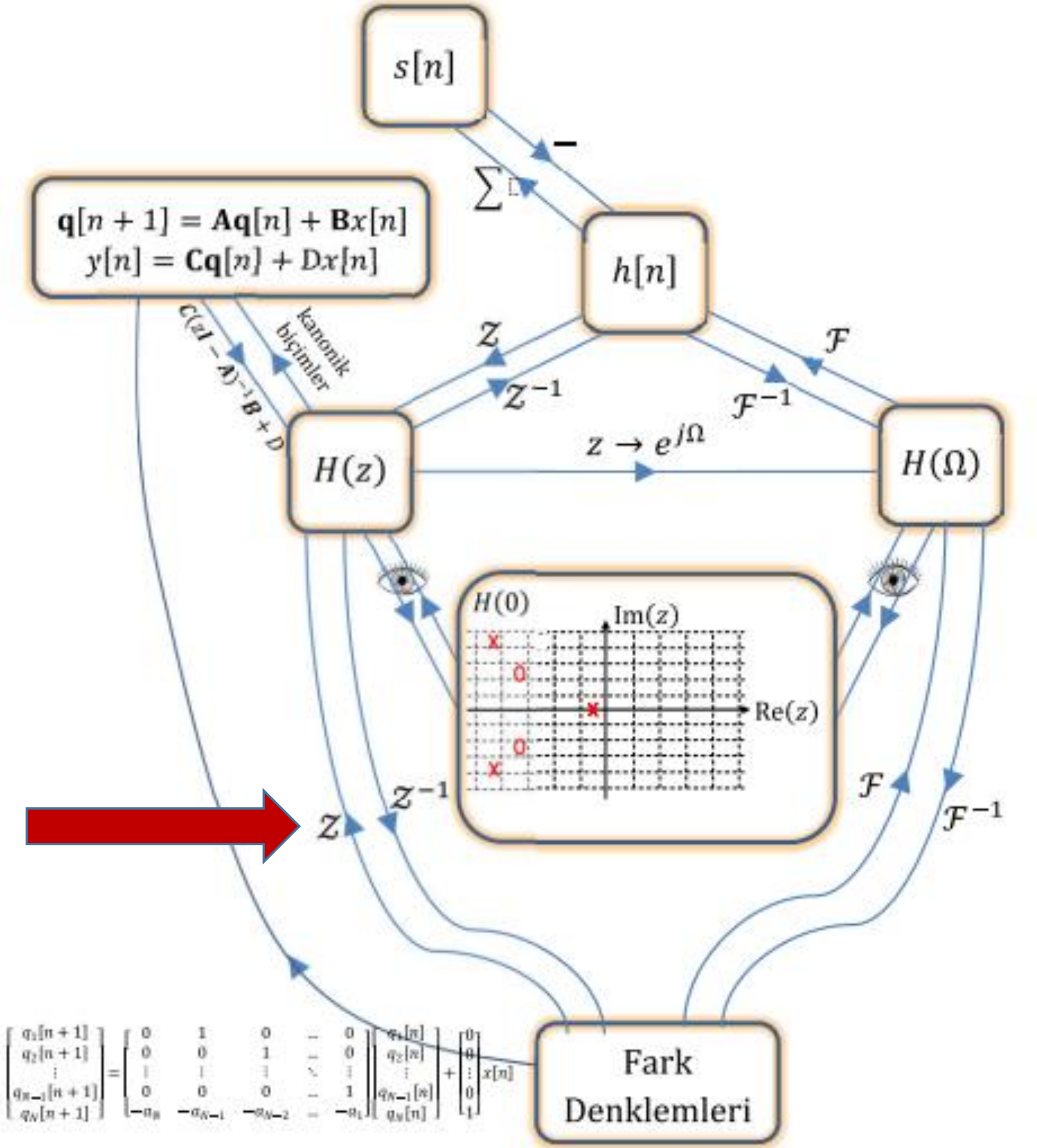
İşaret İşleme

Z Dönüşümü ve Ayrık Zamanlı Sistemler-H10CD1

Dr. Meriç Çetin

versiyon231020

Ayrık-zamanlı sistemlerde giriş-çıkış ilişkileri



EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

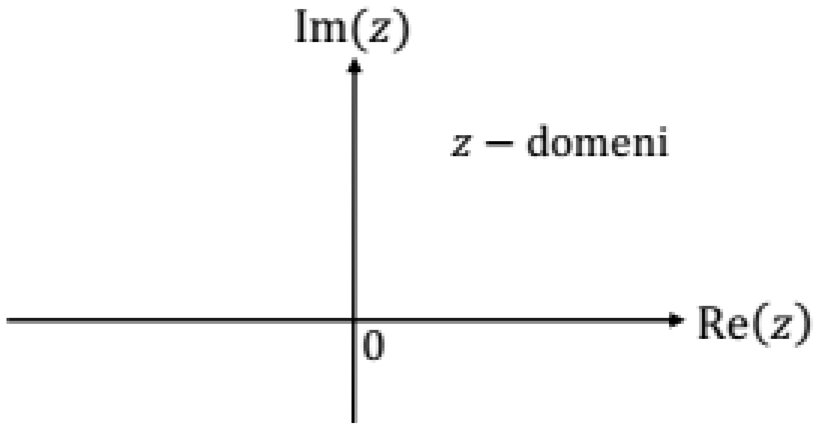
Prof. Dr. Serdar İplikçi

Z Dönüşümünün Tanımı

Ayrık-zamanlı bir $x[n]$ işaretinin z-dönüşümü $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

buradaki z değişkeni $z = re^{j\Omega}$ biçiminde karmaşık bir değişkendir. z-dönüşümünün bulunduğu ortama aşağıda görüldüğü gibi z-*domeni* adı verilmektedir. z-dönüşümü ile ayrık zaman değişkeni olan n-domenindeki bir $x[n]$ sinyali z-domenindeki bir $X(z)$ sinyaline dönüştürülmektedir.



Z Dönüşümü X[z]'in Sıfırları ve Kutupları

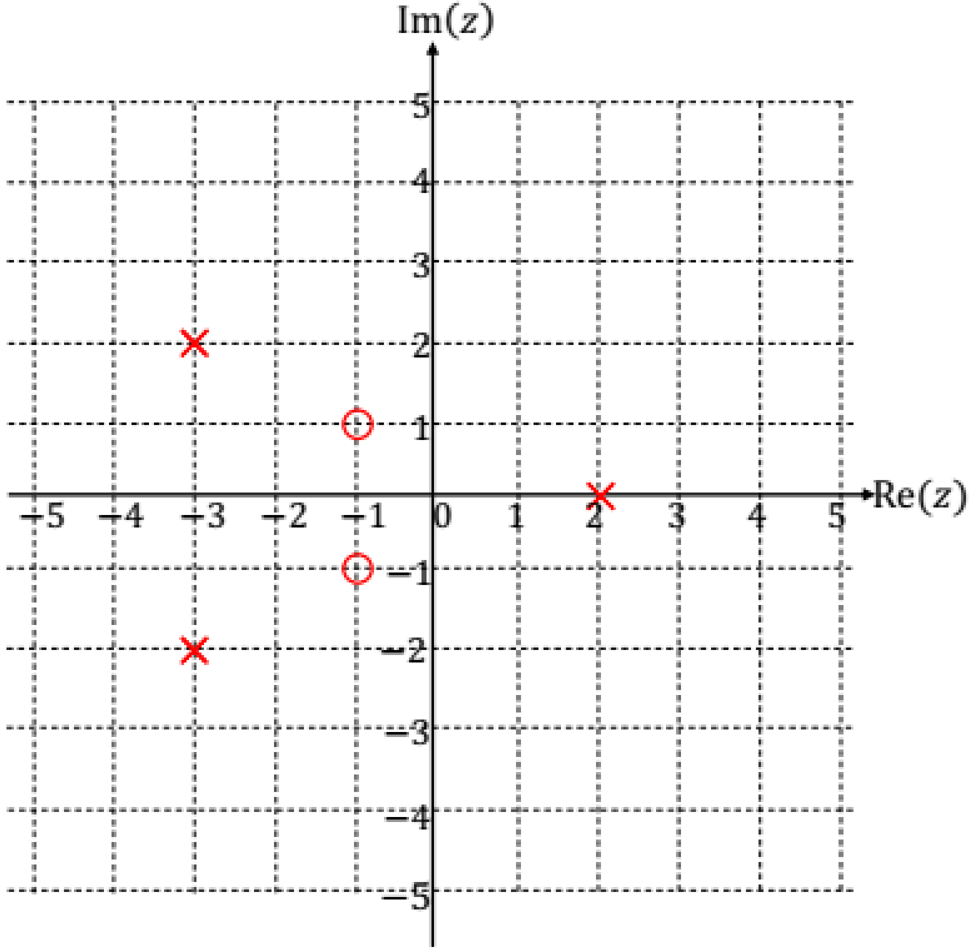
z-dönüşümü olan $X(z)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_{n-1} z + b_n} = \frac{a_0}{b_0} \frac{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_n)}$$

burada a_k ve b_k'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \leq n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k'lara $X(z)$'nin *sıfırları* denmektedir çünkü z'nin bu değerleri için $X(z) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k'lara da $X(z)$'nin *kutupları* denmektedir

$$X(z) = \frac{2z^2 + 4z + 4}{z^3 + 4z^2 + z - 26} = 2\frac{(z+1+j)(z+1-j)}{(z-2)(z+3+2j)(z+3-2j)}$$

$X(z)$'nin $z = -1 + j$ ve $z = -1 - j$'de sıfırları, $z = 2, z = -3 + 2j$'de ve $z = -3 - 2j$'de kutupları vardır ve sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



Tablo z-Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x[n]$	$X(z)$
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Doğrusallık	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Zamanda Öteleme	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$
z_0^n ile Çarpma	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Zamanda Genişletme	$x_{(m)}[n]$	$X(z^m)$
Zamanda Geri Dönüş	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Zamanda Fark	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
n ile Çarpma	$nx[n]$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(z)X_2(z)$

Tablo Bazı z-Dönüşüm Çiftleri

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & \lvert n\rvert \le N \\ 0 & \lvert n\rvert > N \end{cases}$	$\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}$
$e^{\mp j\Omega_0 n} u[n]$	$\frac{z}{z - e^{\mp j\Omega_0}}$
$\cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - \cos(\Omega_0) z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0) z + 1}$
$\sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0) z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0) z + 1}$
$r^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - r\cos(\Omega_0) z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0) z + r^2}$
$r^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{r\sin(\Omega_0) z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0) z + r^2}$

Ters Z Dönüşümü

Ters Z Dönüşümü

$X(z)$ sinyalinden $x[n]$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters z dönüşümü ile sağlanır:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

burada C eğrisi orjini saat yönünün tersinde çevreler. Ancak, bu derste ters z-dönüşümü almak için daha çok aşağıda anlatıldığı gibi kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.

Ters Z Dönüşümü

- Kısmi Kesirlere Açılım

$$X(z) = \frac{a_0}{b_0}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_m)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_t)}$$

burada z_k'lar $X(z)$'in sıfırları, p_k'lar da $X(z)$'in kutuplarıdır ve hepsi tek katlıdır. Ters z-dönüşümünde kolaylık olması açısından $X(z)$ yerine $\frac{X(z)}{z}$ kısmi kesirlere ayrılır:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_t}$$

Bir Örnek

$X(z) = \frac{z}{2z^2-3z+1}$'in ters z-dönüşümünü için $\frac{X(z)}{z}$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$
$$= \frac{1}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$
$$= \frac{c_1}{(z-1)} + \frac{c_2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)} \quad c_1 = \left[(z-1)\frac{X(z)}{z}\right]_{z\to 1} = 1 \quad c_2 = \left[\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{X(z)}{z}\right]_{z\to\frac{1}{2}} = -1$$
$$= \frac{1}{(z-1)} + \frac{-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$

Buradan, $X(z) = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)}$ için ters dönüşümü bulalım:

Z Tablosundan ➡ $x[n] = u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Örnek: $X(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$'in ters z-dönüşümünü bulalım. $\frac{X(z)}{z}$'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \qquad c_1=1$$

$$=\frac{c_1}{(z-1)}+\frac{\lambda_1}{(z-2)}+\frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \qquad \lambda_1=-1$$

$$=\frac{1}{(z-1)}+\frac{-1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-2)^2} \qquad \lambda_2=1$$

Buradan, $X(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{-z}{z-2}+\frac{z}{(z-2)^2}$

Şimdi ters dönüşümü bulalım:

Z Tablosundan ➡ $x[n]=u[n]-2^n u[n]+n2^{n-1}u[n]$

Transfer Fonksiyonu

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Bir önceki bölümde, $h[n]$ darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir $x[n]$ sinyali uygulandığında $y[n]$ çıkışının

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

konvolüsyonu ile bulunabileceği ve bu nedenle de $h[n]$ darbe cevabının sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabileceği ifade edilmişti. z-dönüşümünün özelliklerinden olan

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)X_2(z)$$

şeklindeki konvolüsyon özelliği kullanılırsa,

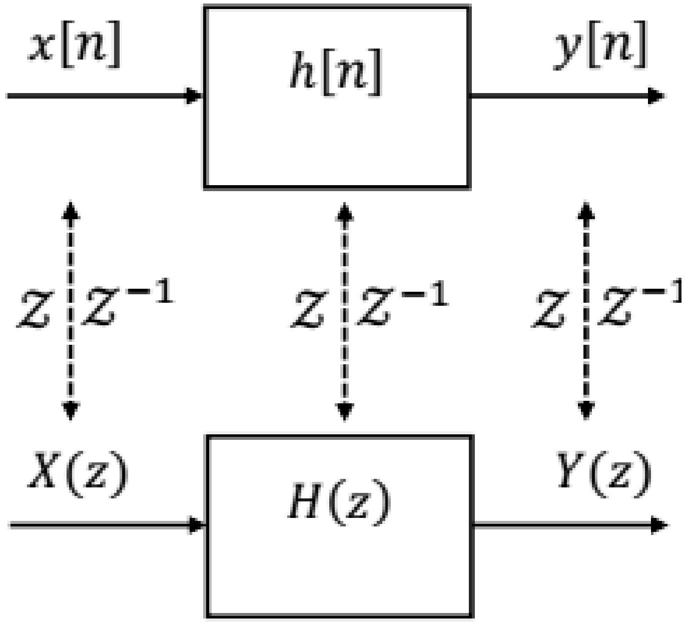
$$y[n] = x[n] * h[n] \leftrightarrow X(z)H(z) = Y(z)$$

ifadesi elde edilir. Burada $X(z)$, $H(z)$ ve $Y(z)$ sırasıyla $x[n]$, $h[n]$ ve $y[n]$'nin z-dönüşümleridir.

Transfer Fonksiyonu Kavramı-devam

Aynı eşitlik $$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

ile ifade edilebilir. $h[n]$'nin z-dönüşümü $H(z)$'ye *transfer fonksiyonu* denir. Artık, darbe cevabı bilinen bir sisteme belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali transfer fonksiyonu yardımıyla bulunabilir. Bu nedenle de DZD bir sistemin transfer fonksiyonu sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabilir. Bunu aşağıdaki şekille görmek mümkündür.



Ayrık zamandan – z domeine geçiş örneği

A system described by a linear difference equation with constant coefficients $\rightarrow$ system function that is a ratio of polynomials in z.

Example:

$$y[n-2]+3y[n-1]+4y[n]=2x[n-2]+7x[n-1]+8x[n]$$

$$H(z)=\frac{2z^{-2}+7z^{-1}+8}{z^{-2}+3z^{-1}+4}=\frac{2+7z+8z^2}{1+3z+4z^2}\equiv\frac{N(z)}{D(z)}$$

Z Dönüşümü ve Fark Denklemleri

Z Dönüşümü ve Fark Denklemleri

Önceki bölümlerden bilindiği gibi, N. mertebeden ayrık-zamanlı DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi, aşağıdaki gibi sabit katsayılı doğrusal bir fark denklemiyle ifade edilebilmektedir:

$$\begin{aligned} a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \cdots + a_N y[n-N] \\ = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] + \cdots + b_M x[n-M] \end{aligned}$$

buradaki a_k ve b_k katsayıları reel ve sabit katsayılardır. Şimdi, giriş-çıkış ilişkisi bu şekildeki bir denklem ile ifade edilen DZD bir sistemin transfer fonksiyonunu bulalım: İlk olarak denklemin her iki tarafının z-dönüşümünü alalım:

$$\begin{aligned} a_0 Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \cdots + a_N z^{-N} Y(z) \\ = b_0 X(z) + b_1 z^{-1} X(z) + b_2 z^{-2} X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z) \end{aligned}$$

Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_N z^{-N}}$$

Örnek

$$x[n] = u[n] \longrightarrow \boxed{y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

Not: Sistemin başlangıç koşulları sıfırdır.

Örnek-devam

$$x[n] = u[n] \longrightarrow \boxed{y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

İlk olarak denklemin her iki tarafının z-dönüşümünü alalım:

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z).$$

Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Giriş sinyalinin z-dönüşümü

$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$$

Örnek-devam

$$x[n] = u[n] \longrightarrow \boxed{y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]} \longrightarrow y[n] = ?$$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$
$$= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \frac{z}{z-1}$$

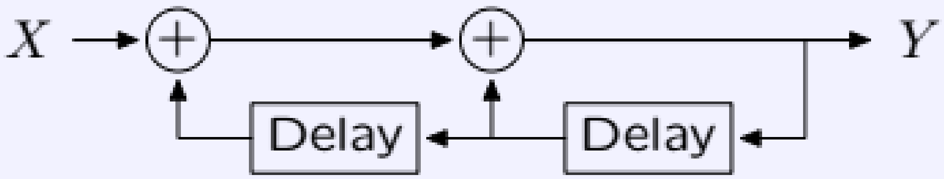
$\frac{Y(z)}{z}$'yi kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} \frac{1}{z-1}$$
$$= \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}} \frac{1}{z-1}$$
$$= \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \frac{1}{(z-1)}$$
$$= -2\frac{1}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{1}{z - \frac{1}{4}} + \frac{8}{3}\frac{1}{z-1}$$

$Y(z)$'nin ters z-dönüşümünü alırsak çıkış sinyali $y[n]$ bulunur:

$$y[n] = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{8}{3}u[n].$$

Block Diagram



System Functional

$$\frac{Y}{X} = \mathcal{H}(\mathcal{R}) = \frac{1}{1 - \mathcal{R} - \mathcal{R}^2}$$

Unit-Sample Response

$$h[n]: \; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \ldots$$

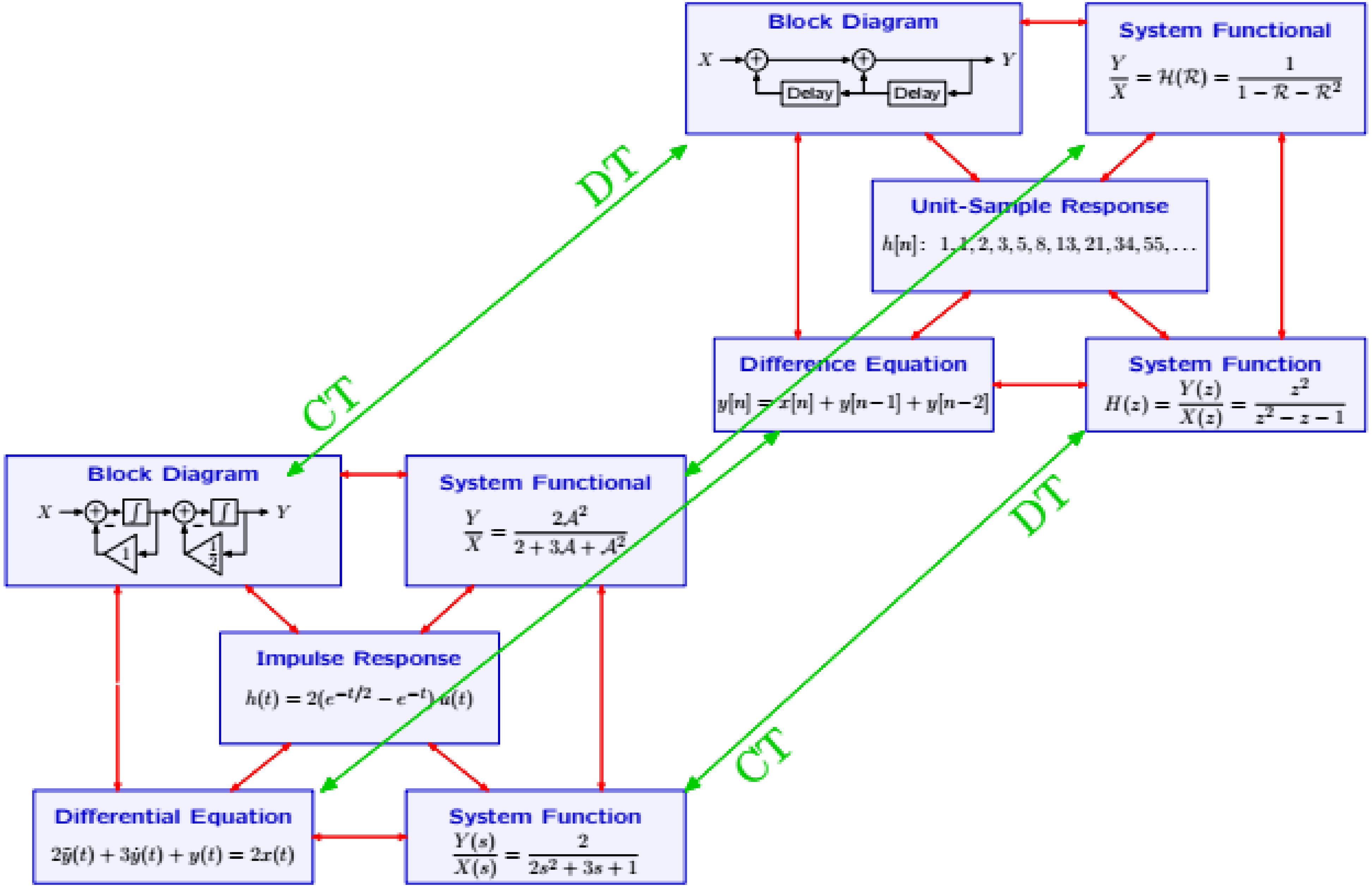
Difference Equation

$$y[n] = x[n] + y[n-1] + y[n-2]$$

System Function

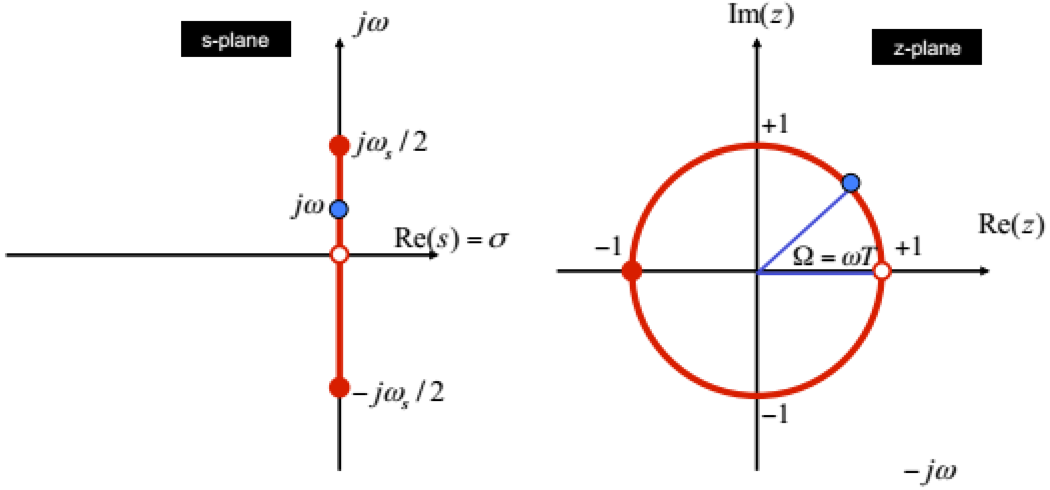
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

Today we will look at relations between CT and DT representations.



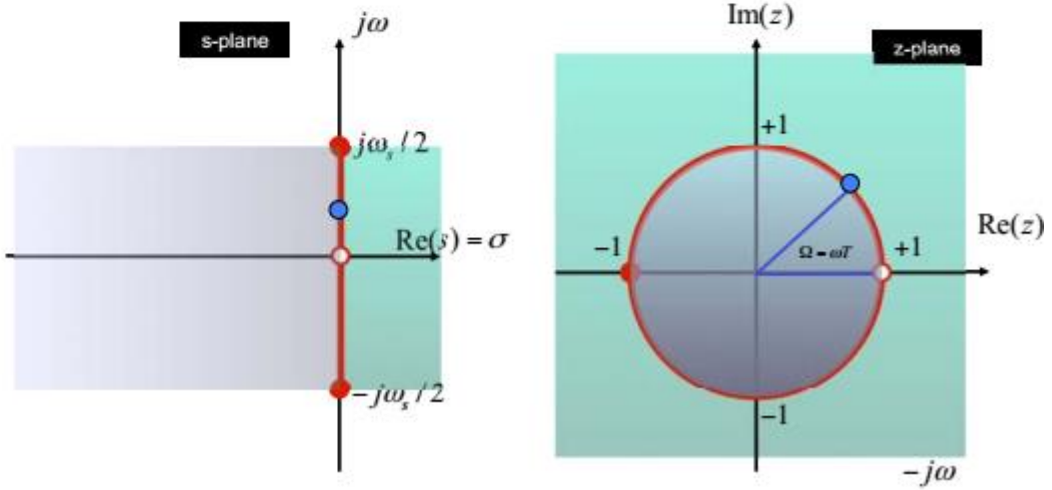
Mapping from s-plane to z-plane

- Since $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$ where T = $2\pi/\omega_s$
  we can map the s-plane to the z-plane as below:



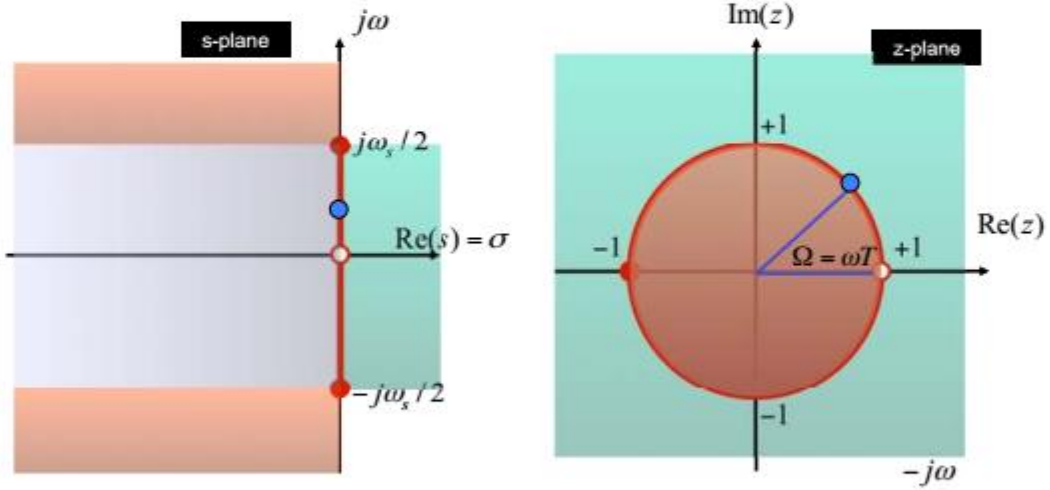
Mapping from s-plane to z-plane

- Since $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$ where T = $2\pi/\omega_s$
  we can map the s-plane to the z-plane as below:



Mapping from s-plane to z-plane

- Since $z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$ where T = $2\pi/\omega_s$
  we can map the s-plane to the z-plane as below:



Laplace Matlab Uygulamaları

Rezidü Bulma

- num = [1 2];
- den = [1 4 3 0];
- [r,p] = residue(num,den)

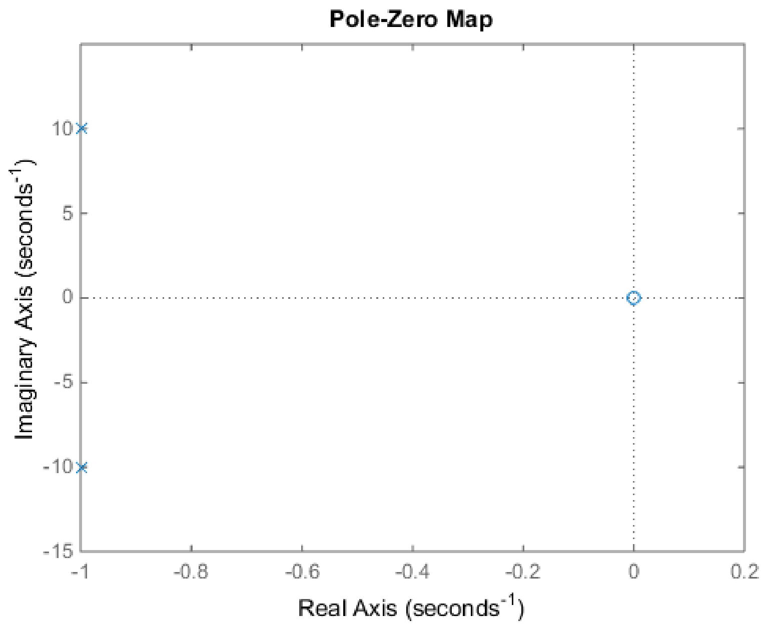
Cevap

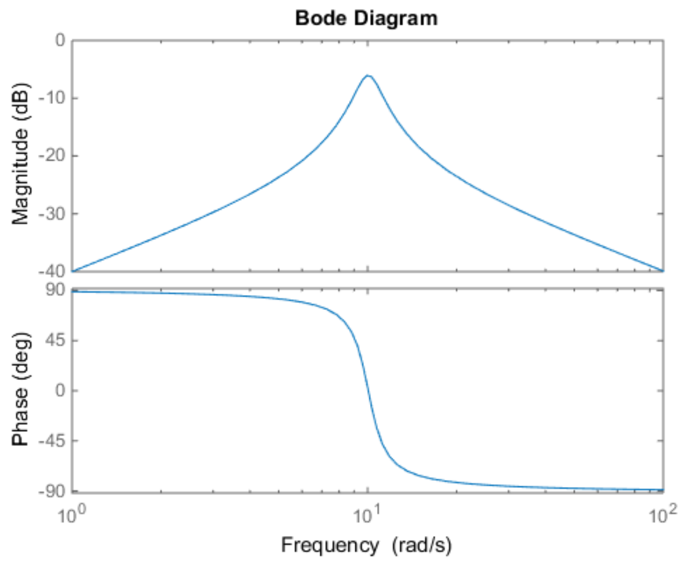
```
r =
  -0.166666666666667
  -0.500000000000000
   0.666666666666667


p =
    -3
    -1
     0
```

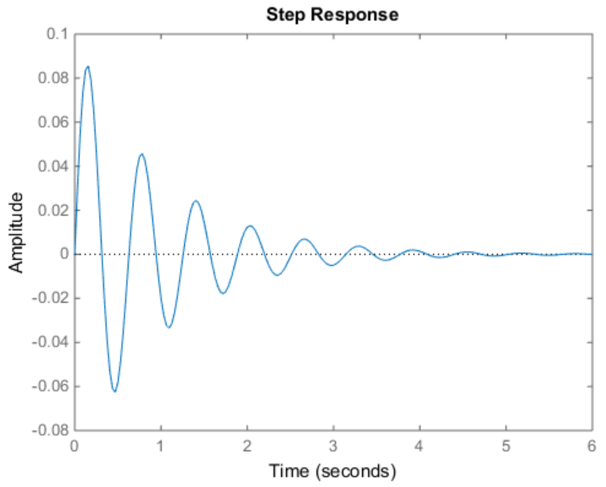
Given a system function

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 101},$$

```
num = [1 0]; %Define numerator polynomial
den = [1 2 101]; %Define denominator polynomial
[r,p] = residue(num,den)
 %% Pole-zero diagram
figure(1) %Create figure 1
pzmap(num,den); %Plot pole-zero diagram in figure 1
%% Bode diagram
figure(2); %Create figure 2
bode(num,den); %Plot the Bode diagram in figure 2
%% Step response
figure(3); %Create figure 3
step(num,den); %Plot the step response in figure 3
```







Laplace & Ters Laplace

```
clc,clear all
% F1(s)'nin rezidülerini hesaplayan residue(a,b) fonksiyonuna örnek
Ns=[3,2] % Pay polinomunun katsayılar vektörü
Ds=[1,3,2] % Payda polinomunun katsayılar vektörü
[r,p,k]=residue(Ns,Ds) %Burada r rezidü vektörü, p kutup vektörü, k direkt terim vektörüdür. F1(s) uygun ras. fonk. ise k vektörü boştur.
pause
%F1(s)'nin ters laplace‘ını hesaplayan ilaplace(f) fonk.una örnek
syms s t; % Sembolik değişkenler tanımlanır.
F1s=(3*s+2)/(s^2+3*s+2)
f1t=ilaplace(F1s);pretty(f1t) %Burada pretty * işaretini göstermeyerek daha sade görünmesini sağlıyor
```

Laplace & Ters Laplace

```
%Öncelikle F2(s)'nin paydasini çarpanlarina ayirmak icin factor(s) fonk.u kullanılır
clc,clear all
syms s t;
factor(s^3+12*s^2+44*s+48)
%f2(t)'nin bulunmasi
pause
syms s t;
F2s=(3*s^2+4*s+5)/(s^3+12*s^2+44*s+48);
f2t=ilaplace(F2s)
```

Laplace & Ters Laplace

```
%Öncelikle F3(s)'nin paydasini çarpanlarina ayirmak icin factor(s) fonk.u kullanılır
clc,clear all
syms s t;
factor(s^3+5*s^2+12*s+8)
%factor(s) fonk.u kuadratik terimi çarpanlara ayiramadigi için roots(p) fonk.u kullanilir.
pause
p=[1 4 8] %Kuadratik terimin katsayilari
roots_p=roots(p)
%f3(t)'nin bulunmasi
syms s t;
F3s=(s+3)/(s^3+5*s^2+12*s+8);
f3t=ilaplace(F3s)
```

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

Lecture 15

Discrete-Time System Analysis using z-Transform
(Lathi 5.1)

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011

EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği