# Monopoly als Markowkette

Florian Schmoll

24.05.18

## Definition

Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ ein zeitdiskreter stochastischer Prozess (also eine Familie von Zufallsvariablen $X_t$), so dass jede Zufallsvariable $X_t$ nur Werte aus dem endlichen Zustandsraum $J$ annehmen kann. $X$ heißt Markowkette, wenn gilt:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t) = \mathbb{P}(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, ..., X_0 = i_0),$$

für alle $t \in I, \; i_0, ..., i_{t+1} \in J$.
Die Wahrscheinlichkeiten $p_{ij}^t := \mathbb{P}(X_t = j | X_0 = i)$ werden Übergangswahrscheinlichkeiten genannt und lassen sich in einer Übergangsmatrix $P^t = (p_{ij}^t)_{i,j \in J}$ zusammenfassen. Eine Markowkette heißt homogen, falls gilt:
$\mathbb{P}(X_{t+1} = j | X_t = i) = \mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i), \; \forall i, j \in J, \; t \in I.$

## Beispiel

Wir betrachte eine vereinfachte Version von Monopoly, in der es nur 4 Felder gibt. Durch werfen eines Würfels mit den Augenzahlen 1, 2 und 3 gelangen wir von einem Feld auf ein anderes. Der Zustandsraum ist also $J = \{0, 1, 2, 3\}$ und die Übergangsmatrix $P$ ist:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

**Definition**

Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ eine endliche und zeitdiskrete Markowkette mit Zustandsraum $J$. $X$ heißt **irreduzibel**, wenn für alle $i, j \in J$ ein $n \in I$ existiert, sodass $p_{ij}^n > 0$ gilt.

## Definition

Sei $X = (X_t)_{t \in I}$ eine endliche und zeitdiskrete Markowkette mit Zustandsraum $J$. $X$ heißt **irreduzibel**, wenn für alle $i, j \in J$ ein $n \in I$ existiert, sodass $p_{ij}^n > 0$ gilt.

## Definition

Sei $X$ eine homogene Markowkette und $\pi$ eine Verteilung, das heißt $\pi_i \geq 0 \ \forall i \in J$, $\sum_{i \in J} \pi_i = 1$. Die Verteilung $\pi$ heißt **invariant** oder **stationäre Verteilung** bzgl. $X$, wenn $\pi P = \pi$ gilt.

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Ereignis-/Gemeinschaftskarten

Modellierung durch Randomisierung: Nach dem Ziehen einer Karte wird diese sofort wieder zurückgelegt und der Stapel neu gemischt, sodass die Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Karte zu ziehen immer gleich $\frac{1}{16}$ ist.

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Gefägnis

Modellierung durch das Einführen dreier Zustände:

- 300: 0 Züge im Gefägnis verbracht
- 301: 1 Zug im Gefägnis verbracht
- 302: 2 Züge im Gefägnis verbracht

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Züge als Zeiteinheit

Wir betrachten zunächst die Züge als Zeiteinheit der Markowkette. Es treten folgende Probleme auf:

- Pasch-Regel machen die Berechnungen sehr komplex
- Übergänge durch Ereignis-/Gemeinschaftskarten
- Gefägnis

## Paschregel

Würfe als Zeiteinheit zur einfacheren Berechnung der Wahrscheinlichkeiten.
Für jedes Feld werden drei Zustände eingeführt:

- $n$: Zu Beginn des Zuges auf dem Feld $n$
- $n'$: Nach einem Würfelwurf auf dem Feld $n$
- $n''$: Nach zwei Würfelwürfen auf dem Feld $n$

## Markowkette der Züge

Wir erhalten die Übergangsmatrix:

$$P := \begin{pmatrix} A & B & 0 & J_3 \\ A & 0 & B & J_3 \\ A & 0 & 0 & J_4 \\ J_1 & J_2 & 0 & J_5 \end{pmatrix}$$

## Herleitung der Übergangsmatrix für Würfe

Sei $(X, X_J)$ eine Startverteilung der Markowkette der Züge, wobei $X_J$ die Wahrscheinlichkeiten der drei Gefängniszustände beinhaltet. Offensichtlich erhalten wir mit $(X, 0, 0, X_J)$ durch Einfügen ausreichend vieler Einträge der Größe 0 eine Startverteilung der Markowkette der Würfe. Wir erhalten für den nächsten Wurf:

$$(X, 0, 0, X_J) \begin{pmatrix} A & B & 0 & J_3 \\ A & 0 & B & J_3 \\ A & 0 & 0 & J_4 \\ J_1 & J_2 & 0 & J_5 \end{pmatrix} = (XA + X_J J_1,\ XB + X_J J_2,\ 0,\ XJ_3 + X_J J_5)$$

## Herleitung der Übergangsmatrix für Würfe

Sei $(X, X_J)$ eine Startverteilung der Markowkette der Züge, wobei $X_J$ die Wahrscheinlichkeiten der drei Gefängniszustände beinhaltet. Offensichtlich erhalten wir mit $(X, 0, 0, X_J)$ durch Einfügen ausreichend vieler Einträge der Größe 0 eine Startverteilung der Markowkette der Würfe. Wir erhalten für den nächsten Wurf:

$$(X, 0, 0, X_J) \begin{pmatrix} A & B & 0 & J_3 \\ A & 0 & B & J_3 \\ A & 0 & 0 & J_4 \\ J_1 & J_2 & 0 & J_5 \end{pmatrix} = (XA + X_J J_1,\ XB + X_J J_2,\ 0,\ XJ_3 + X_J J_5)$$

Ein weiterer Wurf ergibt:

$$(0, XB + X_J J_2, 0, 0) \cdot P = (XBA + X_J J_2 A,\ 0,\ XB^2 + X_J J_2 B,\ XBJ_3 + X_J J_2 J_3)$$

Ein weiterer Wurf:

$$(0, 0, XB^2 + X_J J_2 B, 0) \cdot P = (XB^2 A + X_J J_2 BA,\ 0,\ 0,\ XB^2 J_4 + X_J J_2 BJ_4)$$

Somit ergibt sich folgender Zustandsvektor nach einem Übergang:

$$(X[I{+}B{+}B^2]A{+}X_J[J_1{+}J_2A{+}J_2BA],\ X[J_3{+}BJ_3{+}B^2J_4]{+}X_J[J_5{+}J_2J_3{+}J_2BJ_4])$$

Ein weiterer Wurf:

$$(0, 0, XB^2 + X_J J_2 B, 0) \cdot P = (XB^2 A + X_J J_2 BA,\ 0,\ 0,\ XB^2 J_4 + X_J J_2 B J_4)$$

Somit ergibt sich folgender Zustandsvektor nach einem Übergang:

$$(X[I+B+B^2]A+X_J[J_1+J_2A+J_2BA],\ X[J_3+BJ_3+B^2J_4]+X_J[J_5+J_2J_3+J_2BJ_4])$$

Ausgehend von der Startverteilung $(X, X_J)$ ergibt sich also für die Markowkette der Züge eine Übergangsmatrix der Form:

$$\begin{pmatrix} [I + B + B^2]A & J_3 + BJ_3 + B^2 J_4 \\ J_1 + J_2 A + J_2 BA & J_5 + J_2 J_3 + J_2 B J_4 \end{pmatrix}$$

## Definition

Seien $i, j \in J$. Wir bezeichnen

$$T_j := \inf\{n \geq 1 | X_n = j\}$$

als **Rückkehrzeit von** $j$ und

$$\tau_{ij} := \inf\{n \geq 1 | X_n = j, \ X_0 = i\}$$

als **Rückkehrzeit von** $j$ **bei Start in** $i$. Außerdem sei $\rho_{ij} := \mathbb{P}(\tau_{ij} < \infty) = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i)$.

## Definition

Seien $i, j \in J$. Wir bezeichnen

$$T_j := \inf\{n \geq 1 | X_n = j\}$$

als **Rückkehrzeit von** $j$ und

$$\tau_{ij} := \inf\{n \geq 1 | X_n = j, \; X_0 = i\}$$

als **Rückkehrzeit von** $j$ **bei Start in** $i$. Außerdem sei $\rho_{ij} := \mathbb{P}(\tau_{ij} < \infty) = \mathbb{P}(T_j < \infty | X_0 = i)$.

## Definition

Sei $i \in J$ ein beliebiger Zustand. Wir nennen $i$:

- *transient*, wenn $\rho_{ii} < 1$,
- *rekurrent*, wenn $\rho_{ii} = 1$.

## Definition

Sei $j \in J$ ein rekurrenter Zustand, dann nennen wir $j$:

- *null-rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) = \infty$,
- *positiv rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) < \infty$.

## Definition

Sei $j \in J$ ein rekurrenter Zustand, dann nennen wir $j$:

- *null-rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) = \infty$,
- *positiv rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) < \infty$.

## Satz

$X$ ist positiv rekurrent, das heißt alle Zustände $i \in J$ sind positiv rekurrent.

## Definition

Sei $j \in J$ ein rekurrenter Zustand, dann nennen wir $j$:

- *null-rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) = \infty$,
- *positiv rekurrent*, wenn $\mathbb{E}(\tau_{ii}) < \infty$.

## Satz

$X$ ist positiv rekurrent, das heißt alle Zustände $i \in J$ sind positiv rekurrent.

## Definition

Sei $J = 1, ..., n$ der Zustandsraum von $X$ und $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ eine Startverteilung, also $\sum_{j \in J} \nu_j = 1$ und $\nu_j \geq 0, \ \forall j \in J$. Dann ist $\mathbb{P}_\nu$ das Wahrscheinlichkeitsmaß von $X$ mit Startverteilung $\nu$ und es gilt:

$$\mathbb{P}_\nu(X_n = i) := \sum_{j \in J} \nu_j \mathbb{P}(X_n = i | X_0 = j)$$

**Satz**

Für alle $j \in J$ und alle Startverteilungen $\nu$ gilt $\mathbb{P}_\nu(T_i < \infty) = 1$.

**Satz**

Für alle $j \in J$ und alle Startverteilungen $\nu$ gilt $\mathbb{P}_\nu(T_i < \infty) = 1$.

**Satz**

Es existiert eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ für $X$.

### Satz

Für alle $j \in J$ und alle Startverteilungen $\nu$ gilt $\mathbb{P}_\nu(T_i < \infty) = 1$.

### Satz

Es existiert eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ für $X$.

### Folgerung

$\pi P = \pi \Rightarrow \; \pi P^n = \pi, \; \forall n \in \mathbb{N}$.

### Satz

Für alle $j \in J$ und alle Startverteilungen $\nu$ gilt $\mathbb{P}_\nu(T_i < \infty) = 1$.

### Satz

Es existiert eine stationäre Verteilung $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ für $X$.

### Folgerung

$\pi P = \pi \Rightarrow \ \pi P^n = \pi, \ \forall n \in \mathbb{N}$.

### Satz

$\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ mit $\pi_i := \frac{1}{\mathbb{E}(\tau_{ii})}$ ist die eindeutige stationäre Verteilung von $X$.

## Definition

Sei $X = (X_n)_{n \in I}$ eine Markowkette und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren, für die gilt $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) = \sigma(\{X_n^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$ eine *Filtrierung*. Sei außerdem $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Sei nun $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$. Wir nennen $\tau$ eine *Stoppzeit* bzgl. $X$, falls gilt:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \ \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

## Definition

Sei $X = (X_n)_{n\in I}$ eine Markowkette und $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n\in I}$ eine Familie von $\sigma$-Algebren, für die gilt $\mathcal{F}_n := \sigma(X_n) = \sigma(\{X_n^{-1}(B) | B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\})$ eine *Filtrierung*. Sei außerdem $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$. Sei nun $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0$. Wir nennen $\tau$ eine *Stoppzeit* bzgl. $X$, falls gilt:

$$\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \; \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

## Definition

Sei $X = (X_n)_{n\in I}$ eine Markowkette mit Zustandsraum $J$. Die *Periode* von $i \in J$ ist der größte gemeinsame Teiler der Menge:

$$\{n \in \mathbb{N} | p_{ii}^n > 0\}.$$

Ist die *Periode* von $i$ gleich 1, so heißt $i$ *aperiodisch*. Wir nennen $X$ aperiodisch, falls alle Zustände aperiodisch sind.

## Satz

Sei $X$ eine irreduzible, aperiodische Markowkette mit stationärer Verteilung $\pi$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \pi_j \ \forall j \in J$$

und insbesonders:

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi_n \ \forall i, j \in J.$$