UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
FACULDADE DE COMPUTAÇÃO

NOTAS DE AULA DE
COMPUTAÇÃO GRÁFICA

PAULO PAGLIOSA

CAMPO GRANDE, MS

CAPÍTULO 2

Vetores e Transformações Geométricas 3D

2.1 Introdução

Este capitulo apresenta um resumo dos fundamentos matemáticos necessários ao desenvolvimento dos demais capítulos do curso. A Seção 2.2 trata de pontos e vetores no espaço tridimensional e das principais operações envolvendo vetores: produto interno e produto vetorial. A Seção 2.3 trata de *transformações geométricas afins* no espaço tridimensional, um tópico bastante importante em computação gráfica. Uma transformação afim é uma composição invertível de translações, transformações de escala e rotações que pode ser utilizada para modificar pontos, vetores e vetores normais, com várias aplicações. No Capítulo 5, por exemplo, utilizaremos transformações geométricas para transformar coordenadas de pontos de um sistema cartesiano em outro, operação requerida no estágio de *processamento de vértices* do pipeline da OpenGL.

2.2 Vetores 3D

Inicialmente, vamos definir geometricamente um vetor 3D a partir do conjunto de pontos do espaço Euclidiano tridimensional, denotado por $\mathbb{E}^3$. Consideremos, nesse espaço, um sistema de coordenadas cartesianas definido por três retas orientadas, perpendiculares duas a duas (no Capítulo 1 vimos um sistema de coordenadas desse tipo chamado sistema global de coordenadas, ou WC). Com um sistema de coordenadas, um ponto qualquer de $\mathbb{E}^3$ pode ser identificado pela tripla de números reais (x, y, z), chamada *coordenadas* do ponto.

Sejam P e Q dois pontos de $\mathbb{E}^3$. O segmento de reta orientado $\overrightarrow{PQ}$ é um *vetor* cujo *comprimento*, ou *módulo*, é a distância geométrica entre os pontos P e Q e cuja direção é do ponto P para o ponto Q, Figura 2.1. Se $P = Q$, então $\overrightarrow{PQ}$ é o *vetor nulo*, cujo módulo é zero.

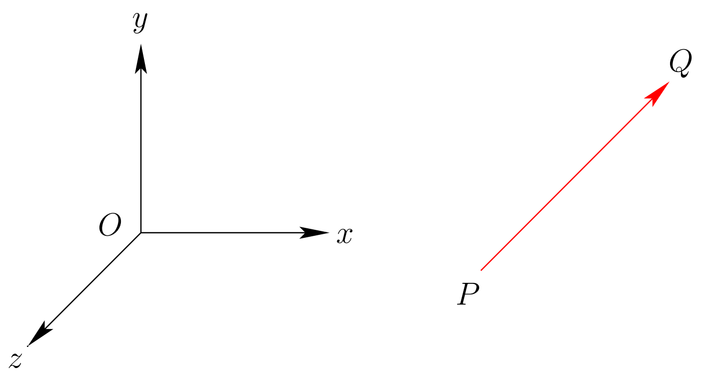

Figura 2.1: Segmento de reta orientado.

Note que, da Figura 2.2, qualquer segmento de reta orientado de mesmo comprimento e paralelo a $\overrightarrow{PQ}$ denota o mesmo vetor. Assim, podemos fixar o ponto inicial de um vetor como sendo a origem do sistema de coordenadas, o qual passa a ser definido apenas pelo ponto final. Deste modo, um vetor $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$, em que O é a origem do sistema de coordenadas, pode ser identificado pelas coordenadas (x, y, z) do ponto final P, Figura 2.2. As coordenadas do vetor nulo são $(0, 0, 0)$.

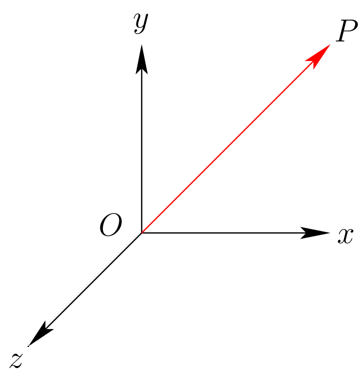

Figura 2.2: Segmento de reta orientado com ponto inicial na origem.

Observe que há uma correspondência unívoca entre um ponto e um vetor no espaço, estabelecida a partir da definição dada acima (por isso, no código fonte, usamos uma única classe para representar, indistintamente, pontos e vetores no espaço). Formalmente, porém, pontos e vetores são entidades distintas. Um vetor é um elemento de um *espaço vetorial*.

Espaço Vetorial e Espaço Afim

Um espaço vetorial V é uma entidade matemática definida por um conjunto de elementos chamados vetores (denotados por letras em negrito, por exemplo, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{w}$) e duas operações: adição de vetores e multiplicação de vetor por escalar, as quais devem satisfazer certas propriedades. A adição de vetores deve ser comutativa ($\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$), associativa ($\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$), ter um elemento neutro (isto é, deve haver um vetor, geralmente denotado por $\mathbf{0}$, tal que, para qualquer vetor $\mathbf{v}$, $\mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v}$) e ter elemento oposto (isto é, para todo vetor $\mathbf{v}$ deve haver um vetor $\mathbf{w}$

tal que $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0}$; $\mathbf{w}$ é escrito como $-\mathbf{v}$). A multiplicação por escalar deve satisfazer as regras $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$, $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ e $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.

Um exemplo clássico de espaço vetorial é $\mathbb{R}^n$, o conjunto de todas n-uplas ordenadas de números reais. Matricialmente, elementos de $\mathbb{R}^n$ podem ser escritos como um vetor coluna. Por exemplo, um elemento de $\mathbb{R}^3$ é:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Os espaços vetoriais mais usados em computação gráfica são $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$.

Exemplo 2.1 Mostre que $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial.

Sejam dois vetores $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{w} = (w_x, w_y, w_z)$. A soma de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é o vetor

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{bmatrix} = (v_x + w_x, v_y + w_y, v_z + w_z).$$

A adição matricial acima satisfaz as propriedades associativa e comutativa. Tomando-se $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ e $-\mathbf{v} = (-v_x, -v_y, -v_z)$, tem-se que:

$$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

(elemento neutro) e

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -v_x \\ -v_y \\ -v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(elemento oposto). É fácil verificar que a multiplicação por escalar também satisfaz as propriedades de um espaço vetorial.

Um *subespaço vetorial* W de um espaço vetorial V é um subconjunto deste tal que, para quaisquer $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in W$, tem-se $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in W$, e para qualquer $\mathbf{v} \in W$, tem-se $\alpha\mathbf{v} \in W$. (Essas condições garantem que a soma de vetores e a multiplicação por escalar em W não resultam em vetores fora de W.) Por exemplo, uma reta passando pela origem e um plano passando pela origem são subespaços de $\mathbb{R}^3$.

Uma *combinação linear* de vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ é qualquer vetor da forma

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n.$$

Fixados vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ de um espaço vetorial V, o conjunto W de todos os vetores de V resultantes de uma combinação linear destes é um subespaço vetorial chamado *subespaço gerado por* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. O conjunto $\mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq n$, é *linearmente independente* se

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Em outras palavras, o conjunto é linearmente dependente se qualquer dos vetores for uma combinação linear dos outros.

Um subconjunto $B = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de um espaço vetorial V é uma *base* de V se B é linearmente independente e se o subespaço gerado por B é o próprio espaço V. Isso significa que qualquer vetor de V pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores de uma base B de V, sendo os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ chamados *coordenadas* do vetor em relação à base B. Em $\mathbb{R}^3$, os vetores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ formam a chamada *base canônica*, em que

$$\mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ e} \qquad \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 2.2 Quais as coordenadas do vetor

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

em relação à base canônica do $\mathbb{R}^3$?

As coordenadas são

$$1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Um *espaço afim* é uma entidade matemática que consiste de um conjunto chamado de *pontos do espaço afim*, um espaço vetorial associado e duas operações. Dados dois pontos P e Q, a diferença entre P e Q resulta em um vetor $\mathbf{v}$ do espaço vetorial associado:

$$\mathbf{v} = Q - P. \tag{2.1}$$

Dado um ponto P e um vetor $\mathbf{v}$, a adição entre eles resulta em um novo ponto $P + \mathbf{v}$ do espaço afim. Essa operação deve satisfazer as propriedades: $(P + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = P + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$, e $P + \mathbf{v} = P$ se e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Em resumo, o espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$, consistindo de todos os pontos identificados por triplas de números reais, é um espaço afim com um espaço vetorial associado $\mathbb{R}^3$, cujos elementos também são triplas ordenadas de números reais. Não faz sentido em $\mathbb{E}^3$ as operações de adição de pontos e multiplicação de ponto por escalar, as quais são definidas somente no $\mathbb{R}^3$ associado.

2.2.1 Produto Interno

Seja um espaço vetorial V. Um *produto interno*, ou *produto escalar*, sobre V é uma função que para cada par de vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ associa um escalar, denotado $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$, satisfazendo as seguintes propriedades: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}$ (simétrica), $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ somente quando $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} + \alpha\mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \alpha(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (bilinear).

No caso de vetores no $\mathbb{R}^3$, a definição mais utilizada é:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z. \tag{2.2}$$

(Verifique as propriedades acima.)

Um espaço vetorial V com produto interno possui *métrica*, ou seja, é possível a medida da "distância" e do "ângulo" entre vetores de V. Primeiro, vamos definir a *magnitude* ou *módulo* de um vetor $\mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}. \tag{2.3}$$

(No caso de vetores no $\mathbb{R}^3$, o módulo corresponde ao comprimento geométrico do segmento de reta orientado que define um vetor.) Dado um vetor $\mathbf{v}$ não nulo, o *vetor unitário* ou *versor* associado a $\mathbf{v}$ é um vetor com mesma direção de $\mathbf{v}$ e módulo igual a um, definido como:

$$\frac{1}{||\mathbf{v}||}\mathbf{v}.$$

Exemplo 2.3 Mostre que um versor tem módulo 1 (resolva).

Exemplo 2.4 Mostre que os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, são unitários (resolva).

O menor ângulo θ entre dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não nulos, Figura 2.3, é dado por:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||}\right). \tag{2.4}$$

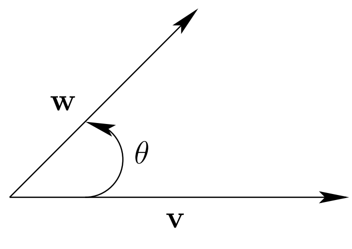

Figura 2.3: Ângulo entre dois vetores não nulos.

A equação (2.4) pode ser escrita como:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{||\mathbf{v}||||\mathbf{w}||},$$

donde se pode concluir que:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} > 0 \Rightarrow 0 \le \theta < \frac{\pi}{2}, \\ < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \le \pi, \\ = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \text{ } (\mathbf{v} \text{ é ortogonal a } \mathbf{w}). \end{cases} \tag{2.5}$$

2.2.2 Produto Vetorial

O *produto vetorial* entre dois vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ de $\mathbb{R}^3$ (exclusivamente), denotado por $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$, é o vetor dado por:

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = (v_y w_z - v_z w_y, v_z w_x - v_x w_z, v_x w_y - v_y w_x). \tag{2.6}$$

Para $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ não nulos, $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ representa um vetor cuja direção é perpendicular ao plano formado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ (com sentido dado pela regra da mão direita de $\mathbf{v}$ para $\mathbf{w}$) e cujo módulo é igual à área do paralelogramo formado por $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, Figura 2.4. Note que $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = -(\mathbf{w} \times \mathbf{v})$.

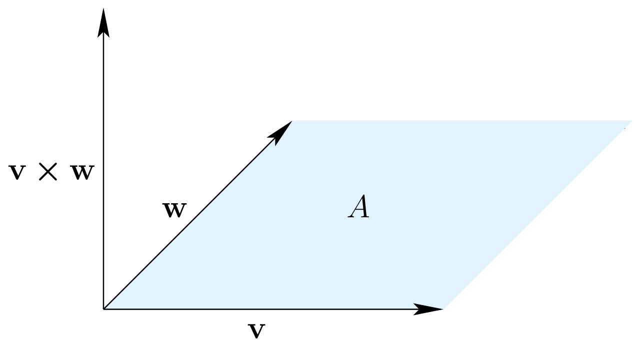

Figura 2.4: Produto vetorial de dois vetores não nulos.

Exemplo 2.5 Determine a equação do plano que passa por um ponto P e é perpendicular a um vetor $\mathbf{N}$, Figura 2.5 (resolva).

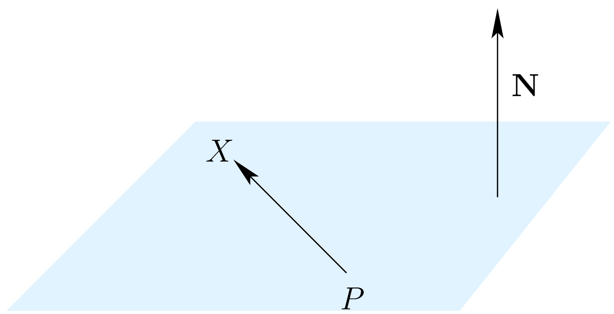

Figura 2.5: Plano com normal $\mathbf{N}$ que passa por P.

2.3 Transformações Geométricas

Nesta seção são introduzidas tranformações geométricas 3D elementares em computação gráfica, chamadas *transformações afins*, as quais são resultantes de quaisquer combinações de translações, transformações de escala e rotações.

Seja $P(x, y, x)$ um ponto em $\mathbb{E}^3$. A *translação* de P por um vetor $\mathbf{t}(t_x, t_y, t_z)$, Figura 2.6, transforma P em um ponto $P'(x', y', z')$ tal que

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + t_x \\ y + t_y \\ z + t_z \end{bmatrix} = P + \mathbf{t}. \tag{2.7}$$

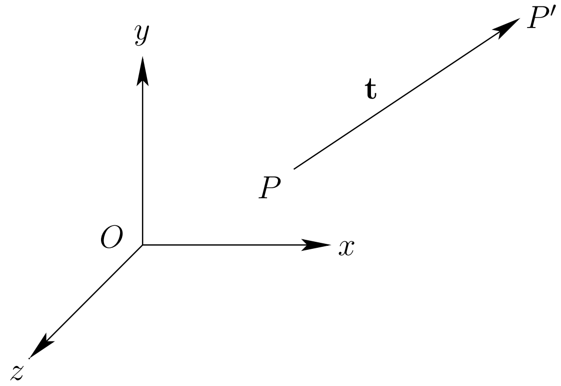

Figura 2.6: Translação de um ponto P.

A *transformação de escala* de P em relação à origem do WC, Figura 2.7, transforma P em um ponto $P'(x', y', z')$ tal que

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x x \\ s_y y \\ s_z z \end{bmatrix} = \mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) \cdot P, \tag{2.8}$$

em que

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

é a matriz de transformação de escala em relação à origem e $s_x, s_y, s_z > 0$ são os *fatores de escala* em x, y e z, respectivamente. Se $0 < s_x < 1$, então há uma contração da coordenada x do ponto P em relação à origem; se $s_x > 1$, há uma expansão da coordenada x de P em relação à origem. O mesmo vale para s_y e s_z.

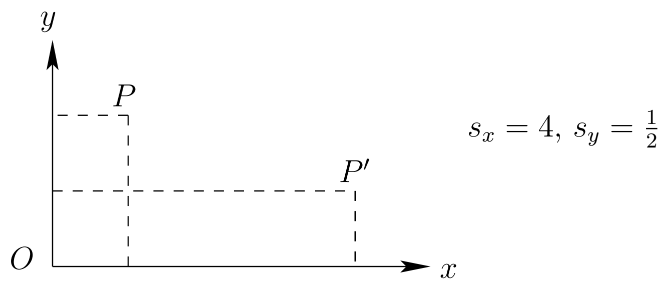

Figura 2.7: Transformação de escala de um ponto P em relação à origem.

A *rotação* de P em torno do eixo z do WC de um ângulo θ, com sentido positivo dado pela regra da mão direita, transforma P em um ponto $P'(x', y', z')$ cujas coordenadas são, de acordo com Figura 2.8,

$$\begin{aligned} x' &= r\cos(\phi + \theta), \\ y' &= r\,\mathrm{sen}(\phi + \theta), \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Expandindo-se as expressões de x' e y' nas equações acima e observando que

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \quad \text{e} \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\phi, \end{aligned}$$

obtém-se:

$$\begin{aligned} x' &= r[\cos\phi\cos\theta - \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta] = x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, \\ y' &= r[\operatorname{sen}\phi\cos\theta + \cos\phi\operatorname{sen}\theta] = y\cos\theta + x\operatorname{sen}\theta, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{2.10}$$

As equações (2.10) podem ser escritas matricialmente como:

$$P' = \mathbf{R}_z(\theta) \cdot P, \tag{2.11}$$

em que a matriz de rotação em torno do eixo z é

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

(As matrizes de rotação em torno dos eixos x e y podem ser obtidas da mesma maneira.)

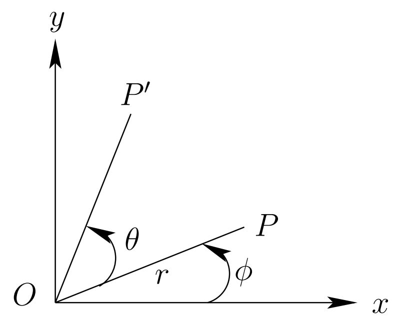

Figura 2.8: Rotação de um ponto P em torno do eixo z.

A expressão da translação de um ponto por um vetor $\mathbf{t}$, equação (2.7), envolve uma adição de vetores, enquanto que a transformação de escala em relação à origem e a rotação em torno do eixo z de um ponto, equações (2.8) e (2.11), respectivamente, são dadas por expressões envolvendo uma multiplicação de matriz com um vetor. A fim de podermos combinar transformações mais facilmente, é conveniente que estas sejam formuladas de uma forma homogênea, ou seja, a translação deve ser expressa também como uma multiplicação de matriz com vetor.

Para tal, escreveremos pontos e transformações em *coordenadas homogêneas*. Um ponto $P(x, y, z) \in \mathbb{E}^3$ é representado em coordenadas homogêneas por uma quádrupla $[X, Y, Z, W]$, com $W \neq 0$, tal que

$$\begin{aligned} x &= \frac{X}{W}, \\ y &= \frac{Y}{W}, \\ z &= \frac{Z}{W}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Segue dessa definição que todas as coordenadas homogêneas $[Wx, Wy, Wz, W]$, com $W \neq 0$, são representações distintas do mesmo ponto (x, y, z). (Transformações afins não modificam os valores de W. Adotaremos, por simplicidade, $W = 1$.) As coordenadas homogêneas $[1, 2, 3, 1]$ e $[3, 6, 9, 3]$, por exemplo, representam o ponto de coordenadas cartesianas $(1, 2, 3)$. Um ponto com coordenadas homogêneas $[x, y, z, 0]$ representa o vetor (x, y, z).[1]

Em coordenadas homogêneas, uma transformação do ponto P em um ponto $P'(x', y', z')$ é dada pelo produto matricial

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2.14}$$

em que $\mathbf{M}$ é a matriz homogênea 4×4 que representa a transformação. A translação de um ponto por um vetor $\mathbf{t}(t_x, ty, t_z)$ pode agora ser expressa como na equação (2.14), sendo a matriz homogênea de translação definida como

$$\mathbf{T}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

A matriz de transformação de escala (s_x, s_y, s_z) em relação à origem, antes definida pela equação (2.9), é escrita na versão homogênea como:

$$\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

e a matriz de rotação em torno do eixo z como:

$$\mathbf{R}_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

2.3.1 Composição de Transformações

Seja uma sequência de n transformações geométricas representadas pelas matrizes homogêneas $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$, …, $\mathbf{M}_n$. A matriz homogênea que representa a combinação ou composição das n transformações é dada por

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cdot \mathbf{M}_{n-1} \ldots \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1. \tag{2.18}$$

(Primeiro $\mathbf{M}_1$ transforma o ponto P, depois $\mathbf{M}_2$ e assim por diante. Por isso, o produto é escrito com a matriz da última transformação à esquerda e a matriz da primeira à direita.)

[1] O conjunto de todas as quádruplas de números reais $[X, Y, Z, W]$, exceto a quádrupla $[0, 0, 0, 0]$, define os pontos do *espaço projetivo orientado* $\mathbb{T}_3$, sendo que $[X, Y, Z, W]$ e $\alpha[X, Y, Z, W]$, com $\alpha > 0$, denotam o mesmo ponto em $\mathbb{E}^3$. Geometricamente, $\mathbb{T}_3$ consiste de duas cópias do espaço Euclidiano $\mathbb{E}^3$, denominadas de *aquém* e *além*, mais um *ponto no infinito* para toda direção de $\mathbb{R}^3$. A quádrupla $[xW, yW, zW, W]$ representa, se $W > 0$, o ponto de coordenadas cartesianas (x, y, z) no aquém; se $W < 0$, a quádrupla representa o mesmo ponto no além; se $W = 0$, a quádrupla representa o ponto infinito na direção do vetor (x, y, z). As coordenadas homogêneas $[X, Y, Z, W]$ e $[-X, -Y, -Z, -W]$ representam pontos distintos em $\mathbb{T}_3$, chamados antípodas, mas o mesmo ponto em $\mathbb{E}^3$.

Exemplo 2.6 Considere a rotação de um ponto em torno de um eixo paralelo a z passando por um ponto $B(b_x, b_y, b_z)$, de um ângulo θ, Figura 2.9. A matriz homogênea da transformação resultante pode ser obtida pela seguinte combinação de transformações:

1. Translação de B para origem: $\mathbf{T}(-\overrightarrow{OB})$.
2. Rotação em torno do eixo z de um ângulo θ: $\mathbf{R}_z(\theta)$.
3. Translação de volta ao ponto B: $\mathbf{T}(\overrightarrow{OB})$.

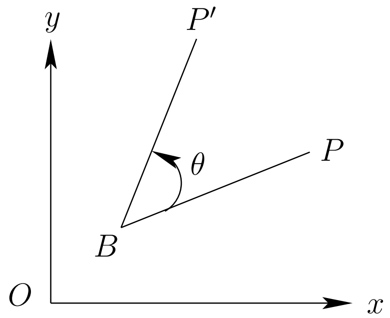

Figura 2.9: Rotação em torno de um eixo paralelo a z que passa pelo ponto B.

A matriz homogênea de rotação é:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}_z(B,\theta) &= T(\overrightarrow{OB}) \cdot \mathbf{R}_z(\theta) \cdot \mathbf{T}(-\overrightarrow{OB}) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & b_x \\ 0 & 1 & 0 & b_y \\ 0 & 0 & 1 & b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_x \\ 0 & 1 & 0 & -b_y \\ 0 & 0 & 1 & -b_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.19) \\
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 & b_x(1-\cos\theta) + b_y \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 & b_y(1-\cos\theta) - b_x \operatorname{sen}\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.7 Escreva a matriz homogênea de rotação $\mathbf{R}(B, \mathbf{n}, \theta)$ de um ponto em torno de um eixo que passa por um ponto B e cuja direção é dada por um vetor $\mathbf{n}$ unitário, de um ângulo θ, Figura 2.10.

A sequência de transformações é:

1. $\mathbf{T}(-\overrightarrow{OB})$.
2. $\mathbf{R}_y(-\alpha)$, $\operatorname{sen}\alpha = \frac{n_x}{\sqrt{n_x^2+n_z^2}}$, $\cos(\alpha) = \frac{n_z}{\sqrt{n_x^2+n_z^2}}$.
3. $\mathbf{R}_x(\beta)$, $\operatorname{sen}\beta = n_y$, $\cos\beta = \sqrt{n_x^2+n_z^2}$.
4. $\mathbf{R}_z(\theta)$.
5. $\mathbf{R}_x(-\beta)$.
6. $\mathbf{R}_y(\alpha)$.
7. $\mathbf{T}(\overrightarrow{OB})$.

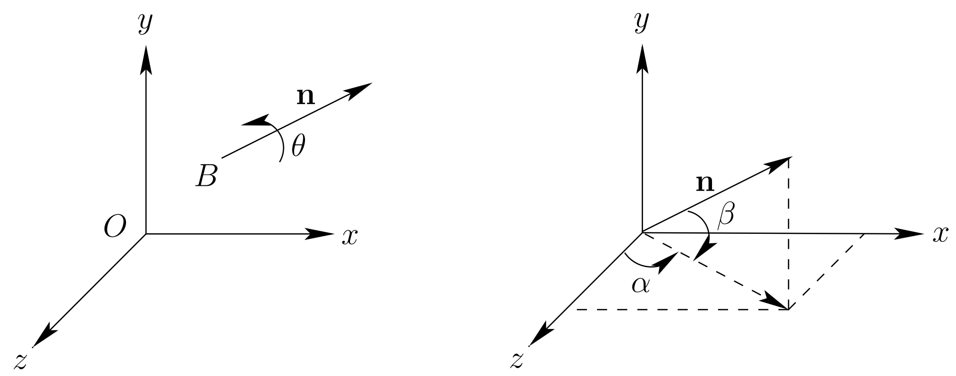

Figura 2.10: Rotação em torno de um eixo qualquer.

A matriz resultante da combinação das transformações acima não é genérica (verifique o que acontece quando a direção do eixo de rotação for paralela ao eixo y). Uma versão sem singularidades pode ser deduzida geometricamente, mas o faremos posteriormente utilizando o conceito de *quatérnios*.

2.3.2 Transformações Inversas

Seja uma transformação representada pela matriz homogênea $\mathbf{M}$. A transformação inversa será representada pela matriz homogênea $\mathbf{M}^{-1}$, se esta existir. Todas as transformações elementares vistas até agora são invertíveis, ou seja, o determinante de $\mathbf{M}$ é diferente de zero.

Obviamente, a transformação inversa de uma transformação de escala em relação à origem dada por $\mathbf{S}(s_x, s_y, s_z)$ é representada pela matriz $\mathbf{S}(1/s_x, 1/s_y, 1/s_z)$. A inversa de uma rotação qualquer dada por $\mathbf{R}(\theta)$, por sua vez, é representada pela matriz $\mathbf{R}(-\theta)$ (prove).

Matrizes de rotação são *ortonormais*, isto é, se suas fileiras (linhas ou colunas) F_i forem consideradas vetores, então

$$F_i \cdot F_j = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

(Qualquer matriz de uma transformação afim que envolver apenas combinações de rotações será ortonormal.) Uma propriedade interessante de uma matriz ortonormal é que sua inversa é igual à sua transposta, isto é, $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}$.

A matriz homogênea que representa a transformação inversa de uma composição de transformações $\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \cdot \ldots \mathbf{M}_2 \cdot \mathbf{M}_1$ é

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1} \cdot \mathbf{M}_2^{-1} \ldots \mathbf{M}_{n-1}^{-1} \cdot \mathbf{M}_n^{-1}. \tag{2.20}$$

2.3.3 Quatérnios

Um *quatérnio* $\mathbf{q}$ é uma entidade matemática definida por um escalar s e um vetor $\mathbf{r}(r_x, r_y, r_z)$, ou $\mathbf{q} = [s, \mathbf{r}]$. A multiplicação de dois quatérnios $\mathbf{q}_1$ e $\mathbf{q}_2$ resulta em um quatérnio definido como

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2 = [(s_1 s_2 - \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2), s_1\mathbf{r}_2 + s_2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2]. \tag{2.21}$$

Um *quatérnio unitário* é tal que $s^2 + r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$. Uma rotação de um ângulo θ em torno de um versor $\mathbf{n}$ pode ser representada pelo quatérnio unitário

$$\mathbf{q} = [s, \mathbf{r}] = [\cos(\theta/2), \operatorname{sen}(\theta/2)\mathbf{n}]. \tag{2.22}$$

A rotação inversa $\mathbf{q}^{-1}$ é obtida invertendo-se o sinal de θ na equação (2.22). Para rotacionar um ponto $P(x, y, z)$ por um quatérnio $\mathbf{q}$, escrevemos o ponto P como o quatérnio $\mathbf{p} = [0, (x, y, z)]$ e tomamos, de acordo com a equação (2.21), o produto

$$\mathbf{p}' = [0, (x', y', z')] = \mathbf{q}^{-1} \cdot \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}, \tag{2.23}$$

sendo $P'(x', y', z')$ o ponto P rotacionado. Desenvolvendo-se a equação (2.23) vem:

$$\begin{aligned}
x' &= [1 - 2(r_y^2 + r_z^2)]x + 2(r_x r_y - s r_z)y + 2(r_x r_z + s r_y)z,\\
y' &= 2(2_x r_y + s r_z)x + [1 - 2(r_x^2 + r_z^2)]y + 2(r_y r_z - s r_x)z,\\
z' &= 2(r_x r_z - s r_y)x + 2(r_y r_z + s r_x)y + [1 - 2(r_x^2 + r_z^2)]z,
\end{aligned}$$

resultando na matriz homogênea

$$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \theta) = \begin{bmatrix} 1 - 2(r_y^2 + r_z^2) & 2(r_x r_y - s r_z) & 2(r_x r_z + s r_y) & 0 \\ 2(2_x r_y + s r_z) & 1 - 2(r_x^2 + r_z^2) & 2(r_y r_z - s r_x) & 0 \\ 2(r_x r_z - s r_y) & 2(r_y r_z + s r_x) & 1 - 2(r_x^2 + r_z^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

A matriz da equação (2.24) representa a transformação de rotação de um ângulo θ em torno de um versor $\mathbf{n}$ que passa pela origem. Para obtermos a matriz de rotação em torno de um eixo qualquer que passa por um ponto B, efetua-se a combinação das seguintes transformações: (1)$\mathbf{T}(-\overrightarrow{OB})$, (2)$\mathbf{R}(\mathbf{n}, \theta)$, e (3)$\mathbf{T}(\overrightarrow{OB})$.

2.3.4 Transformação de Coordenadas Cartesianas

Seja um sistema de coordenadas cartesianas global com origem em um ponto O e cujos eixos x, y e z são definidos pelos versores $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$, respectivamente. Seja um outro sistema de coordenadas cartesianas, o qual chamaremos de local, com origem em um ponto $O'(O'_x, O'_y, O'_z)$ e cujos eixos x', y' e z' são definidos por versores $\mathbf{u}(u_x, u_y, u_z)$, $\mathbf{v}(v_x, v_y, v_z)$ e $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$, com coordenadas tomadas em relação à base canônica, Figura 2.11. Note que, uma vez que $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$ são versores ortogonais (portanto, linearmente independentes), formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

Dado um ponto P com coordenadas (x', y', z') em relação ao sistema local, as coordenadas (x, y, z) em relação ao sistema global são determinadas pela adição de O' com o vetor $\mathbf{p}$, em que $\mathbf{p}$ é a combinação linear $x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{n}$ (assim como $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{n}$, as coordenadas de p são em relação à base canônica):

$$(x, y, z) = O' + \mathbf{p} = O' + x'\mathbf{u} + y'\mathbf{v} + z'\mathbf{n}. \tag{2.25}$$

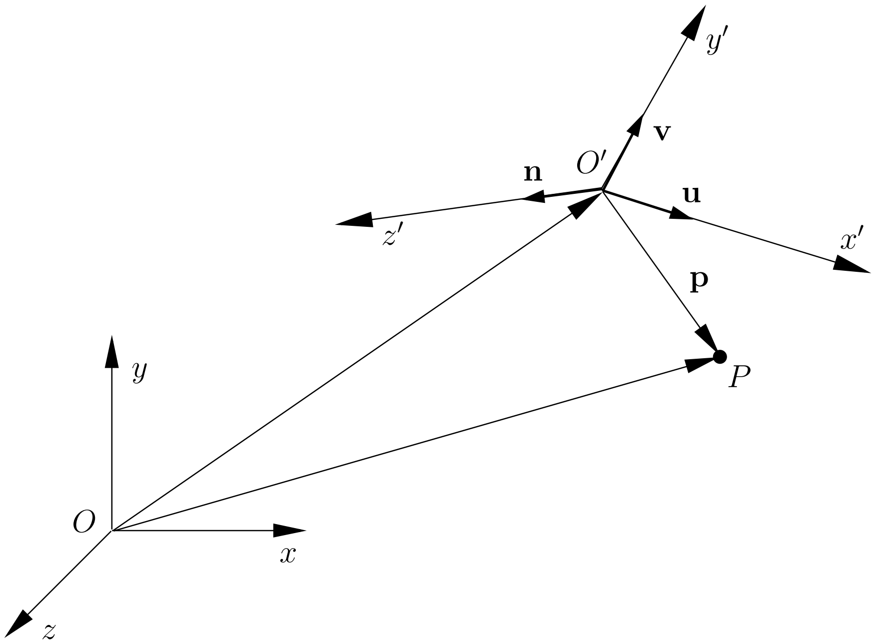

Figura 2.11: Sistemas de coordenadas cartesianas global e local.

Desenvolvendo-se a equação (2.25) vem:

$$\begin{aligned} x &= O'_x + u_x x' + v_x y' + n_x z', \\ y &= O'_y + u_y x' + v_y y' + n_y z', \\ z &= O'_z + u_z x' + v_z y' + n_z z', \end{aligned}$$

resultando na matriz homogênea

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} u_x & v_x & n_x & O'_x \\ u_y & v_y & n_y & O'_y \\ u_z & v_z & n_z & O'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.26}$$

A matriz da equação (2.26) transforma as coordenadas cartesianas locais de um ponto em coordenadas cartesianas globais. As três primeiras colunas são formadas pelas coordenadas dos versores da base do sistema local, enquanto a última coluna é definida pelas coordenadas da origem do sistema local. Observe que tal matriz pode ser escrita como a combinação de uma translação e de uma rotação:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & O'_x \\ 0 & 1 & 0 & O'_y \\ 0 & 0 & 1 & O'_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x & v_x & n_x & 0 \\ u_y & v_y & n_y & 0 \\ u_z & v_z & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

A rotação da equação (2.27) alinha os eixos do sistema global com os eixos do sistema local, enquanto que a translação leva a origem do sistema global para a origem do sistema local. Em outras palavras, $\mathbf{R}_{\mathbf{x}' \to \mathbf{x}}$ é resultante de uma composição de transformações que leva o sistema global para o sistema local. Note, entretanto, que a matriz transforma coordenadas locais (x', y', z') de um ponto em coordenadas globais (x, y, z). Obviamente, a matriz inversa transforma coordenadas globais em coordenadas locais (veja o Exercício 2.16).

2.3.5 Transformações de Vetores e Normais

Seja uma transformação afim dada por uma matriz homogênea $\mathbf{M}$. Desde que um vetor $\mathbf{v}(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pode ser representado pelo ponto $[x, y, z, 0] \in \mathbb{T}_3$ e que transformações afins não alteram a coordenada W, temos que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Na prática, as coordenadas do vetor transformado $\mathbf{v}'$ são obtidas pelo produto

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{3\times3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

em que $\mathbf{M}_{3\times3}$ é a submatriz de $\mathbf{M}$ sem a quarta linha e quarta coluna, ou seja, os termos de translação não somam para a transformação de vetores (conforme visto na Seção 2.2, vetores não têm posição no espaço).

Uma vez que o vetor normal a uma superfície qualquer em um ponto P nada mais é que o vetor perpendicular ao plano tangente à superfície em P, poderíamos supor, em um primeiro momento, que a transformação de vetores normais seria igual à transformação de vetores dada pela equação (2.28). Contudo, se aplicarmos a equação (2.28) em vetores normais, os vetores resultantes da transformação nem sempre serão normais. Para entendermos o porquê, sejam $\mathbf{n}$ o vetor normal em P e X um ponto qualquer do plano tangente que passa por P. Do Exemplo 2.5, temos que $\mathbf{v} = X - P$ é um vetor tangente à superfície, logo, ortogonal à normal $\mathbf{n}$, ou seja, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$. Tal produto interno pode ser escrito como o produto matricial

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{n} = 0. \tag{2.30}$$

Se usarmos $\mathbf{M}$ para transformar os pontos P e X, transformaremos também o vetor $\mathbf{v}$, resultando no vetor tangente $\mathbf{v}' = \mathbf{Mv}$, de acordo com a equação (2.28). Estamos procurando qual a transformação $\mathbf{X}$ que, ao ser aplicada ao vetor normal $\mathbf{n}$, resulta em um vetor transformado $\mathbf{n}' = \mathbf{Xn}$ que é ortogonal a $\mathbf{v}'$, isto é,

$$(\mathbf{Mv}) \cdot (\mathbf{Xn}) = 0,$$

ou, conforme a equação (2.30),

$$(\mathbf{Mv})^{\mathrm{T}}\,(\mathbf{Xn}) = 0.$$

Aplicando-se a propriedade da transposta $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ na equação acima, obtém-se

$$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{Xn} = 0,$$

ou

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})\mathbf{n} = 0,$$

a qual é satisfeita se e somente se $\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \mathbf{I}$. Logo, a matriz de transformação de vetores normais procurada é

$$\mathbf{X} = (\mathbf{M}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^{\mathrm{T}}. \tag{2.31}$$

Para rotações apenas, a matriz $\mathbf{M}$ resulta ortonormal e, portanto, $\mathbf{X} = \mathbf{M}$, caso em que a transformação de vetores normais é igual a transformação de vetores tangentes.

2.4 Exercícios

2.1 Dados os pontos $P_0(1, 2, -1)$, $P_1(3, 4, -1)$ e $P_2(3, 6, -1)$, determinar a área do triângulo por eles formado.

2.2 Determine a equação do plano que passa pelo ponto $(1, 1, 1)$ e é perpendicular ao vetor $(1, 1, 1)$.

2.3 Determinar a expressão da distância de um ponto a um plano que passa por um ponto $P(p_x, p_y, p_z)$ e é perpendicular a um versor $\mathbf{n}$.

2.4 Determine a expressão da distância de um ponto à reta que passa pelos pontos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ e $P_2(x_2, y_2, z_2)$.

2.5 Seja um plano π que passa por um ponto P e cuja normal é $\mathbf{n}$. Considere que o plano divide o espaço em dois subespaços, sendo o subespaço positivo aquele do lado que a normal aponta. Qual é a condição para que um ponto $X(x, y, z)$ qualquer esteja localizado no subespaço positivo?

2.6 Qual a equação da esfera com centro no ponto C e com raio r?

2.7 Prove que $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ é perpendicular a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$.

2.8 Sejam os pontos $P_1(1, 2, 3)$, $P_2(4, 2, 5)$ e $P_3(6, 2, 7)$. Determine a equação do plano que passa pelos pontos e a área do triângulo por eles formado.

2.9 Deduza as matrizes de rotação de um ponto em torno dos eixos x e y do WC, de um ângulo θ.

2.10 Qual a matriz homogênea que representa a transformação de escala (s_x, s_y, s_z) em relação ao ponto $B(b_x, b_y, b_z)$?

2.11 A transformação de *espelhamento* de um ponto P em relação ao plano xy é representada pela matriz:

$$\mathbf{E}_{xy} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Qual a matriz de espelhamento em relação a um plano que passa por um ponto $B(b_x, b_y, b_z)$ e cujo versor normal é $\mathbf{n}(n_x, n_y, n_z)$?

2.12 Prove que a transformação inversa da translação $\mathbf{T}(\mathbf{t})$ é $\mathbf{T}(-\mathbf{t})$.

2.13 Qual a transformação inversa da rotação de θ em torno do eixo z?

2.14 Determine o quatérnio que representa a rotação de um ângulo θ de um ponto P em torno do eixo z do WC. Qual o quatérnio da rotação inversa?

2.15 Dado um versor $\mathbf{n}$ qualquer, determine o quatérnio que rotaciona de um ângulo θ um ponto P em torno deste versor.

2.16 Determine a matriz inversa da transformação dada pela equação (2.26). Dica: a matriz pode ser descrita por uma combinação de uma translação de O e de outra transformação cuja matriz é ortonormal.