



# TOPOLOGIA ALGEBRAICA DELS ESPAIS TOPOLÒGICS FINITS

Merlès Subirà Cribillers  
1529285

Tutors: Natàlia Castellana i Guille Carrión  
Grau en matemàtiques

Bellaterra, 26 de juny de 2023

## Resum

Aquest treball segueix les línies d'estudi de R. Stong i M. McCord dels espais topològics finits. Tot i que són dues aproximacions diferents, tenen un punt de contacte: els posets. Per una banda, classificarem els espais topològics finits a través dels posets, segons el Teorema de Classificació de Stong. Per l'altra, veurem com els posets codifiquen tant la informació homotòpica d'un poliedre com la d'un espai topològic finit, seguint el Teorema de McCord. Conclourem el treball fent exemples de models finits de les superfícies compactes connexes.

# Índex

<b>Introducció</b>	<b>i</b>
<b>1 Preliminars</b>	<b>1</b>
1.1 Complexos simplicials . . . . .	1
1.2 Teoria d'homotopia . . . . .	7
<b>2 La Classificació de Stong</b>	<b>11</b>
2.1 Espais topològics finits i presets . . . . .	11
2.2 Aplicacions contínues i aplicacions monòtones . . . . .	16
2.3 Espai minimal i nucli . . . . .	19
<b>3 El Teorema de McCord</b>	<b>24</b>
3.1 El complex simplicial associat a un espai finit . . . . .	24
3.2 Models finits de superfícies compactes connexes . . . . .	30

# Introducció

Un espai topològic finit és un espai topològic que té un nombre finit de punts. D'entrada un pot pensar que aquest tipus d'espais topològics no són gaire interessants, que no poden generar gaires topologies i que els grups d'homotopia s'anul·len de seguida. Però els espais topològics finits tenen més estructura del que sembla, perquè se'ls pot associar un ordre parcial (d'ara endavant poset). Els posets són objectes combinatoris molt potents per a codificar informació dels espais. A aquests, alhora, se'ls associa amb els complexos simplicials.

Un complex simplicial és, a grans trets, un objecte combinatori format per un conjunt de vèrtexs i un conjunt de símplexs que s'enganxen per les cares d'una manera coherent. Donat un complex simplicial es construeix un poset que té per elements els símplexs del complex simplicial i on la relació d'ordre és la donada per la inclusió. Aquest poset rep el nom de poset de cares. Recíprocament, donat un poset  $X$ , podem associar-li un complex simplicial que té per  $n$ -símplex les cadenes de longitud  $n$ ,

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

És com dir que podem anar endarrere, fent el complex de l'ordre. Veurem que podem fer una cadena de correspondències entre els espais topològics finits, els posets i els complexos simplicials, tant en aquest sentit com en l'invers.



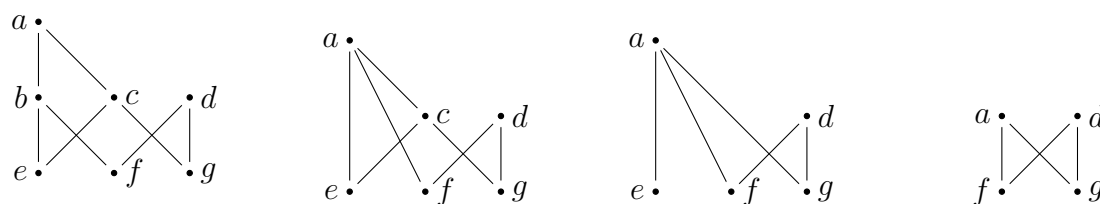
Michael McCord i Robert Stong van ser dos matemàtics nord-americans de la segona meitat del segle XX que van estudiar els espais topològics finits gairebé al mateix temps, però des de dues aproximacions diferents. En aquest treball, enfoquem l'estudi dels espais topològics finits a través d'aquestes dues aproximacions clàssiques, per a veure com es relacionen entre elles a través dels posets. El Teorema de classificació de Stong fa una classificació a partir de l'estructura interna dels espais, l'estructura d'ordre. Per altra banda, el Teorema de McCord compara els espais finits amb els complexos simplicials per mitjà de la teoria d'homotopia,

des d'un punt de vista més extern.

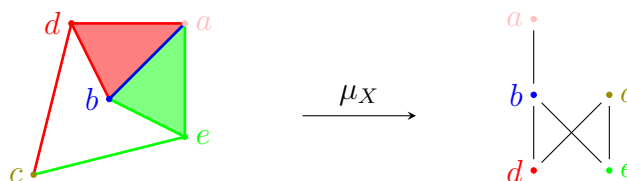
Per començar, al primer capítol introduïrem les nocions bàsiques de teoria d'homotopia i de complexos simplicials amb les quals treballarem més endavant. Parlarem de les triangulacions i de com aquestes modelitzen espais topològics.

Seguidament veurem la classificació de Stong. Primer, descriurem els espais topològics finits a través dels oberts minimalis i simplifiquem l'estudi d'espais topològics finits als quins són  $T_0$ . Després, els reduïrem a espais minimalis traient-ne els punts de batuda, que són punts que no aporten informació homotòpica, fins a arribar a tenir els nuclis dels espais topològics finits. Aleshores, aplicarem el Teorema de classificació.

**Corol·lari 2.3.10** (Teorema de Classificació [1, Corol·lari 1.3.7]). *Una equivalència homotòpica entre espais topològics minimalis finits és un homeomorfisme. En particular, el nucli d'un espai topològic finit és únic llevat d'homeomorfisme i dos espais topològics finits són homotòpicament equivalents si i només els seus nuclis són homeomorfs.*



Finalment, a l'últim capítol seguirem els passos de McCord per a acabar demostrant que tot poliedre compacte té un espai topològic finit associat amb el mateix tipus d'homotopia feble i al revés, que tot espai topològic finit té associat un poliedre a través d'una equivalència homotòpica feble. El Teorema de McCord vincula els espais topològics finits amb poliedres.



Inspirats pel teorema de classificació de superfícies compactes connexes, conclourem aquest treball donant models finits de les superfícies compactes connexes. Més concretament, donarem explícitament models finits de l'esfera, el tor i el pla projectiu i il·lustrarem com procedir per fer la suma connexa de models finits.

# Capítol 1

## Preliminars

Els espais topològics finits són més rellevants del que semblen en teoria d'homotopia. El primer pas per a entendre la complexitat que tenen és parlar d'espais topològics no finits amb una estructura combinatòria forta, els poliedres (o espais triangulables). En aquest capítol veurem què són els complexos simplicials, quina relació tenen amb els espais topològics i repassarem els conceptes bàsics d'homotopia, com la noció d'homotopia, grup fonamental i equivalència homotòpica feble.

### 1.1 Complexos simplicials

Treballar amb espais topològics sol ser més senzill si es fa amb una triangulació, depenent de l'estudi que se'n vulgui fer. Els complexos simplicials tracten, en cert sentit, de ser una generalització d'una triangulació d'un espai topològic. En aquesta secció veurem com la combinatòria es relaciona amb la topologia a través dels complexos simplicials.

**Definició 1.1.1.** S'anomena *n-símplex estàndard* a l'embolcall convex generat pels vectors de la base canònica  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Exemple 1.1.2.** Com que els *n-símplexs* estàndard són subespais de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , tenen una representació geomètrica natural.

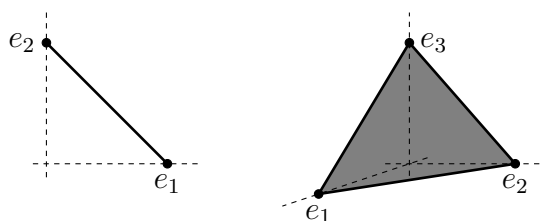


Figura 1.1: Símplexs estàndard de dimensions 1 i 2.

Volem construir un objecte combinatori fent servir una variant dels *n-símplexs* estàndard. Un conjunt de *vèrtexs* és un conjunt finit d'elements  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_m\}$ .

Donat un conjunt de vèrtexs  $V$ , un  $n$ -símplex a  $V$  és un subconjunt de cardinal  $n + 1$  de  $V$  i es diu que el símplex té *dimensió*  $n$ .

**Exemple 1.1.3.** Per exemple, donat un conjunt de tres vèrtexs  $V_{012} = \{v_0, v_1, v_2\}$ , podem formar els 0-símplexs  $\sigma_0 = \{v_0\}$ ,  $\sigma_1 = \{v_1\}$  i  $\sigma_2 = \{v_2\}$ , els 1-símplexs  $\sigma_{01} = \{v_0, v_1\}$ ,  $\sigma_{02} = \{v_0, v_2\}$ ,  $\sigma_{12} = \{v_1, v_2\}$  i un 2-símplex  $\sigma_{012} = \{v_0, v_1, v_2\}$ .

Observem que, segons la seva dimensió, els  $n$ -símplexs són tots homeomorfs. Els 0-símplexs són punts, els 1-símplexs són segments, els 2-símplexs són triangles, els 3-símplexs són tetraedres sòlids i així successivament. Així doncs, representem intuïtivament un  $n$ -símplex qualsevol de manera genèrica com veiem a la següent figura.

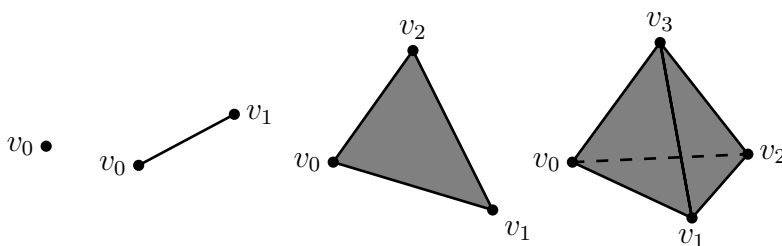


Figura 1.2: Símples de dimensions 0, 1, 2 i 3, respectivament.

Els símplexs són com unes peces de “Lego” amb les quals volem construir espais topològics. Tanmateix, no podem enganxar-les de qualsevol manera, han de formar el que anomenarem complex simplicial.

**Definició 1.1.4.** Un *complex simplicial* és una parella  $\mathcal{K} = \{V_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}}\}$  formada per un conjunt de vèrtexs  $V_{\mathcal{K}}$  i un conjunt  $S_{\mathcal{K}}$  de símplexs de  $V_{\mathcal{K}}$  tals que:

- (i) si  $\sigma \in V_{\mathcal{K}}$  és un símplex i  $\tau \subset \sigma$ , aleshores  $\tau$  també és un símplex,  $\tau \in S_{\mathcal{K}}$ ;
- (ii) cada conjunt unitari  $\{v\}$ ,  $v \in V_{\mathcal{K}}$ , és un símplex.

Per abús de notació escriurem  $v \in \mathcal{K}$  i  $\sigma \in \mathcal{K}$  si  $v \in V_{\mathcal{K}}$  i  $\sigma \in S_{\mathcal{K}}$ . També sovint identificarem un complex simplicial amb el seu conjunt de símplexs. A més, només cal donar els símplexs de dimensió més gran. La dimensió del complex simplicial és el màxim de les dimensions dels símplexs que el formen.

Per exemple, per a definir el complex simplicial  $\mathcal{K} = \{V_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}}\}$  on  $V_{\mathcal{K}} = \{v_0, v_1, v_2\}$  i  $S_{\mathcal{K}} = \{\{v_0\}, \{v_1\}, \{v_2\}, \{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\}\}$  simplement escriurem:

$$\mathcal{K} = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_0\}\}.$$

En aquest cas,  $\mathcal{K}$  es representa com un triangle buit. Si volem definir el símplex representat per un triangle ple, simplement escriurem  $\mathcal{K} = \{v_0, v_1, v_2\}$ . Sinó, hauríem d'afegir el símplex de tres vèrtexs a la llista de tots els símplexs de  $\mathcal{K}$ .

**Exemple 1.1.5.** Perquè els símplexs formen un complex simplicial, han de ser “enganxats” entre ells de manera coherent. Cal tenir present que els vèrtexs també

són símplexs. Per a entendre-ho més bé, en farem una representació visual. Per exemple, els símplexs de la primera figura (1.3) no formen un complex simplicial. En canvi, els de la segona (1.4) sí i té dimensió 2.

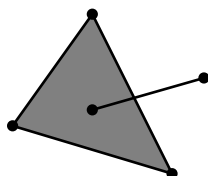


Figura 1.3: No complex simplicial.

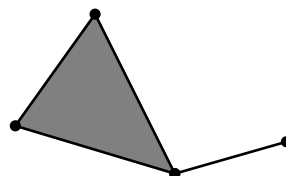
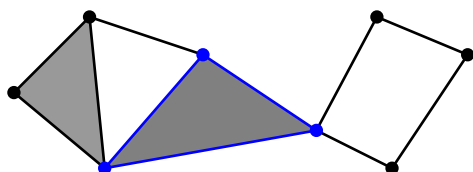


Figura 1.4: Complex simplicial.

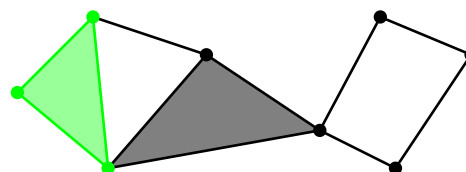
**Definició 1.1.6.** Un símplex  $\tau$  que està contingut en un altre,  $\sigma \in S_{\mathcal{K}}$  i  $\tau \subset \sigma$ , es diu que  $\tau$  és una *cara* de  $\sigma$ . Si a més  $\tau \neq \emptyset$ , es diu que n'és una *cara pròpia*.

**Definició 1.1.7.** Un *subcomplex* d'un complex simplicial  $\mathcal{K}$  és un complex simplicial  $\mathcal{L}$  tal que  $V_{\mathcal{L}} \subseteq V_{\mathcal{K}}$  i  $S_{\mathcal{L}} \subseteq S_{\mathcal{K}}$ . Es diu que  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$  és un subcomplex *ple* si cada símplex de  $\mathcal{K}$  amb tots els vèrtexs a  $\mathcal{L}$  és també un símplex de  $\mathcal{L}$ . En aquest cas, es diu que  $\mathcal{L}$  és el subcomplex ple *abastat* pels vèrtexs  $v \in V_{\mathcal{L}}$ .

**Exemple 1.1.8.** Considerem el complex anterior, de la Figura 1.4. Tant els triangles (recordant que inclouen l'interior, les arestes i els vèrtexs), com les arestes (amb els vèrtexs corresponents) i els vèrtexs sols són subcomplexos. Si observem les dues figures següents, totes dues tenen ressaltades un subcomplex. Ara bé, poden no ser plens. Per exemple, el subcomplex ressaltat en verd és ple, mentre que el subcomplex ressaltat en blau no.



(a) Subcomplex.



(b) Subcomplex ple.

Figura 1.5: Exemples de subcomplexos.

Tot i que n'hem fet representacions visuals per a tenir una idea intuïtiva d'aquestes nocions, els complexos simplicials són objectes combinatoris abstractes. Com hem dit abans, l'objectiu d'aquesta secció és veure com es relacionen amb espais topològics que admeten una mena de “triangulació”. El que farem és associar al complex simplicial un objecte topològic anomenat *realització geomètrica* del complex simplicial.

**Definició 1.1.9.** Donat un símplex  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  de dimensió  $n$ , el *símplex tancat*  $\bar{\sigma}$  és el conjunt de combinacions formals convexes  $\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$  amb  $\lambda_i \geq 0$  per a tot  $0 \leq i \leq n$  i amb  $\sum \lambda_i = 1$ .



Intuïtivament, es poden pensar com unes coordenades que donen les combinacions lineals dels vèrtexs dins d'un espai. Diem intuïtivament perquè encara estem en un context abstracte, per això considerem sumes formals. Gràficament, els símplexs tancats els pensem de la mateixa manera.

*Observació.* Un símplex tancat és un espai mètric amb la mètrica donada per  $d : \sigma \times \sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , on:

$$d\left(\sum_{i=0}^n \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^n \gamma_i v_i\right) = \sqrt{\sum_{i=0}^n (\lambda_i - \gamma_i)^2}.$$

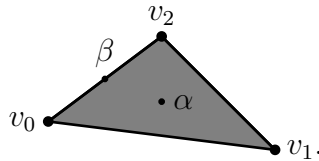
**Definició 1.1.10.** La *realització geomètrica* d'un complex simplicial  $\mathcal{K}$  es denota per  $|\mathcal{K}|$  i és el conjunt de combinacions convexes formals  $\sum_{v \in \mathcal{K}} \lambda_v v$ , tals que els conjunts  $\{v \mid \lambda_v > 0\}$  són símplexs de  $\mathcal{K}$ .

La realització geomètrica d'un complex simplicial  $\mathcal{K}$  es pot pensar com la unió dels símplexs tancats  $\bar{\sigma}$  amb  $\sigma \in \mathcal{K}$ . Així doncs, la topologia a  $|\mathcal{K}|$  és la topologia final coherent respecte els símplexs tancats. Això és perquè un subconjunt  $U \subseteq |\mathcal{K}|$  és obert (resp. tancat) si i només si  $U \cap \bar{\sigma}$  és obert (resp. tancat) a l'espai mètric  $\bar{\sigma}$ , per a cada  $\sigma \in \mathcal{K}$ .

**Definició 1.1.11.** Sigui  $\mathcal{K}$  un complex simplicial i  $\alpha \in |\mathcal{K}|$  un punt de la seva realització geomètrica. Per definició, s'escriu com  $\alpha = \sum_{v \in \mathcal{K}} \lambda_v v$ . Definim el *suport* del punt  $\alpha$  com el conjunt de vèrtexs amb coeficients no nuls, és a dir,

$$\text{supp}(\alpha) = \{v \mid \lambda_v > 0\}.$$

**Exemple 1.1.12.** Intuïtivament, el suport és el conjunt de vèrtexs de la cara més petita que conté al punt. Per exemple, considerem un 2-símplex i els punts  $\alpha$  i  $\beta$  de la manera següent:



El suport de  $\alpha$  és  $\text{supp}(\alpha) = \{v_0, v_1, v_2\}$ , mentre que el de  $\beta$  és  $\text{supp}(\beta) = \{v_0, v_2\}$ .

**Definició 1.1.13.** Sigui  $\sigma$  un símplex de  $\mathcal{K}$ , el *símplex obert*  $\overset{\circ}{\sigma}$  és el subconjunt de  $\bar{\sigma}$  de punts que tenen suport exactament  $\sigma$ .

Propietats de la realització geomètrica d'un complex simplicial  $\mathcal{K}$  que ens donen la topologia a  $|\mathcal{K}|$ :

- Donats dos punts  $\alpha, \beta \in |\mathcal{K}|$  que pertanyin al mateix símplex tancat  $\bar{\sigma}$ , la combinació convexa  $t\alpha + (1-t)\beta$  és un element de  $|\mathcal{K}|$  ben definit.
- Si  $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ , aleshores  $|\mathcal{L}|$  és un subespai tancat de  $|\mathcal{K}|$ . La topologia del conjunt  $\bar{\sigma}$  com a subespai de  $|\mathcal{K}|$  és la topologia donada per la mètrica original de  $\bar{\sigma}$ .

- Si  $\mathcal{K}$  és un complex simplicial finit, la topologia de  $|\mathcal{K}|$  coincideix amb la topologia donada per la mètrica que hem definit abans:

$$d\left(\sum_{v \in \mathcal{K}} \lambda_v v, \sum_{v \in \mathcal{K}} \gamma_v v\right) = \sqrt{\sum_{v \in \mathcal{K}} (\lambda_v - \gamma_v)^2}.$$

De fet,  $|\mathcal{K}|$  admet una immersió a  $\mathbb{R}^n$ , per algun  $n \in \mathbb{N}$ .

- Donat un espai topològic  $X$  qualsevol, una aplicació  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow X$  és contínua si i només si ho són les restriccions  $f|_{\sigma} : \sigma \rightarrow X$ .

Aquestes propietats garanteixen que la idea intuïtiva dels complexos simplicials abstractes com a subespais de  $\mathbb{R}^n$  que es formen enganxant símplexs, té un suport rigorós.

*Observació.* Com que un subcomplex ple es pot descriure com una unió finita de tancats, els símplexs, és tancat.

**Definició 1.1.14.** Sigui  $X$  un espai topològic. Una *triangulació* de  $X$  està formada per un complex simplicial  $\mathcal{K}$  i un homeomorfisme  $h : |\mathcal{K}| \rightarrow X$ . Si  $X$  és homeomorf a la realització geomètrica d'un complex simplicial, es diu que  $X$  és un *poliedre* i, per tant, admet una triangulació.

*Observació.* Els poliedres són espais Hausdorff.

**Exemple 1.1.15.** Vegem quins objectes hem definit fins aquí i com es relacionen.

<b>Complex simplicial:</b>	<b>Realització geomètrica</b>	<b>Triangulació</b>
objecte abstracte format per un conjunt de vèrtexs i un conjunt de símplexs que es denota per $\mathcal{K} = \{V_{\mathcal{K}}, S_{\mathcal{K}}\}$ .	d'un complex simplicial $\mathcal{K}$ : conjunt de combinacions lineals formals de símplexs que es denota per $ \mathcal{K} $ . És un espai topològic no finit.	d'un espai topològic $X$ : complex simplicial $\mathcal{K}$ i homeomorfisme $h :  \mathcal{K}  \rightarrow X$ . Es diu que $X$ és un <b>poliedre</b> .

Per exemple, considerem l'esfera  $S^2$ . Es pot triangular per un octaedre. L'homeomorfisme queda descrit a la imatge següent. Com que un octaedre està format per triangles, és un complex simplicial.

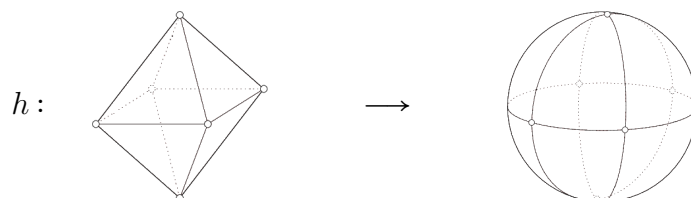


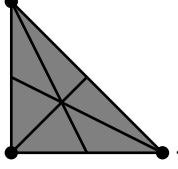
Figura 1.6: Triangulació de l'esfera [2].

**Definició 1.1.16.** Sigui  $\sigma = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  un  $n$ -símplex. El *baricentre* de  $\sigma$  és:

$$b_{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n v_i.$$

Donat  $\mathcal{K}$  un complex simplicial, la *subdivisió baricèntrica* de  $\mathcal{K}$  és el conjunt de subdivisions baricèntriques dels seus símplexs.

Per exemple, així queda la subdivisió baricèntrica d'un 2-símplex:



**Proposició 1.1.17.** *Sigui  $h : \mathcal{K} \rightarrow X$  la triangulació d'un espai topològic  $X$ . Aleshores, la subdivisió baricèntrica de  $\mathcal{K}$  és també una triangulació de  $X$ .*

La demostració es pot consultar al llibre de Vicenç Navarro i Pere Pascual [3, Proposició 1.6.1 i Lema 1.6.2.].

### Aplicacions simplicials

Vegem ara com són per a complexos simplicials l'equivalent a les aplicacions contínues entre espais topològics i després veurem la relació entre aquestes.

**Definició 1.1.18.** Siguin  $K$  i  $L$  dos complexos simplicials. Una *aplicació simplicial*  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  és una aplicació entre vèrtexs  $\varphi' : V_{\mathcal{K}} \rightarrow V_{\mathcal{L}}$  tal que la imatge d'un símplex de  $\mathcal{K}$  és un símplex de  $\mathcal{L}$ .

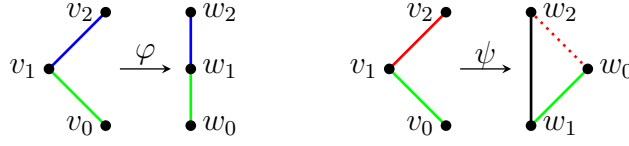
**Proposició 1.1.19.** *Una aplicació simplicial  $\varphi : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$  induïx una aplicació contínua ben definida  $|\varphi| : |\mathcal{K}| \rightarrow |\mathcal{L}|$  entre les respectives realitzacions geomètriques, definida per:*

$$|\varphi|(\sum_{v \in \mathcal{K}} \lambda_v v) = \sum_{v \in \mathcal{K}} \lambda_v \varphi(v).$$

*Demostració.*  $|\varphi|$  és contínua si i només si les restriccions  $|\varphi|_{\sigma}$  són contínues. Com que aquestes restriccions són aplicacions afins i les aplicacions afins són contínues,  $|\varphi|$  és contínua.  $\square$

*Observació.* L'aplicació identitat és simplicial i la composició d'aplicacions simplicials també ho és; vegeu el llibre [3, Proposició 1.2.1 i Lema 1.2.2].

**Exemple 1.1.20.** Siguin  $\mathcal{K} = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}\}$  i  $\mathcal{L} = \{\{w_0, w_1\}, \{w_1, w_2\}\}$  dos complexos simplicials. L'aplicació entre vèrtexs  $\varphi$  definida per  $\varphi(v_0) = w_0$ ,  $\varphi(v_1) = w_1$ ,  $\varphi(v_2) = w_2$  determina una aplicació simplicial que envia el símplex  $\{v_0, v_1\}$  a  $\{w_0, w_1\}$  i  $\{v_1, v_2\}$  a  $\{w_1, w_2\}$ . En canvi, l'aplicació entre vèrtexs  $\psi(v_0) = w_1$ ,  $\psi(v_1) = w_0$ ,  $\psi(v_2) = w_2$  no admet cap extensió simplicial. La imatge de  $\{v_1, v_2\}$  és  $\{w_0, w_2\}$ , que no és un símplex de  $\mathcal{L}$ . Visualment, és fàcil de determinar si una aplicació entre vèrtexs té extensió simplicial.

Figura 1.7: Representació visual de  $\varphi$  i  $\psi$ .

## 1.2 Teoria d'homotopia

Sovint, en l'estudi dels espais topològics, la noció d'homeomorfisme és massa forta. La idea d'homotopia relaxa les propietats que han de tenir els espais per a dir que són equivalents. En aquesta secció repassarem els conceptes bàsics de teoria d'homotopia que necessitarem més endavant, començant pel concepte d'homotopia.

### Homotopies

**Definició 1.2.1.** Donades  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicacions contínues entre espais topològics, una *homotopia* és una aplicació contínua  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$  i  $H(x, 1) = g(x)$ , per a tot  $x \in X$ . En tal cas, es diu que  $f$  i  $g$  són *homotòpiques* i s'escriu  $f \simeq g$ . Si, a més,  $A \subseteq X$  és un subespai de  $X$  i existeix una homotopia  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  entre  $f$  i  $g$  tal que  $H(a, t) = f(a) = g(a)$  per a tot  $a \in A$  i  $t \in [0, 1]$ , es diu que  $f$  i  $g$  són *homotòpiques relatives a  $A$*  i s'escriu  $f \simeq_A g$ .

Una homotopia es pot pensar també com una família d'aplicacions  $\{h_t\}_{t \in [0, 1]}$  tal que  $h_t : X \rightarrow Y$ ,  $h_0 = f$ ,  $h_1 = g$  i l'aplicació  $X \times [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $(x, t) \mapsto h_t(x)$  és contínua. És com una manera de deformar una aplicació en l'altra dins dels mateixos espais topològics. Amb el dibuix següent podem fer-nos una imatge mental de com és una homotopia.

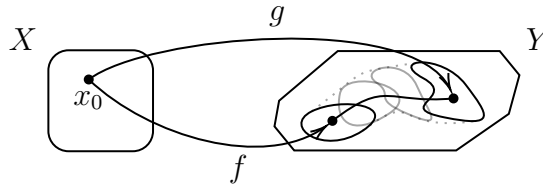


Figura 1.8: Representació visual d'una homotopia.

Dos espais  $X$  i  $Y$  són homeomorfs si existeixen  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow X$  contínues tals que  $f \circ g = \text{id}_Y$  i  $g \circ f = \text{id}_X$ . Si relaxem aquestes igualtats per homotopies, obtenim la noció d'equivalència homotòpica.

**Definició 1.2.2.** Dos espais topològics  $X, Y$  són *homotòpicament equivalents* o *homotòpics* i escrivim  $X \simeq Y$ , si existeixen aplicacions contínues  $f : X \rightarrow Y$  i  $g : Y \rightarrow X$  tals que  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$  i  $g \circ f \simeq \text{id}_X$ .

Tot i que l'equivalència homotòpica relaxa igualtats, en el cas que una de les aplicacions sigui una inclusió de subespai, només cal relaxar una de les igualtats.

**Definició 1.2.3.** Siguin  $X$  un espai topològic,  $A \subseteq X$  un subespai i  $i$  la inclusió. Un *retracte de deformació* és una aplicació contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = \text{id}_A$  i  $i \circ r \simeq \text{id}_X$ . Es diu que  $r$  és un *retracte fort de deformació* si, a més,  $i \circ r \simeq_A \text{id}_X$ .

## Equivalències

Les homotopies són un tipus d'equivalències que relaxen les propietats que comparem. Fins i tot podem arribar a relaxar més aquesta noció amb les equivalències homotòpiques febles. Es fa comparant els grups d'homotopia.

**Definició 1.2.4.** Una aplicació  $f : X \rightarrow Y$  contínua entre espais topològics es diu que és una *equivalència homotòpica* si existeix una aplicació  $g : Y \rightarrow X$  que és una inversa per homotopia. És a dir, tal que  $g \circ f \simeq \text{id}_X$  i  $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ . En tal cas, es diu que  $X$  i  $Y$  són *homotòpicament equivalents* o que tenen el *mateix tipus d'homotopia*.

*Observació.* Qualsevol propietat homotòpica de  $X$  també la tindrà  $Y$ . Intuïtivament, és com deformar l'espai  $X$  doblegant-lo, encongint-lo o expandint-lo fins a aconseguir l'espai  $Y$ . L'exemple més famós d'aquesta operació és el de la tassa i el dònut.



Figura 1.9: Homotopia entre una tassa i un dònut. [4]

**Definició 1.2.5.** Un espai topològic  $X$  és *contràctil* si és homotòpic a un punt.

*Observació.* Un espai topològic  $X$  és contràctil si per a tot punt  $x_0 \in X$ , l'aplicació constant  $c_{x_0} : X \rightarrow X$ , definida per  $c_{x_0}(x) = x_0$  per tot  $x \in X$ , és homotòpica a la identitat a  $X$ .

**Lema 1.2.6.** Siguin  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicacions contínues entre espais topològics. Si un d'ells és contràctil, aleshores  $f \simeq g$ .

*Demostració.* Sigui  $x_0 \in X$ . Si  $X$  és contràctil, aleshores  $\text{id}_X \simeq c_{x_0}$ . Observem que  $f = f \circ \text{id}_X$  i que  $c_{f(x_0)} = f \circ c_{x_0}$ . Però com que  $\text{id}_X \simeq c_{x_0}$ , tenim  $f = f \circ \text{id}_X \simeq f \circ c_{x_0} = c_{f(x_0)}$ . Fent el mateix raonament per  $g$ , tenim  $g = g \circ \text{id}_X \simeq g \circ c_{g(x_0)} = c_{g(x_0)}$ . Per tant,  $f \simeq g$ . La demostració del cas que  $Y$  és contràctil és anàloga.  $\square$

## Grups d'homotopia

Un dels invariants més clàssics de la topologia algebraica i la teoria d'homotopia, són els grups d'homotopia. Aquests mesuren els forats d'un espai topològic amb punt base. Un *espai topològic amb punt base* és una parella  $(X, x_0)$  tal que  $x_0$  és un

punt de  $X$ . Una aplicació contínua entre espais topològics amb punt base és una aplicació contínua  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(x_0) = y_0$ . Denotem per  $[(X, x_0), (Y, y_0)]_*$  el conjunt d'aplicacions contínues relatives al punt base llevat d'homotopia relativa a  $x_0$ .

En el cas particular que el domini de les aplicacions és una esfera de dimensió  $n \geq 1$ , el conjunt d'aplicacions llevat d'homotopia relativa té estructura de grup. Per això, rep el nom de *grup d'homotopia* i es denota per:

$$\pi_n(X, x_0) = [(S^n, e), (X, x_0)]_* \quad (1.1)$$

El producte està induït per la contracció de l'esfera  $S^n$  a la unió puntual de dues  $S^n$ .

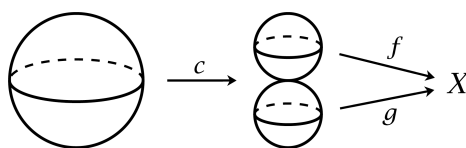


Figura 1.10: El producte en el grup d'homotopia [5].

La definició 1.1 té sentit per  $n = 0$ , però el producte esmentat no. Per tant,  $\pi_0(X, x_0)$  denota el conjunt que mesura les components connexes de l'espai. El grup  $\pi_1(X, x_0)$ , anomenat *grup fonamental*, mesura quantes classes hi ha de llaços no contràctils. Per exemple, sobre l'esfera  $S^2$  tot llaç (és a dir, camí que comença i acaba en el mateix punt) es pot escórrer fins a un punt, però sobre el tor tenim dos tipus de llaços que no es poden escórrer. De fet,  $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ , per a tot  $n > 0$ . El fet que una aplicació  $S^n \rightarrow X$  no sigui homotòpica a una constant, vol dir que  $X$  conté un forat  $n$ -dimensional. És una generalització natural del grup fonamental que consisteix a escórrer llaços en dimensions superiors.

A més, proporcionen una caracterització de l'espai topològic. D'aquesta manera, dos espais topològics que tinguin diferents grups d'homotopia no són homeomorfs. El problema és que hi ha espais topològics que no són homeomorfs, però sí que tenen els mateixos grups d'homotopia. Un espera que això es resolgui amb l'equivalència homotòpica, però, en general, els isomorfismes entre grups d'homotopia no són prou forts per a induir una inversa homotòpica.

N'és un exemple el cercle de Varsòvia. Té tots els grups d'homotopia nuls, com un punt, però no és contràctil, vegeu [6]. Aquest espai topològic també és un exemple de que el Teorema de Whitehead 1.2.8 funciona només quan els espais involucrats són “prou bons” o tenen una estructura combinatoria, com veurem més endavant.

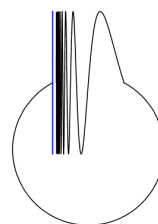


Figura 1.11: Cercle de Varsòvia [6].

### Equivalència homotòpica feble

Demostrar que dos espais tenen el mateix tipus d'homotopia no és una feina gaire fàcil, perquè encara hem de fer servir aplicacions contínues. Així doncs, per a comparar espais homotòpicament, el que farem és relaxar la noció d'homotopia basant-nos en aquest punt de vista algebraic. Després, a través dels complexos simplicials, veurem que, en el nostre cas, aquestes dues nocions coincideixen.

**Definició 1.2.7.** Una aplicació contínua entre espais topològics  $f : X \rightarrow Y$  és una *equivalència homotòpica feble* si indueix isomorfismes a tots els grups d'homotopia. És a dir, si per a tot  $n \geq 1$  i per a tot punt base  $x_0 \in X$  les aplicacions

$$f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, f(x_0))$$

són isomorfismes i, per a  $n = 0$ , l'aplicació  $\pi_0(X) \rightarrow \pi_0(Y)$  és una bijecció.

És a dir, no tenim una inversa homotòpica, però sí que tenim inverses als grups d'homotopia. En particular, una equivalència homotòpica és una equivalència homotòpica feble però no al revés.

**Teorema 1.2.8** (Teorema de Whitehead [5, Teorema 4.5]). *Sigui  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació entre poliedres connexos que indueix isomorfismes als grups d'homotopia  $f_* : \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(Y)$  per a tot  $n$ . Aleshores,  $f$  és una equivalència homotòpica.*

De fet, el Teorema de Whitehead clàssicament s'enuncia per a CW-complexos, que és un cas més general de complexos simplicials. Però com que aquí l'aplicarem a complexos simplicials, deixem aquesta formulació. Aquest teorema demostra que en el cas dels complexos simplicials, aquestes dues nocions són equivalents. És a dir, una equivalència homotòpica feble és una equivalència homotòpica si és entre complexos simplicials. Aquest fet serà fonamental a l'hora de poder comparar els espais finits amb els complexos simplicials.

**Definició 1.2.9.** Sigui  $X$  un espai topològic amb la topologia  $\tau$ . Un *recobriment per oberts consemblant a una base* (de l'anglès *basis-like open cover*) de  $X$  és una família  $\mathcal{U}$  d'oberts que recobreixen  $X$  tal que donats  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$  i  $x \in U_1 \cap U_2$ , existeix  $U_3 \in \mathcal{U}$  tal que  $x \in U_3 \subseteq U_1 \cap U_2$ .

*Observació.* Aquesta condició és equivalent a dir que  $\mathcal{U}$  és una base per a una topologia menys fina de  $X$ .

**Teorema 1.2.10** ([7, Teorema 6]). *Siguin  $X$  i  $Y$  espais topològics i  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació contínua. Suposem que existeix un recobriment per oberts  $\mathcal{U}$  consemblant a una base de  $Y$  de manera cada restricció*

$$f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \rightarrow U$$

*és una equivalència homotòpica feble, per a tot  $U \in \mathcal{U}$ . Aleshores,  $f : X \rightarrow Y$  és una equivalència homotòpica feble.*

Aquest teorema ens servirà per a descriure l'equivalència entre complexos simplicials i espais topològics finits.

# Capítol 2

## La Classificació de Stong

En aquest capítol farem una classificació dels espais topològics finits llevat d'homotopia, seguint el treball de Robert E. Stong [8]. Aquesta classificació serà interna, reduint els espais fins a ser comparables per homeomorfisme. Primer, veurem les nocions bàsiques per a poder treballar-hi. Ho farem a través dels posets i els diagrames d'Hasse, per a tenir una representació visual amb què poder fer càlculs. Després veurem com realitzar aquestes equivalències.

### 2.1 Espais topològics finits i presets

En aquesta secció veurem que els espais topològics finits i els presets finits són essencialment el mateix.

#### D'espai topològic finit a preset

Un *espai topològic finit* és un espai topològic sobre un conjunt finit, és a dir, que té un nombre finit de punts.

**Definició 2.1.1.** Un *preordre* és una relació reflexiva i transitiva. Un *preset* és un conjunt amb un preordre. Un *ordre parcial* és una relació reflexiva, transitiva i antisimètrica. Un *conjunt parcialment ordenat* o *poset* és conjunt amb un ordre parcial.

L'avantatge de tenir espais topològics finits és que les interseccions arbitràries d'oberts són oberts<sup>1</sup>, perquè aquestes interseccions no poden ser infinites. Així podem parlar d'una clausura oberta per als punts.

**Definició 2.1.2.** Donat un punt d'un espai topològic finit  $x \in (X, \tau)$ , definim

---

<sup>1</sup>Aquest tipus d'espais topològics, en els quals les interseccions arbitràries d'oberts són oberts sobre conjunts no necessàriament finits es coneixen com a *espais d'Alexandroff* o *A-espais*. Aquí ens centrarem en el cas finit, però la majoria dels resultats per a espais topològics són certs també per aquest tipus d'espais.



l'obert minimal de  $x$  com la intersecció de tots els oberts que contenen  $x$ :

$$U_x = \bigcap_{x \in \mathcal{O} \in \tau} \mathcal{O}.$$

Els oberts minimal formen una base per a la topologia de  $X$ , anomenada *base minimal de  $X$* .

*Observació.* Siguin  $x, y \in X$  dos punts d'un espai topològic finit. Denotem la *clausura* del conjunt  $\{x\}$  per  $F_x$ , que és el tancat més petit que conté  $\{x\}$ . Aleshores:

$$y \in F_x \text{ si i només si } x \in U_y.$$

**Proposició 2.1.3.** *La base minimal d'un espai topològic finit és una base que, a més, és minimal.*

*Demostració.* Primer, és base perquè donat un obert  $U$  de  $X$ , es pot expressar com una unió dels oberts minimal:  $U = \bigcup_{x \in U} U_x$ . Segon, és minimal perquè qualsevol altra base conté aquesta; si  $B$  és una altra base, per a qualsevol  $x \in X$ , l'obert  $U_x$  s'ha d'escriure com una unió d'elements de  $B$ , però com que  $U_x$  és minimal,  $U_x$  ha d'estar a  $B$ .  $\square$

**Definició 2.1.4.** Sigui  $X$  un espai topològic finit. La relació binària  $\leq$  a  $X$  definida per la següent expressió és un preordre:

$$x \leq y \text{ si i només si } x \in U_y.$$

### De preset a espai topològic finit

Ja hem vist que els espais finits indueixen un preordre. Ara veurem que, de fet, un preordre indueix una topologia.

**Definició 2.1.5.** Donats  $P$  un preset i  $x \in P$ , escrivim

$$P_{\leq x} := \{z \in P \mid z \leq x\}.$$

De manera anàloga es defineixen  $P_{\geq}$ ,  $P_{<}$  o  $P_{>}$ .

En el cas d'un espai topològic finit  $X$  amb preordre associat  $\leq$ , vegeu la Definició 2.1.4,  $U_x$  es correspon amb  $P_{\leq x}$  i la seva clausura  $F_x$  es correspon amb  $P_{\geq x}$ .

**Definició 2.1.6.** Sigui  $P$  un preset finit. La *topologia d'Alexandroff* és la topologia definida per la base  $\{P_{\leq x} \mid x \in P\}$ .

**Proposició 2.1.7.** *Sigui  $(X, \leq)$  un preset i  $\tau$  la topologia d'Alexandroff. Sigui  $\leq'$  el preordre a  $X$  donat pels oberts minimal de  $(X, \tau)$  (vegeu la Definició 2.1.4). Aleshores, tots dos preordres  $(X, \leq)$  i  $(X, \leq')$  coincideixen.*

*Demostració.* Per una banda, si  $y \leq x$ , aleshores  $y$  està contingut a cada obert de la base que contingui  $x$  i, per tant,  $y \in U_x$ . Recíprocament, si  $y \in U_x$  aleshores  $y \in X_{\leq x}$ . Tot això ens diu que  $y \leq x$  si i només si  $y \in U_x$ , com volíem.  $\square$

**Definició 2.1.8.** Es diu que un espai topològic  $X$  compleix l'*axioma de separació*  $T_0$  si donats dos punts diferents hi ha un obert que conté un d'ells i no l'altre.

Recordem que si tenim un poset  $P$  i  $x, y \in P$ , la propietat antisimètrica ens diu que si passa alhora  $x \leq y$  i  $y \leq x$ , aleshores  $x = y$ .

**Proposició 2.1.9.** *Un espai topològic finit  $X$  és  $T_0$  si i només si el preset equivalent és antisimètric; per tant, és un poset.*

*Demostració.* ( $\Rightarrow$ ) Siguin  $x, y \in X$  tals que  $x \leq y$  i  $y \leq x$ . Suposem per reducció a l'absurd que  $x \neq y$ . Com que  $X$  és  $T_0$ , o bé existeix un obert  $U$  tal que  $x \notin U$  i  $y \in U$ ; o bé existeix un obert  $U$  tal que  $y \notin U$  i  $x \in U$ .

Si existeix un obert  $U$  tal que  $x \notin U$  i  $y \in U$ , aleshores  $y \in U_y \subseteq U$ . Però com que  $x \leq y$  tenim  $x \in U_y \subseteq U$ , és a dir,  $x \in U$ ; contradicció. En cas contrari, existeix un obert  $U$  tal que  $y \notin U$  i  $x \in U$ , això implica  $x \in U_x \subseteq U$ . Com que  $y \leq x$  tenim altre cop contradicció:  $y \in U_x \subseteq U$ . Per tant, si  $x, y$  són tals que  $x \leq y$  i  $y \leq x$ , han de ser  $x = y$ .

( $\Leftarrow$ ) Siguin  $x \neq y$  punts de  $X$ . Per antisimetria, o bé  $x < y$  o bé  $y > x$ . Si  $x < y$  tenim  $x \in U_y$  però  $y \notin U_x$ , hem trobat un obert que conté un punt i no l'altre. El cas  $y < x$  és anàleg. Per tant,  $X$  és  $T_0$ .  $\square$

Així doncs, hem vist que la correspondència entre espais topològics finits i presets és bijectiva i que, de fet, si l'espai topològic és  $T_0$ , tenim antisimetria i, per tant, un poset. Alexandroff va ser un referent en aquest tema, estudiant els espais topològics finits des del punt de vista de la combinatòria donada per les estructures dels presets [9]. Una de les principals conseqüències d'aquesta correspondència és la representació visual que se'n deriva: els diagrames d'Hasse.

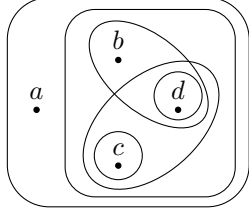
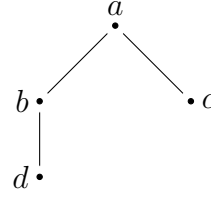
**Definició 2.1.10.** Siguin  $x, y \in X$  dos punts d'un espai topològic finit. Es diu que  $x$  *recobreix*  $y$  si  $x > y$  i per tot  $z \in X$  tal que  $x > z \geq y$  aleshores  $y = z$ . Es pot dir també que  $y$  *és recobert* per  $x$ .

**Definició 2.1.11.** El *diagrama d'Hasse* d'un espai topològic finit  $X$  és un graf dirigit en què els vèrtexs són els punts de  $X$ . Entre dos punts  $x, y \in X$  hi ha una aresta dirigida de  $x$  a  $y$  si i només si  $y$  recobreix  $x$ . Seguirem el conveni en què la direcció de les fletxes és sempre ascendent. Els punts es posen ordenats de major a menor, de dalt a baix.

Observem que a la definició hem fet servir desigualtats estrictes. Això és perquè en general es representen en forma de diagrama d'Hasse els espais topològics finits que són  $T_0$ , és a dir, els posets i no els presets. A més, com veurem més endavant, donat un espai topològic finit que no sigui  $T_0$ , podem treure'n els punts que fan que no sigui  $T_0$  conservant-ne les propietats homotòpiques.

**Exemple 2.1.12.** Sigui  $X = \{a, b, c, d\}$  amb els oberts  $\emptyset$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ,  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{b, d\}$ ,  $\{c, d\}$  i  $\{b, c, d\}$ . Els representarem identificant-los amb els interiors de corbes tancades com veiem a la Figura 2.1.

Com que  $X$  és  $T_0$ , és un poset i, per tant, té sentit parlar del diagrama d'Hasse associat a  $X$ . Vegem com es construeix. Comencem pels punts que són oberts i els posem a on seran els extrems inferiors. Podem fins i tot calcular quins són els oberts  $U_x$  amb  $x \in X$ :  $U_a = \{a, b, c, d\}$ ,  $U_b = \{a, b, c, d\} \cap \{b, d\} \cap \{b, c, d\} = \{b, d\}$ ,  $U_c = \{a, b, c, d\} \cap \{c\} \cap \{c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c\}$  i anàlogament  $U_d = \{d\}$ . Amb això, establim la relació d'ordre:  $c < a$ , però  $c$  no és comparable amb  $b$  ni amb  $d$ ;  $d < a$  i  $d < b$ , però com que  $b < a$  tenim la cadena  $d < b < a$ .

Figura 2.1: Oberts de  $X$ .Figura 2.2: Diagrama d'Hasse de  $X$ .

**Definició 2.1.13.** Sigui  $P$  un poset i  $x \in P$ . Es diu que  $x$  és *maximal* si  $P_{\geq x} = \{x\}$ . És a dir, si per a tot  $y \in P$  tal que  $y \geq x$  es té  $y = x$ . Es diu que  $x$  és un *màxim* si  $z \leq x$  per tot  $z \in P$ . Observem que un poset finit  $P$  té un *màxim* si i només si té un únic element maximal.

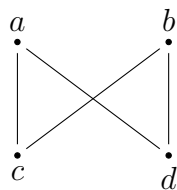
Anàlogament,  $x$  és *minimal* si  $P_{\leq x} = \{x\}$ , és un *mínim* si  $z \geq x$  per tot  $z \in P$  i si  $P$  és finit es diu que  $P$  té un *mínim* si té un únic element minimal.

**Exemple 2.1.14.** L'espai topològic  $X$  de l'exemple anterior 2.1.12 té un únic element maximal,  $a$ ; és a dir, té un màxim. Té dos elements minimal,  $d$  i  $c$ .

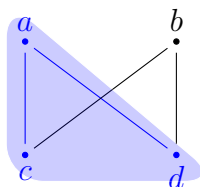
**Definició 2.1.15.** Un subconjunt  $U \subseteq X$  d'un preset és un *conjunt descendent* si per a cada  $x \in U$  i  $y \leq x$  es té que  $y \in U$ .  $U$  és un *conjunt ascendent* si per a cada  $x \in U$  i  $y \geq x$  es té que  $y \in U$ . És a dir, els oberts d'un espai topològic finit es corresponen amb conjunts descendents i els tancats amb conjunts ascendents al preset corresponent.

Aquests conjunts serveixen per a saber com és el nostre espai topològic a partir del diagrama d'Hasse. Visualment, es pren un punt qualsevol i s'agafen tots els que estiguin connectats a aquest per sota seu; és un procés descendent. Els tancats són fer el mateix procés en sentit contrari, ascendent (són els complementaris). Amb això obtenim els oberts de la base i a partir d'aquests podem escriure tots els altres, que com hem vist són unions d'aquests.

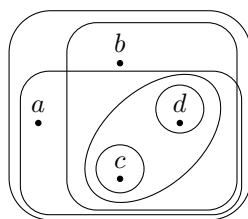
**Exemple 2.1.16.** Sigui  $Y$  el poset que té per diagrama d'Hasse el de la Figura 2.3. L'objectiu d'aquest exemple és calcular-ne l'espai topològic finit associat. Per a fer-ho, en calculem els oberts.

Figura 2.3: Diagrama d'Hasse de l'espai  $Y$ .

Seguint la Definició 2.1.6, recorrem el diagrama d'Hasse començant per baix i anem pujant. Els conjunts  $\{c\}$  i  $\{d\}$  són oberts. Ara, considerem un obert  $U$  tal que  $a \in U$ . Aleshores, com que  $c$  i  $d$  són més petits que  $a$ , també són de  $U$ . Tenim així doncs l'obert  $U_a = \{a, c, d\}$ . El que hem fet és “posar el dit” sobre el punt  $a$  i baixar per totes les arestes possibles fins a arribar a sota de tot. Per a fer-ho més visual, així queda representat en color blau a la següent figura.

Figura 2.4: Obert  $\{a, c, d\}$  al diagrama d'Hasse de l'espai  $Y$ .

Fent un procés anàleg partint de  $b$  obtenim l'obert  $\{b, c, d\}$ . És important no deixar-nos cap aresta. Per exemple,  $\{b, d\}$  no és un obert. Així doncs, els oberts de  $X$  són:  $\{c\}$ ,  $\{d\}$ ,  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$  i les unions  $\{c, d\}$ ,  $\{a, b, c, d\}$ ; vegeu la Figura 2.5.

Figura 2.5: Oberts de  $Y$ .

*Observació* ([1, Observació 1.1.2]). La topologia del preordre és compatible amb les topologies subespai i producte. És a dir, sigui  $A$  un subespai de  $X$  un espai topològic finit, dos elements són comparables a  $A$  si i només si ho són a  $X$ . Si  $X$  i  $Y$  són espais topològics finits, dos punts de l'espai producte cartesià  $(x, y), (x', y') \in X \times Y$  són comparables si i només si ho són les seves coordenades:  $(x, y) \leq (x', y')$  si i només si  $x \leq x'$  i  $y \leq y'$ .

## 2.2 Aplicacions contínues i aplicacions monòtones

L'objectiu d'aquest apartat és demostrar que les aplicacions contínues entre espais topològics finits es corresponen amb les aplicacions que preserven l'ordre (és a dir, monòtones) entre posets. Aquest resultat ens permetrà veure que les components connexes dels espais topològics es corresponen amb les dels posets i podrem donar una descripció combinatòria de les homotopies. Per exemple, tindrem que els espais topològics amb un màxim o un mínim són contràctils.

**Definició 2.2.1.** Es diu que una aplicació  $f : X \rightarrow Y$  entre presets *preserva l'ordre* si  $x \leq x'$  implica que  $f(x) \leq f(x')$ , per a tot  $x, x' \in X$ . És a dir,  $f$  és una funció monòtona.

La següent proposició és important tenir-la present perquè la farem servir sovint per a obtenir continuïtat a partir de monotonia.

**Proposició 2.2.2.** Una aplicació  $f : X \rightarrow Y$  entre espais topològics finits és contínua si i només si l'aplicació entre presets preserva l'ordre.

*Demostració.* ( $\Rightarrow$ ). Suposem que  $f$  és contínua. Donats  $x \leq x' \in X$ , considerem l'obert minimal  $U_{f(x')}$  a  $Y$ . Com que  $f$  és contínua, tenim que  $f^{-1}(U_{f(x')})$  és obert de  $X$  i com que  $x' \in f^{-1}(U_{f(x')})$ , el seu obert minimal complex  $U_{x'} \subseteq f^{-1}(U_{f(x')})$ . Ara bé, com que  $x \leq x'$ , tenim  $x \in U_{x'}$ , per tant,  $x \in f^{-1}(U_{f(x')})$ , és a dir,  $f(x) \leq f(x')$ .

( $\Leftarrow$ ) Suposem que  $f$  preserva l'ordre. Per a veure que és contínua és suficient demostrar que l'antiimatge d'un obert minimal és un conjunt descendent i, per tant, és obert. Donat  $y \in Y$ , considerem  $x \in f^{-1}(U_y)$  (és a dir,  $f(x) \leq y$ ) i  $x' \leq x$ . Per hipòtesi  $f(x') \leq f(x)$  i així  $f(x') \leq y$ . Això ens diu que  $x' \in f^{-1}(U_y)$ , per tant, és un conjunt descendent.  $\square$

*Observació.* Una aplicació  $f$  contínua i injectiva d'un espai topològic finit  $X$  en ell mateix,  $f : X \rightarrow X$ , és automàticament un homeomorfisme; té inversa per injectivitat i aquesta és contínua, perquè l'antiimatge de la inversa (que és  $f$ ) d'un obert és la identitat sobre l'obert i, per tant, és obert:  $f(f^{-1}(U)) = U$  obert. Com que, de fet,  $f$  és una permutació del conjunt  $X$ , existeix  $0 < n \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n = \text{id}_X$ .

Recordem que un *camí* entre dos punts d'un espai topològic  $x, y \in X$  és una aplicació contínua  $\alpha : I \rightarrow X$  tal que  $\alpha(0) = x$  i  $\alpha(1) = y$ , on  $I$  és l'interval unitat.

**Lema 2.2.3.** Si dos punts d'un espai topològic finit  $X$  són comparables, aleshores existeix un camí entre ells.

*Demostració.* Siguin  $x, y \in X$  comparables. Sense pèrdua de generalitat podem assumir que  $x \leq y$ . Considerem l'aplicació  $\alpha : I \rightarrow X$  definida per

$$\alpha(t) = \begin{cases} x & \text{si } t \in [0, 1), \\ y & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Només ens falta comprovar que és contínua i tindrem que és un camí. Donat un obert  $U \subseteq X$ , pot ser que contingui  $y$  o que no. Primer cas: suposem que  $y \notin U$ . Altre cop tenim dues opcions: si  $x \notin U$  tenim  $\alpha^{-1}(U) = \emptyset$ ; si  $x \in U$  tenim  $\alpha^{-1}(U) = [0, 1)$ . Segon cas: si  $y \in U$ , aleshores  $x \in U$ , perquè  $x \leq y$ , i tenim  $\alpha^{-1}(U) = I$ . En tot cas, obtenim un conjunt obert a  $I$  i, per tant,  $\alpha$  és contínua.  $\square$

**Definició 2.2.4.** Una *tanca* a un espai topològic finit  $X$  és una seqüència de punts  $x_0, x_1, \dots, x_n \in X$  que són comparables consecutivament, sense importar el sentit de les desigualtats.

**Exemple 2.2.5.** A l'Exemple 2.1.16, tenim una tanca que és  $a, c, b, d$ , perquè tenim  $a > c < b > d$ . En canvi,  $a, b$  no és una tanca. També podem mirar l'Exemple 2.1.12 i tenim la tanca  $d, b, a, c$  perquè  $d < b < a > c$  o, simplement, la tanca  $c, a$  perquè  $c < a$ .

**Definició 2.2.6.** Es diu que un espai topològic finit  $X$  és *connex per l'ordre* (o *ordre-connex*) si donats dos punts qualssevol  $x, y \in X$ , existeix una tanca que comença a  $x$  i acaba a  $y$ .

**Proposició 2.2.7.** Donat  $X$  un espai topològic finit, són equivalents:

- (i)  $X$  és *connex* (com a espai topològic).
- (ii)  $X$  és *connex per l'ordre* (com a poset).
- (iii)  $X$  és *connex per camins* (com a espai topològic).

*Demostració.* (iii)  $\Rightarrow$  (i) és conegut i (ii)  $\Rightarrow$  (iii) és cert pel Lema 2.2.3. Així doncs, només falta demostrar (i)  $\Rightarrow$  (ii). Suposem que  $X$  és *connex* i vegem que és *connex per l'ordre*. Sigui  $x \in X$ , considerem el conjunt  $A = \{y \in X \mid \text{existeix una tanca de } x \text{ a } y\}$ . Si considerem  $y \in A$  i suposem  $z \leq y$ , podem construir una tanca afegint  $z$  al principi de la tanca que va de  $y$  a  $x$  i així  $z \in A$ . Per tant,  $A$  és un conjunt descendent. Si ara suposem que  $z \geq y$ , de la mateixa manera tenim  $z \in A$  i, doncs,  $A$  és un conjunt ascendent. Hem vist que els conjunts ascendents corresponen amb oberts i els ascendents amb tancats. Així, com que  $A$  és obert i tancat alhora,  $A = X$ . Això ens diu que per a qualsevol parella d'elements de  $X$  existeix una tanca de l'un a l'altre;  $X$  és *connex per l'ordre*.  $\square$

Així doncs, en un espai topològic finit, tanca i camí són conceptes equivalents. Ara veurem que en el cas de l'espai d'aplicacions podem definir nocions anàlogues.

**Definició 2.2.8.** Siguin  $X$  i  $Y$  dos espais topològics qualssevol. Denotem per  $Y^X$  el conjunt d'aplicacions que van de  $X$  a  $Y$ . Definim la *topologia compacte-oberta* en aquest conjunt com la topologia generada per la subbase formada pels conjunts

$$S(K, W) = \{f \in Y^X \mid f(K) \subseteq W\},$$

on  $K$  és un compacte de  $X$  i  $W$  és un obert de  $Y$ .

*Observació.* Donats  $X, Y$  espais topològics,  $Y^X$  amb la topologia compacte-oberta i  $I$  un interval. Donada una homotopia  $H : X \times I \rightarrow Y$ , el camí  $\alpha : I \rightarrow Y^X$  definit

per  $\alpha(t) : X \rightarrow Y$ , on  $\alpha(t)(x) = H(x, t)$ , és una aplicació contínua (vegeu [10, Teorema 46.10 i Teorema 46.11]). Si, a més,  $X$  és un espai topològic finit, hi ha una bijecció entre el conjunt d'homotopies  $\{H : X \times I \rightarrow Y\}$  i el conjunt dels camins  $\{\alpha : I \rightarrow Y^X\}$ , amb la topologia compacte-oberta, vegeu [11].

**Definició 2.2.9.** Si  $X$  i  $Y$  són espais topològics finits, el conjunt  $Y^X$  d'aplicacions contínues de  $X$  a  $Y$  és finit i podem definir l'ordre punt a punt:  $f \leq g$  si  $f(x) \leq g(x)$ , per a cada  $x \in X$ .

**Proposició 2.2.10** ([1, Proposició 1.2.5]). *Siguin  $X$  i  $Y$  espais topològics finits. L'ordre punt a punt a  $Y^X$  correspon amb la topologia compacte-oberta.*

*Demostració.* La demostració es fa per definició comprovant la doble inclusió.  $\square$

Ja hem vist que els camins es corresponen amb tanques. Ara veurem que les homotopies es generalitzen en tanques d'aplicacions.

**Corol·lari 2.2.11.** *Siguin  $f, g : X \rightarrow Y$  aplicacions entre espais topològics finits. Aleshores  $f \simeq g$  si i només si hi ha una tanca  $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$ . Pel que fa a subespais, si  $A \subseteq X$ , llavors  $f \simeq_A g$  si i només si aquesta tanca és tal que  $f_i|_A = f|_A$  per a cada  $0 \leq i \leq n$ .*

*Demostració.* Per l'observació anterior, existeix una homotopia  $H$  entre les aplicacions  $f$  i  $g$  si i només si existeix un camí  $\alpha : I \rightarrow Y^X$  de  $f$  a  $g$  a l'espai d'aplicacions  $Y^X$ . Per la Proposició 2.2.7, tenim que  $Y^X$  és connex per l'ordre si i només si ho és per camins. Per tant, tenim que existeix una tanca de  $f$  a  $g$  (a  $Y^X$ ), donada per l'ordre que ens dona la Proposició 2.2.10, si i només si existeix un camí.  $\square$

Vegem un resum de com queda la correspondència entre els espais topològics finits i els conjunts parcialment ordenats. Sigui  $X$  un espai topològic finit,  $P$  el preset associat,  $x, y \in X$  i  $f, g$  aplicacions contínues entre espais topològics finits.

Espai topològic finit $X$	Preset $P$
$U_x, F_x$	$P_{\leq x}, P_{\geq x}$
$y \in U_x$	$y \leq x$
$T_0$	Preset antisimètric: poset
Interiors de corbes tancades	Diagrama d'Hasse
Obert, tancat	Conjunt descendent, conjunt ascendent
$f$ contínua	$f$ preserva l'ordre
Camí, connex per camins	Tanca, connex per l'ordre
Homotopia: $f \simeq g$	Tanca d'aplicacions: $f = f_0 \leq f_1 \geq f_2 \leq \dots \leq f_n = g$

**Corol·lari 2.2.12.** *Si un espai topològic finit  $X$  té un màxim o un mínim, aleshores és contràctil.*

*Demostració.* Podem assumir, sense pèrdua de generalitat, que  $X$  té un màxim. El cas d'un mínim es raona anàlogament. Sigui  $M \in X$  el màxim. Considerem l'aplicació constant  $c(x) = M$  per tot  $x \in X$ . Aleshores, tenim l'ordre punt a punt:  $\text{id}_X(x) \leq c(x) = M$ . Com que això es compleix per tot  $x \in X$ , tenim  $\text{id}_X \leq c$ , és a dir, existeix una tanca de  $\text{id}_X$  a  $c$ . Per tant, pel Corol·lari 2.2.11,  $\text{id}_X \simeq c$ .  $\square$

**Exemple 2.2.13.** Observem la Figura 2.6 que hi ha a continuació. A l'esquerra hi ha l'espai topològic de l'Exemple 2.1.12, que és contràctil. Gràficament, en aquest exemple es veu molt clar que el màxim és al punt  $a$  i que tot l'espai es pot contraure cap a ell. També es pot contraure cap a un dels dos mínims,  $c$  o  $d$ . En canvi, si haguéssim partit de la descripció dels oberts de l'espai topològic, com a la Figura 2.1 del mateix exemple esmentat, visualment ens hauria costat més identificar si l'espai era contràctil. A la dreta hi ha l'espai topològic de l'Exemple 2.1.16, que no és contràctil.



Figura 2.6: Diagrama d'Hasse dels exemples 2.1.12 i 2.1.16, respectivament.

## 2.3 Espai minimal i nucli

L'objectiu d'aquest apartat és demostrar que ens podem restringir a estudiar els espais topològics que són  $T_0$  i que només calen els nuclis d'aquests, des del punt de vista de les homotopies. El primer a demostrar això va ser Robert E. Stong [8]. De fet, Stong va estudiar una classificació dels homeomorfismes a partir de la representació dels espais topològics finits en forma de matrius.

**Proposició 2.3.1** ([1, Proposició 1.3.1]). *Sigui  $X$  un espai topològic finit. Sigui  $X_0$  el quocient  $X/\sim$ , on  $x \sim y$  si  $x \leq y$  i  $y \leq x$ . Aleshores,  $X_0$  és  $T_0$  i l'aplicació quocient  $q : X \rightarrow X_0$  és una equivalència homotòpica. Fem un petit abús de notació i anomenem la  $T_0$ -ficació de  $X$  tant a l'aplicació quocient  $q$  com a l'espai topològic  $X_0$ .*

*Demostració.* Sigui  $i : X_0 \rightarrow X$  una secció de  $q$ , és a dir, una aplicació entre conjunts tal que  $q \circ i = \text{id}_{X_0}$ . Primer, veurem que  $i$  és monòtona i, per tant, contínua. Siguin  $x, y \in X$  tals que  $[x] \leq [y]$ , on  $[x]$  denota la classe d'un punt a  $X_0$ . Aleshores, per definició de  $q$ , com que  $i([x]) \leq i([y])$  si i només si  $x \leq y$ ,  $i$  és monòtona. De fet, l'aplicació  $i$  és una aplicació de subespai.

Segon, com que  $i \circ q \leq \text{id}_X$ ,  $i$  és una inversa homotòpica de  $q$ . De fet, és més que una inversa homotòpica,  $X_0$  és un retracte fort per deformació de  $X$ , ja que  $i \circ q(x) = \text{id}_X(x)$ , per tot  $x \in X_0$ , vegeu el Corol·lari 2.2.11.



Vegem que és un espai  $T_0$ . Recordem que ho és si i només si el preordre associat és antisimètric. Fem un petit abús de notació i identifiquem els punts de  $X_0$  amb la seva imatge a  $X$ . Siguin  $x, y \in X_0$  tals que  $x \leq y$  i  $y \leq x$ . Si  $x \leq y$ , aleshores,  $x \leq i \circ q(x) \leq i \circ q(y) \leq y$ . Com que  $i$  és monòtona,  $q(x) \leq q(y)$ . Per altra banda, si  $y \leq x$  tenim que  $q(y) \leq q(x)$  de manera anàloga. Per definició de  $q$ , tenim que  $q(x) = q(y)$ . Però  $q \circ i = \text{id}_{X_0}$ , per tot  $x \in X_0$ . Per tant,  $x = y$ .  $\square$

Aquest pas ens serveix per a poder simplificar encara més els nostres espais topològics i com que tindrem posets, sempre tindrem el diagrama d'Hasse associat. Per exemple, considerem un espai topològic amb quatre punts  $X = \{a, b, c, d\}$  amb els oberts  $\{a, c, d\}$ ,  $\{b, c, d\}$  i  $\{c, d\}$ . Identificant els punts  $c$  i  $d$  obtenim l'espai topològic  $X_0 = \{[a], [c], [d]\}$  amb els oberts  $\{[a], [c]\}$ ,  $\{[b], [c]\}$  i  $\{[c]\}$ . És com dir que es poden ignorar els punts redundants en un espai topològic finit. Des del punt de vista dels espais topològics, estem identificant els punts que tenen la mateixa adherència.

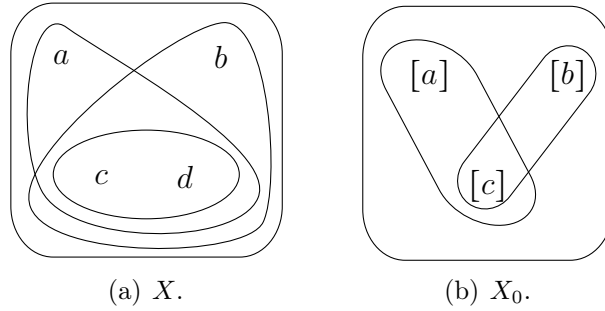


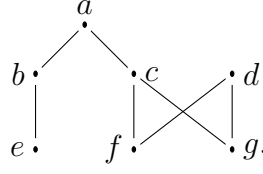
Figura 2.7: Representació d'una  $T_0$ -ficació.

Com que tot espai topològic finit és  $T_0$  llevat d'homotopia, d'ara endavant considerarem sempre que els espais topològics finits amb què treballem són  $T_0$ . Per tant, és equivalent pensar en un espai topològic finit o en un poset. Així doncs, parlarem d'un espai topològic i del poset associat de manera indistinta. Per tant, ens referirem al diagrama d'Hasse d'un espai topològic finit.

**Definició 2.3.2.** Sigui  $X$  un espai topològic finit  $T_0$ . Es diu que  $x \in X$  és un *punt descendent* (de l'anglès *up-beat point*) si recobreix un únic element de  $X$ . Anàlogament,  $x$  és un *punt ascendent* (*down-beat point*) si és recobert per un únic element. Per a referir-nos als punts que compleixin alguna de les dues propietats, tant els punts ascendents com els descendents s'anomenen *punts de batuda* de  $X$  (*beat points*).

*Observació.* De manera equivalent, es diu que  $x$  és un punt descendent si en el diagrama d'Hasse  $x$  té una sola aresta inferior. En l'espai topològic, és equivalent a dir que el conjunt  $\hat{U}_x = U_x \setminus \{x\}$  té un màxim. Anàlogament,  $x$  és un punt ascendent si té una sola aresta superior en el diagrama d'Hasse o si  $\hat{F}_x = F_x \setminus \{x\}$  té un mínim a l'espai topològic.

**Exemple 2.3.3.** Considerem l'espai topològic finit amb diagrama d'Hasse següent,



Només té un punt descendent:  $b$ . És l'únic que té una i només una aresta inferior. Té tres punts ascendants:  $b, c$  i  $e$ . Així doncs,  $b$  és l'únic punt que és tant punt de batuda descendent com ascendent. El subespai  $\{c, d, f, g\}$  no té cap punt de batuda.  $a$  tampoc no és punt de batuda, ja que no és recobert per ningú (no té cap aresta superior) i recobreix a dos punts (té dues arestes inferiors). Com veiem, podem tenir tota mena de combinacions.

Aquest espai topològic ens recorda als de l'Exemple 2.2.13, on hem vist quin aspecte tenen els espais que són contràctils i els que no ho són. Com podem pensar, aquestes nocions van molt lligades amb els punts de batuda. Ens preguntem quin és l'espai més petit al qual els podem contraure, cosa que ens porta a parlar del nucli d'un espai topològic finit.

**Definició 2.3.4.** Un espai topològic  $X$  finit i  $T_0$  és *minimal* si no té punts de batuda. El *nucli* o *centre* (de l'anglès *core*) d'un espai topològic finit  $X$  és un subespai que a més és minimal com a espai topològic.

**Exemple 2.3.5.** L'espai topològic de l'Exemple 2.1.12 no és minimal. És  $T_0$ , però és ple de punts de batuda. De fet, és contràctil a un punt. Ho hem vist a través dels màxims i mínims, però també es veu clar tenint en compte els punts de batuda. En canvi, l'espai topològic de l'Exemple 2.1.16 sí que és minimal, no té cap punt de batuda.

**Proposició 2.3.6** ([1, Proposició 1.3.4]). *Sigui  $X$  un espai topològic  $T_0$  finit i  $x \in X$  un punt de batuda. Aleshores  $X \setminus \{x\}$  és un retracte fort per deformació de  $X$ .*

*Demostració.* Suposem que  $x$  és un punt descendent, sigui  $y$  el màxim de  $\hat{U}_x$  i denotem  $X' = X \setminus \{x\}$ . Definim la retracció  $r : X \rightarrow X'$  per  $r(x) = y$ . Procedim igual que amb la Proposició 2.3.1 i obtenim  $ir \simeq_{X'} \text{id}_X$ . El cas en què  $x$  és un punt ascendent és anàleg.  $\square$

**Proposició 2.3.7.** *Sigui  $X$  un espai topològic finit. Existeix un subespai  $X_0$  que és nucli de  $X$ . A més, la projecció  $q : X \rightarrow X_0$  és un retracte fort per deformació.*

*Demostració.* Donat un espai topològic finit  $X$ , existeix un espai topològic  $T_0$  que és retracte fort per deformació  $X' \subseteq X$ , per la Proposició 2.3.1. Reiterant la Proposició 2.3.6, traïem cada punt de batuda de  $X'$  fins a aconseguir un espai topològic minimal finit.  $\square$

**Exemple 2.3.8.** Sigui  $X$  l'espai topològic finit que té associat el diagrama d'Hasse que veiem a la Figura 2.8. En calculem el nucli traient-ne els punts de batuda.

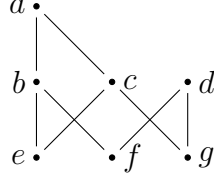


Figura 2.8: Espai topològic  $X$  no minimal.

Primer, com que  $b$  és un punt ascendent el retraiem cap a  $a$ . Després traiem  $c$  cap a  $a$  perquè és un punt ascendent de  $X \setminus \{b\}$  i finalment traiem  $e$  cap a  $a$  perquè ho és de  $X \setminus \{b, c\}$ . El subespai obtingut  $X \setminus \{b, c, e\}$  és minimal i, per tant, és el centre de  $X$ .

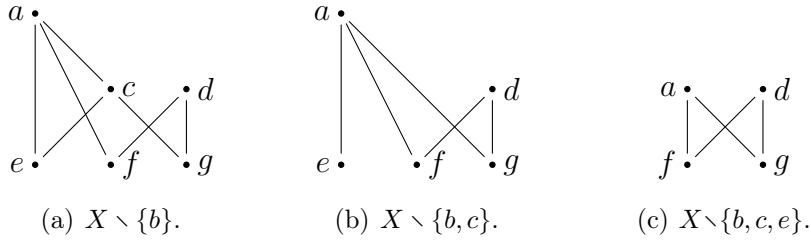


Figura 2.9: Càlcul del nucli de l'espai topològic  $X$ .

L'important de la construcció que hem fet a la demostració de la Proposició 2.3.7, és que el nucli d'un espai topològic finit és únic llevat d'homeomorfisme. De fet, és encara més fort: dos espais topològics són homotòpicament equivalents si i només si els seus nuclis són homeomorfs. Això ens permet reduir l'estudi d'espais topològics finits als seus nuclis, és a dir, als espais topològics minimalis.

**Teorema 2.3.9** ([1, Teorema 1.3.6]). *Sigui  $X$  un espai topològic minimal finit. Una aplicació  $f : X \rightarrow X$  és homotòpica a la identitat si i només si  $f = id_X$ .*

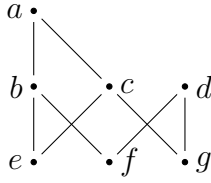
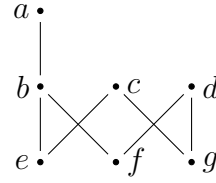
*Demostració.* Pel Corol·lari 2.2.11, suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $f \leq id_X$ . L'altra desigualtat es raona de manera anàloga. Farem la demostració per inducció. Si  $x \in X$  és minimal, aleshores  $f(x) \leq id_X(x) = x$ . Com que  $x$  és minimal, tenim la igualtat. Ara suposem que  $f|_{\hat{U}_x} = id_{\hat{U}_x}$ . Si  $f(x) \neq x$ , aleshores  $f(x) \in \hat{U}_x$  i, per hipòtesi d'inducció, per a tot  $y < x$ ,  $y = f(y) \leq f(x)$ . Per tant,  $f(x)$  és el màxim de  $\hat{U}_x$ , que és una contradicció perquè  $X$  no té punts descendents. Per tant, ha de ser  $f(x) = x$ .  $\square$

D'aquest teorema i de la Proposició 2.3.7 deduïm el següent corol·lari, que ens diu que si tenim dos espais topològics finits i minimalis, són homotòpicament equi-

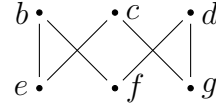
valents si i només si són homeomorfs. El matís rellevant és el fet que amb la minimalitat podem passar a comparar per homeomorfisme en lloc d'homotopia.

**Corol·lari 2.3.10** (Teorema de Classificació [1, Corol·lari 1.3.7]). *Una equivalència homotòpica entre espais topològics minimal finits és un homeomorfisme. En particular, el nucli d'un espai topològic finit és únic llevat d'homeomorfisme i dos espais topològics finits són homotòpicament equivalents si i només els seus nuclis són homeomorfs.*

**Exemple 2.3.11.** Considerem els següents espais topològics  $T_0$  finits  $X$  i  $Y$ . Són molt similars i volem veure si són homotòpicament equivalents.

Figura 2.10: Espai  $X$ .Figura 2.11: Espai  $Y$ .

Ja hem calculat abans el nucli de  $X$  (vegeu l'Exemple 2.3.8). Observem que  $Y$  només té  $a$  com a punt de batuda (de fet és descendent) i que  $Y \setminus \{a\}$  és minimal.

Figura 2.12: Nucli de  $X$ .Figura 2.13: Nucli de  $Y$ .

Els nuclis de  $X$  i de  $Y$  no són homeomorfs. Per tant,  $X$  i  $Y$  no són homotòpicament equivalents. És a dir, no existeix cap equivalència homotòpica entre ells, però més endavant, a l'Exemple 3.1.4, veurem que sí que n'existeix una de feble.

Una conseqüència directa del Teorema de Classificació 2.3.10 és el següent corol·lari, que ens serà útil per a identificar espais topològics contràctils a simple vista als diagrames d'Hasse.

**Corol·lari 2.3.12.** *Un espai topològic finit és contràctil si i només si el seu nucli és un punt.*

*Observació.* No és cert que cada punt d'un espai topològic finit contràctil en sigui un retracte fort per deformació (vegeu [1, pàg. 9]).

El nucli d'un espai topològic finit és l'espai topològic més petit homotòpicament equivalent a aquest. Això és perquè si tenim un altre espai topològic  $Y$  homotòpicament equivalent a  $X$ , aleshores el nucli de  $Y$  ha de ser homeomorf al nucli de  $X$ . Però com que el nucli de  $Y$  té com a màxim tants punts com  $Y$ , tenim que  $Y$  ha de ser com a mínim tan gran com el nucli de  $X$ .

## Capítol 3

# El Teorema de McCord

Tant els espais topològics finits com els complexos simplicials tenen una estructura combinatòria forta. Per tant, és natural preguntar-se quina relació poden tenir. El Teorema de McCord ens diu que hi ha una equivalència pel que fa a homotopia feble entre espais topològics finits i complexos simplicials. En aquest capítol introduïrem els conceptes que necessitem per enunciar i demostrar el Teorema de McCord. Després farem exemples d'algunes de les superfícies compactes connexes a partir d'aquest resultat.

### 3.1 El complex simplicial associat a un espai finit

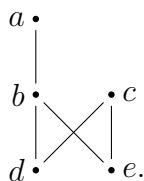
La relació entre espais topològics finits  $T_0$  i complexos simplicials és en els dos sentits i el Teorema de McCord ens en dona una pauta explícita.

**Definició 3.1.1.** Sigui  $X$  un espai topològic finit i  $T_0$ . El *complex simplicial associat a  $X$* , o bé *complex de l'ordre*, que denotarem per  $\mathcal{K}(X)$ , és el complex simplicial que té per  $n$ -símplexs les cadenes de longitud  $n$ :

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n,$$

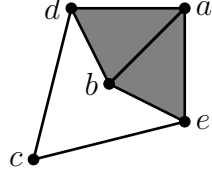
on la relació d'ordre és donada per la Definició 2.1.4.

**Exemple 3.1.2.** Sigui  $X$  l'espai topològic finit  $T_0$  amb diagrama de Hasse associat:



Vegem com se'n construeix el complex simplicial associat. Primer, els elements de  $X$  són els vèrtexs o 0-símplexs. Després mirem les cadenes de longitud màxima. Aquí tenim  $\{a > b > d\}$  i  $\{a > b > e\}$ . Tenim, doncs, dos símplexs de dimensió 2. Observem que compartiran una aresta, la  $\{a > b\}$ .

A continuació, anem baixant de dimensió. En aquest cas, només ens queda posar una aresta de  $d$  a  $c$  i una de  $e$  a  $c$ , perquè les altres cadenes de mida 1 ja les tenim en forma d'arestes (1-símplexs) dels 2-símplexs. Finalment, representem gràficament la realització geomètrica de  $\mathcal{K}(X)$ :



**Definició 3.1.3.** Siguin  $X$  i  $Y$  espais topològics  $T_0$  finits i  $f : X \rightarrow Y$  una aplicació contínua. Aleshores, l'*aplicació simplicial associada*  $\mathcal{K}(f) : \mathcal{K}(X) \rightarrow \mathcal{K}(Y)$  està definida per  $\mathcal{K}(f)(x) = f(x)$ .

*Observació.* Com que l'aplicació  $f$  és contínua, l'aplicació induïda entre vèrtexs  $\mathcal{K}(f)$  és simplicial perquè preserva l'ordre i, per tant, envia cadenes a cadenes.

Recordem que el Teorema 1.2.10 diu que si una aplicació contínua és localment equivalència homotòpica feble, sobre un recobriment consemblant a una base, aleshores ho és globalment. Aquí ho aplicarem sobre els oberts minimalis.

**Exemple 3.1.4.** A l'Exemple 2.3.11 hem vist que els espais  $X$  i  $Y$  que tenen per nucli el diagrama d'Hasse corresponent a la Figura 3.1, no són homotòpicament equivalents, perquè no tenen els nuclis homeomorfs. Vegem que, en canvi, sí que existeix una equivalència homotòpica feble.

Considerem l'aplicació  $f$  entre els següents espais topològics finits  $X$  i  $Y$ , definida per  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = a$ ,  $f(b) = b$ ,  $f(c) = c$ ,  $f(d) = d$ .

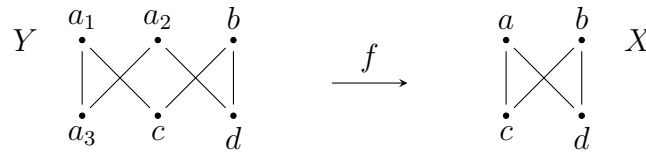


Figura 3.1: Representació de  $f$ .

Vegem que preserva l'ordre. Com que  $b$ ,  $c$  i  $d$  són fixos, només cal comprovar que les imatges de  $a_1$ ,  $a_2$  i  $a_3$  mantenen l'ordre per  $f$ :  $a_3 \leq a_1, a_2$  i  $f(a_3) = a \leq f(a_1) = f(a_2) = a$ ;  $c \leq a_1$  i  $f(c) = c \leq f(a_1) = a$ ;  $d \leq a_2$  i  $f(d) = d \leq f(a_2) = a$ . Com que preserva l'ordre, és contínua. Els oberts minimalis són  $U_a = \{a, c, d\}$ ,  $U_b = \{b, c, d\}$ ,  $U_c = \{c\}$  i  $U_d = \{d\}$ . Les antiimatges són un punt en el cas de  $U_c$  i  $U_d$ . Els altres els representem visualment, vegeu la següent Figura 3.2.

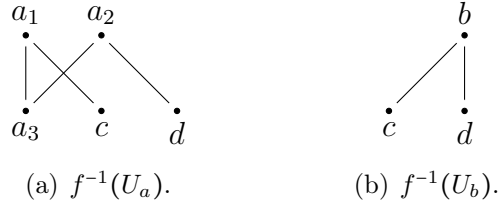


Figura 3.2: Antiimatges d'oberts minimal.

Veiem, pels punts de batuda, que aquests oberts també són contràctils. Així doncs, l'antiimatge de cada obert minimal  $U_y$ ,  $y \in X$ , és contràctil. Per tant, les restriccions  $f|_{f^{-1}(U_y)} : f^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$  són equivalències homotòpiques, cosa que implica que són equivalències homotòpiques febles. Tot això és localment. Com que ho hem mirat a la base minimal, que és un recobriment consemblant a una base, apliquem el Teorema 1.2.10 i tenim que  $f$  és globalment una equivalència homotòpica feble. Però no és una equivalència homotòpica perquè els espais topològics de sortida i arribada són minimal i no són homeomorfs.

Recordem com són els punts de la realització geomètrica. Si  $X$  és un espai topològic finit  $T_0$ , un punt  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$  es pot escriure en coordenades com  $\alpha = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$ , on  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ ,  $\lambda_i > 0$  per tot  $1 \leq i \leq r$  i de manera ordenada, per a alguna cadena  $v_1 < v_2 < \dots < v_r$  a  $X$ . Per tant, el suport de  $\alpha$  és justament aquesta cadena:

$$\text{supp}(\alpha) = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}.$$

**Definició 3.1.5.** Sigui  $X$  un espai topològic finit  $T_0$  i  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$ . Per construcció,  $\alpha$  s'escriu en coordenades sobre una cadena  $\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ . L'*aplicació de McCord* és l'aplicació

$$\mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$$

definida per

$$\mu_X(\alpha) = \min(\text{supp}(\alpha)) = v_1.$$

**Lema 3.1.6.** *L'aplicació de McCord és contínua.*

*Demostració.* Com que els oberts minimal formen una base per la topologia de  $X$ , és suficient veure que l'antiimatge d'un obert minimal arbitrari és un obert.

Primer de tot, considerem un punt  $x \in X$  i sigui  $L$  el subcomplex ple de  $\mathcal{K}$  abastat pels vèrtexs que no són de  $U_x$ :

$$L = \mathcal{K}(X \setminus U_x) \subseteq \mathcal{K}(X).$$

Vegem, per doble inclusió, que

$$\mu_X^{-1}(U_x) = |\mathcal{K}(X)| \setminus |L|.$$

( $\subseteq$ ) Si  $\alpha \in \mu_X^{-1}(U_x)$ , aleshores, per definició de  $\mu_X$ ,  $\min(\text{supp}(\alpha)) \in U_x$ . En particular, el suport de  $\alpha$  conté un vèrtex de  $U_x$ , per tant, no pot ser de  $L$ ;  $\alpha \notin |L|$ .

( $\supseteq$ ) Si  $\alpha \notin |L|$ , per definició de  $L$ , existeix  $y \in \text{supp}(\alpha)$  tal que  $y \in U_x$ . Per tant,  $\min(\text{supp}(\alpha)) < y < x$ . Això implica que  $\mu_X(\alpha) \in U_x$ .

Tenim, doncs, la igualtat. Com que  $|L| \subseteq |\mathcal{K}(X)|$  és tancat, per ser un subcomplex, el seu complementari  $\mu_X^{-1}(U_x)$  és obert.  $\square$

**Exemple 3.1.7.** Partim de l'Exemple 3.1.2, en què hem calculat el complex simplicial associat a un espai topològic  $X$ . Un punt  $\alpha \in |\mathcal{K}(X)|$  de l'interior del triangle  $abe$  es podrà escriure com  $\alpha = \lambda_1 e + \lambda_2 b + \lambda_3 a$  amb  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ . Aleshores,  $\mu_X(\alpha) = \min(\{e, b, a\}) = e$  i per tant tot punt de l'interior d'aquest triangle anirà a parar a  $e$ , representat en verd a la Figura 3.3. Equivalentment, els punts de l'interior de  $adb$  aniran a  $d$ , representats en vermell.

Considerem ara un punt de l'interior l'aresta  $ae$ . Com que el suport és  $\{e, a\}$ , el mínim és  $e$ . En general, en tots els casos, els punts de l'interior de qualsevol aresta aniran a parar al menor dels vèrtexs de l'aresta.

De fet, de manera encara més general, els punts de l'interior de qualsevol símplex aniran a parar al vèrtex del símplex que tingui la posició més baixa al poset. Per això els vèrtexs són els únics que es queden fixos. Així doncs, la representació en colors de l'aplicació de McCord queda com podem veure a la següent figura.

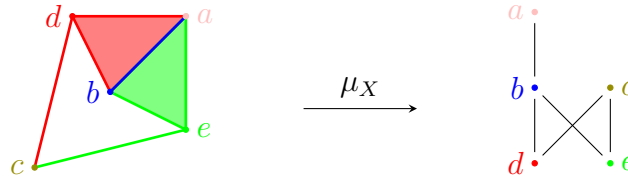


Figura 3.3: Aplicació de McCord en colors.

Un mètode més ràpid per a pensar-ho és prendre els punts mínims del diagrama d'Hasse i mirar-los al complex. Aleshores, tot allò i només allò que hi estigui en contacte quedarà “absorbit” cap al punt en qüestió, de manera oberta.

A partir d'aquí l'objectiu és acabar aquest capítol demostrant que donat un poliedre qualsevol existeix un espai topològic finit al qual modelitza i que donat qualsevol espai topològic finit, existeix un poliedre que el modelitza.

**Teorema 3.1.8** (Teorema de McCord [7, Teorema 1]).

1. Per a cada espai topològic finit  $X$ , existeix un complex simplicial finit  $\mathcal{K}$  i una equivalència homotòpica feble  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow X$ .
2. Per a cada complex simplicial finit  $\mathcal{K}$ , existeix un espai topològic finit  $X$  i una equivalència homotòpica feble  $f : |\mathcal{K}| \rightarrow X$ .



*Demostració.* Demostrem primer el punt 1. Sigui  $X$  un espai topològic finit. Per la Proposició 2.3.1, sense pèrdua de generalitat podem suposar que és  $T_0$ . Considerem  $\mathcal{K} = \mathcal{K}(X)$  el complex simplicial associat a  $X$  amb realització geomètrica  $|\mathcal{K}|$  i  $f = \mu_X : |\mathcal{K}(X)| \rightarrow X$ , definida per  $\mu_X(\alpha) = \min(\text{supp}(\alpha))$ , l'aplicació de McCord. Demostrarem que és una equivalència homotòpica feble, fent servir el Teorema 1.2.10.

Aquest teorema s'aplica sobre un recobriment consemblant a una base que pot definir una topologia diferent de l'original. Però, com que la topologia d'un espai topològic finit té una base formada pels oberts minimalis, és de fet una base de la mateixa topologia.

Observem que els oberts minimalis  $U_x$  són contràctils, perquè tenen un màxim. Demostrarem que, per a tot  $x \in X$ ,  $\mu_X^{-1}(U_x)$  és un obert contràctil. Així tindrem que  $\mu_X$  és contínua i que les restriccions  $\mu_X|_{\mu_X^{-1}(U_x)} : \mu_X^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$  són equivalències homotòpiques. En particular, són equivalències homotòpiques febles. Per tant, pel Teorema 1.2.10, tindrem que  $\mu_X$  és una equivalència homotòpica feble.

Pel Lema 3.1.6,  $\mu_X$  és contínua i es compleix la igualtat  $\mu_X^{-1}(U_x) = |K(X)| \setminus |L|$ . Per tant,  $\mu_X^{-1}(U_x)$  són oberts. Demostrarem que, a més, són contràctils. Com que cada element de  $U_x$  és comparable amb el màxim  $x$ ,  $\mathcal{K}(U_x)$  té la següent propietat: si  $\sigma$  és un símplex de  $\mathcal{K}(U_x)$ , també ho és  $\sigma \cup \{x\}$ . En particular,  $|\mathcal{K}(U_x)|$  és contràctil.

Demostrarem que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  és un retracte fort per deformació de  $|K(X)| \setminus |L|$ . Com que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  és contràctil, tindrem que  $|K(X)| \setminus |L|$  també és contràctil, i per la igualtat  $\mu_X^{-1}(U_x) = |K(X)| \setminus |L|$ , tindrem que les antiimatges dels oberts minimalis són contràctils.

Vegem, doncs, que  $|\mathcal{K}(U_x)|$  és un retracte fort per deformació de  $|\mathcal{K}(X)| \setminus |L|$ . Sigui  $i : |\mathcal{K}(U_x)| \hookrightarrow |K(X)| \setminus |L|$  la inclusió. Si  $\alpha \in |K(X)| \setminus |L|$ , es pot expressar com a combinació lineal convexa  $\alpha = t\beta + (1-t)\gamma$ , per algun  $\beta \in |\mathcal{K}(U_x)|$ , algun  $\gamma \in |L|$  i  $0 < t \leq 1$ . Definim la retracció  $r : |K(X)| \setminus |L| \rightarrow |\mathcal{K}(U_x)|$  per  $r(\alpha) = \beta$ . Observem que  $r$  és contínua perquè les restriccions  $r|_{(|K(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}} : (|K(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma} \rightarrow \bar{\sigma}$  són contínues per a tot símplex tancat  $\bar{\sigma} \in \mathcal{K}(X)$ . Ara, sigui  $H : (|K(X)| \setminus |L|) \times I \rightarrow |K(X)| \setminus |L|$  l'homotopia lineal entre  $\text{id}_{|K(X)| \setminus |L|}$  i  $r \circ i$ , definida per:

$$H(\alpha, s) = (1-s)\alpha + s\beta.$$

Aleshores,  $H$  és ben definida i és contínua, perquè cada restricció

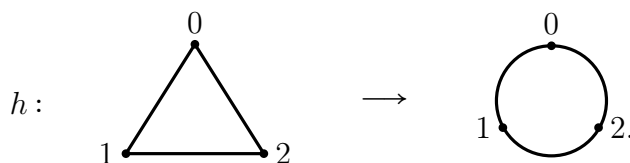
$$H|_{((|K(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}) \times I} : ((|K(X)| \setminus |L|) \cap \bar{\sigma}) \times I \rightarrow \bar{\sigma}$$

és contínua per a tot símplex  $\sigma \in \mathcal{K}(X)$ .

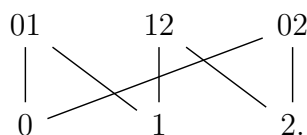
Per a demostrar el punt 2, donat un complex simplicial  $\mathcal{K}$ , considerem el poset de cares  $X$ , que és el conjunt de símplexs de  $\mathcal{K}$  ordenat per la inclusió. Apliquem 1 a  $X$  i tenim una equivalència homotòpica feble  $\mu_X : |\mathcal{K}'| \rightarrow X$ , on  $\mathcal{K}' = K(X)$ . Finalment, com que  $\mathcal{K}'$  és la subdivisió baricèntrica de  $\mathcal{K}$ , tenen el mateix tipus d'homotopia.  $\square$

Aquest teorema resumeix la relació entre els espais topològics finits  $T_0$  i els complexos simplicials. A més, es comporta bé amb les aplicacions contínues i amb subespais, vegeu [1].

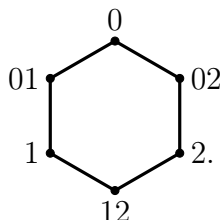
**Exemple 3.1.9.** Com hem vist a l'últim pas de la demostració del Teorema 3.1.8, donat un complex simplicial, hem obtingut un espai finit tal que el seu complex simplicial associat és la subdivisió baricèntrica del primer. Tot i que no són homotòpicament equivalents, sí que existeix una equivalència homotòpica feble. Considerem la següent triangulació de  $S^1$ :



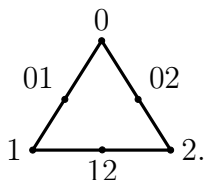
Construïm el poset de cares associat al complex simplicial, que en aquest cas són tres 1-símplexs, i obtenim el següent poset:



Calculem el complex simplicial associat al poset, en fem la representació geomètrica i obtenim la figura següent, que veiem que és homeomorfa a  $S^1$ :

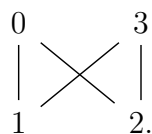


Si ens hi fixem, aquesta és la triangulació que obtindríem a partir de la subdivisió baricèntrica de la triangulació amb què hem començat:

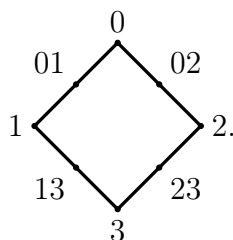


La subdivisió baricèntrica dona posets minimalis que no són homeomorfs, per tant, no són homotòpicament equivalents, vegeu el Teorema 2.3.10. En canvi, sí que podem trobar una equivalència homotòpica feble entre ells. Per exemple, amb

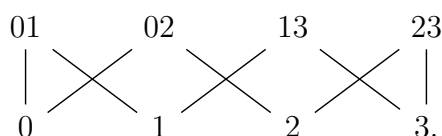
una altra triangulació de  $S^1$ , obtinguda a partir del poset  $P_1$ :



Tenim el complex simplicial associat, que veiem que és homeomorf a  $S^1$ :



Tornem a calcular el poset i obtenim el poset  $P_2$ :



Definim l'aplicació  $f : P_1 \rightarrow P_2$  per:

$$f(01) = f(02) = f(0) = 0,$$

$$f(13) = f(23) = f(3) = 1,$$

$$f(1) = 2 \text{ i } f(2) = 3.$$

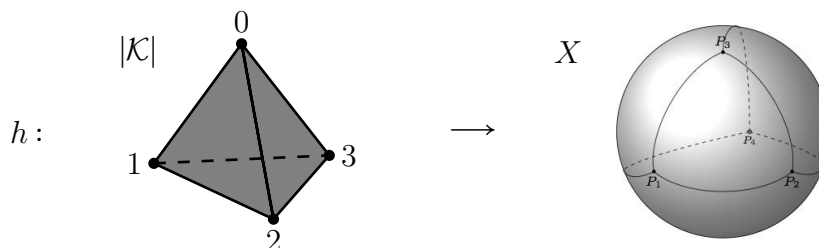
Amb la mateixa comprovació que hem fet a l'Exemple 3.1.4 es demostra que  $f$  és una equivalència homotòpica feble i, pel Teorema 1.2.10, és una equivalència homotòpica, cosa que ens diu que no són homeomorfs però sí equivalents. Això ha de ser així perquè tots modelitzen la mateixa esfera  $S^1$ .

## 3.2 Models finits de superfícies compactes connexes

El Teorema de classificació de les superfícies compactes connexes diu que tota superfície compacta connexa es pot descriure a partir d'esferes, tors, plans projectius i sumes connexes d'aquests. Farem una descripció explícita de models finits d'aquests tres. Després donarem la idea per a calcular de manera equivalent la suma connexa als espais finits que els representen.

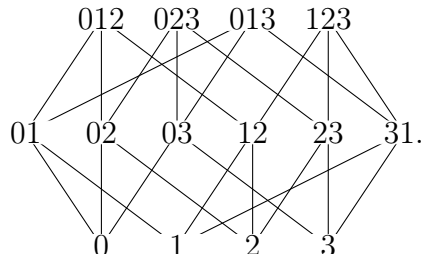
### L'esfera

A l'Exemple 1.1.15 hem vist una possible triangulació de l'esfera, ara vegem-ne una altra. Considerem un tetraedre. No és un 3-símplex, perquè està buit per dins, només en considerem les cares. Està format per quatre 2-símplexs, sis 1-símplexs i quatre 0-símplexs. La imatge del tetraedre sobre l'esfera està extreta de [12].



Calculem l'espai topològic finit associat al tetraedre, és a dir, el poset de cares. Hem posat els noms dels vèrtexs directament amb els nombres, en lloc de  $v_0$ ,  $v_1$ , etc., per no sobrecarregar la notació. Els símplexs també els denotem amb els nombres directament.

Així doncs, els 2-símplexs o triangles són 012, 023, 013 i 123. Els 1-símplexs o arestes són 01, 02, 03, 12, 23 i 13. Els 0-símplexs són 0, 1, 2 i 3, els vèrtexs. El diagrama d'Hasse associat a una esfera  $S^2$  és el següent:



Si fem el poset associat a la triangulació que hem fet abans, vegeu la Figura 1.6, obtindrem un diagrama similar però amb més punts. Es veu que no són homeomorfs, perquè tots dos són minimal, però sí que existeix una equivalència homotòpica feble entre ells, per un procediment similar al cas que ja hem vist (vegeu l'Exemple 3.1.4). És a dir, les triangulacions són equivalents entre elles encara que no ho semblin.

Una manera de trobar triangulacions equivalents és per mitjà de la subdivisió baricèntrica. De fet, si d'un complex simplicial passem al poset i tornem al complex, no tornarem a l'anterior sinó que ens quedarà la seva subdivisió baricèntrica, com hem vist a l'Exemple 3.1.9.

### El tor

Una triangulació del tor és la que tenim a la següent imatge, com a espai quocient del quadrat.

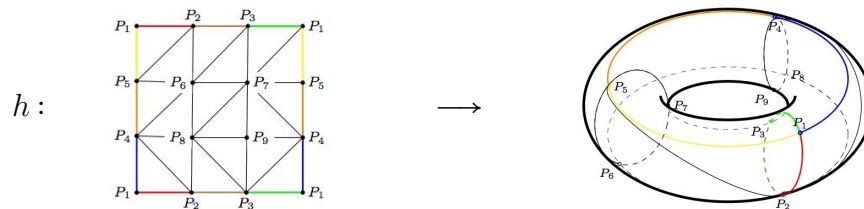
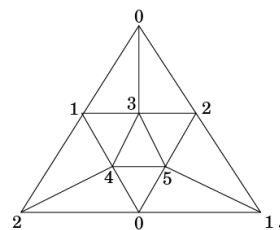


Figura 3.4: Triangulació del tor [12].

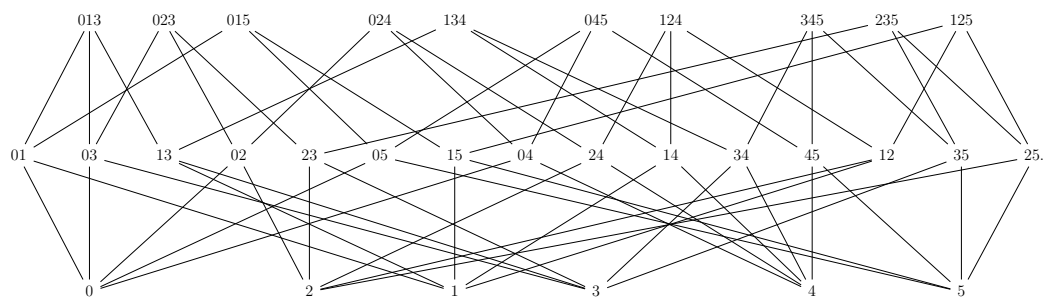
Tenim 18 triangles, 27 arestes i 9 vèrtexs. El poset associat el podem trobar a l'última pàgina del treball, vegeu la Figura 3.6.

### El pla projectiu

El pla projectiu el podem triangular per mitjà del següent complex simplicial  $\mathcal{K}$ . La següent imatge s'ha extret de l'article de R. Forman [13] i s'ha modificat. Ho fem identificant els vèrtexs i les arestes corresponents:



Té 10 triangles, 15 arestes i 6 vèrtexs. El poset associat és:



### La suma connexa

Vegem com es fa la suma connexa de superfícies des dels complexos simplicials. Així, podrem triangular qualsevol superfície compacta connexa.

A grans trets, la suma connexa de superfícies s'obté eliminant un entorn homeomorf a una bola i identificant les vores dels dos entorns. En el cas simplicial

aprofitem l'estructura triangulada. Així doncs, la suma connexa consisteix a eliminar l'interior d'un triangle de cadascuna de les triangulacions i, en la unió disjunta, identifiquem els corresponents vèrtexs i arestes dels triangles que hem buidat.

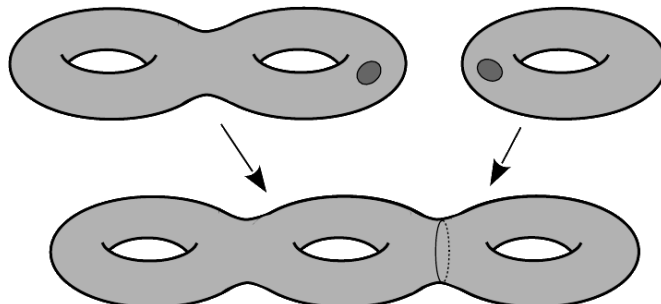
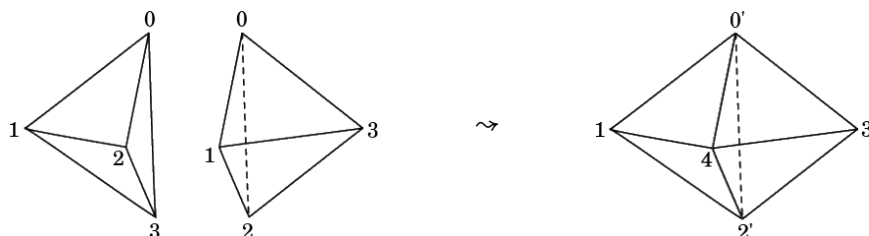


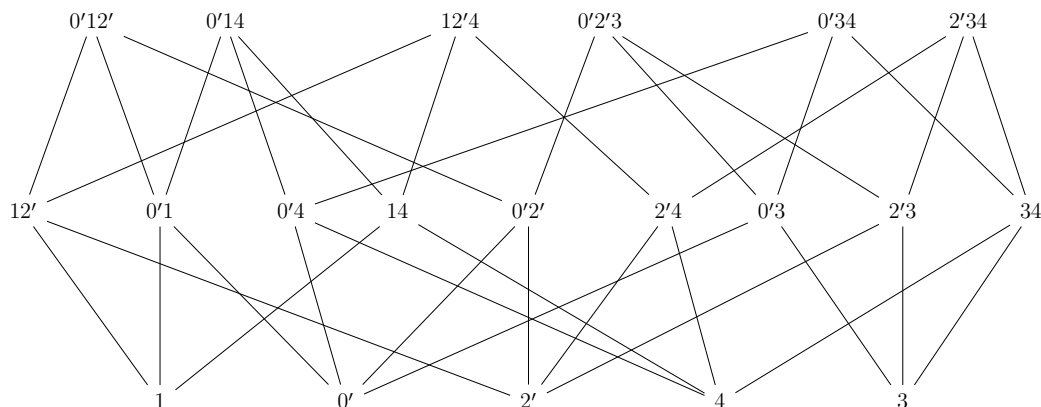
Figura 3.5: Suma connexa d'un 2-tor amb un tor [14].

Per a poder fer la suma connexa al poset associat a un espai, seguirem un procés anàleg al clàssic. Traurem a cada poset un element associat al triangle que volem identificar i farem la identificació dels punts restants.

Per exemple, sumem dues esferes. La imatge següent està extreta de [15]. Identifiquem el vèrtex 0 de la primera esfera amb el 0 de la segona i l'anomenem  $0'$ , el vèrtex 2 de la primera amb l'1 de la segona l'anomenem 4 i el 3 de la primera amb el 2 de la segona l'anomenem  $2'$ . Els vèrtexs 1 de la primera i 3 de la segona es queden igual. També identifiquem les arestes corresponents. Finalment, eliminem el triangle interior que estaria format per  $0'$ ,  $2'$  i 4.



Ara fem el poset associat, identificant els vèrtexs corresponents i "eliminant" el triangle que hem identificat als posets corresponents.



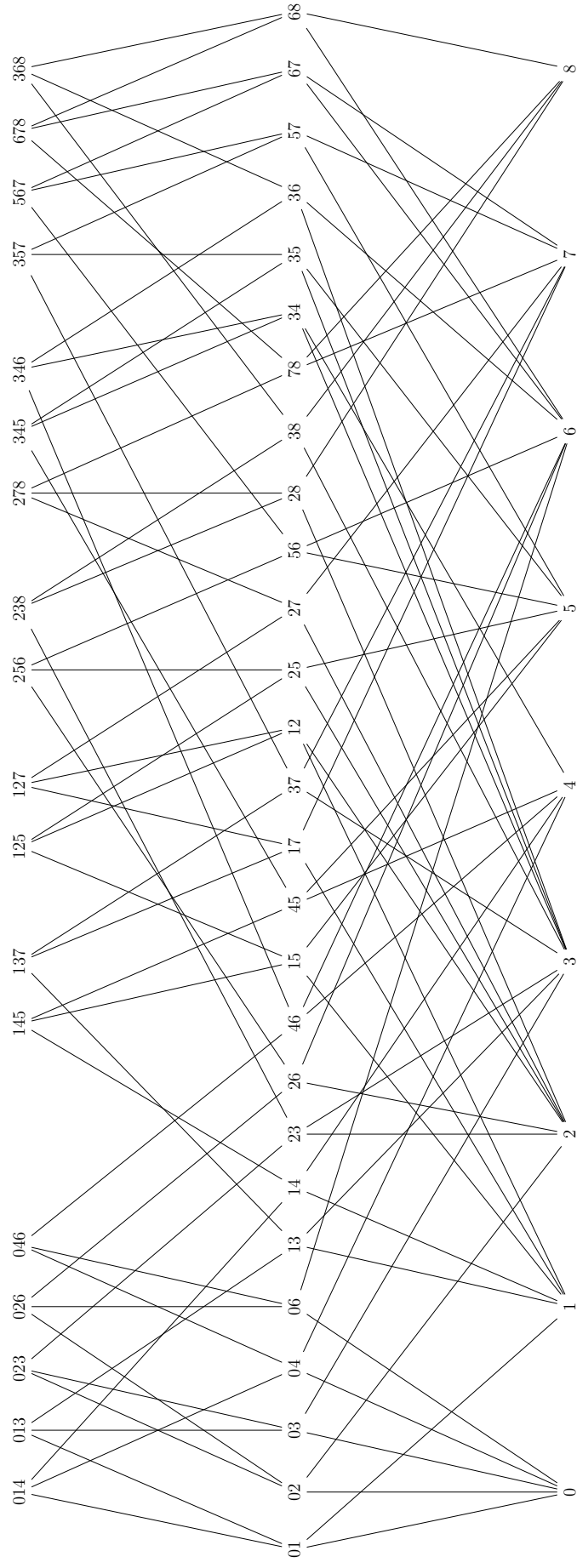


Figura 3.6: Poset associat al tor.

# Bibliografia

- [1] J. A. Barmak: *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications*, volum 2032. Springer-Verlag, Berlin, 2011.
- [2] H. Edelsbrunner i J. Harer: *Computational Topology: An Introduction*. American Mathematical Society, gener 2010, ISBN 9780821849255.
- [3] V. Navarro i P. Pascual: *Topologia algebraica*. Universitat de Barcelona, Barcelona, 1999, ISBN 8483381230.
- [4] Russell Yang Qi Xun: *Emerging Scientists Supplementary Issue II: Topological Circuits - A Stepping Stone in the Topological Revolution*. Molecular Frontiers Journal, 04(Supp01):1, 2020.
- [5] A. Hatcher: *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, ISBN 0521795400.
- [6] J. Brazas: *Warsaw Circle*. <https://wildtopology.com/bestiary/warsaw-circle/>. Accedit: juny de 2023.
- [7] M. C. McCord: *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke mathematical journal, 33:465–474, 1966.
- [8] R. E. Stong: *Finite Topological Spaces*. Transactions of the American Mathematical Society, 123(2):325–340, 1966-06.
- [9] P. Alexandroff: *Diskrete Räume*. Matematiceskii Sbornik, pàgines 501–518, 1937.
- [10] J. R. Munkres: *Topology*, volum Second Edition. Prentice Hall, 2000, ISBN 0131816292.
- [11] R. H. Fox: *On topologies for function spaces*. Bulletin of the American Mathematical Society, 51:429–432, 1945.
- [12] F. Blanco-Silva: *Triangulation of compact surfaces*. <https://blancosilva.github.io/course-material/2010/10/27/triangulation-of-compact-surfaces.html>. Accedit: juny de 2023.
- [13] R. Forman: *A User's Guide To Discrete Morse Theory*. Sémin. Lothar. Combin., 48, desembre 2001.



- [14] J. Agudé i Bover: *Apunts d'un curs de topologia elemental*. N.p., 2017.
- [15] T. Dimofte, M. Gabella i A. Goncharov: *K-Decompositions and 3d Gauge Theories*. Journal of High Energy Physics, 2016, gener 2013.