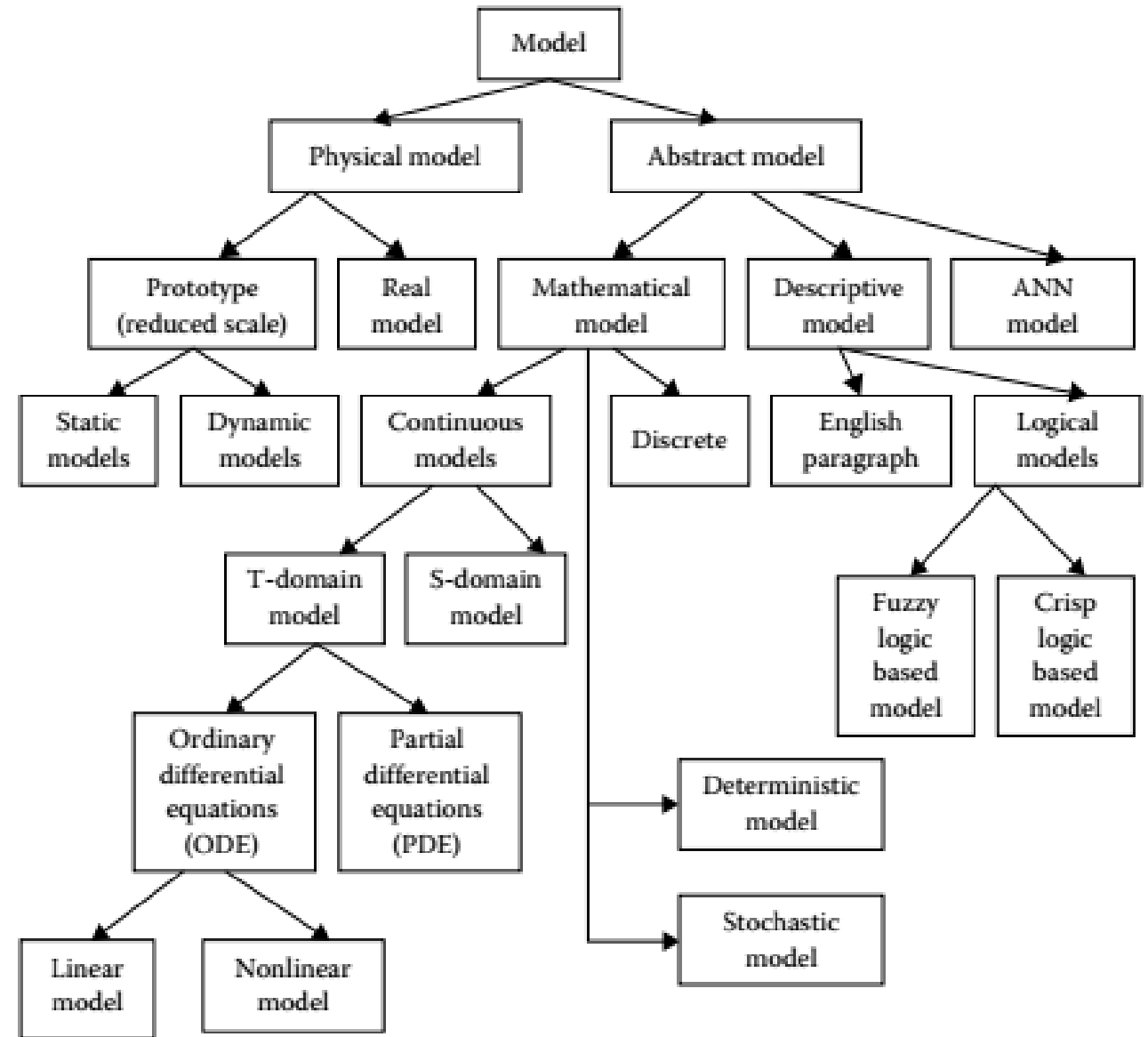


# İşaret İşleme

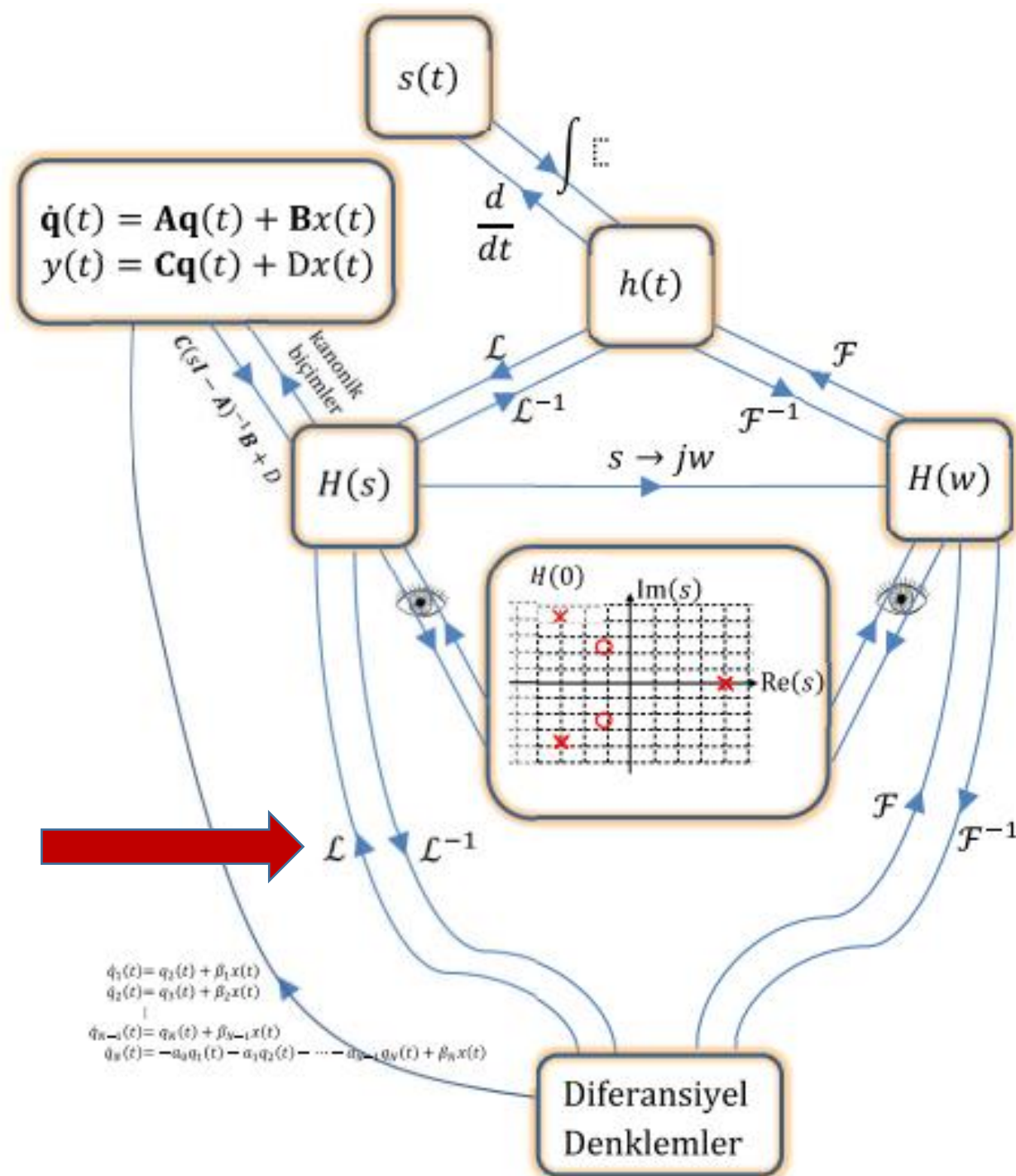
Laplace Dönüşümü ve Sürekli Zamanlı Sistemler-  
H7CD1

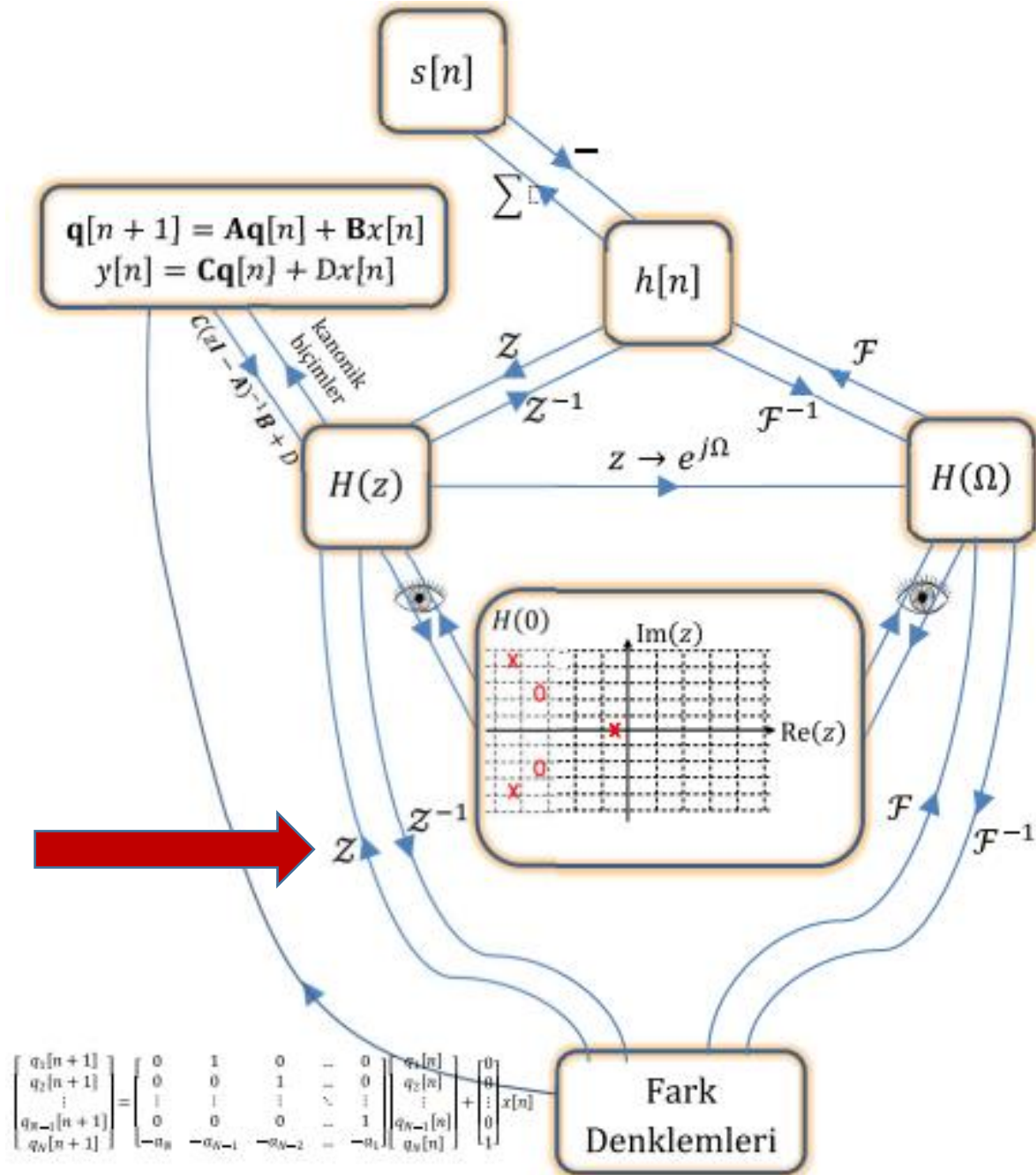
Dr. Meriç Çetin  
versiyon211020

## 2. Hafta notlarını hatırlayalım!



Pictorial representation of the classification of models.





# Laplace Dönüşümü

# Giriş

- Darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Alternatif olarak Laplace dönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce **s–domenine** dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar **zaman domenine** dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Laplace dönüşümü sayesinde bir LTI sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.



Pierre-Simon de Laplace  
Pierre-Simon de Laplace

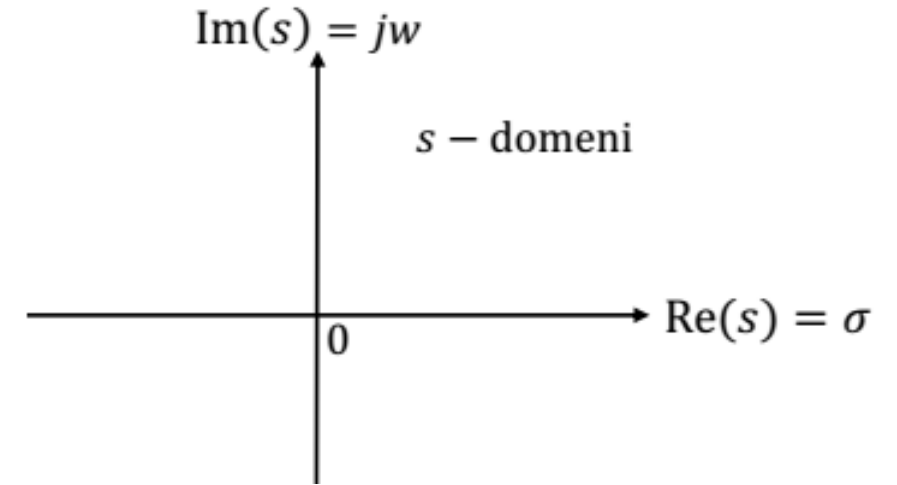
# Laplace Dönüşümünün Tanımı

Sürekli-zamanlı bir  $x(t)$  işaretinin Laplace dönüşümü  $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$  ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x(t) \leftrightarrow X(s)$$

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

buradaki  $s$  değişkeni  $s = \sigma + j\omega$  şeklinde karmaşık bir değişkendir.



## Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$  sinyalinin Laplace dönüşümü



$$\begin{aligned}x(t) = e^{-at}u(t) &\leftrightarrow X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt \\&= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-st}dt \\&= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t}dt \\&= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{+\infty} \\&= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)\infty} - \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)0} \\&= \frac{-1}{s+a} e^{-(s+a)\infty} + \frac{1}{s+a} \\&= \frac{1}{s+a}\end{aligned}$$

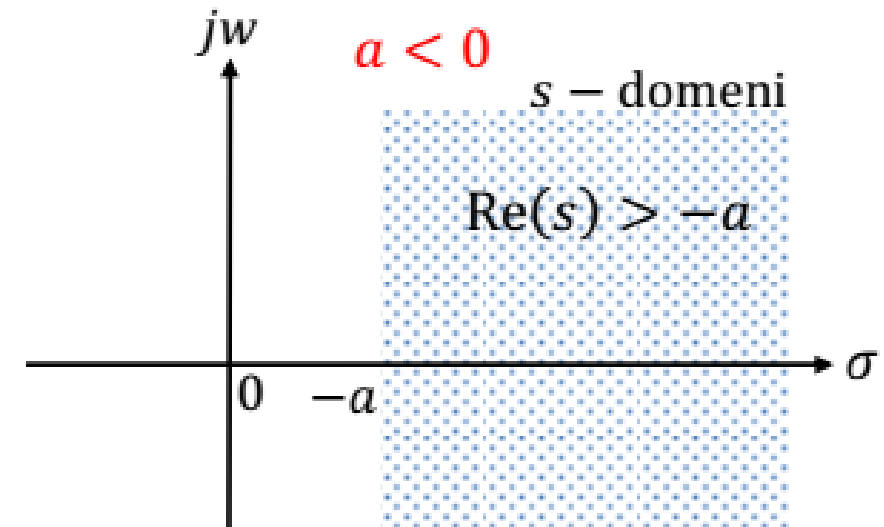
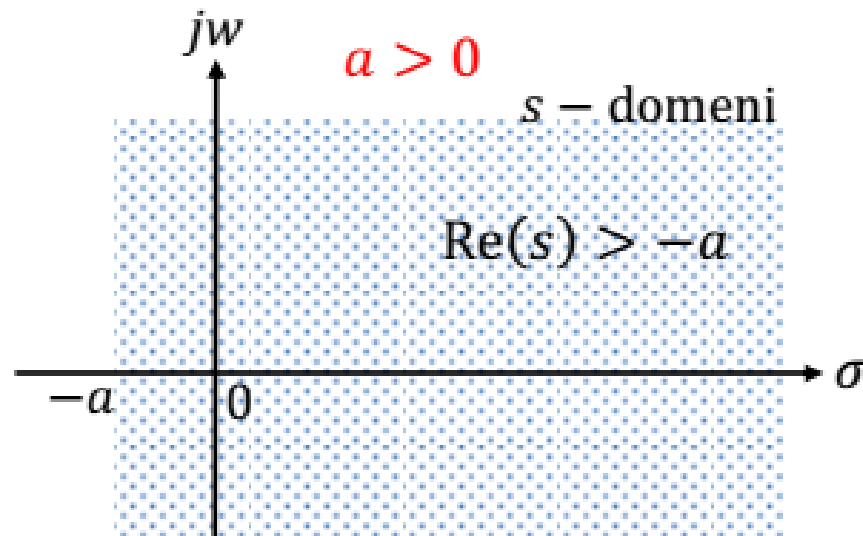
$$\text{Re}(s + a) > 0$$



# Bir örnek

$x(t) = e^{-at}u(t)$  sinyalinin Laplace dönüşümü

Görüldüğü gibi bu integralin yani Laplace dönüşümünün mevcut olabilmesi için  $\text{Re}(s + a) > 0$  şartının sağlanması gerekir.  $s$ -domeninde bu şart aşağıdaki gibi bir bölgeye denk düşmektedir ki bu bölgeye yakınsama bölgesi denir.



# Laplace Dönüşümü $X(s)$ 'in Sıfırları ve Kutupları

Laplace dönüşümü olan  $X(s)$  en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} = \frac{a_0 (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{b_0 (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

burada  $a_k$  ve  $b_k$ 'lar reel sabitler,  $m$  ve  $n$  ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman  $m \leq n$  sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan  $z_k$ 'lara  $X(s)$ 'in *sıfırları* denmektedir çünkü  $s$ 'nin bu değerleri için  $X(s) = 0$  olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan  $p_k$ 'lara da  $X(s)$ 'in *kutupları* denmektedir çünkü  $s$ 'nin bu değerleri için  $X(s) = \infty$  olmaktadır.

$X(s)$ 'i ifade etmenin bir yolu da sıfır ve kutuplarını  $s$ -düzleminde yerlerinin belirtilmesidir.

Geleneksel olarak sıfırlar  $\circ$  ile kutuplar da  $\times$  ile gösterilmektedir.

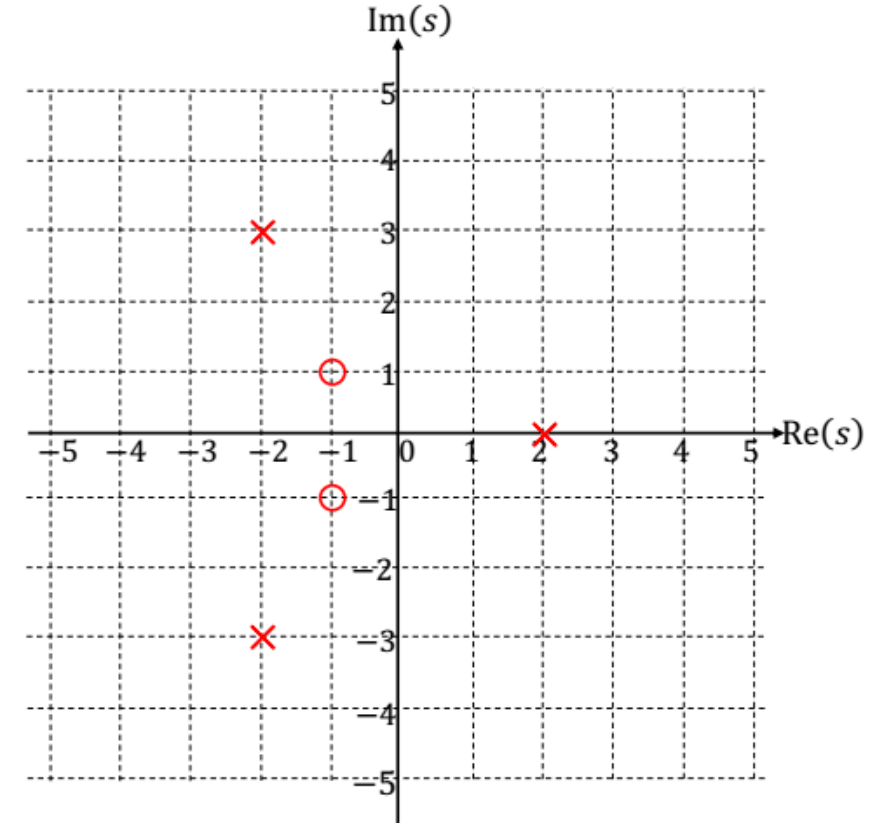
örneğe bakalım:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 4s + 4}{s^3 + 4s^2 + s - 26} = 2 \frac{(s + 1 + j)(s + 1 - j)}{(s - 2)(s + 3 + 2j)(s + 3 - 2j)}$$

$X(s)$ 'in  $s = -1 + j$  ve  $s = -1 - j$ 'de sıfırları,

$s = 2$ ,  $s = -3 + 2j$ 'de ve  $s = -3 - 2j$ 'de kutupları vardır ve

sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



**Tablo Laplace Dönüşümünün Özellikleri**

| Özellik             | $x(t)$                          | $X(s)$                         |
|---------------------|---------------------------------|--------------------------------|
|                     | $x(t)$<br>$x_1(t)$<br>$x_2(t)$  | $X(s)$<br>$X_1(s)$<br>$X_2(s)$ |
| Doğrusallık         | $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$         | $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$        |
| Zamanda Öteleme     | $x(t - t_0)$                    | $e^{-st_0}X(s)$                |
| s-domeninde Öteleme | $e^{s_0t}x(t)$                  | $X(s - s_0)$                   |
| Zamanda Ölçekleme   | $x(at)$                         | $X\left(\frac{s}{a}\right)$    |
| Zamanda Geri Dönüş  | $x(-t)$                         | $X(-s)$                        |
| Zamanda Türev       | $\frac{d}{dt}x(t)$              | $sX(s)$                        |
| s-domeninde Türev   | $-tx(t)$                        | $\frac{d}{ds}X(s)$             |
| Türev               | $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ | $\frac{1}{s}X(s)$              |
| Konvolüsyon         | $x_1(t) * x_2(t)$               | $X_1(s)X_2(s)$                 |

**Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri**

| $x(t)$                   | $X(s)$                        |
|--------------------------|-------------------------------|
| $\delta(t)$              | 1                             |
| $u(t)$                   | $\frac{1}{s}$                 |
| $-u(-t)$                 | $\frac{1}{s}$                 |
| $tu(t)$                  | $\frac{1}{s^2}$               |
| $t^k u(t)$               | $\frac{k!}{s^{k+1}}$          |
| $e^{-at}u(t)$            | $\frac{1}{s+a}$               |
| $-e^{-at}u(-t)$          | $\frac{1}{s+a}$               |
| $te^{-at}u(t)$           | $\frac{1}{(s+a)^2}$           |
| $-te^{-at}u(-t)$         | $\frac{1}{(s+a)^2}$           |
| $\cos(w_0 t)u(t)$        | $\frac{s}{s^2 + w_0^2}$       |
| $\sin(w_0 t)u(t)$        | $\frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$     |
| $e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + w_0^2}$ |
| $e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$ | $\frac{w_0}{(s+a)^2 + w_0^2}$ |

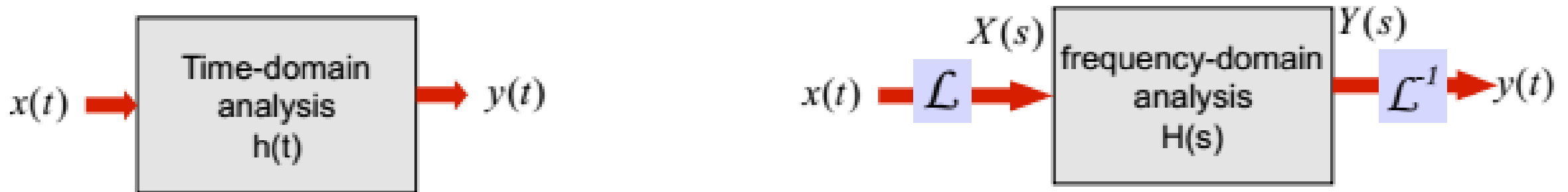
# Ters Laplace Dönüşümü

# Ters Laplace Dönüşümü

$X(s)$  sinyalinden  $x(t)$  sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters Laplace dönüşümü ile sağlanır:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

bu derste ters Laplace dönüşümü almak için kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.



# Bir Örnek

$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3}$ 'in ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle  $X(s)$ 'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+4}{s^2+4s+3} \\ &= 2 \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} \\ &= \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3} \\ &= \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Laplace Tablosundan



$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$



# Örneğin devamı

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3} \quad \rightarrow$$

Laplace Tablosundan



$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t)$$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri


| $x(t)$                   | $X(s)$                        |
|--------------------------|-------------------------------|
| $\delta(t)$              | 1                             |
| $u(t)$                   | $\frac{1}{s}$                 |
| $-u(-t)$                 | $\frac{1}{s}$                 |
| $tu(t)$                  | $\frac{1}{s^2}$               |
| $t^k u(t)$               | $\frac{k!}{s^{k+1}}$          |
| $e^{-at}u(t)$            | $\frac{1}{s+a}$               |
| $-e^{-at}u(-t)$          | $\frac{1}{s+a}$               |
| $te^{-at}u(t)$           | $\frac{1}{(s+a)^2}$           |
| $-te^{-at}u(-t)$         | $\frac{1}{(s+a)^2}$           |
| $\cos(w_0 t)u(t)$        | $\frac{s}{s^2 + w_0^2}$       |
| $\sin(w_0 t)u(t)$        | $\frac{w_0}{s^2 + w_0^2}$     |
| $e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + w_0^2}$ |
| $e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$ | $\frac{w_0}{(s+a)^2 + w_0^2}$ |

**Örnek:**  $X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}$ 'in ters Laplace dönüşümünü bulalım.

Öncelikle  $X(s)$ 'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{s^2 + 2s + 5}{(s + 3)(s + 5)^2} \\ &= \frac{c_1}{s + 3} + \frac{\lambda_1}{s + 5} + \frac{\lambda_2}{(s + 5)^2} \\ &= \frac{2}{s + 3} + \frac{-1}{s + 5} + \frac{-10}{(s + 5)^2} \end{aligned}$$

Şimdi ters dönüşümü bulalım:

Laplace Tablosundan   $x(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t)$

# Örnek

- ◆ Finding inverse Laplace transform of  $\frac{7s-6}{s^2-s-6}$ . (use partial fraction)

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{k_1}{s+2} + \frac{k_2}{s-3}$$

- ◆ To find  $k_1$  which corresponds to the term  $(s+2)$ , cover up  $(s+2)$  in  $X(s)$ , and substitute  $s = -2$  (i.e.  $s+2=0$ ) in the remaining expression:

$$k_1 = \left. \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} \right|_{s=-2} = \frac{-14-6}{-2-3} = 4$$

- ◆ Similarly for  $k_2$ :

$$k_2 = \left. \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} \right|_{s=3} = \frac{21-6}{3+2} = 3$$

- ◆ Therefore

$$X(s) = \frac{7s-6}{(s+2)(s-3)} = \frac{4}{s+2} + \frac{3}{s-3}$$

# Örnek

- ♦ Finding the inverse Laplace transform of  $\frac{2s^2 - 5}{(s+1)(s+2)}$ .
- ♦ The partial fraction of this expression is less straight forward. If the power of numerator polynomial (M) is the same as that of denominator polynomial (N), we need to add the coefficient of the highest power in the numerator to the normal partial fraction form:

$$X(s) = 2 + \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2}$$

- ♦ Solve for  $k_1$  and  $k_2$  via "covering":
$$k_1 = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-1} = \frac{2+5}{-1+2} = 7$$
- ♦ Therefore  $X(s) = 2 + \frac{7}{s+1} - \frac{13}{s+2}$ 
$$k_2 = \frac{2s^2 + 5}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=-2} = \frac{8+5}{-2+1} = -13$$
- ♦ Using pairs 1 & 5:

$$x(t) = 2\delta(t) + (7e^{-t} - 13e^{-2t})u(t)$$

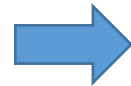
### COMPUTER EXAMPLE C4.1

Using the MATLAB residue command, determine the inverse Laplace transform of each of the following functions

**num = [2 0 5]; den = [1 3 2]; [r, p, k] = residue(num,den)**

a.

$$X_a(s) = \frac{2s^2 + 5}{s^2 + 3s + 2}$$



$$F(s) = \frac{-13}{s+2} + \frac{7}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (-13e^{-2t} + 7e^{-t})u(t) + 2\delta(t)$$

b.

$$X_b(s) = \frac{2s^2 + 7s + 4}{(s+1)(s+2)^2}$$



**num = [2 7 4]; den = [conv([1 1],conv([1 2], [1 2]))]; [r, p, k] = residue(num,den)**

$$F(s) = \frac{3}{s+2} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+1} \quad \text{and} \quad f(t) = (3e^{-2t} + 2te^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

c.

$$X_c(s) = \frac{8s^2 + 21s + 19}{(s+2)(s^2 + s + 7)}$$



**num = [8 21 19]; den = [conv([1 2], ([1 1 7]))]; [r, p, k] = residue(num,den)**

$$F(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{3.5329 e^{-j0.1366}}{s+0.5-j2.5981} + \frac{3.5329 e^{j0.1366}}{s+0.5+j2.5981}$$

$$f(t) = [e^{-2t} + 1.766 e^{-0.5t} \cos(2.5981t - 0.1366)]u(t)$$

# Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

## Lecture 6

### Frequency-domain analysis: Laplace Transform (Lathi 4.1 – 4.2)

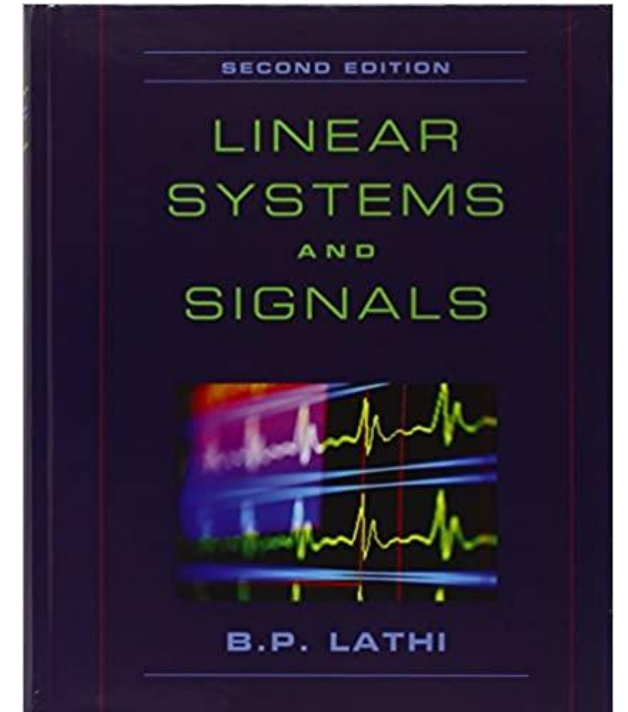
Peter Cheung  
Department of Electrical & Electronic Engineering  
Imperial College London

MIT OpenCourseWare  
<http://ocw.mit.edu>

6.003 Signals and Systems  
Fall 2011

### EEEN343 Sinyaller ve Sistemler Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi  
Pamukkale Üniversitesi  
Mühendislik Fakültesi  
Elektrik-Elektronik Mühendisliği



For information about citing these materials or our Terms of Use, visit: <http://ocw.mit.edu/terms>.