

**BỘ CÔNG NGHỆ THÔNG TIN VÀ TRUYỀN THÔNG
HỌC VIỆN CÔNG NGHỆ BƯU CHÍNH VIỄN THÔNG**



PGS. TS PHẠM NGỌC ANH, PGS. TS LÊ BÁ LONG

**GIÁO TRÌNH
TOÁN CAO CẤP 2**

Hà Nội, tháng 4 năm 2021

Lời nói đầu

Giáo trình Toán cao cấp 2 được biên soạn theo Đề cương tín chỉ học phần Toán cao cấp 2 đã được Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông ban hành năm 2012 dành cho sinh viên đại học hệ chính qui nhóm ngành kinh tế, bao gồm: Khoa Quản trị kinh doanh, Khoa Tài chính Kế toán, Khoa Đa phương tiện và Khoa Marketing của Học viện. Gần như độc lập với môn Toán cao cấp 1, nội dung môn Toán cao cấp 2 là các kiến thức cơ bản về Đại số tuyến tính nhằm cung cấp và hỗ trợ cho sinh viên khối ngành Kinh tế trong việc học tập, nghiên cứu, phân tích các mô hình kinh tế.

Giáo trình được thiết kế theo 5 chương tương ứng với thời lượng hai tín chỉ gồm các nội dung sau:

Chương 1: Logic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ.

Chương 2: Không gian véc tơ n chiều.

Chương 3: Ma trận và định thức.

Chương 4: Hệ phương trình tuyến tính.

Chương 5: Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên không gian \mathbb{R}^n .

Nội dung của cuốn sách được tổng kết từ bài giảng của hai tác giả trong nhiều năm và có tham khảo các giáo trình của các trường đại học khác. Chính vì thế, giáo trình này cũng có thể dùng làm tài liệu học tập, tài liệu tham khảo cho sinh viên của các trường đại học và cao đẳng khối ngành Kinh tế.

Toán học ngoài vai trò là công cụ cho các ngành khoa học khác, còn cung cấp phương pháp tư duy lập luận chính xác chặt chẽ. Vì vậy việc học toán cũng giúp ta rèn luyện phương pháp tư duy. Một vài phương pháp tư duy Toán học đã được giảng dạy và cung cấp từng bước trong quá trình học tập ở phổ thông nhưng chỉ với mức độ đơn giản. Trong Chương 1 các vấn đề này được trình bày lại một cách có hệ thống. Các chương còn lại của giáo trình là đại số tuyến tính. Kiến thức của các chương liên hệ chặt chẽ với nhau, kết quả của chương này là công cụ của chương khác. Vì vậy người học cần thấy được mối liên hệ giữa các chương. Đặc điểm của môn học này là tính khái quát hoá và

trừu tượng cao. Một số khái niệm được khái quát hoá từ những kết quả của Hình học giải tích ở phổ thông, vì vậy khi học ta nên liên hệ đến các kết quả đó.

Giáo trình được trình bày theo cách thích hợp đối với người tự học. Trước khi nghiên cứu các nội dung chi tiết, người đọc nên xem phần giới thiệu của mỗi chương để thấy được mục đích, ý nghĩa, yêu cầu chính của chương đó. Trong mỗi chương, mỗi nội dung, người đọc có thể tự đọc và hiểu được cặn kẽ thông qua cách diễn đạt và chứng minh rõ ràng. Đặc biệt người học nên chú ý đến các nhận xét, bình luận để hiểu sâu hơn hoặc mở rộng tổng quát hơn các kết quả. Hầu hết các bài toán được xây dựng theo lược đồ: Đặt bài toán, chứng minh sự tồn tại lời giải bằng lý thuyết và cuối cùng nêu thuật toán giải quyết bài toán này. Các ví dụ là để minh họa trực tiếp khái niệm, định lý hoặc các thuật toán, vì vậy sẽ giúp người đọc dễ dàng hơn khi tiếp thu bài học. Cuối mỗi chương đều có các bài tập sắp xếp từ dễ đến khó. Các bài tập dễ chỉ kiểm tra trực tiếp nội dung vừa học còn các bài tập khó đòi hỏi phải sử dụng các kiến thức tổng hợp. Một số nội dung của cuốn sách đã được dạy hoặc dạy một phần ở phổ thông.

Tài liệu này có nội dung thuần túy toán học, tuy nhiên ở mức độ có thể chúng tôi giới thiệu một số ví dụ, bài tập liên quan đến chuyên ngành nhằm minh họa và thấy được ứng dụng của Toán cao cấp 2. Mặc dù vậy nội dung vẫn ở dạng cơ bản vì đối tượng chủ yếu là sinh viên năm thứ nhất Đại học - Cao đẳng, chưa được trang bị kiến thức về chuyên ngành.

Tuy rằng tác giả đã rất cố gắng, song các thiếu sót còn tồn tại trong giáo trình là điều khó tránh khỏi. Tác giả rất mong sự đóng góp ý kiến của bạn bè đồng nghiệp, học viên xa gần và xin cảm ơn vì điều đó.

Cuối cùng chúng tôi bày tỏ sự cảm ơn đối với Ban Giám đốc Học viện Công nghệ Bưu Chính Viễn Thông, Khoa Cơ bản 1 và bạn bè đồng nghiệp đã khuyến khích động viên, tạo nhiều điều kiện thuận lợi để chúng tôi hoàn thành giáo trình này.

Hà nội, ngày 15 tháng 04 năm 2021.

Bảng ký hiệu

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$	Tập số tự nhiên, số nguyên, số hữu tỉ, số thực, số phức
$\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*$	Tập số tương ứng loại trừ số 0
$a \in X$	a là phần tử của X , a thuộc X
$A \subset X$	A chứa trong X , A là tập con của X
\forall	lượng từ phổ biến; với mọi
\exists	lượng từ tồn tại; tồn tại
$f : X \rightarrow Y$	ánh xạ f từ X vào Y
$g \circ f$	hợp của ánh xạ f và ánh xạ g
$P_n[x]$	Tập hợp các đa thức biến x bậc $\leq n$
θ	Véc tơ không, ma trận không
$\text{Span} S$	Không gian véc tơ con sinh bởi hệ véc tơ S
$r(S), r(A)$	Hạng của hệ véc tơ S , hạng của ma trận A
$\dim V$	Chiều của không gian véc tơ V
$(v)_{\mathcal{B}}$	Tọa độ véc tơ v trong cơ sở \mathcal{B}
$[v]_{\mathcal{B}}$	Ma trận cột có phần tử là tọa độ véc tơ v trong cơ sở \mathcal{B}
$[a_{ij}]_{m \times n}$	Ma trận cỡ $m \times n$ có phần tử a_{ij}
A^t	Ma trận chuyển vị của ma trận A
A^{-1}	Ma trận nghịch đảo của ma trận A
C_A	Ma trận phụ hợp của ma trận A
$\det(A), A $	Định thức của ma trận A
$D_{\mathcal{B}}\{v_1, \dots, v_n\}$	Định thức của hệ véc tơ $\{v_1, \dots, v_n\}$ trong cơ sở \mathcal{B}
$\text{Hom}(V, W)$	Tập các ánh xạ tuyến tính từ V vào W
$\text{End}(V)$	Tập các phép biến đổi tuyến tính của V
$[f]_{\mathcal{B}}$	Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong cơ sở \mathcal{B}
$\mathcal{P}_A(\lambda), \mathcal{P}_f(\lambda)$	Đa thức đặc trưng của ma trận A , ánh xạ f

Mục lục

Lời nói đầu	3
Bảng ký hiệu	5
Mục lục	6
Chương 1. Mở đầu về logic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ	10
1.1. Logic mệnh đề	11
1.1.1. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề	11
1.1.2. Các tính chất (hay còn gọi là các luật logic)	14
1.2. Tập hợp	16
1.2.1. Khái niệm tập hợp	16
1.2.2. Tập con	18
1.2.3. Các phép toán trên các tập hợp	19
1.2.4. Hàm mệnh đề, lượng từ phổ biến và lượng từ tồn tại	21
1.2.5. Tích Đề Các	22
1.3. Ánh xạ	23
1.3.1. Các định nghĩa và ví dụ	23
1.3.2. Phân loại ánh xạ	25
1.3.3. Ánh xạ hợp, ánh xạ ngược	27
Bài tập Chương 1	29
Hướng dẫn giải bài tập Chương 1	32
Chương 2. Không gian véc tơ n chiều	36
2.1. Khái niệm và tính chất của không gian véc tơ	37
2.1.1. Định nghĩa không gian véc tơ	37
2.1.2. Tính chất cơ bản của không gian véc tơ	39
2.2. Không gian véc tơ con	41

2.2.1. Khái niệm không gian véc tơ con	41
2.2.2. Sự hình thành không gian véc tơ con	42
2.3. Độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính	44
2.3.1. Các khái niệm	44
2.3.2. Tính chất của các hệ độc lập tuyến tính, phụ thuộc tuyến tính	47
2.4. Cơ sở - Số chiều của không gian véc tơ	48
2.4.1. Hạng của hệ véc tơ	48
2.4.2. Cơ sở, số chiều của không gian véc tơ	54
2.5. Tọa độ của véc tơ trong cơ sở	57
Bài tập Chương 2	58
Hướng dẫn giải bài tập Chương 2	61
Chương 3. Ma trận và định thức	65
3.1. Ma trận	66
3.1.1. Khái niệm ma trận	66
3.1.2. Phép toán ma trận	70
3.1.3. Ma trận chuyển cơ sở	77
3.2. Định thức	83
3.2.1. Hoán vị và phép thế	83
3.2.2. Định nghĩa định thức	86
3.2.3. Các tính chất cơ bản của định thức	90
3.2.4. Khai triển định thức theo một hàng hoặc theo một cột .	96
3.2.5. Khai triển theo k hàng hoặc k cột (Công thức Laplace) .	100
3.3. Ma trận nghịch đảo	105
3.3.1. Điều kiện cần và đủ để tồn tại ma trận nghịch đảo . . .	106
3.3.2. Các phương pháp tìm ma trận nghịch đảo	108
3.4. Hạng của ma trận	110
3.4.1. Định nghĩa và cách tìm hạng của ma trận bằng phép biến đổi tuyến tính	110
3.4.2. Tìm hạng của ma trận bằng ứng dụng định thức (tham khảo)	114

3.4.3. Xác định tính chất độc lập của hệ véc tơ bằng ứng dụng định thức	116
Bài tập Chương 3	118
Hướng dẫn giải bài tập Chương 3	125
Chương 4. Hệ phương trình tuyến tính	132
4.1. Khái niệm hệ phương trình tuyến tính	133
4.1.1. Dạng tổng quát của hệ phương trình tuyến tính	134
4.1.2. Dạng ma trận của hệ phương trình tuyến tính	135
4.1.3. Dạng véc tơ của hệ phương trình tuyến tính	135
4.2. Định lý tồn tại nghiệm	136
4.3. Một số phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính	138
4.3.1. Phương pháp Cramer (còn gọi là phương pháp định thức)	138
4.3.2. Phương pháp ma trận nghịch đảo	142
4.3.3. Phương pháp khử Gauss	144
4.3.4. Ứng dụng hệ phương trình tuyến tính để tìm cơ sở của không gian sinh bởi một hệ véc tơ	151
4.4. Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	153
4.4.1. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	153
4.4.2. Cấu trúc tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	153
4.4.3. Hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất	155
4.4.4. Mối liên hệ giữa nghiệm của hệ không thuần nhất và hệ phương trình thuần nhất tương ứng	159
4.5. Một số mô hình tuyến tính trong phân tích kinh tế	160
4.5.1. Mô hình cân bằng thị trường	160
4.5.2. Mô hình cân bằng kinh tế vĩ mô	162
Bài tập Chương 4	164
Hướng dẫn giải bài tập Chương 4	168
Chương 5. Phép biến đổi tuyến tính và dạng toàn phương trên \mathbb{R}^n	177

5.1. Phép biến đổi tuyến tính	178
5.1.1. Khái niệm, tính chất, phép toán	178
5.1.2. Ma trận của phép biến đổi tuyến tính trong một cơ sở	183
5.1.3. Véc tơ riêng, giá trị riêng của phép biến đổi tuyến tính và ma trận vuông	190
5.1.4. Chéo hóa ma trận	198
5.1.5. Một vài ứng dụng của đa thức đặc trưng và bài toán chéo hóa	203
5.2. Dạng toàn phương trên \mathbb{R}^n	207
5.2.1. Định nghĩa và biểu thức tọa độ của dạng toàn phương	207
5.2.2. Ma trận của dạng toàn phương trong một cơ sở	210
5.2.3. Đưa biểu thức tọa độ của một dạng toàn phương về dạng chính tắc	215
5.2.4. Luật quán tính	220
Bài tập Chương 5	222
Hướng dẫn giải bài tập Chương 5	228
Tài liệu tham khảo	238

Chương 1

Mở đầu về logic mệnh đề, tập hợp, ánh xạ

1.1. Logic mệnh đề	11
1.2. Tập hợp	16
1.3. Ánh xạ	23
Bài tập Chương 1	29
Hướng dẫn giải bài tập Chương 1	32

Toán học là một ngành khoa học lý thuyết được phát triển trên cơ sở tuân thủ nghiêm ngặt các quy luật lập luận của tư duy logic hình thức. Các quy luật cơ bản của logic hình thức đã được phát triển từ thời Aristote (Arít-xtốt) (thế kỷ thứ 3 trước công nguyên) cùng với sự phát triển rực rỡ của văn minh cổ Hy Lạp. Tuy nhiên mãi đến thế kỷ 17 với những công trình của De Morgan (Đờ Mocgan), Boole ... thì logic hình thức mới có một cấu trúc đại số đẹp đẽ và cùng với lý thuyết tập hợp giúp làm chính xác hoá các khái niệm toán học và thúc đẩy toán học phát triển mạnh mẽ. Việc nắm vững logic hình thức không những giúp sinh viên học tốt môn toán mà còn có thể vận dụng trong thực tế và biết lập luận một cách chính xác.

Khái niệm tập hợp, ánh xạ là các khái niệm cơ bản: vừa là công cụ vừa là ngôn ngữ của toán học hiện đại. Vì vai trò nền tảng của nó nên khái niệm tập hợp được đưa rất sớm vào chương trình toán phổ thông (toán lớp 6). Khái niệm tập hợp được Cantor (Căng-to) đưa ra vào cuối thế kỷ 19. Sau đó được chính xác hoá bằng hệ tiên đề về tập hợp. Có thể tiếp thu lý thuyết tập hợp theo nhiều mức độ khác nhau. Chúng ta chỉ tiếp cận lý thuyết tập hợp ở mức độ trực quan kết hợp với các phép toán logic hình thức như “và”, “hoặc”, phép kéo theo, phép tương đương, lượng từ phổ biến, lượng từ tồn tại. Với các phép toán logic này ta có tương ứng các phép toán giao, hợp, hiệu các tập hợp con của các tập hợp.

Khái niệm ánh xạ là sự mở rộng khái niệm hàm số đã được biết. Khái niệm này giúp ta mô tả các phép tương ứng từ một tập này đến tập kia thoả mãn điều kiện rằng mỗi phần tử của tập nguồn chỉ cho ứng với một phần tử duy nhất của tập đích và mọi phần tử của tập nguồn đều được cho ứng với phần tử của tập đích. Ở đâu có tương ứng thì ta có thể mô tả được dưới ngôn ngữ ánh xạ.

Nắm vững và sử dụng một cách chính xác các luật logic mệnh đề, vận dụng triệt để các kiến thức về lý thuyết tập hợp, ánh xạ là một yếu tố quan trọng đối với bất kỳ sinh viên nào muốn đạt kết quả tốt trong học tập các môn toán nói riêng cũng như trong mọi lĩnh vực nghiên cứu khác.

1.1. Logic mệnh đề

1.1.1. Mệnh đề và các phép liên kết mệnh đề

a. Khái niệm mệnh đề

Logic mệnh đề là một hệ thống logic đơn giản nhất, với đơn vị cơ bản là các mệnh đề mang nội dung của các phán đoán, mỗi phán đoán được giả thiết là có một giá trị chân lý nhất định là đúng hoặc sai. Như vậy mệnh đề thường được phát biểu dưới dạng câu khẳng định hoặc phủ định. Câu dưới dạng nghi vấn, mệnh lệnh, yêu cầu không phải dạng mệnh đề ta xét.

Để chỉ các mệnh đề chưa xác định nào đó ta dùng các chữ cái p, q, r, \dots và gọi chúng là các biến mệnh đề. Nếu mệnh đề p đúng ta cho p nhận giá trị 1 và p sai ta cho nhận giá trị 0. Giá trị 1 hoặc 0 được gọi là *thể hiện* của p .

Chẳng hạn: “ $7 > 9$ ” là mệnh đề sai, “tam giác đều là một tam giác cân”, hay “tam giác ABC là tam giác vuông tại đỉnh A khi và chỉ khi $BC^2 = AC^2 + AB^2$ ” là những mệnh đề đúng, “ $x : 3$ ” không phải là một mệnh đề.

P phủ định của mệnh đề p là mệnh đề được ký hiệu \bar{p} , đọc là *không p* . Mệnh đề \bar{p} đúng khi p sai và \bar{p} sai khi p đúng.

Tương tự ngôn ngữ thông thường, người ta dùng các liên từ để nối các câu đơn thành câu phức hợp, các liên từ thường gặp như “và”, “hay là”, “hoặc... hoặc..”, “nếu... thì”...

Mệnh đề phức hợp được xây dựng từ các mệnh đề đơn giản bằng các phép liên kết logic mệnh đề.

b. Các phép liên kết logic mệnh đề

1) **Phép hội:** *Hội* của hai mệnh đề p, q là một mệnh đề, được kí hiệu là