у этого вектора меньше n. Из $x - \lambda\bar{x} \geq 0_n$ и из $M\bar{x} \geq 0_n$ следует, что $\langle x - \lambda\bar{x}, M\bar{x} \rangle \geq 0$. Поэтому в силу симметричности матрицы M и коположительности любой собственной главной подматрицы матрицы M:

$$\begin{aligned}
&\langle x, Mx \rangle = \\
&\quad = \langle x - \lambda\bar{x}, M(x - \lambda\bar{x}) \rangle + 2\lambda\langle x - \lambda\bar{x}, M\bar{x} \rangle + \lambda^2 \langle \bar{x}, M\bar{x} \rangle \geq \; . \\
&\quad \geq \langle x - \lambda\bar{x}, M(x - \lambda\bar{x}) \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, M — коположительная матрица. ■

Аналогичным образом доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1.3.7. *Симметричная матрица M является строго коположительной в том и только в том случае, когда она строго полумонотонна.*

Таким, образом, нами установлена эквивалентность между полумонотонными матрицами и полными $\mathcal{S}_0$-матрицами, а также принадлежность симметричнымх коположительных матриц классу полумонотонных матриц:

Симметричные коположительные матрицы	$\Longrightarrow$	Полумонотонные матрицы	$\Longleftrightarrow$	Полные $\mathcal{S}_0$-матрицы

Аналогичная эквивалентность существует между строго полумонотонными матрицами и полными $\mathcal{S}$-матрицами. Также имеет место принадлежность симметричных строго коположительных матриц классу строго полумонотонных матриц, т.е.

Симметричные строго коположительные матрицы	$\Longrightarrow$	Строго полумонотонные матрицы	$\Longleftrightarrow$	Полные $\mathcal{S}$-матрицы

Введем в рассмотрение квадратичную функцию

$$f(x) = x^T(q + Mx), \tag{1.3.7}$$

где $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $q \in \mathbb{R}^n$. Оказывается, свойство матрицы M быть коположительной или строго коположительной тесным образом связано с ограниченностью функции (1.3.7) на неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^n_+$.

Утверждение 1.3.8. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является коположительной в том и только в том случае, когда функция $f(x)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n_+$ для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n_+$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть M — коположительная матрица. Тогда согласно определению $\langle x, Mx\rangle \geq 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$. Кроме того, из $q \geq 0_n$ следует, что $\langle q, x\rangle \geq 0$ для тех же x. Поэтому функция $f(x)$ неотрицательна на $\mathbb{R}^n_+$ и, следовательно, ограничена.

Достаточность. От противного. Предположим, что функция $f(x)$ ограничена снизу на $\mathbb{R}^n_+$, но матрица M не является коположительной. Тогда найдется ненулевой вектор $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$, для которого $\langle \bar{x}, M\bar{x}\rangle < 0$. Но тогда для любого $\lambda > 0$, беря вектор $\lambda\bar{x}$, получаем, что $\lambda\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+$ и

$$f(\lambda\bar{x}) = \lambda^2\langle \bar{x}, M\bar{x}\rangle + \lambda\langle q, \bar{x}\rangle = \lambda\left(\lambda\langle \bar{x}, M\bar{x}\rangle + \langle q, \bar{x}\rangle\right).$$

Отсюда видно, что $f(\lambda\bar{x}) \to -\infty$ при $\lambda \to +\infty$, что противоречит ограниченности функции $f(x)$ снизу на $\mathbb{R}^n_+$. ■

Для строго коположительных функций имеет место более сильный результат, который доказывается аналогично.

Утверждение 1.3.9. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является строго коположительной в том и только в том случае, когда функция (1.3.7) ограничена снизу на $\mathbb{R}^n_+$ для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$.*

Наряду с коположительными и строго коположительными матрицами рассматривают также следующие классы матриц.

Определение 1.3.10. *Коположительная матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется сильно коположительной, если из $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $\langle x, Mx\rangle = 0$ следует, что $(M + M^T)x = 0_n$.*

Сильно коположительные матрицы называют также коположительными-плюс матрицами.

Как следует из определения 1.3.10, матрица M является сильно коположительно в том и только в том случае, когда каждая точка x_* минимума квадратичной функции $f(x) = x^T Mx$ на $\mathbb{R}^n_+$ является точкой, в которой выполняются необходимые условия минимума $f(x)$ на всем пространстве $\mathbb{R}^n$, т.е. $f_x(x_*) = 0_n$.

1.3.5. Достаточные матрицы

Введем понятия достаточных матриц.

Определение 1.3.11. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется достаточной по столбцам (или столбцово-достаточной), если из $x^i(Mx)^i \leq 0$ для всех $i \in J^n$ следует, что $x^i(Mx)^i = 0$ для всех $i \in J^n$. Матрица M называется достаточной по строкам (или строчно-достаточной), если матрица M^T достаточна по столбцам. Достаточная по строкам и столбцам матрица называется просто достаточной.*

Про матрицу $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ говорят, что она *обращает знак вектора* $x \in \mathbb{R}^n$, если $x^i(Mx)^i \leq 0$ для всех $i \in J^n$. Таким образом, если матрица M является достаточной по столбцам, то для любого вектора x, у которого она обращает знак, выполняется $(Mx)^i = 0$ для всех $i \in J_\pm(x)$.

Если матрица M достаточна по строкам, то у нее для любых индексов $i, j \in J^n$ таких, что $i \neq j$, из $m_{ii} = 0$, $m_{ji} \geq 0$ следует, что $m_{ij} \leq 0$. Класс достаточных по строкам матриц является полным.

Любая положительно полуопределенная матрица является достаточной по столбцам. Примером достаточной по столбцам матрицы является также следующая 2×2 матрица

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это матрица параллельного вдоль горизонтальной оси проектирования в $\mathbb{R}^2$ на прямую $x^{(2)} = x^{(1)}$. Но она не является достаточной по строкам. Достаточной по строкам будет транспонированная матрица

$$M^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Она проектирует вдоль прямой $x^{(2)} = -x^{(1)}$ на вертикальную ось.

1.3.6. $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}_0$-матрицы

Определение 1.3.12. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется $\mathcal{P}$-матрицей, если все ее главные миноры положительны.*

Симметричная матрица M в том и только в том случае является $\mathcal{P}$-матрицей, если она положительно определена. На самом деле, каждая положительно определенная матрица (симметричная или несимметричная) есть $\mathcal{P}$-матрица.

Следующая несимметричная матрица

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

является $\mathcal{P}$-матрицей, но не является положительно определенной. В самом деле, взяв $x = [1,1]^T$, получаем $\langle x, Mx\rangle = -1$.

Нетрудно видеть, что если M есть $\mathcal{P}$-матрица, то и M^T также оказывается $\mathcal{P}$-матрицей. Непосредственно из определения следует, что класс $\mathcal{P}$-матриц полный.

Утверждение 1.3.10. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является $\mathcal{P}$-матрицей в том и только в том случае, когда она не обращает знак ни у одного ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. *Необходимость.* Доказательство по индукции. Для матриц порядка единицы оно очевидно. Предположим далее, что $\mathcal{P}$-матрица M не обращает знак ни у одного ненулевого вектора, если порядок матрицы не превосходит $n-1$, и покажем, что это свойство сохраняется, когда порядок M становится равным n.

От противного, пусть имеется ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ и матрица M обращает его знак, т.е. $D(x)Mx \leq 0_n$. Если вектор x такой, что $x^i = 0$ для некоторого индекса $1 \leq i \leq n$, то взяв главную подматрицу матрицы M и вычеркнув из нее строку и столбец с номером i, получим $\mathcal{P}$-матрицу порядка $n-1$, которая обращает знак ненулевого вектора, что по предположению индукции невозможно. Поэтому все компопоненты вектора x должны быть ненулевыми.

Положим $y = D^{-1}(x)Mx$. Так как знаки диагональных элементов матриц $D(x)$ и $D^{-1}(x)$ совпадают, то из неравенства $D(x)Mx \leq 0_n$ следует, что $y \leq 0_n$. Но тогда, поскольку $D(y) = D^{-1}(x)D(Mx)$ и диагональные матрицы перестановочны, имеет место равенство

$$D(y)x = D(Mx)D^{-1}(x)x = D(Mx)\bar{e} = Mx.$$

Поэтому, если обозначить $D = -D(y)$, то получаем, что

$$(M + D)\, x = 0_n, \tag{1.3.8}$$

причем, как мы выяснили, у диагональной матрицы D все ее диагональные элементы d^i, $1 \le i \le n$, оказываются неотрицательными. Более того, матрица D не может быть нулевой, так как иначе $y = 0_n$ и, следовательно, для $\mathcal{P}$-матрицы M, которая обязательно неособая, выполняется равенство $Mx = 0_n$, что невозможно, поскольку x — ненулевой вектор.

Матрица $M + D$ имеет вид

$$M + D = \left[M_{*,1} + d^1 e_1,\, M_{*,2} + d^2 e_2,\, \ldots,\, M_{*,n} + d^n e_n\right],$$

где $M_{*,i}$ — i-й столбец матрицы M, и e_i есть i-й единичный орт. Так как определитель матрицы является линейной однородной функцией своих столбцов, то справедлива формула

$$\det(M + D) = \sum_{J_B \subseteq J^n} \left(\prod_{i \in J_B} d^i \right) \det M_{NN},$$

где суммирование ведется по всем подмножествам индексов J_B из J^n. Множество индексов J_N является дополнением J_B до J^n, подматрица M_{NN} матрицы M составлена из строк столбцов с номерами из J_N.

Из того, что M есть $\mathcal{P}$ матрица и из того, что у диагональной матрицы D все диагональные элементы неотрицательны, причем некоторые из них положительные, следует, что $\det(M + D) > 0$, т.е. $M + D$ — невырожденная матрица. На основании (1.3.8) тогда заключаем, что вектор x должен быть нулевым. Это противоречит сделанному допущению.

Достаточность. Покажем, что у матрицы M все ее действительные собственные числа положительны. Пусть λ — действительное собственное число и пусть x соответствующий этому собственному числу собственный вектор. Имеем $Mx = \lambda x$. Так как матрица M не обращает знак ни у одного ненулевого вектора, то отсюда следует, что $\lambda > 0$. Но определитель матрицы M равен произведению собственных чисел, причем компоненты комплексных собственных чисел входят сопряженными парами, так как матрица M вещественная. Отсюда следует, что определитель M строго положителен.

Если обратиться к главным подматрицам матрицы M, то из того, что M не обращает знак ни у одного ненулевого вектора, сразу же следует, что и любая главная подматрица также не обращает знак у соответствующих ненулевых подвекторов. Поэтому аналогично вышесказанному получаем, что и их детерминанты также все строго положительны. Таким образом, M является $\mathcal{P}$-матрицей. ■

Согласно утверждению 1.3.10 неравенство $D(x)Mx \le 0_n$ для $\mathcal{P}$-матрицы M может выполняться только как равенство, причем при $x = 0_n$. Заметим также, что из доказательства утверждения 1.3.10 следует другой важный результат, касающийся $\mathcal{P}$-матриц, а именно,

Утверждение 1.3.11. *Матрица $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является $\mathcal{P}$-матрицей в том и только в том случае, когда все ее действительные собственные числа, а также все действительные собственные числа главных подматриц строго положительны.*

Укажем на еще одно важное свойство $\mathcal{P}$-матриц.

Утверждение 1.3.12. *Каждая $\mathcal{P}$-матрица является $\mathcal{S}$-матрицей.*

Доказательство от противного. Пусть $\mathcal{P}$-матрица M не есть $\mathcal{S}$-матрица. Тогда по теореме Билля об альтернативах существует ненулевое решение у системы

$$M^T u \le 0_n, \quad u \ge 0_n.$$

Отсюда приходим к выводу, что матрица M^T обращает знак у ненулевого вектора. Но M^T, как и M, является $\mathcal{P}$-матрицей. Мы получили противоречие с утверждением 1.3.10. ■

Как уже отмечалось, класс $\mathcal{P}$-матриц является полным. Поэтому из утверждения 1.3.12 на самом деле следует, что $\mathcal{P}$-матрица является полной $\mathcal{S}$-матрицей. Но согласно утверждению 1.3.5 класс полных $\mathcal{S}$-матриц совпадает с классом строго полумонотонных матриц. Отсюда приходим к следующему результату.

Утверждение 1.3.13. *Каждая $\mathcal{P}$-матрица является строго полумонотонной матрицей.*

Суммируя все вышесказанное относительно $\mathcal{P}$-матриц, а также строго полумонотонных матриц, приходим к выводу, что между этими матрицами существует следующая связь:

Положительно определенные матрицы	$\Longrightarrow$	$\mathcal{P}$-матрицы	$\Longrightarrow$	Строго полумонотонные матрицы	.

Перейдем теперь к рассмотрению $\mathcal{P}_0$-матриц.

Определение 1.3.13. *Матрица M называется $\mathcal{P}_0$-матрицей, если все ее главные миноры неотрицательны.*

Положительно полуопределенные матрицы являются $\mathcal{P}_0$-матрицами, каждый вектор, у которого $\mathcal{P}_0$-матрица обращает знак, принадлежит ее нуль-пространству. Достаточные по строкам матрицы также являются $\mathcal{P}_0$-матрицами. У $\mathcal{P}_0$-матрицы все действительные собственные значения неотрицательны. $\mathcal{P}_0$-матрица является полумонотонной матрицей. Таким, образом $\mathcal{P}_0$-матрицы связаны с другими матрицами следующим образом:

$$\boxed{\text{Положительно полуопределенные матрицы}} \Longrightarrow \boxed{\mathcal{P}_0\text{-матрицы}} \Longrightarrow \boxed{\text{Полумонотонные матрицы}}.$$

Введем подкласс $\mathcal{P}_0$-матриц, так называемые адекватные $\mathcal{P}_0$-матрицы. Пусть J_B – набор индексов из множества J^n. Пусть, кроме того, M_{BB} — главная подматрица M, соответствующая индексному множеству J_B. Через M_{JB} обозначим подматрицу M, составленную из столбцов M с номерами из J_B.

Определение 1.3.14. *Мы скажем, что матрица M является адекватной по столбцам,если для любого $J_B \subseteq J^n$ из $\det M_{BB} = 0$ следует, что у подматрицы M_{JB} имеются линейно зависимые столбцы. Матрица M называется адекватной по строкам, если матрица M^T адекватна по столбцам. Адекватная по столбцам и строкам матрица называется просто адекватной.*

$\mathcal{P}$-матрицы и симметричные положительно полуопределенные матрицы являются адекватными матрицами. Все адекватные по столбцам (строкам) матрицы являются одновременно достаточными по столбцам (строкам).

1.4. Существование решений ЛЗД и их единственность

1.4.1. ЛЗД с положительно определенными матрицами

Линейные задачи дополнительности самым тесным образом связаны с задачами квадратичного программирования (ЗКП). Мы уже рассматривали в первом параграфе способ, с помощью которого задачу квадратичного программирования с симметричной матрицей можно представить в виде ЛЗД. Возможен также и обратный переход от произвольной ЛЗД к задаче квадратичного программирования. Такой прием оказывается крайне плодотворным, так как позволяет многие результаты, касающиеся существования решений задач квадратичного программирования, перенести на линейные задачи дополнительности.

Предположим, что имеется задача дополнительности $LCP(q, M)$, где матрица M, вообще говоря, произвольная (не обязательно симметричная). Поставим ей в соответствие ЗКП

$$\begin{array}{rcl} x^T M x + q^T x & \longrightarrow & \min \\ Mx + q & \geq & 0_n, \\ x & \geq & 0_n. \end{array} \tag{1.4.1}$$

Утверждение 1.4.1. *Если допустимое множество в $LCP(q, M)$ не пусто, то существует решение ЗКП (1.4.1).*

Доказательство основывается на теореме Франка-Вульфа, согласно которой, если квадратичная функция оказывается ограниченной снизу на допустимом множестве, то она достигает на нем своего минимального значения. В нашем случае допустимое множество не пусто и целевая функция является неотрицательной на нем. Таким образом, задача квадратичного программирования обязательно имеет решение. ■

Из утверждения 1.4.1 вообще говоря не следует, что значение целевой функции в оптимальной точке равно нулю. Понятно, что оно будет неотрицательным. Если же дополнительно удается установить, что минимальное значение равно нулю, то соответствующая ЛЗД будет также обладать решением. Для положительно полуопределенной матрицы M этот результат действительно имеет место.

Выпишем условия оптимальности, которые должны выполняться в решении x_* задачи (1.4.1). С этой целью составим функцию Лагранжа

$$L(x, u) = \langle x, Mx + q\rangle - \langle u, Mx + q\rangle, \quad x \geq 0_n, \quad u \geq 0_n,$$

где u — вектор множителей Лагранжа для ограничений $Mx + q \geq 0_n$. Тогда в точке Каруша-Куна-Таккера $[x_*, u_*]$:

$$\begin{gathered} Mx_* + q + M^T(x_* - u_*) \geq 0_n, \\ D(x_*)[Mx_* + q + M^T(x_* - u_*)] = 0_n, \\ Mx_* + q \geq 0_n, \\ D(u_*)(Mx_* + q) = 0_n, \\ x_* \geq 0_n, \quad u_* \geq 0_n, \end{gathered} \tag{1.4.2}$$

Здесь учтено, что матрица M, вообще говоря, не является симметричной.

Лемма 1.4.1. *Пусть точки $x_* \geq 0_n$ и $u_* \geq 0_n$ удовлетворяют условиям (1.4.2). Тогда*

$$\langle x_* - u_*, M^T(x_* - u_*)\rangle \leq 0. \tag{1.4.3}$$

Доказательство. Так как $x_* \geq 0_n$, $u_* \geq 0_n$, то в силу первого и третьего неравенств (1.4.2)

$$D(x_*)(Mx_* + q) \geq 0_n, \quad D(u_*)\left[Mx_* + q + M^T(x_* - u_*)\right] \geq 0_n.$$

Отсюда и из второго и четвертого равенств (1.4.2) вытекают неравенства:

$$D(x_*)M^T(x_* - u_*) \leq 0_n, \quad -D(u_*)M^T(x_* - u_*) \leq 0_n, \tag{1.4.4}$$

складывая которые покомпонентно, получаем

$$D(x_* - u_*)M^T(x_* - u_*) \leq 0_n. \tag{1.4.5}$$

Выполнение данных n неравенств влечет также неравенство (1.4.3). ■

Обратимся теперь к задачам $LCP(q, M)$ с положительно полуопределенными матрицами M.

Теорема 1.4.1. *Пусть M является положительно полуопределенной матрицей. Тогда, если задача $LCP(q, M)$ допустима, то она разрешима.*

Доказательство. Из допустимости $LCP(q, M)$ согласно утверждению 1.4.1 следует существование решения задачи (1.4.1). Поэтому найдутся $x_* \geq 0_n$ и $u_* \geq 0_n$, удовлетворяющие условиям оптимальности (1.4.2). Возьмем такие точки. По лемме 1.4.1 в этом случае имеет место неравенство (1.4.3). В силу того, что матрица M^T наряду с M положительно полуопределена, данное неравенство (1.4.3) может выполняться только как равенство, т.е.

$$\langle x_* - u_*, M^T(x_* - u_*)\rangle = 0.$$

Но тогда и неравенства (1.4.5) также все должны выполняться как равенства:

$$D(x_* - u_*)M^T(x_* - u_*) = 0_n. \tag{1.4.6}$$

Равенство (1.4.6), если учесть (1.4.4), влечет выполнение другого равенства

$$D(x_*)M^T(x_* - u_*) = 0_n. \tag{1.4.7}$$

Действительно, если хотя бы для одного индекса $i \in J^n$ оказалось $x_*^i(M^T(x_* - u_*))^i < 0$, то в силу того, что $-u_*^i(M^T(x_* - u_*))^i \leq 0$, получили бы строгое неравенство

$$(x_* - u_*)^i(M^T(x_* - u_*))^i < 0,$$

что противоречит (1.4.6).

В силу (1.4.7) второе равенство из (1.4.2) может быть переписано как

$$D(x_*)(Mx_* + q) = 0_n.$$

Выполнение данного равенства означает, что допустимая точка x_* является решением задачи $LCP(q, M)$. ■

Следствие 1.4.1. *Положительно полуопределенные матрицы принадлежат классу $\mathcal{Q}_0$.*

Для положительно определенных матриц можно получить более сильный результат.

Теорема 1.4.2. *Пусть M является положительно определенной матрицей. Тогда задача $LCP(q, M)$ для всех векторов $q \in \mathbb{R}^n$ имеет решение, причем единственное.*

Доказательство. Положительно определенная матрица, как следует из утверждения 1.3.1 является $\mathcal{S}$-матрицей. Поэтому по теореме 1.3.1 задача $LCP(q, M)$ допустима для всех векторов $q \in \mathbb{R}^n$. Но положительно определенная матрица заведомо есть положительно полуопределенная матрица. Отсюда в силу теоремы 1.4.1 заключаем, что задача $LCP(q, M)$ имеет решение для всех $q \in \mathbb{R}^n$. Остается показать, что это решение единственно. Но как следует из доказательства предыдущей теоремы, решение задачи дополнительности — точка x_* — должна быть решением задачи квадратичного программирования (1.4.1). Так как целевая функция $x^T(Mx + q)$ в этой задаче в силу того, что матрица M является положительно определенной, сильно выпукла, то решение единственно. ■

Следствие 1.4.2. *Положительно определенная матрица принадлежат классу $\mathcal{Q}$, причем соответствующая ЛЗД всегда обладает единственным решением.*

Как было выяснено, положительно полуопределенные и положительно определенные матрицы принадлежат соответственно классам $\mathcal{Q}_0$ и $\mathcal{Q}$. Но имеются и другие более общие классы матриц, которые входят в $\mathcal{Q}_0$ или $\mathcal{Q}$. Из доказательства теоремы 1.4.1 фактически вытекает следующий результат.

Теорема 1.4.3. *Пусть M является строчно-достаточной матрицей. Тогда она принадлежит классу $\mathcal{Q}_0$.*

Доказательство. Надо показать, что если задача $LCP(q,M)$ допустима, то она имеет решение. Действительно, тогда в силу утверждения 1.4.1 задача квадратичного программирования имеет решение $x_* \geq 0_n$ и x_* месте с некоторым вектором $u_* \geq 0_n$ образуют точку Каруша-Куна-Таккера, т.е. удовлетворяет условиям (1.4.2). Но тогда выполняются неравенства (1.4.5), из которых, поскольку M — строчно-достаточная матрица, следуют равенства (1.4.6). Поэтому, как и при доказательстве теоремы 1.4.1 убеждаемся, что x_* является решением $LCP(q,M)$. ■

1.4.2. ЛЗД со строго коположительными матрицами

При обосновании результатов теорем 1.4.1 и 1.4.2 о существовании решений у допустимых $LCP(q,M)$ с положительно полуопределенной или строчно-достаточной матрицей существенным образом использовался подход, основанный на рассмотрении соответствующей задачи квадратичного программирования (1.4.1). В теории линейных задач дополнительности широко применяется еще один прием, который оказывается весьма полезным при доказательстве разного рода теорем существования. Он основан на рассмотрении *расширенных линейных задач дополнительности*, а именно, когда по заданной задаче $LCP(q,M)$ строится другая задача $LCP(\tilde{q},\tilde{M})$, в которой

$$\tilde{q} = \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} M & d \\ -d^T & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.4.8}$$

где $d > 0_n$ и $\lambda \geq 0$. Размерность этой расширенной задачи $LCP(\tilde{q},\tilde{M})$ на единицу больше, чем размерность исходной задачи $LCP(q,M)$.

Если $\tilde{x}_* = [x_*, x_*^{n+1}]^T$ — решение расширенной задачи, то должны выполняться следующие соотношения

$$\begin{array}{lll} y_* = Mx_* + x_*^{n+1}d + q \geq 0_n, & x_* \geq 0_n, & y_*^T x_* = 0, \\ y_*^{n+1} = \lambda - d^T x_* \geq 0, & x_*^{n+1} \geq 0, & y_*^{n+1} x_*^{n+1} = 0. \end{array} \tag{1.4.9}$$

В случае, когда решение $\tilde{x}_* = [x_*, x_*^{n+1}]^T$ оказывается таким, что $x_*^{n+1} = 0$, то вектор x_* будет одновременно и решением исходной задачи $LCP(q, M)$. В частности, равенство $x_*^{n+1} = 0$ выполняется, если $y_*^{n+1} > 0$, т.е. когда $d^T x_* < \lambda$.

Покажем, что система равенств и неравенств (1.4.9) всегда имеет решение, какие бы ни были матрица M и вектор q. Отсюда сразу следует, что расширенная задача $LCP(\tilde{q}, \tilde{M})$ всегда разрешима. С этой целью воспользуемся специальной постановкой в форме вариационного неравенства (более подробно такие неравенства будут рассматриваться в следующей главе).

Предположим, что задано множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и отображение $F(x)$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, определенное на некоторой области, содержащей множество X. Под решением *вариационного неравенства* понимается нахождение такой точки $x \in X$, для которой выполнялось бы

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \quad \forall y \in X. \tag{1.4.10}$$

В следующем утверждении приводятся наиболее простые предположения, при которых у вариационного неравенства (1.4.10) всегда имеется решение.

Теорема 1.4.4. *Пусть X — выпуклый компакт, а отображение $F(x)$ непрерывно. Тогда решение вариационного неравенства (1.4.10) существует .*

Доказательство. Обозначим через $\pi_X(x)$ проекцию точки $x \in \mathbb{R}^n$ на множество X. Так как X — выпуклый компакт, то такая проекция всегда существует и единственна. Более того, отображение $\pi_X(x)$ является непрерывным.

Из основных свойств проекции вытекает, что $\pi_X(x)$ будет проекцией точки x в том и только в том случае, когда она удовлетворяет неравенству

$$\langle \pi_X(x) - x, y - \pi_X(x) \rangle \geq 0 \quad \forall y \in X. \tag{1.4.11}$$

Рассмотрим теперь непрерывное отображение $F_1(x) = \pi_X(x - F(x))$. Пусть x_* — его неподвижная точка, т.е.

$$x_* = \pi_X(x_* - F(x_*)). \tag{1.4.12}$$

Из (1.4.12) сразу получаем, что эта точка x_* будет решением вариационного неравенства (1.4.10). Действительно, тогда для всех $y \in X$ в силу (1.4.11) выполняется

$$\begin{aligned}
&\langle F(x_*), y - x_* \rangle = \\
&\quad = \langle F(x_*) - x_* + x_*, y - x_* \rangle = \\
&\quad = \langle \pi_X(x_* - F(x_*)) - (x_* - F(x_*)), y - \pi_X(x_* - F(x_*)) \rangle \geq 0.
\end{aligned}$$

Остается показать, что такая точка x_* при сделанных предположениях всегда существует. Но это следует из *теоремы Брауэра о неподвижной точке*, согласно которой непрерывное отображение из компактного множества в него само всегда имеет неподвижную точку. ■

Возьмем теперь в качестве X компактное множество

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \; d^T x \leq \lambda\right\},$$

а в качестве $F(x)$ — линейное отображение $F(x) = Mx + q$. Тогда по теореме 1.4.4 у вариационного неравенства

$$\langle Mx + q, y - x\rangle \geq 0 \quad \forall \quad y \geq 0_n, \; d^T y \leq \lambda, \tag{1.4.13}$$

всегда существует решение — точка x_*, т.е. выполняется

$$\langle Mx_* + q, y - x_*\rangle \geq 0 \quad \forall \quad y \geq 0_n, \; d^T y \leq \lambda.$$

Если далее положить $c = Mx_* + q$, то эта же точка x_* в силу необходимых и достаточных условий минимума линейной (а следовательно и выпуклой) функции $\langle c, x\rangle$ на выпуклом множестве X будет решением задачи

$$\min_{x \in X} \langle c, x\rangle,$$

которая является очевидно задачей линейного программирования:

$$\begin{array}{rcl} \min \; c^T x & & \\ d^T x & \leq & \lambda, \\ x & \geq & 0_n. \end{array} \tag{1.4.14}$$

Двойственная к (1.4.14) задача имеет вид

$$\begin{array}{rcl} \max \; -\lambda u & & \\ c + ud & \geq & 0_n, \\ u & \geq & 0. \end{array} \tag{1.4.15}$$

Так как задача (1.4.14) имеет решение, а именно, точку x_*, то двойственная задача также должна иметь решение. Пусть u_* есть решение (1.4.15). Тогда по теореме двойственности для пары задач линейного программирования должны выполняться соотношения (они следуют из допустимости как для прямой, так и двойственной задачи, а также из условий дополняющей нежесткости):

$$\begin{array}{lll} v_* = c + u_* d \geq 0_n, & x_* \geq 0_n, & v_*^T x_* = 0, \\ w_* = \lambda - d^T x_* \geq 0, & u_* \geq 0, & w_* u_* = 0. \end{array} \tag{1.4.16}$$

или, если учесть, что $c = Mx_* + q$,

$$\begin{array}{lll} v_* = Mx_* + u_* d + q \geq 0_n, & x_* \geq 0_n, & v_*^T x_* = 0, \\ w_* = \lambda - d^T x_* \geq 0, & u_* \geq 0, & w_* u_* = 0. \end{array} \tag{1.4.17}$$

Число w_* и $v_* \in \mathbb{R}^n$ в (1.4.16) являются множителями Лагранжа для соответственно задач (1.4.14) и (1.4.15).

Теорема 1.4.5. *Пусть матрица $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и вектор $q \in \mathbb{R}^n$ заданы. Тогда для любого вектора $d > 0_n$ и любого $\lambda \geq 0$ расширенная линейная задача дополнительности $LCP(\tilde{q}, \tilde{M})$, где $\tilde{q}$ и $\tilde{M}$ определяются согласно (1.4.8), имеет решение.*

Доказательство. Достаточно показать, что система равенств и неравенств (1.4.9) разрешима.

Возьмем точку x_*, которая является решением вариационного неравенства (1.4.13). По теореме 1.4.4 она всегда существует. В этом случае, как было установлено, x_* вместе с u_* удовлетворяют условиям (1.4.17), причем эти условия являются не только необходимыми, но и достаточными.

Покажем, что из (1.4.17) следует (1.4.9). Рассмотрим сначала тривиальные случаи, когда $Mx_* + q \geq 0_n$ или $d^T x_* < \lambda$. Тогда условия (1.4.17) выполняются при $u_* = 0$ и из (1.4.17) видно, что условия (1.4.9) также будут выполняться при данном x_* и $x_*^{n+1} = u_* = 0$.

В случае, когда ни $Mx_* + q \geq 0_n$, ни $d^T x_* < \lambda$, можно взять

$$x_*^{n+1} = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\frac{-(Mx_* + q)^i}{d^i} \right].$$

Система равенств и неравенств (1.4.9) при таких x_* и x_*^{n+1} опять оказывается выполненной. Следовательно, в задаче $LCP(\tilde{q}, \tilde{M})$ существует решение. ■

Лемма 1.4.2. *Пусть $\{\lambda_k\}$ — неограниченная последовательность неотрицательных чисел. Пусть, кроме того, у последовательности расширенных линейных задач дополнительности $LCP(\tilde{q}_k, \tilde{M})$, где $\tilde{M}$ и $\tilde{q}_k$ определяются согласно (1.4.8) при $\lambda = \lambda_k$, существует решение $\{[x_k, x_k^{n+1}]\}$ такое, что ноль является точкой накопления последовательности $\{x_k^{n+1}\}$. Тогда задача $LCP(q, M)$ имеет решение.*

Доказательство. Предположим, не умаляя общности, что последовательность $\{x_k^{n+1}\}$ является сходящейся. Тогда согласно условиям леммы $\lim_{k \to \infty} x_k^{n+1} = 0$.

Пусть $J_B \subseteq J^n$ — подмножество индексов и пусть J_N — его дополнение в J^n, т.е. $J_N = J^n \setminus J_B$. Через M_{BB} обозначим подматрицу матрицы M, составленную из строк и столбцов с номерами из множества J_B. Через M_{NB} обозначим подматрицу M, составленную из строк с номерами из J_N и со столбцами с номерами из J_B. Аналогичное разбиение используется и для n-мерных векторов, например, вектор x делится на два подвектора x^B и x^N. Первый подвектор x^B содержит компоненты x с номерами из J_B, второй подвектор x^N — компоненты с номерами из J_N.

Так как множество индексов J^n конечно, то всегда можно выделить множество J_B и подпоследовательность номеров $\{k_s\}$ таких, что $x^B_{k_s} > 0$ и $x^N_{k_s} = 0$. В силу дополнительности для этих $\{k_s\}$ должно выполняться $y^B_{k_s} = 0$.

Имеем для номеров из $\{k_s\}$:

$$\begin{aligned} y^B_{k_s} &= M_{BB}x^B_{k_s} + x^{n+1}_{k_s}d^B + q^B = 0, \\ y^N_{k_s} &= M_{NB}x^B_{k_s} + x^{n+1}_{k_s}d^N + q^N \geq 0. \end{aligned}$$

Так как $x^{n+1}_{k_s} \to 0$, то найдутся векторы $x_* \in \mathbb{R}^n$ и $y_* \in \mathbb{R}^n$ такие, что $x^B_* \geq 0$, $x^N_* = 0$ и

$$y^B_* = M_{BB}x^B_* + q^B = 0, \quad y^N_* = M_{NB}x^B_* + q^N \geq 0.$$

Следовательно

$$x_* \geq 0_n, \quad y_* \geq 0_n, \quad \langle x_*, y_* \rangle = \langle x^B_*, y^B_* \rangle + \langle x^N_*, y^N_* \rangle = 0.$$

Таким образом, вектор x_* является решением задачи $LCP(q, M)$. ■

Лемма 1.4.3. *Пусть для некоторых $q \in \mathbb{R}^n$ и $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ квадратичная функция*

$$f(x) = x^T(Mx + q) \tag{1.4.18}$$

ограничена снизу на $\mathbb{R}^n_+$. Тогда $LCP(q, M)$ имеет решение.

Доказательство. Возьмем неограниченно возрастающую последовательность неотрицательных величин $\{\lambda_k\}$. Пусть $\{[x_k, x^{n+1}_k]\}$ — последовательность решений соответствующих расширенных задач дополнительности $LCP(\tilde{q}_k, \tilde{M})$, в которых $\lambda = \lambda_k$. Предположим, что ноль не является точкой накопления последовательности $\{x^{n+1}_k\}$. Тогда для всех достаточно больших k должно выполняться $x^{n+1}_k \geq c > 0$. В силу дополнительности для этих k имеет место равенство $d^T x_k = \lambda_k$. Более того, из равенства

$$x^T_k \left(Mx_k + x^{n+1}_k d + q\right) = 0$$

вытекает, что

$$f(x_k) = x_k^T(Mx_k + q) = -x_k^{n+1} d^T x_k = -x_k^{n+1}\lambda_k.$$

Так как $\{\lambda_k\}$ — неограниченно возрастающая последовательность, то отсюда следует, что $f(x_k) \to -\infty$. Но это невозможно в силу сделанных предположений. Поэтому ноль является предельной точкой последовательности $\{x_k^{n+1}\}$ и по лемме 1.4.2 задача $LCP(q, M)$ должна иметь решение. ■

Теорема 1.4.6. *Пусть M — строго коположительная матрица. Тогда для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$ задача $LCP(q, M)$ имеет решение.*

Доказательство. Согласно утверждению 1.3.9 квадратичная функция (1.4.18), где M — строго коположительная матрица, ограничена снизу на $\mathbb{R}^n_+$ для любого $q \in \mathbb{R}^n$. Поэтому по лемме 1.4.3 задача $LCP(q, M)$ с такой матрицей M обязательно имеет решение. ■

Следствие 1.4.3. *Любая строго коположительная матрица принадлежит классу $\mathcal{Q}$.*

Заметим, что если взять просто коположительную матрицу, то она, в отличие от положительно полуопределенных матриц, не принадлежит классу $\mathcal{Q}_0$. Однако, как можно показать, сильно коположительная матрица обладает уже этим свойством.

1.4.3. ЛЗД с $\mathcal{P}$-матрицами

Линейные задачи дополнительности со строго коположительными матрицами, как только что выяснено, имеют решения для любого вектора q. Ранее было показано, что этим свойством обладают задачи с положительно определенные матрицы. Более того, в задачах с положительно определенными матрицами решение всегда единственно. Но в задачах со строго коположительными матрицами об единственности решения уже говорить нельзя. Встает вопрос, а имеются ли другие матрицы, для которых соответствующие линейные задачи дополнительности всегда имеют решение, причем единственное. Ответ на этот вопрос утвердительный и такими матрицами оказываются $\mathcal{P}$-матрицы.

Теорема 1.4.7. *Пусть M является $\mathcal{P}$-матрицей. Тогда для всех $q \in \mathbb{R}^n$ линейная задача дополнительности $LCP(q, M)$ имеет решение, причем единственное.*

Доказательство. Согласно утверждению 1.3.12 любая $\mathcal{P}$-матрица есть $\mathcal{S}$-матрица и следовательно, в силу теоремы 1.3.1, задача $LCP(q, M)$

с данной матрицей M допустима для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$. Поэтому в силу утверждения 1.4.1 всегда существует решение $x_* \in \mathbb{R}^n_+$ задачи квадратичного программирования (1.4.1). В этом случае $x_* \geq 0_n$ вместе с некоторым вектором $u_* \geq 0_n$ удовлетворяют условиям (1.4.2) и неравенству

$$D(x_* - u_*)M^T(x_* - u_*) \leq 0_n. \tag{1.4.19}$$

Так как M^T наряду с M есть $\mathcal{P}$-матрица, то согласно утверждению 1.3.10 она не обращает знак ни у одного ненулевого вектора. Тогда из (1.4.19) следует, что $x_* = u_*$. Поэтому равенство

$$D(x_*)\left[Mx_* + q + M^T(x_* - u_*)\right] = 0_n,$$

имеющее место согласно (1.4.2), переходит в

$$D(x_*)\left(Mx_* + q\right) = 0_n.$$

Таким образом, x_* есть решение $LCP(q, M)$.

Покажем, что данное решение x_* единственное. Предположим, что имеется другое решение $\bar{x}$, не совпадающее с x_*. Пусть $y_* = Mx_* + q$, $\bar{y} = M\bar{x} + q$. Тогда после вычитания получаем

$$y_* - \bar{y} = M\left(x_* - \bar{x}\right),$$

откуда

$$D(x_* - \bar{x})(y_* - \bar{y}) = D(x_* - \bar{x})M\left(x_* - \bar{x}\right). \tag{1.4.20}$$

Но в силу того, что $D(x_*)y_* = 0_n$, $D(\bar{x})\bar{y} = 0_n$, выполняется неравенство

$$D(x_* - \bar{x})(y_* - \bar{y}) = -\left[D(\bar{x})y_* + D(x_*)\bar{y}\right] \leq 0_n,$$

так как все компоненты векторов x_*, $\bar{x}$, y_* и $\bar{y}$ неотрицательны. Отсюда и из (1.4.20) заключаем, что

$$D(x_* - \bar{x})M\left(x_* - \bar{x}\right) \leq 0_n.$$

Тогда на основании того, что M есть $\mathcal{P}$-матрица, опять делаем вывод, что $x_* = \bar{x}$. Мы пришли к противоречию. Поэтому не может быть другого решения $\bar{x}$, отличного от x_*. ■

Следствие 1.4.4. *Любая $\mathcal{P}$-матрица принадлежит классу $\mathcal{Q}$, причем соответствующая ЛЗД обладает единственным решением.*

Таким образом, выявлена следующая связь между строго коположительными матрицами, $\mathcal{P}$-матрицами и матрицами из класса $\mathcal{Q}$.

Строго коположительные матрицы $\Longrightarrow$ $\mathcal{Q}$-матрицы $\Longleftarrow$ $\mathcal{P}$-матрицы

Как уже отмечалось, положительно определенные матрицы являются $\mathcal{P}$-матрицами.

1.5. Метод решения ЛЗД симплексного типа

1.5.1. Ведущее преобразование

Среди методов решения ЛЗД важное место занимают процедуры, использующие технику ведущих преобразований, аналогичную той, которая применяется при решении задач линейного программирования симплекс-методом. В связи с этим рассмотрим линейное уравнение

$$I_n y - Mx = q, \tag{1.5.1}$$

входящее в определение допустимого множества $X(q, M)$ в линейной задаче дополнительности $LCP(q, M)$.

У уравнения (1.5.1) существует множество решений — фактически это линейное подпространство размерности n в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ (обратим внимание, что матрица $[I_n, -M]$ полного ранга, так как в нее входит единичная матрица I_n). Для представления различных решений этого уравнений и для перехода от одних решений к другим удобно использовать *ведущие преобразования*.

Пусть $[x, y]$ — произвольное решение системы (1.5.1). Среди компонент векторов x и y выбираются n компонент, которые объявляются *базисными*, а остальные компоненты объявляются *внебазисными* (их называют ещё *небазисными*). При выборе базисных переменных важно только соблюсти следующее требование, а именно, чтобы столбцы $n \times 2n$ матрицы $[I_n, -M]$, соответствующие базисным переменным, были *линейно независимы*. Таким образом, любому набору базисных переменных ставится в соответствие *базис*, состоящий из n линейно независимых столбцов матрицы $[I_n, -M]$.

О невырожденной матрице порядка n, составленную из этих столбцов, говорят как о *матрице базиса*. Из-за линейной независимости столбцов матрицы базиса любой n-мерный вектор, в частности, вектор q, а также все столбцы матрицы $[I_n, -M]$, могут быть разложены по элементам этого базиса. Например, если считать базисными переменными компоненты вектора $y = [y^1, \ldots, y_n]$, то в качестве матрицы базиса берется единичная матрица I_n. В следствие того, что столбцы матрицы I_n образуют естественный базис пространства, представление матрицы $[I_n, -M]$ и вектора q в этом базисе остаются прежними.

Ведущее преобразование заключается в переходе от одного базиса к другому. Делать это, разумеется, можно разными способами. Рассмотрим один из них, который применяется при решении линейных задач дополнительности.

Допустимое множество $X(q, M)$ в линейной задаче дополнительности $LCP(q, M)$ можно задать, в частности, следующим образом:

$$X(q, M) = \left\{[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}_{+} : \ I_n y - Mx = q\right\}.$$

Поэтому надо рассматривать не все решения уравнения (1.5.1), а только *допустимые*, т.е. когда от x и y дополнительно требуется, чтобы $x \geq 0_n$, $y \geq 0_n$. В дальнейшем именно среди таких допустимых решений будем выделять базисные и внебазисные переменные. Более того, основной интерес для нас будут представлять решения с минимальным числом положительных компонент среди всех компонент обоих векторов x и y . Решить задачу $LCP(q, M)$, означает найти такое неотрицательное решение уравнения (1.5.1), которое одновременно удовлетворяло бы условию дополнительности $x^i y^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Введем понятие *допустимого базисного решения* системы (1.5.1). Это такие решения $[x, y]$ системы (1.5.1), у которых все компоненты векторов x и y неотрицательны и ненулевым (положительным) их компонентам соответствуют линейно независимые столбцы матрицы $[I_n, -M]$. Понятно, что таких положительных компонент в допустимом базисном решении не может быть больше, чем n.

Допустимое базисное решение $[x, y]$ называется *невырожденным*, если число ненулевых компонент среди всех компонент x и y ровно n. Если их число меньше n, то такое допустимое базисное решение называется *вырожденным.* Таким образом, с невырожденным допустимым базисным решением связан лишь один базис, у вырожденного допустимого базисного решения таких базисов может оказаться несколько — надо систему линейно независимых столбцов, соответствующих положительным компонентам, пополнить до n штук другими столбцами так, чтобы в совокупности все они были линейно независимыми. Положительные компоненты, входящие в допустимое базисное решение, считаются *базисными*, остальные компоненты — *внебазисными.*

Множество $X(q, M)$ является выпуклым и полиэдральным. Если оно не пусто, то у него обязательно имеется хотя бы одна *крайняя точка*. Эта такая точка из $X(q, M)$, которая не принадлежит внутренности отрезка ненулевой длины, целиком лежащего в $X(q, M)$. Крайние точки полиэдральных множеств называются также *угловыми точками* или *вершинами*. Как известно, точка $[x, y] \in X(q, M)$ будет угловой в том и только в том случае, когда из $3n$ равенств и неравенств

$$I_n y - Mx = q, \quad x \geq 0_n, \quad y \geq 0_n$$

в этой точке становятся *активными*, т.е. обращающимися в равенство, $2n$ из них, причем все обратившиеся в равенство ограничения должны быть линейно независимыми. Другими словами, если составить матрицу

$$Q = \begin{bmatrix} -M & I_n \\ I_n & 0_{nn} \\ 0_{nn} & I_n \end{bmatrix}, \tag{1.5.2}$$

и выделить из нее $2n \times 2n$ подматрицу $\tilde{Q}$, соответствующую активным ограничениям, то первые n строк матрицы Q обязательно войдут в $\tilde{Q}$, так как они соответствуют ограничениями типа равенства. Кроме того, в $\tilde{Q}$ войдут какие-то n строк из оставшейся подматрицы Q (состоящей из второй и третьей строки блочной матрицы (1.5.2)). Крайняя точка $z = [x, y]$ будет удовлетворять системе уравнений $\tilde{Q}z = \tilde{q}$, в которой $\tilde{q} = [q, 0_n]^T$.

Допустимые базисные решения тесным образом связаны с угловыми точками множества $X(q, M)$, а именно, каждое допустимое базисное решение системы (1.5.1) определяет угловую точку $X(q, M)$. Верно и обратное, каждой угловой точке $X(q, M)$ соответствует допустимое базисное решение, причем единственное, если это решение невырожденное.

Задача $LCP(q, M)$ называется *невырожденной*, если все допустимые базисные решения системы (1.5.1) являются невырожденными. В этом случае между между угловыми точками допустимого множества $X(q, M)$ и допустимыми базисными решениями системы (1.5.1) существует взаимно-однозначное соответствие. Ниже везде предполагается, что *задача $LCP(q, M)$ невырожденная.*

Пара $[x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$ называется *комплементарной*, если $x^i y^i = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$. Если же равенства $x^i y^i = 0$ выполняются для всех $1 \leq i \leq n$, кроме одного индекса, то такая пара называется *почти комплементарной*.

Допустимое базисное решение $[x, y]$ в том случае, когда пара $[x, y]$ является комплементарной, будем называть *допустимым базисным* *комплементарным решением.* Это не что иное, как решение задачи $LCP(q, M)$. Аналогично, допустимое базисное решение $[x, y]$, в котором $[x, y]$ является почти комплементарной парой, будем называть *допустимым базисным почти комплементарным решением.*

В допустимом базисном почти комплементарном решении имеется одна пара компонент, например, x^s и y^s, такие, что они обе являются базисными переменными, т.е. $x^s > 0$, $y^s > 0$. О такой паре компонент будем говорить как о *базисной паре* данного решения. Кроме того, опять же в допустимом базисном почти комплементарном решении обязательно существует другая пара компонент, например, x^r и y^r, такие, что они обе являются внебазисными переменными, т.е. обе ненулевые одновременно $x^r = y^r = 0$. О такой паре компонент будем говорить как о *внебазисной паре.*

В методах решения линейных задач дополнительности выделяют *простые ведущие преобразования.* В таких преобразованиях одна внебазисная компонента становится базисной, а одна базисная компонента, напротив, переходит во внебазисные. Известны также *блочные ведущие преобразования*, где уже несколько базисных и внебазисных переменных меняются местами.

Справедлив следующий результат относительно ведущих преобразований.

Теорема 1.5.1. *Класс $\mathcal{P}$-матриц является инвариантным относительно ведущего преобразования.*

Следствие 1.5.1. *Класс положительно определенных матриц является инвариантным относительно ведущего преобразования.*

Ниже приводится численный метод, в котором используются простые ведущие преобразования.

1.5.2. Метод Лемке

Метод Лемке основан на переборе угловых точек допустимого множества $X(q, M)$, но не всех, а только тех, которым соответствуют допустимые базисные почти комплементарные решения.

Начальное допустимое базисное почти комплементарное решение задается следующим образом. Предполагается, что в допустимом множестве $X(q, M)$ содержится луч l, выходящий из допустимой базисной почти комплементарной точки в направлении $l_+ = [\bar{x}, \bar{y}]$ и целиком принадлежащий множеству $X(q, M)$. Понятно, что это направление должно быть таким, что $\bar{x} \geq 0_n$, $\bar{y} \geq 0_n$. Более того, считаем что у каждой точки этого луча существует одна и та же базисная пара компонент $x^{s_0} > 0$, $y^{s_0} > 0$. Все остальные пары компонент x^i и y^i, $i \neq s_0$, таковы, что для них выполняется условие дополнительности $x^i y^i = 0$. Такой луч назовем *допустимым почти комплементарным лучем.* Для нахождения начального допустимого базисного почти комплементарного решения идем в обратном направлении вдоль этого допустимого почти комплементарного луча до тех пор, пока не попадем в его начало. Если начало луча не оказывается решением задачи, то оно и будет начальным допустимым базисным почти комплементарным решением. Именно эту точку (начало луча) берем в качестве начальной стартовой точки $z_0 = [x_0, y_0]$.

Пусть на k-ом шаге получено допустимое базисное почти комплементарное решение $[x_k, y_k]$. Аналогично тому, как это делается в симплекс-методе для задач линейного программирования, берем ребро, концом которого является точка $[x_k, y_k]$ и которое по нашим предположениям ведет в другое допустимое базисное почти комплементарное решение, смежное с $[x_k, y_k]$. Здесь возможны следующие случаи:

а). Если ребро ограничено, то такое движение заканчивается в смежной угловой точке, которая может быть либо допустимым базисным комплементарным решением, либо допустимым базисным почти комплементарным решением. Если новая точка оказалась комплементарным решением, то процесс заканчивается, найденная точка является решением задачи. Он прерывается также, когда попадаем в точку, в которой уже были ранее. Решение задачи при этом не получено.

б). Ребро оказалось неограниченным, т.е. мы идем вдоль луча, который целиком принадлежит допустимому множеству. В этом случае вычисления заканчиваются без нахождения решения.

Несложно понять, что переход из одного допустимого базисного почти комплементарного решения в другое допустимое базисное комплементарное или почти комплементарное решение (смежное с исходным) возможен только тогда, когда отлепляется от нуля (делается положительной) одна из компонент, входящая во внебазисную пару компонент в точке $[x_k, y_k]$. Такая внебазисная пара компонент обязательно найдется, так как в $[x_k, y_k]$ имеется базисная пара компонент и точка $[x_k, y_k]$ является допустимым базисным почти комплементарным решением.

Предположим, что $x_k^r = y_k^r = 0$ есть упомянутая внебазисная пара компонент. При увеличении одной из этих двух компонент, x^r или y^r, меняются все базисные компоненты (как входящие в базисную пару компонент, так и не входящие в нее). Понятно, что при достаточном малом увеличении отлепляемой компоненты из внебазисной пары компонент (x^r или y^r) все базисные компоненты будут оставаться положительными.

Указанный ранее случай б) соответствует тому, что при неограниченном увеличении отлепляемой компоненты все базисные переменные остаются неотрицательными. Следовательно допустимое множество задачи содержит целый луч и является неограниченным.

В случае а) при росте отлепляемой переменной получается, что при некотором ее значении одна из базисных переменных становится равной нулю. Мы приходим в новое базисное допустимое решение. Если становится равной нулю какая-то компонента, входившая в базисную пару компонент, то это соответствует приходу в допустимое базисное комплементарное решение, являющееся решением задачи. Если же первой становится равной нулю базисная компонента, не входящая в базисную пару компонент, то переход совершается в другое базисное почти комплементарное решение. То, что это новое допустимое базисное решение оказывается единственным (не могут две базисные переменные одновременно стать равными нулю), обеспечивается предположением о невырожденности задачи. В новой точке $[x_{k+1}, y_{k+1}]$ та базисная переменная, например x^j_{k+1}, которая первой стала равной нулю, вместе со своей дополнительной переменной y^j_{k+1} образуют внебазисную пару компонент.

В рассматриваемом методе Лемке выбор конкретной компоненты из внебазисной пары компонент, которую следует отлеплять, осуществляется по следующему правилу: *отлепляется та компонента, которая является дополнительной к базисной переменой, обнулившейся на предыдущем шаге.* Например, если на предыдущем шаге обнулилась базисная переменная x^r, то на следующем шаге отлепляется переменная y^r и наоборот (см. рис. 1.4).

Последовательность точек $\{[x_k, y_k]\}$, порождаемую методом Лемке, назовем *траекторией.* Как следует из описания метода, все точки этой траектории, за исключением быть может последней, являются допустимыми базисными почти комплементарными решениями, причем у всех них *одна и та же базисная пара.* Имеет место следующее почти очевидное утверждение.

Утверждение 1.5.1. *Вдоль траектории метода Лемке только начальная точка может встретиться дважды.*

Доказательство. У каждой угловой точки $[x, y]$ множества $X(q, M)$, соответствующей допустимому базисному почти комплементарному решению и принадлежащей траектории метода Лемке, имеется не более двух соседних угловых точек, которым также соответствуют допустимые базисные почти комплементарные решения. Действительно, это

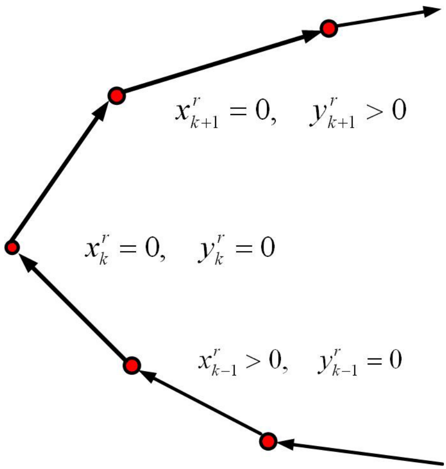

Рис. 1.4. Отлепление компонент по правилу Лемке.

те точки, в которые мы можем переместиться, отлепляя от нуля одну из компонент, входящих во внебазисную пару $[x^r, y^r]$. К первой точке, приходим, если отлеплять компоненту x^r, ко второй точке — если отлеплять компоненту y^r.

Траектория попадает в точку $[x, y]$ через одну такую соседнюю угловую точку и согласно правилу Лемке уходит в другую соседнюю угловую точку. Поэтому войти в любую промежуточную точку, отличную от начальной, и выйти из нее она может не более одного раза. ■

Так как в начальную точку мы попадаем не из другой угловой точки, а идя в обратном направлении вдоль луча, целиком лежащем в допустимом множестве, то из утверждения 1.5.1 сразу вытекает следующий важный результат.

Утверждение 1.5.2. *Пусть в качестве начальной точки в траектории метода Лемке берется начало луча, целиком лежащего в допустимом множестве. Тогда метод либо найдет решение задачи за конечное число шагов, либо прервется после попадания в другую угловую точку, из которой выходит другой допустимый почти комплементарный луч (называемый альтернативным к начальному допустимому почти комплементарному лучу).*

Из утверждения 1.5.2 также следует, что если в качестве начальной точки не брать начало луча, то метод может в принципе зациклиться, вернувшись в стартовую точку. Но даже если правильно выбрать стартовую точку, взяв, как рекомендовано, начало некоторого почти комплементарного луча, все равно он может остановиться, не найдя решение. Происходит это при попадании в вершину, из которой исходит другой почти комплементарный луч (альтернативный к начальному лучу).

Ниже считаем, что задача $LCP(q, M)$ такова, что у вектора q имеются отрицательные компоненты. В противном случае решение этой задачи очевидно, а именно, $x_* = 0_n$, $y_* = q \geq 0_n$.

Нахождение начального почти комплементарного луча. Выбрать начальный почти комплементарный луч и начальное базисное почти комплементарное решение достаточно просто, если матрица M такова, что в ней содержится столбец, скажем

$$M_{*,s} = \begin{bmatrix} m_{1s} \\ \vdots \\ m_{ns} \end{bmatrix},$$

со всеми положительными элементами.

Пусть $J_-(q) = \{i \in J^n : q^i < 0\}$, и пусть

$$x_0^s = \max_{i \in J_-(q)} \left[\frac{-q^i}{m_{is}} \right] = -\frac{q^r}{m_{rs}} > 0.$$

Положим тогда

$$x_0 = [0, \dots, 0, x_0^s, 0 \dots, 0]^T, \quad y_0 = q + x_0^s M_{*,s} \geq 0_n,$$

причем, в силу предположения о невырожденности задачи, у вектора y_0 только одна компонента равна нулю, а именно, компонента y_0^r, все остальные компоненты положительны. Тогда в качестве начального почти комплементарного луча может быть взят луч

$$l = \left\{ [x, y] \in \mathbb{R}^{2n}_+ : \ x = x_0 + \lambda e_s, \ y = y_0 + \lambda M_{*,s}, \ \lambda \geq 0 \right\},$$

где e_s — s-й единичный орт, т.е. вектор, у которого все компоненты равны нулю за исключением s-й компоненты, равной единице. Направлением этого луча является вектор $l_+ = [e_s, M_{*,s}]^T \geq 0_{2n}$.

Для любой точки $[x, y] \in l$ выполняется $x^s y^s > 0$, т.е. $[x^s, y^s]$ является базисной парой. Для всех остальных индексов $x^i y^i = 0$, $i \neq s$. Следовательно, такой луч оказывается почти комплементарным. Берем, как и предписывается методом Лемке, в качестве стартовой точки начало луча — точку $[x_0, y_0]$. Небазисной парой компонент в ней будет пара $x^r = y^r = 0$. При движении вдоль луча в обратном направлении при попадании в его начало становится равной нулю базисная переменная y^r. Поэтому на первом шаге следует отлеплять (делать положительной) переменную x^r. Кстати отметим, что если $r = s$, то начальная точка $[x_0, y_0]$ будет допустимым базисным комплементарным решением.

В случае, когда в матрице M отсутствует столбец со всеми положительными компонентами, выбор начального почти комплементарного луча значительно усложняется. Более того, он вообще может не существовать. Здесь на помощь приходит подход, который принято заранее включать в метод Лемке как его начальный этап. Данный подход заключается в переходе от исходной задачи $LCP(q, M)$ к расширенной задаче $LCP(\tilde{q}, \tilde{M})$, размерность которой на единицу больше, чем размерность исходной задачи $LCP(q, M)$. В ней матрица $\tilde{M}$ и вектор $\tilde{q}$ имеют вид, близкий к (1.4.8),

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} M & d \\ d^T & \theta \end{bmatrix}, \quad \tilde{q} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix},$$

где $d > 0_n$, $\theta > 0$. Обычно для простоты полагают $d = \bar{e}_n = [1, \dots, 1]^T$ и $\theta = 1$, что мы и сделаем. Теперь в матрице задачи $\tilde{M}$ появляется столбец со всеми положительными компонентами, а именно, это последний столбец, состоящий из единиц. Тогда выбор начального почти комплементарного луча и стартовой точки проводится полностью аналогично тому, как это делалось ранее.

Роль переменной x^s в расширенной задаче играет новая дополнительная переменная x^{n+1}, называемая обычно *искусственной переменной*. Основная цель метода Лемке теперь состоит в том, чтобы добиться ее обнуления. Та впервые встретившая точка траектории метода Лемке, где эта искусственная переменная стала равной нулю, на самом деле будет решением исходной задачи $LCP(q, M)$. Метод закончит свою работу в этой точке.

При рассмотрении последней переменной $y^{n+1} = \bar{e}_n^T x + x^{n+1}$ получаем, что эта переменная всегда положительна, если, конечно, положительна переменная x^{n+1}. Обе переменные x^{n+1} и y^{n+1} образуют базисную пару, из которой более важной для нас является первая переменная x^{n+1}. Вторая же переменная y^{n+1} особого интереса не представляет и за ней обычно не следят, исключая y^{n+1} из вычислений. Но неявно она остается базовой компонентой.

Пример вычислений по методу Лемке. Все расчеты в методе Лемке можно проводить с помощью техники ведущих преобразований с применением таблиц полностью аналогично тому, как это делается в симплекс-методе для решения задач линейного программирования. Поясним сказанное на конкретном примере, взятом из [26].

Рассмотрим задачу $LCP(q, M)$, в которой

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Вводим искусственную переменную x^4. Тогда уравнения, связывающие переменные, принимают вид

$$\begin{aligned} y^1 + x^2 - 2x^3 - x^4 &= -3, \\ y^2 - 2x^1 + 2x^3 - x^4 &= 6, \\ y^3 + x^1 - x^2 - x^4 &= -1. \end{aligned}$$

Шаг 0. Составим начальную таблицу, беря в качестве базисных переменных y^1, y^2 и y^3, а в качестве базиса соответствующие этим переменным столбцы в матрице $[I_3, -M, -\bar{e}_3]$, т.е. естественный ортонормированный базис в пространстве трех переменных: e_1, e_2, e_3. В таблице представлены элементы разложения всех столбцов расширенной матрицы $[q, I_3, -M, -\bar{e}_3]$:

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
y^1	-3	1	0	0	0	1	-2	$\boxed{-1}$
y^2	6	0	1	0	-2	0	2	-1
y^3	-1	0	0	1	1	-1	0	-1

Для того, чтобы получить начальную стартовую точку, нам надо ввести в число базисных переменных дополнительную искусственную переменную x^4, а в базис — соответствующей этой переменной последний столбец в таблице. Надо также определить переменную, которую следует при этом исключить из числа базисных переменных. Делается это из тех соображений, что общее число базисных компонент в нашем случае фактически должно быть четыре и базисной парой, принадлежащей лучу, выходящему из стартовой точки, является пара $[x^4, y^4]$. Поэтому возникает излишество числа базисных компонент. Но как уже отмечалось, базисная переменная y^4 в текущих точках траектории всегда положительна и в вычислениях не участвует, поэтому в дальнейшем речь идет только о трех базовых переменных. Чтобы ввести x^4, надо какую-то компоненту y^1, y^2 или y^3 вывести.

Так как компоненты матрицы $\tilde{M} = [M, \bar{e}_3]$, соответствующие добавленному четвертому столбцу, все равны единице, то согласно вышесказанному надо выявить ту компоненту вектора q, которая отрицательна и которая принимает минимальное значение. Находим индекс компоненты q^i, имеющей минимальное значение:

$$\min_{q^i<0} q^i = q^1 = -3.$$

В данном случае она оказалась первой. Поэтому из числа базисных компонент исключается компонента y^1, а из числа базисных столбцов — столбец соответствующей этой компоненте. Ведущим элементом будет элемент, стоящий в таблице в последнем столбце в первой строке. После пересчета таблицы с этим ведущим элементом приходим к новой таблице, которая соответствует начальному базисному почти комплементарному решению.

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
x^4	3	−1	0	0	0	−1	2	1
y^2	9	−1	1	0	−2	−1	4	0
y^3	2	−1	0	1	$\boxed{1}$	−2	2	0

В этой точке базисными переменными будут x^4, y^2 и y^3, а базис — это соответствующие этим переменным столбцы матрицы $[I_n, -M, -\bar{e}_3]$.

Шаг 1. Перейдем к новому базисному почти комплементарному решению. Так как на предыдущем стартовом шаге из числа базисных переменных выбыла переменная y^1, то, следуя правилу Лемке, в число базисных переменных будем вводить переменную x^1. Опять встает вопрос — какую переменную вывести? Смотрим все компоненты столбца, соответствующего переменной x^1. Считаем, что в таблице все столбцы перенумерованы индексами от 0 до 7, из которых нулевой столбец соответствует вектору q, следующие три столбца — переменным y^1, y^2 и y^3, а последние четыре столбца — переменным x^1, x^2 x^3 и x^4. В этой нумерации столбец соответствующий компоненте x^1 имеет компоненты z_{14}, z_{24}, z_{34}. Полагаем $r = 4$. Если среди компонент z_{1r}, z_{2r}, z_{3r} имеются строго положительные элементы, то ведущий элемент выбираем среди них в r-м столбце по принципу *минимального отношения*

$$\frac{z_{s0}}{z_{sr}} = \min_{1\le i\le 3} \left\{ \frac{z_{i0}}{z_{ir}},\ z_{ir} > 0 \right\}. \tag{1.5.3}$$

В данном случае, таким положительным элементом оказался единственный элемент, стоящий в последней третьей строке. Делаем его ведущим. Переменную y^3 выводим из числа базисных переменных, а переменную x^1, наоборот, вводим. После пересчета получаем новую таблицу.

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
x^4	3	-1	0	0	0	-1	2	1
y^2	13	-3	1	2	0	-5	8	0
x^1	2	-1	0	1	1	-2	$\boxed{2}$	0

Шаг 2. У нас выбыла переменная y^3, следовательно надо вводить переменную x^3. Таким образом, на этом шаге $r = 6$. По принципу минимального отношения (1.5.3) находим индекс s, указывающий нам номер выводимой переменной из числа базисных. Как нетрудно подсчитать, в данном случае $s = 3$, поэтому выводить надо переменную x^1. После пересчета имеем:

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
x^4	1	0	0	-1	-1	1	0	1
y^2	5	$\boxed{1}$	1	-2	-4	3	0	0
x^3	1	$-1/2$	0	$1/2$	$1/2$	-1	1	0

Шаг 3. Надо ввести переменную y^1, так как на предыдущем шаге выбыла переменная x^1. Находим опять по указанному правилу ведущий элемент (таким элементом будет z_{sr}, где $r = 1$, $s = 2$) и пересчитываем таблицу.

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
x^4	1	0	0	-1	-1	$\boxed{1}$	0	1
y^1	5	1	1	-2	-4	3	0	0
x^3	$7/2$	0	$1/2$	$-1/2$	$-3/2$	$1/2$	1	0

Шаг 4. Мы вывели y^2, надо ввести x^2. Следовательно $r = 5$. После проведения вычислений согласно (1.5.3) получаем $s = 1$. Таким образом из числа базисных переменных выбывает искусственная переменная x^4, что говорит о том, что найдено решение. Окончательно таблица примет вид:

	q	y^1	y^2	y^3	x^1	x^2	x^3	x^4
x^2	1	0	0	-1	-1	1	0	1
y^1	2	1	1	1	-1	0	0	0
x^3	3	0	$1/2$	0	-1	0	1	$1/2$

Вычисления завершаются, решение смотрим в нулевом столбце: $x^2 = 1$, $y^1 = 2$, $x^3 = 3$. Остальные переменные x^1, y^2 и y^3 равны нулю.

1.5.3. Сходимость метода Лемке

Выясним, когда метод Лемке позволяет гарантированно находить решение задачи, если конечно оно существует. Понятно, что для этого задача, имеющая решение, должна быть такой, чтобы в расширенной задаче отсутствовало допустимое базисное почти комплементарное решение, из которого исходит луч, альтернативный к начальному.

Лемма 1.5.1. *Пусть работа метода Лемке завершилась на некотором k-м шаге в допустимом базисном почти комплементарном решении $z_k = [x_k, x_k^{n+1}, y_k]$, из которого выходит луч l в направлении $l_+ = [\bar{x}, \bar{x}^{n+1}, \bar{y}] \neq 0_{2n+1}$, отличном от начального направления. Тогда вектор $\bar{x}$ ненулевой и выполняется неравенство*

$$D(\bar{x})M\bar{x} \leq 0_n. \qquad (1.5.4)$$

Доказательство. Из того, что луч $l = z_k + \lambda l_+$, $\lambda \geq 0$, целиком принадлежит допустимому множеству, следуют неравенства $\bar{x} \geq 0_n$, $\bar{x}^{n+1} \geq 0$, $\bar{y} \geq 0_n$ и равенство

$$\bar{y} = M\bar{x} + \bar{x}^{n+1}\bar{e}_n. \qquad (1.5.5)$$

Имеем для любого $\lambda \geq 0$

$$y_k + \lambda\bar{y} = M\left(x_k + \lambda\bar{x}\right) + \left(x_k^{n+1} + \lambda\bar{x}^{n+1}\right)\bar{e}_n + q.$$

Помимо этого, первые n компонент любой точки, принадлежащей лучу, удовлетворяют условию дополнительности:

$$\left(x_k + \lambda\bar{x}\right)^i \left(y_k + \lambda\bar{y}\right)^i = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (1.5.6)$$

Покажем, что вектор $\bar{x}$ ненулевой. От противного, предположим, что $\bar{x} = 0_n$. Тогда обязательно $\bar{x}^{n+1} > 0$, так как иначе из (1.5.5) имели бы $\bar{y} = 0_n$, т.е. $l_+ = 0_{2n+1}$, что противоречит условиям леммы. Таким образом, равенство (1.5.5) при $\bar{x} = 0_n$ сводится к $\bar{y} = \bar{x}^{n+1}\bar{e}_n$, где $\bar{x}^{n+1} > 0$.

Из равенств (1.5.6), так как все компоненты векторов x_k, y_k и $\bar{x}$, $\bar{y}$ неотрицательны, следуют покомпонентные равенства:

$$x_k^i y_k^i = x_k^i \bar{y}^i = \bar{x}^i y_k^i = \bar{x}^i \bar{y}^i = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1.5.7)$$

из которых, в частности, вытекает, что $\langle \bar{y}, x_k \rangle = 0$. После подстановки в это равенство выражения $\bar{y} = \bar{x}^{n+1}\bar{e}_n$ приходим к

$$\bar{x}^{n+1}\langle \bar{e}_n, x_k \rangle = \bar{x}^{n+1} \sum_{i=1}^{n} x_k^i = 0.$$

Поскольку $x_k \geq 0_n$, отсюда заключаем, что $x_k = 0_n$. Таким образом, все компоненты вектора x_k оказываются внебазисными.

Поскольку z_k является почти комплементарным решением в расширенной задаче, то базисную пару в этой точке составляют компоненты x_k^{n+1} и y_k^{n+1}. Кроме того, базисными переменными могут быть только компоненты вектора y_k в количестве $n-1$ штук. В силу предположения о невырожденности задачи это возможно только в том случае, когда точка $[x_k, x_k^{n+1}, y_k]$ совпадает со стартовой точкой и луч, выходящий из нее, есть не что иное как начальный луч, идя вдоль которого в обратном направлении, приходим в стартовую точку. Итак, получено противоречие, поэтому $\bar{x} \neq 0_n$.

Векторное равенство (1.5.5) распадается на n покомпонентных равенств

$$\bar{y}^i = (M\bar{x})^i + \bar{x}^{n+1}, \quad i = 1, \dots, n,$$

умножая которые на $\bar{x}^i$ и учитывая (1.5.7), получаем

$$\bar{x}^i\bar{y}^i = \bar{x}^i(M\bar{x})^i + \bar{x}^{n+1}\bar{x}^i = 0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.5.8}$$

Отсюда приходим к неравенству $D(\bar{x})M\bar{x} = -\bar{x}^{n+1}\bar{x} \leq 0_n$, совпадающему с (1.5.4). ■

Согласно утверждению леммы 1.5.1 алгоритм метода Лемке обладает свойством, что если он завершает свою работу в допустимом базисном почти комплементарном решении, из которого выходит луч, отличный от начального луча, то матрица M обращает знак ненулевого вектора. Отсюда сразу вытекает следующий результат.

Теорема 1.5.2. *Пусть M является $\mathcal{P}$-матрицей. Тогда для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$ метод Лемке находит решение $LCP(q, M)$ за конечное число шагов.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу утверждения теоремы 1.4.7 решение задачи $LCP(q, M)$ с такой матрицей M всегда существует для любого вектора $q \in \mathbb{R}^n$, причем единственное. Из утверждения 1.3.10 следует также, что $\mathcal{P}$-матрица M не обращает знак ни у одного ненулевого вектора. Тогда на основании леммы 1.5.1 приходим к выводу, что метод Лемке обязательно найдет решение. Так как число допустимых базисных почти комплементарных решений конечно, то для этого ему потребуется конечное число шагов. ■

Напомним, что любая положительно определенная матрица является $\mathcal{P}$-матрицей. Следовательно, метод решает задачи дополнительности $LCP(q, M)$ с такими матрицами за конечное число шагов, причем независимо от выбора вектора q.

Рассмотрим теперь поведение метода Лемке при решении задачи $LCP(q, M)$ с сильно коположительной матрицей M.

Лемма 1.5.2. *Пусть M — сильно коположительная матрица и пусть метод Лемке при решении задачи $LCP(q, M)$ с некоторым вектором $q \in \mathbb{R}^n$ завершил работу, остановившись в допустимом базисном почти комплементарном решении $z_k = [x_k, x_k^{n+1}, y_k]$, из которого выходит луч l, отличный от начального луча. Тогда допустимое множество в задаче пусто.*

Доказательство. Пусть направление луча l есть $l_+ = [\bar{x}, \bar{x}^{n+1}, \bar{y}]$. Тогда, как следует доказательства леммы 1.5.1, $\bar{x} \geq 0_n$, $\bar{x}^{n+1} \geq 0$, $\bar{y} \geq 0_n$ и $\bar{x} \neq 0_n$. Суммируя равенства (1.5.8), получаем также

$$\langle \bar{x}, M\bar{x} \rangle + \bar{x}^{n+1} \langle \bar{e}_n, \bar{x} \rangle = 0. \tag{1.5.9}$$

Но для сильно коположительной матрицы M, как и для любой коположительной матрицы, выполняется неравенство $\langle \bar{x}, M\bar{x} \rangle \geq 0$. Кроме того, из $\bar{x} \geq 0_n$, $\bar{x} \neq 0_n$ вытекает, что $\langle \bar{e}_n, \bar{x} \rangle > 0$. Отсюда делаем вывод, что

$$\langle \bar{x}, M\bar{x} \rangle = 0, \quad \bar{x}^{n+1} = 0. \tag{1.5.10}$$

Поэтому вместо (1.5.5) имеем: $\bar{y} = M\bar{x} \geq 0_n$.

Далее, в силу определения сильно коположительной матрицы, из первого равенства (1.5.10), выполняющимся для $\bar{x} \geq 0_n$, следует равенство $(M + M^T)\bar{x} = 0_n$. Отсюда приходим к неравенству $M^T\bar{x} = -M\bar{x} \leq 0_n$.

Воспользуемся далее равенствами (1.5.7), из которых, в частности, следует, что

$$\langle x_k, \bar{y} \rangle = 0, \quad \langle y_k, \bar{x} \rangle = 0. \tag{1.5.11}$$

Согласно первому равенству (1.5.11)

$$0 = \langle x_k, \bar{y} \rangle = \langle x_k, M\bar{x} \rangle = -\langle x_k, M^T\bar{x} \rangle = -\langle \bar{x}, Mx_k \rangle. \tag{1.5.12}$$

Согласно второму равенству (1.5.11) и (1.5.12)

$$\begin{aligned} 0 = \langle y_k, \bar{x} \rangle = \langle Mx_k, \bar{x} \rangle + x_k^{n+1} \langle \bar{e}_n, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, q \rangle = \\ = x_k^{n+1} \langle \bar{e}_n, \bar{x} \rangle + \langle \bar{x}, q \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда, поскольку $x_k^{n+1} > 0$ и $\langle \bar{x}, \bar{e}_n \rangle > 0$, вытекает неравенство $\langle \bar{x}, q \rangle < 0$.

Система неравенств

$$M^T \bar{x} \leq 0_n, \quad q^T \bar{x} < 0, \quad \bar{x} \geq 0_n \tag{1.5.13}$$

является альтернативной к системе

$$Mx \geq -q, \quad x \geq 0_n. \tag{1.5.14}$$

Поэтому из существования решения у (1.5.13), в чем мы убедились, следует, что альтернативная система (1.5.14) решения иметь не может. Таким образом, допустимое множество в задаче $LCP(q, M)$ пусто. ■

Теорема 1.5.3. *Пусть M — сильно коположительная матрица и пусть вектор q такой, что задача $LCP(q, M)$ допустима. Тогда метод Лемке находит решение $LCP(q, M)$ за конечное число шагов.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что сильно коположительные матрицы принадлежат классу $\mathcal{Q}_0$. Поэтому задача с такой матрицей, если она допустима, обязательно имеет решение. Из результата леммы 1.5.1 следует, что метод Лемке не может завершиться в допустимом базисном почти комплементарном решении, из которого выходит луч, альтернативный начальному лучу. Поэтому метод может остановиться только в решении задачи. В силу конечности допустимых базисных почти комплементарных решений метод найдет решение задачи за конечное число шагов. ■

Теорема 1.5.4. *Пусть матрица M строго коположительная. Тогда для любого $q \in \mathbb{R}^n$ метод Лемке находит решение задачи дополнительности $LCP(q, M)$ за конечное число шагов.*

Доказательство. Строго коположительные матрицы принадлежат классу $\mathcal{Q}$. Но для матриц из этого класса линейная задача дополнительности всегда имеет решение. Строго коположительные матрицы являются также заведомо сильно коположительными матрицами. Поэтому утверждение теоремы следует из теоремы 1.5.3. ■

1.6. Мультипликативно-барьерный метод для ЛЗД

Имеется тесная связь между ЛЗД (1.1.1) и оптимизационными задачами в различных постановках. Здесь мы рассмотрим один из возможных переходов от ЛЗД к простейшей оптимизационной задаче.

Тогда численный метод решения ЛЗД получается путем адаптации какого-либо метода решения задачи оптимизации с учетом, разумеется, специфики этой задачи.

Обратимся к постановке ЛЗД в форме (1.1.2) и введем в рассмотрение билинейную функцию

$$V(x,y) = \langle x, y\rangle.$$

Утверждение 1.6.1. *Пусть в ЛЗД* (1.1.2) *существует решение* $[x_*, y_*]$. *Тогда* $[x_*, y_*]$ *есть одновременно решение следующей оптимизационной задачи:*

$$\begin{array}{l} \min V(x,y), \\ Mx - y + q = 0_n, \\ x \geq 0_n, \qquad y \geq 0_n. \end{array} \tag{1.6.1}$$

Обратно, если $[x_*, y_*]$ *— решение задачи* (1.6.1) *и* $V(x_*, y_*) = 0$, *то* $[x_*, y_*]$ *является решением ЛЗД* (1.1.2).

Доказательство. Предположим, что пара $[x_*, y_*]$ есть решение ЛЗД (1.1.2). Имеем $x_* \geq 0_n$, $y_* \geq 0_n$, $Mx_* - y_* + q = 0$ и $x_*^i y_*^i = 0$, $1 \leq i \leq n$. На основании последних равенств получаем: $V(x_*, y_*) = 0$. Поскольку для любых $x \in \mathbb{R}^n_+$, $y \in \mathbb{R}^n_+$ имеет место неравенство $V(x,y) \geq 0$, то отсюда следует, что $[x_*, y_*]$ — решение (1.6.1)).

Обратно, пусть пара $[x_*, y_*]$ — решение оптимизационной задачи (1.6.1)) и $V(x_*, y_*) = 0$. Тогда обязательно $x_*^i y_*^i = 0$, $1 \leq i \leq n$ и, следовательно, $[x_*, y_*]$ — решение ЛЗД (1.1.2). ■

Задача (1.6.1)) является частным случаем общей задачи нелинейного программирования с билинейной целевой функцией и линейными ограничениями типа равенства, а также с дополнительным требованием неотрицательности переменных. Поэтому для ее решения применим мультипликативно-барьерный метод, рассмотренный в [12] и относящийся к классу методов внутренней точки (точнее, некоторое обобщение этого метода на задачи с нелинейной целевой функции).

Основной вариант метода. Составим функцию Лагранжа для задачи (1.6.1)

$$L(x,y,u) = \langle x, y\rangle + \langle u, Mx - y + q\rangle, \tag{1.6.2}$$

где $u \in \mathbb{R}^n$. Градиентами $L(x,y,u)$ по x и y являются соответственно векторы:

$$L_x(x,y,u) = y + M^T u, \qquad L_y(x,y,u) = x - u. \tag{1.6.3}$$

Условия оптимальности для задачи (1.6.1) можно записать в виде

$$\begin{array}{c} x \geq 0_n, \quad L_x(x,y,u) \geq 0_n, \\ y \geq 0_n, \quad L_y(x,y,u) \geq 0_n, \\ D(x)L_x(x,y,u) = 0_n, \quad D(y)L_y(x,y,u) = 0_n, \\ Mx - y + q = 0_n. \end{array} \tag{1.6.4}$$

Оставим пока в стороне неравенства в приведенных условиях оптимальности и обратим основное внимание на равенства. С учетом (1.6.3) они перепишутся следующим образом

$$D(x)\left(y + M^T u\right) = 0_n, \quad D(y)\,(x-u) = 0_n, \quad Mx - y + q = 0_n. \tag{1.6.5}$$

Умножим первое равенство из (1.6.5) на матрицу M слева и вычтем из него второе равенство (1.6.5), в результате получим

$$\left[MD(x)M^T + D(y)\right]u + MD(x)y - D(y)x = 0_n. \tag{1.6.6}$$

Введем обозначение

$$G(x,y) = MD(x)M^T + D(y).$$

Тогда, поскольку $D(y)x = D(x)y$, из (1.6.6) приходим к уравнению относительно двойственной переменной u:

$$G(x,y)u + (M - I_n)D(x)y = 0_n. \tag{1.6.7}$$

Если матрица $G(x,y)$ неособая, то можно разрешить это уравнение относительно u и получить зависимость $u(x,y)$. Однако вместо данного уравнения будем решать уравнение, которое получается из (1.6.6) после вычитания из него третьего равенства из (1.6.5), предварительно умноженного на некоторое $\tau > 0$, а именно:

$$G(x,y)u = (I_n - M)\,D(x)y + \tau\,(Mx - y + q)\,. \tag{1.6.8}$$

Пусть матрица $G(x,y)$ неособая. Тогда

$$u = u(x,y) = G^{-1}(x,y)\left[(I_n - M)\,D(x)y + \tau\,(Mx - y + q)\right]. \tag{1.6.9}$$

После подстановки зависимости $u(x,y)$ в первые два равенства из (1.6.5) приходим к системе $2n$ уравнений относительно $2n$ переменных x и y:

$$\begin{array}{rcl} D(x)\left[y + M^T u(x,y)\right] & = & 0_n, \\ D(y)\left[x - u(x,y)\right] & = & 0_n. \end{array} \tag{1.6.10}$$

Для решения (1.6.10) могут быть применены различные численные методы решения систем нелинейных уравнений и, в частности, метод простой итерации. Используя данный метод, построим итерационный процесс, решающий систему(1.6.10), причем итерации будем проводить таким образом, чтобы обе переменные x и y принадлежали неотрицательному ортанту $\mathbb{R}^n_+$.

Пусть $x_0 > 0_n$, $y_0 > 0_n$. Последовательности $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ строятся согласно следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & D(x_k)\left[\bar{e}_n - \alpha_k\left(y_k + M^T u_k\right)\right], \\ y_{k+1} & = & D(y_k)\left[\bar{e}_n - \alpha_k\left(x_k - u_k\right)\right], \end{array} \tag{1.6.11}$$

где $\bar{e}_n$ — n-мерный вектор, состоящий из единиц, $\alpha_k > 0$ — шаг спуска.

Покажем, что при определенных дополнительных предположениях о задаче (1.1.2) итерационный процесс (1.6.11) обладает локальной сходимостью. Пусть матрица M является *положительно определенной*. Тогда согласно теореме 1.4.2 неоднородная линейная задача дополнительности $LCP(q, M)$ обладает решением $[x_*, y_*]$, причем единственным. Пара $[x_*, y_*] \in \mathbb{R}^{2n}_+$ оказывается *комплементарной*, т.е. $x^i_* y^i_* = 0$, $1 \le i \le n$. Решение $[x_*, y_*]$ задачи (1.1.2) назовем *невырожденным*, если

$$x_* + y_* > 0_n.$$

Считаем, не умаляя общности, что в невырожденном решении $[x_*, y_*]$ задачи (1.1.2) точки x_* и y_* представимы в виде

$$x_* = [x^B_*, x^N_*], \qquad y_* = [y^B_*, y^N_*], \tag{1.6.12}$$

где $x^B_*, y^B_* \in \mathbb{R}^k$, $x^N_*, y^N_* \in \mathbb{R}^{n-k}$, причем

$$x^B_* > 0_k, \quad x^N_* = 0_{n-k}, \quad y^B_* = 0_k, \quad y^N_* > 0_{n-k}. \tag{1.6.13}$$

В соответствии с (1.6.12) разобьем матрицу M на четыре блока:

$$M = \left[\begin{array}{cc} M_{BB} & M_{BN} \\ M_{NB} & M_{NN} \end{array}\right].$$

Утверждение 1.6.2. *Пусть $[x_*, y_*]$ — невырожденное решение задачи* (1.1.2). *Тогда матрица $G(x_*, y_*)$ неособая.*

Доказательство. Проведя соответствующие вычисления, получаем, что матрица $G(x_*, y_*)$ имеет следующий блочный вид:

$$G(x_*, y_*) = \left[\begin{array}{cc} M_{BB}D(x^B_*)M^\top_{BB} & M_{BB}D(x^B_*)M^\top_{NB} \\ M_{NB}D(x^B_*)M^\top_{BB} & D(y^N_*) + M_{NB}D(x^B_*)M^\top_{NB} \end{array}\right]. \tag{1.6.14}$$

Так как по-предположению матрица M положительно определенная, то ее главная подматрица M_{BB} также является положительно определенной.

Умножим верхнюю строку $G(x_*, y_*)$ на матрицу $M_{NB}M_{BB}^{-1}$ и вычтем ее из нижней строки. Тогда приходим к верхней блочно-треугольной матрице

$$\left[\begin{array}{cc} M_{BB}D(x_*^B)M_{BB}^\top & M_{BB}D(x_*^B)M_{NB}^\top \\ 0_{(n-k)k} & D(y_*^N) \end{array}\right], \tag{1.6.15}$$

определитель которой совпадает с определителем матрицы $G(x_*, y_*)$. Матрица M_{BB} положительно определена, поэтому $\det M_{BB} > 0$. Также $\det D(x_*^B) > 0$ и $\det D(y_*^N) > 0$, поскольку $x_*^B > 0$ и $y_*^N > 0$. Отсюда следует, что обе диагональные матрицы в (1.6.15) неособые. Поэтому определитель матрицы (1.6.15) отличен от нуля. Таким образом, $G(x_*, y_*)$ — неособая матрица. ■

Следствие 1. *Так как матрица $G(x, y)$ при $x \in \mathbb{R}^n_+$, $y \in \mathbb{R}^n_+$ является суммой двух симметричных неотрицательно определенных матриц и в паре $[x_*, y_*]$ она неособая, то отсюда заключаем, что $G(x_*, y_*)$ — симметричная положительно определенная матрица. Следовательно, матрица $G^{-1}(x_*, y_*)$ также положительно определенная.*

Определим матрицу $G^{-1}(x_*, y_*)$.

Утверждение 1.6.3. *Пусть $[x_*, y_*]$ — невырожденное решение задачи* (1.1.2). *Тогда матрица $G^{-1}(x_*, y_*)$ имеет следующий вид*

$$G^{-1}(x_*, y_*) = \left[\begin{array}{cc} \bar{G}_{11}(x_*, y_*) & \bar{G}_{12}(y_*) \\ -D^{-1}(y_*^N)M_{NB}M_{BB}^{-1} & D^{-1}(y_*^N) \end{array}\right], \tag{1.6.16}$$

где

$$\begin{array}{l} \bar{G}_{11}(x_*, y_*) = \quad M_{BB}^{-T}\left[D^{-1}(x_*^B) + M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NB}\right] M_{BB}^{-1}, \\ \bar{G}_{12}(y_*) = -M_{BB}^{-T} M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N), \end{array}$$

символ A^{-T}, примененный к квадратной неособой матрице A, означает $(A^{-1})^T$.

Доказательство. Если неособая матрица A представлена в блочном виде

$$A = \left[\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array}\right],$$

причем квадратная подматрица A_{11} также неособая, то согласно формуле Фробениуса обратная к A матрица A^{-1} находится следующим образом:

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} \mathcal{H} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \mathcal{H} \\ -\mathcal{H} A_{21} A_{11}^{-1} & \mathcal{H} \end{bmatrix},$$

где $\mathcal{H} = \left(A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \right)^{-1}$.

С помощью этой формулы, используя блочное представление (1.6.14), матрицы $G(x_*, y_*)$, находим обратную матрицу (1.6.16). ■

Следствие 2. *Положительно определенная матрица $G^{-1}(x, y)$ непрерывным образом зависит от своих аргументов. Поэтому существует окрестность $\Delta(x_*, y_*)$ пары $[x_*, y_*]$ такая, что для всех $[x, y]$ из этой окрестности матрица $G^{-1}(x, y)$ будет оставаться положительно определенной и, следовательно, неособой. Это приводит к тому, что формула* (1.6.9) *для представления зависимости $u(x, y)$ для данных x и y корректна. При $x = x_*$, $y = y_*$ получаем: $u_* = u(x_*, y_*) = 0_n$.*

Итерационный процесс (1.6.11) полностью определен, если точки x_k и y_k находятся вблизи невырожденного решения $[x_*, y_*]$ задачи (1.1.2). Так как $D(x_*)y_* = D(y_*)x_* = 0_n$, то сама пара $[x_*, y_*]$ является стационарной, т.е.

$$D(x_*) \left[y_* + M^T u_* \right] = 0_n, \quad D(y_*) \left[x_* - u_* \right] = 0_n.$$

При попадании в решение $[x_*, y_*]$ задачи (1.1.2) процесс (1.6.11) останавливается.

Покажем, что итерационный процесс (1.6.11) обладает локальной сходимостью.

Теорема 1.6.1. *Пусть пара $[x_*, y_*]$ является невырожденным решением задачи* (1.1.2). *Тогда существует такое $\alpha_* > 0$, что для любого $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ и для всех постоянных $\alpha_k = \alpha$ итерационный процесс* (1.6.11) *локально сходится к $[x_*, y_*]$ с линейной скоростью.*

Доказательство проведем с помощью теоремы Островского (см. [12]. Согласно этой теореме процесс (1.6.11) локально сходится, если спектральный радиус матрицы Якоби отображения

$$W(x, y) = \left\{ \begin{array}{l} D(x) \left[\bar{e}_n - \alpha \left(y + M^T u(x, y) \right) \right] \\ D(y) \left[\bar{e}_n - \alpha \left(x - u(x, y) \right) \right] \end{array} \right\}$$

в точке $[x_*, y_*]^T$ меньше единицы.

Далее переменные x и y для сокращения записи объединим в единую переменную $z = [x, y] \in \mathbb{R}^{2n}$. Обозначим также

$$r(z) = y + M^T u(z), \quad s(z) = x - u(z)$$

и введем в рассмотрение отображение $F(z) = \left[F^1(z), F^2(z)\right]^T$, где

$$F^1(z) = D(x) r(z), \quad F^2(z) = D(y) s(z).$$

Определим сначала матрицу Якоби $F_z(z)$ этого отображения в точке $z_* = [x_*, y_*]^T$. Имеем:

$$F_z(z) = \begin{bmatrix} F_x^1(z) & F_y^1(z) \\ F_x^2(z) & F_y^2(z) \end{bmatrix},$$

где

$$F_x^1(z) = \frac{\partial}{\partial x} D(x) r(z), \quad F_y^1(z) = \frac{\partial}{\partial y} D(x) r(z),$$

$$F_x^2(z) = \frac{\partial}{\partial x} D(y) s(z), \quad F_y^2(z) = \frac{\partial}{\partial y} D(y) s(z).$$

Учитывая вид векторов $r(z)$ и $s(z)$, получаем

$$\begin{array}{rcl} F_x^1(z) & = & D(r(z)) + D(x) M^T \frac{\partial}{\partial x} u(z), \\ F_y^1(z) & = & D(x) + D(x) M^T \frac{\partial}{\partial y} u(z), \\ F_x^2(z) & = & D(y) - D(y) \frac{\partial}{\partial x} u(z), \\ F_y^2(z) & = & D(s(z)) - D(y) \frac{\partial}{\partial y} u(z). \end{array}$$

Вычислим матрицы $\frac{\partial}{\partial x} u(z)$ и $\frac{\partial}{\partial y} u(z)$. Воспользуемся равенством (1.6.8), переписав его следующим образом:

$$-MD(x) r(z) + D(y) s(z) + \tau(Mx - y + q) = 0_n. \tag{1.6.17}$$

Дифференцируя данное равенство по x, получаем

$$-MD(r(z)) - MD(x) \frac{\partial r(z)}{\partial x} + D(y) \frac{\partial s(z)}{\partial x} + \tau M = 0_n. \tag{1.6.18}$$

Но

$$\frac{\partial r(z)}{\partial x} = M^T \frac{\partial u(z)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial s(z)}{\partial x} = I_n - \frac{\partial u(z)}{\partial x}. \tag{1.6.19}$$

После подстановки (1.6.19) в (1.6.18) приходим к

$$-G(z) \frac{\partial u(z)}{\partial x} - MD(r(z)) + D(y) + \tau M = 0.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u(z)}{\partial x} = G^{-1}(z)\left[D(y) + M\left(\tau I_n - D(r(z))\right]. \qquad (1.6.20)$$

Аналогичным образом будем поступать при нахождении матрицы $\frac{\partial u(z)}{\partial y}$. Продифференцируем равенство (1.6.17) по y:

$$-MD(x)\frac{\partial r(z)}{\partial y} + D(s(z)) + D(y)\frac{\partial s(z)}{\partial y} - \tau I_n = 0.$$

Учтем теперь, что

$$\frac{\partial r(z)}{\partial y} = I_n + M^T\frac{\partial u(z)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial s(z)}{\partial y} = -\frac{\partial u(z)}{\partial y}. \qquad (1.6.21)$$

Тогда

$$MD(x)\left(I_n + M^T\right)\frac{\partial u(z)}{\partial y} - D(s(z)) + D(y)\frac{\partial u(z)}{\partial y} + \tau I_n = 0.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial u(z)}{\partial y} = G^{-1}(z)\left[D(s(z)) - MD(x) - \tau I_n\right]. \qquad (1.6.22)$$

Таким образом,

$$\begin{array}{rcl}
F^1_x(z) & = & D(r(z)) + D(x)M^TG^{-1}(z)\left[D(y) + M\left(\tau I_n - D(r(z))\right)\right], \\
F^1_y(z) & = & D(x)\left\{I_n + M^TG^{-1}(z)\left[D(s(z)) - MD(x) - \tau I_n\right]\right\}, \\
F^2_x(z) & = & D(y)\left\{I_n - G^{-1}(z)\left[D(y) + M\left(\tau I_n - D(r(z))\right)\right]\right\}, \\
F^2_y(z) & = & D(s(z)) - D(y)G^{-1}(z)\left[D(s(z)) - MD(x) - \tau I_n\right].
\end{array} \qquad (1.6.23)$$

Введем обозначения

$$Q(z) = M^TG^{-1}(z), \quad P(z) = Q(z)M = M^TG^{-1}(z)M. \qquad (1.6.24)$$

Тогда, поскольку $r(z_*) = y_* \geq 0_n$, $s(z_*) = x_* \geq 0_n$, получаем

$$\begin{array}{rcl}
F^1_x(z_*) & = & \left[I_n + D(x_*)\left(Q(z_*) - P(z_*)\right)\right]D(y_*) + \tau D(x_*)P(z_*), \\
F^1_y(z_*) & = & D(x_*)\left[I_n + \left(Q(z_*) - P(z_*)\right)D(x_*) - \tau Q(z_*)\right], \\
F^2_x(z_*) & = & D(y_*)\left[I_n + \left(Q^T(z_*) - G^{-1}(z_*)\right)D(y_*) - \tau Q^T(z_*)\right], \\
F^2_y(z_*) & = & \left[I_n + D(y_*)\left(Q^T(z_*) - G^{-1}(z_*)\right)\right]D(x_*) + \tau D(y_*)G^{-1}(z_*).
\end{array} \qquad (1.6.25)$$

Вычислим матрицы $Q(z_*)$ и $P(z_*)$. Подставляя матрицу $G^{-1}(z_*)$ из (1.6.16), находим

$$Q(z_*) = \begin{bmatrix} D^{-1}(x_*^B)M_{BB}^{-1} & 0_{k(n-k)} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.6.26}$$

где

$$Q_{21} = M_{BN}^T M_{BB}^{-T} \left[D^{-1}(x_*^B) + M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NB}\right] M_{BB}^{-1} - \\ - M_{NN}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NB} M_{BB}^{-1},$$

$$Q_{22} = -M_{BN}^T M_{BB}^{-T} M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N) + M_{NN}^T D^{-1}(y_*^N).$$

Для матрицы $P(z_*)$ получаем соответственно

$$P(z_*) = \begin{bmatrix} D^{-1}(x_*^B) & D^{-1}(x_*^B) M_{BB}^{-1} M_{BN} \\ M_{BN}^T M_{BB}^{-T} D^{-1}(x_*^B) & P_{22} \end{bmatrix}. \tag{1.6.27}$$

Здесь

$$P_{22} = M_{BN}^T M_{BB}^{-T} \left(D^{-1}(x_*^B) + M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NB}\right) M_{BB}^{-1} M_{BN} - \\ - M_{NN}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NB} M_{BB}^{-1} M_{BN} - \\ - M_{BN}^T M_{BB}^{-T} M_{NB}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NN} + M_{NN}^T D^{-1}(y_*^N) M_{NN}.$$

Из (1.6.26) и (1.6.27) следует, что

$$D(x_*)Q(z_*) = \begin{bmatrix} M_{BB} & 0_{kl} \\ 0_{lk} & 0_{ll} \end{bmatrix}, \quad D(x_*)P(z_*) = \begin{bmatrix} I_k & M_{BB}^{-1} M_{BN} \\ 0_{lk} & 0_{ll} \end{bmatrix}, \tag{1.6.28}$$

где $l = n - k$. Поэтому $D(x_*)Q(z_*)D(y_*) = 0_{nn}$ и

$$D(x_*)P(z_*)D(y_*) = \begin{bmatrix} 0_{kk} & M_{BB}^{-1} M_{BN} D(y_*^N) \\ 0_{lk} & 0_{ll} \end{bmatrix}. \tag{1.6.29}$$

На основании (1.6.23) и (1.6.28), (1.6.29) получаем

$$F_x^1(z_*) = \begin{bmatrix} \tau I_k & M_{BB}^{-1} M_{BN} \left(\tau I_l - D(y_*^N)\right) \\ 0_{lk} & D(y_*^N) \end{bmatrix},$$

$$F_y^1(z_* = \begin{bmatrix} -M_{BB}\left(\tau I_k - D(x_*^B)\right) & 0_{kl} \\ 0_{lk} & 0_{ll} \end{bmatrix},$$

$$F_x^2(z_*) = \begin{bmatrix} 0_{kk} & 0_{kl} \\ 0_{lk} & \left(M_{NB} M_{BB}^{-1} M_{BN} - M_{NN}\right)\left(\tau I_l - D(y_*^N)\right) \end{bmatrix},$$

$$F_y^2(z_*) = \begin{bmatrix} D(x_*^B) & 0_{kl} \\ -M_{NB} M_{BB}^{-1}\left(\tau I_k - D(x_*^B)\right) & \tau I_l \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица $F(z_*)$ представима в следующем блочном виде:

$$F(z_*) = \begin{bmatrix} \tau I_k & S_1 & S_2 & 0_{kl} \\ 0_{lk} & D(y_*^N) & 0_{lk} & 0_{ll} \\ 0_{kk} & 0_{kl} & D(x_*^B) & 0_{kl} \\ 0_{lk} & S_3 & S_4 & \tau I_l \end{bmatrix}, \qquad (1.6.30)$$

где вид матриц S_1, – S_4 для нас несущественен.

У матрицы (1.6.30) имеется $2n$ собственных векторов, являющихся единичными векторами пространства $\mathbb{R}^{2n}$. Им соответствуют собственные значения $x_*^{(1)}, \ldots, x_*^{(k)}$, $y_*^{(k+1)}, \ldots, \ldots, y_*^{(n)}$ и собственное значение τ кратности n.

Пусть

$$\bar{\mu} = \max\{x_*^{(1)}, \ldots, x_*^{(k)}, y_*^{(k+1)}, \ldots, y_*^{(n)}\}.$$

Так как $W_z(z_*) = \bar{e}_{2n} - \alpha F_z(z_*)$, то отсюда заключаем, что спектральный радиус матрицы $W_z(z_*)$ строго меньше единицы, когда

$$0 < \alpha < \bar{\alpha} = \frac{2}{\max\{\tau, \bar{\mu}\}}.$$

Следовательно, при постоянном шаге $\alpha_k = \alpha$ процесс (1.6.11) действительно обладает локальной сходимостью. ■

Обратим внимание, что наличие локальной сходимости у итерационного процесса (1.6.11) означает, что некоторые компоненты векторов x_k и y_k в ходе итерационного процесса могут принимать отрицательные значения. Эти те компоненты, которым соответствуют нулевые компоненты в решении $[x_*, y_*]^T$. В частности, если заранее известно, какие именно компоненты x_* или y_* нулевые, то можно положить эти компоненты в стартовых точках x_0 и y_0 равными нулю. Из вида правых частей следует, что в ходе итерационного процесса они останутся нулевыми. Это обеспечивается наличием диагональных матриц $D(x)$ и $D(y)$ в этих правых частях. Данные матрицы играют роль мультипликативных множителей, сохраняющих нулевые значения и не позволяющих при надлежащем выборе шага α_k выходить траектории за пределы неотрицательного ортанта $\mathbb{R}^{2n}_+$. В некотором смысле это поясняет выбор названия метода *мультипликативно-барьерный.*

Допустимый вариант метода. Итерации в описанном методе (1.6.11) идут в пространстве размерности $2n$, что, разумеется, не совсем хорошо. Однако, имеется возможность понизить размерность пространства вычислений, когда в качестве стартовых точек x_0 и y_0 берутся не произвольные точки, а связанные между собой соотношением

$y_0 = Mx_0 + q$. Действительно, пусть, по прежнему, $z = [x, y]^T$. Обозначим через Z аффинное множество

$$Z = \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n} : \; Mx - y + q = 0_n \right\}$$

и положим $Z_+ = Z \cap \mathbb{R}^{2n}_+$. Решение задачи (1.1.2) фактически заключается в нахождении такой пары $z_* = [x_*, y_*] \in Z_+$, которая одновременно является комплементарной.

Формулы пересчета таковы, что множество Z является *инвариантным* относительно итерационного процесса (1.6.11), т.е. из условия $z_0 \in Z$ следует, что $z_k \in Z$ для всех остальных $k \geq 0$. Поэтому если от начальной пары z_0 потребовать, чтобы она принадлежала множеству Z, то итерационный процесс (1.6.11) принимает более простой вид:

$$\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & x_k - \alpha_k D(x_k) \left[I_n + M^T G^{-1}(z_k)(I_n - M) D(x_k) \right] y_k , \\ y_{k+1} & = & M x_{k+1} + q, \end{array} . \tag{1.6.31}$$

Здесь учтено, что теперь двойственная переменная $u(z)$ фактически не зависит от τ и равняется $u(z) = G^{-1}(z)\,(I_n - M)\,D(x)y$.

Итерационный процесс (1.6.31) также локально сходится к невырожденному решению $z_* = [x_*, y_*]$ на Z_+, если шаг α_k постоянный и достаточно мал. Это следует из утверждения теоремы 1.6.1, поскольку при стартовых точках $z_0 \in Z$ поведение траекторий допустимого варианта полностью совпадает с поведением траекторий основного варианта метода (1.6.11).

Рассмотрим далее более эффективный способ выбора шага α_k в методе (1.6.31) Пусть Δx_k и Δy_k — направления, вдоль которых происходит перемещение из точки $[x_k, y_k]$ в точку $[x_{k+1}, y_{k+1}]$. Согласно (1.6.31)

$$\Delta x_k = -D(x_k) \left[I_n + M^T G^{-1}(z_k)(I_n - M) D(x_k) \right] y_k$$

Кроме того,

$$\Delta y_k = M \Delta x_k = -D(y_k) \left[I_n - G^{-1}(z_k)(I_n - M) D(y_k) \right] x_k .$$

В точках $z_k \in Z_+$, таких, что $z_k > 0_{2n}$, совместное направление $\Delta z_k = [\Delta x_k, \Delta y_k] \in \mathbb{R}^{2n}$ есть направление убывания функции $V(z)$. В самом деле, вычисляя производную $V(z)$ вдоль этого направления, получаем

$$\begin{array}{c} \langle V_z(z_k), \Delta z_k \rangle = \langle V_x(x_k, y_k), \; \Delta x_k \rangle + \langle V_y(x_k, y_k), \; \Delta y_k \rangle = \\ -\langle y_k, D(x_k) \left[I_n + M^T G^{-1}(z_k)(I_n - M) D(x_k) \right] y_k \rangle - \\ \qquad -\langle x_k, D(y_k) \left[I_n - G^{-1}(z_k)(I_n - M) D(y_k) \right] x_k \rangle . \end{array}$$

Введем обозначения:

$$
\begin{aligned}
W_1(x) &= D^{\frac{1}{2}}(x)M^\top, & W_2(y) &= -D^{\frac{1}{2}}(y),\\
w_1(z) &= D^{\frac{1}{2}}(x)y, & w_2(z) &= D^{\frac{1}{2}}(y)x,
\end{aligned}
$$

где $D^{\frac{1}{2}}(x)$ — квадратный корень из диагональной матрицы $D(x)$ с вектором $x > 0_n$ на диагонали, $z = [x, y]$. Кроме того, положим

$$
W(z) = \begin{bmatrix} W_1(x) \\ W_2(y) \end{bmatrix}, \qquad w(z) = \begin{bmatrix} w_1(z) \\ w_2(z) \end{bmatrix}. \tag{1.6.32}
$$

Тогда направления Δx_k и Δy_k можно представить в виде

$$
\Delta x_k = -D^{\frac{1}{2}}(x_k)\left[w_1(z_k) - W_1(x_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)w(z_k)\right],
$$

$$
\Delta y_k = -D^{\frac{1}{2}}(y_k)\left[w_2(z_k) - W_2(y_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)w(z_k)\right],
$$

а для производной $V(z)$ вдоль направления Δz_k получаем

$$
\begin{gathered}
\langle V_z(z_k), \Delta z_k\rangle = \\
= \left\langle w_1(z_k), \left(w_1(z_k) - W_1(x_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)w(z_k)\right)\right\rangle - \\
- \left\langle w_2(z_k), \left(w_2(z_k) - W_2(y_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)w(z_k)\right)\right\rangle = \\
= -\left\langle w(z_k), \left(I_{2n} - W(z_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)\right)w(z_k)\right\rangle.
\end{gathered}
$$

Матрица $I_{2n} - W(z)\left(W^T(z)W(z)\right)^{-1}W^T(z)$ является матрицей ортогонального проектирования и, следовательно, идемпотентна, т.е. ее квадрат совпадает с ней самой. Поэтому

$$
\langle V_z(z_k), \Delta z_k\rangle = -\left\|\left[I_{2n} - W(z_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)\right]w(z_k)\right\|^2 \le 0, \tag{1.6.33}
$$

где $\|a\|$ — евклидова норма вектора a. Отметим, что равенство в (1.6.33) возможно в том и только в том случае, когда

$$
\left[I_{2n} - W(z_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)\right]w(z_k) = 0_{2n}, \tag{1.6.34}
$$

т.е. когда вектор $w(z_k)$ принадлежит нуль-пространству матрицы

$$
I_{2n} - W(z_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k). \tag{1.6.35}
$$

Данная матрица проектирует на ортогональное дополнение к пространству столбцов матрицы $W(z_k)$. Точки $z \in Z_+$, в которых выполняется равенство (1.6.34), назовем *стационарными* для итерационного процесса (1.6.31).

Рассмотрим поведение функции $V(z)$ на множестве Z в зависимости от выбранного шага α, предполагая, что точка z_k не является стационарной. Проводя выкладки, получаем

$$\phi(\alpha) = V(z_k + \alpha\Delta z_k) = V(z_k) + c_1(z_k)\alpha + c_2(z_k)\alpha^2.$$

Здесь $c_1(z_k) = \langle V_z(z_k), \Delta z_k\rangle < 0$ и

$$c_2(z_k) = \left\langle h_1(z_k), D^{1/2}(x_k)D^{1/2}(y_k)h_2(z_k)\right\rangle.$$

Векторы $h_1(z)$ и $h_2(z)$ являются соответственно первой и второй компонентой $2n$-мерного вектора

$$h(z) = \left[I_{2n} - W(z)\left(W^T(z)W(z)\right)^{-1}W^T(z)\right]w(z).$$

Выясним, какие значения может принимать коэффициент $c_2(z_k)$. Так как вектор $h(z_k)$ является проекцией вектора $w(z_k)$ на ортогональное дополнение к пространству столбцов матрицы $W(z_k)$, то он может быть представлен в виде

$$h(z_k) = E(z_k)\lambda, \quad E(z) = \left[\begin{array}{c} E_1(z) \\ E_2(z) \end{array}\right],$$

где столбцы матрицы $E(z)$ ортогональны столбцам матрицы $W(z)$.

Имеем $W^T(z_k)E(z_k) = 0_{nn}$ или, в более подробном виде,

$$MD^{1/2}(x_k)E_1(z_k) - D^{1/2}(y_k)E_2(z_k) = 0_{nn}. \qquad (1.6.36)$$

После умножения левой и правой части (1.6.36) на матрицу $D^{1/2}(x_k)$ получаем

$$D^{1/2}(x_k)MD^{1/2}(x_k)E_1(z_k) - D^{1/2}(x_k)D^{1/2}(y_k)E_2(z_k) = 0_{nn}. \qquad (1.6.37)$$

Так как $h_1(z_k) = E_1(z_k)\lambda$, $h_2(z_k) = E_2(z_k)\lambda$, то на основании (1.6.37) имеем

$$\begin{array}{c} c_2(z_k) = \langle E_1(z_k)\lambda, D^{1/2}(x_k)D^{1/2}(y_k)E_2(z_k)\lambda\rangle = \\ = \langle E_1(z_k)\lambda, D^{1/2}(x_k)MD^{1/2}(x_k)E_1(z)\lambda\rangle \geq 0. \end{array} \qquad (1.6.38)$$

Равенство в (1.6.38) возможно в том и только в том случае, когда

$$D^{1/2}(x_k)E_1(z_k)\lambda = 0$$

или, что то же самое,

$$D^{1/2}(x_k)\left[w_1(z_k) - W_1(z_k)\left(W^T(z_k)W(z_k)\right)^{-1}W^T(z_k)w(z_k)\right] = 0_n,$$

т.е. когда точка z_k стационарная. При выполнении условия невырожденности стационарными точками могут быть лишь угловые точки множества Z_+, т.е. его граничные точки.

Пусть $\alpha_k^{(1)} = -\dfrac{c_1(x_k, y_k)}{2c_2(x_k, y_k)}$. Если текущая пара $[x_k, y_k]$ не является стационарной точкой системы (1.6.31), то шаг α_k целесообразно взять равным

$$\alpha_k = \min\left\{\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}\right\}, \tag{1.6.39}$$

где

$$\alpha_k^{(2)} = \operatorname{argmax}\left\{\alpha \geq 0 : x_k - \alpha\Delta x_k \geq 0_n,\ y_k - \alpha\Delta y_k \geq 0_n\right\}.$$

Для того чтобы избежать попадания в стационарные точки, отличные от решения ЛЗД, можно ввести коэффициент $0 < \theta < 1$ и полагать в этом случае вместо (1.6.39)

$$\alpha_k = \theta\min\left\{\alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(2)}\right\}.$$

Возможны также другие способы модификации метода, позволяющие избежать его остановки в стационарных точках.

Глава 2

Вариационные неравенства и задачи дополнительности

2.1. Начальные сведения о вариационных неравенствах

2.1.1. Постановки задач и их взаимосвязь

Вариационное неравенство. Пусть X — непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ и $F(x)$ — отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, определенное в некоторой области, содержащей X. Под решением *вариационного неравенства (ВН)* понимают нахождение такой точки $x_* \in X$, для которой

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad \forall x \in X. \tag{2.1.1}$$

Задачу (2.1.1) обозначают обычно как $VI(X, F)$. Множество всех точек x_*, удовлетворяющих (2.1.1) будем называть решением вариационного неравенства $VI(X, F)$ и обозначать $X_*(X, F)$.

Геометрический смысл задачи (2.1.1) состоит в том, чтобы найти такую точку $x_* \in X$, для которой вектор $F(X_*)$ составил бы острый или прямой угол со всеми возможными направлениями, выходящими из этой точки. Если обозначить через $K(x_*|X)$ конус возможных направлений в x_* относительно множества X, определяемый как

$$K(x_*|X) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n : \; \exists\; \tilde{\lambda}(s) > 0, \; x_* + \lambda s \in X, \; 0 < \lambda < \tilde{\lambda}(s) \right\},$$

то отсюда следует, что $F(x_*)$ будет решением вариационного неравенства $VI(X, F)$ тогда и только тогда, когда $F(x_*) \in K^*(x_*|X)$, где через $K^*(x_*|X)$ обозначен конус сопряженный к $K(x_*|X)$ (см. рис. 2.1). Сопряженный конус является обратным по отношению к нормальному конусу $N(x_*|X)$ к множеству X, другими словами, $K^*(x_*|X) = -N(x_*|X)$.

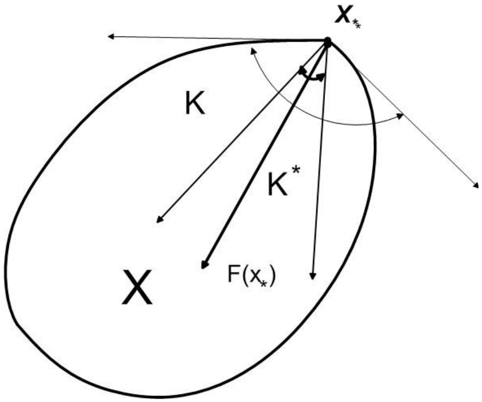

Рис. 2.1. Геометрический смысл решения вариационного неравенства

Из принадлежности x_* множеству $X_*(X, F)$ следует, что x_* является точкой минимума линейной функции $\langle F(x_*), x\rangle$ на X, т.е. решением задачи

$$\min_{x\in X} \langle F(x_*), x\rangle. \tag{2.1.2}$$

Верно и обратное, если x_* есть решение задачи (2.1.2), то x_* одновременно будет решением вариационного неравенства $VI(X, F)$.

Рассмотрим два простейших примера задач, решение которых может быть сведено к решению вариационных неравенств.

Задача минимизации дифференцируемой функции на выпуклом множестве. Необходимое условие минимума дифференцируемой функции $f(x)$ на выпуклом замкнутом множестве X заключается в выполнении неравенства

$$\langle f_x(x_*), x - x_*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Таким образом, точка x_* будет решением вариационного неравенства (2.1.1), в котором $F(x)$ есть градиентное отображение $f_x(x)$, т.е. решением задачи $VI(X, f_x)$. В случае, когда $f(x)$ есть псевдовыпуклая функция, т.е. для которой выполнение неравенства $\langle f_x(x), y - x\rangle \geq 0$ влечет $f(y) \geq f(x)$, то решение вариационного неравенства $VI(X, f_x)$ будет точкой глобального минимума функции $f(x)$ на X. Любая выпуклая дифференцируемая функция в силу критерия первого порядка является псевдовыпуклой.

Поиск седловой точки выпукло-вогнутой функции. Пусть $X \subseteq \mathbb{R}^n$ и $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ — выпуклые замкнутые множества, и пусть на некоторой окрестности прямого произведения этих множеств $X \times Y$ задана выпукло-вогнутая функция $f(x, y)$. Эта функция выпукла по x и вогнута по y. Требуется найти седловую точку $f(x, y)$ на $X \times Y$, т.е. такую точку $[x_*, y_*]$, что

$$f(x_*, y) \leq f(x_*, y_*) \leq f(x, y_*), \quad \forall x \in X, \ \forall y \in Y.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, то необходимые и достаточные условия решения этой задачи имеют вид

$$\langle f_x(x_*, y_*), x - x_*\rangle \geq 0, \quad \forall x \in X, \tag{2.1.3}$$

$$\langle f_y(x_*, y_*), y - y_*\rangle \leq 0, \quad \forall y \in Y. \tag{2.1.4}$$

Обозначим $z = [x, y]$, $z_* = [x_*, y_*]$ и $Z = X \times Y$. Из (2.1.3), (2.1.4) следует, что седловая точка z_* есть решение вариационного неравенства $VI(Z, F)$, в котором отображение $F(z)$ имеет вид:

$$F(z) = [f_x(z), -f_y(z)]^T.$$

Нелинейная и обобщенная задачи дополнительности. Важным частным случаем вариационного неравенства является *нелинейная задача дополнительности (НЗД)*. Пусть на $\mathbb{R}^n_+$ задано отображение $F(x): \ \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n$. Требуется найти такой вектор x_*, чтобы

$$x_* \geq 0_n, \quad F(x_*) \geq 0_n, \quad \langle x_*, F(x_*)\rangle = 0. \tag{2.1.5}$$

Задачу (2.1.5) обычно обозначают $NCP(F)$. В частном случае, когда $F(x)$ есть линейное отображение $F(x) = Mx + q$, она переходит в линейную задачу дополнительности $LCP(q, M)$.

Неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$ является выпуклым замкнутым самосопряженным конусом (конус, сопряженный к $\mathbb{R}^n_+$, совпадает с ним самим). Если заменить ортант $\mathbb{R}^n_+$ на произвольный конус, то приходим к *обобщенной задаче дополнительности.* В ней заданы выпуклый замкнутый конус K и отображение $F(x): K \to \mathbb{R}^n$. Требуется найти такую точку x_*, чтобы

$$x_* \in K, \quad F(x_*) \in K^*, \quad \langle x_*, F(x_*) \rangle = 0. \qquad (2.1.6)$$

Здесь K^* обозначает сопряженный (двойственный) конус к K. Обобщенную задачу дополнительности обозначают как $GCP(K, F)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть K — выпуклый замкнутый конус. Тогда множества решений задач $VI(K, F)$ и $GCP(K, F)$ совпадают.*

Доказательство. Покажем сначала, что если точка x_* есть решение вариационного неравенства $VI(K, F)$, то она одновременно будет решением задачи дополнительности $GCP(K, F)$.

Так как для $x \in K$ выполнено

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K, \qquad (2.1.7)$$

а K есть конус, то наряду с (2.1.7) должно выполняться неравенство

$$\langle F(x_*), \lambda x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K, \quad \forall \lambda \geq 0,$$

которое, когда $\lambda > 0$, можно переписать в виде

$$\langle F(x_*), x \rangle \geq, \frac{1}{\lambda} \langle F(x_*), x_* \rangle, \quad \forall x \in K \ \forall \lambda > 0. \qquad (2.1.8)$$

Отсюда, после перехода к пределу при $\lambda \to +\infty$, получаем

$$\langle F(x_*), x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K,$$

что означает: $F(x_*) \in K^*$.

Неравенство (2.1.8) выполняется для любого $x \in K$, в частности, и для $x = x_*$. Но тогда

$$\langle F(x_*), x_* \rangle \geq \frac{1}{\lambda} \langle F(x_*), x_* \rangle, \quad \forall \lambda > 0,$$

что возможно только в том случае, когда $\langle F(x_*), x_* \rangle = 0$. Итак, показано, что x_* является решением задачи дополнительности $GCP(K, F)$.

Докажем теперь обратное утверждение, что если точка x_* есть решение задачи дополнительности $GCP(K, F)$, то она будет решением вариационного неравенства $VI(K, F)$. Так как $F(x_*) \in K^*$, то

$$\langle F(x_*), x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K.$$

Поэтому, с учетом равенства $\langle F(x_*), x_* \rangle = 0$ получаем

$$\langle F(x_*), x \rangle - \langle F(x_*), x_* \rangle = \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in K,$$

т.е. x_* — решение $VI(K, F)$. $\blacksquare$

Если конус K совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$, то, поскольку сопряженный к нему конус состоит только из нулевого вектора, получаем, что обобщенная задача дополнительности переходит в уравнение: $F(x_*) = 0_n$.

2.1.2. Сведение вариационных неравенств и задач дополнительности к другим задачам

Вариационные неравенства и задачи оптимизации. Как уже отмечалось в предыдущем разделе, решение задачи минимизации дифференцируемой функции $f(x)$ на выпуклом замкнутом множестве X тесным образом связано с решением вариационного неравенства. Было показано, что если x_* — точка минимума $f(x)$ на X, то, в силу необходимых условий оптимальности, она должна быть решением вариационного неравенства $VI(X, f_x)$. Для выпуклых функций $f(x)$ любое решение x_* вариационного неравенства $VI(X, f_x)$ является точкой минимума функции $f(x)$ на X.

Встает вопрос, может ли вариационное неравенство $VI(X, F)$ с произвольным отображением $F(x)$ быть связанным с оптимизационной задачей минимизации некоторой функции $f(x)$ на X? Ответ на данный вопрос положительный, однако при этом отображение $F(x)$ должно обладать определенным свойством, а именно, оно должно быть *потенциальным.*

Определение 2.1.1. *Отображение $F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ называется градиентным (потенциальным), если существует такая дифференцируемая функция $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, что $F(x) = f_x(x)$ всюду на $\mathbb{R}^n$.*

Имеет место следующий *принцип симметричности.*

Теорема 2.1.2. *Пусть отображение $F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ непрерывно дифференцируемо на $\mathbb{R}^n$. Тогда $F(x)$ является градиентным отображением на $\mathbb{R}^n$ в том и только в том случае, когда матрица Якоби $F_x(x)$ симметрична при всех $x \in \mathbb{R}^n$.*

При выполнения принципа симметричности в качестве $f(x)$ может быть взята следующая функция:

$$f(x) = \int_0^1 \langle F(\bar{x} + t(x - \bar{x})), x - \bar{x} \rangle dt,$$

где $\bar{x}$ — произвольная точка из $\mathbb{R}^n$.

НЗД и задачи оптимизации. Нелинейная задача дополнительности сводится к задаче условной оптимизации даже без предположения о потенциальности отображения $F(x)$.

Утверждение 2.1.1. *Пусть $F(x)$ некоторое отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда точка x_* будет решением нелинейной задачи дополнительности $NCP(F)$ в том и только в том случае, когда x_* есть решение следующей задачи нелинейного программирования*

$$f_* = \min_{x \in X} \langle F(x), x \rangle, \quad X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \ F(x) \geq 0_n \right\}, \tag{2.1.9}$$

при условии, что $f_* = 0$.

Как нетрудно видеть, если отображение $F(x)$ есть линейное, т.е. $F(x) = Mx + q$, то задача (2.1.9) является задачей квадратичного программирования (быть может с невыпуклой целевой функцией).

Вариационные неравенства и минимаксные задачи. Рассмотрим функцию

$$\eta(x) = \min_{y \in X} \langle F(x), y - x \rangle, \tag{2.1.10}$$

определенную на X. Так как в качестве y в (2.1.10) может браться и $x \in X$, то понятно, что эта функция принимает на X только неположительные значения, т.е. $\eta(x) \leq 0$. Более того, если $\eta(x_*) = 0$ для некоторой точки $x_* \in X$, то эта точка является решением вариационного неравенства $VI(X, F)$. Функцию, $g(x) = -\eta(x)$, обратную к $\eta(x)$, называют *функцией скачка*. Данная функция является неотрицательной на X. Имеет место следующий почти очевидный результат.

Утверждение 2.1.2. *Вектор $x_* \in X$ есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ в том и только в том случае, когда x_* есть решение задачи*

$$g_* = \min_{x \in X} g(x) = \min_{x \in X} \max_{y \in X} \langle F(x), x - y \rangle \tag{2.1.11}$$

и $g_* = 0$.

Трудность использования такого подхода, основанного на замене задачи вариационного неравенства задачей (2.1.11), заключается в том, что функция $g(x)$ может оказаться негладкой. В случае нелинейной задачи дополнительности, когда $X = \mathbb{R}^n_+$, задача (2.1.11) сводится к (2.1.9).

Вариационные неравенства и задачи дополнительности. Как было показано, обобщенная задача дополнительности $GCP(K, F)$, в которой множество K выпуклый конус, является частным случаем вариационного неравенства $VI(K, F)$. Задача дополнительности (обобщенная или нелинейная) в некотором смысле проще, чем вариационное неравенство. Поэтому интересен вопрос о возможности сведения общего вариационного неравенства $VI(X, F)$ с необязательно конусом в качестве множества X к задаче дополнительности. Оказывается такое сведение возможно в случае, когда множество X имеет вид

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g^i(x) \leq 0, \ 1 \leq i \leq m\right\}. \tag{2.1.12}$$

Предположим, что все функции $g^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}^n$. Пусть $J_0(x) = \{1 \leq i \leq m : \ g^i(x) = 0\}$ есть множество индексов активных ограничений в точке $x \in X$. Мы скажем, что в точке $x \in X$ выполнено *условие регулярности ограничений*, если векторы $g^i_x(x)$, $i \in J_0(x)$, линейно независимы.

Теорема 2.1.3. *Пусть множество X имеет вид (2.1.12), где функции $g^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, непрерывно дифференцируемы, и выполнено условие регулярности ограничений. Пусть, кроме того, точка x_* есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ с этим множеством X. Тогда x_* вместе с некоторым вектором $u_* \in \mathbb{R}^m_+$ является решением обобщенной задачи дополнительности $GCP(K, H)$, где $K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ и отображение $H(x, u)$ задается следующим образом:*

$$H(x, u) = \left[\begin{array}{c} F(x) + \sum_{i=1}^m u^i g^i(x) \\ -g^i(x) \end{array}\right]. \tag{2.1.13}$$

Доказательство. Ранее уже говорилось о том, что если x_* есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$, то эта точка одновременно будет и решением условной оптимизационной задачи (2.1.2) с линейной целевой функцией. Отсюда, принимая во внимание конкретный вид множества X, приходим к задаче

$$\min_{x \in X} \langle F(x_*), x\rangle, \quad X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) \leq 0_m\right\}, \tag{2.1.14}$$

в которой x_* будет решением.

Составим для задачи (2.1.14) функцию Лагранжа

$$L(x,u) = F^T(x_*)x + \sum_{i=1}^{m} u^i g^i(x), \quad u \in \mathbb{R}^m_+.$$

Так как, по предположению, в точке x_* выполнено условие регулярности ограничений, то на основании теоремы Куна-Таккера найдется $u_* \in \mathbb{R}^n_+$ такое, что для x_* вместе с u_* должны выполняться условия:

$$L_x(x,u) = F(x_*) + \sum_{i=1}^{m} u^i g^i(x) = 0_n, \tag{2.1.15}$$

$$-g(x_*) \geq 0_m, \quad u_* \geq 0_m, \quad \langle g(x_*), u_* \rangle = 0. \tag{2.1.16}$$

Учтем теперь, что $(\mathbb{R}^n)^* = \{0\}$, $(\mathbb{R}^m_+)^* = \mathbb{R}^m_+$. Тогда равенства и неравенства (2.1.15), (2.1.16) показывают, что пара $[x_*, u_*]$ должна быть решением задачи $GCP(K,H)$. ■

Приведенная теорема носит характер необходимых условий. Если же функции $g^i(x)$ оказываются выпуклыми, то ее результат можно усилить. В этом случае в качестве условия регулярности ограничений воспользуемся *условием Слейтера.*

Определение 2.1.2. *Для множества X вида (2.1.12) выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, если существует такая точка $\bar{x} \in X$, что $g^i(\bar{x}) < 0$, $1 \leq i \leq m$.*

Теорема 2.1.4. *Пусть множество X имеет вид (2.1.12), где $g^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, — непрерывно дифференцируемые выпуклые функции. Пусть, кроме того, для множества X выполнено условие регулярности ограничений Слейтера. Тогда для того, чтобы точка x_* была решением вариационного неравенства $VI(X,F)$, необходимо и достаточно, чтобы x_* вместе с некоторым вектором $u_* \in \mathbb{R}^m_+$ являлись бы решением обобщенной задачи дополнительности $GCP(K,H)$, где $K = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+$ и отображение $H(x,u)$ имеет вид (2.1.13).*

Доказательство необходимости аналогично доказательству теоремы 2.1.3. Достаточность следует из того, что в случае выпуклых функций $g^i(x)$, $1 \leq i \leq m$, выполнение условий (2.1.15), (2.1.16) гарантирует, что точка x_* есть решение оптимизационной задачи (2.1.2). Следовательно, она также является решением вариационного неравенства $VI(X,F)$. ■

Таким образом, вариационное неравенство сводится к более простой обобщенной задаче дополнительности, однако платой за такое сведение является рост размерности задачи. Получающаяся обобщенная задача дополнительности имеет размерность $n + m$.

Вариационные неравенства и неподвижные точки проекционного отображения. Возможность сведения решения вариационного неравенства к отысканию неподвижных точек проекционного отображения является весьма важной как с точки зрения теоретического исследования задачи, так и с точки зрения разработки численных методов ее решения.

Предположим, что X — выпуклое замкнутое множество. Рассмотрим следующее проекционное отображение

$$P(x) = \pi_X(x - \alpha F(x)), \tag{2.1.17}$$

где $\pi_X(a)$ — проекция точки $a \in \mathbb{R}^n$ на X, α — некоторый положительный параметр. Из свойств проекции следует, что точка $\pi_X(a)$ есть проекция точки a на X тогда и только тогда, когда для любых $x \in X$ выполняется неравенство

$$\langle x - \pi_X(a), \pi_X(a) - a \rangle \geq 0. \tag{2.1.18}$$

Пусть $x_* \in X$ — неподвижная точка отображения $P(x)$, т.е.

$$x_* = \pi_X(x_* - \alpha F(x_*)).$$

Отсюда и из (2.1.18) получаем для отображения $P(x)$ при $\alpha = 1$:

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle = \langle \pi_X(x_* - F(x_*)) - x_* + F(x_*), x - \pi_X(x_* - F(x_*)) \rangle \geq 0$$

для всех $x \in X$. Таким образом, точка x_* есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$. Верно и обратное, если x_* есть решение вариационного неравенства, то x_* оказывается неподвижной точкой отображения $P(x)$. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 2.1.5. *Пусть X — выпуклое замкнутое множество. Тогда точка $x_* \in X$ есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ в том и только в том случае, когда x_* есть неподвижная точка проекционного отображения $P(x)$.*

Если $X = \mathbb{R}^n_+$, как в нелинейной задаче дополнительности, то

$$P(x) = [x - \alpha F(x)]_+ ,$$

где $y_+ = [y^1_+, \ldots, y^n_+]$ — положительная срезка вектора y, т.е. для каждой компоненты y^i_+ выполняется $y^i_+ = \max[0, y^i]$, $1 \leq i \leq n$.

2.2. Существование решений и единственность

Вариационные неравенства. Наиболее простой результат, касающийся существования решений вариационных неравенств, может быть получен на основе сведения вариационного неравенства к поиску неподвижных точек проекционного отображения. Нами он уже фактически использовался при доказательстве существования решения у линейных задач дополнительности. Приведем его для общей задачи вариационного неравенства.

Теорема 2.2.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ является выпуклым компактным множеством, а отображение $F(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывным. Тогда вариационное неравенство $VI(X, F)$ имеет решение.*

Доказательство основано на использовании теоремы 2.1.5, согласно которой решение вариационного неравенства эквивалентно отысканию неподвижной точки отображения (2.1.17). Так как X — выпуклый компакт, то по теореме Бауэра такая неподвижная точка у данного непрерывного отображения существует. ■

Разумеется, требование ограниченности множества X является весьма обременительным и во многих случаях не выполняется, например, в нелинейной задаче дополнительности, в которой $X = \mathbb{R}^n_+$. Поэтому, чтобы все же воспользоваться теоремой 2.2.1, идут по пути уточнения свойств отображения $F(x)$, накладывая на $F(x)$ такие требования, которые гарантировали бы ограниченность решения задачи вариационного неравенства, если конечно оно существует. Тогда пропадает необходимость принимать во внимание всю совокупность точек из множества X — достаточно рассмотреть только точки из некоторого ограниченного подмножества $Y \subset X$, которому заведомо принадлежит решение.

Теорема 2.2.2. *Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло и замкнуто, и пусть $F(x)$ — непрерывное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда, если существует непустое ограниченное выпуклое подмножество $Y \subset X$ такое, что для любого $x \in X \setminus Y$ найдется $y \in Y$, для которого*

$$\langle F(x), y - x \rangle < 0, \tag{2.2.1}$$

то вариационное неравенство $VI(X, F)$ имеет решение.

Доказательство. Обозначим через $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1\}$ единичный шар в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $Y_1 = (Y + B) \cap X$ и $\bar{Y}_1$ — замыкание множества Y_1 (см. рис. 2.2). Множество $\bar{Y}_1$ является выпуклым компактом и по теореме 2.2.1 вариационное неравенство $VI(\bar{Y}_1, F)$ имеет решение. Из-за того, что выполняется неравенство (2.2.1), любое его решение x_* может принадлежать только множеству Y.

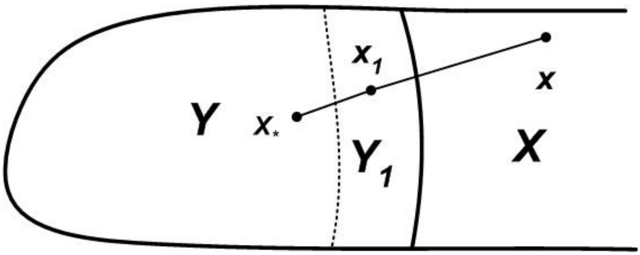

Рис. 2.2. Множество X и множество Y_1

Убедимся, что x_* является и решением всей задачи $VI(X, F)$. Действительно, решение $VI(\bar{Y}_1, F)$ означает по определению выполнения неравенства

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in \bar{Y}_1. \tag{2.2.2}$$

Возьмем теперь произвольное $x \in X \setminus \bar{Y}_1$. Имеем $c = \|x - x_*\| > 1$, и пусть $x_1 = x_* + c^{-1}(x - x_*)$. Так как $\|x_1 - x_*\| = 1$, то точка x_1 принадлежит $\bar{Y}_1$ и для нее на основании (2.2.2)

$$\langle F(x_*), x_1 - x_* \rangle = c^{-1} \langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0.$$

В силу произвольности $x \in X \setminus \bar{Y}_1$ отсюда и из (2.2.2) заключаем, что x_* есть решение всей задачи $VI(X, F)$. ■

Следствие 2.2.1. *Пусть X — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, и пусть $F(x)$ — непрерывное отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Тогда если существует точка $\bar{x} \in X$ такая, что множество*

$$Y = \{x \in X : \langle F(x), \bar{x} - x \rangle \geq 0\}$$

ограничено, то вариационное неравенство $VI(X, F)$ имеет решение.

Доказательство. Данный результат следует из утверждения теоремы 2.2.2, поскольку для любой точки $x \in X \setminus Y$ должно выполняться

$$\langle F(x), \bar{x} - x \rangle < 0.$$

Таким образом, в качестве точки y можно брать точку $\bar{x} \in Y$. ■

Теорема 2.2.2 дает достаточно общий инструмент для установления существования решений вариационных неравенств с неограниченным множеством X. Однако, выявление такого множества Y, для которого выполнялось бы условие (2.2.1), само по себе является сложной проблемой. В случае, когда отображение $F(x)$ обладает некоторыми дополнительными свойствами (наиболее простые из них приводятся ниже), эта задача значительно упрощается.

Определение 2.2.1. *Отображение $F(x)$ называется псевдомонотонным на множестве X, если для любых $x, y \in X$ из неравенства $\langle F(y), x-y\rangle \geq 0$ следует выполнение неравенства $\langle F(x), x-y\rangle \geq 0$.*

Определение 2.2.2. *Отображение $F(x)$ называется на X:*
1) монотонным, если

$$\langle F(x) - F(y), x-y\rangle \geq 0, \quad \forall x, y \in X;$$

2) строго монотонным, если

$$\langle F(x) - F(y), x-y\rangle > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad x \neq y;$$

3) сильно монотонным, если существует $\theta > 0$ такое, что

$$\langle F(x) - F(y), x-y\rangle \geq \theta\|x-y\|^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Монотонное отображение является псевдомонотонным. Тем более псевдомонотонными оказываются строго монотонные и сильно монотонные отображения. Для дифференцируемых отображений $F(x)$ различные типы монотонности тесно связаны с положительной определенностью и полуопределенностью матрицы $F_x(x)$, а именно, $F(x)$ монотонно в том и только в том случае, когда матрица $F_x(x)$ положительно полуопределена. Соответственно, отображение $F(x)$ сильно монотонно на X, если матрица $F_x(x)$ сильно положительно определена на X, т.е. существует такая константа $\gamma > 0$, что

$$\langle s, F_x(x)s\rangle \geq \gamma\|s\|^2$$

для любых ненулевых $s \in \mathbb{R}^n$ и любых $x \in X$. Если матрица $F_x(x)$ положительно определена, то отображение $F(x)$ строго монотонно.

Лемма 2.2.1. *Пусть X – выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $F(x)$ – непрерывное псевдомонотонное отображение из X в $\mathbb{R}^n$. Тогда точка $x_* \in X$ является решением $VI(X, F)$ в том и только в том случае, когда*

$$\langle F(x), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{2.2.3}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть x_* решение вариационного неравенства $VI(X, F)$, т.е. выполнено

$$\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Но тогда, в силу псевдомонотонности отображения $F(x)$,

$$\langle F(x), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X,$$

т.е. выполняется (2.2.3).

Достаточность. Предположим, что выполнено (2.2.3). Возьмем произвольный вектор $x \in X$ и зафиксируем его. Пусть, кроме того, x_λ — промежуточная точка, определяемая как $x_\lambda = \lambda x_* + (1 - \lambda)x$, где $0 < \lambda < 1$. В силу выпуклости X имеет место включение $x_\lambda \in X$. Согласно (2.2.3) с учетом того, что $x_\lambda - x_* = (1 - \lambda)(x - x_*)$, получаем

$$\langle F(x_\lambda), x - x_* \rangle = (1 - \lambda)^{-1} \langle F(x_\lambda), x_\lambda - x_* \rangle \geq 0,$$

т.е. $\langle F(x_\lambda), x - x_* \rangle \geq 0$ для любого $x \in X$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \uparrow 1$, приходим к $\langle F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0$ для всех $x \in X$, т.е. x_* есть решение $VI(X, F)$. ■

Теорема 2.2.3. *Пусть выполнены предположения леммы 2.2.1. Тогда множество решений задачи $VI(X, F)$ выпукло, если оно не пусто.*

Доказательство. Предположим, что x_* и y_* два разных решения задачи $VI(X, F)$. Возьмем точку $z_* = \lambda x_* + (1 - \lambda)y_*$, где $0 < \lambda < 1$, и покажем, что z_* также является решением задачи $VI(X, F)$. Имеем в силу утверждения леммы 2.2.1

$$\langle F(x), x - x_* \rangle \geq 0, \quad \langle F(x), x - y_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Умножая первое неравенство на λ, а второе — на $1 - \lambda$, и складывая их, приходим к

$$\langle F(x), x - z_* \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

Согласно утверждению леммы 2.2.1 это означает, что z_* — решение $VI(X,F)$. ■

Для задачи выпуклого программирования со строго выпуклой целевой функцией решение задачи, если существует, всегда единственно. Аналогичный результат имеет место для вариационных неравенств со строго монотонными отображениями. Считаем, по-прежнему, что X — выпуклое замкнутое множество.

Теорема 2.2.4. *Для строго монотонного отображения $F(x)$, если задача $VI(X,F)$ имеет решение, то это решение единственное.*

Доказательство от противного. Допустим, что существуют два разных решения x_* и y_*. Тогда, по определению решений,

$$\langle F(x_*), y_* - x_* \rangle \geq 0, \quad \langle F(y_*), x_* - y_* \rangle \geq 0$$

или

$$\langle F(x_*), x_* - y_* \rangle \leq 0, \quad -\langle F(y_*), x_* - y_* \rangle \leq 0.$$

Складывая эти два неравенства, получаем

$$\langle F(x_*) - F(y_*),\ x_* - y_* \rangle \leq 0,$$

что противоречит строгой монотонности отображения $F(x)$. ■

Нами получены утверждения относительно множества решений вариационного неравенства в случае псевдомонотонных и строго монотонных отображений $F(x)$. Однако, одного свойства монотонности, даже строгой монотонности, вообще говоря, недостаточно для существования решения вариационного неравенства. Надо наложить на отображение $F(x)$ дополнительные условия. Одним из таких условий является следующее свойство отображений.

Определение 2.2.3. *Отображение $F(x)$ называется коэрцитивным относительно множества X, если существует $x_0 \in X$ такое, что*

$$\lim_{x \in X,\ \|x\| \to \infty} \frac{\langle F(x), x - x_0 \rangle}{\|x\|} = +\infty.$$

Сильно монотонное на множестве X отображение является коэрцитивным относительно X. Линейное отображение $F(x) = Mx + q$ коэрцитивно относительно всего пространства $\mathbb{R}^n$ в том и только в том случае, когда матрица M положительно определена.

Теорема 2.2.5. *Пусть X — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, непрерывное отображение $F(X)$ коэрцитивно относительно X. Тогда задача $VI(X, F)$ имеет непустое компактное множество решений.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.2.2, взяв в качестве множества Y пересечение шара достаточно большого диаметра с множеством X. Свойство коэрцитивности отображения $F(x)$ позволяет это сделать. Тогда по теореме 2.2.2 задача $VI(X, F)$ обязательно имеет решение. Более того, как можно проверить, множество решений будет компактным. ∎

Так как сильно монотонное на множестве X отображение является одновременно строго монотонным и коэрцитивным относительно X, то на основании утверждений теорем 2.2.4 и 2.2.5 приходим к следующему результату.

Теорема 2.2.6. *Пусть X — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $F(X)$ непрерывное сильно монотонное отображение на X. Тогда решение задачи $VI(X, F)$ существует, причем единственное.*

Задачи дополнительности. В случае задач дополнительности приведенные результаты, касающиеся существования решений, можно усилить. Рассмотрим нелинейную задачу дополнительности $NCP(F)$. *Допустимое множество* X в ней определяется следующим образом:

$$X = X(F) = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ F(x) \geq 0_n\right\}.$$

Если данное множество не пусто, то задача $NCP(F)$ называется *допустимой*, а векторы из X — *допустимыми точками.*

Теорема 2.2.7. *Пусть отображение $F(x)$ непрерывно и строго монотонно на $\mathbb{R}^n_+$. Пусть, кроме того, задача дополнительности $NCP(F)$ допустима. Тогда существует решение этой задачи, причем единственное.*

Доказательство. Так как задача $NCP(F)$ допустима, то найдется точка $\bar{x} \geq 0_n$ такая, что $F(\bar{x}) \geq 0_n$. Предположим сначала для простоты, что $F(\bar{x}) > 0_n$. Введем в рассмотрение множество

$$Y = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ : \ \langle F(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \leq 0\right\}.$$

Это множество не пусто, поскольку содержит точку $\bar{x}$. Более того, оно является пересечением неотрицательного ортанта и сдвинутого отрицательного полупространства, направляюющий вектор которого $F(\bar{x})$ лежит внутри ортанта $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому такое множество обязательно должно быть ограниченным.

Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n_+$, не принадлежащую множеству Y. Тогда должно выполняться неравенство

$$\langle F(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle > 0. \tag{2.2.4}$$

Но отображение $F(x)$ строго монотонное, поэтому

$$\langle F(\bar{x}) - F(x), \bar{x} - x \rangle > 0.$$

Отсюда и из (2.2.4) следует, что

$$\langle F(x), \bar{x} - x \rangle < 0.$$

Таким образом, введенное нами множество Y обладает всеми свойствами, которые требуются от него в теореме 2.2.2 (в качестве точки $y \in Y$ можно брать точку $\bar{x} \in Y$). Поэтому по этой теореме задача $NCP(F)$ имеет решение.

Если же вектор $F(\bar{x})$ имеет нулевые компоненты, то есть возможность перейти от точки $\bar{x}$ к другой точке $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}^n_+$, в которой у $F(x)$ меньшее число нулевых компонент. Действительно, пусть $F^i(\bar{x}) = 0$. Возьмем $\bar{x}_1 = \bar{x} + \delta e_i$, где e_i — i-й единичный орт, $\delta > 0$. В силу строгой монотонности отображения $F(x)$ выполняется

$$0 < \langle F(\bar{x}_1) - F(\bar{x}), \bar{x}_1 - \bar{x} \rangle = \delta \left(F^i(\bar{x}_1) - F^i(\bar{x}) \right) = \delta F^i(\bar{x}_1),$$

откуда $F^i(\bar{x}_1) > 0$. В случае, когда $F(\bar{x}_1) > 0_n$, на основании приведенных выше рассуждений убеждаемся, что в задаче $NCP(F)$ существует решение. Если нет, то повторим процедуру перехода к новой точке $\bar{x}_2$ и т.д. пока не добьемся на некотором k-м шаге выполнения строгого неравенства $F(\bar{x}_k) > 0_n$.

Единственность решения задачи $NCP(F)$ следует из утверждения теоремы 2.2.4. ■

Результат теоремы 2.2.7 может быть перенесен на обобщенные задачи дополнительности. Однако в этом случае, поскольку конус K, входящий в постановку задачи $GCP(K, F)$, может быть произвольным, не обязательно полиэдральным, как неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$, на K следует наложить дополнительные условия, например, потребовать существование такой точки $\bar{x} \in K$, что $F(\bar{x}) \in \mathrm{int} K^*$. Данное требование можно рассматривать как некий *аналог условия Слейтера* для задачи выпуклого программирования. Напомним, что допустимое множество в обобщенной задаче дополнительности $GCP(K,F)$ определяется следующим образом:

$$X(K,F) = \{x \in K: \ F(x) \in K^*\}.$$

Таким образом, выполнение данного требования заведомо обеспечивает допустимость задачи $GCP(K,F)$.

Теорема 2.2.8. *Пусть K — выпуклый замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $F(x)$ — непрерывное строго монотонное на K отображение и существует такая точка $\bar{x}$, что $F(\bar{x}) \in int\, K^*$. Тогда задача $GCP(K,F)$ имеет решение, причем единственное.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$Y = \{x \in K: \ \langle F(\bar{x}), x - \bar{x}\rangle \le 0\}. \tag{2.2.5}$$

Оно не пусто, поскольку содержит точку $\bar{x}$. Более того, множество Y ограничено. В самом деле, так как $F(\bar{x}) \in \mathrm{int} K^*$, то можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\langle F(\bar{x}) - \delta \frac{x}{\|x\|}, x\rangle \ge 0, \quad \forall x \in K.$$

Отсюда и из (2.2.5) получаем

$$\|x\| \le \frac{1}{\delta}\langle F(\bar{x}), x\rangle \le \frac{1}{\delta}\langle F(\bar{x}), \bar{x}\rangle, \quad \forall x \in Y.$$

Далее, аналогично тому, как это делалось при доказательстве предыдущей теоремы, убеждаемся, что в задаче $GCP(K,F)$ существует решение, которое может быть только единственным. ■

Отображения, обобщающие линейные. Приведем другие результаты, касающиеся существования решений нелинейных задач дополнительности. Они в отличие от предыдущих получаются как обобщение соответствующих результатов для линейных задач. Рассмотрим сначала отображения, обобщающие понятие $\mathcal{P}$-матриц.

Определение 2.2.4. *Мы скажем, что отображение $F(x)$ является:*

1) $\mathcal{P}$-функцией на X, если

$$\max_{1\le i\le n} \left(F^i(x) - F^i(y)\right)\left(x^i - y^i\right) > 0, \quad \forall x, y \in X, \quad x \ne y;$$

2) равномерной $\mathcal{P}$-функцией на X, если существует константа $\theta > 0$ такая, что

$$\max_{1 \le i \le n} \left(F^i(x) - F^i(y)\right)\left(x^i - y^i\right) \ge \theta \|x - y\|_2^2, \quad \forall x, y \in X.$$

Непосредственно из определения следует, что строго монотонные на X отображения являются $\mathcal{P}$-функциями на X, а сильно монотонные отображения — равномерными $\mathcal{P}$-функциями.

Под множеством X прямоугольного вида будем понимать следующее множество:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \alpha^i \le x^i \le \beta^i, \ 1 \le i \le n\right\},$$

где $\alpha^i, \beta^i \in \bar{\mathbb{R}}^1$, $\bar{\mathbb{R}}^1$ — расширенная прямая, т.е. прямая $\mathbb{R}^1$, пополненная элементами $+\infty$ и $-\infty$. Вариационные неравенства на множествах прямоугольного вида называют также *смешанными задачами дополнительности.*

Теорема 2.2.9. *Пусть X — множество прямоугольного вида. Пусть, кроме того, $F(x) : X \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывная $\mathcal{P}$-функция на X. Тогда существует по крайней мере одно решение задачи $VI(X, F)$.*

Теорема 2.2.10. *Пусть X — множество прямоугольного вида. Пусть, кроме того, $F(x) : X \to \mathbb{R}^n$ есть непрерывная равномерная $\mathcal{P}$-функция на X. Тогда существует единственное решение задачи $VI(X, F)$.*

Результаты теорем 2.2.9 и 2.2.10 справедливы и для нелинейных задач дополнительности $NCP(F)$, так как неотрицательный ортант $\mathbb{R}^n_+$ является множеством прямоугольного вида.

Рассмотрим теперь отображения, которые в некотором смысле являются обобщением линейных отображений с коположительными матрицами.

Определение 2.2.5. *Пусть множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ содержит начало координат — точку 0_n. Тогда отображение $F(x) : X \to \mathbb{R}^n$ называется относительно X:*

1) коположительным, если

$$\langle F(x) - F(0_n), x \rangle \ge 0, \quad \forall x \in X;$$

2) строго коположительным, если

$$\langle F(x) - F(0_n), x\rangle > 0, \quad \forall x \in X,\ x \neq 0_n;$$

3) сильно коположительным, если существует константа $\theta > 0$ такая, что

$$\langle F(x) - F(0_n), x\rangle > \theta\|x\|^2, \quad \forall x \in X,\ x \neq 0_n.$$

Рассмотрим сначала случай сильно коположительного отображения.

Теорема 2.2.11. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное сильно коположительное отображение относительно $\mathbb{R}^n_+$. Тогда нелинейная задача дополнительности с таким отображением имеет непустое компактное множество решений.*

Доказательство. Сильно коположительное относительно $\mathbb{R}^n_+$ отображение является очевидно коэрцитивным относительно $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому по теореме 2.2.5 нелинейная задача дополнительности с таким отображением всегда имеет непустое компактное множество решений. ■

Результат теоремы 2.2.11 сохраняется и для задач со строго коположительными отображениями $F(x)$, однако, на них надо наложить дополнительное требование, обеспечивающее ограниченность решения.

Теорема 2.2.12. *Пусть $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное строго коположительное отображение относительно $\mathbb{R}^n_+$. Пусть, кроме того, существует функция $c(\lambda) : \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1$ такая, что $c(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Тогда, если при $x \in \mathbb{R}^n_+$ и $\lambda \geq 0$ выполняется неравенство*

$$\langle F(\lambda x) - F(0_n), x\rangle \geq c(\lambda)\langle F(x) - F(0_n), x\rangle, \tag{2.2.6}$$

то задача $NCP(F)$ имеет непустое компактное множество решений.

Доказательство. Обозначим через B_1^+ пересечение единичной сферы с неотрицательным ортантом $\mathbb{R}^n_+$, т.е. множество, имеющее вид: $B_1^+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \|x\| = 1\}$. Пусть

$$\gamma_1 = \min_{x \in B_1^+} \langle F(x) - F(0_n), x\rangle, \quad \gamma_2 = \min_{x \in B_1^+} \langle F(0_n), x\rangle.$$

Из непрерывности и строгой коположительности $F(x)$ следует, что $\gamma_1 > 0$.

Возьмем произвольный ненулевой вектор $x \in \mathbb{R}^n_+$. В силу сделанного предположения (2.2.6)

$$\begin{array}{rcl} \langle F(x) - F(0_n), x\rangle & = & \langle F(\|x\|\frac{x}{\|x\|}) - F(0_n), x\rangle \geq \\ & \geq & c(\|x\|)\ \langle F(\frac{x}{\|x\|}) - F(0_n), \|x\|\frac{x}{\|x\|}\rangle \geq \\ & \geq & \gamma_1 c(\|x\|)\|x\|. \end{array}$$

Отсюда

$$\begin{array}{rcl} \langle F(x), x\rangle & \geq & \gamma_1 c(\|x\|)\|x\| + \|x\|\langle F(0_n), \frac{x}{\|x\|}\rangle = \\ & = & \|x\|\left[\gamma_1 c(\|x\|) + \langle F(0_n), \frac{x}{\|x\|}\rangle\right] \geq \\ & \geq & [\gamma_1 c(\|x\|) + \gamma_2]\,\|x\|. \end{array}$$

Правая часть этого неравенства стремится к бесконечности, когда $\|x\| \to \infty$. Следовательно, множество

$$Y = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ \langle F(x), x\rangle \leq 0\right\}$$

ограничено. Поэтому, беря $\bar{x} = 0_n$, получаем согласно следствию к теореме 2.2.2, что задача $NCP(F)$ имеет непустое компактное множество решений. ■

Как следует из определений коположительности, важную роль здесь играет отображение $G(x) = F(x) - F(0_n)$. В случае линейного отображения $F(x)$ оно линейно и в качестве функции $c(\lambda)$ может быть взята функция $c(\lambda) = \lambda$. Условие (2.2.6) при этом выполняется.

Изолированные локальные решения. Перейдем теперь к рассмотрению условий, которые гарантировали бы нам, что рассматриваемое решение вариационного неравенства или задачи дополнительности является единственным, по крайней мере, в некоторой окрестности этого решения.

Определение 2.2.6. *Решение $x_* \in X$ вариационного неравенства $VI(X, F)$ называется локально единственным или локально изолированным, если существует такая окрестность $\Delta(x_*)$ этой точки, что x_* является единственным решением $VI(X, F)$ в $X \cap \Delta(x_*)$.*

Теорема 2.2.13. *Пусть $F(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть, кроме того, точка x_* есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ и матрица Якоби $F_x(x_*)$ положительно определена. Тогда решение x_* является локально изолированным.*

Доказательство. Так как отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо и матрица $F_x(x_*)$ положительно определена, то найдется окрестность $\Delta(x_*)$ этой точки, в которой матрица Якоби $F_x(x)$ будет оставаться положительно определенной для всех точек x из этой окрестности.

Покажем, что x_* — единственное решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ в этой окрестности. От противного, пусть это не так, и существует другое решение y_* задачи $VI(X, F)$ также принадлежащее этой окрестности $\Delta(x_*)$. По определению решения вариационного неравенства выполняются

$$\langle F(x_*), y_* - x_* \rangle \geq 0, \quad \langle F(y_*), x_* - y_* \rangle \geq 0,$$

откуда

$$\langle F(x_*) - F(y_*), x_* - y_* \rangle \leq 0. \tag{2.2.7}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\phi(t) = \langle F(x(t)), x_* - y_* \rangle,$$

где $x(t) = y_* + t(x_* - y_*)$, $0 \leq t \leq 1$. Производная этой функции равна

$$\phi'(t) = \langle x_* - y_*, F_x(x(t))\,(x_* - y_*) \rangle$$

и поскольку матрица $F_x(x(t))$ положительно определена на $\Delta(x_*)$, то $\phi'(t) > 0$ при $0 \leq t \leq 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} \langle F(x_*) - F(y_*), x_* - y_* \rangle &= \phi(1) - \phi(0) = \\ &= \int_0^1 \langle x_* - y_*, F_x(x(t))\,(x_* - y_*) \rangle dt > 0. \end{aligned}$$

Получено противоречие с (2.2.7). ■

В теореме 2.2.13 множество X имело произвольный вид, важно только, чтобы оно, как мы обычно предполагаем, было выпуклым и замкнутым. Если же рассмотреть частный случай множества X, которое задается функциональными ограничениями типа неравенства

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \; g^i(x) \leq 0, \; 1 \leq i \leq m \right\}, \tag{2.2.8}$$

то можно заменить требование положительной определенности матрицы $F_x(x_*)$ на более слабые условия второго порядка.

Обозначим через $J_0(x)$ множество индексов активных ограничений в точке $x \in X$, т.е. множество

$$J_0(x) = \left\{ i \in [1 : m] : \; g^i(x) = 0 \right\}.$$

Обозначим также $J_0^+(x,u) = \{i \in J_0(x) : \ u^i > 0\}$, где $u \in \mathbb{R}^m_+$. Мы скажем, что в точке $[x,u]$ выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, если $J_0^+(x,u) = J_0(x)$. Пусть функции $g^i(x)$, $1 \le i \le m$, непрерывно дифференцируемы. Положим

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(x,u) = \big\{ z \in \mathbb{R}^n : \ & \langle g^i_x(x), z\rangle = 0, \ i \in J_0^+(x,u); \\ & \langle g^i_x(x), z\rangle \le 0, \ i \in J_0(x) \setminus J_0^+(x,u) \big\}.\end{aligned}$$

Теорема 2.2.14. *Пусть отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо и множество X имеет вид (2.2.8), где все функции $g^i(x)$, $1 \le i \le m$, дважды непрерывно дифференцируемы. Пусть, кроме того, точка x_* есть решение вариационного неравенства $VI(X,F)$ и существует вектор $u_* \in \mathbb{R}^m_+$ такой, что*

$$F(x_*) + \sum_{i=1}^m u^i_* g^i_x(x_*) = 0, \qquad u^i_* g^i(x_*) = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

и

$$\langle z, \left(F_x(x_*) + \sum_{i=1}^m u^i_* g^i_{xx}(x_*) \right) z\rangle > 0$$

для любого ненулевого вектора $z \in \mathcal{K}(x_*, u_*)$. Тогда x_* является локально изолированным решением $VI(X,F)$.

Перейдем теперь к условиям, достаточным для локальности решения $NCP(F)$. Перепишем задачу в виде

$$\begin{array}{rcl} x & \ge & 0_n, \quad y \ge 0_n, \\ y & = & F(x), \\ 0 & = & x^T y, \end{array} \tag{2.2.9}$$

Пара $[x,y] \in \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+$ называется *внутренней*. Внутренняя пара называется *допустимой*, если $y = F(x)$. Пусть допустимая пара $[x,y]$ является решением задачи. Поставим в соответствие этой паре разбиение множества $J^n = [1:n]$ на три подмножества

$$\begin{array}{rcl} J_B(x,y) & = & \left\{ i \in J^n : \ x^i > 0, \ y^i = 0 \right\}, \\ J_N(x,y) & = & \left\{ i \in J^n : \ x^i = 0, \ y^i > 0 \right\}, \\ J_Z(x,y) & = & \left\{ i \in J^n : \ x^i = 0, \ y^i = 0 \right\}. \end{array} \tag{2.2.10}$$

В соответствии с разбиением (2.2.10) разбиваются также n-мерные векторы x, y и F на подвекторы и матрица Якоби $F_x(x)$ на подматрицы, т.е.

$$x = \begin{bmatrix} x^B \\ x^N \\ x^Z \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F^B \\ F^N \\ F^Z \end{bmatrix}, \quad F_x = \begin{bmatrix} F^{BB}_x & F^{BN}_x & F^{BZ}_x \\ F^{NB}_x & F^{NN}_x & F^{NZ}_x \\ F^{ZB}_x & F^{ZN}_x & F^{ZZ}_x \end{bmatrix}.$$

Теорема 2.2.15. *Пусть $F(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть, кроме того, пара $[x_*, y_*]$ есть решение $NCP(F)$. Тогда, если не существует ненулевого вектора $x = [x^B, x^Z]$ такого, что*

$$F_x^{BB}(x_*)x^B + F_x^{BZ}(x_*)x^Z = 0,$$

$$x^Z \geq 0, \quad F_x^{ZB}(x_*)x^B + F_x^{ZZ}(x_*)x^Z \geq 0,$$

$$\langle x^Z, F_x^{ZB}(x_*)x^B + F_x^{ZZ}(x_*)x^Z \rangle = 0,$$

то x_* есть изолированное локальное решение $NCP(F)$.

Условия предыдущей теоремы заведомо будут выполняться, если матрица $F_x(x_*)$ неособая.

Другим условием, часто накладываемым для задач $NCP(F)$, является условие невырожденности решения. Решение x_* называется *невырожденным*, если $x_* + F(x_*) > 0_n$. Для такого решения множество $J_Z(x_*, y_*)$, где $y_* = F(x_*)$, является пустым. Теорема 2.2.15 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 2.2.16. *Пусть $F(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть, кроме того, x_* — невырожденное решение $NCP(F)$. Тогда, если матрица $F_x^{BB}(x_*)$ неособая, то x_* есть изолированное локальное решение $NCP(F)$.*

Регулярные решения. Пусть x_* есть решение $VI(X, F)$. Тогда x_* называется *регулярным решением*, если можно указать такую окрестность $\Delta(x_*)$ точки x_* и величину $\delta > 0$, что для каждого вектора y, удовлетворяющего неравенству $\|y\| < \delta$, существует единственное решение $x(y) \in \Delta(x_*)$ возмущенного линеаризованного вариационного неравенства $VI(X, F^y(x))$, в котором

$$F^y(x) = F(x_*) + F_x(x_*)(x - x_*) + y,$$

причем решение $x(y)$ является липшицевым в области $\|y\| < \delta$. В случае множества $X = \mathbb{R}^n$ регулярность решения x_* эквивалентна невырожденности матрицы $F_x(x_*)$.

Теорема 2.2.17. *Пусть $F(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение из $\mathbb{R}^n$ в себя. Пусть, кроме того, точка x_* есть решение $NCP(F)$, $y_* = F(x_*)$. Тогда для того, чтобы x_* являлось регулярным решением $NCP(F)$, необходимо и достаточно, чтобы в подматрице*

$$\begin{bmatrix} F_x^{BB}(x_*) & F_x^{BZ}(x_*) \\ F_x^{ZB}(x_*) & F_x^{ZZ}(x_*) \end{bmatrix}$$

матрицы $F_x(x_*)$ матрица $F_x^{BB}(x_*)$ была бы неособой и ее дополнение по Шуру

$$F_x^{ZZ}(x_*) - F_x^{ZB}(x_*)\left(F_x^{BB}(x_*)\right)^{-1} F_x^{BZ}(x_*)$$

являлось бы $\mathcal{P}$-матрицей.

Отметим, что данные условия являются более строгими по сравнению с условиями теоремы 2.2.15. Как правило, требование к регулярности решения появляется при обосновании сходимости численных методов.

2.3. Численные методы решения вариационных неравенств и НЗД

2.3.1. Проекционный метод

Предположим, что имеется вариационное неравенство $VI(X, F)$, в котором X — выпуклое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$, а $F(x)$ — непрерывное на $\mathbb{R}^n$ отображение. Согласно теореме 2.1.5 точка x_* — решение вариационного неравенства $VI(X, F)$ в том и только в том случае, когда она является неподвижной точкой проекционного отображения

$$P(x) = \pi_X(x - \alpha F(x)), \quad \alpha > 0,$$

т.е. если выполняется равенство

$$x_* = P(x_*) = \pi_X(x_* - \alpha F(x_*)). \tag{2.3.1}$$

Рассмотрим теперь метод решения $VI(X, F)$, в котором используется отображение $P(x)$. Назовем его *проекционным методом*. Пусть задано начальное приближение $x_0 \in X$. Последующие точки x_k, $k \geq 1$, находим с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$x_{k+1} = \pi_X\left(x_k - \alpha F(x_k)\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3.2}$$

где $\alpha > 0$ — параметр. Данный метод является по существу методом простой итерации для отыскания неподвижных точек отображения $P(x)$.

Метод сходится глобально на X, однако при некоторых дополнительных предположениях. А именно, от отображения $F(x)$ требуется, чтобы оно было сильно монотонным. В этом случае задача $VI(X, F)$ имеет только единственное решение $x_* \in X$.

Теорема 2.3.1. *Пусть X — выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $F(x)$ — сильно монотонное на X отображение с константой θ, удовлетворяющее условию Липшица, т.е. для всех $x, y \in X$ выполняется*

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq \theta \|x - y\|^2, \tag{2.3.3}$$

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|. \tag{2.3.4}$$

Тогда при любом $x_0 \in X$ и любом $0 < \alpha < 2\theta/L^2$ последовательность $\{x_k\}$, порождаемая итерационным процессом (2.3.2), сходится к решению задачи $VI(X, F)$ — точке $x_* \in X$ — с линейной скоростью

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C\|x_k - x_*\|, \tag{2.3.5}$$

где $0 < c < 1$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что оператор проектирования $P(x) = \pi_X(x - \alpha F(x)))$ является нерастягивающим. Тогда из (2.3.1) и (2.3.2)

$$\begin{aligned} \|x_{k+1} - x_*\|^2 = \|\pi_X(x_k - \alpha F(x_k)) - \pi_X(x_* - \alpha F(x_*))\|^2 \leq \\ \leq \|x_k - \alpha F(x_k) - x_* + \alpha F(x_*)\|^2 = \\ = \|x_k - x_*\|^2 + \alpha^2 \|F(x_k) - F(x_*)\|^2 - \\ -2\alpha \langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_* \rangle. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Но согласно (2.3.3)

$$\langle F(x_k) - F(x_*), x_k - x_* \rangle \geq \theta \|x_k - x_*\|^2, \tag{2.3.7}$$

а в силу (2.3.4) —

$$\|F(x_k) - F(x_*)\|^2 \leq L^2 \|x_k - x_*\|^2. \tag{2.3.8}$$

Поэтому после подстановки (2.3.7) и (2.3.8) в (2.3.6) приходим к

$$\|x_{k+1} - x_*\|^2 \leq \left(1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\theta\right) \|x_k - x_*\|^2.$$

При $0 < \alpha < 2\theta/L^2$ выполняется неравенство

$$1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\theta < 1.$$

Отсюда заключаем, что итерации, определяемые формулой (2.3.2), сходятся с линейной скоростью к x_*, причем в (2.3.5) константа C равняется $C = \left(1 + \alpha^2 L^2 - 2\alpha\theta\right)^{1/2}$. ■

Обычно заранее сложно оценить константы θ и L у отображения $F(x)$, поэтому нужное значение параметра α, обеспечивающее сходимость процесса (2.3.2), подбирают дроблением его некоторого начального значения.

Понятно, что проекционный метод целесообразно применять, когда вычисление проекции на множество X достаточно простое, например, в случае нелинейной задачи дополнительности $NCP(F)$, в которой $X = \mathbb{R}^n_+$. Итерационный процесс (2.3.2) в этом случае принимает следующий вид

$$x_{k+1} = (x_k - \alpha F(x_k))_+ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3.9}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n_+$. Возможно использование проекционного метода и для решения линейных задач дополнительности $LCP(q, M)$, в которых матрица M положительно определена. В этом случае аффинное отображение $F(x) = Mx + q$ является сильно монотонным с константой $\theta = \min_{\|x\|=1} \langle x, Mx \rangle$.

Наряду с процессом (2.3.9), применяемым для решения нелинейной задачи дополнительности $NCP(F)$, рассматривают также итерационный процесс

$$x_{k+1} = \left[x_k - \alpha\left(x_k - \alpha F(x_k)\right)_+\right]_+ , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.3.10}$$

который обладает лучшими свойствами сходимости по сравнению с методом (2.3.9). Он сходится на $\mathbb{R}^n_+$ глобально даже в том случае, когда отображение $F(x)$ является просто монотонным, а не сильно монотонным. Итерационный процесс (2.3.10) можно рассматривать как перенесение на задачи дополнительности так называемого *экстраградиентного метода*, хорошо известного в оптимизации. Однако скорость сходимости у итерационного процесса (2.3.10) остается прежней линейной.

2.3.2. Методы линеаризации

Методы линеаризации строятся с использованием достаточно общей фундаментальной идеи, согласно которой решение нелинейной задачи заменяется решением последовательности линейных задач, аппроксимирующих тем или иным способом исходную нелинейную задачу. Конечно, от нелинейной задачи требуется, чтобы она была достаточно гладкой, сами методы линеаризации сходятся, как правило, лишь локально. Однако, если линейные приближения выбраны достаточно удачно и нелинейная задача удовлетворяет определенным дополнительным требованиям, скорость сходимости может оказаться сравнительно высокой, в некоторых случаях даже квадратичной.

Пусть отображение $F(x)$ является непрерывно дифференцируемым. Общая схема методов линеаризации для решения вариационного неравенства $VI(X, F)$ состоит в построении последовательности точек $\{x_k\}$ такой, что каждая точка x_{k+1} есть решение вспомогательного линеаризованного вариационного неравенства $VI(X, F_k)$, в котором $F_k(x)$ — линейное приближение $F(x)$ в точке x_k:

$$F_k(x) = F(x_k) + A(x_k)(x - x_k).$$

Здесь $A(x)$ — квадратная матрица порядка n. Таким образом, точка x_{k+1} для каждого $k \geq 0$ удовлетворяет условию

$$\langle F_k(x_{k+1}), x - x_{k+1} \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X.$$

В наиболее распространенном методе линеаризации в качестве матрицы $A(x)$ берется матрица Якоби $A(x) = F_x(x)$. Метод линеаризации тогда можно рассматривать как *итерационный метод Ньютона* для решения вариационного неравенства $VI(X, F)$. Приведем утверждение о сходимости данного метода, но предварительно сформулируем *условие регулярности* решения задачи $VI(X, F)$.

Определение 2.3.1. *Точка $x_* \in X$, являющаяся решением вариационного неравенства $VI(X, F)$, называется регулярной (по Робинсону), если можно указать ее окрестность $\Delta(x_*)$ и величину $\delta > 0$ такие, что для каждого $\|y\| \leq \delta$ существует единственное решение $x(y) \in \Delta(x_*)$ возмущенного линеаризованного вариационного неравенства $VI(X, F^y)$, в котором*

$$F^y(x) = F(x_*) + y + F_x(x_*)(x - x_*).$$

Более того, функция $x(y)$ удовлетворяет условию Липшица, т.е. существует константа $L > 0$ такая, что

$$\|x(y_1) - x(y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|,$$

если $\|y_1\| \leq \delta$, $\|y_2\| \leq \delta$.

В случае, когда $X = \mathbb{R}^n$ и вариационное неравенство $VI(\mathbb{R}^n, F)$ сводится к уравнению $F(x) = 0_n$, условие регулярности Робинсона эквивалентно невырожденности матрицы Якоби $F_x(x_*)$ в решении.

Теорема 2.3.2. *Пусть X — непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, $F(x)$ — непрерывно дифференцируемое отображение и точка x_* является регулярным (по Робинсону)* *решением вариационного неравенства $VI(X,F)$. Тогда существует окрестность $\Delta(x_*)$ точки x_* такая, что если $x_0 \in \Delta(x_*)$, то последовательность $\{x_k\}$, порождаемая итерационным методом Ньютона, определена и сходится к x_*. Более того, если матрица Якоби $F_x(x)$ непрерывна по Липшицу в окрестности точки x_*, то скорость сходимости квадратичная, т.е. существует константа $C > 0$ такая, что*

$$\|x_{k+1} - x_*\| \leq C\|x_k - x_*\|^2$$

для k достаточно больших.

2.3.3. Методы оценочных функций

Пусть дано множество $Y \subseteq \mathbb{R}^n$. *Оценочной функцией* (английский термин *merit function*) задачи $VI(X,F)$ называется неотрицательная функция $V(x) : Y \to \mathbb{R}$ такая, что точка $x_* \in X$ будет решением задачи $VI(X,F)$ в том и только в том случае, когда $x_* \in Y$ и $V(x_*) = 0$. Таким образом, если имеется оценочная функция, то решение вариационного неравенства $VI(X,F)$ сводится к решению следующей оптимизационной задачи

$$\min_{x \in Y} V(x). \tag{2.3.11}$$

От множества $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ разумеется требуется, чтобы по крайней мере его пересечение с множеством решений вариационного неравенства $VI(X,F)$ содержало последнее. Желательно также, чтобы оценочная функция была гладкой, и чтобы у нее отсутствовали локальные минимумы на Y.

Достаточно просто оценочные функции строятся для нелинейной задачи дополнительности. Например, функция $V(x) = \langle F(x), x\rangle$ является оценочной функцией задачи $NCP(F)$ на допустимом множестве этой задачи, т.е. на множестве $Y = \left\{x \in \mathbb{R}^n_+ :\ F(x) \geq 0_n\right\}$.

Приведем теперь пример оценочной функции для общего вариационного неравенства $VI(X,F)$. Пусть X — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и $F(x)$ — непрерывное отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Обратимся опять к теореме 2.1.5. Согласно ней множество решений задачи $VI(X,F)$ совпадает с множеством неподвижных точек отображения $P(x) = \pi_X\left(x - \alpha F(x)\right)$, где $\alpha > 0$. Составим с помощью $P(x)$ оценочную функцию для задачи $VI(X,F)$:

$$V^F(x) = -\left[\langle F(x), P(x) - x\rangle + \frac{1}{2\alpha}\|P(x) - x\|^2\right].$$

Она носит название *функции Фукушимы*. Данную функцию, как нетрудно видеть, можно представить также в виде:

$$V^F(x) = \frac{1}{2\alpha}\left[\|\alpha F(x)\|^2 - \|P(x) + \alpha F(x) - x\|^2\right]. \qquad (2.3.12)$$

Покажем, что действительно функция $V^F(x)$ является оценочной для задачи $VI(X, F)$ на множестве X, т.е. в данном случае $Y = X$. С целью сокращения записи ниже будем пользоваться обозначением $q(x) = x - \alpha F(x)$.

Утверждение 2.3.1. *Для любого $\alpha > 0$ функция $V^F(x)$ неотрицательна на X и $V^F(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x есть решение задачи $VI(X, F)$.*

Доказательство. Воспользуемся представлением (2.3.12) для отображения $V^F(x)$. Согласно нему

$$V^F(x) = \frac{1}{2\alpha}\left[\rho^2(q(x), x) - \rho^2(q(x), \pi_X(q(x))\right],$$

где $\rho(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ — расстояние между точками x_1 и x_2. Так как x — произвольная точка из X, а $\pi_X(q(x))$ — проекция $q(x)$ на X, то $\rho(q(x), x) \geq \rho(q(x), \pi_X(q(x))$, причем равенство возможно в том и только в том случае, когда $x = \pi_X(q(x))$. По теореме 2.1.5 это означает, что x есть решение задачи $VI(X, F)$. ■

Важное свойство функции Фукушимы состоит в том, что она непрерывно дифференцируема, если только непрерывно дифференцируемо отображение $F(x)$.

Утверждение 2.3.2. *Пусть X — непустое выпуклое замкнутое подмножество в $\mathbb{R}^n$ и отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо. Тогда функция $V^F(x)$ также непрерывно дифференцируема и*

$$V_x^F(x) = F(x) - \left(F_x(x) - \frac{1}{\alpha}I_n\right)(P(x) - x). \qquad (2.3.13)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию двух аргументов

$$g(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle + \frac{1}{2\alpha}\|y - x\|^2.$$

Она сильно выпукла по y для любого фиксированного $x \in X$. Поэтому если рассмотреть функцию

$$\phi(x) = \min_{y \in X} g(x, y), \qquad (2.3.14)$$

где $x \in X$, то она определена на X. Кроме того, поскольку $g(x,x)=0$, функция $\phi(x)$ не положительна на X.

Убедимся, что в качестве решения параметрической задачи минимизации в (2.3.14) можно взять точку $y = y(x) = P(x)$, т.е.

$$\phi(x) = g(x, P(x)). \tag{2.3.15}$$

Действительно, функция $g(x,y)$ дифференцируема по y при любом фиксированном x, и ее градиент $g_y(x,y)$ равняется:

$$g_y(x,y) = F(x) + \frac{1}{\alpha}(y-x).$$

В частности, полагая $y(x) = P(x) = \pi_X(q(x))$, имеем

$$\begin{array}{rcl} g_y(x,y(x)) & = & g_y(x,P(x)) = F(x) + \frac{1}{\alpha}(P(x)-x) = \\ & = & \frac{1}{\alpha}[P(x)-q(x)] = \frac{1}{\alpha}[\pi_X(q(x))-q(x)]. \end{array}$$

Отсюда в силу основных свойств оператора проектирования на выпуклое замкнутое множество для любого $y \in X$ выполняется неравенство

$$\langle g_y(x,P(x)), y-P(x)\rangle = \frac{1}{\alpha}\langle \pi_X(q(x)) - q(x), y - \pi_X(q(x))\rangle \geq 0.$$

Таким образом, в точке $y(x) = P(x)$ выполнены необходимые условия минимума для задачи минимизации функции $g(x,y)$ по y на множестве X. Так как $g(x,y)$ выпукла по y, то эти условия оказываются и достаточными. Следовательно, действительно имеет место равенство (2.3.15). Поэтому

$$\phi(x) = g(x,P(x)) = \langle F(x), P(x)-x\rangle + \frac{1}{2\alpha}\|P(x)-x\|^2 \leq 0.$$

Так как отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо, то функция $g(x,y)$ непрерывно дифференцируема по x с градиентом $g_x(x,y)$, равным

$$g_x(x,y) = \left(F_x(x) - \frac{1}{\alpha}I_n\right)(y-x) - F(x). \tag{2.3.16}$$

Учтем теперь, что минимум в параметрической задаче (2.3.14) достигается в единственной точке $y(x) = P(x)$. Тогда по известным результатам из теории минимаксных задач (лемма Демьянова-Данскина) функция $\phi(x)$ дифференцируема и

$$\phi_x(x) = g_x(x, P(x)).$$

Остается только заметить, что $V^F(x) = -g(x, P(x))$. Отсюда после подстановки выражения (2.3.16) для градиента $g_x(x,y)$ приходим к (2.3.13). ■

Из утверждений 2.3.1 и 2.3.2 следует, что $V^F(x)$ есть дифференцируемая оценочная функция для вариационного неравенства $VI(X,F)$ на допустимом множестве X. Но Функция $V^F(x)$, вообще говоря, не является выпуклой на X, поэтому может иметь локальные минимумы. Однако если отображение $F(x)$ обладает определенной монотонностью, то локальные минимумы у нее отсутствуют.

Теорема 2.3.3. *Пусть X — непустое замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо и матрица Якоби $F_x(x)$ положительно определена при всех $x \in X$. Тогда, если $x_* \in X$ — стационарная точка в задаче минимизации (2.3.11) с $Y = X$, т.е.*

$$\langle V_x^F(x_*), x - x_* \rangle \geq 0 \quad x \in X, \tag{2.3.17}$$

то x_* является точкой глобального минимума $V^F(x)$ на X.

Доказательство. Предположим, что имеет место (2.3.17). Подставляя $V_x^F(x_*)$ из (2.3.13) и беря $x = P(x_*)$, получаем

$$\langle F(x_*) - \left(F_x(x_*) - \frac{1}{\alpha} I_n\right)(P(x_*) - x_*)\,, P(x_*) - x_* \rangle \geq 0.$$

Перепишем данное неравенство в виде

$$\begin{aligned}\langle F(x_*) + \tfrac{1}{\alpha}\left(P(x_*) - x_*\right), P(x_*) - x_* \rangle \geq \\ \geq \langle P(x_*) - x_*, F_x(x_*)(P(x_*) - x_*) \rangle.\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Но $P(x_*) = \pi_X(q(x_*))$, где $q(x_*) = x_* - \alpha F(x_*)$. Кроме того, из свойств проекции вытекает

$$\langle \pi_X(q(x_*)) - q(x_*), x - \pi_X(q(x_*)) \rangle \geq 0, \quad \forall x \in X. \tag{2.3.19}$$

Если теперь в (2.3.19) положить $x = x_*$, то получим

$$\langle F(x_*) + \frac{1}{\alpha}\left(P(x_*) - x_*\right), x_* - P(x_*) \rangle \geq 0.$$

Отсюда заключаем, что левая часть в (2.3.18) неположительна и стало быть, неположительной должна быть правая часть:

$$\langle P(x_*) - x_*, F_x(x_*)\left(P(x_*) - x_*\right) \rangle \leq 0.$$

Так как $F_x(x_*)$ — положительно определенная матрица, то данное неравенство возможно в том и только в том случае, когда $P(x_*) = x_*$, т.е. когда x_* есть неподвижная точка отображения $P(x)$. А это по теореме 2.1.5 имеет место тогда и только тогда, когда x_* есть решение задачи $VI(X, F)$.

Учтем теперь, что согласно утверждению 2.3.1 функция $V^F(x)$ всюду на X неотрицательна и $V^F(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x есть решение вариационного неравенства $VI(X, F)$. Поэтому $V^F(x_*) = 0$ и, стало быть, x_* — точка глобального минимума $V^F(x)$ на X. ■

Следствие 2.3.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 2.3.3 и точка x_* является стационарной в задаче минимизации (2.3.11) с $Y = X$. Тогда точка x_* — решение вариационного неравенства $VI(X, F)$.*

Обратим также внимание, что непрерывно дифференцируемое отображение $F(x)$, у которого матрица Якоби $F_x(x)$ положительно определена, является строго монотонным отображением.

Для решения возникающей оптимизационной задачи

$$\min_{x \in X} V^F(x) \tag{2.3.20}$$

можно применять различные методы градиентного типа, например, метод условного градиента. Однако в качестве направления спуска можно брать и вектор

$$h(x) = P(x) - x = \pi_X\left(x - \alpha F(x)\right) - x. \tag{2.3.21}$$

Данное направление является возможным относительно множества X в точке $x \in X$ и его вычисление несколько проще по сравнению с вычислением градиента, так как не надо знать матрицу Якоби $F_x^F(x)$. Убедимся, что вектор $h(x)$ помимо того является направлением спуска для функции $V^F(x)$.

Утверждение 2.3.3. *Пусть X — непустое замкнутое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть, кроме того, отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо и матрица Якоби $F_x(x)$ положительно определена при всех $x \in X$. Тогда, если вектор $h = h(x)$, где $x \in X$, ненулевой, то он удовлетворяет неравенству*

$$\langle V_x^F(x), h\rangle < 0.$$

Доказательство. Согласно (2.3.13) и (2.3.21) имеем

$$\begin{aligned}\langle V_x^F(x), h\rangle = \langle F(x) + \tfrac{1}{\alpha}\left(P(x) - x\right), P(x) - x\rangle -\\ -\langle P(x) - x, F_x(x)\left(P(x) - x\right)\rangle.\end{aligned}$$

Но $P(x) = \pi_X(x - \alpha F(x))$, поэтому

$$\langle y - P(x), P(x) - (x - \alpha F(x))\rangle \geq 0, \quad \forall y \in X.$$

Отсюда, беря $y = x$, получаем

$$\langle F(x) + \frac{1}{\alpha}\left(P(x) - x\right), P(x) - x\rangle \leq 0.$$

Таким образом,

$$\langle V_x^F(x), h\rangle \leq -\langle P(x) - x, F_x(x)\left(P(x) - x\right)\rangle = -\langle h, F_x(x)h\rangle < 0,$$

если только $h \neq 0_n$. Это следует из положительной определенности матрицы Якоби $F_x(x)$. ■

Приведем теперь алгоритм решения задачи (2.3.20) с функцией Фукушимы $V^F(x)$ в качестве оценочной функции $V(x)$ и основанный на использования направлений спуска (2.3.21). Пусть $x_0 \in X$ задано. Итерационный процесс в методе строим следующим образом:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k h_k, \quad h_k = \pi_X\left(x_k - F(x_k)\right) - x_k \tag{2.3.22}$$

и

$$\alpha_k = \mathrm{argmin}_{0 \leq \alpha \leq 1} V^F(x_k + \alpha h_k). \tag{2.3.23}$$

Задачу (2.3.23) по выбору шага можно решать и приближенно.

Если множество X есть выпуклый компакт, а отображение $F(x)$ непрерывно дифференцируемо и матрица Якоби положительно определена на X, то независимо от начального приближения $x_0 \in X$ последовательность $\{x_k\}$, порождаемая процессом (2.3.22), сходится к единственному решению x_* задачи $VI(X, F)$.

Перейдем теперь к нелинейной задаче дополнительности $NCP(F)$. Поскольку в этом случае $P(x) = (q(x))_+$, то функция Фукушимы принимает достаточно простой вид

$$V^F(x) = \langle F(x), x\rangle + \frac{1}{2\alpha}\left[\|\left(x - \alpha F(x)\right)_+\|^2 - \|x\|^2\right], \tag{2.3.24}$$

и на ее основе может быть построен итерационный процесс типа (2.3.22) для решения нелинейных задач дополнительности.

Наряду с функцией (2.3.24) при решении нелинейных задач дополнительности широко используются другие оценочные функции.

Функция Мангасарьяна-Солодова составляется следующим образом:

$$V^{MS}(x) = \langle F(x), x\rangle + \tfrac{1}{4}\left[\|\,(x - 2F(x))_+\,\|^2 + \right.$$
$$\left. + \,\|\,(F(x) - 2x)_+\,\|^2 - \|F(x)\|^2 - \|x\|^2\right].$$

Эта функция непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}^n$, если только непрерывно дифференцируемо отображение $F(x)$. Она является оценочной функцией на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если же $F_x(x)$ положительно определена при всех $x \in \mathbb{R}^n$, то любая стационарная точка $V^{MS}(x)$ есть решение задачи $NCP(F)$.

Функция Фишера-Бурмейстера имеет следующий вид:

$$V^{FB}(x) = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x^i, F^i(x))\right)^2, \tag{2.3.25}$$

где

$$\varphi(a,b) = \sqrt{a^2 + b^2} - (a+b).$$

Как несложно проверить, $\varphi(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a \geq 0$, $b \geq 0$ и $ab = 0$. Функции $\varphi(a,b)$, обладающие таким свойством называют *функциями дополнительности.*

Функция Фишера-Бурмейстера, как и функция Мангасарьяна-Солодова, также является непрерывно дифференцируемой на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. Если отображение $F(x)$ есть $\mathcal{P}$-функция, т.е. для нее выполняется условие

$$\max_{1\leq i\leq n} \left(F^i(x) - F^i(y)\right), \left(x^i - y^i\right) \geq 0, \quad \forall\ x,\ y \in \mathbb{R}^n,$$

то любая стационарная точка функции $V^{FB}(x)$ будет ее глобальным минимумом и следовательно решением задачи $NCP(F)$. При этом предположении задача $NCP(F)$ имеет единственное решение.

Еще одним примером функции дополнительности является функция $\varphi(a,b) = \min\{a,b\}$. Оценочная функция (2.3.25), построенная на ее основе, называется *функцией естественной невязки.*

Глава 3

Линейное полуопределенное программирование

3.1. Симметричные положительно полуопределенные матрицы

Пусть X и Y — две матрицы одного и того же размера $m \times n$. Введем скалярное (внутреннее) произведение между ними, определяемое следующим образом

$$X \bullet Y = \mathrm{tr}\ X^T Y = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} y_{ij}, \tag{3.1.1}$$

где x_{ij} и y_{ij} — элементы соответственно матриц X и Y. Из данного определения непосредственно вытекают равенства:

$$X \bullet Y = Y \bullet X, \quad X \bullet Y = X^T \bullet Y^T.$$

С помощью скалярного произведения (3.1.1) вводится норма Фробениуса матрицы X, обозначаемая как $\|X\|_F = (X \bullet X)^{1/2}$. Предположим, что $\lambda_i(X)$ есть i-е собственное значение квадратной матрицы X. Тогда для нормы Фробениуса матрицы X получаем

$$\|X\|_F = \left(\mathrm{tr}\ X^T X\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(X^T X)\right)^{1/2}.$$

Пусть теперь $\mathbb{S}^n$ обозначает пространство симметричных матриц порядка n, т.е. пространство таких квадратных матриц X из $\mathbb{R}^{n\times n}$, что $X^T = X$. Оно является линейным подпространством в пространстве $\mathbb{R}^{n\times n}$. Его размерность равняется так называемому n-му "треугольному" числу $n_\triangle = n(n+1)/2$. В качестве простейшего базиса в $\mathbb{S}^n$ могут быть взяты матрицы X_i, у которых все элементы нулевые, за исключением либо одного элемента, либо двух элементов. В первом случае ненулевой элемент, равный единице, стоит на диагонали X_i. Во втором случае два ненулевых элемента, опять же равных единице, расположены симметрично относительно диагонали.

Другим линейным подпространством в $\mathbb{R}^{n\times n}$ является подпространство кососимметричных матриц, для которых имеет место равенство $X^T = -X$. Эти два подпространства ортогональны друг другу. Для симметричной матрицы X и кососимметричной матрицы Y в силу того, что у кососимметричных матриц все диагональные элементы равны нулю, выполняется равенство

$$X \bullet Y = \mathrm{tr}\ X^T Y = \sum_{i<j} a_{ij}b_{ij} + \sum_{i>j} a_{ji}(-b_{ji}) = 0.$$

Любая квадратная матрица X порядка n разлагается на симметричную и кососимметричную части

$$X = \frac{1}{2}\left(X + X^T\right) + \frac{1}{2}\left(X - X^T\right).$$

В дальнейшем первую симметричную часть матрицы X будем обозначать $X^S = (X + X^T)/2$.

Выделим в пространстве $\mathbb{S}^n$ подмножество положительно определенных матриц $\mathbb{S}^n_{++}$ и подмножество положительно полуопределенных матриц $\mathbb{S}^n_+$. Множество $\mathbb{S}^n_+$ является конусом в $\mathbb{S}^n$, множество $\mathbb{S}^n_{++}$ — его внутренностью. Для указания на то, что матрица $X \in \mathbb{S}^n$ является положительно полуопределенной (положительно определенной) будем пользоваться также неравенством $X \succeq 0$ ($X \succ 0$). Все диагональные элементы матрицы $X \in \mathbb{S}^n_+$ неотрицательны, поэтому ее след $\mathrm{tr}X$ также неотрицателен.

Любая симметричная матрица $X \in \mathbb{S}^n$ ранга $k \le n$ может быть представлена в виде

$$X = Q_B D(\lambda) Q_B^T = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i q_i q_i^T, \tag{3.1.2}$$

где Q_B — матрица размером $n \times k$ полного ранга (равного k) со столбцами q_i, удовлетворяющая равенству $Q^T Q = I_k$, и $D(\lambda)$ — диагональная матрица порядка k, на диагонали которой располагаются ненулевые собственные значения λ_i матрицы X, $1 \leq i \leq k$. Если матрица X положительно полуопределенная, то все эти собственные значения положительны.

Отсюда сразу получаем, что в случае положительно полуопределенной матрицы X, если существует ненулевой вектор $h \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющий равенству $\langle h, Xh \rangle = 0$, то этот вектор принадлежит нуль-пространству матрицы X. В самом деле, имеем тогда

$$\langle h, Xh \rangle = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(q_i^T h \right)^2 = 0.$$

Так как все λ_i, $1 \leq i \leq k$, строго положительны, то $q_i^T h = 0$. Поэтому согласно (3.1.2) $Xh = 0$.

Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый конус в $\mathbb{S}^n$. Конус, сопряженный к $\mathcal{K}$, определяется обычным образом как

$$\mathcal{K}^* = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n : \; X \bullet Y \geq 0, \quad \forall \; X \in \mathcal{K} \right\}.$$

Лемма 3.1.1. *Пусть $X \in \mathbb{S}^n_+$ и $Y \in \mathbb{S}^n_+$. Тогда $X \bullet Y \geq 0$. Более того, если $X \bullet Y = 0$, то $XY = YX = 0_{nn}$.*

Доказательство. Предположим, что матрица X имеет ранг k. Тогда она может быть представлена в виде (3.1.2), где все собственные значения λ_i, $1 \leq i \leq k$, положительны. Имеем с учетом симметричности матриц X, Y и свойств функции следа

$$X \bullet Y = \mathrm{tr}\; Q_B D(\lambda) Q_B^T Y = \mathrm{tr}\; D(\lambda) Q_B^T Y Q_B = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(Q_B^T Y Q_B \right)_{ii} \geq 0. \tag{3.1.3}$$

Здесь мы приняли во внимание, что $Q_B^T Y Q_B$ — положительно полуопределенная матрица и, следовательно, все ее диагональные элементы неотрицательны.

Из (3.1.3) следует также, что равенство $X \bullet Y = 0$ выполняется в том и только в том случае, когда все диагональные элементы $\left(Q_B^T Y Q_B \right)_{ii}$, $1 \leq i \leq k$, матрицы $Q_B^T Y Q_B$ равны нулю. Но тогда

$$\langle q_i, Y q_i \rangle = \left(Q_B^T Y Q_B \right)_{ii} = 0,$$

где q_i — i-й столбец матрицы Q_B. Отсюда в силу положительной полуопределенности матрицы Y следует, что все столбцы q_i, $1 \leq i \leq k$, принадлежат нуль-пространству матрицы Y, т.е. $YQ_B = 0_{nk}$. Таким образом, имеет место равенство $XY = Q_B D(\lambda) Q_B^T Y = 0_{nn}$. Для матрицы YX также выполняется: $YX = YQ_B D(\lambda) Q_B^T = 0_{nn}$. ■

Утверждение леммы 3.1.1 позволяет сделать важный вывод.

Утверждение 3.1.1. *Конус $\mathbb{S}^n_+$ является самосопряженным, т.е. $(\mathbb{S}^n_+)^* = \mathbb{S}^n_+$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1.1 $\mathbb{S}^n_+ \subseteq (\mathbb{S}^n_+)^*$. Покажем, что справедливо обратное включение. Для любого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$ матрица единичного ранга xx^T положительно полуопределена. Поэтому, если $X \in (\mathbb{S}^n_+)^*$, то

$$0 \le X \bullet (xx^T) = \mathrm{tr}\; Xxx^T = \mathrm{tr}\; x^T X x = \langle x, Xx \rangle.$$

Выполнение данного неравенства означает, что X — положительно полуопределенная матрица. В силу произвольности матрицы $X \in (\mathbb{S}^n_+)^*$ отсюда заключаем, что $(\mathbb{S}^n_+)^* \subseteq \mathbb{S}^n_+$. ■

Как следствие из утверждения 3.1.1 вытекает следующий результат, называемый теоремой Фейера о следе матрицы.

Теорема 3.1.1. *Симметричная матрица X положительно полуопределена тогда и только тогда, когда $X \bullet Y \ge 0$ для всех $Y \in \mathbb{S}^n_+$.*

Матричные функции на $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{S}^n_+$. Приведем сначала простейшие функции от матричного аргумента X на $\mathbb{S}^n$. Пусть $X \in \mathbb{S}^n$, и пусть $\lambda_i(X)$, $1 \le i \le n$, — собственные значения матрицы X, упорядоченные по убыванию, т.е. $\lambda_1(X) \ge \lambda_2(X) \ge \cdots \ge \lambda_n(X)$. Тогда следующая функция $f(X) = \lambda_1(X)$ является выпуклой на $\mathbb{S}^n$. Напротив, функция $f(X) = \lambda_n(X)$ — вогнутая на S^n. Убедиться в этом можно с помощью вариационного описания собственных значений симметричных матриц. Согласно отношению Рэлея

$$\lambda_1(X) = \sup_{\|y\|=1} \langle y, Xy \rangle, \quad \lambda_n(X) = \inf_{\|y\|=1} \langle y, Xy \rangle.$$

Поэтому эти функции, будучи параметрическими семействами линейных функций, после того, как взят супремум или инфимум по параметру y, становятся соответственно выпуклыми и вогнутыми.

В более общем варианте получаем, что для любого $1 \le k \le n$ следующие две функции:

$$f(X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(X), \quad f(X) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n-i+1}(X)$$

также являются соответственно выпуклыми и вогнутыми на $\mathbb{S}^n$. В частности, относительно функции $f(X) = \mathrm{tr}\ X = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X)$, поскольку она одновременно является и выпуклой и вогнутой, делаем вывод, что $f(X)$ — линейная функция на $\mathbb{S}^n$. Линейность функции $f(X) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(X)$ следует также непосредственно из свойств функции следа, поскольку $\mathrm{tr}\,(X_1 + X_2) = \mathrm{tr}\ X_1 + \mathrm{tr}\ X_2$.

Рассмотрим далее матричную функцию $f(X) = \ln\det X$, определенную на $\mathbb{S}^n_{++}$, и покажем, что она вогнута. Чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться утверждением 3.1.1 из [11], согласно которому функция будет выпуклой, если она выпукла вдоль любой прямой на отрезке принадлежащему области определения. Возьмем $X = Z + \alpha Y$, где $Z \succ 0$, $Y \in \mathbb{S}^n$ и $\alpha \in \mathbb{R}$, причем считаем, что α принимает только те значения, при которых $X \succ 0$. Обозначим через $\phi(\alpha)$ функцию от одного скалярного аргумента $\phi(\alpha) = \ln\det(Z + \alpha Y)$. Данную функцию $\phi(\alpha)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}\phi(\alpha) = \ln\det(Z + \alpha Y) = \\ &= \ln\det\left[Z^{\frac{1}{2}}\left(I_n + \alpha Z^{-\frac{1}{2}} Y Z^{-\frac{1}{2}}\right) Z^{\frac{1}{2}}\right] = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n \ln\left(1 + \alpha\lambda_i\right) + \ln\det Z.\end{aligned}$$

Здесь λ_i — собственные значения матрицы $Z^{-\frac{1}{2}} Y Z^{-\frac{1}{2}}$, $1 \le i \le n$. Дифференцируя функцию $\phi(\alpha)$, имеем

$$\phi'(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1 + \alpha\lambda_i}, \qquad \phi''(\alpha) = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{\left(1 + \alpha\lambda_i\right)^2}.$$

Так как $\phi''(\alpha) < 0$, то в силу критерия выпуклости для дважды дифференцируемых функций, заключаем, что $\phi(\alpha)$ — вогнутая функция.

Определение 3.1.1. *Функция $f(x)$ с выпуклой эффективной областью называется логарифмически выпуклой (логарифмически вогнутой), если $f(x) > 0$ и $\ln f(x)$ является выпуклой (вогнутой) функцией.*

Таким образом, функция $f(X) = \det X$ является логарифмически вогнутой функцией на $\mathbb{S}^n_{++}$. Отсюда следует, что для любых $X_1 \succ 0$, $X_2 \succ 0$ и любого $0 \le \alpha \le 1$ выполняется неравенство

$$f\left(\alpha X_1 + (1-\alpha) X_2\right) \ge (f(X_1))^{\alpha} (f(X_2))^{1-\alpha}.$$

Наряду с $\det X$ функция $f(X) = \frac{\det X}{\mathrm{tr}\ X}$ также является логарифмически вогнутой на $\mathbb{S}^n_{++}$.

Грани конуса $\mathbb{S}^n_+$ и остаточные подпространства. Рассмотрим вопрос о гранях конуса $\mathbb{S}^n_+$. Напомним сначала определение грани выпуклого множества в общем n-мерном пространстве.

Определение 3.1.2. *Пусть $C \subseteq \mathbb{R}^n$ — выпуклое замкнутое множество и пусть $[y, z]$ обозначает отрезок в $\mathbb{R}^n$, соединяющий точки y и z, т.е. множество*

$$[y, z] = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x = \alpha y + (1 - \alpha)z, \ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

Тогда выпуклое множество $F \subseteq C$ называется гранью множества C, если из $x \in F$, $y, z \in C$ и $x \in [y, z]$ следует, что $y, z \in F$.

Для любого выпуклого множества C и его грани F имеет место равенство $F = C \cap \mathrm{aff}\ F$. Кроме того, если C_1 есть выпуклое подмножество C и $\mathrm{ri}\ C_1 \cap F \neq \emptyset$, то $C_1 \subseteq F$. Каждая крайняя точка множества C является его гранью. Для указания на то, что помножество F множества C является его гранью используют, в частности, обозначение: $F \triangleleft C$.

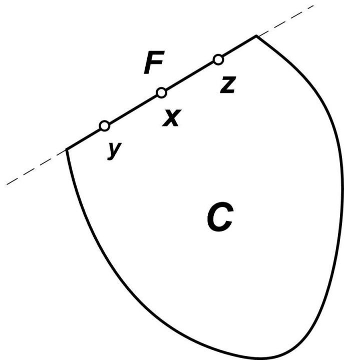

Рис. 3.1. Грань выпуклого множества

Для подмножества C_1 выпуклого множества C через $F_{min}(C_1; C)$ будем обозначать *минимальную грань* множества C, содержащую C_1. В частности, если C_1 состоит из единственной точки $x \in C$, то минимальная грань, проходящая через x, обозначается просто как $F_{min}(x; C)$. На рис. 3.1 показана грань, содержащая точку x, она же будет и минимальной гранью.

В случае, когда множество C является выпуклым конусом K, определение грани может быть переформулировано следующим образом:

F есть грань конуса K, если из $x \in F$, $y, z \in K$ и $x = y + z$, следует, что $y, z \in F$. Для грани $F \triangleleft K$ и точки $x \in F$ такой, что $x \neq 0_n$, весь луч, выпущенный из начала координат и проходящий через точку x, также принадлежит F. Аффинная оболочка $\operatorname{aff} F$ есть линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\operatorname{aff} F = \operatorname{lin} F$. Таким образом, любая ненулевая грань $F \triangleleft K$ также является конусом. Но у конуса $K \subseteq \mathbb{R}^n$, как нам известно, имеется сопряженный конус $K^* = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \geq 0 \ \forall \ x \in K\}$. Поэтому можно ввести понятие *сопряженной* (или *комплементарной*) грани F^* к грани F, положив

$$F^* = \{y \in K^* : \langle y, x\rangle = 0, \quad \forall \ x \in F\}.$$

Сопряженная грань F^* является гранью конуса K^*. В случае, когда K — самосопряженный конус, F^* оказывается гранью исходного конуса K. Можно рассмотреть аффинные оболочки граней F и F^*, которые, как уже отмечалось, являются их линейными оболочками, и определить подпространство

$$F_{res} = (\operatorname{lin}\, F + \operatorname{lin}\, F^*)^{\perp},$$

называемое *остаточным подпространством* грани $F \triangleleft K$. Для полиэдрального конуса K обязательно $F_{res} = \{0_n\}$. Однако, если конус K не является полиэдральным, то данное подпространство F_{res} может иметь ненулевую размерность. Остаточные подпространства характеризуют в некотором смысле неполиэдральность конуса K.

Перейдем теперь к уточнению понятия граней в *случае конуса* $\mathbb{S}^n_+$. Для произвольной матрицы X обозначим через $\mathcal{R}(X)$ пространство ее столбцов, через $\mathcal{N}(X)$ — нуль-пространство (ядро).

Из вышесказанного следует, что грани конуса $\mathbb{S}^n_+$ тесно связаны с подпространствами $\mathcal{L}$ пространства $\mathbb{R}^n$, а именно, F есть грань $\mathbb{S}^n_+$ тогда и только тогда, когда

$$F = F(\mathcal{L}) = \left\{X \in \mathbb{S}^n_+ : \ \mathcal{R}(X) \subseteq \mathcal{L}\right\}$$

для некоторого $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^n$. Если размерность $\mathcal{L}$ равна r, то $\operatorname{rank}\, X \leq r$ для всех элементов X из $F(\mathcal{L})$, а размерность $F(\mathcal{L})$ равняется $r_\triangle$. Сама матрица X может быть представлена в виде: $X = Q_B \Lambda Q_B^T$, где Q_B — $n \times r$ матрица полного ранга и $\Lambda \in \mathbb{S}^r_+$. Для всех матриц $X \in F(\mathcal{L})$ матрица Q_B одна и та же.

Сопряженная грань $F^\star(\mathcal{L})$ к грани $F(\mathcal{L})$ определяется как грань, соответствующая ортогональному подпространству $\mathcal{L}^\perp$, т.е. $F^\star(\mathcal{L}) = F(\mathcal{L}^\perp)$. Заметим, что

$$\dim\, F(\mathcal{L}) + \dim\, F^\star(\mathcal{L}) = r_\triangle + (n-r)_\triangle \neq n_\triangle = \dim\, \mathbb{S}^n_+, \qquad (3.1.4)$$

за исключением тривиальных случаев. Неравенство (3.1.4) приводит к тому, что линейные оболочки двух сопряженных граней не дают в сумме все пространство $\mathbb{S}^n$, т.е. появляется непустое *остаточное подпространство*, которое в случае конуса $\mathbb{S}^n_+$ записывается в виде

$$F_{res}(\mathcal{L}) = [\text{lin } F(\mathcal{L}) + \text{lin } F^*(\mathcal{L})]^{\perp}. \tag{3.1.5}$$

Для матрицы $X \in \mathbb{S}^n_+$ обозначим через $F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ *минимальную грань* конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащую X. Она определяется как

$$F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+) = \{Y \in \mathbb{S}^n_+ : \ \mathcal{R}(Y) \subseteq \mathcal{R}(X)\}.$$

Если матрица $X \in \mathbb{S}^n_+$ имеет ранг r, то грань $F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^r_+$ и, следовательно, имеет размерность $r_\triangle$. Сопряженная грань $F^*_{min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ изоморфна конусу $\mathbb{S}^{n-r}_+$ и имеет размерность $(n-r)_\triangle$. Например, если $X = Q\Lambda Q^T$, где Q — ортогональная матрица порядка n, а Λ — диагональная матрица со строго положительными первыми r диагональными элементами и остальными элементами равными нулю, то грани $F = F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ и $F^* = F^*_{min}(X; \mathbb{S}^n_+)$ имеют вид:

$$F = \left\{ Q \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^T : \ G \in \mathbb{S}^r_+ \right\}, \quad F^* = \left\{ Q \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} Q^T : \ G \in \mathbb{S}^{n-r}_+ \right\}.$$

Остаточное подпространство $F_{res} = F_{res}(X; \mathbb{S}^n_+)$ здесь следующее

$$F_{res} = \left\{ Q \begin{bmatrix} 0 & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix} Q^T : \ U \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \right\}.$$

При его определении в качестве подпространства $\mathcal{L}$ из (3.1.5) берутся линейные оболочки граней F и F^*.

Если $X \in \mathbb{S}^n_+$, то эта матрица может быть представлена в виде

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i x_i^T, \quad x_i \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

т.е. является конической комбинацией матриц единичного ранга. Множество

$$\mathcal{Y} = \left\{ X : \ X = xx^T, \ x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\| = 1 \right\}$$

составляет *минимальную порождающую систему* для конуса $\mathbb{S}^n_+$. Понятно, что число таких систем бесконечно, конус $\mathbb{S}^n_+$ не является *полиэдральным*.

Касательное пространство. Если взять произвольное замкнутое выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^n$, то касательное пространство к C в точке $x \in C$, определяется как

$$\mathcal{T}_{sp}(x \,|\, C) = \mathcal{T}_{con}(x \,|\, C) \cap -\mathcal{T}_{con}(x \,|\, C), \tag{3.1.6}$$

где $\mathcal{T}_{con}(x \,|\, C)$ — касательный конус к C в точке x. Для выпуклого множества C данный конус $\mathcal{T}_{con}(x \,|\, C)$ выпуклый и совпадает с замыканием конуса возможных направлений относительно множества C в точке x. Если множество C есть пересечение двух других замкнутых выпуклых множеств, т.е. $C = C_1 \cap C_2$, то в случае, когда относительные внутренности C_1 и C_2 имеют общую точку, справедливо равенство

$$\mathcal{T}_{con}(x \,|\, C) = \mathcal{T}_{con}(x \,|\, C_1) \cap \mathcal{T}_{con}(x \,|\, C_2). \tag{3.1.7}$$

Возьмем теперь в качестве выпуклого множества C конус $\mathbb{S}^n_+$. Введем множества:

$$\mathcal{M}_r = \left\{ X \in \mathbb{S}^n : \ \mathrm{rank} X = r \right\}, \quad \mathcal{M}_r^+ = \mathbb{S}^n_+ \bigcap \mathcal{M}_r.$$

Тогда граница $\partial \mathbb{S}^n_+$ конуса $\mathbb{S}^n_+$ и его внутренность могут быть представлены как

$$\partial \mathbb{S}^n_+ = \mathcal{M}_0^+ \bigcup \cdots \bigcup \mathcal{M}_{n-1}^+, \quad \mathrm{int}\, \mathbb{S}^n_+ = \mathbb{S}^n_{++} = \mathcal{M}_n^+.$$

Пусть X — произвольная допустимая точка из $\partial \mathbb{S}^n_+$. Пусть, кроме того, $\mathrm{rank} X = r$. Предположим, что

$$X = Q \mathrm{Diag}\,(\eta_1, \ldots, \eta_r, 0, \ldots, 0)\, Q^T, \tag{3.1.8}$$

где Q — ортогональная матрица порядка n и $\eta_i > 0$, $1 \le i \le r$. *Касательное пространство* к конусу $\mathbb{S}^n_+$ в X определяется через касательное пространство к множеству $\mathcal{M}_r$, содержащему данную граничную точку X. Как показано В.И.Арнольдом, такое касательное пространство имеет вид:

$$\mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathcal{M}_r) = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n : \ Y = Q \begin{bmatrix} G & U \\ U^T & 0 \end{bmatrix} Q^T, \quad G \in \mathbb{S}^r, U \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \right\}. \tag{3.1.9}$$

Размерность $\mathcal{T}_{sp}(X; \mathcal{M}_r)$ зависит от ранга матрицы X и равняется:

$$\dim \mathcal{T}_{sp}(X; \mathcal{M}_r) = r_\triangle + r(n-r) = n_\triangle - (n-r)_\triangle.$$

Таким образом,

$$\mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathbb{S}^n_+) = \mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathcal{M}_r) = \mathrm{lin}\, F + \mathrm{res}\, F,$$

где $F = F_{min}(X;\mathbb{S}^n_+)$ и $\operatorname{lin} F$ — линейная оболочка F. Через $\operatorname{res} F$ обозначено остаточное подпространство, определяемое через линейные оболочки граней F и $F^* = F^*_{min}(X;\mathbb{S}^n_+)$.

Частичный порядок в $\mathbb{S}^n$. Конус положительно полуопределенных матриц порождает в пространстве симметричных матриц частичный порядок (порядок Левнера). Для матриц X и Y из $\mathbb{S}^n$ будем писать $X \succeq Y$, если $X - Y \succeq 0$. Аналогично, $X \succ Y$, если $X - Y \succ 0$.

3.2. Прямая и двойственная задачи

Рассмотрим задачу полуопределенного программирования следующего вида:

$$\begin{gathered} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad X \succeq 0, \end{gathered} \tag{3.2.1}$$

где матрицы C, X и все матрицы A_i, $1 \le i \le m$, принадлежат пространству $\mathbb{S}^n$. Предполагается также для определенности, что матрицы A_i, $i = 1, \ldots, m$, линейно независимы. Если дополнительно потребовать, чтобы все матрицы в (3.2.1) были диагональными, то задача становится обычной задачей линейного программирования в канонической форме.

Двойственной к (3.2.1) является задача:

$$\begin{gathered} \max\ b^T u, \\ C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \quad \succeq \quad 0, \end{gathered} \tag{3.2.2}$$

где $b = (b^1, \ldots, b^m)^T \in \mathbb{R}^m$, $V \in \mathbb{S}^n$. Действительно, минимальное значение на $\mathbb{S}^n_+$ функции Лагранжа

$$L(X,u) = C \bullet X + \sum_{i=1}^m u^i \left(b^i - A_i \bullet X\right) = \left(C - \sum_{i=1}^m u^i A_i\right) \bullet X + b^T u,$$

где $u \in \mathbb{R}^m$, может отличаться от $-\infty$ только в том случае, когда

$$C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \in (\mathbb{S}^n_+)^* = \mathbb{S}^n_+, \tag{3.2.3}$$

т.е., другими словами, когда $C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \succeq 0$. Более того, поскольку нулевая матрица 0_{nn} содержится в $\mathbb{S}^n_+$, то это минимальное значение при выполнении (3.2.3) всегда равно нулю. Отсюда приходим к (3.2.2).

Таким образом, переменной в двойственной задаче является векторная величина u, а допустимое множество задается с помощью линейного матричного неравенства. Вводя матрицу *слабых двойственных переменных (двойственных невязок)* $V \in \mathbb{S}^n$, двойственную задачу (3.2.2) можно также записать в виде

$$\begin{array}{c} \max\ b^T u, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succeq 0. \end{array} \tag{3.2.4}$$

От данной формы двойственной задачи несложно перейти к ее представлению, совпадающему с представлением прямой задачи (3.2.1). А именно, пусть $\mathcal{L}_A$ —подпространство пространства $\mathbb{S}^n$, порожденными матрицами A_i, $1 \leq i \leq m$, и пусть $\mathcal{L}_A^\perp$ — его ортогональное дополнение. Так как мы предположили, что матрицы A_i линейно независимы, то размерность $\mathcal{L}_A^\perp$ равна $l = n_\triangle - m$. Возьмем в $\mathcal{L}_A^\perp$ произвольный базис. Предположим, что это будут матрицы $K_1, \ldots, K_l$. Возьмем также произвольное решение $B \in \mathbb{S}^n$ системы уравнений $A_i \bullet X = b^i$, $1 \leq i \leq m$, т.е. $A_i \bullet B = b^i$, $1 \leq i \leq m$. Тогда, умножая левую и правую части равенства $\sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C$ последовательно на матрицы K_j, $1 \leq j \leq l$ (в смысле скалярного произведения Фробениуса), получаем

$$K_j \bullet V = c^j, \quad 1 \leq j \leq l,$$

где введено обозначение $c^j = K_j \bullet C$. Кроме того, перейдем от переменной u к переменной V в целевой функции задачи (3.2.4). С этой целью введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{A}$, имеющую размер $(mn) \times n$ и составленную из матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, т.е. матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}. \tag{3.2.5}$$

Пусть $\mathcal{A} \bullet X$ обозначает m-вектор, i-й компонентой которого является величина $A_i \bullet X$. Тогда, поскольку $\mathcal{A} \bullet B = b$, то

$$\langle b, u \rangle = \langle \mathcal{A} \bullet B, u \rangle = \left(\sum_{i=1}^m u_i A_i \right) \bullet B = (C - V) \bullet B = C \bullet B - V \bullet B.$$

Отбрасывая константу $C \bullet B$ и переходя от задачи на максимум к задаче на минимум, имеем вместо (3.2.4)

$$\begin{array}{rcl} \min\ B \bullet V, & & \\ K_j \bullet V & = & c^j, \quad j = 1, \ldots, l, \\ V & \succeq & 0. \end{array} \tag{3.2.6}$$

Такая форма двойственной задачи полностью совпадает с формой представления прямой задачи, однако оптимальные значения в этих двух задачах отличаются друг от друга на определенную величину.

Слабая двойственность. Обозначим допустимые множества в прямой и двойственной задачах (3.2.1) и (3.2.2) соответственно $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_{D,u}$, т.е.

$$\mathcal{F}_P = \left\{X \in \mathbb{S}^n_+ : \ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m\right\},$$

$$\mathcal{F}_{D,u} = \left\{u \in \mathbb{R}^m : \ C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \succeq 0\right\}.$$

Допустимое множество в двойственной задаче (3.2.4), зависящее от пары переменных $[u, V]$, в отличие от $\mathcal{F}_{D,u}$ обозначаются как

$$\mathcal{F}_D = \left\{[u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_+ : \ V = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i\right\},$$

Имеет место следующий результат, называемый слабой двойственностью.

Теорема 3.2.1. *Пусть $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_{D,u}$. Тогда*

$$\langle b, u\rangle \le C \bullet X. \tag{3.2.7}$$

Доказательство. Обозначим $V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$. В случае, когда $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, обязательно $V(u) \succeq 0$. Воспользуемся, кроме того, матрицей $\mathcal{A}$ из (3.2.5). Из допустимости точек u и X тогда следует:

$$\langle b, u\rangle = \langle \mathcal{A} \bullet X, u\rangle = \left(\sum_{i=1}^m u^i A_i\right) \bullet X = (C - V(u)) \bullet X \le C \bullet X. \tag{3.2.8}$$

Здесь мы воспользовались леммой 3.1.1, согласно которой $V \bullet X \ge 0$, если X и V — положительно полуопределенные матрицы. ■

Строгая двойственность означает, что неравенство (3.2.7) выполняется как равенство для некоторых $X \in \mathcal{F}_P$ и $u \in \mathcal{F}_D$. Введем два определения.

Определение 3.2.1. *В прямой задаче* (3.2.1) *выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, если множество*

$$\mathcal{F}^0_P = \left\{X \in \mathbb{S}^n_{++} : \ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m\right\}$$

непустое.

Определение 3.2.2. *В двойственной задаче* (3.2.1) *выполнено условие регулярности ограничений Слейтера, если множество*

$$\mathcal{F}^0_{D,u} = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : \; C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i \succ 0 \right\}$$

непустое.

Обозначим

$$f_* = \inf\nolimits_{X \in \mathcal{F}_P} \; C \bullet X, \quad f^* = \sup\nolimits_{u \in \mathcal{F}_D} \; \langle b, u \rangle.$$

Если $f_* = f^*$, то говорят, что задачи (3.2.1) и (3.2.2) находятся в *совершенной двойственности* (однако при этом одно из значений f_* или f^* может не достигаться). Условия регулярности ограничений Слейтера позволяют гарантировать существование строгой двойственности.

Теорема 3.2.2. *Пусть в прямой и двойственной задачах выполнено условие регулярности ограничений Слейтера. Тогда $f_* = f^*$ и существуют решения обеих задач X_* и $[u_*, V_*]$, для которых*

$$C \bullet X_* = b^T u_*. \tag{3.2.9}$$

Следствие 3.2.1. *Пусть X_* и $[u_*, V_*]$ — оптимальные решения соответственно задач (3.2.1) и (3.2.4). Тогда выполняется равенство,*

$$X_* \bullet V_* = 0, \tag{3.2.10}$$

показывающему, что матрицы X_* и V_* должны быть ортогональными друг к другу.

Доказательство. Так как X_* и u_* допустимы, то имеет место слабая двойственность. Но тогда равенство (3.2.10) для $V_* = V(u_*)$ вытекает из (3.2.9) и неравенства (3.2.8). ■

Для матриц X_* и V_* из $\mathbb{S}^n_+$ в силу леммы 3.1.1 равенство (3.2.10) выполняется тогда и только тогда, когда $X_* V_* = V_* X_* = 0_{nn}$. Отсюда следует, что оптимальные матрицы X_* и V_* коммутируют между собой. Поэтому найдется ортогональная матрица Q такая, что

$$X_* = Q \mathrm{Diag}(\eta_*) Q^T, \quad V_* = Q \mathrm{Diag}(\theta_*) Q^T, \tag{3.2.11}$$

где

$$\eta_* = [\eta_*^1, \ldots, \eta_*^n] \quad \text{и} \quad \theta_* = [\theta_*^1, \ldots, \theta_*^n]$$

есть собственные значения матриц X и V соответственно. Для самих собственных значений η_*^i и θ_*^i выполняется *условие дополнительности*:

$$\eta_*^i \theta_*^i = 0, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{3.2.12}$$

Условие строгой дополнительности помимо (3.2.12) означает также, что для каждого $1 \leq i \leq n$ одно из значений η_*^i или θ_*^i строго положительно. В этом случае решения X_* и V_* называют *строго комплементарными*.

В отличие от задач линейного программирования, для которых, если существуют оптимальные решения, то существуют и строго комплементарные оптимальные решения, для задач полуопределенного программирования данное свойство не всегда выполняется.

3.3. Полуопределенное программирование и оптимизация

Линейные задачи полуопределенного программирования играют важную роль в теории управления, квадратичной и комбинаторной оптимизации, в задачах на собственные числа и в задачах геометрической оптимизации. Приведем несколько примеров, указывающих на возможность сведения или релаксации таких задач к задачам полуопределенного программирования.

Задача о максимальном разрезе. Это задача относится к числу основных стандартных NP-полных задач комбинаторной оптимизации. Пусть $G(V, E)$ обозначает полный взвешенный неориентированный граф с множеством вершин $V = \{1, \ldots, n\}$ и множеством ребер E. Через $(i, j) \in E$ обозначим ребро, соединяющее вершины i и j, а через a_{ij} — его вес. Пусть, кроме того, A — *весовая матрица смежности* графа G, элементами которой являются веса a_{ij}. Имеем $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. $A \in \mathbb{S}^n$.

Предположим, что задано подмножество вершин $V_c \subseteq V$. Под разрезом $\delta(V_c)$, связанным с подмножеством V_c, понимают множество ребер $(i, j) \in E$ таких, что один конец ребра находится в V_c, а другой в множестве $V \setminus V_c$. Задача о максимальном разрезе заключается в отыскании такого разреза $\delta(V_c)$, у которого сумма весов его ребер максимальна. Формально данную задачу записывают следующим образом:

$$\max_{V_c \subset V} \sum_{(i,j)\in\delta(V_c)} a_{ij}. \tag{3.3.1}$$

Переформулируем эту задачу как задачу целочисленной оптимизации. Пусть $\{-1,1\}^n$ обозначает множество n-мерных векторов, компоненты которых принимают значения либо 1, либо -1. Введем векторы $x \in \{-1,1\}^n$ с компонентами $x_i = 1$, если $i \in V_c$, и $x_i = -1$, если $i \in V \setminus V_c$, $1 \leq i \leq n$. Их называют *векторами разреза.* Рассмотрим следующую оптимизационную задачу

$$\max_{x\in\{-1,1\}^n} \sum_{i<j} a_{ij} \frac{1 - x_i x_j}{2}. \tag{3.3.2}$$

Нетрудно понять, что величина $(1-x_i x_j)/2$ равна нулю, если вершины i и j в одном множестве (V_c или $V \setminus V_c$), и единице, если эти вершины в разных множествах. Другими словами, величины $(1-x_i x_j)/2$ порождают *вектор инциденций* разреза, соответствующий вектору разреза x. Данная величина принимает значение единица тогда и только тогда, когда ребро (i,j) принадлежит разрезу. Задача (3.3.2) эквивалентна задаче (3.3.1).

Целевую функцию в задаче (3.3.2) можно переписать в более удобном виде. А именно, воспользуемся симметричностью матрицы A и тем, что $x_i x_i = 1$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i<j} a_{ij}(1 - x_i x_j) &= 2^{-1} \textstyle\sum_{i,j} a_{ij}(1 - x_i x_j) = \\ &= 2^{-1} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} x_i x_i - a_{ij} x_i x_j) = \\ &= 2^{-1} \langle x, (Diag(A\bar{e}) - A)\, x\rangle, \end{aligned}$$

где $\bar{e}$ — вектор, все компоненты которого равны единице, $Diag(A\bar{e})$ — диагональная матрица с вектором $A\bar{e}$ на диагонали. Матрица

$$L(G) = Diag(A\bar{e}) - A$$

называется *матрицей Лагранжа* графа G.

Обозначим через C матрицу $C = L(G)/4$. Тогда задача (3.3.2) принимает вид

$$\max_{x\in\{-1,1\}^n} \langle x, Cx\rangle. \tag{3.3.3}$$

Проведем еще одно преобразование с целевой функцией в получившейся задаче (3.3.3):

$$\langle x, Cx\rangle = x^T Cx = \mathrm{tr}\ x^T Cx = \mathrm{tr}\ Cxx^T = C \bullet xx^T.$$

Матрица xx^T является симметричной и положительно полуопределенной. Для любого вектора $x \in \{-1, 1\}^n$ она имеет ранг равный единице, на диагонали этой матрицы стоит вектор $\bar{e}$.

Рассмотрим далее следующую задачу

$$\begin{gathered} \max \; C \bullet X \\ \mathrm{diag} X = e, \quad X \succeq 0, \quad \mathrm{rank} X = 1. \end{gathered} \tag{3.3.4}$$

Данная задача эквивалентна задаче (3.3.3). Действительно, если X есть допустимая точка в задаче (3.3.4), то поскольку $\mathrm{rank} X = 1$, для X справедливо разложение $X = xx^T$ для некоторого ненулевого вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, в силу равенства $\mathrm{diag}\ X = e$ на самом деле должно выполняться $x \in \{-1, 1\}^n$. Таким образом, решение задачи (3.3.4) является одновременно и решением задачи (3.3.3). С другой стороны, для любого вектора $x \in \{-1, 1\}^n$ соответствующая матрица xx^T принадлежит допустимому множеству в задаче (3.3.4).

Опуская в (3.3.4) требование $\mathrm{rank} X = 1$, приходим к задаче

$$\begin{gathered} \max \; C \bullet X \\ \mathrm{diag} X = \bar{e}, \quad X \succeq 0, \end{gathered} \tag{3.3.5}$$

которая имеет форму линейной задачи полуопределенного программирования. О задаче (3.3.5) говорят как о *полуопределенной релаксации* задачи (3.3.1). Двойственная к (3.3.5) задача имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} \min \langle e, u \rangle \\ V = Diag(u) - C, \quad V \succeq 0. \end{gathered}$$

Если обозначить через f_*^r оптимальное значение в релаксационной задаче (3.3.5), а через f_* — оптимальное значение в исходной задаче (3.3.1), то понятно, что в релаксационной задаче оно будет больше, однако можно показать, что эти оптимальные величины удовлетворяют следующим неравенствам: $cf_*^r \leq f_* \leq f_*^r$, где $c = 0.87856$. Это очень хорошая оценка, показывающая, что оптимальное значение в релаксационной задаче лишь на 12% может оказаться выше, чем точная величина f_*.

Задача квадратичного программирования с выпуклыми квадратичными ограничениями. Рассмотрим следующую задачу с линейной целевой функцией и выпуклыми квадратичными ограничениями

$$\begin{gathered} \min \; \langle c, x \rangle, \\ \langle x, A_i x \rangle - \langle b_i, x \rangle - d_i \leq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \end{gathered} \tag{3.3.6}$$

где все матрицы $A_i \in \mathbb{S}^n_+$. То, что в этой задаче целевая функция есть обычная линейная функция в пространстве $\mathbb{R}^n$, никаким образом не ограничивает ее общности, поскольку, случай с выпуклой квадратичной целевой функцией $\langle x, A_0 x\rangle - \langle b_0, x\rangle - d_0$, в которой $A_0 \in \mathbb{S}^n_+$, легко сводится к постановке (3.3.6) путем введения дополнительной переменной σ и дополнительного ограничения $\langle x, A_0 x\rangle - \langle b_0, x\rangle - d_0 \le \sigma$. Задача теперь будет заключаться в минимизации дополнительной переменной σ.

Используя разложение $A_i = Q_i^T Q_i$, ограничение

$$\langle x, A_i x\rangle - \langle b_i, x\rangle - d_i \le 0$$

можно записать как

$$\begin{bmatrix} I_n & Q_i x \\ x^T Q_i^T & \langle b_i, x\rangle + d_i \end{bmatrix} \succeq 0. \tag{3.3.7}$$

Действительно, матрица (3.3.7) будет положительно полуопределена тогда и только тогда, когда дополнение по Шуру

$$\langle b_i, x\rangle + d_i - x^T Q_i^T Q_i x = \langle b_i, x\rangle + d_i - \langle x, A_i x\rangle$$

единичной матрицы I_n будет неотрицательной величиной. Таким образом, задача (3.3.6) принимает вид

$$\begin{array}{l} \min \langle c, x\rangle \\ \begin{bmatrix} I_n & Q_i x \\ x^T Q_i^T & \langle b_i, x\rangle + d_i \end{bmatrix} \succeq 0, \qquad 1 \le i \le m. \end{array} \tag{3.3.8}$$

Ограничения в (3.3.8) таковы, что все элементы блочных матриц линейным образом зависят от компонент вектора x. Если воспользоваться естественным базисом в пространстве симметричных матриц $\mathbb{S}^n$, то они могут быть сведены к так называемым линейным матричным неравенствам (см. [11]), имеющим тот же вид, что и ограничения в двойственной задаче (3.2.2). Вся задача (3.3.8) может быть представлена в форме двойственной задачи (3.2.4). В самом деле, если через q_j обозначить j-й столбец матрицы Q_i, то каждое i-е ограничение из (3.3.8) можно записать как

$$B_0 + \sum_{j=1}^{n} x^j B_j \succeq 0,$$

где

$$B_0 = \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n^T & d_i \end{bmatrix}, \quad B_j = \begin{bmatrix} 0_{nn} & q_j \\ q_j^T & b_i^j \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le n.$$

С помощью перехода к блочным диагональным матрицам все ограничения в (3.3.8) можно объединить в единое матричное неравенство, как и в двойственной задаче.

Как уже отмечалось, всегда двойственная задача (3.2.4) может быть переписана в канонической форме, используемой при постановке прямой задачи (3.2.1).

Задачи на собственные значения. Существует множество различных задач на собственные значения. Рассмотрим для примера одну из них. Пусть заданы матрицы A_i, $1 \le i \le m$, и матрица B из $\mathbb{S}^n$. Нужно подобрать коэффициенты $c_1, \ldots, c_m$ таким образом, чтобы разность между максимальным и минимальным собственными значениями матрицы

$$C = B - \sum_{i=1}^{m} c_i A_i$$

была бы минимальной. Эту проблему можно записать в виде задачи

$$\begin{gathered} \min \left(\lambda_{max}(C) - \lambda_{min}(C)\right) \\ C = B - \textstyle\sum_{i=1}^{m} c_i A_i, \end{gathered} \qquad (3.3.9)$$

где $\lambda_{max}(C)$ и $\lambda_{min}(C)$ — соответственно максимальное и минимальное собственные числа матрицы C. Покажем, что задача (3.3.9) может быт сведена к задаче полуопределенного программирования.

Из разложения $C = QD(\lambda)Q^T$ симметричной матрицы $C \in \mathbb{S}^n$, где Q — ортогональная матрица, $D(\lambda)$ — диагональная матрица с вектором собственных значений матрицы C на диагонали, следует, что неравенство $\mu I_n \succeq C \succeq \nu I_n$ может быть записано в виде:

$$\mu Q I_n Q^T \succeq Q D(\lambda) Q^T \succeq \nu Q I_n Q^T$$

или как $\mu I_n \succeq D(\lambda) \succeq \nu I_n$. Отсюда вытекают оценки: $\lambda_{max} \le \mu$, $\lambda_{min} \ge \nu$. Мы приходим к задаче

$$\begin{gathered} \min\ \mu - \nu, \\ C = B - \textstyle\sum_{i=1}^{m} c_i A_i, \\ \mu I_n \succeq C \succeq \nu I_n. \end{gathered}$$

Эта задача уже является задачей полуопределенного программирования.

Геометрические задачи. Ряд задач геометрического характера также могут быть поставлены как задачи линейного полуопределенного программирования. Среди них, например, задачи о вписанных и описанных эллипсоидах.

Описанный эллипсоид минимального объема. Рассмотрим эллипсоид в пространстве $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x_0:

$$B_{A,x_0} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \langle\, x - x_0, A^{-1}(x - x_0)\,\rangle \le 1\right\},$$

где A — симметричная положительно определенная матрица. Объем этого эллипсоида пропорционален произведению длин полуосей и, следовательно, может быть представлен как

$$\mathcal{V}(B_{A,x_0}) = c\left(\prod_{i=1}^{n}\sigma_i\right)^{1/2}.$$

Здесь σ_i — собственное число матрицы A, c — некоторый положительный коэффициент. Таким образом, $\mathcal{V}(B_{A,x_0}) = c\sqrt{\det A}$.

Предположим далее, что имеется выпуклое тело, являющееся выпуклой оболочкой конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_m$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Нужно найти такой эллипсоид, чтобы он содержал данное выпуклое множество или, что одно и то же, все точки x_1, $x_2, \ldots, x_m$ и имел бы минимальный объем. Задача может быть записана как

$$\begin{gathered} \min\nolimits_{A,x_0} \sqrt{\det A}, \\ \langle\, x_i - x_0, A^{-1}(x_i - x_0)\,\rangle \le 1, \quad 1 \le i \le m, \\ A \succ 0. \end{gathered} \tag{3.3.10}$$

Обозначим $M = A^{-1/2}$, $y = Mx_0$. Тогда квадратичные неравенства-ограничения в (3.3.10) равносильны требованиям:

$$\begin{bmatrix} I_n & Mx_i - y \\ (Mx_i - y)^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.3.11}$$

Кроме того, возьмем логарифм от целевой функции. Тогда задача (3.3.10) с учетом того, что $M \succ 0$ сведется к

$$\begin{gathered} \min\nolimits_{M,y}\ \ln\det M, \\ \begin{bmatrix} I_n & Mx_i - y \\ (Mx_i - y)^T & 1 \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 1 \le i \le m, \\ M \succ 0. \end{gathered} \tag{3.3.12}$$

Все элементы матриц из (3.3.12) линейным образом зависят от вектора y и симметричной матрицы M. Поэтому по существу ограничения (3.3.11) являются линейными матричными неравенствами. Однако целевая функция в (3.3.12) не есть линейная функция от элементов матрицы M.

Вписанный эллипсоид максимального объема. Предположим, что у нас имеется выпуклое многогранное тело X в $\mathbb{R}^n$, задаваемое с помощью конечного числа линейных неравенств:

$$X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ Cx \leq d\right\},$$

где C — матрица размером $m \times n$, $d \in \mathbb{R}^m$. Теперь мы хотим вписать в это выпуклое тело эллипсоид так, чтобы он имел максимальный объем. Формально данная задача запишется как

$$\begin{gathered} \max \ \sqrt{\det A}, \\ B_{A,x_0} \subset X, \\ A \succ 0. \end{gathered} \tag{3.3.13}$$

Пусть $c_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq m$, — строки матрицы C. Найдем с помощью условий Каруша-Куна-Таккера решение условной оптимизационной задачи

$$\begin{gathered} \max\nolimits_x \ \langle c_i, x\rangle, \\ \langle x - x_0, A^{-1}(x - x_0)\rangle \leq 1. \end{gathered} \tag{3.3.14}$$

Если составить функцию Лагранжа

$$L(x, u) = \langle c_i, x\rangle + u\left(1 - \langle x - x_0, A^{-1}(x - x_0)\rangle\right)$$

то имеем

$$L_x(x, u) = c_i - 2uA^{-1}(x - x_0) = 0_n,$$

где $u \geq 0$. Разрешая это уравнение относительно x, получаем для решения x_* задачи (3.3.14)

$$x_* = x_0 + \frac{1}{2u}Ac_i.$$

Здесь мы учли, что максимум линейной функции на выпуклом ограниченном множестве достигается на границе и, следовательно, $u > 0$. Подставляя данное x_* в равенство

$$\langle x - x_0, A^{-1}(x - x_0)\rangle = 1,$$

приходим к уравнению для определения u:

$$\frac{1}{4u^2}\langle c_i, Ac_i\rangle = 1.$$

Откуда $u = \sqrt{\langle c_i, Ac_i\rangle}/2$. Следовательно,

$$x_* = x_0 + \frac{1}{\sqrt{\langle c_i, Ac_i\rangle}}\,Ac_i.$$

Таким образом, включение в (3.3.13) будет иметь место, если выполняются неравенства

$$\langle c_i, x_0\rangle + \sqrt{\langle c_i, Ac_i\rangle} \leq d^i, \quad 1 \leq i \leq m,$$

или

$$\langle c_i, Ac_i\rangle \leq (d^i - \langle c_i, x_0\rangle)^2, \quad d^i - \langle c_i, x_0\rangle \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Возьмем, как и предыдущем случае, логарифм целевой функции. Тогда приходим к следующей задаче

$$\begin{array}{c} \max_{A,x_0} \ \ln(\det A)/2, \\ \langle c_i, Ac_i\rangle \leq (d^i - \langle c_i, x_0\rangle)^2, \quad 1 \leq i \leq m, \\ d^i - \langle c_i, x_0\rangle \geq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ A \succ 0. \end{array} \tag{3.3.15}$$

Обозначая $M = A^{1/2}$, приходим к эквивалентной записи m пар неравенств из (3.3.15) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} (d^i - \langle c_i, x_0\rangle)I_n & Mc_i \\ c_i^T M & d^i - \langle c_i, x_0\rangle \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Окончательно получаем следующую задачу условной оптимизации:

$$\begin{array}{c} \min_{M,x_0} \ -\ln(\det M), \\ \begin{bmatrix} (d^i - \langle c_i, x_0\rangle)I_n & Mc_i \\ c_i^T M & d^i - \langle c_i, x_0\rangle \end{bmatrix} \succeq 0, \quad 1 \leq i \leq m, \\ M \succ 0. \end{array} \tag{3.3.16}$$

Данная задача снова оказывается задачей с ограничениями, являющимися линейными матричными неравенствами. Все элементы матриц в (3.3.16) линейным образом зависят от элементов симметричной матрицы M и вектора x_0.

3.4. Допустимые множества и невырожденность

3.4.1. Строение допустимого множества и невырожденность в прямой задаче

Минимальные грани и крайние точки. Обратимся к допустимому множеству $\mathcal{F}_P$ в прямой задаче (3.2.1). Для точки $X \in \mathcal{F}_P$ обозначим через $F_{min}(X; \mathcal{F}_P)$ *минимальную грань* множества $\mathcal{F}_P$, содержащую X. Если для $X \in \mathcal{F}_P$ минимальная грань совпадает с ней самой, то X является *крайней точкой* множества $\mathcal{F}_P$.

Обозначим через $\mathcal{X}_P$ аффинное множество

$$\mathcal{X}_P = \{X \in \mathbb{S}^n : \ A_i \bullet X = b^i, \ 1 \le i \le m\}.$$

Само допустимое множество $\mathcal{F}_P$ есть пересечение множества $\mathcal{X}_P$ с конусом $\mathbb{S}^n_+$, т.е.

$$\mathcal{F}_P = \mathbb{S}^n_+ \cap \mathcal{X}_P. \tag{3.4.1}$$

Поэтому в каждой точке $X \in \mathcal{F}_P$ для минимальной грани $F_{min}(X; \mathcal{F}_P)$ справедливо представление:

$$F_{min}(X; \mathcal{F}_P) = F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{X}_P.$$

Это следует из известной теоремы, согласно которой пересечение двух выпуклых множеств является гранью тогда и только тогда, когда оно является пересечением двух граней. При этом следует учесть, что аффинное множество $\mathcal{X}_P$ само является минимальной гранью для любой точки $X \in \mathcal{X}_P$. Таким образом, приходим к следующему представлению для минимальной грани:

$$F_{min}(X; \mathcal{F}_P) = F_{min}(X; \mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{X}_P = \{Y \in \mathcal{F}_P : \ \mathcal{R}(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{X})\}.$$

Определим теперь размерность грани $F_{min}(X; \mathcal{F}_P)$. Пусть r есть ранг матрицы X и пусть $X = Q_B Q_B^T$, где Q_B — $n \times r$ матрица полного ранга (равного r). Матрица $Y \in \mathbb{S}^n$ называется возмущением матрицы X, если $X \pm \alpha Y \in \mathcal{F}_P$ для достаточно малого $\alpha > 0$. Нетрудно видеть, что Y есть возмущение X тогда и только тогда, когда $Y = Q_B Z Q_B^T$ для некоторой матрицы $Z \in \mathbb{S}^r$, удовлетворяющей равенствам

$$\left(Q_B^T A_i Q_B\right) \bullet Z = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Эта система m уравнений относительно $r_\triangle$ переменных (элементов матрицы Z). Число линейно независимых ее решений равно

$$r_\triangle - \operatorname{rank}\left[Q_B^T A_1 Q_B, \ldots, Q_B^T A_m Q_B\right].$$

Размерность грани $F_{min}(X; \mathcal{F}_P)$ равняется рангу матрицы, составленной из возмущений матрицы X, поэтому

$$\dim F_{min}(X; \mathcal{F}_P) = r_\triangle - \operatorname{rank}\left[Q_B^T A_1 Q_B, \ldots, Q_B^T A_m Q_B\right].$$

Отсюда, в частности, следует, что матрица X ранга r является крайней точкой множества $\mathcal{F}_P$ в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{rank}\left[Q_B^T A_1 Q_B, \ldots, Q_B^T A_m Q_B\right] = r_\triangle. \tag{3.4.2}$$

При этом матрицы $Q_B^T A_1 Q_B, \ \dots, \ Q_B^T A_m Q_B$ порождают все пространство $\mathbb{S}^r$.

Для линейно независимых матриц $A_1, A_2, \dots, A_m$ равенство (3.4.2) может выполняться, если только $r_\triangle \leq m$. В случае, когда точка X принадлежит некоторой грани F множества $\mathcal{F}_P$ размерности d, справедлива следующая оценка на ее ранг r, а именно: $r_\triangle \leq m + d$.

Касательное пространство. Обозначим через $\mathcal{N}_A$ линейное подпространство в $\mathbb{S}^n$:

$$\mathcal{N}_A = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n : \ A_i \bullet Y = 0, \ 1 \leq i \leq m \right\}.$$

Оно является подпространством, параллельным аффинному множеству $\mathcal{X}_P$. Так как мы предположили, что матрицы A_i, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы, размерность $\mathcal{N}_A$ равна $n_\triangle - m$.

Пусть ограничения в прямой задаче удовлетворяют условию Слейтера. В этом случае *касательным подпространством* к допустимому множеству $\mathcal{F}_P$ в точке $X \in \mathcal{F}_P$ является множество

$$\mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathcal{F}_P) = \mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{N}_A. \tag{3.4.3}$$

Действительно, касательный конус $\mathcal{T}_{con}(X|\mathcal{X}_P)$ относительно аффинного множества $\mathcal{X}_P$ в любой точке $X \in \mathcal{X}_P$ совпадает с касательным пространством в этой точке и равняется $\mathcal{N}_A$. Поскольку выполнено условие Слейтера, то пересечение внутренности конуса $\mathbb{S}^n_+$ с относительной внутренностью множества $\mathcal{X}_P$ (совпадающей с $\mathcal{X}_P$) не пусто. Поэтому из представления (3.4.1) допустимого множества $\mathcal{F}_P$ на основании формулы (3.1.7) получаем:

$$\mathcal{T}_{con}(X \,|\, \mathcal{F}_P) = \mathcal{T}_{con}(X \,|\, \mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{N}_A.$$

Отсюда, используя определение касательного пространства (3.1.6), приходим к (3.4.3).

Обратим внимание, что если для матрицы X справедливо разложение (3.1.8), то любая матрица $Y \in \mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathcal{F}_P)$ должна иметь вид (3.1.9) и при этом принадлежать подпространству в $\mathbb{S}^n$, порожденному матрицами K_j, $1 \leq j \leq l$. Матрицы K_j задают базис в подпространстве, которое ортогонально к пространству $\mathcal{L}_A$, порожденному матрицами A_i, $1 \leq i \leq m$.

Невырожденные точки. Дадим теперь определение невырожденной точки $X \in \mathcal{F}_P$ для прямой задачи (3.2.1). Предполагаем, что ранг X равен r.

Определение 3.4.1. *Точка $X \in \mathcal{F}_P$ называется* невырожденной, *если*

$$\mathcal{T}_{sp}(X \,|\, \mathbb{S}^n_+) + \mathcal{N}_A = \mathbb{S}^n. \tag{3.4.4}$$

Так как $\dim\, \mathbb{S}^n = n_\triangle$, то равенство (3.4.4) имеет место только тогда, когда

$$\dim\, \mathcal{T}_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+) + \dim\, \mathcal{N}_A \geq \dim\, \mathbb{S}^n,$$

откуда вытекает ограничение на ранг r матрицы $X \in \mathcal{F}_P$, а именно,

$$m \leq n_\triangle - (n-r)_\triangle.$$

Данное неравенство является необходимым условием невырожденности допустимой точки $X \in \mathcal{F}_P$ в прямой задаче. Крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной в том и только в том случае, когда

$$r_\triangle \leq m \leq n_\triangle - (n-r)_\triangle.$$

Приведем характеристику того, что X является невырожденной точкой, используя разложение (3.1.8). Пусть Q_B и Q_N подматрицы матрицы Q, состоящие соответственно из первых r и последующих $n-r$ столбцов Q.

Утверждение 3.4.1. *Точка $X \in \mathcal{F}_P$ будет невырожденной тогда и только тогда, когда матрицы*

$$B_i = \left[\begin{array}{cc} Q_B^T A_i Q_B & Q_B^T A_i Q_N \\ Q_N^T A_i Q_B & 0 \end{array}\right], \quad 1 \leq i \leq m, \tag{3.4.5}$$

линейно независимы.

Доказательство. Равенство (3.4.4) в эквивалентном виде может быть записано как

$$\mathcal{T}^\perp_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+) \cap \mathcal{N}^\perp_A = 0_{nn}, \tag{3.4.6}$$

где $\mathcal{T}^\perp_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+)$ и $\mathcal{N}^\perp_A$ — ортогональные дополнения соответственно подпространств $\mathcal{T}_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+)$ и $\mathcal{N}_A$. Подпространство $\mathcal{T}^\perp_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+)$ имеет вид:

$$\mathcal{T}^\perp_{sp}(X\,|\,\mathbb{S}^n_+) = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n :\ Y = Q \left[\begin{array}{cc} 0_{rr} & 0_{r(n-r)} \\ 0_{(n-r)r} & W \end{array}\right] Q^T,\, W \in \mathbb{S}^{n-r} \right\}. \tag{3.4.7}$$

Подпространство $\mathcal{N}^\perp_A$ совпадает с $\mathcal{L}_A$, где $\mathcal{L}_A$ — подпространство в $\mathbb{S}^n$, порожденное матрицами A_i, $1 \leq i \leq m$.

Если матрицы B_i, $1 \leq i \leq m$, линейно зависимы, то можно указать не равные нулю в совокупности коэффициенты α_i, $1 \leq i \leq m$, такие, что

$$B = \sum_{i=1}^m \alpha_i B_i = 0_{nn}, \tag{3.4.8}$$

причем для B в силу (3.4.5) справедливо представление

$$B = \left[\begin{array}{cc} Q_B^T A Q_B & Q_B^T A Q_N \\ Q_N^T A Q_B & 0 \end{array} \right]. \tag{3.4.9}$$

Здесь через A обозначена матрица $A = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i$. Так как, по предположению, матрицы A_i, $1 \leq i \leq m$, линейно независимые, то матрица A отлична от нулевой матрицы, она принадлежит подпространству $\mathcal{L}_A$.

Если теперь взять матрицу $\tilde{B} = Q^T A Q$, то согласно (3.4.8) и (3.4.9)

$$\tilde{B} = Q^T A Q = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & W \end{array} \right], \quad W = Q_N^T A Q_N \in \mathbb{S}^{n-r},$$

причем W — ненулевая матрица. Но тогда на основании (3.4.7)

$$A = Q \tilde{B} Q^T = Q \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & W \end{array} \right] Q^T \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(X; \mathbb{S}_+^n).$$

Поэтому ненулевая матрица $A \in \mathcal{L}_A$ принадлежит $\mathcal{T}_{sp}^{\perp}(X \,|\, \mathbb{S}_+^n) \cap \mathcal{N}_A^{\perp}$, что противоречит (3.4.6).

Обратно, пусть матрицы B_i, $1 \leq i \leq m$, линейно независимы. Покажем, что тогда выполняется равенство (3.4.4).

Имеем

$$B_i = Q^T A_i Q - H_i, \quad H_i = \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & Q_N^T A_i Q_N \end{array} \right], \quad 1 \leq i \leq m.$$

Отсюда получаем, что для матриц A_i, $1 \leq i \leq m$, справедливо разложение

$$A_i = \tilde{B}_i + \tilde{H}_i, \tag{3.4.10}$$

где

$$\tilde{B}_i = Q B_i Q^T \in \mathcal{T}_{sp}(X; \mathbb{S}_+^n), \quad \tilde{H}_i = Q H_i Q^T \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(X; \mathbb{S}_+^n).$$

Так как матрицы B_i, линейно независимы, то матрицы $\tilde{B}_i$, $1 \leq i \leq m$, также линейно независимы.

Пусть пересечение (3.4.6) содержит ненулевую матрицу M. Тогда в силу того, что $\mathcal{N}_A^{\perp} = \mathcal{L}_A$, получаем для некоторых α_i, $1 \leq i \leq m$, в совокупности не равных нулю,

$$M = \sum_{i=1}^m \alpha_i A_i \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(X; \mathbb{S}_+^n).$$

Поэтому на основании (3.4.10)

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tilde{B}_i = 0_{nn},$$

что противоречит линейной независимости матриц $\tilde{B}_i$, $1 \le i \le m$. Следовательно, выполняется условие (3.4.6), которое, как уже отмечалось, эквивалентно равенству (3.4.4). ■

Заметим, что поскольку в крайней точке $X \in \mathcal{F}_P$ матрицы

$$Q_B^T A_1 Q_B \ \ldots, \ Q_B^T A_m Q_B$$

порождают пространство $\mathbb{S}^r$, то в случае, когда для ранга r матрицы X выполняется равенство $r_\triangle = m$, эти матрицы линейно независимы.

Мы скажем, что прямая задача полуопределенного программирования (3.2.1) является *невырожденной*, если все допустимые точки $X \in \mathcal{F}_P$ оказываются невырожденными.

3.4.2. Строение допустимого множества и невырожденность в двойственной задаче

Минимальные грани и крайние точки. Обратимся теперь к двойственной задаче, представленной в форме (3.2.4), и рассмотрим сначала вопрос о минимальных гранях и крайних точках $[u, V]$ допустимого множества $\mathcal{F}_D$, а также о ранге матриц V, являющихся вторыми компонентами в таких крайних точках.

Пусть $\mathcal{F}_{D,V}$ обозначает проекцию множества $\mathcal{F}_D$ на пространство симметричных матриц $\mathbb{S}^n$, т.е.

$$\mathcal{F}_{D,V} = \left\{ V \in \mathbb{S}^n_+ : \ [u, V] \in \mathcal{F}_D \text{ для некоторого } u \in \ \mathbb{R}^m \right\}.$$

Из определения следует, что для любого $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ можно указать $u = u(V)$ такое, что $[u(V), V] \in \mathcal{F}_D$. Более того, так как по предположению матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы, данный вектор коэффициентов $u(V)$ определяется единственным образом. Вектор-функция $u(V)$ линейная, т.е. если $V_1 \in \mathcal{F}_{D,V}$ и $V_2 \in \mathcal{F}_{D,V}$, то

$$u(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2) = \alpha u(V_1) + (1-\alpha)u(V_2)$$

для всех α таких, что $\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2 \in \mathcal{F}_{D,V}$. Само допустимое множество $\mathcal{F}_D$ может быть представлено как

$$\mathcal{F}_D = \left\{ [u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n : \ u = u(V), \ V \in \mathcal{F}_{D,V} \right\}, \tag{3.4.11}$$

причем между его точками и точками множеств $\mathcal{F}_{D,V}$ существует взаимно однозначное соответствие. Отсюда сразу следует, что между гранями этих двух множеств также существует взаимно однозначное соответствие. В частности, если множество F есть некоторая грань множества $\mathcal{F}_{D,V}$ размерности d, то множество $\{[u(V), V] : V \in F\}$ также является гранью множества (3.4.11) той же самой размерности d.

Обратимся к представлению двойственной задачи в форме (3.2.6) и возьмем произвольный базис в подпространстве $\mathcal{L}_A^{\perp} = \mathcal{N}_A$. Пусть это будут матрицы $K_1, \ldots, K_l$, где $l = n_{\triangle} - m$. Имеем для каждой матрицы $V \in \mathcal{F}_{D,V}$

$$K_j \bullet V = c^j, \quad c^j = K_j \bullet C, \quad 1 \leq j \leq l.$$

Тогда допустимое множество $\mathcal{F}_{D,V}$ может быть записано как

$$\mathcal{F}_{D,V} = \left\{ V \in \mathbb{S}^n_+ : \ K_j \bullet V = c^j, \ 1 \leq j \leq l \right\},$$

т.е. имеет ту же самую структуру, что и допустимое множество в прямой задаче. Поэтому, проводя рассуждения, аналогичные тем, которые делались при рассмотрении допустимого множества в прямой задаче, приходим к выводу, что если матрица V ранга s является крайней точкой $\mathcal{F}_{D,V}$, то обязательно $s_{\triangle} \leq l$ или

$$m \leq n_{\triangle} - s_{\triangle}. \tag{3.4.12}$$

В силу вышесказанного этому условию должен удовлетворять ранг s матрицы V в каждой крайней точке $[u, V]$ допустимого множества в двойственной задаче (3.2.6).

Можно также определить вид минимальных граней и крайних точек множества $\mathcal{F}_D$, принадлежащего уже пространству $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$. Пусть

$$V(u) = C - \sum_{i=1}^{m} u^i A_i. \tag{3.4.13}$$

Обозначим через $\mathcal{W}_D$ множество

$$\mathcal{W}_D = \left\{ [u, V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n : \ V = V(u), \ u \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Тогда $\mathcal{F}_D = \left(\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n_+\right) \cap \mathcal{W}_D$. Используя опять, как и в прямой задаче, теорему о представлении грани выпуклого множества, являющегося пересечением двух других выпуклых множеств, приходим с учетом аффинности выпуклого множества $\mathcal{W}_D$ к следующему выражению для минимальной грани допустимого множества $\mathcal{F}_D$ в точке $[u, V] \in \mathcal{F}_D$:

$$F_{min}\left([u, V]; \mathcal{F}_D\right) = \left(\mathbb{R}^m \times F_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)\right) \cap \mathcal{W}_D.$$

Грани допустимого множества $\mathcal{F}_{D,u}$ являются проекциями граней более общего допустимого множества $\mathcal{F}_D$. В частности,

$$F_{min}\left(u;\mathcal{F}_{D,u}\right) = \pi_{R^m}\left(F_{min}\left([u,V];\mathcal{F}_D\right)\right),$$

где $V = V(u)$. Размерность грани $F_{min}\left(u;\mathcal{F}_{D,u}\right)$ совпадает с размерностью соответствующей грани $F_{min}\left([u,V];\mathcal{F}_D\right)$. Если ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет неравенству (3.4.12), то $u \in \mathbb{R}^m$ — крайняя точка множества $\mathcal{F}_{D,u}$.

Касательное пространство. Определим вид касательного пространства к допустимому множеству $\mathcal{F}_D$ в точках $[u,V]$ из этого множества. Также, как и случае прямой задачи, предположим, что ограничения в двойственной задаче удовлетворяют условию Слейтера. Введем в рассмотрение множество

$$\tilde{\mathcal{N}}_A = \left\{[y,Y] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n :\ Y + \sum_{i=1}^m y^i A_i = 0_{nn}\right\}.$$

Из его определения следует, что $Y \in \mathcal{L}_A$, если $[y,Y] \in \tilde{\mathcal{N}}_A$. Более того, каждому $y \in \mathbb{R}^m$ соответствует матрица $Y = Y(y)$ такая, что пара $[y,Y] \in \tilde{\mathcal{N}}_A$. Обратно, если $Y \in \Pi_{S^n}(\tilde{\mathcal{N}}_A)$, то можно указать $y = y(Y)$ такое, что $[y,Y] \in \tilde{\mathcal{N}}_A$. Здесь $\Pi_{S^n}(\tilde{\mathcal{N}}_A)$ — проекция множества $\tilde{\mathcal{N}}_A$ на пространство $\mathbb{S}^n$.

Тогда аналогично тому, как это делалось в случае допустимого множества в прямой задаче, получаем представление для касательного пространства к множеству $\mathcal{F}_D$ в точке $[u,V] \in \mathcal{F}_D$:

$$\mathcal{T}_{sp}\left([u,V]\,|\,\mathcal{F}_D\right) = \left(\mathbb{R}^m \times \mathcal{T}_{sp}(V\,|\,\mathbb{S}^n_+)\right) \cap \tilde{\mathcal{N}}_A. \tag{3.4.14}$$

Предположим, что для матрицы $V \succeq 0$ справедливо разложение (3.4.13) и она имеет ранг $s < n$. Предположим дополнительно, что V может быть представлена в виде

$$V = H\mathrm{Diag}\left(0,\ldots,0,\theta_{r+1},\ldots,\theta_n,\right) H^T, \tag{3.4.15}$$

где H — ортогональная матрица, $r = n - s$ и $\theta_i > 0$, $r < i \leq n$. Касательное пространство к $\mathbb{S}^n_+$ в точке V теперь следующее:

$$\mathcal{T}_{sp}(V\,|\mathbb{S}^n_+) = \left\{Y \in \mathbb{S}^n :\ Y = H\begin{bmatrix} 0 & U \\ U^T & G\end{bmatrix} H^T, \quad G \in \mathbb{S}^s,\, U \in \mathbb{R}^{(n-s)\times s}\right\}. \tag{3.4.16}$$

Поэтому согласно (3.4.14) любая матрица Y такая, что

$$[y,Y] \in \mathcal{T}_{sp}\left([u,V]\,|\,\mathcal{F}_D\right)$$

для некоторого $y \in \mathbb{R}^m$, должна иметь вид (3.4.16) и при этом принадлежать подпространству $\mathcal{L}_A$ (подпространству в $\mathbb{S}^n$ порожденному матрицами A_i, $1 \le i \le m$).

Как и в случае граней, касательное пространство к множеству $\mathcal{F}_{D,u}$ в точке $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ определяется через проекции соответствующего касательного пространства $\mathcal{T}_{sp}\left([u, V(u)] \,|\, \mathcal{F}_D\right)$ на $\mathbb{R}^m$. Таким образом

$$\mathcal{T}_{sp}\left(u \,|\, \mathcal{F}_{D,u}\right) = \pi_{R^m}\left(\mathcal{T}_{sp}\left([u, V(u)] \,|\, \mathcal{F}_D\right)\right).$$

Оба касательных пространства имеют одинаковую размерность.

Невырожденные точки. Дадим теперь определение невырожденной точки $[u, V] \in \mathcal{F}_D$ в двойственной задаче (3.2.4).

Определение 3.4.2. *Точка* $[u, V] \in \mathcal{F}_D$ *называется* невырожденной, *если*

$$\mathcal{T}_{sp}(V \,|\, \mathbb{S}^n_+) + \mathcal{L}_A = \mathbb{S}^n. \tag{3.4.17}$$

Соответственно, точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ *называется невырожденной, если невырожденной будет точка* $[u, V(u)] \in \mathcal{F}_D$.

Пусть ранг V равен s и для V справедливо разложение (3.4.15). Касательное пространство $\mathcal{T}_{sp}(V \,|\, \mathbb{S}^n_+)$ в этом случае имеет вид (3.4.16). Так как размерности $\mathbb{S}^n$ и $\mathcal{L}_A$ равны соответственно $n_\triangle$ и m, а для размерности $\mathcal{T}_{sp}(V \,|\, \mathbb{S}^n_+)$ получаем

$$\dim \mathcal{T}_{sp}(V \,|\mathbb{S}^n_+) = s_\triangle + s \times (n - s) = n_\triangle - (n - s)_\triangle,$$

то равенство (3.4.17) может выполняться только тогда, когда

$$n_\triangle - (n - s)_\triangle + m \ge n_\triangle,$$

откуда следует неравенство

$$(n - s)_\triangle \le m. \tag{3.4.18}$$

Пусть H_B и H_N — подматрицы матрицы H в (3.4.15), состоящие соответственно из первых r и последующих s столбцов. Аналогом утверждения 3.4.1 теперь является следующий результат

Утверждение 3.4.2. *Точка* $[u, V] \in \mathcal{F}_D$ *будет невырожденной тогда и только тогда, когда матрицы*

$$B_i = H_B^T A_i H_B, \quad 1 \le i \le m, \tag{3.4.19}$$

порождают пространство $\mathbb{S}^{n-s}$.

Доказательство. Возьмем невырожденную точку $[u, V] \in \mathcal{F}_D$. В ней выполняется условие (3.4.17), которое эквивалентно следующему равенству

$$\mathcal{T}_{sp}^{\perp}(V \,|\, \mathbb{S}_+^n) \cap \mathcal{N}_A = 0_{nn}, \tag{3.4.20}$$

где $\mathcal{N}_A = \mathcal{L}_A^{\perp}$ и

$$\mathcal{T}_{sp}^{\perp}(V \,|\mathbb{S}_+^n) = \left\{ Y \in \mathbb{S}^n : \; Y = H \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^T, \; G \in \mathbb{S}^{n-s} \right\}. \tag{3.4.21}$$

Пусть $\mathcal{L}_B$ — подпространство, порожденное матрицами B_i из (3.4.19), где $1 \le i \le m$. Предположим, что $\mathcal{L}_B$ не совпадает со всем пространством $\mathbb{S}^{n-s}$. Тогда ортогональное к $\mathcal{L}_B$ подпространство $\mathcal{L}_B^{\perp}$ содержит ненулевую матрицу $Y \in \mathbb{S}^{n-s}$. Имеем $Y \bullet B_i = 0$, $1 \le i \le m$, или

$$H_B Y H_B^T \bullet A_i = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.4.22}$$

Матрица $Z = H_B Y H_B^T$ принадлежит уже пространству $\mathbb{S}^n$ и ее можно записать следующим образом:

$$Z = H \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^T,$$

причем ранг матриц Z совпадает с рангом матрицы Y. Более того, на основании (3.4.21) заключаем, что $Z \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(V \,|\, \mathbb{S}_+^n)$.

Из (3.4.22) следует также, что $Z \in \mathcal{N}_A$. Таким образом, выполняется включение $Z \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(V \,|\, \mathbb{S}_+^n) \cap \mathcal{N}_A$, что противоречит (3.4.20). Поэтому на самом деле матрицы B_i, $1 \le i \le m$, порождают пространство $\mathbb{S}^{n-s}$.

Докажем теперь обратное утверждение. Предположим, что матрицы B_i, $1 \le i \le m$, порождают все пространство $\mathbb{S}^{n-s}$ и проверим выполнение равенства (3.4.20), равносильного условию невырожденности (3.4.17). От противного, пусть это не так. Тогда найдется ненулевая матрица $W \in \mathcal{T}_{sp}^{\perp}(V \,|\, \mathbb{S}_+^n)$ такая, что $W \bullet A_i = 0$, $1 \le i \le m$.

Согласно (3.4.21) матрица W имеет вид

$$W = H \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} H^T,$$

где G - ненулевая матрица из $\mathbb{S}^{n-s}$. Поэтому

$$W \bullet A_i = G \bullet H_B^T A_i H_B = G \bullet B_i = 0, \quad 1 \le i \le m.$$

Отсюда, так как матрицы B_i, $1 \le i \le m$, порождают все пространство $\mathbb{S}^{n-s}$, приходим к выводу, что обязательно матрица G должна быть нулевой. Мы пришли к противоречию. ■

По аналогии с прямой задачей двойственную задачу будем называть *невырожденной*, если все допустимые точки $[u, V] \in \mathcal{F}_D$ невырожденные.

3.5. Условия оптимальности и единственность решений

Рассмотрим исходную линейную задачу полуопределенного программирования (3.2.1) и двойственную к ней задачу, представленную в форме (3.2.4). Согласно теореме 3.2.2 и следствия к ней для существования решения у этой пары задач достаточно, чтобы система равенств и неравенств

$$\begin{array}{rcl} X \bullet V & = & 0, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ V & = & C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0 \end{array} \tag{3.5.1}$$

была разрешима. С учетом леммы 3.1.1 условия (3.5.1) можно переписать, например, в виде

$$\begin{array}{rcl} XV & = & 0_{nn}, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \leq i \leq m, \\ V & = & C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \end{array} \tag{3.5.2}$$

где требование $X \succeq 0$, $V \succeq 0$ по-прежнему остается.

Ниже будем предполагать, что обе задачи (3.2.1) и (3.2.4) имеют решения. Тогда система (3.5.1) также имеет решение. Согласно теореме 3.2.2 для этого достаточно, чтобы для обеих задач выполнялось условие регулярности ограничений Слейтера.

Единственность решений. Рассмотрим сначала вопрос об единственности решения задач (3.2.1) и (3.2.4). Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 3.5.1. *Пусть $X_* \in \mathcal{F}_P$ и $[u_*, V_*] \in \mathcal{F}_D$ — решения соответственно задач (3.2.1) и (3.2.4). Пусть, кроме того, точка $[u_*, V_*]$ невырожденная. Тогда X_* — единственное решение задачи (3.2.1).*

Доказательство. Так как, по предположению, точки X_* и $[u_*, V_*]$ — решения соответственно задач (3.2.1) и (3.2.4), то они удовлетворяют системе (3.5.1). Любая другая точка $X \in \mathcal{F}_P$, если она является решением (3.2.1), также удовлетворяет этой системе, т.е. выполняется:

$$X \in \mathcal{F}_P \cap \left\{ Y \in \mathbb{S}^n_+ : \ Y \bullet V_* = 0 \right\}. \tag{3.5.3}$$

Но для $V_* \in \mathbb{S}^n_+$ обязательно имеет место включение: $V_* \in \mathrm{ri} F_{min}(V_*; \mathbb{S}^n_+)$. Поэтому из равенства $Y \bullet V_* = 0$ следует, что $Y \bullet V = 0$ для любого $V \in F_{min}(V_*; \mathbb{S}^n_+)$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\left\{ Y \in \mathbb{S}^n_+ : \ Y \bullet V_* = 0 \right\} = F^*_{min}(V_*; \mathbb{S}^n_+),$$

а включение (3.5.3) заменяется на

$$X \in \mathcal{F}_P \cap F^*_{min}(V_*; \mathbb{S}^n_+). \tag{3.5.4}$$

Предположим, что матрица $V_* \in \mathcal{F}_{D,V}$ имеет ранг $s < n$ и для нее справедливо разложение (3.4.15). Обозначим через H_B и H_N подматрицы ортогональной матрицы H, состоящие соответственно из первых $r = n - s$ и последних s столбцов. Тогда на основании (3.5.4), если $X \in \mathcal{F}_P$ есть решение задачи (3.2.1), то X представимо в виде: $X = H_B G H_B^T$, где матрица $G \in \mathbb{S}^r_+$.

Примем во внимание этот вид матрицы X и перейдем к требованию $X \in \mathcal{F}_P$, следующему из (3.5.4). Если $X \in \mathcal{F}_P$, то должны, в частности, выполняться равенства:

$$A_i \bullet X = H_B^T A_i H_B \ \bullet G = b^i, \quad 1 \le i \le m. \tag{3.5.5}$$

Но в силу того, что $[u_*, V_*]$ — невырожденная точка $\mathcal{F}_D$, согласно утверждению 3.4.2 матрицы $H_B^T A_i H_B$, $1 \le i \le m$, порождают все пространство $\mathbb{S}^r$. Это возможно только тогда, когда $m \ge r_\triangle$.

Если обратиться к линейной системе уравнений (3.5.5), то оказывается, что матрица этой системы будет либо квадратной, либо прямоугольной, причем в последней случае число строк в ней должно превышать число столбцов. Кроме того, эта матрица имеет полный ранг по столбцам, равный $r_\triangle$. Отсюда заключаем, что у этой системы может быть лишь единственное решение G. Это решение соответствует X_*. ■

Аналогичное утверждение имеет место и для двойственной задачи (3.2.4). Приведем его без доказательства.

Утверждение 3.5.2. *Пусть* $X_* \in \mathcal{F}_P$ *и* $[u_*, V_*] \in \mathcal{F}_D$ *— решения соответственно задач* (3.2.1) *и* (3.2.4)*. Пусть, кроме того, точка* X_* *невырожденная. Тогда* $[u_*, V_*]$ *— единственное решение задачи* (3.2.4).

Если задачи (3.2.1) и (3.2.4) имеют решения X_* и $[u_*, V_*]$ соответственно, причем оба эти решения являются невырожденными точками, то в силу утверждений 3.5.1 и 3.5.2 эти решения оказываются единственно возможными. Однако они могут оказаться не строго комплементарными. Приведем пример из [29], который показывает отсутствие строгой комплементарности у таких единственных решений.

Рассмотрим линейную задачу полуопределенного программирования. Пусть $n = m = 3$. Пусть, кроме того,

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда следующие допустимые точки

$$X_* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u_* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad V_* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

являются оптимальными решениями поставленной задачи и двойственной к ней. Они, как нетрудно видеть, невырожденные точки и следовательно других оптимальных решений нет. Но с другой стороны, условие строгой комплементарности для этих решений нарушается. Это отличает линейные задачи полуопределенного программирования от задач линейного программирования. Единственные решения задач линейного программирования обязательно должны быть строго комплементарными.

Можно освободиться от вектора двойственных переменных u в условиях оптимальности (3.5.1). Пусть $\mathcal{L}_A$ — подпространство в $\mathbb{S}^n$, порожденное матрицами $A_1, \ldots, A_m$, и пусть $\mathcal{L}_A^\perp$ — его ортогональное дополнение. Положим $l = n_\triangle - m$ и возьмем линейно независимые матрицы $K_1, \ldots, K_l$ из $\mathcal{L}_A^\perp$. Они задают некоторый базис в $\mathcal{L}_A^\perp$. Если в (3.5.1) последовательно умножить левые и правые части третьего равенства на матрицы K_j, $1 \leq j \leq l$, то, учитывая их ортогональность с матрицами A_i, $1 \leq i \leq m$, получаем, что это третье равенство может быть заменено на линейную систему следующих равенств: $K_j \bullet V = C$,

$1 \le j \le l$, т.е. условия (3.5.1) принимают вид:

$$\begin{array}{rcl} X \bullet V & = & 0, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ K_j \bullet V & = & c^j, \quad 1 \le j \le l, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0, \end{array} \tag{3.5.6}$$

где через c^j обозначены величины $c^j = K_j \bullet C$, $1 \le j \le l$. Они являются компонентами l-мерного вектора $c = \left[c^1, \dots, c^l\right]$.

Условия оптимальности в векторном виде. Обозначим через $X \circ V$ симметризованное произведение матриц X и V из $\mathbb{S}^n$, т.е. матрицу $X \circ V = (XV + VX)/2$.

Утверждение 3.5.3. *Для симметричных матриц $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$ равенство $X \circ V = 0_{nn}$ возможно в том и только в том случае, когда $XV = VX = 0_{nn}$.*

Доказательство. Покажем только необходимость. Пусть $X \circ V = 0_{nn}$. Тогда $XV = -(XV)^T$, следовательно матрица XV кососимметричная. У вещественной кососимметричной матрицы на диагонали расположены нулевые элементы, поэтому $X \bullet V = \mathrm{tr}(XV) = 0$. Так как $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$, отсюда заключаем, что $XV = VX = 0_{nn}$. ■

С учетом утверждения 3.5.3 и положительной полуопределенности матриц X и V получаем, что первое равенство в (3.5.1) может быть заменено на $X \circ V = 0_{nn}$. Поэтому вся система условий оптимальности (3.5.1), эквивалентна следующей системе

$$\begin{array}{rcl} X \circ V & = & 0_{nn}, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ V & = & C - \sum_{i=1}^m u^i A_i, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0. \end{array} \tag{3.5.7}$$

Заменяя теперь матричные равенства в (3.5.7) на их векторные аналоги, имеем

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{vec}(X \circ V) & = & 0_{nn}, \\ \mathcal{A}_{vec}\mathrm{vec}X & = & b, \\ \mathrm{vec}\, V & = & \mathrm{vec}\, C - \mathcal{A}_{vec}^T u, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0. \end{array} \tag{3.5.8}$$

Здесь и ниже через $\mathcal{A}_{vec}$ обозначается $m \times n^2$ матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{vec}A_i$, $1 \le i \le m$.

Опустим пока в системе (3.5.8) неравенства $X \succeq 0$, $V \succeq 0$ и основное внимание уделим равенствам. Обратимся сначала к первому равенству в (3.5.8). В силу формулы (6) из приложения

$$\mathrm{vec}(ABC) = (C^T \otimes A)\mathrm{vec}B,$$

справедливой для любых матриц A, B и C, для которых определено произведение ABC, получаем, что

$$\mathrm{vec}(X \circ V) = X^{\otimes}\mathrm{vec}V = V^{\otimes}\mathrm{vec}X,$$

где

$$X^{\otimes} = \frac{1}{2}\left[X \otimes I_n + I_n \otimes X\right], \quad V^{\otimes} = \frac{1}{2}\left[V \otimes I_n + I_n \otimes V\right]$$

— кронекеровские суммы матрицы X и V соответственно. Таким образом, первое равенство из (3.5.8) может быть представлено в виде

$$X^{\otimes}\,\mathrm{vec}\,V = V^{\otimes}\,\mathrm{vec}\,X = 0_{n^2}. \tag{3.5.9}$$

Если дополнительно принять во внимание симметричность всех матриц, то можно перейти от векторов $\mathrm{vec}\,X$ и $\mathrm{vec}\,V$ к соответственно векторам $\mathrm{svec}\,X$ и $\mathrm{svec}\,V$. Условия оптимальности (3.5.8) с учетом (3.5.9) тогда принимают следующий вид:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,X = \tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,V & = & 0_{n_\triangle}, \\ \mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\,X & = & b, \\ \mathrm{svec}\,V & = & \mathrm{svec}\,C - \mathcal{A}_{svec}^T u, \\ X \succeq 0, & & V \succeq 0. \end{array} \tag{3.5.10}$$

Здесь: $\tilde{X}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n$, $\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n V^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n$, $\tilde{\mathcal{L}}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$ — специальные элиминационная и дуплицирующая матрицы (см. приложение). Через $\mathcal{A}_{svec}$ обозначена матрица размером $m \times n_\triangle$, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}\,A_i$, $1 \le i \le m$.

Можно заменить третье равенство в (3.5.10), если воспользоваться условиями оптимальности в форме (3.5.6). Составим из векторов $\mathrm{svec}\,K_j$ матрицу $\mathcal{K}_{svec}$ размером $l \times n_\triangle$, поместив в нее в качестве строк векторы $\mathrm{svec}\,K_j$, $1 \le j \le l$. Тогда после умножения третьего равенства из (3.5.10) слева на матрицу $\mathcal{K}_{svec}$ получаем, что оно заменяется на следующее условие: $\mathcal{K}_{svec}\,\mathrm{svec}\,V = c$. В результате приходим к условиям оптимальности

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,X = \tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,V & = & 0_{n_\triangle}, \\ \mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\,X & = & b, \\ \mathcal{K}_{svec}\,\mathrm{svec}\,V & = & c \end{array} \tag{3.5.11}$$

при дополнительных требованиях: $X \succeq 0$, $V \succeq 0$.

Любые положительно полуопределенные матрицы X и V, удовлетворяющие либо системе (3.5.10), либо системе (3.5.11) являются решениями пары взаимно двойственных линейных задач полуопределенного программирования.

Глава 4

Численные методы решения задач полуопределенного программирования

Многие численные методы для решения линейных задач полуопределенного программирования строятся как обобщения соответствующих методов для линейного программирования. Наиболее хорошо переносятся на полуопределенное программирование методы внутренней точки и, в частности, прямо-двойственные методы центрального пути. Гораздо слабее разработаны методы симплексного типа и на это имеется ряд причин. Среди них одна из основных заключается в отсутствии полиэдральности у конуса положительно полуопределенных матриц и, как следствие, наличие бесконечного числа крайних точек у допустимого множества. Поэтому в отличие от линейного программирования здесь уже не удается добиться сходимости за конечное число шагов. Тем не менее, имеется ряд обобщений симплекс-метода. Варианты такого обобщения (прямой и двойственный симплекс-методы) для линейного полуопределенного программирования приводятся ниже. Кроме того, рассматриваются обобщения мультипликативно-барьерного метода (прямого и двойственного), а также прямо-двойственного метода Ньютона. Все эти методы строятся как специальные итерационные процедуры решения систем уравнений, входящих в условия оптимальности.

4.1. Симплекс-метод

Симплекс-метод, как и другие рассматриваемые в этой главе методы, предназначен для решения линейной задачи полуопределенного программирования в основной постановке (3.2.1), т.е.

$$\begin{array}{c} \min C \bullet X, \\ A_i \bullet X = b^i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad X \succeq 0. \end{array} \tag{4.1.1}$$

Одновременно он находит решение двойственной задачи

$$\begin{array}{c} \max \ b^T u, \\ \sum_{i=1}^m u^i A_i + V = C, \quad V \succeq 0. \end{array} \tag{4.1.2}$$

Если обратиться к линейному программированию, то обычно симплекс-метод для решения таких задач трактуют как целенаправленный перебор крайних точек (вершин) допустимого множества, приводящий за конечное число шагов к решению задачи. Алгебраическое описание вершин допустимого множества позволяют также интерпретировать такой процесс, как переход от одного базисного решения решения к другому базисному решению систем линейных уравнений, входящих в постановку задачи (см. [12]). Воспользуемся аналогичным подходом при разработке симплекс-метода для задачи (4.1.1). Итерационный процесс в методе будем строить с использованием *крайних точек* допустимого множества $\mathcal{F}_P$ задачи (4.1.1). В связи с этим несколько уточним характеризацию крайних точек $X \in \mathcal{F}_P$ и, в частности, невырожденных крайних точек.

Как уже говорилось, для того чтобы матрица X ранга $r < n$, имеющая разложение

$$X = Q \ \mathrm{Diag}\,(\eta^1, \ldots \eta^r, 0 \ldots, 0)\, Q^T, \tag{4.1.3}$$

где Q ортогональная матрица и $\eta^i > 0$, $1 \le i \le r$, была крайней точкой допустимого множества $\mathcal{F}_P$ необходимо, чтобы ее ранг r удовлетворял неравенству $r_\triangle \le m$. В принципе может оказаться так, что количество ограничений типа равенства m не совпадает ни с одним “треугольным” числом. В этом случае для крайней точки $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r неравенство $r_\triangle \le m$ выполняется только как строгое, т.е. $r_\triangle < m$. Такую крайнюю точку будем называть *нерегулярной*. В отличие от нее крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$ ранга r, когда $r_\triangle = m$, называется *регулярной*.

Предположим, что $X \in \mathcal{F}_P$ — крайняя точка ранга $r < n$, для которой справедливо разложение (4.1.3). Разобьем матрицу Q на две подматрицы: $Q = [Q_B\, Q_N]$, где Q_B — подматрица ортогональной матрицы Q, состоящая из первых r столбцов, и перепишем представление (4.1.3) крайней точки X в следующем виде

$$X = Q_B D(\eta_B) Q_B^T. \tag{4.1.4}$$

Если рассмотреть матрицы $A_i^{Q_B} = Q_B^T A_i Q_B$, $1 \le i \le m$, то в силу того, что X — крайняя точка $\mathcal{F}_P$, эти матрицы по определению порождают все пространство $\mathbb{S}^r$. Более того, в регулярной крайней точке X они оказываются линейно независимыми. Поэтому заведомо линейно независимыми будут более общие матрицы (3.4.5), что согласно утверждению 3.4.1 означает невырожденность точки $X \in \mathcal{F}_P$.

Ниже предполагается, что крайние точки $X \in \mathcal{F}_P$, если они нерегулярные, то их ранг r удовлетворяет условию $r_\triangle > m - r$. В этом случае будем говорить, что X — *квазирегулярная* крайняя точка.

Итерация в регулярной точке. Пусть задана начальная крайняя точка $X_0 \in \mathcal{F}_P$ и строится последовательность крайних точек $\{X_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (4.1.1) монотонно убывают от итерации к итерации.

Предположим, что на некоторой итерации у нас имеется крайняя точка $X \in \mathcal{F}_P$. Считаем сначала для простоты, что X — регулярная крайняя точка, причем сильно невырожденная. Предположим также, что X не является оптимальным решением и нам желательно перейти в новую крайнюю точку $\bar{X}$ с меньшим значением целевой функции. Опишем этот переход, следуя идеологии симплекс-метода, применяемого для решения задач линейного программирования, заданной в канонической форме. Воспользуемся для этого условиями оптимальности (3.5.1), согласно которым должны выполняться равенства

$$\begin{array}{rcl} X \bullet V & = & 0, \\ A_i \bullet X & = & b^i, \quad 1 \le i \le m, \\ V & = & C - \sum_{i=1}^m u^i A_i \end{array} \tag{4.1.5}$$

при дополнительном требовании положительной полуопределенности матриц X и V. С помощью равенств (4.1.5) можно найти вектор двойственных переменных $u \in \mathbb{R}^m$ и вычислить слабую двойственную переменную (двойственную невязку) $V = V(u)$.

Из свойств функции следа для произведения матриц получаем

$$\begin{aligned} X \bullet V = \left(QD(\eta_B)Q_B^T\right) \bullet V = \mathrm{tr}\,\left(QD(\eta_B)Q_B^T V\right) = \\ = \mathrm{tr}\,\left(D(\eta_B)V^{Q_B}\right) = D(\eta_B) \bullet V^{Q_B}, \end{aligned}$$

где обозначено $V^{Q_B} = Q_B^T V Q_B$. Отсюда видно, что первое равенство $X \bullet V = 0$ из условий оптимальности (4.1.5) заведомо выполняется для матрицы V такой, что $V^{Q_B} = 0_{rr}$.

Введем дополнительные обозначения: $A_i^{Q_B} = Q_B^T A_i Q_B \in \mathbb{S}^r$, где $1 \le i \le m$. Пусть $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ — $(m \times r_\triangle)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}(A_i^{Q_B})$. Тогда равенство $V^{Q_B} = 0_{rr}$ сводится к следующей системе m уравнений относительно m-мерного вектора u:

$$\mathrm{svec}\, V^{Q_B} = \mathrm{svec}\, C^{Q_B} - (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T u = 0_{r_\triangle}, \tag{4.1.6}$$

где $C^{Q_B} = Q_B^T C Q_B$.

Так как, по предположению, X — регулярная крайняя точка, то система (4.1.6) есть система m уравнений относительно m переменных. Квадратная матрица $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ в этом случае неособая и, разрешая систему (4.1.6), получаем

$$u = \left(\left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right)^T \right)^{-1} \mathrm{svec}\, C^{Q_B}. \tag{4.1.7}$$

В случае, когда матрица $V = V(u)$ положительно полуопределенная, X вместе с $[u, V]$ являются решениями соответственно задач (4.1.1) и (4.1.2). Предположим далее, что V не есть положительно полуопределенная матрица, т.е. среди ее собственных значений имеются отрицательные. Заметим, что матрица V подобна матрице $V^Q = Q^T V Q$ и следовательно имеет те же самые собственные значения, что и матрица V^Q. Но V^Q есть матрица окаймления, так как у нее левый верхний блок V^{Q_B} нулевой. Поэтому в том случае, когда внедиагональные блоки матрицы V^Q ненулевые, обязательно у V^Q, а значит и у V, имеются отрицательные собственные значения.

Рассмотрим разложение матрицы $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица, θ — вектор собственных значений V. Пусть h_j обозначает j-й столбец матрицы H (собственный вектор матрицы V). Тогда V можно также записать в виде

$$V = \sum_{j=1}^{n} \theta^j h_j h_j^T.$$

Предположим, что θ^k — отрицательное собственное значение V и ему соответствует собственный вектор h_k. Для данного собственного вектора выполняется $V^{h_k} = h_k^T V h_k = \theta^k < 0$ или в, другой записи,

$$V^{h_k} = C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0. \tag{4.1.8}$$

Здесь введены величина $C^{h_k} = h_k^T C h_k$, а также m-мерный вектор $\mathcal{A}^{h_k}$ с компонентами $h_k^T A_i h_k$, $1 \le i \le m$. Имеет место следующее свойство вектора h_k.

Утверждение 4.1.1. *Вектор h_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(Q_B)$, порожденному столбцами матрицы Q_B.*

Доказательство от противного. В самом деле, если допустить, что $h_k = Q_B z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^r$, то должно выполняться $V h_k = V Q_B z = \theta^k Q_B z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу Q_B^T получаем $V^{Q_B} z = \theta^k z$, что невозможно, поскольку матрица V^{Q_B} нулевая. ■

Воспользуемся матрицей единичного ранга $h_k h_k^T$ и перейдем в новую точку $\bar{X}$, полагая

$$\bar{X} = X + \alpha \Delta X, \quad \Delta X = Q_B \Delta Z Q_B^T + h_k h_k^T, \tag{4.1.9}$$

где α — некоторый положительный шаг, $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$.

Матрицу ΔZ будем подбирать таким образом, чтобы

$$A_i \bullet \left(Q_B \Delta Z Q_B^T\right) + A_i \bullet \ \left(h_k h_k^T\right) = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{4.1.10}$$

Тогда новая точка $\bar{X}$ удовлетворяет ограничениям типа равенства в задаче (4.1.1).

Так как у матриц $M_1 M_2$ и $M_2 M_1$ один и тот же след, то равенства (4.1.10) можно переписать также как

$$\left(A_i^{Q_B}\right) \bullet \Delta Z + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \le i \le m. \tag{4.1.11}$$

Если от матриц перейти к их векторным представлениям, то данная система (4.1.11) принимает вид

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \operatorname{svec} \Delta Z + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \tag{4.1.12}$$

Разрешая систему (4.1.12) относительно вектора $\operatorname{svec} Z$, получаем

$$\operatorname{svec} \Delta Z = -\left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right)^{-1} \mathcal{A}^{h_k}. \tag{4.1.13}$$

Вычислим $C \bullet \Delta X$. Имеем согласно (4.1.9)

$$C \bullet \Delta X = C^{Q_B} \bullet \Delta Z + C^{h_k}.$$

Примем также во внимание (4.1.8). Тогда после перехода к векторному представлению матриц и подстановки вектора (4.1.13) получаем в силу (4.1.8)

$$\begin{array}{rcl} C \bullet \Delta X & = & \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \operatorname{svec} \Delta Z \rangle + C^{h_{j_k}} = \\ & = & -\langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \left(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec}\right)^{-1} \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} = \\ & = & -\langle \left(\mathcal{A}^{Q_B}_{svec}\right)^{-T} \operatorname{svec} C^{Q_B}, \mathcal{A}^{h_k} \rangle + C^{h_k} = \\ & = & C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \theta^k < 0, \end{array} \qquad (4.1.14)$$

где упрощенная запись M^{-T} означает $(M^T)^{-1}$.

Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция в задаче (4.1.1) убывает. Таким образом, матрицу $\mathcal{A}^{Q_B}_{svec}$ в данном случае можно рассматривать как матрицу базиса, а матрицу Q_B и вектор η_B — как *базисную пару переменных* (базисный набор, состоящий соответственно из собственных вектора и собственных значений).

Для перехода в новую базисную пару (новую крайнюю точку) надо еще определить *шаг перемещения* $\alpha > 0$. Обозначим $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha \Delta X$. При перемещении вдоль ΔX с шагом $\alpha > 0$ матрица $\bar{X}(\alpha)$ принимает вид

$$\bar{X}(\alpha) = X + \alpha \Delta X = Q_B \left[D(\eta_B) + \alpha \Delta Z \right] Q_B^T + \alpha h_k h_k^T.$$

Поскольку матрица единичного ранга $h_k h_k^T$ положительно полуопределенная, то максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором матрица $\bar{X}(\alpha)$ остается положительно полуопределенной, определится из условия, когда у матрицы $M(\alpha) = D(\eta_B) + \alpha \Delta Z$ впервые появляется отрицательное собственное значение.

Пусть P — невырожденная матрица порядка r, с помощью которой обе матрицы $D(\eta_B)$ и ΔZ конгруэнтным преобразованием приводятся к диагональныму виду одновременно, а именно, $D(\eta_B) = PP^T$ и $\Delta Z = PD(\lambda)P^T$. Поэтому

$$M(\alpha) = P \left[D(\bar{e}_r) + \alpha D(\lambda) \right] P^T,$$

где $\bar{e}_r$ — r-мерный вектор со всеми компонентами, равными единице. Отсюда видно, что выбор $\bar{\alpha}$ зависит от максимальной по модулю отрицательной компоненты вектора λ. Предположим, что это будет компонента λ_*. Тогда $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$. В случае, когда $\lambda \geq 0_r$, задача (4.1.1) не имеет решения, т.к. шаг α можно взять сколь угодно большим, а в силу (4.1.14) $C \bullet \bar{X}(\alpha) \to -\infty$ при $\alpha \to +\infty$. При этом $\bar{X}(\alpha) \in \mathcal{F}_P$.

Если собственный вектор h_k матрицы $V(u)$ принадлежит грани $\Gamma^*(X; \mathbb{S}^n_+)$, сопряженной к минимальной грани $\Gamma(X; \mathbb{S}^n_+)$, то по определению сопряженной грани выполняется равенство $Q_B^T h_k = 0_r$. Поэтому фактически вектор h_k можно рассматривать как один из столбцов матрицы Q_N. В этом случае из базисного набора собственных векторов Q_B, порождающих линейное подпространство $\mathcal{R}(Q_B)$, мы удаляем какой-то вектор и вводим новый собственный вектор из Q_N.

Итерация в нерегулярной точке. Предположим теперь, что крайняя точка X является только квазирегулярной, но не регулярной, т.е. $r_\triangle < m$, и пусть, для определенности, $m = r_\triangle + p$, где $p < r$.

Так как в крайней точке $X \in \mathcal{F}_P$ матрицы $A_i^{Q_B}$, $1 \le i \le m$, порождают все пространство $\mathbb{S}^r$, то матрица $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ имеет полный ранг по столбцам, равный $r_\triangle$. В ней число строк превышает число столбцов. Поэтому система линейных уравнений (4.1.6) относительно вектора u оказывается недоопределенной и, следовательно, обладает целым множеством решений. Общее решение системы (4.1.6) можно записать как

$$u = \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \left[\left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right)^T \mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \right]^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B} + \tilde{u}, \tag{4.1.15}$$

где $\tilde{u}$ — некоторый m-мерный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$.

Возьмем в качестве u нормальное решение

$$u = \left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right) \left[\left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right)^T \left(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}\right) \right]^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B}, \tag{4.1.16}$$

т.е. в (4.1.15) полагаем $\tilde{u} = 0_m$. Среди всех возможных решений оно будет иметь минимальную норму.

Снова определим $V = V(u)$. Пусть θ^k — отрицательное собственное значение матрицы V, ему соответствует собственный вектор h_k, входящий в число столбцов ортогональной матрицы H. Как и прежде, вектор h_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{R}(Q_B)$.

Формула (4.1.13), задающая приращение ΔX, в данном случае оказывается неприемлемой, поскольку система (4.1.12) для определения вектора $\operatorname{svec} Z$ становится переопределенной и может иметь решение лишь в том случае, когда вектор $\mathcal{A}^{h_k}$ лежит в пространстве столбцов матрицы $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ или, другими словами, принадлежит нуль-пространству матрицы $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$.

Для устранения этого недостатка изменим подход к выбору матрицы ΔX, а именно, будем теперь строить ΔX в виде

$$\Delta X = [Q_B \, h_k] \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix} [Q_B \, h_k]^T, \tag{4.1.17}$$

где $\Delta Z \in \mathbb{S}^r$ и $w \in \mathbb{R}^r$. Отметим, что данное направление ΔX переходит в направление из (4.1.13), если положить $w = 0_r$.

Вектор w, который входит в (4.1.17) постараемся подобрать таким образом, чтобы вектор $Q_B w$ был ортогонален собственному вектору h_k. Это всегда можно сделать, так как даже в случае, когда вектор h_k не ортогонален пространству $\mathcal{R}(Q_B)$, в $\mathcal{R}(Q_B)$ найдется подпространство $\tilde{\mathcal{R}}$ размерности $r-1$ такое, что h_k ортогонален $\tilde{R}$. Дополнительно нам хотелось бы сохранить формулу (4.1.14).

С этой целью будем искать w в виде

$$w = \frac{1}{2}\tilde{W}y, \quad \tilde{W} = [\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_p], \tag{4.1.18}$$

где $y \in \mathbb{R}^p$ и $\tilde{W}$ — матрица размера $r \times p$ с линейно независимыми столбцами $\tilde{w}_j \in \mathbb{R}^r$, $1 \le j \le p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $q_{w_j} = Q_B\tilde{w}_j$, $1 \le j \le p$, были ортогональны вектору h_k, т.е.

$$\langle h_k, q_{w_j}\rangle = \langle Q_B^T h_k, \tilde{w}_j\rangle = 0, \quad 1 \le j \le p. \tag{4.1.19}$$

Решение системы (4.1.19), разумеется, неединственное, если $q^T h_k = 0$ хотя бы для одного столбца q матрицы Q_B.

Все векторы q_{w_j}, $1 \le j \le p$, принадлежат подпространству $\mathcal{R}(Q_B)$. Вектор $q_y = Q_B\tilde{W}y$ также принадлежит этому подпространству и, согласно (4.1.19), $h_k^T q_y = 0$.

Теперь вместо (4.1.11) имеем

$$A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + 2\langle Q_B^T A_i h_k, w\rangle + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

или, после подстановки вектора w из (4.1.18),

$$A_i^{Q_B} \bullet \Delta Z + \langle Q_B^T A_i h_k, \tilde{W}y\rangle + h_k^T A_i h_k = 0, \quad 1 \le i \le m, \tag{4.1.20}$$

Второе слагаемое в (4.1.20) можно переписать также в виде:

$$\langle Q_B^T A_i h_k, \tilde{W}y\rangle = \langle h_k, A_i Q_B \tilde{W}y\rangle = \langle h_k, A_i q_y\rangle.$$

Пусть $\mathcal{B}$ — матрица размером $m \times p$, у которой i-я строка этой матрицы равняется вектору $h_k^T A_i Q_B \tilde{W}$ т.е.

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} h_k^T A_1 Q_B \tilde{w}_1 & \dots & h_k^T A_1 Q_B \tilde{w}_p \\ & \vdots & \\ h_k^T A_m Q_B \tilde{w}_1 & \dots & h_k^T A_m Q_B \tilde{w}_p \end{bmatrix}. \tag{4.1.21}$$

Тогда, объединяя все уравнения (4.1.20) в единую систему, получаем

$$\mathcal{A}_{svec}^{Q_B} \operatorname{svec} \Delta Z + \mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k} = 0_m. \tag{4.1.22}$$

Система (4.1.22) является системой m уравнений относительно m переменных, а именно, векторов $\operatorname{svec}\Delta Z \in \mathbb{R}^{r_\triangle}$ и $y \in \mathbb{R}^p$.

Возьмем далее $(r_\triangle \times m)$-матрицу $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$ и $(p \times m)$-матрицу $\tilde{U}$, строками которой являются линейно независимые векторы $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_p$ из нуль-пространства матрицы $(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T$. Составим из них квадратную матрицу

$$\mathcal{P} = \left[\begin{array}{c} (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \\ \tilde{U} \end{array} \right].$$

Данная матрица неособая, ее строки порождают пространство $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\mathcal{W} = (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ — квадратная неособая матрица порядка $r_\triangle$. После умножения системы (4.1.22) слева на матрицу $\mathcal{P}$ приходим к эквивалентной системе, которая распадается на две подсистемы

$$\mathcal{W} \operatorname{svec}\Delta Z + (\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \left[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}\right] = 0_{r_\triangle}, \tag{4.1.23}$$

$$\tilde{U}\left[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}\right] = 0_p. \tag{4.1.24}$$

Из первой подсистемы (4.1.23) находим

$$\operatorname{svec}\Delta Z = -\mathcal{W}^{-1}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \left[\mathcal{B}y + \mathcal{A}^{h_k}\right]. \tag{4.1.25}$$

Утверждение 4.1.2. *Пусть $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ и $\mathcal{R}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})$ — пространства столбцов матриц $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$ соответственно. Пусть, кроме того, $\mathcal{R}(\mathcal{B}) \cap \mathcal{R}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}) = \emptyset$. Тогда матрица $\tilde{U}\mathcal{B}$ неособая.*

Доказательство. Покажем, что однородная система уравнений $\tilde{U}\mathcal{B}y = 0_p$ имеет только тривиальное решение $y = 0_p$. От противного, допустим, что это не так и существует ненулевой вектор $y \in \mathbb{R}^p$, удовлетворяющий этой системе. Из-за того, что $\mathcal{B}$ — матрица полного ранга, следует принадлежность ненулевого вектора $z = \mathcal{B}y$ нуль-пространству матрицы $\tilde{U}$, которое совпадает с пространством столбцов матрицы $\mathcal{A}_{svec}^{Q_B}$. Мы пришли к противоречию. ■

Принимая во внимание утверждение 4.1.2 и разрешая вторую подсистему (4.1.24), получаем

$$y = -\left(\tilde{U}\mathcal{B}\right)^{-1} \tilde{U}\mathcal{A}^{h_k}. \tag{4.1.26}$$

Для сокращения записи положим $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}\left(\tilde{U}\mathcal{B}\right)^{-1}\tilde{U}$. После подстановки найденного y в выражение (4.1.25) для $\operatorname{svec}\Delta Z$ приходим к

$$\operatorname{svec}\Delta Z = \mathcal{W}^{-1}(\mathcal{A}_{svec}^{Q_B})^T \left[\tilde{\mathcal{B}} - I_m\right] \mathcal{A}^{h_k}. \tag{4.1.27}$$

Найдем теперь изменение значения целевой функции вдоль вычисленного направления ΔX.

Утверждение 4.1.3. *Матрица ΔX является направлением убывания целевой функции в задаче* (4.1.1), *причем* $C \bullet \Delta X = \theta^k$.

Доказательство. Имеем

$$C \bullet \Delta X = \begin{bmatrix} Q_B^T C Q_B & Q_B^T C h_k \\ h_k^T C Q_B & h_k^T C h_k \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \Delta Z & w \\ w^T & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$C \bullet \Delta X = \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \operatorname{svec} \Delta Z \rangle + 2\langle C^{Q_B h_k}, w \rangle + C^{h_k}, \tag{4.1.28}$$

где $C^{Q_B h_k} = Q_B^T C h_k$.

Вычислим отдельно первое и второе слагаемые в правой части (4.1.28). Для первого слагаемого получаем

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \operatorname{svec} \Delta Z \rangle &= \langle \operatorname{svec} C^{Q_B}, \mathcal{W}^{-1} (\mathcal{A}^{Q_B}_{svec})^T \left[\tilde{\mathcal{B}} - I_m \right] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \\ &= \langle \mathcal{A}^{Q_B}_{svec} \mathcal{W}^{-1} \operatorname{svec} C^{Q_B}, \left[\tilde{\mathcal{B}} - I_m \right] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \\ &= \langle u, \left[\tilde{\mathcal{B}} - I_m \right] \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \langle u, \tilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle, \end{aligned} \tag{4.1.29}$$

причем в силу (4.1.21) и (4.1.26)

$$\langle u, \tilde{\mathcal{B}} \mathcal{A}^{h_k} \rangle = -\langle u, \mathcal{B} y \rangle = -\sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y}, \quad A_i^{h_k q_y} = h_k^T A_i q_y, \quad 1 \le i \le m.$$

Для второго слагаемого в (4.1.28) выполняется, соответственно,

$$2\langle C^{Q_B h_k}, w \rangle = \langle C^{Q_B h_k}, \tilde{W} y \rangle = \langle C h_k, Q^B \tilde{W} y \rangle = \langle h_k, C q_y \rangle = C^{h_k q_y}, \tag{4.1.30}$$

где $C^{h_k q_y} = h_k^T C q_y$.

Учтем, что $V h_k = \theta^k h_k$, и что вектор $q_y = Q_B \tilde{W} y$ ортогонален вектору h_k. Тогда получаем

$$C^{h_k q_y} - \sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y} = h_k^T V q_y = \theta^k h_k^T q_y = 0. \tag{4.1.31}$$

Кроме того, согласно (4.1.8) имеем

$$C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = h_k^T V h_k = \theta^k. \tag{4.1.32}$$

После подстановки (4.1.31) и (4.1.32) в (4.1.29) и (4.1.30) приходим к неравенству

$$\begin{gathered} C \bullet \Delta X = C^{h_k q_y} - \sum_{i=1}^m u^i A_i^{h_k q_y} + C^{h_k} - \langle u, \mathcal{A}^{h_k} \rangle = \\ = \langle h_k, \left(C - \sum_{i=1}^m u^i A_i\right) q_y \rangle + \langle h_k, V h_k \rangle = \\ = \langle V h_k, q_y \rangle + \theta^k = \theta^k \langle h_k, q_y \rangle + \theta^k = \theta^k < 0. \end{gathered}$$

Следовательно, вдоль направления ΔX целевая функция убывает. ■

Выбор максимально возможного шага α проводится полностью аналогично регулярному случаю. Матрица X положительно полуопределенная и из (4.1.17) следует, что симметричная матрица $\bar{X}(\alpha) = X + \alpha \Delta X$ также будет оставаться положительно полуопределенной для α достаточно малых. Определим максимально возможный шаг $\bar{\alpha}$, при котором она сохраняет свою знакоопределенность. Понятно, что этот шаг $\bar{\alpha}$ находится из условия

$$\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = 0.$$

При $\alpha > 0$ имеем

$$\det \begin{bmatrix} D(\eta_B) + \alpha \Delta Z & \alpha w \\ \alpha w^T & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \det \left[D(\eta_B) + \alpha \Delta Z - \alpha w w^T \right].$$

Поэтому определение $\bar{\alpha}$ сводится к определению максимального значения α, при котором

$$\det \left[D(\eta_B) + \alpha \left(\Delta Z - w w^T \right) \right] = 0.$$

Обе матрицы $D(\eta_B)$ и $G = \Delta Z - w w^T$ симметрические, матрица $D(\eta_B)$ положительно определена, поэтому они приводятся конгруэнтным преобразованием к диагональному виду с помощью некоторой невырожденной матрицы P, а именно, $D(\eta_B) = P P^T$, $G = P D(\lambda) P^T$.

Если у вектора $\lambda = [\lambda^1, \dots, \lambda^r]^T$ хотя бы одна компонента отрицательна, то $\bar{\alpha}$ конечно и равняется $\bar{\alpha} = -\lambda_*^{-1}$, где λ_* — максимальная по модулю компонента из всех отрицательных компонент λ. В противном случае мы приходим к ситуации, когда в задаче (4.1.1) нет решения.

Рассмотрим вопрос о сходимости метода, предполагая, что задача (4.1.1) имеет решение. Считаем также дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения θ^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение и все точки траектории являются либо регулярными крайними точками, либо квазирегулярными.

Теорема 4.1.1. *Пусть задача* (4.1.1) *является квазирегулярной. Пусть, кроме того, начальная точка* $X_0 \in \mathcal{F}_P$ *такова, что множество*

$$\mathcal{F}_P(X_0) = \{X \in \mathcal{F}_P : \ C \bullet X \leq C \bullet X_0\}$$

ограничено. Тогда симплекс-метод порождает последовательность точек $\{X_k\} \subset \mathcal{F}_P(X_0)$, *которая либо конечна и тогда последняя точка есть решение задачи. Либо последовательность* $\{X_k\}$ — *бесконечная и тогда любая ее предельная точка также является решением задачи.*

Доказательство. Если последовательность $\{X_k\}$ конечная, т.е. метод останавливается на некотором k-м шаге, то это может произойти только в том случае, когда после вычисления u_k получаем, что у матрицы $V_k = V(u_k)$ нет отрицательных собственных значений, т.е. пара $[u_k, V_k]$ является допустимой в двойственной задаче. Но тогда выполняются условия оптимальности (4.1.5), из которых следует, что X_k — решение задачи (4.1.1).

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{X_k\}$ бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $X_{k_s} \to \bar{X}$. В силу сделанных предположений о задаче и правила выбора шага α_k в любом случае, является ли крайняя точка X_k ранга r регулярной или нет, следующая точка X_{k+1} также будет сильно невырожденной крайней точкой, причем того же ранга r.

У последовательности $\{X_{k_s}\}$ все соответствующие матрицы Q_B из разложения (4.1.4) имеют одну и ту же норму Фробениуса, а именно, $\|Q_B\|_F = \left(\mathrm{tr}\ Q_B^T Q_B\right)^{1/2} = \sqrt{r}$, т.е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{X_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы Q_B также сходятся к некоторой матрице $\bar{Q}_B$ такой, что $\bar{Q}_B^T \bar{Q}_B = I_r$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{X_{k_s}\}$ обладает этим свойством.

Если обратиться к матрице $\left(\mathcal{A}_{svec}^{\bar{Q}_B}\right)^T$, входящую в систему (4.1.6) для определения вектора двойственных переменных $\bar{u}$ в точке $\bar{X}$, то поскольку точка $\bar{X}$ сильно невырожденная, матрица $\left(\mathcal{A}_{svec}^{\bar{Q}_B}\right)^T$ будет иметь полный ранг, совпадающий с рангом по столбцам. Отсюда с учетом непрерывности соответствующих векторов $\mathrm{svec}\, C^{Q_B}$ приходим к выводу, что решения системы (4.1.6), а именно, векторы двойственных переменных u_{k_s}, определяемые либо формулой (4.1.7), либо формулой (4.1.15), сходятся к $\bar{u}$.

Определим матрицу $\bar{V} = V(\bar{u})$. Данная матрица $\bar{V}$ должна быть положительно полуопределенной. В самом деле, если допустить противное, то у $\bar{V}$ имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц V_{k_s}, достаточно близких к $\bar{V}$, также существуют отрицательные собственные числа. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек X_{k_s} в последующие точки X_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с уменьшением значения целевой функции на величину $\alpha_{k_s}\theta^{k_s}$. Однако, шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю, так как из (4.1.13) или (4.1.27) следует, что матрицы Δ_{k_s} ограничены по норме на $\mathcal{F}_P(X_0)$. Поэтому на некоторой k_s-й итерации обязательно получим, что $C \bullet X_{k_s+1} < C \bullet \bar{X}$, что в силу монотонного убывания значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{X_{k_s}\}$ к $\bar{X}$. ■

Можно показать, что если задачи (4.1.1) и (4.1.2) достаточно хорошие, а именно: они невырожденные и их решения строго комплементарные, то ограниченное множество $\mathcal{F}_P(X_0)$ из условий теоремы 4.1.1 существует по крайней мере для X_0 достаточно близких к единственному решению X_* задачи (4.1.1).

Отметим также, что в предложенном обобщении симплекс-метода в ходе итерационного процесса выполняются все три равенства, входящие в условия оптимальности (4.1.5), а также неравенство $X \succeq 0$. Не выполняется только неравенство $V \succeq 0$. Цель проведения итераций — добиться его удовлетворения по меньшей мере в пределе.

4.2. Двойственный симплекс-метод

Рассмотрим вариант двойственного симплекс-метода, который можно рассматривать как обобщение двойственного симплекс-метода для линейного программирования. Метод строится с использованием условий оптимальности (4.1.5), однако теперь в отличие от прямого симплекс-метода применяется другой способ решения системы (4.1.5). В двойственном методе итерационный процесс изначально предназначен для решения двойственной задачи (4.1.2) и проводится в пространстве двойственной переменной $\mathbb{R}^m$, причем все точки итерационного процесса принадлежат границе допустимого множества $\mathcal{F}_{D,u}$ задачи (4.1.2) и являются крайними точками этого множества.

Возьмем точку $u \in \mathcal{F}_{D,u}$, которой соответствует двойственная невязка $V = V(u)$. Пусть $\mathrm{rank} V = s$. Для того, чтобы u была *крайней* точкой множества $\mathcal{F}_{D,u}$, необходимо, чтобы ранг матрицы V удовлетворял неравенству $s_\triangle \le n_\triangle - m$. Поскольку здесь присутствуют "треугольные" числа, может оказаться, что для конкретных n и m из постановки задачи (4.1.1), данное неравенство выполняется только как строгое. Назовем крайнюю точку u *регулярной*, если $s_\triangle = n_\triangle - m$. Иначе, когда $s_\triangle < n_\triangle - m$, крайнюю точку u назовем *нерегулярной*.

Итерация в регулярной точке. Пусть задана начальная крайняя точка $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ и строится последовательность крайних точек $\{u_k\}$, причем таким образом, что соответствующие значения целевой функции в задаче (4.1.2) монотонно возрастают от итерации к итерации.

Предположим, что $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ — текущая крайняя точка, в которой матрица двойственной невязки $V = V(u)$ имеет ранг $s < n$. Для матрицы V справедливо разложение $V = HD(\theta)H^T$, где H — ортогональная матрица, θ — вектор собственных значений V. Так как V — матрица неполного ранга, то матрицу H и вектор θ можно разбить на две части в соответствии с нулевыми и положительными собственными значениями V. Считаем для определенности, что это разбиение имеет вид:

$$H = [H_B,\ H_N], \quad \theta = [\theta_B, \theta_N], \quad \theta_B = 0_r, \quad \theta_N > 0_s, \quad r = n - s. \tag{4.2.1}$$

В соответствии с (4.2.1) разложим пространство $\mathbb{S}^n$ на два линейных подпространства $\mathbb{S}^n_B$ и $\mathbb{S}^n_N$. Второе подпространство $\mathbb{S}^n_N$ состоит из таких матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых только правый нижний блок порядка s может содержать ненулевые элементы. Первое подпространство $\mathbb{S}^n_B$, напротив, состоит из матриц $M \in \mathbb{S}^n$, у которых правый нижний блок нулевой. Эти два подпространства ортогональны друг другу, и любую матрицу $M \in \mathbb{S}^n$ можно представить как $M = M_1 + M_2$, где $M_1 \in \mathbb{S}^n_B$, $M_2 \in \mathbb{S}^n_N$.

Если перейти от матрицы V к матрице $V^H = H^T V H$, т.е. к представлению V в базисе, задаваемом столбцами ортогональной матрицы H, то для V^H получаем: $V^H = V^H_B + V^H_N$, где

$$V^H_B = H^T V_B H = 0_{nn}, \quad V^H_N = H^T V_N H = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & D(\theta_N) \end{bmatrix}. \tag{4.2.2}$$

Аналогичные образом будем поступать и с другими матрицами X, C и A_i, $1 \le i \le m$, т.е. переходить от них к матрицам $X^H = H^T X H$, $C^H = H^T C H$, $A^H_i = H^T A_i H$, разбивая каждую из них на две составляющие матрицы, например: $X^H = X^H_B + X^H_N$, где

$$X^H_B = \begin{bmatrix} H^T_B X H_B & H^T_B X H_N \\ H^T_N X H_B & 0_{rr} \end{bmatrix}, \quad X^H_N = \begin{bmatrix} 0_{ss} & 0_{sr} \\ 0_{rs} & H^T_N X H_N \end{bmatrix}.$$

Матрица X_B^H оказывается матрицей окаймления, если ее внедиагональные блоки ненулевые. Точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ крайняя в том и только том случае, когда матрицы $A_{i,B}^H$, $1 \le i \le m$, линейно независимы.

Поскольку $X \bullet V = \mathrm{tr}\ V^H X^H = V^H \bullet X^H$, то первое равенство из (4.1.5) может быть переписано как

$$\langle \mathrm{svec}\, X,\ \mathrm{svec}\, V\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X^H,\ \mathrm{svec}\, V^H\rangle = 0.$$

Кроме того, данное равенство эквивалентно следующему

$$\langle \mathrm{svec}\, X^H,\ \mathrm{svec}\, V^H\rangle = \langle \mathrm{svec}\, X_B^H,\ \mathrm{svec}\, V_B^H\rangle + \langle \mathrm{svec}\, X_N^H,\ \mathrm{svec}\, V_N^H\rangle = 0. \tag{4.2.3}$$

Если учесть, что в точке u соответствующие матрицы V_B^H и V_N^H имеют вид (4.2.2), то вектор $\mathrm{svec}\, V_B^H$ нулевой, а вектор $\mathrm{svec}\, V_N^H$ равняется $\mathrm{svec}\, D(\theta)$, т.е. у него первые $n_\triangle - s_\triangle$ компоненты также нулевые. Поэтому равенство (4.2.3) заведомо будет выполняться, если матрица X^H такова, что соответствующая матрица X_N^H нулевая. Число $n_\triangle - s_\triangle$ играет важную роль и всюду ниже обозначается как l.

Пусть u не является оптимальным решением в двойственной задаче (4.1.2) и нам желательно перейти в новую крайнюю точку $\bar{u}$ с большим значением целевой функции. Считаем сначала для простоты, что u — регулярная крайняя точка. В этом случае $m = l$.

Наряду с разбиением матрицы $M \in \mathbb{S}^n$ на компоненты $M_B \in \mathbb{S}^n_B$ и $M_N \in \mathbb{S}^n_N$ нам потребуется разбиение вектора $\mathrm{svec}\, M$ на два подвектора, а именно: $\mathrm{svec}\, M = [\mathrm{svec}_B M,\ \mathrm{svec}_N M]^T$, где первая компонента $\mathrm{svec}_B M$ имеет размерность l, вторая компонента $\mathrm{svec}_N M$ — размерность $s_\triangle$. В частности, $\mathrm{svec}\, V^H = \left[\mathrm{svec}_B V^H,\ \mathrm{svec}_N V^H\right]^T$, причем с учетом регулярности точки u справедливы равенства

$$\mathrm{svec}_B V^H = \mathrm{svec}_B V_B^H = 0_m, \quad \mathrm{svec}_N V^H = \mathrm{svec}_N V_N^H = \mathrm{svec}\, D(\theta_N). \tag{4.2.4}$$

Пусть $\mathcal{A}_{svec}^H$ — $(m \times n_\triangle)$-матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{svec}\, A_i^H$, $1 \le i \le m$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ — подматрица матрицы $\mathcal{A}_{svec}^H$, состоящая из ее первых m столбцов, т.е. из строк $\mathrm{svec}_B A_i^H$. Второе равенство из условий оптимальности (4.1.5) с использованием введенных обозначений может быть переписано в эквивалентной векторной форме как $\mathcal{A}_{svec}^H \mathrm{svec}\, X^H = b$. Если теперь потребовать, чтобы $\mathrm{svec}_N X^H = 0_{s_\triangle}$, то данное равенство сведется к системе линейных уравнений относительно вектора $\mathrm{svec}_B X^H$:

$$\mathcal{A}_{svec_B}^H \mathrm{svec}_B X^H = b. \tag{4.2.5}$$

Так как u — крайняя точка, то матрица этой системы неособая. Поэтому, разрешая систему (4.2.5), получаем

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-1} b. \tag{4.2.6}$$

Для всей матрицы $X^H \in \mathbb{S}^n$ векторное представление следующее

$$\mathrm{svec}\, X^H = \mathrm{svec}\, X^H_B = \begin{bmatrix} \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-1} b \\ 0_{s_\triangle} \end{bmatrix}.$$

Отсюда, в частности, следует, что у матрицы X^H правый нижний блок порядка s нулевой. Поэтому у нее обязательно найдутся отрицательные собственные значения, если она оказывается матрицей окаймления.

В случае, когда матрица X^H, а следовательно и подобная ей матрица X, — положительно полуопределенная, получаем, что точка u вместе с соответствующей слабой двойственной переменной $V(u)$ составляют решение двойственной задачи (4.1.2), поскольку выполнены все условия оптимальности (4.1.5). Точка X будет решением исходной задачи (4.1.1).

Далее предполагаем, что X не является положительно полуопределенной матрицей. Обратимся к ее разложению $X = QD(\eta)Q^T$, где Q — ортогональная матрица, η — вектор собственных значений матрицы X, совпадающих с собственными значениями матрицы $X^H = X^H_B$. Проводя векторизацию матрицы X, с помощью формулы

$$\mathrm{vec}\ M_1M_2M_3 = (M_3^T \otimes M_1)\, \mathrm{vec}\ M_2, \tag{4.2.7}$$

получаем

$$\mathrm{svec}\, X = \tilde{\mathcal{L}}_n(Q \otimes Q)\, \mathrm{vec}\ D(\eta) = \tilde{\mathcal{L}}_n(Q \otimes Q)\tilde{\mathcal{D}}_n\, \mathrm{svec}\, D(\eta).$$

Пусть q_i, $1 \le i \le n$ — столбцы ортогональной матрицы Q (собственные векторы матрицы X). Тогда X можно записать также в следующем матричном и векторном виде:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i q_i q_i^T, \qquad \mathrm{vec}\ X = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \left(q_i \otimes q_i\right). \tag{4.2.8}$$

Предположим, что η^k — отрицательное собственное значение матрицы X и q_k — соответствующий собственный вектор. Перейдем в новую точку $\bar{u}$, положив

$$\bar{u} = u - \alpha \Delta u, \tag{4.2.9}$$

где $\alpha > 0$. От вектора $\Delta u \in \mathbb{R}^m$ потребуем, чтобы он удовлетворял системе линейных уравнений

$$\left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \Delta u = \mathrm{svec}_B\, Q^H_k. \tag{4.2.10}$$

Здесь и ниже: $Q^H_k = H^T Q_k H$, $Q_k = q_k q_k^T$. Симметричная матрица Q_k положительно полуопределенная и имеет единичный ранг.

Поскольку матрица $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ неособая, то разрешая данную систему, находим

$$\Delta u = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \mathrm{svec}_B\, Q^H_k, \tag{4.2.11}$$

где используется условное обозначение $M^{-T} = (M^T)^{-1}$.

Утверждение 4.2.1. *Вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, порожденному столбцами матрицы H_N.*

Доказательство. В самом деле, если допустить, что $q_k = H_N z$ для некоторого ненулевого вектора $z \in \mathbb{R}^s$, то должно выполняться $Xq_k = XH_N z = \eta^k H_N z$. Отсюда после умножения этого равенства слева на матрицу H_N^T получаем $H_N^T X H_N z = \eta^k z$, что невозможно, поскольку матрица $H_N^T X H_N$ нулевая. ■

Замечание. *Так как ненулевой вектор q_k не принадлежит подпространству $\mathcal{R}(H_N)$, то его можно представить в виде*

$$q_k = H_B q_k^{H_B} + H_N q_k^{H_N}, \tag{4.2.12}$$

причем обязательно $q_k^{H_B} = H_B^T q_k \neq 0_r$. Если $q_k^{H_N} = H_N^T q_k = 0_s$, то $q_k = H_B q_k^{H_B}$ и матрица Q_k оказывается принадлежащей грани $\mathcal{G}^*_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$, которая является сопряженной к минимальной грани $\mathcal{G}_{min}(V; \mathbb{S}^n_+)$ конуса $\mathbb{S}^n_+$, содержащей точку $V = V(u)$.

Рассмотрим вопрос о том, как изменится значение целевой функции в двойственной задаче (4.1.2) при переходе в новую точку $\bar{u}$.

Утверждение 4.2.2. *Имеет место следующая формула для приращения значения целевой функции в двойственной задаче*

$$\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\eta^k > \langle b, u\rangle. \tag{4.2.13}$$

Доказательство. Согласно формуле пересчета (4.2.9) значение целевой функции в новой точке $\bar{u}$ равно $\langle b, \bar{u}\rangle = \langle b, u\rangle - \alpha\langle b, \Delta u\rangle$. Но

$$\langle b, \Delta u\rangle = \langle b, \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-T} \mathrm{svec}_B\, Q^H_k\rangle = \langle \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^{-1} b, \mathrm{svec}_B\, Q^H_k\rangle =$$
$$= \langle \mathrm{svec}_B X^H_B,\ \mathrm{svec}_B\, Q^H_k\rangle = \langle \mathrm{svec} X^H_B, \mathrm{svec}\, Q^H_k\rangle = \langle \mathrm{vec}\ X^H_B, \mathrm{vec}\, Q^H_k\rangle.$$

Здесь мы учли, что у вектора $\text{svec}X_B^H$ последние $s_\triangle$ компоненты нулевые.

Поскольку $X_B^H = X^H$, то согласно (4.2.8) $X^H = \sum_{i=1}^m \eta^i Q_i^H$, где $Q_i^H = H^T q_i q_i^T H$. Тогда, используя (4.2.7), получаем:

$$\text{vec}X_B^H = (H^T \otimes H^T) \sum_{i=1}^m \eta^i \,\text{vec}\,(q_i q_i^T) = (H \otimes H)^T \sum_{i=1}^m \eta^i (q_i \otimes q_i).$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\text{vec}\; Q_k^H = (H \otimes H)^T (q_k \otimes q_k)$, приходим к $\langle \text{vec}\; X_B^H, \text{vec}\; Q_k^H \rangle = \eta^k$. Таким образом, выполнено (4.2.13). ■

Введем в рассмотрение матрицу $\Delta V^H = \sum_{i=1}^m (\Delta u)^i A_i^H$ и разобьем ее на две составляющие матрицы: $\Delta V^H = \Delta V_B^H + \Delta V_N^H$. Для первой матрицы ΔV_B^H получаем

$$\text{svec}_B \Delta V_B^H = \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^T \Delta u = \text{svec}_B\, Q_k^H. \tag{4.2.14}$$

Поскольку правый нижний блок у матриц $A_{i,B}$, $1 \le i \le m$, нулевой, то из (4.2.14) следует, что $\Delta V_B^H = (Q_k^H)_B$. Отметим, что у матрицы $(Q_k^H)_B$ правый нижний блок также нулевой.

Вычислим далее ΔV_N^H. Снова проводя векторизацию, получаем

$$\text{svec}_N\, \Delta V_N^H = \left(\mathcal{A}_{svec_N}^H\right)^T \Delta u = \left(\mathcal{A}_{svec_N}^H\right)^T \left(\mathcal{A}_{svec_B}^H\right)^{-T} \text{svec}_B\, Q_k^H. \tag{4.2.15}$$

Формуле пересчета (4.2.9) соответствует формула пересчета слабой двойственной переменной

$$\bar{V}^H(\alpha) = V^H(\bar{u}) = V^H(u) + \alpha \Delta V^H. \tag{4.2.16}$$

Утверждение 4.2.3. *Существует $\bar{\alpha} > 0$ такое, что $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ для любого $0 < \alpha \le \bar{\alpha}$.*

Доказательство. Воспользуемся представлением (4.2.12) вектора q_k. Тогда вектор $q_k^H = H^T q_k$ разбивается на два подвектора $q_k^H = \left[q_k^{H_B}, q_k^{H_N}\right]^T$, где $q_k^{H_B} \in \mathbb{R}^r$, $q_k^{H_N} \in \mathbb{R}^s$, причем $q_k^{H_B} \ne 0_r$. Представим также матрицу-приращение ΔV^H в блочном виде

$$\Delta V^H = \begin{bmatrix} \Omega_{BB} & \Omega_{BN} \\ \Omega_{NB} & \Omega_{NN} \end{bmatrix},$$

в которой диагональные блоки Ω_{BB} и Ω_{NN} имеют соответственно порядки r и s.

Так как $\Delta V_B^H = (Q_k^H)_B$, то $\Omega_{BB} = q_k^{H_B}(q_k^{H_B})^T$ и $\Omega_{BN} = (\Omega_{NB})^T = q_k^{H_B}(q_k^{H_N})^T$. Матрица Ω_{NN} имеет векторное представление (4.2.15). Поэтому согласно (4.2.2) и (4.2.16)

$$\bar{V}^H(\alpha) = \left[\begin{array}{cc} \alpha q_k^{H_B}\left(q_k^{H_B}\right)^T & \alpha q_k^{H_B}\left(q_k^{H_N}\right)^T \\ \alpha q_k^{H_N}\left(q_k^{H_B}\right)^T & D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN} \end{array} \right]. \tag{4.2.17}$$

Добавляя и вычитая в правом нижнем блоке матрицу $\alpha q_k^{H_N}(q_k^{H_N})^T$, получаем еще одно представление матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, а именно:

$$\bar{V}^H(\alpha) = \alpha Q_k^H + \left[\begin{array}{cc} 0_{rr} & 0_{rs} \\ 0_{sr} & D(\theta_N) + \alpha\tilde{\Omega}_{NN} \end{array} \right], \tag{4.2.18}$$

где $\tilde{\Omega}_{NN} = \Omega_{NN} - q_k^{H_N}(q_k^{H_N})^T$.

Матрица единичного ранга Q_k^H является положительно полуопределенной. Кроме того, принимая во внимание, что $\theta_N > 0_s$, приходим к выводу, что правая нижняя подматрица $\tilde{Y}_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\tilde{\Omega}_{NN}$ во второй матрице в (4.2.18) будет оставаться положительно определенной при α достаточно малом. Следовательно, можно указать такое $\bar{\alpha} > 0$, для которого $\bar{V}^H(\alpha) \succeq 0$ для всех $0 < \alpha \leq \bar{\alpha}$. ■

Замечание. *Если матрица Ω_{NN} такова, что $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H_N}(q_k^{H_N})^T$, то матрица $\tilde{\Omega}_{NN}$, а следовательно и матрица $\tilde{Y}_{NN}(\alpha)$, являются положительно полуопределенными для всех $\alpha > 0$. В этом случае двойственная задача* (4.1.2) *не имеет решения.*

Предположим далее, что у матрицы $\tilde{\Omega}_{NN}$ имеются отрицательные собственные значения, т.е. неравенство $\Omega_{NN} \succeq q_k^{H,N}(q_k^{H,N})^T$ не выполняется. В этом случае верхняя оценка на максимальное $\bar{\alpha}$, сохраняющее положительную полуопределенность матрицы $\bar{V}^H(\alpha)$, получается как то минимальное α, при котором впервые у матрицы $\tilde{Y}_{NN}(\alpha)$ появляется нулевое собственное значение.

Можно уточнить оценку на максимально возможное $\bar{\alpha}$. В самом деле, опять из-за того, что $\theta_N > 0_s$, правая нижняя матрица $Y_{NN}(\alpha) = D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}$ остается положительно определенной при α достаточно малом. Поэтому вся матрица $\bar{V}^H(\alpha)$, как видно из (4.2.17), будет положительно полуопределенной, если дополнение по Шуру матрицы $Y_{NN}(\alpha)$, т.е. матрица

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha \Big\{ & q_k^{H_B}\left(q_k^{H_B}\right)^T - \\ & -\alpha\, q_k^{H_B}\left(q_k^{H_N}\right)^T \left[D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}\right]^{-1} q_k^{H_N}\left(q_k^{H_B}\right)^T \Big\} \end{aligned}$$

также является положительно полуопределенной.

Понятно, что это условие выполняется, если вектор $q_k^{H,N}$ нулевой. Матрица $\bar{V}^H$ в этом случае становится блочно-диагональной. Далее считаем, что $q_k^{H_N}$ отличен от нулевого вектора. Обозначая $p(\alpha) = \left(q_k^{H_N}\right)^T [D(\theta_N) + \alpha\Omega_{NN}]^{-1} q_k^{H_N}$, получаем, что

$$\bar{Y}_{NN}(\alpha) = \alpha \left[1 - \alpha p(\alpha)\right] q_k^{H_B} \left(q_k^{H_B}\right)^T.$$

Матрица $\bar{Y}_{NN}$ также остается положительно полуопределенной при α достаточно малом. Отсюда делаем вывод, что $\bar{\alpha}$ определяется из двух условий. Первое условие — это то минимальное α (обозначим его $\bar{\alpha}_1$), при котором у матрицы $Y_{NN}(\alpha)$ впервые появляется нулевое собственное значение. Второе условие заключается в выполнении неравенства $\alpha \le p(\alpha)^{-1}$. Если оказывается, что оно впервые нарушается при некотором $\bar{\alpha}_2 < \bar{\alpha}_1$, то верхняя оценка на $\bar{\alpha}$ следующая: $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_2$. Иначе $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1$.

Итерация в нерегулярной точке. Предположим теперь, что точка $u \in \mathcal{F}_{D,u}$ является нерегулярной, т.е. ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет строгому неравенству $s_\triangle < n_\triangle - m$. В этом случае система (4.2.5) становится недоопределенной. Возьмем тогда в качестве $\mathrm{svec}_B X^H$ решение (4.2.5) с минимальной нормой

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B} \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b. \tag{4.2.19}$$

Оно принадлежит пространству строк матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Общее решение системы (4.2.5) имеет следующий вид:

$$\mathrm{svec}_B X^H = \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T \left[\mathcal{A}^H_{svec_B} \left(\mathcal{A}^H_{svec_B}\right)^T\right]^{-1} b + g,$$

где g — произвольный вектор, принадлежащий нуль-пространству матрицы $\mathcal{A}^H_{svec_B}$. Если $m + p = l$, то размерность нуль-пространства $\mathcal{A}^H_{svec_B}$ равняется p. Ниже считаем, что $p < s$. Такие нерегулярные точки u, в которых ранг s матрицы $V(u)$ удовлетворяет неравенству $s_\triangle + s > n_\triangle - m$, назовем *квазирегулярными*.

Рассмотрим матрицу $X = H^T X^H H$. Она подобна матрице $X^H = X^H_B$, вектор $\mathrm{svec}_B X^H$ которой определяется равенством (4.2.19). Пусть η^k — отрицательное собственное значение матрицы X, ему соответствует собственный вектор q_k. Как и в регулярной точке u, вектор q_k не принадлежит линейному подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Система (4.2.10) для определения направления Δu в этом случае становится переопределенной. Поэтому рассмотрим другой более общий способ нахождения Δu. Перейдем от Δu к направлению ΔV в V-пространстве, которое будем искать в следующем виде:

$$\Delta V = [q_k \ H_N] \begin{bmatrix} 1 & w^T \\ w & \Delta Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_k^T \\ H_N^T \end{bmatrix} = Q_k + q_k w^T H_N^T + H_N w q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T. \tag{4.2.20}$$

Здесь $\Delta Z \in \mathbb{S}^s$, $w \in \mathbb{R}^s$.

Потребуем, чтобы вектор w выбирался следующим образом: $w = Wy$, где все столбцы $w_j \in \mathbb{R}^s$, $1 \leq j \leq p$, линейно независимы, $y \in \mathbb{R}^p$. Кроме того, потребуем, чтобы векторы $h_{w_j} = H_N w_j$, $1 \leq j \leq p$, были ортогональны вектору q_k, т.е.

$$\langle q_k, h_{w_j} \rangle = \langle H_N^T q_k, w_j \rangle = 0, \quad 1 \leq j \leq p. \tag{4.2.21}$$

Все векторы h_{w_j}, $1 \leq j \leq p$, принадлежат подпространству $\mathcal{R}(H_N)$.

Наряду с (4.2.20) имеет место связь между ΔV и Δu, а именно: $\Delta V = \sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i$. Приравнивая между собой это представление для ΔV и (4.2.20), приходим к к равенству

$$\sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i = Q_k + q_k y^T W^T H_N^T + H_N W y q_k^T + H_N \Delta Z H_N^T.$$

Проведем его векторизацию. Предварительно обозначим для сокращения записи:

$$W_N = H_N W, \quad U_{W_N, q_k} = W_N \otimes q_k + q_k \otimes W_N, \quad \mathcal{H}_N = H_N \otimes H_N.$$

Тогда с учетом того, что $\mathrm{vec}\ y^T = \mathrm{vec}\ y = y$, получаем

$$\mathcal{A}_{vec}^T \Delta u - U_{W_N, q_k} y - \mathcal{H}_N \,\mathrm{vec}\, \Delta Z = \mathrm{vec}\, Q_k. \tag{4.2.22}$$

Перепишем далее равенство (4.2.22) в базисе, задаваемом ортогональной матрицей H. Для этого умножим его слева на матрицу $(H \otimes H)^T = H^T \otimes H^T$. Так как

$$(H^T \otimes H^T)(H_N \otimes H_N) = \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(rn)s^2} \\ \mathrm{Diag}\left(\begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0_{rs} \\ I_s \end{bmatrix} \right) \end{bmatrix} \tag{4.2.23}$$

и

$$U_{W_N, q_k}^H = (H^T \otimes H^T) U_{W_N, q_k} = W_N^H \otimes q_k^H + q_k^H \otimes W_N^H,$$

где $q_k^H = H^T q_k$, $W_N^H = H^T W_N$, то имеем

$$(\mathcal{A}_{vec}^H)^T \Delta u - \left\{ U_{W_N,q_k}^H y + \Gamma^H \operatorname{vec} \Delta Z \right\} = \operatorname{vec} Q_k^H. \qquad (4.2.24)$$

Здесь Γ^H — матрица, стоящая в правой части (4.2.23).

Столбцы матрицы U_{W_N,q_k}^H и Γ^H соответствуют симметричным матрицам (в случае матрицы Γ^H единственные единичные элементы в столбце стоят на позициях диагональных элементов). В силу указанного обстоятельства систему (4.2.24) можно переписать следующим образом:

$$(\mathcal{A}_{svec}^H)^T \Delta u - \tilde{U}_{W_N,q_k}^H y - \tilde{\Gamma}^H \operatorname{svec} \Delta Z = \operatorname{svec} Q_k^H, \qquad (4.2.25)$$

где $\tilde{U}_{W_N,q_k}^H = \tilde{\mathcal{L}}_n U_{W_N,q_k}^H$, $\tilde{\Gamma}^H = \tilde{\mathcal{L}}_n \Gamma^H \tilde{\mathcal{D}}_s$. Заметим, что матрица $\tilde{\Gamma}^H$ размера $n_\triangle \times s_\triangle$ такова, что ее верхняя подматрица размера $l \times s_\triangle$ нулевая.

Система (4.2.25) есть система $n_\triangle$ линейных уравнений относительно $n_\triangle$ переменных: Δu, y и $\operatorname{svec} \Delta Z$. Если матрица этой системы

$$\mathcal{M} = \left[(\mathcal{A}_{svec}^H)^T \vdots - \tilde{U}_{W_N,q_k}^H \vdots - \tilde{\Gamma}^H \right]$$

неособая, то она имеет единственное решение. Предположим далее, что матрица $\mathcal{M}$ неособая. Так как матрицы A_i, $1 \le i \le m$, линейно независимы, то матрица $\mathcal{A}_{svec}^H$ имеет полный ранг, равный m. Более того, поскольку u — крайняя точка множества $\mathcal{F}_{D,u}$, матрица $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ размера $m \times l$ также имеет ранг m, т.е. полный ранг по строкам.

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольная матрица размера $p \times l$, строками которой являются линейно независимые векторы из нуль-пространства матрицы $\mathcal{A}_{svec_B}^H$. Составим с использованием матриц $\mathcal{A}_{svec_B}^H$ и $\mathcal{K}$ квадратную матрицу

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} \bar{\mathcal{A}}_{svec_B}^H & 0_{(n_\triangle - s_\triangle)s_\triangle} \\ 0_{s_\triangle(n_\triangle - s_\triangle)} & I_{s_\triangle} \end{bmatrix}, \qquad \bar{\mathcal{A}}_{svec_B}^H = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{svec_B}^H \\ \mathcal{K} \end{bmatrix},$$

причем матрица $\bar{\mathcal{A}}_{svec_B}^H$ по своему определению является неособой. Если умножить систему (4.2.25) слева на неособую матрицу $\mathcal{Q}$, то ее решение не изменится.

Обозначим через $\tilde{U}_{W_N,q_k}^{H_B}$ верхнюю подматрицу матрицы $\tilde{U}_{W_N,q_k}^H$ размера $l \times p$. Имеем после умножения (4.2.25) на первую строку матрицы $\mathcal{Q}$:

$$\mathcal{W}\Delta u = \mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k} y + \mathrm{svec}_B Q^H_k\right], \quad \mathcal{K}\left[\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k} y + \mathrm{svec}_B Q^H_k\right] = 0_p, \tag{4.2.26}$$

где $\mathcal{W} = \mathcal{A}^H_{svec_B}(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T$.

Квадратная матрица $\mathcal{W}$ порядка m неособая. Поэтому

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k} y + \mathrm{svec}_B Q^H_k\right]. \tag{4.2.27}$$

Если квадратная матрица $\mathcal{K}\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}$ порядка p неособая, то разрешая вторую систему (4.2.26), получаем $y = -\left(\mathcal{K}\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}\mathrm{svec}_B Q^H_k$. После подстановки найденного y в выражение (4.2.27) для Δu приходим к

$$\Delta u = \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\mathrm{svec}_B Q^H_k, \quad \mathcal{P} = \tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}\left(\mathcal{K}\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}\right)^{-1}\mathcal{K}. \tag{4.2.28}$$

Вычислим теперь изменение значения целевой функции в двойственной задаче (4.1.2) вдоль направления Δu.

Утверждение 4.2.4. *Пусть для столбцов w_j матрицы W, $1 \le j \le p$, выполняются равенства* (4.2.21)*. Тогда двойственная целевая функция в точке $\bar{u}$ принимает значение* (4.2.13)*.*

Доказательство. Имеем после подстановки Δu из (4.2.28)

$$\begin{gathered}\langle b, \Delta u\rangle = \langle b,\ \mathcal{W}^{-1}\mathcal{A}^H_{svec_B}\left[I_l - \mathcal{P}\right]\mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle = \\ = \langle(\mathcal{A}^H_{svec_B})^T\mathcal{W}^{-T}b,\ \mathrm{svec}_B Q^H_k - \mathcal{P}\mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle = \\ = \langle\mathrm{svec}_B X^H,\ \mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle - \langle\mathrm{svec}_B X^H, \mathcal{P}\mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle = \\ = \langle\mathrm{vec}X,\ \mathrm{vec}Q_k\rangle - \langle\mathrm{svec}_B X^H, \mathcal{P}\mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle = \\ = \eta^k - \langle\mathrm{svec}_B X^H, \mathcal{P}\mathrm{svec}_B Q^H_k\rangle.\end{gathered} \tag{4.2.29}$$

Рассмотрим более подробно матрицу $\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}$, предварительно уточнив вид матрицы $U^H_{W_N,q_k}$. Поскольку $W^H_N = [0_{rs} \vdots W]^T$, то i-й столбец матрицы $W^H_N \otimes q^H_k$ есть vec $\left[0_{nr} \vdots w_i \otimes q^H_k\right]$, $1 \le i \le p$. Поэтому у матрицы $W^H_N \otimes q^H_k$ верхняя подматрица размера $(rn) \times p$ нулевая. Следовательно, у матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n(W^H_N \otimes q^H_k)$ верхняя подматрица размера $l \times p$ также будет нулевой. Таким образом, матрица $\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}$ совпадает с верхней $(l \times p)$-подматрицей матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n(q^H_k \otimes W^H_N)$.

Вычислим p-мерный вектор $z = \left(\tilde{U}^{H_B}_{W_N,q_k}\right)^T \mathrm{svec}_B\, X^H$. Так как последние $s_\triangle$ элементы вектора svec X^H нулевые, то j-й элемент вектора

z равняется:

$$z^j = \langle \tilde{\mathcal{L}}_n \left(q_k^H \otimes (H^T H_N w_j) \right), \ \mathrm{svec}\, X^H \rangle = \langle q_k^H \otimes (H^T H_N w_j), \ \mathrm{vec}\ X^H \rangle =$$
$$= \langle (H \otimes H) \left((H^T q_k) \otimes (H^T H_N w_j) \right), \ \mathrm{vec}\ X \rangle = \langle q_k \otimes (H_N w_j), \ \mathrm{vec}\ X \rangle =$$
$$= (q_k \otimes (H_N w_j))^T \ \mathrm{vec}\ X = \left(q_k^T \otimes (H_N w_j)^T \right) \mathrm{vec}\ X.$$

Отсюда с учетом условия (4.2.21) и равенства $\mathrm{vec}\ X = \sum_{i=1}^n \eta^i (q_i \otimes q_i)$ получаем

$$z^j = \sum_{i=1}^n \eta^i \left(q_k^T \otimes (w_j^T H_N^T) \right) (q_i \otimes q_i) = \eta^k w_j^T H_N^T q_k = 0.$$

Следовательно $z = 0_p$, что приводит к равенству

$$\langle \mathrm{svec}_B\, X_B^H, \ \mathcal{P}\, \mathrm{svec}_B\, Q_k^H \rangle =$$
$$= \langle \left(\tilde{U}^{H_B}_{W_N, q_k} \right)^T \mathrm{svec}_B\, X_B^H, \left(\mathcal{K} \tilde{U}^{H_B}_{W_N, q_k} \right)^{-1} \mathcal{K}\, \mathrm{svec}_B\, Q_k^H \rangle = 0.$$

Тогда на основании (4.2.29) убеждаемся в справедливости утверждения. ■

Рассмотрим вопрос о сходимости метода. Мы скажем, что задача (4.1.2) *квазирегулярная*, если все крайние точки из $\mathcal{F}_{D,u}$ регулярные или квазирегулярные. Предполагаем дополнительно, что в качестве отрицательного собственного значения η^k на каждом шаге берется максимальное по модулю значение.

Теорема 4.2.1. *Пусть задача* (4.1.2) *является квазирегулярной, и пусть начальная точка* $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}$ *такова, что множество* $\mathcal{F}_{D,u}(u_0) = \{u \in \mathcal{F}_{D,u} : \ \langle b, u \rangle \geq \langle b, u_0 \rangle\}$ *ограничено. Тогда двойственный симплекс-метод порождает последовательность точек* $\{u_k\} \subset \mathcal{F}_{D,u}(u_0)$*, которая либо конечна и тогда последняя точка есть решение* (4.1.2)*. Либо последовательность* $\{u_k\}$ *— бесконечная и тогда любая ее предельная точка также является решением* (4.1.2)*.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением только случая, когда последовательность $\{u_k\}$ бесконечная. Так как она ограниченная, то у нее существуют предельные точки. Пусть $u_{k_s} \to \bar{u}$. Точка $\bar{u}$ является крайней.

Последовательности $\{u_k\}$ соответствует последовательность матриц $\{V_k\}$, где $V_k = V(u_k)$. Ранг таких матриц в крайних точках ограничен. Это приводит к тому, что все соответствующие матрицы H_N также ограничены по норме (Фробениуса), т.е. принадлежат компактному множеству. Поэтому из $\{V_{k_s}\}$ можно извлечь подпоследовательность, для которой матрицы H_N сходятся к некоторой матрице $\bar{H}_N$. Не умаляя общности, считаем, что сама последовательность $\{V_{k_s}\}$ обладает этим свойством и ранг у всех матриц H_N один и тот же. Обозначим через $\bar{H}$ ортогональную матрицу, у которой вторая компонента есть $\bar{H}_N$.

Если обратиться к матрице $\mathcal{A}^{\bar{H}}_{svec_B}$, входящую в систему (4.2.5) для определения вектора $\mathrm{svec}_B X^{\bar{H}}$ в точке $\bar{u}$, то поскольку $\bar{u}$ — крайняя точка, данная матрица имеет полный ранг, совпадающий с рангом по строкам. Отсюда приходим к выводу, что решения системы (4.2.5), а именно, векторы $\mathrm{svec}_B X^{H_{k_s}}$, определяемые либо (4.2.6), либо (4.2.19), сходятся к $\mathrm{svec}_B \bar{X}^{\bar{H}}$.

Матрица $\bar{X}$ должна быть положительно полуопределенной, так как иначе у $\bar{X}$ имеется отрицательное собственное значение. Но собственные значения матриц непрерывны по Липшицу. Поэтому у матриц X_{k_s}, достаточно близких к $\bar{X}$, также существуют отрицательные собственные значения. Отсюда следует, что на этих итерациях должен осуществляться переход из точек u_{k_s} в последующие точки u_{k_s+1} с шагом α_{k_s} и с увеличением значения целевой функции на величину $-\alpha_{k_s}\bar{\eta}_{k_s}$, где $\bar{\eta}_{k_s}$ — максимальная по модулю отрицательная компонента вектора η_{k_s}. Однако из-за ограниченности векторов Δu_k шаги α_{k_s} не могут стремиться к нулю. Поэтому на некоторой k_s-й итерации обязательно получим, что $\langle b, u_{k_s+1}\rangle > \langle b, \bar{u}\rangle$, что в силу монотонного увеличения значений целевой функции вдоль траектории противоречит сходимости $\{u_{k_s}\}$ к $\bar{u}$. $\blacksquare$

4.3. Мультипликативно-барьерный метод

Построим прямой мультипликативно-барьерный метод для решения линейной задачи полуопределенного программирования (4.1.1), который является аналогом соответствующего метода для линейного программирования (см. [12]). С этой целью обратимся к условиям оптимальности (3.5.10) и выделим из них условия типа равенства

$$\begin{array}{rcl} \tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,V & = & 0_{n_\triangle}, \\ \mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\,X & = & b, \\ \mathrm{svec}\,V & = & \mathrm{svec}\,C - \mathcal{A}^T_{svec}u. \end{array} \tag{4.3.1}$$

Напомним, здесь $\tilde{X}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n$ и $\tilde{\mathcal{L}}_n = D_2\mathcal{L}_n$, $\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n D_2^{-1}$. Матрица D_2 является диагональной порядка $n_\triangle$ и у нее на диагонали стоит вектор $\mathrm{svec}\,E$, где E — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице.

Подставим выражение для $\operatorname{svec} V$ из третьего равенства (4.3.1) в первое и умножим обе части получившегося равенства слева на матрицу $\mathcal{A}_{svec}$. Тогда приходим к уравнению относительно вектора двойственных переменных u, а именно:

$$\Gamma(X)u = \mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes} \operatorname{svec}, \tag{4.3.2}$$

где введено обозначение

$$\Gamma(X) = \mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T = \mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}^T. \tag{4.3.3}$$

Матрица $\Gamma(X)$ квадратная порядка m.

Поясним, почему имеет место последнее равенство в (4.3.3). Действительно, так как все матрицы A_i, $1 \leq i \leq m$, симметричные, то $\mathcal{A}_{vec}^T = \mathcal{D}_n\mathcal{A}_{hvec}^T = \tilde{\mathcal{D}}_n\mathcal{A}_{svec}^T$. Поэтому $\mathcal{A}_{svec}\tilde{\mathcal{D}}_n^T = \mathcal{A}_{vec}$ и после умножения обеих частей этого равенства справа на $\tilde{\mathcal{D}}_n$ получаем с учетом того, что $\tilde{\mathcal{D}}_n^T\mathcal{D}_n = I_{n_\triangle}$ и $\mathcal{A}_{svec}^T = \tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{A}_{vec}^T$,

$$\Gamma(X) = \mathcal{A}_{vec}\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_nX^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{A}_{vec}^T.$$

Воспользуемся далее равенством (см. приложение)

$$\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_nX^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n = X^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n,$$

а также равенством $\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{A}_{vec}^T = \mathcal{A}_{vec}^T$, следующим из симметричности матриц A_i, $1 \leq i \leq m$. Тогда приходим к более простому представлению для матрицы $\Gamma(X) = \mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}$.

Утверждение 4.3.1. *Пусть точка $X \in \mathcal{F}_P$ является невырожденной. Тогда матрица $\Gamma(X)$ неособая.*

Доказательство. Матрица X является симметричной, положительно полуопределенной, поэтому симметричной и положительно полуопределенной будет и ее кронекеровская сумма —матрица $X^{\otimes}$. Обозначим через $(X^{\otimes})^{1/2}$ квадратный корень из $X^{\otimes}$, через $\bar{A}_{vec}$ — матрицу $\bar{A}_{vec} = \mathcal{A}_{vec}(X^{\otimes})^{1/2}$. Тогда $\Gamma(X) = \bar{A}_{vec}\bar{\mathcal{A}}_{vec}^T$, т.е. $\Gamma(X)$ является матрицей Грама, составленной из строк матрицы $\bar{A}_{vec}$. Поэтому $\Gamma(X)$ будет неособой матрицей, если строки $\bar{A}_{vec}$ линейно независимы.

Покажем, что эти строки линейно независимы. От противного, пусть найдется ненулевой m-мерный вектор λ такой, что

$$\bar{\mathcal{A}}_{vec}^T\lambda = 0_{n^2}. \tag{4.3.4}$$

Для симметричной матрицы $X \succeq 0$ справедливо разложение $X = QD(\eta)Q^T$, в котором Q — ортогональная матрица и η — вектор собственных значений. Но тогда согласно утверждению * из приложения соответствующее разложение для $X^{\otimes}$ имеет вид

$$X^{\otimes} = \mathcal{Q}D(\eta^{\otimes})\mathcal{Q}^T, \tag{4.3.5}$$

где матрица $\mathcal{Q} = Q \otimes Q$ ортогональная порядка n^2, и вектор $\eta^{\otimes}$ является диагональю матрицы $D^{\otimes}(\eta)$.

Из (4.3.5) следует соответствующее разложение для матрицы $(X^{\otimes})^{\frac{1}{2}}$:

$$(X^{\otimes})^{\frac{1}{2}} = \mathcal{Q}D^{\frac{1}{2}}(\eta^{\otimes})\mathcal{Q}^T.$$

Поэтому

$$\bar{\mathcal{A}}_{vec}^T = (X^{\otimes})^{\frac{1}{2}}\mathcal{A}_{vec}^T = \mathcal{Q}D^{\frac{1}{2}}(\eta^{\otimes})(\mathcal{A}_{vec}^Q)^T. \tag{4.3.6}$$

Здесь через $\mathcal{A}_{vec}^Q$ обозначена матрица, строками которой являются векторы $\mathrm{vec}\,(Q^T A_i Q)$, $1 \le i \le m$. Умножим равенство (4.3.4) слева на матрицу $\mathcal{Q}^T = Q^T \otimes Q^T$. Тогда с учетом (4.3.6) получаем

$$D^{\frac{1}{2}}(\eta^{\otimes})(\mathcal{A}_{vec}^Q)^T\lambda = 0_{n^2}. \tag{4.3.7}$$

Предположим, что ранг матрицы X равен r и что положительные собственные значения в количестве r штук расположены в начале вектора η. Тогда, как отмечается в приложении, у вектора $\eta^{\otimes}$, являющегося прямой суммой столбцов матрицы (5), имеются нулевые компоненты. Все эти компоненты имеют парные номера (i,j) такие, что $r < i, j \le n$, и соответствуют нулевому правому нижнему блоку матрицы (5) порядка r.

Пусть матрица Q разбита на две подматрицы: $Q = [Q_B \; Q_N]$, где Q_B состоит из первых r столбцов Q, а Q_N — из оставшихся последних $n - r$ столбцов. Если рассмотреть матрицы

$$\begin{bmatrix} Q_B^T A_i Q_B & Q_B^T A_i Q_N \\ Q_N^T A_i Q_B & 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le m,$$

то равенство (4.3.7) означает, что эти матрицы линейно зависимы. Это противоречит определению невырожденности точки X. Таким образом, $\Gamma(X)$ неособая матрица. ■

Ниже мы предполагаем, что задача (4.1.1) является *невырожденной* в том смысле, что существует область в $\mathbb{S}^n$, содержащая допустимое множество $\mathcal{F}_P$, и такая, что все точки X из этой области невырожденные.

Разрешая уравнение (4.3.2), получаем

$$u(X) = \Gamma^{-1}(X)\mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{svec} = \left(\mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{svec}\right)^{-1}\mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,. \tag{4.3.8}$$

Используя $u(X)$, вычисляем выражение для слабой двойственной переменной

$$\mathrm{svec}\,V(X) = \mathrm{svec}\,C - \mathcal{A}^T_{svec}u(X) = \mathcal{P}(X)\,\mathrm{svec}\,,$$

где для сокращения записи через $\mathcal{P}(X)$ обозначена матрица

$$\mathcal{P}(X) = I_{n_\triangle} - \mathcal{A}^T_{svec}\left(\mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{A}^T_{svec}\right)^{-1}\mathcal{A}_{svec}\tilde{X}^{\otimes}.$$

После подстановки данного $\mathrm{svec}\,V(X)$ в первое равенство из (4.3.1) приходим к уравнению относительно X:

$$\tilde{X}^{\otimes}\mathcal{P}(X)\,\mathrm{svec} = 0_{n_\triangle}. \tag{4.3.9}$$

Применим для решения системы (4.3.9) метод простой итерации

$$\mathrm{svec}\,X_{k+1} = \mathrm{svec}\,X_k - \alpha_k\tilde{X}^{\otimes}_k\mathcal{P}(X_k)\,\mathrm{svec}\,C, \tag{4.3.10}$$

где $\alpha_k > 0$ — шаг перемещения и $X_0 \succ 0$. Если шаг α_k на каждой итерации брать достаточно малым, то можно добиться того, что и на всех последующих итерациях будет выполняться неравенство: $X_k \succ 0$.

Обозначим $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$.

Утверждение 4.3.2. *Пусть $\Delta X_k \neq 0_{nn}$. Тогда $C \bullet \Delta X_k < 0$.*

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{array}{rcl} C \bullet \Delta X_k & = & \langle \mathrm{svec}\,C, \mathrm{svec}\,\Delta X_k\rangle = \\ & = & -\alpha_k\langle \mathrm{svec}\,C, \tilde{X}^{\otimes}_k\mathcal{P}(X_k)\,\mathrm{svec}\,C\rangle. \end{array} \tag{4.3.11}$$

Если теперь представить матрицу $X^{\otimes}_k \succeq 0$ как произведение двух матриц $X^{\otimes}_k = (X^{\otimes}_k)^{\frac{1}{2}}(X^{\otimes}_k)^{\frac{1}{2}}$, то поскольку

$$\tilde{X}^{\otimes}_k = \tilde{\mathcal{L}}_n(X^{\otimes}_k)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(X^{\otimes}_k)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{D}}_n,$$

то $\tilde{X}^{\otimes}_k\mathcal{P}(X_k)$ можно записать следующим образом:

$$\tilde{X}^{\otimes}_k\mathcal{P}(X_k) = \left(\tilde{X}^{\otimes}_k\right)^{\frac{1}{2}}\tilde{\mathcal{P}}(X_k)\left(\tilde{X}^{\otimes}_k\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.3.12}$$

где для сокращения записи обозначено $(\tilde{X}_k^{\otimes})^{\frac{1}{2}} = \tilde{\mathcal{L}}_n (X_k^{\otimes})^{\frac{1}{2}} \tilde{\mathcal{D}}_n$ и

$$\tilde{\mathcal{P}}(X_k) = I_{n_\triangle} - \tilde{\mathcal{A}}_{svec}^T \left(\tilde{\mathcal{A}}_{svec} \tilde{\mathcal{A}}_{svec}^T \right)^{-1} \tilde{\mathcal{A}}_{svec}, \quad \tilde{\mathcal{A}}_{svec} = \mathcal{A}_{svec} (\tilde{X}_k^{\otimes})^{\frac{1}{2}}.$$

Матрица $(\tilde{X}_k^{\otimes})^{\frac{1}{2}}$ симметричная, а $\tilde{\mathcal{P}}(X_k)$ есть матрица ортогонального проектирования. Поскольку матрицы ортогонального проектирования идемпотентные, то из (4.3.11) и (4.3.12) получаем

$$C \bullet \Delta X_k = -\alpha_k \| \tilde{\mathcal{P}}(X_k) (\tilde{X}_k^{\otimes})^{\frac{1}{2}} \operatorname{svec} C \|^2 < 0. \qquad (4.3.13)$$

■

Укажем на еще одно свойство итерационного процесса (4.3.10), а именно: на каждой итерации выполняется равенство

$$\mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} \Delta X_k = 0.$$

Это означает, что данный итерационный процесс можно применять только в том случае, когда $X_0 \in \mathcal{F}_P$, т.е. дополнительно стартовая точка должна удовлетворять равенствам, входящим в постановку задачи (4.1.1). В противном случае невязка по ограничениям типа равенства будет оставаться постоянной и мы никогда не попадем на допустимое множество.

Чтобы устранить этот недостаток, привлечем для вывода зависимости $u(X)$ второе равенство $b - \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X = 0_m$ из (4.3.1) (ранее мы его проигнорировали). С этой целью сложим это равенство, предварительно умноженное на некоторый коэффициент $\tau > 0$ с равенством (4.3.2). В результате вместо (4.3.2) приходим к уравнению

$$\Gamma(X) u = \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes} \operatorname{svec} C + \tau \left[b - \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X \right], \qquad (4.3.14)$$

разрешая которое, находим новое выражение для $u(X)$:

$$u(X) = \Gamma^{-1}(X) \left\{ \mathcal{A}_{svec} \tilde{X}^{\otimes} \operatorname{svec} + \tau \left[b - \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X \right] \right\}. \qquad (4.3.15)$$

Обратим внимание, что полученная зависимость $u(X)$ переходит в старую зависимость (4.3.8), если точка X является допустимой, т.е. $X \in \mathcal{F}_P$.

Теперь с новым $u(X)$ уравнение (4.3.9) преобразуется к виду

$$\tilde{X}^{\otimes} \left\{ \mathcal{P}(X) \operatorname{svec} C + \tau \mathcal{A}_{svec}^T \Gamma^{-1}(X) \left[\mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X - b \right] \right\} = 0_{n_\triangle},$$

а итерационный процесс (4.3.10) запишется как

$$\begin{aligned}
&\operatorname{svec} X_{k+1} = \operatorname{svec} X_k - \\
&\qquad -\alpha_k \tilde{X}_k^{\otimes} \left\{ \mathcal{P}(X_k) \operatorname{svec} C + \tau \mathcal{A}_{svec}^T \Gamma^{-1}(X_k) \left[\mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X_k - b \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Правая часть в процессе (4.3.16) полностью совпадает с правой частью в процессе (4.3.10), если точка X_k является допустимой. Неравенство (4.3.13) теперь выполняется только тогда, когда точка X_k находится в достаточной близости к аффинному многообразию, задаваемому линейными ограничениями типа равенства в задаче (4.1.1).

Итерационный процесс (4.3.16), в котором требуется только, чтобы $X_0 \succ 0$, назовем *мультипликативно-барьерным методом.* В отличие от него итерационный процесс 4.3.10, где дополнительно от стартовой точки X_0 требуется, чтобы $X_0 \in \mathcal{F}_P$, назовем *допустимым мультипликативно-барьерным методом.*

Матрица Якоби от алгоритмического отображения метода. Ниже для обоснования сходимости метода нам надо знать матрицу Якоби от правой части процесса итерационного процесса (4.3.16). Поэтому найдем выражение для этой матрицы, но предварительно обратим внимание, что процесс (4.3.16) по своей сути есть векторная форма записи матричного итерационного процесса

$$X_{k+1} = X_k - \alpha_k \left(X_k \circ V(X_k) \right). \tag{4.3.17}$$

с правой частью $F(X) = (X \circ V(X))$. Таким образом, нам надо вычислить матрицу Якоби от матричной функции $F(X) = X \circ V(X)$.

Лемма 4.3.1. *Матрица Якоби для матричной функции $F(X)$ имеет вид*

$$F_X(X) = V^{\otimes}(X) + X^{\otimes} V_X(X). \tag{4.3.18}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала функцию $F^1(X) = XV(X)$. Дифференциал произведения двух матричных функций равен

$$dF^1(X) = (dX)V(X) + XdV(X).$$

В векторной форме это соотношение запишется в виде

$$d(\text{vec } F^1(X)) = \text{vec}\,(dF^1(X)) = \text{vec }((dX)V(X)) + \text{vec }(XdV(X)).$$

Тогда на основании формулы (6) из приложения получаем

$$\begin{aligned}
d(\text{vec } F^1(X)) &= \left(V^T(X) \otimes I_n\right) d \text{ vec } X + \\
&+ (I_n \otimes X) \,\text{vec}\,(dV(X)).
\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Но по определению первого дифференциала

$$\mathrm{vec}\,(dV(X)) = V_X(X)d\ \mathrm{vec}\ X. \tag{4.3.20}$$

Подставляя данное равенство в (4.3.19), приходим к

$$d(\mathrm{vec}\ F^1(X)) = \left[\left(V^T(X) \otimes I_n\right) + (I_n \otimes X)\, V_X(X)\right] d\ \mathrm{vec}\ X.$$

Таким образом,

$$F^1_X(X) = \left(V^T(X) \otimes I_n\right) + (I_n \otimes X)\, V_X(X). \tag{4.3.21}$$

Поскольку матрица $V(X)$ симметричная, то наряду с (4.3.21) имеет место формула

$$F^1_X(X) = (V(X) \otimes I_n) + (I_n \otimes X)\, V_X(X), \tag{4.3.22}$$

Аналогичным образом можно показать, что для матрицы Якоби матричной функции $F^2(X) = V(X)X$ справедливо выражение

$$F^2_X(X) = (X \otimes I_n)\, V_X(X) + (I_n \otimes V(X))\,. \tag{4.3.23}$$

Из (4.3.22) и (4.3.23) приходим к формуле (4.3.18). ■

Формула (4.3.18) получена для общего случая, без предположений о конкретном виде матричной функции $V(X)$. Уточним ее для случая, когда $V(X)$ имеет вид

$$V(X) = C - \sum\nolimits_{i=1}^{m} u^i(X)A_i.$$

Тогда

$$V_X(X) = -\sum\nolimits_{i=1}^{m} (\mathrm{vec}\ A_i)u^i_X(X). \tag{4.3.24}$$

Пусть $u_X(X)$ — матрица Якоби вектор-функции $u(X)$, зависящей от матричного аргумента X. Данная матрица имеет размер $m \times n^2$ и ее (p,q)-й элемент в i-й строке есть частная производная $\frac{\partial u^i}{\partial X_{pq}}$, где X_{pq} есть (p,q)-й элемент матрицы X. Тогда матрицу Якоби $V_X(X)$ можно записать в виде

$$V_X(X) = -\mathcal{A}^T_{\mathrm{vec}} u_X(X). \tag{4.3.25}$$

Таким образом, вычисление $V_X(X)$ сводится к вычислению матрицы Якоби $u_X(X)$. Найдем ее для общего метода (4.3.16), в котором $u(X)$ имеет вид (4.3.15).

Лемма 4.3.2. *Пусть точка $X \in \mathcal{F}_P$ невырожденная. Тогда*

$$u_X(X) = \left(\mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}^T\right)^{-1}\left(\mathcal{A}_{vec}V^{\otimes} - \tau\mathcal{A}_{vec}\right), \tag{4.3.26}$$

где $V^{\otimes} = V^{\otimes}(X)$.

Доказательство. Равенство (4.3.14) можно переписать следующим образом

$$\left(\mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\mathcal{A}_{vec}^T\right)u = \mathcal{A}_{vec}X^{\otimes}\,\mathrm{vec}\,C + \tau\left[b - \mathcal{A}_{vec}\,\mathrm{vec}\,X\right],$$

Более того, данное равенство есть эквивалентная запись следующих матричных равенств

$$A_i \bullet (X \circ V(X)) = -\tau\left(b^i - A_i \bullet X\right), \quad 1 \le i \le m, \tag{4.3.27}$$

для первых дифференциалов которых выполняется:

$$d\left[A_i \bullet (X \circ V(X))\right] = \tau\, d\left(A_i \bullet X\right), \quad 1 \le i \le m. \tag{4.3.28}$$

Но согласно утверждению 3 из приложения

$$d\left[A_i \bullet (X \circ V(X))\right] = (\mathrm{vec}\ A_i)^T\left[V^{\otimes} + X^{\otimes}V_X(X)\right]d\ \mathrm{vec}\ X. \tag{4.3.29}$$

Кроме того, для правой части $A_i \bullet X = \mathrm{tr}\ A_iX$ равенства (4.3.28) находим

$$d\ \mathrm{tr}\,(A_iX) = \mathrm{tr}\ d(A_iX) = \mathrm{tr}\,(A_i dX) = (\mathrm{vec}\ A_i)^T d\ \mathrm{vec}\ X. \tag{4.3.30}$$

На основании (4.3.29) и (4.3.30) делаем вывод, что матрицы Якоби от левой и правой части (4.3.27) связаны между собой равенством

$$(\mathrm{vec}\ A_i)^T\left[(V^{\otimes} + X^{\otimes}V_X(X)\right] = \tau(\mathrm{vec}\ A_i)^T,$$

где $1 \le i \le m$.

Объединим все эти равенства в одно с помощью матрицы $\mathcal{A}_{vec}$. В результате имеем

$$\mathcal{A}_{vec}\left[V^{\otimes} + X^{\otimes}V_X(X)\right] = \tau\mathcal{A}_{vec}. \tag{4.3.31}$$

Согласно (4.3.24) $V_X(X) = -\mathcal{A}_{vec}^T u_X(X)$. Подставляя данное выражение в (4.3.31), получаем

$$\Gamma(X)u_X(X) = \mathcal{A}_{vec}V^{\otimes} - \tau\mathcal{A}_{vec}, \tag{4.3.32}$$

где $\Gamma(X) = \mathcal{A}_{vec} X^{\otimes} \mathcal{A}_{vec}^T$. Так как согласно утверждению 4.3.1 матрица $\Gamma(X)$ неособая, то из (4.3.32) приходим к (4.3.26). $\blacksquare$

На основании равенства (4.3.25) и утверждения леммы 4.3.2 делаем вывод, что

$$V_X(X) = -\mathcal{A}_{vec}^T \left(\mathcal{A}_{vec} X^{\otimes} \mathcal{A}_{vec}^T\right)^{-1} \left(\mathcal{A}_{vec} V^{\otimes} - \tau \mathcal{A}_{vec}\right). \qquad (4.3.33)$$

Поэтому, вводя для сокращения записи обозначение

$$\mathcal{P}(X^{\otimes}) = X^{\otimes} \mathcal{A}_{vec}^T \left(\mathcal{A}_{vec} X^{\otimes} \mathcal{A}_{vec}^T\right)^{-1} \mathcal{A}_{vec},$$

получаем согласно утверждению леммы 4.3.1 следующее выражение для матрицы Якоби функции $F(X) = X \circ V(X)$:

$$F_X(X) = \left[I_{n^2} - \mathcal{P}(X^{\otimes})\right] V^{\otimes} + \tau \mathcal{P}(X^{\otimes}). \qquad (4.3.34)$$

Так как $F(X)$ — симметричная матричная функция, то матрица Якоби $F_X(X)$ также является симметричной.

Сходимость метода. Пусть теперь X_* — решение исходной задачи (4.1.1), и $V_* = V(u_*)$ — соответствующее значение слабой двойственной переменной (двойственной невязки), входящей в решение двойственной задачи (4.1.2). Так как в этом случае $X_* \bullet V_* = 0$, то матрицы $X_* \succeq 0$ и $V_* \succeq 0$ коммутируют между собой. Поэтому можно указать ортогональную матрицу Q такую, что

$$X_* = Q D(\eta_*) Q^T, \qquad V_* = Q D(\theta_*) Q^T, \qquad (4.3.35)$$

где η_* и θ_* — n-мерные векторы, состоящие из собственных значений соответственно матриц X_* и V_*, причем $\eta_*^i \theta_*^i = 0$, $1 \le i \le n$. Матрицы $X_*^{\otimes}$ и $V_*^{\otimes}$ в этом случае также коммутируют между собой (см. приложение) и

$$X_*^{\otimes} = \mathcal{Q} D(\eta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T, \quad V_*^{\otimes} = \mathcal{Q} D(\theta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T. \qquad (4.3.36)$$

Здесь $\mathcal{Q} = Q \otimes Q$, и через $\eta_*^{\otimes}$ и $\theta_*^{\otimes}$ обозначены диагонали диагональных матриц $D^{\otimes}(\eta_*)$ и $D^{\otimes}(\theta_*)$ соответственно.

Вычислим далее матрицу Якоби (4.3.34) в точке X_*, причем в силу ее симметричности имеет смысл перейти к матрице

$$F_X^{\triangle}(X_*) = \tilde{\mathcal{D}}_n^T F_X(X_*) \tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{L}}_n \left\{\left[I_{n^2} - \mathcal{P}(X_*^{\otimes})\right] V_*^{\otimes} + \tau \mathcal{P}(X_*^{\otimes})\right\} \tilde{\mathcal{D}}_n.$$

Используя ортогональность матрицы $\mathcal{Q}$, а также разложения (4.3.36), получаем

$$F_X^{\triangle}(X_*) = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q} W(\eta_*, \theta_*) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n, \qquad (4.3.37)$$

где введено обозначение:

$$W(\eta_*, \theta_*) = \left[I_{n^2} - \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})\right] D(\theta_*^{\otimes}) + \tau \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}).$$

Матрица $\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})$ имеет вид

$$\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) = D(\eta_*^{\otimes})\mathcal{Q}^T \mathcal{A}_{vec}^T \Gamma^{-1}(\eta_*^{\otimes})\mathcal{A}_{vec}\mathcal{Q}.$$

В ней

$$\Gamma(\eta_*^{\otimes}) = \mathcal{A}_{vec}\mathcal{Q}D(\eta_*^{\otimes})\mathcal{Q}^T\mathcal{A}_{vec}^T = A_{vec}^Q D(\eta_*^{\otimes})(A_{vec}^Q)^T,$$

и A_{vec}^Q является матрицей размера $m \times n^2$ со строками $\mathrm{vec}\,(Q^T A_i Q)$, $1 \le i \le m$, причем справедлива формула

$$\mathcal{A}_{vec}^Q = \mathcal{A}_{vec}\mathcal{Q}. \tag{4.3.38}$$

Матрица $\Gamma(\eta_*^{\otimes})$ совпадает с матрицей $\Gamma(X_*)$, это просто другое представление $\Gamma(X_*)$. Саму матрицу $\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes})$ можно переписать в следующем виде

$$\mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) = D(\eta_*^{\otimes})(A_{vec}^Q)^T \left[A_{vec}^Q D(\eta_*^{\otimes})(A_{vec}^Q)^T\right]^{-1} A_{vec}^Q.$$

Введем в рассмотрение матрицу $\mathcal{T}_n = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}\tilde{\mathcal{D}}_n$. Матрица $\mathcal{T}_n$ — квадратная, порядка $n_\triangle$. Так как матрица $\mathcal{Q}$ неособая, а $\tilde{\mathcal{D}}_n$ — матрица полного ранга, то матрица $\mathcal{T}_n$ также неособая. Согласно формуле (30) из приложения обратная матрица $\mathcal{T}_n^{-1}$ имеет вид: $\mathcal{T}_n^{-1} = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n$.

Лемма 4.3.3. *Для матрицы $F_X^{\triangle}(X_*)$ справедливо представление*

$$F_X^{\triangle}(X_*) = \mathcal{T}_n \bar{W}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes}\right)\mathcal{T}_n^{-1}, \tag{4.3.39}$$

где $\bar{\eta}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n \eta_*^{\otimes}$, $\bar{\theta}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n \theta_*^{\otimes}$ и $\bar{W}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes}\right)$— квадратная матрица порядка $n_\triangle$, имеющая вид

$$\bar{W}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes}\right) = \left[I_{n_\triangle} - \bar{\mathcal{G}}(\bar{\eta}_*^{\otimes})\right] D\left(\bar{\theta}_*^{\otimes}\right) + \tau \bar{\mathcal{G}}(\bar{\eta}_*^{\otimes}).$$

В ней

$$\bar{\mathcal{G}}(\bar{\eta}_*^{\otimes}) = D\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}\right)(\mathcal{A}_{svec}^Q)^T \bar{\Gamma}^{-1}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}\right)\mathcal{A}_{svec}^Q.$$

$$\bar{\Gamma}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}\right) = \mathcal{A}_{svec}^Q D(\bar{\eta}_*^{\otimes})(\mathcal{A}_{svec}^Q)^T.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\bar{\Gamma}\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}\right)$ есть просто другая форма записи матрицы $\Gamma(\eta_*^{\otimes})$, основанная на использовании матрицы $\mathcal{A}_{svec}^Q$ вместо $\mathcal{A}_{vec}^Q$.

В силу формулы (4.3.37) матрица $F_X^{\triangle}(X_*)$ является суммой трех матриц: $F_X^{\triangle}(X_*) = \tau F_1 + F_2 + F_3$, где

$$\begin{array}{rcl} F_1 & = & \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}\, \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n, \\ F_2 & = & \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}\, D(\theta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n, \\ F_3 & = & -\tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{Q}\, \mathcal{G}(\eta_*^{\otimes}) D(\theta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n. \end{array}$$

Если воспользоваться формулой $\mathcal{Q}^T \mathcal{A}_{vec}^T = (\mathcal{A}_{vec}^Q)^T = \tilde{\mathcal{D}}_n (\mathcal{A}_{svec}^Q)^T$ и утверждением 4 из приложения, согласно которому $\tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q} = \mathcal{T}_n \tilde{\mathcal{D}}_n^T$, то имеем

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q} D(\eta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T (\mathcal{A}_{vec})^T = \mathcal{T}_n\, \tilde{\mathcal{D}}_n^T D\left(\eta_*^{\otimes}\right) \tilde{\mathcal{D}}_n (\mathcal{A}_{svec}^Q)^T = \mathcal{T}_n D\left(\bar{\eta}_*^{\otimes}\right) (\mathcal{A}_{svec}^Q)^T,$$

поскольку $\tilde{\mathcal{D}}_n^T D\left(\eta_*^{\otimes}\right) \tilde{\mathcal{D}}_n = D(\bar{\eta}_*^{\otimes})$.

Кроме того, так как $\mathcal{A}_{vec}(Q \otimes Q) = \mathcal{A}_{svec}^Q \tilde{\mathcal{D}}_n^T$, то на основании формулы (30) из приложения, приходим к выводу, что

$$F_1 = \mathcal{T} D(\bar{\eta}_*) (\mathcal{A}_{svec}^Q)^T \bar{\Gamma}^{-1} (\bar{\eta}_*^{\otimes}) \mathcal{A}_{svec}^Q \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{T} \bar{\mathcal{G}}(\bar{\eta}_*^{\otimes}) \mathcal{T}^{-1}.$$

Далее, опять с помощью утверждения 4 и формулы (30) из приложения находим

$$\begin{array}{c} F_2 = \tilde{\mathcal{D}}_n^T \mathcal{Q}\, D(\theta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{T} \tilde{\mathcal{D}}_n^T\, D(\theta_*^{\otimes}) \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n = \\ = \mathcal{T} \tilde{\mathcal{D}}_n^T\, D(\theta_*^{\otimes}) \tilde{D}_n^T \tilde{D}_n^T \mathcal{Q}^T \tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{T} D(\bar{\theta}_*^{\otimes}) \mathcal{T}^{-1}. \end{array}$$

Здесь снова было принято во внимание, что $\tilde{\mathcal{D}}_n^T D\left(\theta_*^{\otimes}\right) \tilde{\mathcal{D}}_n = D(\bar{\theta}_*^{\otimes})$. Наконец, проводя аналогичные выкладки, получаем

$$F_3 = -\mathcal{T} \bar{\mathcal{G}}(\bar{\eta}_*^{\otimes}) D(\bar{\theta}_*^{\otimes}) \mathcal{T}^{-1}.$$

Таким образом, для матрицы $F_X^{\triangle}(X_*)$ справедливо представление (4.3.39). ■

Теорема 4.3.1. *Пусть* X_* *и* $[u_*, V_*]$ — *невырожденные решения прямой и двойственной задач* (4.1.1), (4.1.2). *Пусть, кроме того,* X_* *и* V_* *удовлетворяют условию строгой дополнительности. Тогда итерационный процесс* (4.3.16), *в котором шаг* α_k *постоянный и достаточно малый, локально сходится к* X_* *с линейной скоростью.*

Доказательство. В матричном виде итерационный процесс (4.3.16) записывается как (4.3.17). Так как $X_* \circ V_* = 0_{nn}$, то точка X_* — является неподвижной точкой отображения

$$\mathcal{B}(X) = X - \alpha X \circ V(X)$$

для любого $\alpha > 0$, или, что, то же самое, неподвижной точкой отображения

$$\mathcal{B}_{svec}(X) = \operatorname{svec} X - \alpha \operatorname{svec}(X \circ V(X)).$$

Пусть $\mathcal{B}_X(X_*)$ — матрица Якоби отображения $\mathcal{B}(X)$ в точке X_*. Покажем, что найдется $\bar{\alpha} > 0$, для которого при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ спектральный радиус ρ этой матрицы удовлетворяет условию

$$\rho(\mathcal{B}_X(X_*)) < 1. \tag{4.3.40}$$

Тогда по теореме Островского точка X_* является точкой притяжения для итерационного процесса (4.3.17), и итерации, определяемые (4.3.17), локально сходятся к X_* с линейной скоростью. Соответственно, с такой же скоростью сходятся к $\operatorname{svec} X_*$ итерации, задаваемые рекуррентным соотношением (4.3.16). Чтобы найти спектральный радиус $\mathcal{B}_X(X_*)$ нам надо знать собственные значения этой матрицы.

Так как матричное отображение $\mathcal{B}(X)$ симметричное и зависит от симметричной матрицы, то будем рассматривать симметризованную матрицу Якоби

$$\mathcal{B}_X^{\triangle}(X_*) = I_{n_\triangle} - \alpha F_X^{\triangle}(X_*), \tag{4.3.41}$$

$F_X^{\triangle}(X_*)$ — симметризованная матрица Якоби матричной функции $X \circ V(X)$. Таким образом, отыскание собственных значений $F_X^{\triangle}(X_*)$ сводится к отысканию собственных значений матрицы $F_X^{\triangle}(X_*)$, которая в силу леммы 4.3.3 подобна матрице $\bar{W}(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes})$. Поэтому, собственные значения $F_X^{\triangle}(X_*)$ совпадают с собственными значениями $\bar{W}(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes})$.

Найдем собственные значения матрицы $\bar{W}(\bar{\eta}_*^{\otimes}, \bar{\theta}_*^{\otimes})$, используя разложениям (4.3.35) для матриц X_* и V_*. В силу строгой дополнительности для $\eta_* \geq 0_n$ и $\theta_* \geq 0_n$ имеет место равенство $D(\eta_*)\theta_* = 0_n$ и неравенства: $\eta_*^i + \theta_*^i > 0$, $1 \leq i \leq n$. Не умаляя общности, считаем, что первые r собственных значений из η_* положительны, а остальные равны нулю. Относительно θ_* полагаем наоборот, что последние $s = n - r$ значений положительны, а первые r — нулевые. В этом случае

$$\eta_* = \left[\eta_*^1, \eta_*^2, \ldots, \eta_*^r, 0, \ldots, 0\right]^T, \quad \theta_* = \left[0, \ldots, 0, \theta_*^{r+1}, \ldots, \theta_*^n\right]^T. \tag{4.3.42}$$

Обозначим $n_B = n_\triangle - s_\triangle$ и рассмотрим векторы $\bar{\eta}_*^{\otimes}$, $\bar{\theta}_*^{\otimes}$. Оба они имеют одинаковую размерность $n_\triangle$. Из (4.3.42) следует, что у вектора $\bar{\eta}_*^{\otimes}$ первые n_B компонент положительны, а последующие компоненты нулевые. У вектора $\bar{\theta}_*^{\otimes}$ имеется $n_\triangle - r_\triangle$ положительных компонент, причем в их число обязательно входят последние $s_\triangle$ компоненты.

Представим векторы $\bar{\eta}_*^{\otimes}$ и $\bar{\theta}_*^{\otimes}$ в виде

$$\bar{\eta}_*^{\otimes} = \left[\bar{\eta}_*^B, \bar{\eta}_*^N\right], \qquad \bar{\theta}_*^{\otimes} = \left[\bar{\theta}_*^B, \bar{\theta}_*^N\right],$$

где $\bar{\eta}_*^B > 0_{n_B}$, $\bar{\eta}_*^N = 0_{s_\triangle}$, $\bar{\theta}_*^N > 0_{s_\triangle}$. Для сокращения записи введем также обозначение: $\mathcal{A}_{svec_B}^Q$ — подматрица матрицы $\mathcal{A}_{svec}^Q$, состоящая из ее первых n_B столбцов. Из предположения, что X_* и V_* являются невырожденными точками, следует неравенство: $r_\triangle \leq m \leq n_B$, т.е. число столбцов у матрицы $\mathcal{A}_{svec_B}^Q$ равняется или превышает число ее строк.

Так как $\bar{\eta}_*^N = 0_{s_\triangle}$, то матрица $\bar{W}(\bar{\eta}_*^\otimes, \bar{\theta}_*^\otimes)$ имеет структуру верхней блочной треугольной матрицы

$$\bar{W}(\bar{\eta}_*^\otimes, \bar{\theta}_*^\otimes) = \begin{bmatrix} \bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B) & \bar{W}_2(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B) \\ 0_{s_\triangle(n_1)} & D(\bar{\theta}_*^N) \end{bmatrix}, \tag{4.3.43}$$

где $\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$ — квадратная матрица порядка n_B следующего вида:

$$\bar{W}_1\left(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B\right) = \left[I_{n_1} - \bar{\mathcal{G}}^B(\bar{\eta}_*^B)\right] D\left(\bar{\theta}_*^B\right) + \tau \bar{\mathcal{G}}^B(\bar{\eta}_*^B).$$

В ней

$$\bar{\mathcal{G}}^B(\bar{\eta}_*^B) = D\left(\bar{\eta}_*^B\right)\left(\mathcal{A}_{svec_B}^Q\right)^T \left[(\mathcal{A}_{svec_B}^Q)\, D(\bar{\eta}_*^B)\, (\mathcal{A}_{svec_B}^Q)^T\right]^{-1} (\mathcal{A}_{svec_B}^Q).$$

В силу (4.3.43) собственные значения матрицы $\bar{W}(\bar{\eta}_*^\otimes, \bar{\theta}_*^\otimes)$ определяются собственными значениями матрицы $\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$ и компонентами вектора $\bar{\theta}_*^N$, все из которых строго положительны. Их число равняется $s_\triangle$.

Найдем собственные значения матрицы $\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$. Так как у вектора $\bar{\eta}_*^B > 0_{n_B}$ все компоненты строго положительны, то она может быть представлена в виде

$$\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B) = D^{\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B)\bar{W}_2(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)D^{-\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B),$$

где

$$\bar{W}_2\left(bar\eta_*^B, \bar{\theta}_*^B\right) = \left[I_{n_B} - \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)\right] D\left(\bar{\theta}_*^B\right) + \tau \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B).$$

В $\bar{W}_2\left(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B\right)$ матрица $\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)$ имеет вид

$$\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B) = D^{\frac{1}{2}}\left(\bar{\eta}_*^B\right)\bar{\mathcal{G}}^B(\bar{\eta}_*^B)D^{\frac{1}{2}}\left(\bar{\eta}_*^B\right).$$

Обе матрицы $\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)$ и $I_{n_B} - \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)$ являются идемпотентными.

В силу подобия матриц $\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$ и $\bar{W}_2(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$ собственные значения матрицы $\bar{W}_1(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$ совпадают с собственными значениями последней, общее число которых с учетом кратности равно n_B.

Пусть $y \in \mathbb{R}^{n_B}$ — собственный вектор матрицы $\bar{W}_2(\bar{\eta}_*^B, \bar{\theta}_*^B)$, а λ — соответствующее ему собственное значение. Тогда

$$\left[\left(I_{n_B} - \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)\right) D\left(\bar{\theta}_*^B\right) + \tau \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)\right] y = \lambda y. \tag{4.3.44}$$

После умножения равенства (4.3.44) слева на идемпотентную матрицу $\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)$ получаем

$$\tau\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)y = \lambda\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)y. \qquad (4.3.45)$$

Если собственный вектор y такой, что $\mathcal{A}^Q_{svec_B} D^{\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B)y \neq 0_m$, то тогда $\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)y \neq 0_m$. Поэтому $\lambda = \tau$ является собственным значением матрицы $\bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)$.

Предположим теперь, что

$$\mathcal{A}^Q_{svec_B} D^{\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B)y = 0_m, \qquad (4.3.46)$$

т.е. что собственный вектор y принадлежит нуль-пространству матрицы $\mathcal{A}^Q_{svec_B} D^{\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B)$. Размерность этого нуль-пространства равняется $n_B - m$. Тогда равенство (4.3.44) сводится к следующему:

$$\left[I_{n_B} - \bar{\mathcal{G}}_2^B(\bar{\eta}_*^B)\right] D(\bar{\theta}_*^B)y = \lambda y. \qquad (4.3.47)$$

После его умножения слева на вектор y^T приходим к

$$\langle y, D(\bar{\theta}_*^B)y\rangle = \lambda\langle y, y\rangle.$$

Поскольку y — ненулевой вектор, отсюда следует, что

$$\lambda = \frac{\langle y, D(\bar{\theta}_*^B)y\rangle}{\langle y, y\rangle} \geq 0.$$

Докажем от противного, что случай, когда $\lambda = 0$, невозможен. Для этого нам понадобится набор парных индексов $\mathcal{J}^n_\triangle$ (см. определение (8) в приложении), с помощью которого удобно нумеровать элементы симметричных матриц порядка n, стоящие на диагонали или ниже диагонали. Выделим в этом множестве индексов $\mathcal{J}^n_\triangle$ два подмножества. Первое подмножество $\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}^r_\triangle$, т.е. оно состоит из таких парных индексов (i, j), для которых $i \leq r$,$j \leq i$. Второе подмножество $\mathcal{J}_2$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{J}_2 = \left\{(i, j) \in \mathcal{J}^n_\triangle : \; i > r, \; j \leq r\right\}.$$

Имеем $|\mathcal{J}_1| = r_\triangle$, $|\mathcal{J}_1| + |\mathcal{J}_2| = n_B$. Пусть, кроме того, $\mathcal{A}^Q_{svec_{B_1}}$ — подматрица матрицы $\mathcal{A}^Q_{svec_B}$ размера $m \times r_\triangle$, составленная из столбцов последней с номерами $(i, j) \in \mathcal{J}_1$. Так как V_* — невырожденная точка, то эта подматрица имеет полный ранг, равный $r_\triangle$.

У вектора $\bar{\theta}_*^B$ все компоненты с парными номерами $(i, j) \in \mathcal{J}_1$ равны нулю, а все компоненты с номерами $(i, j) \in \mathcal{J}_2$ строго положительны.

Поэтому равенство $\langle y, D(\bar{\theta}_*^B)y\rangle = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда у вектора y все компоненты с парными номерами $(i,j) \in \mathcal{J}_2$ нулевые.

Но тогда $r_\triangle$-мерный вектор y_1, составленный из компонент вектора $D^{\frac{1}{2}}(\bar{\eta}_*^B)y$ с номерами $(i,j) \in \mathcal{J}_1$, будет ненулевым вектором, и для него в силу (4.3.46) выполняется равенство $\mathcal{A}^Q_{svec_{B_1}} y_1 = 0_{r_\triangle}$. Это означает, что столбцы матрицы $\mathcal{A}^Q_{svec_{B_1}}$ линейно зависимы и, следовательно, ее ранг меньше $r_\triangle$. Мы пришли к противоречию.

Таким образом, все собственные числа матрицы $\bar{W}(\bar{\eta}_*^\otimes, \bar{\theta}_*^\otimes)$, а стало быть и $F_X^\triangle(X_*)$, действительные и строго положительные. Пусть λ_{max} — максимальное собственное значение матрицы $F_X^\triangle(X_*)$. Так как согласно (4.3.41) собственные значения матрицы $\mathcal{B}_{svecX}(\operatorname{svec} X_*)$ равны $1 - \alpha\lambda$, где λ — собственные значения матрицы $F_X^\triangle(X_*)$, то, беря $0 < \bar{\alpha} < 2/\lambda_{max}$, получаем, что при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ выполнено условие (4.3.40). Поэтому процесс (4.3.16), и следовательно (4.3.17), локально сходятся с линейной скоростью к решению задачи (4.1.1). ■

Следствие 4.3.1. *Поведение итерационного процесса* (4.3.10) *полностью совпадает с поведением процесса* (4.3.16)*, если в последнем в качестве начального приближения взять допустимую точку. Поэтому в силу утверждения теоремы 4.3.1 процесс* (4.3.10) *также локально сходится к решению задачи* (4.1.1)*.*

Выбор шага. Рассмотрим вопрос о выборе шага α_k в итерационном процессе (4.3.16). Как следует из доказательства теоремы 4.3.1, чтобы обеспечить локальную сходимость, он должен быть меньше величины $\bar{\alpha}$. Значение величины $\bar{\alpha}$ определяется параметром τ и собственными значениями матрицы V_*, входящей в решение двойственной задачи (4.1.2). Кроме того, целесообразно выбирать шаг α_k таким образом, чтобы сохранялось свойство положительной определенности матрицы X_k на каждой итерации, если начальная матрица взята также положительно определенной. Тогда процесс (4.3.16) обладает свойством метода внутренней точки.

Обозначим $Y_k = X_k \circ V_k$. Обе матрицы X_k и Y_k являются симметричными. Предположим дополнительно, что матрица X_k является положительно определенной. Тогда, используя одновременное конгруэнтное приведение двух симметричных матриц, одна из которых является положительно определенной, к диагональному виду, получаем, что для некоторой невырожденной матрицы P выполняется

$$P^T X_k P = I_n, \quad P^T Y_k P = D(\omega_k), \tag{4.3.48}$$

где $\omega = [\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n]$ — вектор, составленный из собственных чисел матрицы $Z_k = X_k^{-1} Y_k$.

Все числа $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$ действительные. Согласно (4.3.48) имеем

$$X_k = \left(P^{-1}\right)^T P^{-1}, \quad Y_k = \left(P^{-1}\right)^T D(\omega_k) P^{-1}.$$

Поэтому

$$X_{k+1} = \left(P^{-1}\right)^T [I_k - \alpha_k D(\omega_k] \, P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^T D\left(\bar{e} - \alpha_k \omega_k\right) P^{-1},$$

где $\bar{e}$ — n-мерный вектор, состоящий из единиц. Отсюда сразу следует, что матрица X_{k+1} будет положительно определенной в том и только том случае, когда

$$\bar{e} - \alpha_k \omega_k > 0_n. \tag{4.3.49}$$

Пусть ω_k^{max} — максимальное положительное число из набора собственных чисел $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$ и пусть $\hat{\alpha}_k = 1/\omega_k^{max}$. Если таких чисел нет, то полагаем $\hat{\alpha}_k = +\infty$. Неравенство (4.3.49) заведомо выполняется, когда $\alpha_k < \hat{\alpha}_k$.

Утверждение 4.3.2 позволяет рассмотреть вариант метода (4.3.10) с *наискорейшим спуском*, когда шаг α_k выбирается из условия наибольшего убывания значения целевой функции. Пусть $\bar{\alpha}_k$ — максимальный шаг α, для которого $X_k - \alpha \Delta X_k \in \mathcal{F}_P$. Тогда, вводя множитель $0 < \nu < 1$ и полагая $\alpha_k = \nu \bar{\alpha}_k$, приходим к тому, что при данном шаге α_k происходит уменьшение значения целевой функции при одновременном сохранении положительной определенности матрицы X_{k+1}.

4.4. Двойственный мультипликативно-барьерный метод

Двойственный мультипликативно-барьерный метод строится как метод решения двойственной задачи (4.1.2). Он, как и прямой метод, является фактически некоторым способом решения системы условий оптимальности (3.5.10). Однако теперь, в отличие от прямого метода, вместо зависимости двойственной переменной от прямой используется обратная зависимость прямой переменной от двойственной. В результате все сводится к решению системы нелинейных уравнений, зависящих только от двойственной переменной.

Допустимый итерационный процесс. С целью получения зависимости прямой переменной от двойственной перепишем равенства из (3.5.10) в виде

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{V}^{\otimes}\,\mathrm{svec}\,X & = & 0_{n_\triangle}, \\
\mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\,X & = & b, \\
\mathrm{svec}\,V & = & \mathrm{svec}\,C - \mathcal{A}^T_{svec}u.
\end{array} \qquad (4.4.1)
$$

Фактически по сравнению с (4.3.1) здесь изменено только первое равенство. Умножим далее левую и правую части второго уравнения из (4.4.1) на матрицу $\mathcal{A}^T_{svec}$:

$$
\mathcal{A}^T_{svec}\mathcal{A}_{svec}\,\mathrm{svec}\,X = \mathcal{A}^T_{svec}b. \qquad (4.4.2)
$$

Складывая данное равенство с первым равенством из (4.4.1), получаем линейное уравнение относительно $\mathrm{svec}\,X$

$$
\Phi(V)\,\mathrm{svec}\,X = \mathcal{A}^T_{svec}b, \qquad (4.4.3)
$$

где $\Phi(V) = \mathcal{A}^T_{svec}\mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}^{\otimes}$ — симметричная матрица порядка $n_\triangle$.

Обозначим через $X = X(V)$ решение уравнения (4.4.3). Если матрица $\Phi(V)$ неособая, то, разрешая уравнение (4.4.3), получаем $\mathrm{svec}\,X = \Phi^{-1}(V)\mathcal{A}^T_{svec}b$ или

$$
\mathrm{vec}\ X = \tilde{\mathcal{D}}_n\Phi^{-1}(V)\mathcal{A}^T_{svec}b. \qquad (4.4.4)
$$

Таким образом, чтобы удовлетворить условию (4.4.3), в качестве X может быть взята такая симметричная матрица, прямая сумма столбцов которой есть вектор (4.4.4).

Пусть теперь $V = V(u) = C - \sum_{i=1}^m u^i A_i$. Тогда зависимость $X(V)$ фактически становится зависимостью $X(u) = X(V(u))$. Если подставить ее во второе равенство из (4.4.1), то приходим к системе m уравнений относительно m переменных:

$$
\left[\mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}(V(u))\mathcal{A}^T_{svec} - I_m\right]b = 0_m. \qquad (4.4.5)
$$

Применим для решения системы (4.4.5) метод простой итерации

$$
u_{k+1} = u_k + \alpha_k\left[I_m - \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\left(V_k\right)\mathcal{A}^T_{svec}\right]b, \quad V_k = V(u_k), \qquad (4.4.6)
$$

где $\alpha_k > 0$. Пусть точка $u_0 \in \mathbb{R}^m$ такова, что $V_0 = V(u_0) \succ 0$. Тогда за счет выбора шага α_k можно добиться выполнения неравенства $V_k \succ 0$ на всех итерациях. Метод в этом случае оказывается методом внутренней точки, на всех итерациях двойственная переменная u_k принадлежит множеству $\mathcal{F}^0_{D,u} = \{u \in \mathcal{F}_{D,u} :\ V(u) \succ 0\}$.

В пространстве слабой двойственной переменной V итерационный процесс (4.4.6) принимает вид

$$\operatorname{svec} V_{k+1} = \operatorname{svec} V_k - \alpha_k \mathcal{A}_{svec}^T \left[I_m - \mathcal{A}_{svec} \Phi^{-1} (V_k)) \mathcal{A}_{svec}^T \right] b. \quad (4.4.7)$$

От начальной точки V_0 теперь требуется, чтобы

$$V_0 \in \mathcal{F}_{D,V}^0 = \{ V \in \mathcal{F}_{D,V} : \ V \succ 0 \}.$$

При надлежащем выборе шага α_k опять итерационный процесс (4.4.7) является методом внутренней точки, т.е. $V_k \in \mathcal{F}_{D,V}^0$ на всех итерациях.

Положительная определенность всех матриц V_k, когда $V_k \in \mathcal{F}_{D,V}^0$, позволяет несколько упростить правую часть в итерационном процессе (4.4.7). Действительно, в этом случае матрица $V_k^{\otimes}$ также является положительно определенной, и у матрицы $\tilde{V}_k^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n V_k^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$ существует обратная матрица $\tilde{V}_k^{-\otimes}$, которая согласно формуле (11) из приложения имеет вид: $\tilde{V}_k^{-\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n V_k^{-\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$. Отсюда, используя формулу Шермана-Моррисона-Вудберри для обращения матрицы, получаем

$$\begin{gathered} \Phi^{-1}(V_k) = \left(\mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}_k^{\otimes} \right)^{-1} = \tilde{V}_k^{-\otimes} - \\ - \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \left(I_m + \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \right)^{-1} \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes}. \end{gathered} \quad (4.4.8)$$

Положим $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T$. Тогда на основании (4.4.8) имеем

$$\mathcal{A}_{svec} \Phi^{-1} (V_k)) \mathcal{A}_{svec}^T = \mathcal{Z} - \mathcal{Z}(I_m + \mathcal{Z})^{-1} \mathcal{Z} = I_m - (I_m + \mathcal{Z})^{-1}.$$

Поэтому формула пересчета (4.4.7) в точках $V_k \in \mathcal{F}_{D,V}^0$ может быть записана в виде

$$\operatorname{svec} V_{k+1} = \operatorname{svec} V_k - \alpha_k \mathcal{A}_{vech}^T \left[I_m + \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \right]^{-1} b, \quad (4.4.9)$$

где, как уже отмечалось, $V_0 \in \mathcal{F}_{D,V}^0$.

Соответствующий процесс (4.4.6) относительно переменной u также может быть представлен в более простом виде:

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k \left[I_m + \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \right]^{-1} b, \quad V^k = V(u_k). \quad (4.4.10)$$

В нем $u_0 \in \mathcal{F}_{D,u}^0$. Таким образом, итерационный процесс (4.4.10) должен стартовать с допустимой точки, причем внутренней допустимой точки. В большинстве случаев задать заранее такую начальную точку бывает достаточно сложно. В следующем варианте метода эта проблема частично снимается.

Общий итерационный процесс. Рассмотрим другую более общую зависимость переменной X от пары двойственных переменных u и V. Это позволит построить соответствующий итерационный процесс в объединенном пространстве $\mathbb{R}^m \times \mathbb{S}^n$, в котором уже не обязательно сохраняется равенство $V_k = = V(u_k)$. С этой целью сложим вместе уравнение (4.4.3) и третье равенство из (4.4.1), предварительно умноженное на произвольную константу $\tau > 0$. В результате приходим к уравнению

$$\Phi(V)\,\mathrm{svec}\,X = g(u,\,\mathrm{svec}\,V), \tag{4.4.11}$$

где правая часть $g(u, \mathrm{svec}\,V)$ имеет вид:

$$g(u,\,\mathrm{svec}\,V) = \mathcal{A}_{svec}^T b + \tau\left(\mathrm{svec}\,V + \mathcal{A}_{svec}^T u - \mathrm{svec}\,C\right).$$

Разрешая уравнение (4.4.11) относительно $\mathrm{svec}\,X$, получаем

$$\mathrm{svec}\,X = \Phi^{-1}(V)\,g(u,\mathrm{svec}\,V). \tag{4.4.12}$$

Переменная X становится теперь функцией двух аргуметов $X = X(u,V)$. Данная зависимость переходит в прежнюю зависимость (4.4.4), если в (4.4.11) положить $\tau = 0$, или, если взять $V = V(u)$.

Подставим найденную согласно (4.4.12) зависимость $X(u,V)$ в первые два равенства из (4.4.1):

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}(V)\,g(u,\,\mathrm{svec}\,V) - b & = & 0_m, \\ \tilde{V}^{\otimes}\Phi^{-1}(V)\,g(u,\,\mathrm{svec}\,V) & = & 0_{n_\triangle}. \end{array} \tag{4.4.13}$$

Система (4.4.13) состоит из $m + n_\triangle$ уравнений, число неизвестных в ней также равно $m + n_\triangle$.

Снова воспользуемся методом простой итерации, но уже для решения системы (4.4.13). Тогда приходим к следующему итерационному процессу

$$\begin{array}{rcl} u_{k+1} & = & u_k + \alpha_k\left[b - \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}(V_k)\ g(u_k,\,\mathrm{svec}\,V_k)\right], \\ \mathrm{svec}\,V_{k+1} & = & \mathrm{svec}\,V_k - \alpha_k\tilde{V}_k^{\otimes}\Phi^{-1}(V_k)\ g(u_k,\,\mathrm{svec}\,V_k). \end{array} \tag{4.4.14}$$

Потребуем от начальной точки $[u_0, V_0]$, чтобы $V_0 \succ 0$. Если $V_k \succ 0$, то за счет выбора шага α_k можно добиться выполнения неравенства $V_{k+1} \succ 0$. В этом случае аналогично тому, как это делалось в первом варианте метода, удается упростить формулы пересчета (4.4.14). А именно, подставляя выражение (4.4.8) для $\Phi^{-1}(V_k)$ и проводя последовательно выкладки, получаем

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k + \alpha_k \left\{ (I + \mathcal{Z}_k)^{-1} b + \right. \\ &+ \left. \tau \left[u_k - (I + \mathcal{Z}_k)^{-1} \left(u_k - \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \operatorname{svec}(V_k - C) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{4.4.15}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{svec} V_{k+1} &= \operatorname{svec} V_k - \alpha_k \left\{ \mathcal{A}_{svec}^T (I + \mathcal{Z}_k)^{-1} b + \tau \left[\operatorname{svec}(V_k - C) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \mathcal{A}_{svec}^T \left(I_m + \mathcal{Z}_k \right)^{-1} \left(u_k - \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \operatorname{svec}(V_k - C) \right) \right] \right\}. \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

Здесь $\mathcal{Z}_k = \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}_k^{-\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T$.

Заметим, что итерационный процесс (4.4.14) полностью соответствует процессу в векторно-матричной форме

$$u_{k+1} = u_k + \alpha_k \left[b - \mathcal{A} \bullet X_k \right], \qquad V_{k+1} = V_k - \alpha_k V_k \circ X_k, \tag{4.4.17}$$

в котором $X_k = X(u_k, V_k)$, $\mathcal{A}$ — $(mn \times n)$-матрица, составленная из матриц A_i, $1 \le i \le m$:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix}.$$

Запись $\mathcal{A} \bullet X$ — означает попарное умножение матриц A_i и X, т.е. результатом операции $\mathcal{A} \bullet X$ является m-мерный вектор с компонентами $A_i \bullet X$, $1 \le i \le m$.

Рекуррентную формулу для пересчета матриц V_k в процессе (4.4.17) можно представить в несколько ином виде. Это, в частности, позволит оценить величину шага α_k, при котором сохраняется положительная определенность матрицы V_{k+1}.

Пусть $Y_k = V_k \circ X_k$. Обе матрицы V_k и Y_k являются симметричными. Предположим дополнительно, что матрица V_k положительно определенная. Тогда, используя конгруэнтное приведение двух симметричных матриц, одна из которых положительно определенная, к диагональному виду, получаем для некоторой невырожденной матрицы P:

$$P^T V_k P = I_n, \quad P^T Y_k P = D(\omega_k), \tag{4.4.18}$$

где $\omega_k = [\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n]$ — вектор, составленный из собственных чисел матрицы $V_k^{-1} Y_k$. Все эти собственные числа действительные и согласно (4.4.18) имеем: $V_k = (P^{-1})^T P^{-1}$, $Y_k = (P^{-1})^T D(\omega_k) P^{-1}$. Поэтому правую формулу в (4.4.17) можно переписать как

$$V_{k+1} = (P^{-1})^T \left[I_n - \alpha_k D(\omega_k) \right] P^{-1}.$$

Отсюда видно, что матрица V_{k+1} будет положительно определенной в том и только том случае, когда $\bar{e} - \alpha_k \omega_k > 0_n$, где $\bar{e}$ — n-мерный вектор, состоящий из единиц. Пусть ω_k^{max} — максимальное положительное собственное число из набора $\omega_k^1, \ldots, \omega_k^n$, и пусть $\hat{\alpha}_k = 1/\omega_k^{max}$. Если положительных собственных чисел нет, то полагаем $\hat{\alpha}_k = +\infty$. Тогда указанное неравенство $\bar{e} - \alpha_k \omega_k > 0_n$ выполняется, если $\alpha_k < \hat{\alpha}_k$.

Невырожденность матрицы $\Phi(V)$. Для того, чтобы правые части систем (4.4.7) или (4.4.14) были корректно определены, требуется невырожденность матрицы $\Phi(V)$, имеющей вид

$$\Phi(V) = \mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}^{\otimes}.$$

Покажем, что действительно данная матрица является неособой, если точка $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ невырожденная.

Предположим, что ранг матрицы $V \in \mathbb{S}_+^n$ равняется s. Тогда она может быть представлена в виде

$$V = H \ \mathrm{Diag}\left(0, \ldots, 0, \theta^{r+1}, \ldots, \theta^n\right) \ H^T, \tag{4.4.19}$$

где H — ортогональная матрица, $r = n - s$ и $\theta^i > 0$, $r < i \leq n$. Если $s < n$, то V принадлежит границе конуса $\mathbb{S}_+^n$.

Из свойств кронекеровских произведений матриц вытекает следующее утверждение относительно кронекеровской суммы $V^{\otimes}$ матрицы V (см. приложение).

Утверждение 4.4.1. *Пусть для матрицы $V \in \mathcal{S}^n$ имеет место разложение* (4.4.19). *Тогда*

$$V^{\otimes} = \mathcal{H} D(\theta^{\otimes}) \mathcal{H}^T. \tag{4.4.20}$$

Здесь: $\mathcal{H} = H \otimes H$ — ортогональная матрица с $\mathcal{H}^T = H^T \otimes H^T$, через $\theta^{\otimes}$ обозначена диагональ диагональной матрицы

$$D^{\otimes}(\theta) = \frac{1}{2}\left[D(\theta) \otimes I_n + I_n \otimes D(\theta)\right].$$

Используя разложение (4.4.20), представим матрицу $\Phi(V)$ в виде

$$\Phi(V) = \mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{H} D(\theta^{\otimes}) \mathcal{H}^T \tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{4.4.21}$$

или, с учетом равенств (9) из приложения,

$$\begin{aligned} \Phi(V) &= \mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{H} D(\theta^{\otimes}) \tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{H}^T \tilde{\mathcal{D}}_n = \\ &= \mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{H} \tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n D(\theta^{\otimes}) \tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{H}^T \tilde{\mathcal{D}}_n. \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

Перейдем далее к нахождению более удобного для дальнейшего исследования виду матрицы $\Phi(V)$. Поскольку матрица $\mathcal{H}$ ортогональная, то

$$\mathcal{A}_{vec}^T = \mathcal{H}\mathcal{H}^T\mathcal{A}_{vec}^T = \mathcal{H}(\mathcal{A}_{vec}^H)^T. \tag{4.4.23}$$

Здесь введена $(m \times n^2)$-матрица $\mathcal{A}_{vec}^H$, строками которой являются векторы $\mathrm{vec}\,(H^T A_i H)$, $1 \le i \le m$. Так как все матрицы $H^T A_i H$ симметричные, то наряду с равенством (4.4.23) справедливо следующее равенство

$$\mathcal{A}_{svec}^T = \tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}\tilde{\mathcal{D}}_n(\mathcal{A}_{svec}^H)^T, \tag{4.4.24}$$

где $\mathcal{A}_{svec}^H$ — матрица, имеющая уже размер $m \times n_\triangle$, ее строками являются векторы $\mathrm{svec}(H^T A_i H)$, $1 \le i \le m$.

Из (4.4.23) получаем также $\mathcal{A}_{vec} = \mathcal{A}_{vec}^H\mathcal{H}^T$. Но $\mathcal{A}_{vec} = \mathcal{A}_{svec}\tilde{\mathcal{D}}_n^T$. Поэтому с учетом того, что $\tilde{\mathcal{D}}_n^T\tilde{\mathcal{D}}_n = I_{n_\triangle}$, а также формулы (9) из приложения имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{svec} = \mathcal{A}_{vec}^H\mathcal{H}^T\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{A}_{vec}^H\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}^T\tilde{\mathcal{D}}_n = \\ = \mathcal{A}_{svec}^H\tilde{\mathcal{D}}_n^T\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}^T\tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{A}_{svec}^H\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}^T\tilde{\mathcal{D}}_n. \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

Введем квадратную матрицу $\tilde{\mathcal{H}}$, положив $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}\tilde{\mathcal{D}}_n$. Ее порядок равен $n_\triangle$. Согласно формуле (10) из приложения и ортогональности матрицы H для обратной матрицы выполняется

$$\tilde{\mathcal{H}}^{-1} = \left(\tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}\tilde{\mathcal{D}}_n\right)^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}^T\tilde{\mathcal{D}}_n.$$

Таким образом, на основании (4.4.24) и (4.4.25) и для матрицы (4.4.21) справедливо представление

$$\Phi(V) = \tilde{\mathcal{H}}\mathcal{W}(\theta^\otimes)\tilde{\mathcal{H}}^{-1}, \tag{4.4.26}$$

где

$$\mathcal{W}(\theta^\otimes) = (\mathcal{A}_{svec}^H)^T\mathcal{A}_{svec}^H + \tilde{\mathcal{L}}_n D(\theta^\otimes)\tilde{\mathcal{D}}_n.$$

Квадратная матрица $\mathcal{W}(\theta^\otimes)$ также имеет порядок $n_\triangle$.

Пусть $\bar{\theta}^\otimes$ — $n_\triangle$-мерный вектор, определяемый согласно формуле $\bar{\theta}^\otimes = \mathcal{L}_n\theta^\otimes$. Как несложно проверить, $\tilde{\mathcal{L}}_n D(\theta^\otimes)\tilde{\mathcal{D}}_n = D(\bar{\theta}^\otimes)$ и, следовательно, матрица $\mathcal{W}(\theta^\otimes)$ фактически зависит от вектора $\bar{\theta}^\otimes$ и может быть записана в виде

$$\mathcal{W}(\bar{\theta}^\otimes) = (\mathcal{A}_{svec}^H)^T\mathcal{A}_{svec}^H + D(\bar{\theta}^\otimes). \tag{4.4.27}$$

В силу формулы (4.4.26) матрица $\Phi(V)$ подобна матрице $\mathcal{W}(\bar{\theta}^\otimes)$. Из вида матрицы $\mathcal{W}(\bar{\theta}^\otimes)$ следует, что она положительно полуопределенная. Если удастся показать, что $\mathcal{W}(\bar{\theta}^\otimes)$ — неособая матрица, то она будет положительно определенной.

Утверждение 4.4.2. *В невырожденной точке $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ матрица $\Phi(V)$ неособая.*

Доказательство. Достаточно установить, что неособой является матрица $\mathcal{W}(\bar{\theta}^{\otimes})$, имеющая вид (4.4.27). Чтобы в этом убедиться, рассмотрим линейную однородную систему уравнений

$$\mathcal{W}(\bar{\theta}^{\otimes})x = 0_{n_\triangle} \tag{4.4.28}$$

и покажем, что она имеет только тривиальное решение $x = 0_{n_\triangle}$.

Действительно, после умножения левой и правой части (4.4.28) на вектор-строку x^T получаем

$$\langle x, (\mathcal{A}^H_{svec})^T \mathcal{A}^H_{svec} x\rangle + \langle x, D(\bar{\theta}^{\otimes})x\rangle = 0. \tag{4.4.29}$$

Так как обе матрицы $(\mathcal{A}^H_{svec})^T \mathcal{A}^H_{svec}$ и $D(\bar{\theta}^{\otimes})$ положительно полуопределенные, то равенство (4.4.29) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\langle x, (\mathcal{A}^H_{svec})^T \mathcal{A}^H_{svec} x\rangle = 0, \quad \langle x, D(\bar{\theta}^{\otimes})x\rangle = 0. \tag{4.4.30}$$

Если все собственные числа у матрицы V строго положительны, то $\bar{\theta}^{\otimes} > 0_{n_\triangle}$ и из второго равенства (4.4.30) сразу следует, что $x = 0_{n_\triangle}$.

Далее предполагаем, что матрица V такова, что $\mathrm{rank} V = s < n$. Тогда среди собственных чисел матрицы V имеются нулевые. Пусть, для определенности, для V имеет место разложение (4.4.19), в котором $\theta^i > 0$, $r < i \le n$ и $\theta^j = 0$, $0 \le j \le r$, где $r = n - s$. Положим для сокращения записи: $n_B = r_\triangle$, $n_N = n_\triangle - r_\triangle$. Из-за невырожденности точки $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ выполняется неравенство: $n_B \le m$.

При сделанном предположении относительно собственных чисел матрицы V вектор $\tilde{\theta}^{\otimes}$ имеет вид:

$$\tilde{\theta}^{\otimes} = \left[\theta^1, \frac{\theta^1+\theta^2}{2}, \dots, \frac{\theta^1+\theta^n}{2},\ \theta^2, \frac{\theta^2+\theta^3}{2}, \dots, \frac{\theta^2+\theta^n}{2}, \dots, \theta^n\right]^T.$$

Отсюда видно, что среди $n_\triangle$ компонент вектора $\bar{\theta}^{\otimes}$ имеются $r_\triangle$ нулевых компонент, а именно, это те компоненты, которым соответствуют парные индексы (i,j) из набора индексов $\mathcal{J}^n_\triangle$ такие, что $i \le r$, $j \le i$ (см. приложение). Обозначим множество указанных парных индексов через $\mathcal{J}^r_\triangle$, т.е.

$$\mathcal{J}^r_\triangle = \{(1,1), (2,1), \dots, (r,1),\ (2,2), \dots, (r,2),\ \dots,\ (r,r)\}.$$

Возьмем матрицу перестановок Π, которая переставляет парные индексы (i,j) из $\mathcal{J}^n_\triangle$ таким образом, чтобы индексы (i,j), входящие в подмножество $\mathcal{J}^r_\triangle$, шли сначала, а остальные потом. Тогда после перестановки парных индексов из $\mathcal{J}^n_\triangle$ в соответствии с Π получаем, что вектор $\bar\theta^\otimes$ переходит в вектор $\hat\theta^\otimes$ той же размерности, что и вектор $\bar\theta^\otimes$, но уже имеющий вид:

$$\hat\theta^\otimes = \left[0,\ldots,0,\frac{\theta^{r+1}}{2},\ldots,\frac{\theta^n}{2},\ \ldots,\ \theta^{r+1},\frac{\theta^{r+1}+\theta^{r+2}}{2},\ldots,\theta^n\right]^T.$$

У вектора $\hat\theta^\otimes$ все компоненты, кроме первых $r_\triangle$ строго положительны.

Далее, если разбить вектор $\hat\theta^\otimes$ на две компоненты

$$\hat\theta^\otimes = \begin{bmatrix} \hat\theta^B \\ \hat\theta^N \end{bmatrix}, \tag{4.4.31}$$

первая из которых $\hat\theta^B$ принадлежит подпространству $\mathbb{R}^{n_B}$, а вторая $\hat\theta^N$ — подпространству $\mathbb{R}^{n_N}$, то $\hat\theta^B = 0_{r_\triangle}$, $\hat\theta^N > 0_{n_N}$.

Умножая матрицу $\mathcal{A}^H_{svec}$ справа на матрицу перестановок Π, приходим к матрице $\hat{\mathcal{A}}^H_{svec}$, в которой столбцы передвинуты таким образом, что столбцы с парными номерами (i,j) из $\mathcal{J}^r_\triangle$ оказываются в начале матрицы $\hat{\mathcal{A}}^H_{svec}$. Матрицу $\hat{\mathcal{A}}^H_{svec}$ разобьем также на две подматрицы в соответствии с разбиением (4.4.31), а именно,

$$\hat{\mathcal{A}}^H_{svec} = \left[\hat{\mathcal{A}}^H_{svec_B},\ \hat{\mathcal{A}}^H_{svec_N}\right].$$

Здесь первая матрица $\hat{\mathcal{A}}^H_{svec_B}$ имеет размер $m\times n_B$, вторая матрица $\mathcal{A}^H_{svec_N}$ — размер $m\times n_N$.

Если с целью сокращения записи положить:

$$B = \hat{\mathcal{A}}^H_{svec_B}, \quad N = \hat{\mathcal{A}}^H_{svec_N}, \quad \hat\Theta_N = D\left(\hat\theta^N\right),$$

то $\mathcal{W}(\bar\theta^\otimes) = \Pi\hat{\mathcal{W}}(\hat\theta^\otimes)\Pi^T$, а матрица $\hat{\mathcal{W}}(\hat\theta^\otimes)$ в введенных обозначениях имеет вид

$$\hat{\mathcal{W}}(\hat\theta^\otimes) = \begin{bmatrix} B^TB & B^TN \\ N^TB & N^TN+\hat\Theta_N \end{bmatrix}. \tag{4.4.32}$$

Разобьем также вектор x, входящий в уравнение (4.4.28), на две части $x=[x^B,x^N]$ в соответствии с разбиением вектора $\hat\theta^\otimes$.

На основании второго равенства (4.4.30) заключаем, что $x^N = 0_{n_N}$. Поэтому первое равенство (4.4.30) сводится к $\langle x^B,\ B^TBx^B\rangle = 0$. Отсюда следует, что $Bx^B = 0_m$. Но в невырожденных точках $V\in\mathcal{F}_{D,V}$

матрица B имеет полный ранг по столбцам, равный n_B. Таким образом, $x^B = 0_{n_B}$. Мы пришли к выводу, что уравнение (4.4.28) имеет только тривиальное решение $x = 0_{n_\triangle}$. Следовательно, матрица $\mathcal{W}(\bar{\theta}^{\otimes})$ неособая. ■

Ниже предполагается, что двойственная задача (4.1.2) является невырожденной, т.е. все точки $V \in \mathcal{F}_{D,V}$ невырожденные. Тогда, как следует из утверждения 4.4.2, решение системы (4.4.3) существует и единственно для любых $V \in \mathcal{F}_{D,V}$. Соответственно, решение системы (4.4.11) также существует и единственно для любых $[u, V] \in \mathcal{F}_D$. В силу непрерывности эти решения будут существовать и в окрестностях множеств $\mathcal{F}_{D,V}$ и $\mathcal{F}_D$. В этом случае правые части систем (4.4.7) и (4.4.14) полностью определены в некоторой области, содержащей допустимое множество $\mathcal{F}_D$.

Утверждение 4.4.3. *Пусть точка $u_* \in \mathcal{F}_{D,u}$ такова, что u_* вместе с $V_* = V(u_*)$ есть решение двойственной задачи* (4.1.2). *Пусть, кроме того, X_* — соответствующее решение прямой задачи* (4.1.1). *Считаем, что для $V = V_*$ имеет место представление* (4.4.19), *а для X_* — представление*

$$X_* = Q \operatorname{Diag}(\eta_*^1, \ldots, \eta_*^r, 0, \ldots, 0)\, Q^T, \qquad (4.4.33)$$

где Q — ортогональная матрица, причем у матрицы V_* последние s собственные значения строго положительные, а у матрицы X_* первые $r = n - s$ собственные значения строго положительные. Тогда $X_* = X(u_*, V_*)$ и пара $[u_*, V_*]$ является стационарной точкой итерационного процесса (4.4.17). *Соответственно, вектор u_* является стационарной точкой процесса* (4.4.6).

Доказательство. Согласно сделанным предположениям относительно собственных чисел матриц X_* и V_*, у вектора $\operatorname{svec} D(\eta_*)$, имеющего размерность $n_\triangle$, отличными от нуля (положительными) могут быть только компоненты, у которых парные номера (i, i) из набора $\mathcal{J}_\triangle^n$ таковы, что $i \leq r$. Напротив, у вектора $\bar{\theta}_*^{\otimes} = = \operatorname{svec} \theta_*^{\otimes}$ все компоненты с такими парными номерами нулевые. Поэтому $D(\bar{\theta}_*^{\otimes}) \operatorname{svec} D(\eta_*) = 0_{n_\triangle}$.

Учтем далее, что в решениях X_* и $[u_*, V_*]$ ортогональные матрицы Q и H из разложений (4.4.19) и (4.4.33) совпадают. Следовательно, выполняется равенство

$$D(\bar{\theta}_*^{\otimes})\mathcal{H}^{-1} \operatorname{svec} X_* = D(\bar{\theta}_*^{\otimes})\mathcal{H}^{-1}\mathcal{H} \operatorname{svec} D(\eta_*) = 0_{n_\triangle}.$$

Отсюда на основании (4.4.22) приходим к равенству

$$\Phi(V_*) \operatorname{svec} X_* = \mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X_* = \mathcal{A}_{svec}^T b.$$

Таким образом, при $[u, V] = [u_*, V_*]$ вектор $\operatorname{svec} X_*$ удовлетворяет уравнению (4.4.11). Поэтому в силу единственности решения этого уравнения заключаем, что $X(u_*, V_*) = X_*$.

Так как $V_* \circ X_* = 0_{nn}$ и $\mathcal{A} \bullet X_* = b$, то пара $[u_*, V_*]$ является стационарной точкой итерационного процесса (4.4.17). Соответственно, вектор u_* является стационарной точкой процесса (4.4.6). ■

Матрица Якоби алгоритмического отображения. Ниже нам потребуется матрица Якоби алгоритмического отображения метода (4.4.17), состоящая из матриц Якоби двух компонент правых частей в этом итерационном процессе, а именно, $b - \mathcal{A} \bullet X(u, V)$ и $V \circ X(u, V)$.

Введем в рассмотрение матричную функцию $F(u, V) = V \circ X(u, V)$ и отображение

$$\mathcal{Q}(u, V) = \left[\begin{array}{c} \mathcal{Q}^1(u, V) \\ \mathcal{Q}^2(u, V) \end{array} \right], \tag{4.4.34}$$

где $\mathcal{Q}^1(u, V) = \mathcal{A}_{svec} \operatorname{svec} X(u, V)$, $\mathcal{Q}^2(u, V) = \operatorname{svec} F(u, V)$.

Найдем матрицы Якоби отображений $\mathcal{Q}^1(u, V)$ и $\mathcal{Q}^2(u, V)$ относительно переменных u и V, точнее, от u и $\operatorname{svec} V$. Чтобы их получить, надо знать, разумеется, матрицы Якоби X_u и X_V от матричной функции $X(u, V)$. Согласно определению (см. приложение)

$$X_u(u, V) = \frac{\partial \ \mathrm{vec} X(u, V)}{\partial u}, \quad X_V(u, V) = \frac{\partial \ \mathrm{vec} X(u, V)}{\partial \ \mathrm{vec} V}.$$

Рассмотрим также матрицы Якоби

$$X_u^{\triangle}(u, V) = \tilde{\mathcal{L}}_n X_u(u, V) = \frac{\partial \ \operatorname{svec} X(u, V)}{\partial u},$$

$$X_V^{\triangle}(u, V) = \tilde{\mathcal{L}}_n X_V(u, V) \tilde{\mathcal{D}}_n = \frac{\partial \ \operatorname{svec} X(u, V)}{\partial \ \operatorname{svec} V},$$

учитывающие симметричность матриц $X(u, V)$ и V.

Имеем для отображения $\mathcal{Q}^1(u, V)$:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^1(u, V)}{\partial u} = \mathcal{A}_{svec} \frac{\partial \operatorname{svec} X(u, V)}{\partial u} = \mathcal{A}_{svec} X_u^{\triangle}(u, V), \tag{4.4.35}$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^1(u, V)}{\partial \ \operatorname{svec} V} = \mathcal{A}_{svec} \frac{\partial \ \operatorname{svec} X(u, V)}{\partial \ \operatorname{svec} V} = \mathcal{A}_{svec} X_V^{\triangle}(u, V). \tag{4.4.36}$$

Соответственно для отображения $\mathcal{Q}^2(u, V)$:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^2(u, V)}{\partial u} = \frac{\partial \ \operatorname{svec} F(u, V)}{\partial u} = \tilde{\mathcal{L}}_n F_u(u, V), \tag{4.4.37}$$

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^2(u,V)}{\partial\ \mathrm{svec}\, V} = \frac{\partial\ \mathrm{svec}\, F(u,V)}{\partial\ \mathrm{svec}\, V} = \tilde{\mathcal{L}}_n F_V(u,V)\tilde{\mathcal{D}}_n, \tag{4.4.38}$$

где

$$F_u(u,V) = \frac{\partial\ \mathrm{vec} F(u,V)}{\partial u}, \quad F_V(u,V) = \frac{\partial\ \mathrm{vec} F(u,V)}{\partial\ \mathrm{vec} V}$$

есть матрицы Якоби матричной функции $F(u,V)$ относительно переменных u и V соответственно.

Утверждение 4.4.4. *Матрицы Якоби отображений $\mathcal{Q}^1(u,V)$ и $\mathcal{Q}^2(u,V)$ относительно двойственной переменной и имеют вид:*

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^1(u,V)}{\partial u} = \mathcal{A}_{svec} X_u^{\triangle}(u,V), \quad \frac{\partial \mathcal{Q}^2(u,V)}{\partial u} = \tilde{V}^{\otimes} X_u^{\triangle}(u,V), \tag{4.4.39}$$

где $\tilde{V}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n V^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$.

Доказательство. Фактически надо убедиться в справедливости только второй формулы в (4.4.39), основываясь на полученном представлении (4.4.37) данной производной.

Из вида функции $F(u,V)$ следует, что

$$F_u(u,V) = \frac{1}{2}\frac{\partial\ \mathrm{vec}\,[X(u,V)V + VX(u,V)]}{\partial u}$$

или, если воспользоваться формулой (6) из приложения,

$$\frac{\partial\ \mathrm{vec}(X(u,V)V)}{\partial u} = \frac{\partial\ [(V \otimes I_n)\mathrm{vec} X(u,V)]}{\partial u}, \tag{4.4.40}$$

$$\frac{\partial\ \mathrm{vec}(VX(u,V))}{\partial u} = \frac{\partial\ [(I_n \otimes V)\mathrm{vec} X(u,V)]}{\partial u}. \tag{4.4.41}$$

Кроме того, так как матрица $X(u,V)$ симметричная,

$$X_u(u,V) = \tilde{\mathcal{D}}_n X_u^{\triangle}(u,V).$$

Отсюда и из (4.4.40), (4.4.41), используя также (4.4.37), получаем вид матрицы Якоб (4.4.39) отображения $Q^2(u,V)$ относительно u. ■

Найдем теперь матрицы Якоби отображений $\mathcal{Q}^1(u,V)$ и $\mathcal{Q}^2(u,V)$ относительно $\mathrm{svec}\, V$. Для этого нам надо знать производную $F_V(u,V)$. Чтобы ее вычислить, привлечем следующее утверждение.

Лемма 4.4.1. *Матрица Якоби $F_V(u,V)$ для матричной функции $F(u,V)$ имеет вид*

$$F_V(u,V) = X^{\otimes} + V^{\otimes} X_V(u,V). \tag{4.4.42}$$

Доказательство. Пусть $H(u,V) = VX(u,V)$. Дифференциал этой матричной функции относительно переменной V равняется

$$d\,H(u,V) = dV\;\, X(u,V) + V\;\, dX(u,V).$$

В векторной форме данное соотношение запишется как

$$d\ \mathrm{vec}\ (H(u,V)) = \mathrm{vec}\ (dV\;\, X(u,V)) + \mathrm{vec}\ (V\;\, dX(u,V))\,.$$

Тогда на основании формулы (6) из приложения получаем

$$\begin{aligned} d(\mathrm{vec}\ H(u,V)) \quad &= \quad \left(X^T(u,V) \otimes I_n\right) d\ \mathrm{vec}\ V + \\ &+ \quad (I_n \otimes V)\, \mathrm{vec}\, (dX(u,V)). \end{aligned} \tag{4.4.43}$$

Но по определению первого дифференциала

$$\mathrm{vec}\, (dX(u,V)) = X_V(u,V) d\ \mathrm{vec}\ V.$$

Подставляя данное равенство в (4.4.43), приходим к

$$d(\mathrm{vec}\ H) = \left[\left(X^T(u,V) \otimes I_n\right) + (I_n \otimes V)\, X_V(u,V)\right] d\ \mathrm{vec}\ V.$$

Таким образом, с учетом симметричности матрицы $X(u,V)$,

$$H_V(u,V) = X(u,V) \otimes I_n + (I_n \otimes V)\, X_V(u,V). \tag{4.4.44}$$

Аналогичным образом показывается, что матрица Якоби для матричной функции $G(u,V) = X(u,V)V$ относительно переменной V имеет вид

$$G_V(u,V) = I_n \otimes X(u,V) + (V \otimes I_n)\, X_V(u,V). \tag{4.4.45}$$

Из (4.4.44) и (4.4.45) вытекает (4.4.42). ∎

Используя (4.4.36), а также результат леммы 4.4.1, делаем вывод, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4.4.5. *Матрицы Якоби отображений $\mathcal{Q}^1(u,V)$ и $\mathcal{Q}^2(u,V)$ относительно переменной* $\mathrm{svec}\,V$ *следующие:*

$$\frac{\partial \mathcal{Q}^1(u,V)}{\partial\ \mathrm{svec}\,V} = \mathcal{A}_{svec} X_V^{\triangle}(u,V), \quad \frac{\partial \mathcal{Q}^2(u,V)}{\partial\, \mathrm{svec}\,V} = \tilde{X}^{\otimes} + \tilde{V}^{\otimes} X_V^{\triangle}(u,V), \tag{4.4.46}$$

где $\tilde{X}^{\otimes} = \tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$.

Доказательство. Чтобы прийти к формулам в (4.4.46), достаточно заметить, что $X_V(u,V) = \tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n X_V(u,V)$. $\blacksquare$

После подстановки соответствующих выражений (4.4.39), и (4.4.46) для частных производных, приходим к следующей матрице Якоби для общего отображения $\mathcal{Q}(u,V)$:

$$\mathcal{Q}_{[u,svecV]}(u,V) = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{svec} X_u^{\triangle} & \mathcal{A}_{svec} X_V^{\triangle} \\ \tilde{V}^{\otimes} X_u^{\triangle} & \tilde{X}^{\otimes} + \tilde{V}^{\otimes} X_V^{\triangle} \end{bmatrix}. \tag{4.4.47}$$

Здесь $\tilde{X}^{\otimes} = \tilde{X}^{\otimes}(u,V)$ и $X_u^{\triangle} = X_u^{\triangle}(u,V)$, $X_V^{\triangle} = X_V^{\triangle}(u,V)$. Отметим также, что обе матрицы $\tilde{X}^{\otimes}$ и $\tilde{V}^{\otimes}$ в (4.4.47) являются квадратными порядка порядка $n_{\triangle}$.

Чтобы найти окончательное представление матрицы Якоби (4.4.47), остается только найти матрицы $X_u^{\triangle}(u,V)$ и $X_V^{\triangle}(u,V)$.

Утверждение 4.4.6. *Матрица Якоби отображения $\mathcal{Q}(u,V)$ имеет вид*

$$\begin{bmatrix} \tau \mathcal{A}_{svec} \Phi^{-1} \mathcal{A}_{svec}^T & \mathcal{A}_{svec} \Phi^{-1} \left(\tau I_{n_{\triangle}} - \tilde{X}^{\otimes} \right) \\ \tau \tilde{V}^{\otimes} \Phi^{-1} \mathcal{A}_{svec}^T & \left(I_{n_{\triangle}} - \tilde{V}^{\otimes} \Phi^{-1} \right) \tilde{X}^{\otimes} + \tau \tilde{V}^{\otimes} \Phi^{-1} \end{bmatrix}, \tag{4.4.48}$$

где $\Phi^{-1} = \Phi^{-1}(V)$.

Доказательство. Определим матрицы $X_u^{\triangle}(u,V)$ и $X_V^{\triangle}(u,V)$, используя равенство (4.4.11). Дифференцирование данного равенства по u дает

$$\left(\mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}^{\otimes} \right) X_u^{\triangle}(u,V) = \tau \mathcal{A}_{svec}^T. \tag{4.4.49}$$

Дифференцирование по $\mathrm{svec}\, V$ приводит к

$$\mathcal{A}_{svec}^T \mathcal{A}_{svec} X_V^{\triangle}(u,V) + \frac{\partial \left(\tilde{V}^{\otimes} \mathrm{svec} X(u,V) \right)}{\partial \mathrm{svec} V} = \tau I_{n_{\triangle}}. \tag{4.4.50}$$

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в левой части (4.4.50). Имеем

$$\frac{\partial \left(\tilde{\mathcal{L}}_n V^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n \mathrm{svec} X(u,V) \right)}{\partial \mathrm{svec} V} = \tilde{\mathcal{L}}_n \frac{\partial \left(V^{\otimes}\, \mathrm{vec}\ X(u,V) \right)}{\partial\, \mathrm{vec}\ V} \tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{L}}_n F_V(u,V) \tilde{\mathcal{D}}_n.$$

Поэтому согласно (4.4.46)

$$\frac{\partial \left(\tilde{V}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, X(u,V) \right)}{\partial\, \mathrm{svec}\, V} = \tilde{X}^{\otimes}(u,V) + \tilde{V}^{\otimes} X_V^{\triangle}(u,V). \tag{4.4.51}$$

После подстановки выражения (4.4.51) в (4.4.50) приходим к равенству

$$\tilde{X}^{\otimes}(u,V) + \left[\mathcal{A}^T_{svec}\mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}^{\otimes}\right] X^{\triangle}_V(u,V) = \tau I_{n_\triangle}. \qquad (4.4.52)$$

Тогда равенства (4.4.49) и (4.4.52) можно переписать как

$$\Phi(V)X^{\triangle}_u(u,V) = \tau\mathcal{A}^T_{svec}, \quad \tilde{X}^{\otimes} + \Phi(V)X^{\triangle}_V(u,V) = \tau I_{n_\triangle}.$$

Если матрица $\Phi(V)$ неособая, то отсюда следует:

$$X^{\triangle}_u(u,V) = \tau\Phi^{-1}(V)\mathcal{A}^T_{svec}, \quad X^{\triangle}_V(u,V) = \Phi^{-1}(V)\left[\tau I_{n_\triangle} - \tilde{X}^{\otimes}(u,V)\right].$$

После подстановки найденных выражений в матрицу Якоби (4.4.47), приходим к выводу, что данная матрица $\mathcal{Q}_{[u,svecV]}(u,V)$ преобразуется к виду (4.4.48). ■

Сходимость метода. Покажем, что методы (4.4.7), (4.4.14) обладают локальной сходимостью. На самом деле достаточно доказать, что локальной сходимостью обладает более общий метод (4.4.14). Сходимость первого метода (4.4.7) будет следовать автоматически из сходимости (4.4.14).

Нам потребуется матрица (4.4.48) в решении $[u_*, V_*]$ двойственной задачи (4.1.2). Для этого следует знать матрицы $X^{\otimes}_*$ и $V^{\otimes}_*$, где $X_* = X(u_*, V_*)$ согласно утверждению 4.4.3 есть решение прямой задачи (4.1.1). При этом предполагаем, что в оптимальных решениях задач (4.1.1) и (4.1.2) выполнено условие строгой дополнительности.

Поскольку матрицы X_* и V_* симметричные, обе матрицы $X^{\otimes}_*$ и $V^{\otimes}_*$ также являются симметричными. Более того, поскольку матрицы X_* и V_* коммутируют между собой, матрицы $X^{\otimes}_*$ и $V^{\otimes}_*$ также коммутируют между собой. Поэтому найдется ортогональная матрица U порядка n^2 такая, что

$$X^{\otimes}_* = UD(\nu_*)U^T, \quad V^{\otimes}_* = UD(\mu_*)U^T, \qquad (4.4.53)$$

где ν_* и μ_* — n^2-мерные векторы, состоящие из собственных чисел соответственно матриц $X^{\otimes}_*$ и $V^{\otimes}_*$. Все эти собственные числа в силу симметричности матриц $X^{\otimes}_*$ и $V^{\otimes}_*$ вещественные. На самом деле, в качестве матрицы U может быть взята, например, ортогональная матрица $H \otimes H$ и имеет место следующий результат (см. приложение).

Лемма 4.4.2. *Пусть для $X = X_*$ и $V = V_*$ выполнено соответственно* (4.4.33) *и* (4.4.19). *Тогда справедливы следующие разложения:*

$$X^{\otimes}_* = \mathcal{H}D(\eta^{\otimes}_*)\mathcal{H}^T, \quad V^{\otimes}_* = \mathcal{H}D(\theta^{\otimes}_*)\mathcal{H}^T, \qquad (4.4.54)$$

где $\mathcal{H} = H \otimes H$, векторы $\eta_*^{\otimes}$ и $\theta_*^{\otimes}$ — диагонали соответственно матриц $(D(\eta_*))^{\otimes}$ и $(D(\theta_*))^{\otimes}$.

Доказательство. Следует только учесть, что поскольку матрицы X_* и V_* коммутируют между собой, то в качестве ортогональной матрицы Q в разложении (4.4.33) может быть взята матрица H. ■

Предположим, что матрица X_* в разложении (4.4.33), в котором $Q = H$, имеет ранг r и такова, что

$$\eta_*^1 > 0, \ldots, \eta_*^r > 0, \quad \eta_*^{r+1} = \cdots = \eta_*^n = 0.$$

Тогда из предположения о строгой дополнительности X_* и V_* следует, что ранг V_* равен s, где $r+s=n$, а для соответствующих собственных чисел $\theta_*^1, \ldots, \theta_*^n$ матрицы V_* выполняется:

$$\theta_*^1 = \cdots = \theta_*^r = 0, \quad \theta_*^{r+1} > 0, \ldots, \theta_*^n > 0, \tag{4.4.55}$$

Пусть, как и при доказательстве утверждения 4.4.2, используются обозначения: $n_B = r_\triangle$ и $n_N = n_\triangle - r_\triangle$. Векторам $\eta_*^{\otimes}$ и $\theta_*^{\otimes}$ соответствую векторы $\bar{\eta}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n \eta_*^{\otimes}$ и $\bar{\theta}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n \theta_*^{\otimes}$, состоящие из $n_\triangle$ компонент. Если переставить эти компоненты с помощью матрицы перестановки Π (как это делалось при доказательстве утверждения 4.4.2), то приходим к векторам $\hat{\eta}_*^{\otimes} = \Pi^T \bar{\eta}_*^{\otimes}$ и $\hat{\theta}_*^{\otimes} = \Pi^T \bar{\theta}_*^{\otimes}$. У вектора $\hat{\eta}_*^{\otimes}$ все компоненты, за исключением последних компонент в количестве $s_\triangle$ штук положительные. Все эти последние компоненты нулевые. Напротив, у вектора $\hat{\theta}_*^{\otimes}$ нулевыми являются первые $n_B = r_\triangle$ компоненты, а остальные компоненты положительные.

Теорема 4.4.1. *Пусть X_* и $[u_*, V_*]$ — невырожденные решения прямой и двойственной задач (4.1.1) и (4.1.2). Пусть, кроме того, для X_* и V_* выполнено условие строгой дополнительности. Тогда итерации, определяемые по формуле* (4.4.14), *в которой шаг α_k берется постоянным и достаточно малым, локально сходятся к $[u_*, V_*]$ с линейной скоростью.*

Доказательство. Если объединить обе переменные u и $\operatorname{svec} V$ в единую переменную $y = [u, \operatorname{svec} V] \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n_\triangle}$, то итерационный процесс (4.4.14) можно записать как

$$y_{k+1} = y_k - \alpha_k \mathcal{Q}(y_k), \tag{4.4.56}$$

где $\mathcal{Q}(y)$ — отображение $Q(u, V)$ из (4.4.34), правда зависящее вместо V от $\operatorname{svec} V$, что фактически одно и то же. Считаем, что шаг α_k в

(4.4.56) берется постоянным и достаточно малым, равным $\alpha > 0$. Если ввести отображение $\mathcal{G}(y) = y - \alpha\mathcal{Q}(y)$, то точка $y_* = [u_*, \operatorname{svec} V_*]$ является неподвижной точкой этого отображения для любого $\alpha > 0$.

Рассмотрим матрицу Якоби $\mathcal{G}_y(y_*)$ отображения $\mathcal{G}(y)$ в точке y_*. Покажем, что найдется $\bar{\alpha} > 0$, для которого при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ спектральный радиус ρ этой матрицы удовлетворяет условию

$$\rho(\mathcal{G}_y(y_*)) < 1. \tag{4.4.57}$$

Тогда, по теореме Островского вектор y_* является точкой притяжения для итерационного процесса (4.4.14) и итерации, определяемые (4.4.14), локально сходятся к y_* с линейной скоростью.

Матрица Якоби отображения $\mathcal{G}_y(y_*)$ имеет вид:

$$\mathcal{G}_y(y_*) = I - \alpha\mathcal{Q}_y(y_*). \tag{4.4.58}$$

Поэтому, чтобы найти спектральный радиус матрицы $\mathcal{G}_y(y_*)$, фактически остается только найти собственные значения матрицы $\mathcal{Q}_y(y)$ в точке $y = y_*$. Определение этих значений разобьем на три отдельных этапа.

1) Воспользуемся полученным блочным представлением (4.4.48) матрицы $\mathcal{Q}_y(y)$. Пусть λ — произвольное собственное число матрицы $\mathcal{Q}_y(y_*)$. Тогда оно удовлетворяет следующему характеристическому уравнению:

$$\begin{vmatrix} \tau\mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\mathcal{A}_{svec}^T - \lambda I_m & \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\left(\tau I_{n_\triangle} - \tilde{X}_*^{\otimes}\right) \\ \tau\tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1}\mathcal{A}_{svec}^T & \left(I_{n_\triangle} - \tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1}\right)\tilde{X}_*^{\otimes} + \tau\tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1} - \lambda I_{n_\triangle} \end{vmatrix} = 0,$$

в котором $\Phi^{-1} = \Phi^{-1}(V_*)$.

Умножим правый столбец справа на матрицу $\mathcal{A}_{svec}^T$ и вычтем его из левого столбца. Тогда получим

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\tilde{X}_*^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T - \lambda I_m & \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\left(\tau I_{n_\triangle} - \tilde{X}_*^{\otimes}\right) \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 \end{vmatrix} = 0,$$

где обозначено

$$\Lambda_1 = \left(\tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1} - I_{n_\triangle}\right)\tilde{X}_*^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T + \lambda\mathcal{A}_{svec}^T,$$

$$\Lambda_2 = \left(I_{n_\triangle} - \tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1}\right)\tilde{X}_*^{\otimes} + \tau\tilde{V}_*^{\otimes}\Phi^{-1} - \lambda I_{n_\triangle}.$$

Умножим далее первую строку слева на матрицу $\mathcal{A}_{svec}^T$ и сложим ее со второй строкой. Учитывая, что

$$\left(\mathcal{A}_{svec}^T\mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}_*^{\otimes}\right)\Phi^{-1} = I_{n_\triangle},$$

приходим к

$$\begin{vmatrix} \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\tilde{X}_*^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T - \lambda I_m & \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}\left(\tau I_{n_\triangle} - \tilde{X}_*^{\otimes}\right) \\ 0_{n_\triangle m} & (\tau-\lambda)I_{n_\triangle} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда сразу следует, что у матрицы $\mathcal{Q}_y(y_*)$ имеются собственные числа в количестве $n_\triangle$ штук, равные τ. Остальные собственные числа совпадают с собственными числами левой верхней матрицы

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}(V_*)\tilde{X}_*^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T.$$

Матрица $\mathcal{Q}_1$ квадратная порядка m.

2) Найдем конкретный вид матрицы $\mathcal{Q}_1$. Используя (4.4.54), получаем: $\tilde{X}_*^{\otimes} = \tilde{\mathcal{H}}D(\bar{\eta}_*^{\otimes})\tilde{\mathcal{H}}^T$, где по-прежнему $\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{L}}_n\mathcal{H}\tilde{\mathcal{D}}_n$. Тогда согласно (4.4.26) и (4.4.27) имеем

$$\mathcal{Q}_1 = \mathcal{A}_{svec}^H\mathcal{W}^{-1}(\bar{\theta}_*^{\otimes})D(\bar{\eta}_*^{\otimes})(\mathcal{A}_{svec}^H)^T,$$

или, если воспользоваться матрицей перестановок Π из доказательства утверждения 4.4.2,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_1 = \mathcal{A}_{svec}^H\Pi\Pi^T\mathcal{W}^{-1}(\bar{\theta}_*^{\otimes})\Pi\Pi^T D(\bar{\eta}_*^{\otimes})\Pi\Pi^T(\mathcal{A}_{svec}^H)^T = \\ = \hat{\mathcal{A}}_{svec}^H\hat{\mathcal{W}}^{-1}(\hat{\theta}_*^{\otimes})D(\hat{\eta}_*^{\otimes})(\hat{\mathcal{A}}_{svec}^H)^T.\end{aligned}$$

Здесь через $\hat{\mathcal{A}}_{svec}^H$ обозначена матрица $\hat{\mathcal{A}}_{svec}^H = \mathcal{A}_{svec}^H\Pi$. Для матрицы $\hat{\mathcal{W}}(\hat{\theta}_*^{\otimes})$ согласно (4.4.32) справедливо блочное представление

$$\hat{\mathcal{W}}(\hat{\theta}_*^{\otimes}) = \begin{bmatrix} \mathcal{W}_{11} & \mathcal{W}_{12} \\ \mathcal{W}_{21} & \mathcal{W}_{22} \end{bmatrix},$$

где

$$\mathcal{W}_{11} = \hat{B}^T\hat{B}, \quad \mathcal{W}_{12} = \mathcal{W}_{21}^T = \hat{B}^T\hat{N}, \quad \mathcal{W}_{22} = \hat{N}^T\hat{N} + \hat{\Theta}_N.$$

При сделанных предположениях, как это следует из утверждения 4.4.2, матрица $\hat{\mathcal{W}}(\hat{\theta}_*^{\otimes})$ неособая. Поскольку $\hat{\Theta}_N \succ 0$, то правая нижняя подматрица $\mathcal{W}_{22}$ матрицы $\hat{\mathcal{W}}(\hat{\theta}_*^{\otimes})$ также оказывается неособой. Из-за невырожденности точки V_* левая верхняя подматрица $\mathcal{W}_{11}$, будучи матрицей Грама, составленной для линейно независимых векторов, также будет неособой.

Положим

$$\hat{\mathcal{W}}^{-1}(\hat{\theta}_*^{\otimes}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_{11} & \tilde{\mathcal{W}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{W}}_{21} & \tilde{\mathcal{W}}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.4.59}$$

и обозначим

$$\mathcal{K} = \hat{N}^T \hat{N} + \hat{\Theta}_N - \hat{N}^T \hat{B} \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1} \hat{B}^T \hat{N}.$$

Тогда согласно формуле Фробениуса для вычисления обратной матрицы

$$\tilde{\mathcal{W}}_{11} = \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1} + \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1} \hat{B}^T \hat{N} \mathcal{K}^{-1} \hat{N}^T \hat{B} \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1}.$$

$$\tilde{\mathcal{W}}_{22} = \mathcal{K}^{-1}, \quad \tilde{\mathcal{W}}_{21} = \tilde{\mathcal{W}}_{12}^T = -\mathcal{K}^{-1} \hat{N}^T \hat{B} \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1}.$$

Пусть $\mathcal{R}(\hat{B})$ обозначает пространство столбцов матрицы $\hat{B}$ и пусть $\mathcal{R}^{\perp}(\hat{B})$ — его ортогональное дополнение. Из предположения о невырожденности точки $V_* \in \mathcal{F}_{D,V}$ размерность пространства $\mathcal{R}(\hat{B})$ равна $n_B \leq m$. Тогда матрицу $\mathcal{K}$ можно записать как

$$\mathcal{K} = \hat{\Theta}_N + \hat{N}^T \left[I_m - \mathcal{P}\right] \hat{N} = \hat{\Theta}_N + \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp} \hat{N},$$

где $\mathcal{P} = \hat{B} \left(\hat{B}^T \hat{B}\right)^{-1} \hat{B}^T$ и $\mathcal{P}_{\perp} = I_m - \mathcal{P}$ — матрицы ортогонального проектирования на соответственно подпространства $\mathcal{R}(\hat{B})$ и $\mathcal{R}^{\perp}(\hat{B})$. Матрица $\mathcal{P}_{\perp}$ является симметрической и идемпотентной, т.е. $\mathcal{P}_{\perp} = \mathcal{P}_{\perp}^2$. Поэтому $\mathcal{K} = \hat{\Theta}_N + \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp}^2 \hat{N}$.

Чтобы вычислить обратную матрицу $\mathcal{K}^{-1}$, воспользуемся формулой Шермана-Моррисона-Вудберри. Так как $\hat{\Theta}_N$ — положительно определенная матрица, то согласно этой формуле

$$\mathcal{K}^{-1} = \hat{\Theta}_N^{-1} - \hat{\Theta}_N^{-1} \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp} \left(I + \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \hat{\Theta}_N^{-1} \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp}\right)^{-1} \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \hat{\Theta}_N^{-1}. \tag{4.4.60}$$

С помощью выражения (4.4.59) для матрицы $\hat{\mathcal{W}}^{-1}(\hat{\theta}_*^{\otimes})$, приходим к

$$\mathcal{Q}_1 = \left[\hat{B}\ \hat{N}\right] \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{W}}_{11} & \tilde{\mathcal{W}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{W}}_{21} & \tilde{\mathcal{W}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_B(\hat{\eta}_*^{\otimes}) & 0 \\ 0 & D_N(\hat{\eta}_*^{\otimes}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}^T \\ \hat{N}^T \end{bmatrix}, \tag{4.4.61}$$

где через $D_B(\tilde{\eta}_*^{\otimes})$ и $D_N(\tilde{\eta}_*^{\otimes})$ обозначены левая верхняя и правая нижняя диагональные подматрицы матрицы $D(\hat{\eta}_*^{\otimes})$ порядков соответственно n_B и n_N.

Имеем

$$\begin{gathered}\hat{B}\tilde{\mathcal{W}}_{11} + \hat{N}\tilde{\mathcal{W}}_{21} = \\ = \hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1} + \mathcal{P}\hat{N}\mathcal{K}^{-1}\hat{N}^T\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1} - \hat{N}\mathcal{K}^{-1}\hat{N}^T\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1} = \\ = \hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1} - \mathcal{P}_\perp\hat{N}\mathcal{K}^{-1}\hat{N}^T\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1} = \\ = \left(I - \mathcal{P}_\perp\hat{N}\mathcal{K}^{-1}\hat{N}^T\right)\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1}.\end{gathered}$$

Кроме того,

$$\begin{gathered}\hat{B}\tilde{\mathcal{W}}_{12} + \hat{N}\tilde{\mathcal{W}}_{22} = \\ = -\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1}\hat{B}^T\hat{N}\mathcal{K}^{-1} + \hat{N}\mathcal{K}^{-1} = \mathcal{P}_\perp\hat{N}\mathcal{K}^{-1}.\end{gathered}$$

Отсюда и из (4.4.61) приходим к представлению: $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1^{(1)} + \mathcal{Q}_1^{(2)}$, где

$$\mathcal{Q}_1^{(1)} = \left(I - \mathcal{P}_\perp\hat{N}\mathcal{K}^{-1}\hat{N}^T\right)\hat{B}\left(\hat{B}^T\hat{B}\right)^{-1}D_B(\hat{\eta}_*^{\otimes})\hat{B}^T,$$

$$\mathcal{Q}_1^{(2)} = \mathcal{P}_\perp\hat{N}\mathcal{K}^{-1}D_N(\hat{\eta}_*^{\otimes})\hat{N}^T.$$

Определим собственные значения матрицы $\mathcal{Q}_1$. Пусть λ — произвольное собственное значение и пусть z — соответствующий ему собственный вектор матрицы $\mathcal{Q}_1$. Тогда

$$\mathcal{Q}_1\, z = \lambda z. \tag{4.4.62}$$

Предположим сначала, что $\hat{B}^T z \neq 0_{n_B}$ и, стало быть, $\mathcal{P}z \neq 0_m$, если $z \notin \mathcal{R}^\perp(\cap B)$. Обозначим $\bar{z} = \hat{B}^T z$. Тогда после умножения левой и правой части равенства (4.4.62) на матрицу $\hat{B}^T$ получаем, что (4.4.62) сводится к следующему равенству

$$\hat{B}^T\mathcal{Q}_1 z = \hat{B}^T\mathcal{Q}_1^{(1)} z = D_B(\hat{\eta}_*^{\otimes})\bar{z} = \lambda\bar{z}. \tag{4.4.63}$$

Так как все собственные значения матрицы $\hat{B}^T\mathcal{Q}_1^{(1)}$ должны быть и собственными значениями матрицы $\mathcal{Q}_1$ (это вытекает из теоремы о собственных значениях произведения двух матриц), то из (4.4.63) следует, что таких значений имеется $n_B = r_\triangle$ штук и они совпадают с диагональными элементами матрицы $D_B(\hat{\eta}_*^{\otimes})$. Все эти элементы определяются положительными собственными значениями матрицы X_* и также являются положительными.

3) Если $n_B < m$, то у нас остаются еще неопределенными собственные значения матрицы $\mathcal{Q}_1$ в количестве $m - n_B$ штук. Чтобы их найти, предположим теперь, что $\hat{B}^T z = 0_{n_B}$, т.е. $\mathcal{P}z = 0_m$, $z \in \mathcal{R}^{\perp}(\hat{B})$. Тогда равенство (4.4.62) сводится к следующему:

$$\mathcal{Q}_1 z = \mathcal{Q}_1^{(2)} z = \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \mathcal{K}^{-1} D^N(\hat{\eta}_*^{\otimes}) \hat{N}^T z = \lambda z.$$

Подставляя выражение (4.4.60) для матрицы $\mathcal{K}^{-1}$, получаем после проведения соответствующих выкладок:

$$\Omega z = \lambda z, \quad \Omega = (I + \mathcal{Y})^{-1} \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \hat{\Lambda}_N \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp}, \tag{4.4.64}$$

Здесь использованы обозначения: $\mathcal{Y} = \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \hat{\Theta}_N^{-1} \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp}$ и

$$\hat{\Lambda}_N = \hat{\Theta}_N^{-1} D_N(\hat{\eta}_*^{\otimes}) = \left(D_N(\hat{\theta}_*^{\otimes}) \right)^{-1} D_N(\hat{\eta}_*^{\otimes}),$$

а также учтено, что $z = \mathcal{P}_{\perp} z$. Таким образом, z является собственным вектором матрицы Ω, соответствующим тому же самому собственному значению λ.

Но, поскольку матрица $I + \mathcal{Y}$ является положительно определенной, то $\Omega = (I + \mathcal{Y})^{-1/2} \Omega_1 (I + \mathcal{Y})^{1/2}$, где

$$\Omega_1 = (I + \mathcal{Y})^{-1/2} \mathcal{P}_{\perp} \hat{N} \hat{\Lambda}_N \hat{N}^T \mathcal{P}_{\perp} (I + \mathcal{Y})^{-1/2}.$$

Отсюда следует, что матрица Ω подобна матрице Ω_1, которая является симметричной и положительно полуопределенной. Следовательно, все собственные значения матрицы Ω действительные и неотрицательные, причем число положительных собственных значений совпадает с рангом матрицы $\Omega_2 = \mathcal{P}_{\perp} N \hat{\Lambda}_N N^T \mathcal{P}_{\perp}$, в которой матрица $\hat{\Lambda}_N$ диагональная.

У диагональной матрицы $D_N(\hat{\theta}_*^{\otimes})$ все диагональные элементы положительные. У диагональной матрицы $D_N(\hat{\eta}_*^{\otimes})$ имеется $s_{\triangle}$ нулевых диагональных элементов. Все эти элементы расположены в конце вектора $\hat{\eta}_*^{\otimes}$ и имеют парные номера из $\mathcal{J}_{\triangle}^n$:

$$(r+1, r+1), (r+1, r+2), \ldots, (r+1, n), \ (r+2, r+2), \ldots, \ (n, n). \tag{4.4.65}$$

Остальные элементы вектора $\hat{\eta}_*^{\otimes}$ в количестве $n_N - s_{\triangle}$ штук строго положительны. Таким образом, у диагональной матрицы $\hat{\Lambda}_N$ все диагональные элементы положительны, за исключением последних $s_{\triangle}$ элементов.

Так как, по предположению, точка X_* невырожденная, то имеет место неравенство: $m \leq n_{\triangle} - s_{\triangle}$. Кроме того, согласно необходимым и достаточным условиям невырожденности в прямой задаче, ранг матрицы

$\mathcal{A}^H_{svec}$, из которой удалены столбцы с парными номерами из (4.4.65), равен m.

Пусть $\hat{N}_1$ — подматрица матрицы $\hat{N}$, которая получается, если из $\hat{N}$ удалить столбцы с парными номерами из (4.4.65). Учтем, что ранг объединенной матрицы, составленной из матриц $\hat{B}$ и $\hat{N}_1$, т.е. матрицы $\mathcal{A}^H_{svec}$ с удаленными столбцами, имеющими номера (4.4.65), согласно вышесказанному должен быть равен m. Учтем, кроме того, что столбцы матрицы $\hat{B}$ порождают в $\mathbb{R}^m$ подпространство $\mathcal{R}(\hat{B})$ размерности n_B. Тогда обязательно столбцы матрицы $\mathcal{P}_\perp \hat{N}_1$ должны породить оставшееся подпространство $\mathcal{R}^\perp(\hat{B})$ размерности $m - n_B$. Отсюда следует, что ранг матрицы $\mathcal{P}_\perp \hat{N}_1$ равен $m - n_B$.

Обозначим через $\hat{\Lambda}_{N_1}$ диагональную матрицу порядка $n_N - s_\triangle$, которая получается из матрицы $\hat{\Lambda}_N$ путем удаления строк и столбцов с парными номерами (4.4.65). Матрица Ω_2 есть матрица Грама для системы векторов, являющихся столбцами матрицы $\hat{\Lambda}^{1/2}_{N_1} \hat{N}^T_1 \mathcal{P}_\perp$. Ранг такой матрицы равняется $m - n_B$. Поэтому и ранг матрицы Ω_2 равен $m - n_B$. Отсюда заключаем, что у матрицы Ω_1, а стало быть, и у матрицы Ω, имеется $m - n_B$ положительных собственных чисел. Всем им соответствуют собственные векторы из подпространства $\mathcal{R}^\perp(\hat{B})$, размерность которого также равна $m - n_B$.

Мы показали, что все собственные числа λ матрицы $\mathcal{Q}_1$ положительны. Следовательно, все собственные числа λ общей матрицы $\mathcal{Q}_y(y_*)$ также положительны. Пусть λ_{max} — максимальное собственное число $\mathcal{Q}_y(y_*)$. Так как согласно (4.4.58) собственные числа матрицы Якоби $\mathcal{G}_y(y_*)$ равны $1 - \alpha\lambda$, то, беря $\bar{\alpha} < 2/\lambda_{max}$, получаем, что при $0 < \alpha < \bar{\alpha}$ выполнено условие (4.4.57). Поэтому итерационный процесс (4.4.14) локально сходится с линейной скоростью к точке $y_* = [u_*, \operatorname{svec} V_*]$. ■

Следствие 4.4.1. *Пусть выполнены предположения теоремы 4.4.1. Тогда итерации, определяемые по формуле* (4.4.6)*, в которой шаг α_k берется постоянным и достаточно малым, локально сходятся к u_* с линейной скоростью.*

Доказательство. Справедливость данного результата следует из уже упоминавшегося свойства итерационного процесса (4.4.14), заключающегося в том, что он становится процессом (4.4.6), когда в качестве начальной берется точка $[u_0, V_0] \in \mathcal{F}_D$. ■

Обратим внимание, что из утверждений теоремы 4.4.1 и следствия 4.4.1 вытекает локальная сходимость для любых достаточно близких к решениям начальных точек, в том числе и для недопустимых. Другими словами, матрица V_0 может и не быть положительно определенной, что является полезным свойством с точки зрения устойчивости метода.

4.5. Прямо-двойственный метод Ньютона

Рассмотрим другой метод решения линейных задач полуопределенного программирования, в основе которого лежит применение метода Ньютона для решения системы условий оптимальности (3.5.11).

Ньютоновские направления. Система (3.5.11) является системой $2n_\triangle$ уравнений относительно $2n_\triangle$ переменных, а именно, $\mathrm{svec}\, X$ и $\mathrm{svec}\, V$. Если решать ее методом Ньютона, то ньютоновские направления $\mathrm{svec}\, \Delta X$ и $\mathrm{svec}\, \Delta V$ в паре $[X, V]$ должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{array}{rcl} \tilde{V}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, \Delta X + \tilde{X}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, \Delta V & = & -r_c(X, V), \\ \mathcal{A}_{svec}\, \mathrm{svec}\, \Delta X & = & -r_p(X) \\ \mathcal{K}_{svec}\, \mathrm{svec}\, \Delta V & = & -r_d(X). \end{array} \tag{4.5.1}$$

Здесь и ниже через $r_c(X, V)$, $r_p(X)$ и $r_d(V)$ обозначены невязки:

$$r_c(X, V) = \mathrm{svec}\,(X \circ V)\,, \quad r_p(X) = \mathcal{A}_{svec}\, \mathrm{svec}\ X - b, \quad r_d(V) = \mathcal{K}_{svec}\, \mathrm{svec}\, V - c,$$

причем

$$r_c(X, V) = \mathrm{svec}\,(X \circ V) = \tilde{\mathcal{L}}_n\, \mathrm{vec}\ (X \circ V) = \tilde{X}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, V = \tilde{V}^{\otimes}\, \mathrm{svec}\, X.$$

Если ввести квадратную матрицу $\mathcal{W}(X, V)$ и $n_\triangle$-мерный вектор невязок $r_f(X, V)$, положив

$$\mathcal{W}(X, V) = \begin{bmatrix} \tilde{V}^{\otimes} & \tilde{X}^{\otimes} \\ \mathcal{A}_{svec} & 0_{m\, n_\triangle} \\ 0_{l\, n_\triangle} & \mathcal{K}_{svec} \end{bmatrix}, \quad r_f(X, V) = \begin{bmatrix} r_p(X) \\ r_d(V) \end{bmatrix}, \tag{4.5.2}$$

то система (4.5.1) может быть переписана в виде

$$\mathcal{W}(X, V) \begin{bmatrix} \mathrm{svec}\, \Delta X \\ \mathrm{svec}\, \Delta V \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_c(X, V) \\ r_f(X, V) \end{bmatrix}. \tag{4.5.3}$$

Найдем решение системы (4.5.1), предполагая, что пара $[X, V]$ является неособой, т.е. X и V — неособые матрицы. В этом случае $\tilde{X}^{\otimes}$ и $\tilde{V}^{\otimes}$, как впрочем и $\mathcal{W}(X, V)$, будут неособыми матрицами. Решения системы (4.5.1) задают ньютоновские направления в этой паре.

Пусть $q \in \mathbb{R}^{n_\triangle}$ и $p \in \mathbb{R}^{n_\triangle}$ — произвольные векторы, удовлетворяющие равенствам:

$$\mathcal{A}_{svec} q = b, \quad \mathcal{K}_{svec} p = c. \tag{4.5.4}$$

Тогда согласно второму и третьему равенствам из (4.5.1)

$$\mathcal{A}_{svec} \left(\operatorname{svec} \Delta X + \operatorname{svec} X - q \right) = 0_m, \quad \mathcal{K}_{svec} \left(\operatorname{svec} \Delta V + \operatorname{svec} V - p \right) = 0_l.$$

Отсюда делаем вывод, что вектор $\operatorname{svec} \Delta X + \operatorname{svec} X - q$ должен принадлежать нуль-пространству матрицы $\mathcal{A}_{svec}$. По аналогичным соображениям, вектор $\operatorname{svec} \Delta V + \operatorname{svec} V - p$ должен принадлежать нуль-пространству матрицы $\mathcal{K}_{svec}$. Но по определению матриц K_j, $1 \le j \le l$, нуль-пространство матрицы $\mathcal{A}_{svec}$ совпадает с пространством столбцов матрицы $\mathcal{K}_{svec}^T$, а нуль-пространство матрицы $\mathcal{K}_{svec}$ совпадает с пространством столбцов матрицы $\mathcal{A}_{svec}^T$. Следовательно, ньютоновские направления можно искать в виде:

$$\operatorname{svec} \Delta X = q - \operatorname{svec} X + \mathcal{K}_{svec}^T \Delta w, \quad \operatorname{svec} \Delta V = p - \operatorname{svec} V + \mathcal{A}_{svec}^T \Delta u, \tag{4.5.5}$$

где $\Delta w \in \mathbb{R}^l$, $\Delta u \in \mathbb{R}^m$. Первое из равенств (4.5.1) после подстановки этих выражений переписывается как

$$\tilde{V}^{\otimes} \mathcal{K}_{svec}^T \Delta w + \tilde{X}^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \Delta u = r_c(X, V) - \tilde{V}^{\otimes} q - \tilde{X}^{\otimes} p. \tag{4.5.6}$$

Положим для сокращения записи $\tilde{X}^{-\otimes} = \left(\tilde{X}^{\otimes} \right)^{-1}$, $\tilde{V}^{-\otimes} = \left(\tilde{V}^{\otimes} \right)^{-1}$. Если умножить равенство (4.5.6) слева на матрицу $\mathcal{A}_{svec} \tilde{V}^{-\otimes}$, то приходим к системе линейных уравнений для определения вектора Δu:

$$\mathcal{A}_{svec} \tilde{V}^{-\otimes} \tilde{X}^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \Delta u = \mathcal{A}_{svec} \left[\operatorname{svec} X - q - \tilde{V}^{-\otimes} \tilde{X}^{\otimes} p \right]. \tag{4.5.7}$$

Аналогично, после умножения равенства (4.5.6) слева на вторую матрицу $\mathcal{K}_{svec} \tilde{X}^{-\otimes}$ получаем другую линейную систему для определения вектора Δw:

$$\mathcal{K}_{svec} \tilde{X}^{-\otimes} \tilde{V}^{\otimes} \mathcal{K}_{svec}^T \Delta w = \mathcal{K}_{svec} \left[\operatorname{svec} V - p - \tilde{X}^{-\otimes} \tilde{V}^{\otimes} q \right]. \tag{4.5.8}$$

Поскольку обе матрицы $\mathcal{A}_{svec}$ и $\mathcal{K}_{svec}$ имеют полный ранг (это следует из линейной независимости матриц A_i, $1 \le i \le m$, и матриц K_j, $1 \le j \le l$), то матрицы

$$\Gamma_A(X, V) = \mathcal{A}_{svec} \tilde{V}^{-\otimes} \tilde{X}^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T, \quad \Gamma_K(X, V) = \mathcal{K}_{svec} \tilde{X}^{-\otimes} \tilde{V}^{\otimes} \mathcal{K}_{svec}^T$$

неособые. Тогда на основании (4.5.7) и (4.5.8) имеем:

$$\Delta u = \Gamma_A^{-1}(X,V)\mathcal{A}_{svec}\left[\operatorname{svec} X - q - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}p\right],$$

$$\Delta w = \Gamma_K^{-1}(X,V)\mathcal{K}_{svec}\left[\operatorname{svec} V - p - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}q\right].$$

После подстановки найденных векторов Δu и Δw в (4.5.5) приходим к следующим выражениям для векторов $\operatorname{svec}\Delta X$ и $\operatorname{svec}\Delta V$:

$$\operatorname{svec}\Delta X = q - \operatorname{svec} X + \mathcal{P}_K(X,V)\left[\operatorname{svec} V - p - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}q\right],$$

$$\operatorname{svec}\Delta V = p - \operatorname{svec} V + \mathcal{P}_A(X,V)\left[\operatorname{svec} X - q - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}p\right].$$

Здесь для сокращения записи введены дополнительно обозначения:

$$\mathcal{P}_A(X,V) = \mathcal{A}_{svec}^T\Gamma_A^{-1}(X,V)\mathcal{A}_{svec}, \quad \mathcal{P}_K(X,V) = \mathcal{K}_{svec}^T\Gamma_K^{-1}(X,V)\mathcal{K}_{svec}.$$

Из (4.5.4) видно, что в качестве вектора p может быть взят, в частности, вектор $\operatorname{svec} C$. Пусть, кроме того, $\tilde{C}$ — произвольная симметричная матрица, такая, что $\mathcal{A}_{svec}\operatorname{svec}\tilde{C} = b$. Положим для единообразия $q = \operatorname{svec}\tilde{C}$. Тогда

$$\operatorname{svec}\Delta X = \operatorname{svec}\tilde{C} - \operatorname{svec} X + \mathcal{P}_K(X,V)\left[\operatorname{svec} V - \operatorname{svec} C - \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\operatorname{svec}\tilde{C}\right],$$

$$\operatorname{svec}\Delta V = \operatorname{svec} C - \operatorname{svec} V + \mathcal{P}_A(X,V)\left[\operatorname{svec} X - \operatorname{svec}\tilde{C} - \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\operatorname{svec} C\right].$$

В строго внутренней допустимой паре $[X,V]$, т.е. когда $X \succ 0$, $V \succ 0$ и выполняются равенства $\mathcal{A}_{svec}\operatorname{svec} X = b$ и $\mathcal{K}_{svec}\operatorname{svec} V = c$, выражения для $\operatorname{svec}\Delta X$ и $\operatorname{svec}\Delta V$ упрощаются:

$$\operatorname{svec}\Delta X = \left[I_{n_\triangle} - \mathcal{P}_K(X,V)\tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\right]\operatorname{svec}\tilde{C} - \operatorname{svec} X,$$

$$\operatorname{svec}\Delta V = \left[I_{n_\triangle} - \mathcal{P}_A(X,V)\tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\right]\operatorname{svec} C - \operatorname{svec} V.$$

Разумеется, достаточно определить одно из двух ньютоновских направлений $\operatorname{svec}\Delta X$ или $\operatorname{svec}\Delta X$, так как они связаны между собой соотношением (4.5.6). Например, если известно $\operatorname{svec}\Delta V$, то для $\operatorname{svec}\Delta X$ получаем:

$$\begin{aligned}\operatorname{svec}\Delta X = -\tilde{V}^{-\otimes}\left[\tilde{X}^{\otimes}\operatorname{svec}\Delta V + r_c(X,V)\right] = \\ = -\left[\operatorname{svec} X + \tilde{V}^{-\otimes}\tilde{X}^{\otimes}\operatorname{svec}\Delta V\right].\end{aligned}$$

Аналогично, если известно $\operatorname{svec}\Delta X$, то для $\operatorname{svec}\Delta V$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{svec}\Delta V = -\tilde{X}^{-\otimes}\left[\tilde{V}^{\otimes}\operatorname{svec}\Delta X + r_c(X,V)\right] &= \\ = -\left[\operatorname{svec} V + \tilde{X}^{-\otimes}\tilde{V}^{\otimes}\operatorname{svec}\Delta X\right].\end{aligned}$$

Какую из систем (4.5.7) или (4.5.8) целесообразно решать для нахождения ньютоновских направлений, зависит главным образом от размерности этих систем, т.е. от размерностей векторов Δu и Δw.

Итерационный процесс. Рассмотрим теперь итерационный процесс для решения пары задач (4.1.1), (4.1.2), описываемый следующими рекуррентными соотношениями:

$$X_{k+1} = X_k + \Delta X_k, \quad V_{k+1} = V_k + \Delta V_k, \tag{4.5.9}$$

где $X_0 \in \mathbb{S}^n$, $V_0 \in \mathbb{S}^n$, и в качестве матриц ΔX_k и ΔV_k берутся ньютоновские направления из $\mathbb{S}^n$, удовлетворяющие уравнению (4.5.2).

Если X_* и $V_* = V(u_*)$ — решения соответственно задач (4.1.1) и (4.1.2), то локальная сходимость итерационного процесса (4.5.9) к этим точкам будет следовать из общих утверждений о сходимости метода Ньютона. Например, достаточно показать, что матрица $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ из (4.5.2) является неособой, если X_* и V_* — невырожденные точки из соответственно $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_{D,V}$. Тогда эта матрица в силу непрерывности будет оставаться неособой и в некоторой окрестности пары $[X_*, V_*]$.

Далее предполагаем, что X_* и V_* являются невырожденными точками $\mathcal{F}_P$ и $\mathcal{F}_{D,V}$. Но тогда согласно утверждению 4.4.2 матрица

$$\Phi(V_*) = \mathcal{A}_{svec}^T\mathcal{A}_{svec} + \tilde{V}_*^{\otimes}. \tag{4.5.10}$$

будет неособой. Кроме того, если для X_* и V_* выполнено условие строгой дополнительности, то, как показано при доказательстве теоремы 4.4.1, матрица

$$\Lambda(X_*, V_*) = \mathcal{A}_{svec}\Phi^{-1}(V_*)\tilde{X}_*^{\otimes}\mathcal{A}_{svec}^T, \quad \tilde{X}_*^{\otimes} = \mathcal{L}_n X_*^{\otimes}\mathcal{D}_n. \tag{4.5.11}$$

также оказывается неособой (фактически это есть матрица $\mathcal{Q}_1$).

Лемма 4.5.1. *Пусть для прямой и двойственной задач* (4.1.1), (4.1.2) *решения X_* и $V_* = V(u_*)$ невырожденные и строго комплементарные. Тогда матрица $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ неособая.*

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\mathcal{W}(X_*, V_*)z = 0_{2n_\triangle)}$$

и покажем, что она имеет только тривиальное решение $z = 0_{2n_\triangle}$. В развернутом виде данную систему можно записать как

$$\tilde{V}_*^{\otimes} z_1 + \tilde{X}_*^{\otimes} z_2 = 0, \quad \mathcal{A}_{svec} z_1 = 0, \quad \mathcal{K}_{svec} z_2 = 0, \tag{4.5.12}$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n_\triangle}$.

Из третьего уравнения следует, что вектор z_2 принадлежит нуль-пространству матрицы $\mathcal{K}_{svec}$, поэтому $z_2 = \mathcal{A}_{svec}^T \mu$, где $\mu \in \mathbb{R}^m$. Следовательно, (4.5.12)) сводится к

$$\tilde{V}_*^{\otimes} z_1 + \tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \mu = 0, \quad \mathcal{A}_{svec} z_1 = 0. \tag{4.5.13}$$

Умножая второе уравнение на $\mathcal{A}_{svec}^T$ и складывая с первым, получаем:

$$\Phi(V_*) z_1 = -\tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \mu,$$

где матрица $\Phi(V)$ имеет вид (4.5.10) и, следовательно, при сделанных предположениях неособая. Поэтому

$$z_1 = -\Phi^{-1}(V_*) \tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \mu.$$

Подставляя данную зависимость во второе уравнение из (4.5.13) приходим к системе уравнений относительно переменной μ:

$$\mathcal{A}_{vecs} \Phi^{-1}(V_*) \tilde{X}_*^{\otimes} \mathcal{A}_{svec}^T \mu = 0. \tag{4.5.14}$$

Матрица данной системы является матрицей $\Lambda(X_*, V_*)$ вида (4.5.11). При сделанных предположениях она также неособая. Следовательно, система уравнений (4.5.14) имеет единственное решение $\mu = 0$. Единственное решение $z = 0$ имеет и исходная система (4.5.12)). Таким образом, $\mathcal{W}(X_*, V_*)$ — неособая матрица. ■

Теорема 4.5.1. *Пусть для прямой и двойственной задач* (4.1.1), (4.1.2) *решения* X_* *и* V_*, *где* $V_* = V(u_*)$, *невырожденные и строго комплементарные. Тогда, итерационный процесс* (4.5.9) *локально сходится к* $[X_*, V_*]$ *со сверхлинейной скоростью.*

Доказательство. Следует из общих утверждений о сходимости метода Ньютона и леммы 4.5.1. ■

Локальная сходимость метода (4.5.9) означает, что можно брать начальные точки X_0 и V_0 из окрестностей соответственно точек X_* и V_*, причем вовсе не обязательно, чтобы матрицы X_0 и V_0 были положительно полуопределенными.

Более хорошими с вычислительной точки зрения являются прямо-двойственные *методы центрального пути*. Данные методы являются обобщением соответствующих методов центрального пути для задач линейного программирования и также относятся к полиномиальным алгоритмам. Как и для линейного программирования, в основе этих методов лежит идея двигаться в прямом произведении пространства прямых переменных X и слабых двойственных переменных V вдоль траектории, во всех точках которой выполняется условие $XV = \mu I_n$, где μ — положительный параметр, который в ходе вычислений стремят к нулю. При $\mu = 0$ данное условие переходит в основное условие дополнительности $XV = VX = 0_n$, следующее из первого равенства (3.5.1) для $X \succeq 0$ и $V \succeq 0$. Центральный путь определяется единственным образом. Матрицы $X \succ 0$ и $V \succ 0$, находящиеся на центральном пути, коммутируют между собой.

Опишем кратко алгоритм центрального пути, основанный на решении системы уравнений (3.5.1), в которой первое уравнение заменено на $XV = \mu I_n$, причем для простоты не будем переходить к векторным представлениям матриц. Задаемся параметром $0 < \sigma < 1$ и полагаем

$$\mu = \sigma n^{-1} (X \bullet V) . \qquad (4.5.15)$$

Пусть начальные матрицы X и V принадлежат центральному пути. Делая один шаг методом Ньютона для решения системы (3.5.1), получаем, что ньютоновские направления ΔX и ΔV должны удовлетворять следующей системе уравнений

$$\begin{array}{rcl} X\,\Delta V + \Delta X\, V & = & \mu I_n - XV, \\ A_i \bullet \Delta X & = & b - A_i \bullet X, \quad 1 \le i \le m, \\ \Delta V + \sum_{i=1}^m \Delta u^i A_i & = & C - V - \sum_{i=1}^m u^i A_i. \end{array} \qquad (4.5.16)$$

После этого переходим к новым точкам, полагая

$$\bar{X} = X + \alpha \Delta X, \quad \bar{V} = V + \alpha \Delta V, \quad \bar{u} = u + \alpha \Delta u,$$

где $\alpha > 0$ — некоторый шаг. Его выбирают таким образом, чтобы матрицы $\bar{X}$ и $\bar{V}$ оставались положительно определенными. Одновременно уменьшаем значение параметра μ путем уменьшения коэффициента σ в формуле (4.5.15).

Разумеется, даже если точки X и V и находились на центральном пути, то последующие точки $\bar{X}$ и $\bar{V}$ не обязательно ему должны принадлежать. Поэтому разработаны специальные процедуры, которые возвращают $\bar{X}$ и $\bar{V}$ в некоторую окрестность центрального пути.

Общая идея здесь та же, что и в методах центрального пути для линейного программирования.

Сделаем еще одно важное замечание. Из системы (4.5.16) не следует, что матрица ΔX должна быть симметричной. Поэтому, чтобы добиться ее симметричной используют различные приемы. Наиболее простой из них состоит в том, что берут симметричную часть $\bar{\Delta} X$, полагая $\bar{\Delta} X := \frac{1}{2}\left[\Delta X + (\Delta X)^T\right]$. Ньютоновские направления, которые получаются при таком подходе, называют *HRVW/KSH/M-направлением* (по первым буквам фамилий авторов статей, в которых впервые был предложен данный метод центрального пути).

Другой подход к получению симметрического направления $\bar{\Delta} X$ заключается в том, что вместо системы равенств (3.5.1) решается система (3.5.7). Фактически в системе уравнений (4.5.16) следует заменить только первое уравнение, подставив вместо него

$$V \circ \Delta X + X \circ \Delta V = \mu I_n - X \circ V.$$

Теперь направление ΔX оказывается симметричной матрицей. Данные направления ΔX и ΔV называют *AHO-направлениями.*

Еще один подход к построению направлений перемещений следует из метода, разработанного для задачи выпуклого программирования, относительно которой линейная задача полуопределенного программирования есть лишь частный случай. Направления ΔX и ΔV, получающиеся при таком подходе, получили название *NT-направлений.* Данные направления наряду со вторым и третьем уравнениями из (4.5.16) удовлетворяют следующему уравнению

$$\Delta X + Y \Delta V Y = \mu V^{-1} - X,$$

где $Y \in \mathbb{S}^n$ — единственное решение уравнения $YVY = X$.

Приложение

Вспомогательные сведения из матричного анализа

Подобие матриц. Нас в основном будут интересовать вещественные матрицы принадлежащие $\mathbb{R}^{m\times n}$, в особенности квадратные матрицы из $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Определение. *Две прямоугольные матрицы A и B одного размера называются эквивалентными, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что $B = Q^{-1}AP$.*

Эквивалентные матрицы соответствуют одно и тому же линейному оператору в надлежащем образом выбранных базисах. Для того, чтобы две прямоугольные матрицы одинаковых размеров были эквивалентными необходимо и достаточно, чтобы они имели один и тот же ранг. Все $m\times n$ эквивалентные матрицы ранга r эквивалентны матрице

$$E_r = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r(n-r)} \\ 0_{(m-r)r} & 0_{(m-r)(n-r)} \end{bmatrix}.$$

Это возможно при раздельном выборе базисов в пространстве образов и прообразов.

Определение. *Две квадратные матрицы A и B одного порядка называются подобными, если существует такая невырожденная матрица P, что $B = P^{-1}AP$.*

Две матрицы подобны тогда и только тогда, когда они в разных базисах соответствуют одному и тому же линейному преобразованию. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения, а также след и определитель. Подобные матрицы всегда эквивалентны. Матрицы AB и BA подобны, если одна из матриц A или B невырождена. Признаки эквивалентности и подобия есть *отношения эквивалентности.*

Признак подобия гораздо более трудно проверяемый и требует привлечения аппарата собственных векторов и собственных значений матриц. Ядро любой матрицы есть собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному значению.

Определение. *Квадратная матрица A порядка n называется матрицей простой структуры, если она имеет n линейно независимых собственных векторов. В противном случае она называется дефектной.*

Матрица A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда для каждого ее собственного значения их геометрические и алгебраические кратности совпадают. Отсюда сразу следует, что если все ее собственные значения попарно различны, то такая матрица обязательно имеет простую структуру. Матрица A имеет простую структуру тогда и только тогда, когда она подобна диагональной матрице. Если матрица A имеет простую структуру, то простую структуру будут иметь матрицы A^T и A^{-1}. Пересечение образа и ядра матрицы простой структуры состоит только из нулевого вектора.

Подпространство $\mathcal{R}$ называется *инвариантным* относительно квадратной матрицы A, если $Ax \in \mathcal{R}$ для каждого вектора $x \in \mathcal{R}$. Образ и ядро матрицы являются ее инвариантными подпространствами. Сумма и пересечение любого числа инвариантных подпространств являются инвариантными подпространствами. Если матрица A невырожденная, то A и A^{-1} имеют одни и те же инвариантные подпространства. Для любого λ образ матрицы $\lambda I_n - A$ является инвариантным подпространством матрицы A.

Если $\mathbb{R}^n$ разбивается на два подпространства $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, в которых заданы соответственно базисы $e_1, \ldots, e_r$ и $e_{r+1}, \ldots, e_n$, то в этом базисе матрица A представима в блочном виде

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

При этом блок B_{21} нулевой, если подпространство $\mathcal{R}_1$ является инвариантным относительно матрицы A. Аналогично, блок B_{12} нулевой, когда $\mathcal{R}_2$ инвариантно относительно матрицы A. Верно и обратное. Если хотя бы для одного нетривиального инвариантного подпространства $\mathcal{R}_1$ матрицы A не существует инвариантного подпространства $\mathcal{R}_2$ такого, что $\mathbb{R}^n = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$, то матрица A не имеет простой структуры.

Любая вещественная квадратная матрица A порядка n вещественно подобна блочной треугольной матрице с диагональными блоками первого и второго порядка. Блоки первого порядка соответствуют вещественным собственным значениям, блоки второго порядка соответствуют парам комплексно сопряженных собственных значений.

Если вещественная матрица A имеет вещественное собственное значение, то она имеет инвариантные подпространства размерности 1 и $n-1$, первое из которых порождается собственным вектором, соответствующим данному собственному значению. Если вещественная матрица A имеет комплексное собственное значение, то она имеет инвариантные подпространства размерности 2 и $n-2$.

К числу элементарных преобразований матриц относят перестановку двух строк, умножение какой-либо ее строки на ненулевой скаляр и прибавление одной строки к другой строке. К элементарным относятся также те преобразования, которые получаются последовательным применением указанных трех преобразований. Любое элементарное преобразование обратимо. При элементарных преобразованиях строк их линейная независимость (зависимость) сохраняется. Аналогичным образом определяются элементарные преобразования столбцов. Любую невырожденную матрицу элементарными преобразованиями строк и столбцов можно привести к единичной матрице (метод Гаусса).

Пусть J^n — набор чисел от 1 до n и пусть $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — некоторая перестановка этих чисел между собой. Тогда матрица

$$\Pi = [e_{i_1},\ e_{i_2},\ \ldots e_{i_n}]\,,$$

где e_i — i-й единичный орт, называется *матрицей перестановки.* В каждом столбце и в каждой строке матрицы перестановки содержится только один ненулевой элемент равный единице. Если Π —- матрица перестановки, то при умножении матрицы A справа на Π переставляются ее столбцы. С другой стороны, при умножении A слева на Π^T переставляются строки A.

Нормальные матрицы. Среди всех квадратных матриц нормальные матрицы выделяются целым рядом полезных свойств.

Определение. *Квадратная матрица A называется нормальной, если она коммутирует со своей сопряженной матрицей, т.е. имеет место равенство $AA^* = A^*A$.*

Для того, чтобы матрица A была нормальной, необходимо и достаточно, чтобы ее собственные векторы образовывали ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$. Если матрица A нормальная, то A и A^* имеют одинаковые системы собственных векторов. Нормальная матрица всегда имеет простую структуру.

Матрица A будет нормальной тогда и только тогда, когда для любого инвариантного подпространства $\mathcal{R}$ ортогональное дополнение $\mathcal{R}^{\perp}$ также инвариантно. Любое подпространство, инвариантное относительно матрицы A будет инвариантным и относительно матрицы A^*.

Двумя важными частными примерами нормальных матриц являются унитарные и эрмитовы (самосопряженные) матрицы, а также их вещественные аналоги.

Определение. *Квадратная матрица U называется унитарной, если сопряженная матрица U^* совпадает с обратной U^{-1}. Вещественная унитарная матрица называется ортогональной.*

Любая матрица перестановок унитарная. Модули всех собственных значений унитарной матрицы по равны единице. С помощью унитарных и ортогональных матриц вводится понятие *унитарного* и *ортогонального подобия.*

Определение. *Квадратные матрицы A и B унитарно подобны, если существует такая унитарная матрица U, что $B = U^*AU$. Соответственно, квадратные вещественные матрицы A и B ортогонально подобны, если существует такая ортогональная матрица H, что $B = H^T AH$.*

Любая вещественная матрица ортогонально подобна блочно-треугольной матрице с диагональными блоками размера 1 или 2. Вещественные нормальные матрицы ортогонально подобны блочной диагональной матрице с блоками размера 1 или 2.

Определение. *Матрица A называется эрмитовой, если она совпадает со своей сопряженной матрицей A^*. Вещественная эрмитова матрица называется симметричной.*

Важным свойством эрмитовых матриц среди всех нормальных матриц является то, что у эрмитовых матриц все собственные значения вещественны. Определитель эрмитовой матрицы есть вещественное число. Эрмитова матрица унитарно подобна вещественной диагональной матрице. Соответственно вещественная симметричная матрица ортогонально подобна вещественной диагональной матрице.

Еще одним важным примером нормальных матриц является косоэрмитова матрица.

Определение. *Матрица A называется косоэрмитовой, если она совпадает с матрицей $-A^*$. Вещественная косоэрмитова матрица называется кососимметричной.*

Все диагональные элементы кососимметричной матрицы нулевые.

Кроме того, у кососимметричной матрицы нечетного порядка определитель всегда равняется нулю. Кососимметричная матрица ортогонально подобна блочно-диагональной матрице с диагональными блоками первого и второго порядка, причем все блоки первого порядка нулевые, а все блоки второго порядка — кососимметричные.

Билинейные и квадратичные формы. Нас будут интересовать только вещественные билинейные и квадратичные формы на $\mathbb{R}^n$.

Числовая функция $\varphi(x, y)$, определенная на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, называется билинейной формой, если она линейна по каждому аргументу. Примером билинейной формы является скалярное произведение.

Билинейная форма называется *симметричной* (*кососимметричной*), если $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ ($\varphi(x, y) = -\varphi(y, x)$) для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и любых $y \in \mathbb{R}^n$. Симметричные и кососимметричные билинейные формы образуют подпространства в пространстве всех билинейных форм. Любая билинейная форма однозначно разложима в сумму симметричной и кососимметричной билинейных форм.

Квадратичной формой называется билинейная форма вида $\varphi(x, x)$ от одного аргумента. По квадратичной форме нельзя однозначно восстановить породившую ее билинейную форму, однако можно поставить в соответствие симметричную билинейную форму (называемую *полярной*).

Вектор x называется *изотропным* для квадратичной формы $\varphi(x, x)$, если $\varphi(x, x) = 0$. Если квадратичная форма порождена кососимметричной билинейной формой, то любой вектор пространства оказывается изотропным для этой квадратичной формы.

Квадратичная форма называется строго положительной (нестрого положительной), если $\varphi(x, x) > 0$ для всех $x \neq 0_n$ ($\varphi(x, x) \geq 0$ для всех x). Квадратичная форма является строго положительной тогда и только тогда, когда она не имеет ненулевых изотропных векторов. Квадратичная форма является нестрого положительной тогда и только тогда, когда множество ее изотропных векторов есть нетривиальное линейное подпространство.

Между пространством билинейных форм на $\mathbb{R}^n$ и пространством квадратных матриц порядка n существует изоморфное соответствие. Соответствующая квадратная матрица называется *матрицей формы*. В частности, квадратичную форму $\varphi(x, x)$ можно представить как $\varphi(x, x) = \langle x, Ax \rangle$ для некоторой квадратной матрицы A. Свойства билинейных и квадратичных форм переносятся на эти матрицы.

Матрица A называется *положительно определенной*, что обозначается символом $A \succ 0$, если $\langle Ax, x \rangle > 0$ для любого ненулевого $x \in \mathbb{R}^n$.

У положительно определенной матрицы A все ее *главные миноры* положительны. Для положительной определенности матрицы A необходимо и достаточно, чтобы ее симметричная составляющая была положительно определена. Согласно критерию Сильвестра, для того, чтобы симметричная матрица была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все *ведущие миноры* были положительны. Матрица A называется *положительно полуопределенной* и обозначается символом $A \succeq 0$, если $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$.

Для любой билинейной формы существуют пара базисов, в которых матрица формы является диагональной и на диагонали стоят только нули и единицы. Ранг такой матрицы называется *рангом билинейной формы*. Он не зависит от выбранных базисов. *Дефект билинейной формы* — это разность между размерностью пространства и ее рангом.

Если для каждой переменной x и y применяется один и тот же базис (что обычно и делается), то при переходе к новому базису матрица билинейной формы преобразуется как $B = P^T AP$. Матрицы A и B, связанные таким соотношением, называются *конгруэнтными*. Отношение конгруэнтности есть отношение эквивалентности.

Симметричная матрица конгруэнтна диагональной матрице. Согласно *закону инерции квадратичных форм*, если вещественная симметричная матрица приводится вещественным конгруэнтным преобразованием к диагональному виду, то числа положительных и отрицательных диагональных элементов не зависят от способа приведения. Данные числа определяют положительный и отрицательный *индексы инерции* формы. Разность между ними называется *сигнатурой*.

В случае, когда A и B — симметричные матрицы порядка n и матрица A положительно определенная, существует невырожденная матрица P порядка n такая, что

$$P^T AP = I_n, \qquad P^T BP = \mathrm{Diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

где λ_i, $1 \leq i \leq n$, — собственные значения матрицы $A^{-1}B$, причем все они вещественные.

Кронекеровское произведение матриц. Пусть A и B — две матрицы размера соответственно $m \times n$ и $p \times q$. Тогда матрица C размера $mp \times nq$, имеющая блочный вид

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{n1}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix},$$

называется *кронекеровским произведением* матриц A и B и обозначается $A \otimes B$. Иногда кронекеровское произведение матриц называют *тензорным* или *прямым произведением.*

Кронекеровское произведение обладает следующими основными свойствами:

1. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$,
2. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$,
3. $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C$,
4. $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$,
5. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$,

при условии, разумеется, существования всех указанных матриц.

Кроме того, если A и B — квадратные невырожденные матрицы, то

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}. \tag{1}$$

Для следа и определителя кронекеровского произведения квадратных матриц A и B порядков, соответственно, m и n справедливы равенства:

$$\mathrm{tr}\ A \otimes B = (\mathrm{tr}\ A)(\mathrm{tr}\ B), \quad \det A \otimes B = (\det A)^n (\det B)^m. \tag{2}$$

Имеет место следующий важный результат, касающийся собственных значений кронекеровских произведений квадратных матриц.

Теорема 1. *Пусть A и B — квадратные матрицы порядка соответственно m и n. Пусть, кроме того, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — собственные значения матрицы A, а $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — собственные значения матрицы B. Тогда их кронекеровское произведение $A \otimes B$ имеет mn собственных значений: $\lambda_i \mu_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.*

Если x — собственный вектор матрицы A, а y — собственный вектор матрицы B, то $x \otimes y$ будет собственным вектором матрицы $A \otimes B$.

Из утверждения теоремы 1 следует, что если матрицы A и B положительно определены (положительно полуопределены), то и матрица $A \otimes B$ также будет положительно определенной (положительно полуопределенной). Второе из равенств (2) также является следствием данной теоремы, так как определитель матрицы равняется произведению ее собственных значений.

Если квадратные матрицы A и B являются диагональными (симметричными, ортогональными), то матрица $A \otimes B$ также является диагональной (симметричной, ортогональной).

Кронекеровская сумма матрицы. Пусть A — квадратная матрица порядка n. Тогда квадратная матрица

$$A^{\otimes} = \frac{1}{2}\left[A \otimes I_n + I_n \otimes A\right]$$

называется *кронекеровской суммой* A. Если A — симметричная матрица, то ее кронекеровская сумма также будет симметричной матрицей.

Приведем некоторые простейшие свойства кронекеровских сумм.

Утверждение 1. *Пусть симметричные матрицы A и B порядка n коммутируют между собой. Тогда матрицы $A^{\otimes}$ и $B^{\otimes}$ также коммутируют между собой.*

Доказательство. Непосредственными вычислениями с помощью четвертого равенства из перечисленных выше основных свойств кронекеровских произведений получаем

$$\begin{array}{rcl} A^{\otimes}B^{\otimes} & = & \frac{1}{4}\left[(A \otimes I_n)(B \otimes I_n) + (A \otimes I_n)(I_n \otimes B) + \right. \\ & + & \left. (I_n \otimes A)(B \otimes I_n) + (I_n \otimes A)(I_n \otimes B)\right] = \\ & = & \frac{1}{4}\left[(AB) \otimes I_n + A \otimes B + B \otimes A + I_n \otimes (AB)\right]. \end{array}$$

С другой стороны,

$$B^{\otimes}A^{\otimes} = \frac{1}{4}\left[(BA) \otimes I_n + B \otimes A + A \otimes B + I_n \otimes (BA)\right].$$

Так как $AB = BA$, то отсюда приходим к требуемому утверждению. ■

Утверждение 2. *Пусть для симметричной матрицы A порядка n справедливо разложение*

$$A = QD(\eta)Q^T,$$

где Q — ортогональная матрица, η — вектор собственных значений A. Пусть, кроме того, $\eta^{\otimes}$ — диагональ матрицы $D^{\otimes}(\eta)$. Тогда

$$A^{\otimes} = (Q \otimes Q)\, D(\eta^{\otimes})\, (Q^T \otimes Q^T), \tag{3}$$

причем матрица $Q \otimes Q$ ортогональная, т.е.

$$(Q \otimes Q)^{-1} = (Q \otimes Q)^T = Q^T \otimes Q^T.$$

Доказательство. Так как для симметричной матрицы A ее кронекеровская сумма также является симметричной матрицей, то для нее имеет место разложение

$$A^{\otimes} = HD(\lambda)H^T, \tag{4}$$

где H — ортогональная матрица порядка n^2, λ — n^2-мерный вектор собственных значений $A^{\otimes}$.

Убедимся сначала, что симметричные матрицы $A \otimes I_n$ и $I_n \otimes A$ коммутируют. Действительно, в силу основных свойств кронекеровских произведений матриц

$$(A \otimes I_n)(I_n \otimes A) = A \otimes A.$$

С другой стороны,

$$(I_n \otimes A)(A \otimes I_n) = A \otimes A.$$

Поэтому ортогональную матрицу H в разложении (4) можно взять такую, что

$$A \otimes I_n = HD(\lambda_1)H^T, \quad I_n \otimes A = HD(\lambda_2)H^T,$$

где λ_1 и λ_2 — n^2-мерные векторы, состоящие из собственных значений соответственно матриц $A \otimes I_n$ и $I_n \otimes A$. Отсюда приходим к разложению

$$A^{\otimes} = HD\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\right)H^T.$$

Если положить $H = Q \otimes Q$, то $H^T = Q^T \otimes Q^T$ и $HH^T = I_{n^2}$. Имеем для такой матрицы H:

$$\begin{aligned} H^T(I_n \otimes A)H &= (Q^T \otimes Q^T)(I_n \otimes A)(Q \otimes Q) = \\ &= \left(Q^T \otimes (Q^T A)\right)(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^T Q \otimes (Q^T AQ) = I_n \otimes D(\eta). \end{aligned}$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} H^T(A \otimes I_n)H &= (Q^T \otimes Q^T)(A \otimes I_n)(Q \otimes Q) = \\ &= \left(Q^T A \otimes Q^T\right)(Q \otimes Q) = \\ &= (Q^T AQ) \otimes (Q^T Q) = D(\eta) \otimes I_n. \end{aligned}$$

Обе матрицы $I_n \otimes D(\eta)$ и $D(\eta) \otimes I_n$ диагональные. Таким образом, действительно данную ортогональную матрицу $Q \otimes Q$ можно взять в качестве H. Отсюда следует справедливость разложения (3). ■

Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — собственные значения матрицы A. Если из них составить квадратную матрицу

$$\Phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_1 & \eta_2 + \eta_1 & \ldots & \eta_n + \eta_1 \\ \eta_1 + \eta_2 & \eta_2 + \eta_2 & \ldots & \eta_n + \eta_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_1 + \eta_n & \eta_2 + \eta_n & \ldots & \eta_n + \eta_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

порядка n, то элементы вектора $\eta^{\otimes}$, стоящего на диагонали матрицы $D(\eta^{\otimes})$, является элементами этой матрицы, а именно,

$$\eta^{\otimes} = \frac{1}{2} \left[\eta_1 + \eta_1, \ldots, \eta_1 + \eta_n,\ \eta_2 + \eta_2, \ldots, \eta_2 + \eta_n,\ \ldots, \eta_n + \eta_1, \ldots, \eta_n + \eta_n\right].$$

Поэтому, если A — положительно полуопределенная матрица ранга $r < n$, причем положительными собственными значениями A являются первые r компонент вектора η, то у матрицы (5) правый нижний блок порядка $n-r$ нулевой. Поэтому нулевыми будут соответствующие компоненты вектора $\eta^{\otimes}$.

Если симметричные матрицы A и B порядка n коммутируют между собой, то и их кронекеровские суммы $A^{\otimes}$ и $B^{\otimes}$ также коммутируют между собой. Действительно, пусть для A и B справедливы разложения

$$A = QD(\eta)Q^T, \quad B = QD(\theta)Q^T,$$

где Q — ортогональная матрица, η и θ — n-мерные векторы, составленные из собственных значений соответственно матриц A и B. Тогда в соответствие с утверждением 2 для $A^{\otimes}$ и $B^{\otimes}$ имеем

$$A^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\eta^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T), \quad B^{\otimes} = (Q \otimes Q)D(\theta^{\otimes})(Q^T \otimes Q^T).$$

Поскольку диагональные матрицы всегда перестановочны, то отсюда приходим к выводу, что матрицы $A^{\otimes}$ и $B^{\otimes}$ коммутируют между собой.

Оператор векторизации. Если X — матрица из $\mathbb{R}^{m\times n}$, то символом vec X обозначается прямая сумма ее столбцов, т.е. вектор-столбец длины mn, в котором последовательно один под другим располагаются столбцы матрицы X. Другими словами, если $x_i \in \mathbb{R}^m$ есть i-й столбец матрицы X, то

$$X = [x_1, \ldots, x_n], \quad \mathrm{vec}\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Упоминаемый ранее в утверждении 2 вектор $\eta^{\otimes}$, есть не что иное как vec Φ, где матрица Φ имеет вид (5).

Если A, B и C — три матрицы таких размеров, что определено их произведение — матрица ABC, то справедлива следующая формула:

$$\mathrm{vec}\,(ABC) = \left(C^T \otimes A\right) \mathrm{vec} B. \tag{6}$$

В частном случае, когда $a \in \mathbb{R}^m$ и $b \in \mathbb{R}^n$ — векторы, то

$$\mathrm{vec}\, ab^T = b \otimes a.$$

Операция векторизации связана со следом произведения двух матриц A и B одинакового размера следующим равенством

$$\mathrm{tr}\,(A^T B) = \langle \mathrm{vec} A, \mathrm{vec} B \rangle.$$

Таким образом, скалярное (внутреннее) произведение между двумя матрицами может быть представлено как

$$A \bullet B = \langle \mathrm{vec} A, \mathrm{vec} B \rangle.$$

Пусть A — квадратная матрица порядка n. Тогда матричное уравнение

$$AX + XA^T = 2I_n$$

может быть записано в виде

$$A^{\otimes} \mathrm{vec} X = \mathrm{vec} I_n,$$

где $A^{\otimes}$ — кронекеровская сумма матрицы A.

В более общем случае, когда имеется симметризованное произведение $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ двух симметричных матриц A и B, получаем, что

$$\mathrm{vec}\ A \circ B = A^{\otimes}\, \mathrm{vec}\ B = B^{\otimes}\, \mathrm{vec}\ A.$$

Для симметричных матриц X порядка n вместо вектор-столбца $\mathrm{vec} X$ целесообразнее рассматривать вектор-столбец $\mathrm{hvec} X$, длина которого равна n-у “треугольному” числу $n_{\triangle} = \frac{1}{2}n(n+1)$. В него помещаются последовательно сверху вниз столбцы матрицы X, но не полностью, а только их части, начинающиеся с диагонального элемента. Аналогичным образом определяется операция $\mathrm{svec} X$. От предыдущей операции она отличается только тем, что все элементы, не стоящие на диагонали, при помещении в $\mathrm{svec} X$ умножаются на $\sqrt{2}$. Если A и B — симметричные матрицы, то скалярное произведение между ними равняется

$$A \bullet B = \langle \mathrm{svec}\, A,\, \mathrm{svec}\, B \rangle.$$

При работе с векторами вида vec M часто удобно нумеровать их элементы не числами натурального ряда, а парами индексов из следующего набора:

$$\mathcal{J}^n = \{(1,1),\ldots,(n,1),(1,2),\ldots,(n,2),\ldots,(1,n),\ldots,(n,n)\}\,. \qquad (7)$$

Всего в таком наборе n^2 пар индексов. Номера вида (i,i), в которых первый индекс совпадает со вторым, будем называть *диагональными.* Набор $\mathcal{J}^n$ содержит n таких диагональных номеров, а именно $(1,1)$, $(2,2)$, …, (n,n). Те же номера (i,j) из $\mathcal{J}^n$, в которых индексы i и j отличны друг от друга, будем называть *внедиагональными.* О внедиагональных номерах (i,j) и (j,i) будем говорить как о *симметричных внедиагональных* номерах. При этом, если $i > j$, то такой номер (i,j) называется *младшим внедиагональным* номером. Напротив, симметричный номер (j,i) называется *старшим внедиагональным* номером.

Наряду с набором индексов (7) используется также набор

$$\mathcal{J}^n_\triangle = \{(1,1),\ldots,(n,1),(2,2),\ldots,(n,2),(3,3),\ldots,(n,n)\}\,, \qquad (8)$$

содержащий $n_\triangle$ пар индексов. В него входят только диагональные номера и младшие внедиагональные номера. Данный набор парных индексов используется главным образом при работе с векторами hvec$M$ или svec$M$.

Элиминационные и дуплицирующие матрицы. Для перехода от вектора vec X к вектору hvec X и для обратного перехода используются специальные *элиминационные* и *дуплицирующие* матрицы (см. [45], [21]). Элиминационная матрица $\mathcal{L}_n$ для каждой квадратной матрицы M порядка n совершает преобразование $\mathcal{L}_n \operatorname{vec} X = \operatorname{hvec} X$. Напротив, дуплицирующая матрица $\mathcal{D}_n$ для каждой симметричной матрицы M порядка n осуществляет обратное преобразование $\mathcal{D}_n \operatorname{hvec} X = \operatorname{vec} X$.

Матрица $\mathcal{L}_n$ имеет размер $n_\triangle \times n^2$, матрица $\mathcal{D}_n$ — размер $n^2 \times n_\triangle$. Обе матрицы $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ являются $(0,1)$-матрицами полного ранга, равного $n_\triangle$. В матрице $\mathcal{L}_n$ общее число единиц равно $n_\triangle$, каждая ее строка содержит ровно одну единицу, каждый столбец — не более одной единицы. Обращение матрицы $\mathcal{L}_n$ по Муру-Пенроузу совпадает с транспонированной матрицей, т.е. $\mathcal{L}_n^+ = \mathcal{L}_n^T$. Матрица $\mathcal{L}_n$ полуортогональная в том смысле, что $\mathcal{L}_n\mathcal{L}_n^T = I_{n_\triangle}$. Кроме того, $\mathcal{L}_n\mathcal{D}_n = I_{n_\triangle}$.

Матрица $\mathcal{D}_n$ также является $(0,1)$-матрицей полного ранга $n_\triangle$. Она может применяться и для несимметричных матриц X, однако в этом случае мы получаем симметричную матрицу, которая определяется нижней треугольной подматрицей матрицы X.

В качестве примеров матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ укажем матрицы $\mathcal{L}_3$ и $\mathcal{D}_3$:

$$\mathcal{L}_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}0&0&1\end{matrix} \end{array}\right],$$

$$\mathcal{D}_3 = \left[\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline \begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\1&0\\0&1\end{matrix} & 0 \\ \hline \begin{matrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0&0\\0&1\\0&0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} \end{array}\right].$$

Как видно из этих примеров, в каждой строке матриц $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ обязательно находится по одному единичному элементу, все остальные элементы — нулевые. В матрице $\mathcal{L}_n$ имеются нулевые столбцы, в матрице $\mathcal{D}_n$ — столбцы, содержащие два единичных элемента.

Пусть E_n — квадратная матрица порядка n, все элементы которой равны единице. Наряду с матрицами $\mathcal{L}_n$ и $\mathcal{D}_n$ будем пользоваться также матрицами

$$\tilde{\mathcal{L}}_n = D(\operatorname{svec} E_n)\mathcal{L}_n, \qquad \tilde{\mathcal{D}}_n = \mathcal{D}_n D^{-1}(\operatorname{svec} E_n).$$

Таким образом, если X — симметричная матрица порядка n, то

$$\operatorname{svec} X = \tilde{\mathcal{L}}_n \operatorname{vec} X, \quad \operatorname{vec} X = \tilde{\mathcal{D}}_n \operatorname{svec} X.$$

Для матриц $\tilde{\mathcal{L}}_n$ и $\tilde{D}_n$ сохраняется свойство: $\tilde{\mathcal{L}}_n\tilde{\mathcal{D}}_n = I_{n_\triangle}$.

Для любой квадратной матрицы X порядка n справедливы формулы

$$\tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n(X\otimes X)\tilde{\mathcal{D}}_n = (X\otimes X)\tilde{\mathcal{D}}_n, \qquad \tilde{\mathcal{D}}_n\tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n = X^{\otimes}\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{9}$$

Кроме того, если матрица X неособая, то у матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n\,(X \otimes X)\,\tilde{\mathcal{D}}_n$ существует обратная и

$$\left[\tilde{\mathcal{L}}_n\,(X \otimes X)\,\tilde{\mathcal{D}}_n\right]^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_n\,\left(X^{-1} \otimes X^{-1}\right)\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{10}$$

Обратная матрица существует и у матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n$, при этом оказывается, что

$$\left[\tilde{\mathcal{L}}_n X^{\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n\right]^{-1} = \tilde{\mathcal{L}}_n X^{-\otimes} \tilde{\mathcal{D}}_n, \tag{11}$$

где через $X^{-\otimes}$ обозначена матрица $(X^{\otimes})^{-1}$.

Дифференцирование матричных функций. Пусть имеется дифференцируемая матричная функция $F(X) : \mathbb{R}^{n\times q} \to \mathbb{R}^{m\times p}$. Под первым дифференциалом этой функции в точке $X \in \mathbb{R}^{n\times q}$ понимается матрица $dF(X; dX)$ размера $m \times p$, которая задается условием

$$\mathrm{vec}\,(dF(X; dX)) = C(X)\mathrm{vec}(dX). \tag{12}$$

Здесь dX есть приращение, а матрица $C(X)$ размера $mp \times nq$ называется первой производной (или просто производной) функции $F(X)$ в точке X.

Все аналитические свойства матричных функций следуют непосредственно из соответствующих теорем о свойствах векторных функций, так как вместо матричной функции $F(X)$ можно рассматривать векторную функцию $f(\mathrm{vec}X)$, определенную равенством $f(\mathrm{vec}X) = \mathrm{vec}(F(X))$. Дифференциалы функций F и f связаны между собой соотношением

$$\mathrm{vec}\,(dF(X; dX)) = df(\mathrm{vec}X; d\mathrm{vec}X). \tag{13}$$

Матрица Якоби $F_X(X)$ матричной функции $F(X)$ определяется следующим образом

$$F_X(X) = f_{\mathrm{vec}X}(\mathrm{vec}X), \tag{14}$$

где $f_{\mathrm{vec}X}(\mathrm{vec}X)$ — $mp \times nq$ матрица, (ij)-й элемент которой есть частная производная i-й компоненты вектор-функции $f(\mathrm{vec}X)$ по j-у элементу $\mathrm{vec}X$. Для дифференцируемой функции $F(X)$ ее матрица Якоби $F_X(X)$ совпадает с матрицей $C(X)$ из определения дифференциала (12).

Находить матрицу Якоби $F_X(X)$ удобнее не напрямую, вычисляя каждую частную производную, а с помощью определения дифференциала. Например, пусть

$$F(X) = AXB,$$

где A и B — матрицы-константы. Тогда $dF(X; dX) = A(dX)B$. Поскольку для прямой суммы столбцов произведения трех матриц имеет место формула (6), то переходя к векторной форме данного равенства и учитывая, что $\mathrm{vec}\,(dX) = d\,\mathrm{vec}X$, получаем:

$$d\,\mathrm{vec}(F(X)) = \left(B^T \otimes A\right) d\,\mathrm{vec}X.$$

Поэтому $F_X(X) = B^T \otimes A$.

В качестве примера вычислим матрицу Якоби еще одной скалярной функции, зависящей от матричного аргумента,

$$F(X) = A \bullet (X \circ B(X)), \tag{15}$$

где $X \circ B = \frac{1}{2}\left(AB + B^T A^T\right)$ — симметризованное произведение матриц A и B.

Утверждение 3. *Пусть A, B и X — симметричные матрицы порядка n. Пусть, кроме того $B(X)$ есть дифференцируемая матричная функция. Тогда матрица Якоби матричной функции (15) равняется*

$$F_X(X) = (\mathrm{vec}\ A)^T \left[B^{\otimes} + X^{\otimes} B_X(X)\right]. \tag{16}$$

Доказательство. Функция $F(X)$ в альтернативном виде записывается как

$$F(X) = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\ \{A\,[X\,B(X) + B(X)X]\}.$$

Поэтому

$$d\,F(X) = \frac{1}{2}\,[d\ \mathrm{tr}\ (AXB(X)) + d\ \mathrm{tr}\ (AB(X)X)].$$

Согласно правилам дифференцирования

$$d\ \mathrm{tr}\,(AXB) = \mathrm{tr}\ d(AXB) = \mathrm{tr}\,(A\,dX\,B) + \mathrm{tr}\,(A\,X\,dB). \tag{17}$$

Но

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\,(A\,dX\,B) &= (\mathrm{vec}\ A)^T\,\mathrm{vec}\,(dX\,B) = \\ &= (\mathrm{vec}\ A)^T (B^T \otimes I_n)\ d\ \mathrm{vec}\ X = \\ &= (\mathrm{vec}\ A)^T (B \otimes I_n)\ d\ \mathrm{vec}\ X. \end{aligned} \tag{18}$$

Схожим образом получаем

$$\mathrm{tr}\,(A\,X\,dB) = (\mathrm{vec}\ A)^T (I_n \otimes X) B_X(X) d\ \mathrm{vec}\ X. \tag{19}$$

Если обозначить через $\phi(X)$ скалярную функцию от матричного аргумента $\phi(X) = \mathrm{tr}\,(AXB(X))$, то из (17)–(19) приходим к ее матрице Якоби:

$$\phi_X(X) = (\mathrm{vec}\ A)^T\left[(B \otimes I_n) + (I_n \otimes X)B_X(X)\right]. \tag{20}$$

Аналогично, для функции $\psi(X) = \mathrm{tr}\,(AB(X)X)$ ее матрица Якоби имеет вид

$$\psi_X(X) = (\mathrm{vec}\ A)^T\left[(I_n \otimes B) + (X \otimes I_n)B_X(X)\right]. \tag{21}$$

На основании (20) и (21) делаем вывод, что справедлива формула (16) для матрицы Якоби всей функции (15). ■

Если ограничиться рассмотрением лишь симметричных матричных функций от симметричных матричных аргументов, то в качестве соответствующего векторного аргумента и соответствующей векторной функции удобно взять $\mathrm{svec}\,X$ и $f(\mathrm{svec}\,X) = \mathrm{svec}(F(X))$. Считая, что приращение dX также является симметричной матрицей, вместо (14) получаем соотношение

$$\mathrm{svec}\,(dF(X; dX)) = df(\mathrm{svec}\,X; d\ \mathrm{svec}\,X).$$

Матрица Якоби теперь заменяется на следующую

$$F_X^{\triangle}(X) = f_{\mathrm{svec}\,X}(\mathrm{svec}\,X), \tag{22}$$

которую в отличие от $F_X(X)$ будем называть *симметризованной матрицей Якоби*. Она имеет размер $m_\triangle \times n_\triangle$, где m и n — порядок соответственно матриц F и X. Матрицы Якоби $F_X^{\triangle}(X)$ и $F_X(X)$ оказываются связанными между собой следующим равенством:

$$F_X^{\triangle}(X) = \tilde{\mathcal{L}}_m F_X(X)\tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{D}}_m^T F_X(X)\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{23}$$

Таким образом, чтобы вычислить матрицу $F_X^{\triangle}(X)$, достаточно знать матрицу $F_X(X)$. Для симметричной матричной функции $F(X) = F^T(X)$, зависящей от симметричной матрицы X, матрица Якоби $F_X(X)$ также симметричная.

Коммутационная матрица и матрица $\mathcal{N}_n$. Пусть $e_i \in \mathbb{R}^n$ есть i-й единичный орт из $\mathbb{R}^n$. Через E_{ij} будем обозначать квадратную матрицу порядка n, в которой все элементы равны нулю, кроме единственного элемента, равного единице и располагающегося на пересечении i-й строки и j-го столбца. В явном виде матрицу E_{ij} можно записать как $E_{ij} = e_i e_j^T$.

Определение. *Квадратная матрица $\mathcal{K}_n$ порядка n^2 называется* коммутационной *(от commutation matrix), если она для каждой квадратной матрицы X порядка n совершает преобразование*

$$\mathcal{K}_n \operatorname{vec}\ X = \operatorname{vec}\ X^T.$$

Коммутационная матрица может быть записана в явном виде как

$$\mathcal{K}_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n}\ E_{ij} \otimes E_{ij}^T.$$

Таким образом $\mathcal{K}_n$ является $(0,1)$-матрицей, т.е. матрицей с элементами равными либо нулю, либо единице. Кроме того, $\mathcal{K}_n$ есть симметричная ортогональная матрица, т.е. $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n^T = \mathcal{K}_n^{-1}$.

Если X_1 и X_2 — две произвольные квадратные матрицы порядка n, то

$$\mathcal{K}_n(X_1 \otimes X_2) = (X_2 \otimes X_1)\mathcal{K}_n. \tag{24}$$

В самом деле, взяв произвольную квадратную матрицу Y порядка n, получаем на основании (6)

$$\begin{gathered}\mathcal{K}_n(X_1 \otimes X_2)\text{vec}Y = \mathcal{K}_n\text{vec}(X_2 Y X_1^T) = \text{vec}(X_1 Y^T X_2^T) = \\ = (X_2 \otimes X_1) \operatorname{vec} X^T = (X_2 \otimes X_1)\mathcal{K}_n \operatorname{vec} Y.\end{gathered}$$

Отсюда следует равенство (24).

Введем в рассмотрение квадратную матрицу $\mathcal{N}_n$ порядка n^2, определяемую как

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{2}\left(I_{n^2} + \mathcal{K}_n\right).$$

Данная матрица является симметричной идемпотентной матрицей, т.е. $\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n^T = \mathcal{N}_n^2$. На каждую квадратную матрицу X порядка n она действует следующим образом:

$$\mathcal{N}_n \operatorname{vec} X = \operatorname{vec}(X^S), \tag{25}$$

где M^S — симметричная часть матрицы M, т.е.

$$X^S = \frac{1}{2}\left(X + X^T\right).$$

Кроме того, она обладает следующим свойством, касающимся кронекеровских произведений $X \otimes X$, а именно:

$$\mathcal{N}_n\left(X \otimes X\right) = \left(X \otimes X\right)\mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n\left(X \otimes X\right)\mathcal{N}_n \tag{26}$$

для любой квадратной матрицы X.

С помощью матрицы $\mathcal{N}_n$ можно выразить матрицу Якоби квадратичной матричной функции

$$F(X) = \frac{1}{2} X X^T, \tag{27}$$

где X — квадратная матрица порядка n. Действительно, дифференциал функции XX^T равен

$$d\,(XX^T) = (dX)X^T + X(dX)^T,$$

поэтому, проводя векторизацию этого матричного равенства, получаем с помощью формул (25) и (26)

$$\begin{aligned} d\,\mathrm{vec}\; XX^T &= (X \otimes I_n)\; d\,\mathrm{vec}\; X + (I_n \otimes X)\; d\,\mathrm{vec}\; X^T = \\ &= (X \otimes I_n)\; d\mathrm{vec}X + (I_n \otimes X)\mathcal{K}_n\; d\,\mathrm{vec}\; X^T = \\ &= [(X \otimes I_n) + \mathcal{K}_n(X \otimes I_n)]\; \mathrm{vec}\; X = \\ &= (I_{n^2} + \mathcal{K}_n)(X \otimes I_n)\; d\,\mathrm{vec}\; X. \end{aligned}$$

Следовательно для квадратичной матричной функции (27)

$$F_X(X) = \mathcal{N}_n(X \otimes I_n).$$

Если взять матрицу $\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n$, то на каждую квадратную матрицу X порядка n она действует таким образом, что

$$\tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n\,\mathrm{vec}\;\; X = \mathrm{svec}\; X^S. \tag{28}$$

Точно так же действует на vec X и матрица $\tilde{\mathcal{D}}_n^T$, т.е. наряду с формулой (28) справедливо равенство

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^T\,\mathrm{vec}\;\; X = \mathrm{svec}\; X^S. \tag{29}$$

Если матрица X симметричная, то матрицу $\tilde{\mathcal{D}}_n^T$ в (29) можно заменить на $\tilde{\mathcal{L}}_n$. Другими словами, действие матрицы $\tilde{\mathcal{D}}_n^T$ на прямую сумму столбцов симметричной матрицы совпадает с действием на эту же сумму матрицы $\tilde{\mathcal{L}}_n$.

Матрица $\tilde{\mathcal{D}}_n^T$ оказывается обращением матрицы $\tilde{\mathcal{D}}_n$ по Муру-Пенроузу, т.е. $\tilde{\mathcal{D}}_n^+ = \tilde{\mathcal{D}}_n^T$. Если квадратная матрица X порядка n неособая, то у матрицы $\tilde{\mathcal{D}}_n^T\,(X \otimes X)\,\tilde{\mathcal{D}}_n$ существует обратная и

$$\left[\tilde{\mathcal{D}}_n^T\,(X \otimes X)\,\tilde{\mathcal{D}}_n\right]^{-1} = \tilde{\mathcal{D}}_n^T\left(X^{-1} \otimes X^{-1}\right)\tilde{\mathcal{D}}_n. \tag{30}$$

Утверждение 4. *Пусть X — произвольная квадратная матрица порядка n. Пусть, кроме того, $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{D}}_n^T (X \otimes X) \tilde{\mathcal{D}}_n$. Тогда*

$$\tilde{\mathcal{D}}_n^T (X \otimes X) = \mathcal{T} \tilde{\mathcal{D}}_n^T. \tag{31}$$

Доказательство. В самом деле, в силу симметричности матрицы $\mathcal{N}_n$ и формулы $\tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n = \mathcal{N}_n$, следующей из определений матриц $\tilde{\mathcal{L}}_n$ и $\tilde{\mathcal{D}}_n$, выполняется равенство

$$\mathcal{N}_n \tilde{\mathcal{L}}_n^T \tilde{\mathcal{D}}_n^T = \left(\tilde{\mathcal{D}}_n \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n \right)^T = \mathcal{N}_n^T = \mathcal{N}_n. \tag{32}$$

Но в силу (26), $\mathcal{N}_n (X \otimes X) = \mathcal{N}_n (X \otimes X) \mathcal{N}_n$. Отсюда и из (32) следует, что

$$\begin{gathered} \tilde{\mathcal{D}}_n^T (X \otimes X) = \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n (X \otimes X) = \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n (X \otimes X) \mathcal{N}_n = \\ = \tilde{\mathcal{L}}_n \mathcal{N}_n (X \otimes X) \mathcal{N}_n \tilde{\mathcal{L}}_n^T \tilde{\mathcal{D}}_n^T = \mathcal{T} \tilde{\mathcal{D}}_n^T. \end{gathered}$$

Мы пришли к равенству (31). ■

Следствие. *Если матрица X ортогональная, то переходя в левой и правой частях (31) к транспонированным матрицам, получаем с учетом (30)*

$$(Q^T \otimes Q^T) \tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{D}_n^T (Q^T \otimes Q^T) \tilde{\mathcal{D}}_n = \tilde{\mathcal{D}}_n \mathcal{T}^{-1}. \tag{33}$$

Здесь мы воспользовались следующим свойством ортогональных матриц: $(Q \otimes Q)^T = Q^T \otimes Q^T = Q^{-1} \otimes Q^{-1}$.

Системы линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b, \tag{34}$$

где A — матрица размера $m \times n$, и b — m-мерный вектор (правая часть). Данной вообще говоря неоднородной системе (считаем, что правая часть ненулевой вектор) соответствует *приведенная однородная система*

$$Ax = 0_m,$$

которая всегда совместна. Общее решение приведенной однородной системы образует в пространстве $\mathbb{R}^n$ подпространство размерности $n - r$, где r — ранг матрицы A. Любой базис подпространства решений приведенной однородной системы называется *фундаментальной системой* решений. Если неоднородная система (34) разрешима, то ее общее решение получается путем прибавления любого частного решения к общему решению приведенной однородной системы.

Пусть $\mathcal{R}(A)$ обозначает образ матрицы A, а $\mathcal{N}(A)$ — ее нуль-пространство (ядро матрицы A). Размерность $\mathcal{R}(A)$ равняется рангу матрицы A, а размерность $\mathcal{N}(A)$, называемая *дефектом*, равняется $n-r$, где r — ранг матрицы A.

Имеют место следующие важные соотношения между образами матриц и их ядрами:

$$\mathcal{N}(A) = (\mathcal{R}(A^T))^{\perp}, \quad \mathcal{N}(A^T) = (\mathcal{R}(A))^{\perp}.$$

Если неоднородная система совместна, то среди всех ее решений, существует единственное решение, принадлежащее $\mathcal{R}(A^T)$. Данное решение носит название *нормального решения* и является единственным решением, которое ортогонально $\mathcal{N}(A)$, оно имеет минимальную длину.

Если рассмотреть систему

$$A^T Ax = A^T b, \tag{35}$$

то она всегда совместна при любой матрице A и любой правой части b. Если исходная система (34) совместна, то она эквивалентна системе (35).

Псевдорешением или *обобщенным решением* (34) называется решение системы (35). Для псевдорешений $x \in \mathbb{R}^n$ вектор *невязки* $Ax - b$ оказывается ортогональным образу матрицы A, т.е. $\mathcal{R}(A)$. Множество псевдорешений совпадает с множеством решений системы

$$Ax = \Pi_{\mathcal{R}(A)} b,$$

где $\Pi_{\mathcal{R}(A)} b$ — проекция вектора b на образ матрицы A. Для любой системы (34) всегда существует *нормальное псевдорешение*, причем единственное. Среди всех псевдорешений системы $Ax = b$ нормальное псевдорешение и только оно ортогонально ядру матрицы A.

Ссылки на литературу и комментарии

По задачам, которые рассматриваются в данном учебном пособии, имеется весьма обширная литература, причем как на русском, так и на английском языке. Дадим отдельно для каждого раздела краткий комментарий относительно того, где можно найти дополнительные сведения о теории и методах решения этих задач, а также более полные обзоры литературы, причем предпочтение будет отдаваться монографиям и учебным пособиям.

Глава 1. Основной монографией, посвященной линейным задачам дополнительности, в настоящее время по-видимому следует считать [34]. Из обзорных работ по задачам дополнительности сошлемся на [6] и [39]. В качестве учебного пособия по линейным задачам дополнительности может быть использована книга [26], где помимо теории и методов, дается также интерпретация некоторых экономических задач как задач дополнительности. Численные методы для решения линейных задач дополнительности предлагались, например, в [34], [42]. Описание теории линейных задач дополнительности и метода Лемке можно найти, например, в книгах [3], [46]. Большинство результатов, приведенных в настоящем пособии, заимствованы из [34]. Изложение мультипликативно-барьерного метода взято из [8].

Глава 2. Вариационные неравенства стали изучаться в 1960-х годах [51]. К настоящему времени по нелинейным задачам дополнительности и вариационным неравенствам имеется обширная литература [4], [17], [18], [35], [36], [39], [**?**], из которой можно выделить монографию [35], касающуюся конечномерных задач. Первый том этой объемной книги целиком посвящен теоретическим аспектам линейных задач дополнительности, а именно, вопросам существования и единственности решений для различных классов матриц. Во втором томе рассматриваются численные методы, включая методы внутренней точки. Из литературы на русском языке следует отметить упомянутое ранее учебное пособие [26], а также пособие [17], где дается более подробное изложение результатов по теории вариационных неравенств и задач дополнительности, включая вариационные неравенства с многозначными отображениями. Сведения о многих других методах решения вариационных неравенств и задач дополнительности можно найти в книге [18].

Глава 3. Полуопределенное программирование составляют условные оптимизационные задачи в пространстве симметричных матриц. Одними из первых были введены в рассмотрение линейные задачи полуопределенного программирования, обобщающие соответствующие задачи линейного программирования [31]. Требование неотрицательности переменных в них заменено на требование положительной полуопределенности матриц. К настоящему времени теория и численные методы решения линейных задач полуопределенного программирования достаточно хорошо разработаны, имеется обширная литература по этим вопросам [23], [33], [32], [38], [40], [41], [44], [47], [48], [54], причем первая из этих книг доступна на русском языке. В ней задачи полуопределенного программирования рассматриваются как важный частный случай выпуклых оптимизационных задач. Среди приведенных книг особое место занимает обширный справочник [54] по различным аспектам полуопределенного программирования, включая теорию и численные алгоритмы, а также возможность сведения ряда задач дискретной и комбинаторной оптимизации, задач статистики, задач структурной оптимизации к задачам полуопределенного программирования.

Приведем краткий список источников, откуда заимствован материал данной главы и где он излагается в гораздо большем объеме. Сведения о пространствах симметричных матриц и о конусе положительно полуопределенных матриц можно найти почти во всех монографиях, посвященных линейной алгебре и матричному анализу, например, в [5], [7], [9], [10], [20], [21], [22], [27], [28]. Постановка линейных задач полуопределенного программирования и теория двойственности приводятся во многих перечисленных выше книгах и обзорных статьях [52], [53]. Взаимосвязь линейных задач полуопределенного программирования с другими оптимизационными задачами обсуждается, например, в книгах [40], [44]. Геометрические свойства допустимых множеств прямых и двойственных задач, помимо [54], приводятся в более подробном виде в [50], причем для более общих задач конического программирования. Вопросы, связанные с невырожденностью допустимых точек в прямой и двойственной задачах полуопределенного программирования, были разработаны в [29]. При этом существенным образом используются результаты, полученные в [1].

Глава 4 целиком посвящена численным алгоритмам решения линейных задач полуопределенного программирования. Различные обобщения симплекс-метода для решения линейной задачи полуопределенного программирования были предложены в [19], [43]. Для более общих задач конического программирования симплекс-метод предлагался также в [50]. Приведенные в настоящем пособии варианты прямого и двойственного симплекс-метода взяты из [15]и [16]. Рассмотренные мультипликативно-барьерные методы (прямой и двойственный) можно отнести к классу аффинно-масштабирующих методов внутренней точки, их изложение следует [2], [13]. Литература по прямо-двойственным методам решения задач полуопределенного программирования, особенно по прямо-двойственным методам центрального пути, особенно обширна по сравнению с литературой по методам других типов (см., например, [23], [32], [41], [47], [48], [54]). Прямо-двойственный метод Ньютона по-видимому впервые был предложен в [30]. Приведенное доказательство его сходимости следует [14]. В [25] рассмотрен рандомизированный метод решения задач полуопределенного программирования.

Приложения. Сведения о свойствах произведения матриц по Кронекеру можно найти во многих книгах по матричному анализу, например, в [7], [20], [21], [22]. Вопросы, связанные с векторизацией матриц, рассматриваются в [22]. Там же обсуждаются подходы к дифференцированию матричных функций. Свойства элиминационных и дублицирующих матриц, а также основные формулы, которые оказываются справедливыми при их применении, приводятся в [22], [45]. Теорему Островского, которая используется при доказательстве некоторых численных методов, можно найти, например, в [24].

ЛИТЕРАТУРА

1. В.И.Арнольд. О матрицах, зависящих от параметров // УМН, 1971. Т. 26, вып. 2(158). С. 101-114.

2. Бабынин М.С., Жадан В.Г. Прямой метод внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2008. Т. 48. № 10. С. 1780–1801.

3. Базара М., Шетти К. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы. М.: Мир, 1982. 583 с.

4. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Итеративные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1989. 128 с.

5. Беклемишев Д.В. Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 336 с.

6. Берщанский Я.М., Мееров М.В. Теория и методы решения задач дополнительности // Автоматика и телемеханика. 1983. № 6. С. 5-31.

7. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980. 400 с.

8. Втюрина М.В., Жадан В.Г. Барьерно-градиентные методы для линейных задач дополнительности. М.: ВЦ РАН, 2003. 31 с.

9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с.

10. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997. 416 с.

11. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Часть I. Введение в выпуклый анализ и теорию оптимизации. М.: МФТИ, 2014. 272 с.

12. Жадан В.Г. Методы оптимизации. Часть II. Численные алгоритмы. М.: МФТИ, 2015. 320 с.

13. Жадан В.Г., Орлов А.А. Двойственные методы внутренней точки для линейной задачи полуопределенного программирования // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2011. Т. 51. № 12. С. 2158–2180.

14. Жадан В.Г., Орлов А.А. Прямо-двойственный метод Ньютона для линейной задачи полуопределенного программирования // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 19, № 2. 2013. С. 157-169.

15. Жадан В.Г. Об одном варианте симплекс-метода для линейной задачи полуопределенного программирования // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 21, № 3. 2015. С. 117-127.

16. Жадан В.Г. Вариант двойственного симплекс-метода для линейной задачи полуопределенного программирования // Труды института математики и механики УрО РАН. Т. 22, № 3. 2016. С. 90-100.

17. Коннов И.В. Методы решения конечномерных вариационных неравенств. Казань: ДАС, 1998. 101 с.

18. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: Казанский университет, 2013. 508 с.

19. Косолап А.И. Симплекс-метод для решения задач полуопределенного программирования // Вестник Донецкого национального университета, Сер. А: Естественные науки, вып. 2. 2009. С. 365-369.

20. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

21. Магнус Я.Р., Нейдеккер Х. Матричное дифференциальное исчисление с приложениями к статистике и эконометрике. М.: Физматлит, 2002. 496 с.

22. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972. 232 с.

23. Нестеров Ю.Е. Введение в выпуклую оптимизацию. М.: Изд-во МЦНМО, 2010. 280 с.

24. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения систем нелинейных уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

25. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Рандомизированный метод решения задачи полуопределенного программирования // Стохастическая оптимизация в информатике. 2006. Т. 2. № 1. С. 38–70.

26. Попов Л.Д. Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнительности. Учебное пособие. Екатеринбург: Изд-во Уральского университета, 2001.

27. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. М.: Физматлит, 2007. 477 с.

28. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.

29. Alizadeh F., Haeberly J.-P.A., Overton M.L. Complementarity and nondegeneracy in semidefinite programming // Mathematical Programming (Series B), 1997, № 77. P. 118-128

30. Alizadeh F., Haeberly J.-P.A., Overton M.L. Primal-dual interior point methods for semidefinite programming. Convergence rates, stability and numerical results // SIAM Journal on Optimization. 1998. Vol. 8. P. 746–758.

31. Bellman R., Fan K. On systems of linear inequalities in Hermitian marrix variables // Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, V. 7, 1963.

32. Ben-Tal A., Nemirovsky A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, Engineerring Applications. MPS-SIAM Series on Optimization. SIAM, Philadelphia, 2000. 590 p.

33. Boyd S., Vandenberge L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004. 716 p.

34. Cottle R.W., Pang J.-S., Stone R.E. The linear complementarity problem. Boston: Academic press, Inc., 1992.

35. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems. Berlin: Springer - Verlag, 2003. Vol. I – 726 pp., Vol. II – 699 pp.
36. Ferris M.C., Kanzov Ch. Complementarity and related problems: A survey // Handbook of applied optimization. New York: Oxford University Press, 2002. P. 514-530.
37. Ferris M.C., Pang J.-S. Engineering and economic applications of complementarity problems // SIAM Rev. 1997. V. 39. P. 669-713.
38. Freund R.M. Introduction to semidefinite programming. Massachusett: Massachusetts Institute of Thechnology, 2004. 54 p.
39. Harker P.T., Pang J.-Sh. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications // Mathematical programming. 1990, № 48. Pp. 161-220.
40. Helmberg C. Semidefinite Programming for Combinatorial Optimization. Berlin, 2000. 150 p.
41. De Klerk E. Aspects of Semidefinite Programming. Interior Point Algorithms and Selected Applications. Kluwer Academic Publishers, 2004. 283 p.
42. Kojima M., Mizuno Sh., Yoshize A. A polinomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems // Mathematical programming, 1989. V. 44. P. 1-26.
43. Lasserre J.B. Linear programming with positive semi-definite matreces // MPE, Vol. 2. 1996. P. 499-522.
44. Laurent M., Rendle F. Semidefinite Programming and Integer Programming. In: Aardal K., Nemhauser G., Weismantel R., editors. Discrete optimization, Handbooks in operations research and managemesnt science. Amsterdam: Elsevier, 2002. 101 p.
45. Magnus J.R., Neudecker H. The elimination matrix: some lemmas and applications // SIAM J. Alg. Disc. Meth., 1980. V. 1. № 4. P. 422-449.
46. Murty K.G. Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming. B. 1988,
47. Nemirovski A. Five lectures on modern convex optimization. CORE Summer School on Modern Convex Optimization. August 26–30, 2002. 240 p.
48. Nesterov Yu.E., Nemirovski A.S. Interior Point Polynomial Algorithms in Convex Programming // SIAM Publications, SIAM, Philadelphia, 1994. 405 p.
49. Nesterov Y.E., Todd M.J. Primal-dual interior point methods for self-scaled cones // SIAM Journal on Optimization. 1998. Vol. 8. P. 324–364.
50. Pataki G. Cone-LP's and Semidefinite Programs: Geometry and Simplex-type Method. Conference on Integer Programming and Combinatorial Optimization (IPCO 5), 1996. P. 1-13.

51. Stampacchia G. Variational inequalities // In: Theory and applications of monotone operators, 1969. P. 101-192.
52. Todd M.J. Semidefinite optimization // Acta Numer. V. 10, 2001, Pp. 515-560.
53. Vandenberghe L., Boyd S. Semidefinite programming // SIAM Rev. V. 38, 1996. Pp. 49-95.
54. Wolkowicz H., Saigal R. and Vandenberghe L. (eds). Handbook of Semidefinite Programming // Kluwer Academic Publishers. 2000.