

FACTORIZING

4.1 Exercise Set

1. Complete the sentences using “positive” or “negative”. Assume $x^2 + bx + c$ can be factored into $(x + m)(x + n)$.

- a) If b and c are positive, then m is _____ and n is _____.
- b) If b is negative and c is positive, then m is _____ and n is _____.
- c) If c is negative, then m is _____ and n is _____, or m is _____ and n is _____.
- d) If m is positive and n is positive, then b is _____ and c is _____.
- e) If m is positive and n is negative, then c is _____, and b might be _____ or _____.
- f) If b , c and m are negative, then n is _____.
- g) If b and c are negative, and m is positive, then n is _____.

2. Fill in the blanks to make the statement true.

- a) Two positive factors of 6 are _____, _____ and _____, _____.
- b) Two negative factors of 9 are _____, _____ and _____, _____.
- c) Four factors of 4 are _____, _____; _____, _____; _____, _____ and _____, _____.
- d) Six factors of -12 are _____, _____; _____, _____; _____, _____; _____, _____; _____, _____ and _____, _____.

3. Give four examples for b so that the following trinomials can be factored.

- a) $x^2 + bx + 6$ _____, _____, _____, _____
- b) $x^2 + bx + 4$ _____, _____, _____, _____
- c) $x^2 + bx - 8$ _____, _____, _____, _____
- d) $x^2 + bx - 6$ _____, _____, _____, _____

4. Give positive and negative integer examples for c so that the following trinomials can be factored.

a) $x^2 + 6x + c$

_____ , _____ , _____ , _____

b) $x^2 - 4x + c$

_____ , _____ , _____ , _____

c) $x^2 + x + c$

_____ , _____ , _____ , _____

d) $x^2 - 5x + c$

_____ , _____ , _____ , _____

5. Complete the factoring.

a) $x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(\quad)$

b) $x^2 - 8x + 15 = (x - 5)(\quad)$

c) $x^2 + 15x + 44 = (x + 11)(\quad)$

d) $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)(\quad)$

e) $y^2 + 11y + 28 = (y + 4)(\quad)$

f) $y^2 - 11y + 30 = (y - 5)(\quad)$

g) $z^2 + z - 6 = (z + 3)(\quad)$

h) $z^2 - z - 6 = (z - 3)(\quad)$

6. Factor.

a) $a^2 + 9a + 8$

b) $b^2 + 16b + 15$

c) $c^2 + 10c + 24$

d) $d^2 + 7d + 10$

e) $x^2 - 18x + 72$

f) $y^2 - 20y + 91$

g) $z^2 - 13z + 36$

h) $u^2 - 4u + 4$

i) $l^2 + 7l - 30$

j) $m^2 + 4m - 12$

7. Factor completely.

a) $3x^2 + 15x + 12$

b) $4y^2 + 20y + 24$

c) $9z^2 + 27z + 18$

d) $2u^2 - 8u + 6$

e) $-5x^2 + 25x - 20$

f) $-2y^2 + 58y - 200$

g) $-3z^2 + 3z + 18$

h) $-4u^2 - 28u + 120$

i) $-x^2 - 6x + 27$

j) $-x^2 + 20x + 44$

k) $-x^2 + 7x + 44$

l) $-x^2 + 6x - 9$

8. Factor completely.

a) $x^3 + 8x^2 - 20x$

b) $x^2 - 12xy + 36y^2$

c) $x^4y - 11xy^3 - 60y^5$

d) $-2x^4 - 4x^3 + 30x^2$

e) $-3x^4 - 15x^3 + 6x^2$

f) $16x^3 + 48x^2y + 32xy^2$

g) $-x^3y - x^2y^2 + 6xy^3$

h) $2x^4 - 16x^3y + 32x^2y^2$

i) $-x^3y^2 - 3x^4y^3 + 4xy^4$

j) $x^6 - 11x^5y + 28x^4y^2$

9. Factor completely.

a) $x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}$

b) $x^2 - x + \frac{2}{9}$

c) $x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{4}x^3 - x^2 - 8x$

e) $x^{2n} + 7x^n + 12$

f) $x^{6n} - 3x^{3n} + 2$

g) $y^{10n} - y^{5n} - 12$

h) $y^{2n} - 7y^n y^m + 10y^{2m}$

i) $x^{2n+2} - x^{n+2}$

j) $x^{2n+1} + 2x^{n+1} + x$

10. Rewrite the term as the product of equal factors.

a) x^2

b) $9x^2$

c) $16x^6$

d) $100x^2y^4$

e) $81x^8y^{12}$

f) $64x^4y^2z^6$

g) 144

h) $25x^{10}$

i) $225x^{14}$

j) $121x^2y^4z^6$

11. Factor each binomial completely.

a) $x^2 - 1$

b) $4x^2 - 1$

c) $y^2 - 25$

d) $25y^2 - 9$

e) $4 - 9z^2$

f) $16 - 25z^2$

g) $16x^2 - 9y^2$

h) $25x^4 - 81y^6$

i) $16x^2y^8 - 4$

j) $20x^2 - 5y^2$

k) $x^2 - 1$

l) $x^2 + 1$

m) $(x + 1)^2 - y^2$

n) $4 - (x + 2)^2$

12. Factor completely.

a) $(2a + 5)y^3 + 9(2a + 5)y - 10(2a + 5)$

b) $x^3(a + b) - 6x^2(a + b) + 8x(a + b)$

c) $(x - 2y)^2 - 8a(x - 2y) + 15a^2$

d) $(5x - y)^2 + (10xz - 2yz) - 24z^2$

e) $(x + 4)^2 + 2y(x + 4) + y^2$

f) $(x + 4)^2 + y(x + 4) - 2y^2$

13. Factor completely.

a) $(x^2 + 6x + 9) - 4y^2$

b) $(4x^2 + 4xy + y^2) - 9z^2$

c) $x^2 - 1$

d) $(x^6 - 4x^3y^3 + 4y^6) - (a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4)$

e) $4^{2n}x^{3n} - 9^{2n}y^{2n}$

f) $25^{4r}y^{6r} - 16^{6r}z^{4r}$

14. Factor completely.

a) $(x^2 + 6xy + 9y^2) - 9(x^2 + 4xy + 4y^2)$

b) $(4a^2 - 9y^2)a^2 - (4a^2 - 9y^2)b^2$

c) $x^{-2} - 4x^{-4}$

d) $2x^{-2} - 7x^{-3} + 3x^{-4}$

e) $\frac{x^4}{81} - 1$

f)
$$\begin{aligned} x - 1 &= (\quad) (\quad) \\ &= (\quad) (\quad) (\quad) \end{aligned}$$

4.2 Exercise Set

1. Complete the following factoring.

a) $6x^2 + 11x + 4 = (2x + 1)(\quad)$

b) $8x^2 + 18x + 9 = (4x + 3)(\quad)$

c) $2x^2 + 11x + 15 = (2x + 5)(\quad)$

d) $8x^2 - 14x + 3 = (4x - 1)(\quad)$

e) $12x^2 - 20x + 3 = (2x - 3)(\quad)$

f) $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)(\quad)$

g) $9x^2 + 3x - 2 = (3x - 1)(\quad)$

h) $2x^2 - x - 15 = (x - 3)(\quad)$

Factor.

a) $2x^2 + 13x + 15$

b) $3x^2 + 8x + 4$

c) $10x^2 + 17x + 3$

d) $8y^2 - 18y + 9$

e) $21y^2 - 41y + 10$

f) $2y^2 - 7y + 5$

g) $20z^2 - 27z - 8$

h) $3z^2 - 20z - 63$

i) $8z^2 + z - 9$

j) $15z^2 - 16z - 15$

k) $6a^2 + 17a - 3$

l) $6a^2 - a - 1$

m) $4a^2 - 7a + 3$

n) $4a^2 + 4a - 3$

3. Factor.

a) $-3x^2 - x + 4$

b) $-2x^2 - 5xy - 2y^2$

c) $-5x^2 + 2x + 16$

d) $-3x^2 + 13xy - 4y^2$

e) $-100x^2 + 120xy - 32y^2$

f) $-36x^2 - 96xy - 64y^2$

g) $-20x^2 - 16x - 3$

h) $-6x^2 - 9xy + 4y^2$

i) $-15x^2 + 26xy - 8y^2$

j) $-12x^4 + 22x^3 + 20$

4. Factor.

a) $25x^3(a-1) - 5x(a-1)^3 - 2(a-1)^3$

b) $-3x^2(y+1)^2 - 2x(y+1)^2 + 5(y+1)^2$

c) $1 - 7x - 60x^2$

d) $9 - 10x^2 + x^4$

e) $x^4(1-x)^3 - 20x^2(1-x)^3 + 64(1-x)^3$

f) $18y^2(x+1)^2 - 21y(x+1)^2 - 4(x+1)^2$

g) $15a^2(a-2)^2 - 34ab(a-2)^2 - 16b^2(a-2)^2$

h) $4x^2(2-z)^5 + 20xy(2-z)^5 + 25y^2(2-z)^5$

5. Are the following perfect square trinomials?

a) $x^2 + 4x + 4$

y / n

b) $x^2 + 8x + 4$

y / n

c) $x^2 + 6x + 9$

y / n

d) $x^2 + 8x + 9$

y / n

e) $4x^2 - 10x + 9$

y / n

f) $4x^2 - 12x + 9$

y / n

g) $x^4 + 10x^2 + 25$

y / n

h) $x^4 - 2x^2 + 1$

y / n

i) $36x^2 - 12xy + y^2$

y / n

j) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

y / n

6. Factor each trinomial completely.

a) $x^2 + 10x + 25$

b) $x^2 + 8x + 16$

c) $y^2 - 12y + 36$

d) $y^4 - 6y^2 + 9$

e) $2z^2 - 28z + 98$

f) $3z^2 - 30z + 75$

g) $x^3 - 16x^2 + 64x$

h) $9x^2 - 24xy + 16y^2$

i) $-50a^2 + 40ab - 8b^2$

j) $-9x^2 - 24xy - 16y^2$

7. Find all integers k which make the trinomial a perfect square.

a) $x^2 + 8x + k$

b) $y^2 - 6y + k$

c) $4z^2 + kz + 9$

d) $9x^2 - kxy + 16y^2$

e) $ky^2 + 24y + 9$

f) $kz^2 - 24z + 9$

g) $64x^2 + 112x + k$

h) $25y^2 - 40y + k$

i) $kx^2 - 24x + 16$

j) $9x^2 + kxy + 25y^2$

8. Factor each polynomial, assuming that m and n are natural numbers.

a) $4x^{2m} - 20x^m y^n + 25y^{2n}$

b) $10x^{2m} - 4x^m y^n - 6y^{2n}$

c) $x^{2m} - 4y^{2n}$

d) $x^{4m} - y^{4n}$

e) $-4x^{4m} - 6x^{2m} y^{2n} + 4y^{4n}$

f) $-6x^{8m} + 17x^{4m} y^{4n} - 10y^{8n}$

Factoring and Functions - Solutions

4.1 Factoring $x^2 + bx + c$, page 163

1. a) positive, positive b) negative, negative c) positive, negative; negative, positive
d) positive, positive e) negative; positive, negative f) positive g) negative
2. a) 1, 6; 2, 3 b) -1, -9; -3, -3 c) 1, 4; -1, -4; 2, 2; -2, -2
d) 1, -12; -1, 12; 2, -6; -2, 6; 3, -4; -3, 4
3. (answers may vary) a) -5, 5, -7, 7 b) -4, 4, -5, 5 c) -2, 2, -7, 7 d) -1, 1, -5, 5
4. (answers may vary) a) 5, 9, -7, -16 b) 3, 4, -5, -12 c) $\frac{1}{4}, \frac{3}{16}, -2, -6$ d) 4, 6, -6, -14
5. a) $x + 3$ b) $x - 3$ c) $x + 4$ d) $x - 3$ e) $y + 7$ f) $y - 6$ g) $z - 2$ h) $z + 2$
6. a) $(a + 1)(a + 8)$ b) $(b + 1)(b + 15)$ c) $(c + 4)(c + 6)$ d) $(d + 2)(d + 5)$ e) $(x - 6)(x - 12)$
f) $(y - 7)(y - 13)$ g) $(z - 4)(z - 9)$ h) $(u - 2)^2$ i) $(l - 3)(l + 10)$ j) $(m - 2)(m + 6)$
7. a) $3(x + 1)(x + 4)$ b) $4(y + 2)(y + 3)$ c) $9(z + 1)(z + 2)$ d) $2(u - 1)(u - 3)$
e) $-5(x - 1)(x - 4)$ f) $-2(y - 4)(y - 25)$ g) $-3(z - 3)(z + 2)$ h) $-4(u - 3)(u + 10)$
i) $-(x - 3)(x + 9)$ j) $-(x + 2)(x - 22)$ k) $-(x + 4)(x - 11)$ l) $-(x - 3)^2$
8. a) $x(x - 2)(x + 10)$ b) $(x - 6y)^2$ c) $y(x + 4)(x - 15)$ d) $-2x^2(x - 3)(x + 5)$
e) $-3x^2(x^2 + 5x - 2)$ f) $16x(x + y)(x + 2y)$ g) $-xy(x - 2y)(x + 3y)$ h) $2x^2(x - 4y)^2$
i) $-xy^2(x - y)(x + 4y)$ j) $x^4(x - 4y)(x - 7y)$
9. a) $(x + \frac{1}{2})(x + \frac{3}{4})$ b) $(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})$ c) $(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{4})$ d) $\frac{1}{4}x(x + 4)(x - 8)$
e) $(x^n + 3)(x^n + 4)$ f) $(x^{3n} - 1)(x^{3n} - 2)$ g) $(y^{5n} - 4)(y^{5n} + 3)$ h) $(y^n - 2y^n)(y^n - 5y^n)$
i) $x^n(x - 1)(x + 1)$ j) $x(x^n + 1)^2$
10. a) $x \cdot x$ b) $3x \cdot 3x$ c) $4x^3 \cdot 4x^3$ d) $10xy^2 \cdot 10xy^2$ e) $9x^4y^6 \cdot 9x^4y^6$ f) $8x^3yz^3 \cdot 8x^3yz^3$
g) $12 \cdot 12$ h) $5x^5 \cdot 5x^5$ i) $15x^7 \cdot 15x^7$ j) $11xy^2z^3 \cdot 11xy^2z^3$
11. a) $(x - 1)(x + 1)$ b) $(2x - 1)(2x + 1)$ c) $(y - 5)(y + 5)$ d) $(5y - 3)(5y + 3)$
e) $(2 - 3z)(2 + 3z)$ f) $(4 - 5z^2)(4 + 5z^2)$ g) $(4x - 3y)(4x + 3y)$ h) $(5x^2 - 9y^3)(5x^2 + 9y^3)$
i) $4(2xy^4 - 1)(2xy^4 + 1)$ j) $5(2x - y)(2x + y)$ k) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ l) $x^2 + 1$
m) $(x + 1 - y)(x + 1 + y)$ n) $-x(x + 4)$

12. a) $(2a + 5)(y + 10)(y - 1)$ b) $x(a + b)(x - 2)(x - 4)$ c) $(x - 2y - 3a)(x - 2y - 5a)$

d) $(5x - y - 4z)(5x - y + 6z)$ e) $(x + 4 + y)^2$ f) $(x + 4 - y)(x + 4 + 2y)$

13. a) $(x + 3 - 2y)(x + 3 + 2y)$ b) $(2x + y - 3z)(2x + y + 3z)$ c) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$

d) $(x^3 - 2y^3 - a^3 - 3b^3)(x^3 - 2y^3 + a^3 + 3b^3)$ e) $(4^m x^m - 9^n y^n)(4^m x^m + 9^n y^n)$

f) $(25^{3x} y^{3x} - 16^{3x} z^{3x})(25^{3x} y^{3x} + 16^{3x} z^{3x})$

14. a) $-(2x + 3y)(4x + 9y)$ b) $(a - b)(a + b)(2a - 3y)(2a + 3y)$ c) $x^{-4}(x + 2)(x - 2)$

d) $x^{-4}(2x - 1)(x + 3)$ e) $\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(\frac{x}{3} + 1\right)\left(\frac{x^2}{9} + 1\right)$ f) $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt[4]{x} + i)(\sqrt[4]{x} + 1)$

4.2 Factoring $ax^2 + bx + c$, page 173

1. a) $3x + 4$ b) $2x + 3$ c) $x + 3$ d) $2x - 3$ e) $6x - 1$ f) $3x - 1$ g) $3x + 2$ h) $2x + 5$

2. a) $(2x + 3)(x + 5)$ b) $(3x + 2)(x + 2)$ c) $(2x + 3)(5x + 1)$ d) $(2y - 3)(4y - 3)$

e) $(3y - 5)(7y - 2)$ f) $(y - 1)(2y - 5)$ g) $(4z + 1)(5z - 8)$ h) $(z - 9)(3z + 7)$

i) $(z - 1)(8z + 9)$ j) $(3z - 5)(5z + 3)$ k) $(a + 3)(6a - 1)$ l) $(2a - 1)(3a + 1)$

m) $(a - 1)(4a - 5)$ n) $(2a - 1)(2a + 3)$

3. a) $-(x + 1)(3x + 4)$ b) $-(x + 2y)(2x + y)$ c) $-(x - 2)(5x + 8)$ d) $-(x - 4y)(3x - y)$

e) $-4(5x - 2y)(5x - 4y)$ f) $-4(3x + 4y)^2$ g) $-(2x + 1)(10x + 3)$ h) $-3(x - 2y)(2x + 7y)$

i) $-(3x - 4y)(5x - 2y)$ j) $-2(2x^2 - 5)(3x^2 + 2)$

4. a) $(a + 1)^2(5x + 1)(5x - 2)$ b) $-(y + 1)^2(x - 1)(3x + 5)$ c) $(1 - 12x)(1 + 5x)$

d) $(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$ e) $(1 - x)^3(x - 2)(x + 2)(x - 4)(x + 4)$

f) $(x + 1)^2(6y + 1)(3y - 4)$ g) $(a - 2)^2(3a - 8b)(5a + 2b)$ h) $(2 - z)^5(2x + 5y)^2$

5. a) yes b) no c) yes d) no e) no f) yes g) yes h) yes i) yes j) yes

6. a) $(x + 5)^2$ b) $(x + 4)^2$ c) $(y - 6)^2$ d) $(y^2 - 3)^2$ e) $2(z - 7)^2$ f) $3(z - 5)^2$ g) $x(x - 8)^2$

h) $(3x - 4y)^2$ i) $-2(5a - 2b)^2$ j) $-(3x + 4y)^2$

7. a) 16 b) 9 c) -12, 12 d) -24, 24 e) 16 f) 16 g) 49 h) 16 i) 9 j) -30, 30

8. a) $(2x^m - 5y^n)^2$ b) $2(x^m - y^n)(5x^m + 3y^n)$ c) $(x^m - 2y^n)(x^m + 2y^n)$

d) $(x^m - y^n)(x^m + y^n)(x^{2m} + y^{2n})$ e) $-2(2x^{2m} - y^{2n})(x^{2m} + 2y^{2n})$ f) $-(x^{4m} - 2y^{4n})(6x^{4m} - 5y^{4n})$