İşaret İşleme
Ayrık Zamanlı Sistemlerde Sıfır Giriş Cevabı-H6CD1

Dr. Meriç Çetin

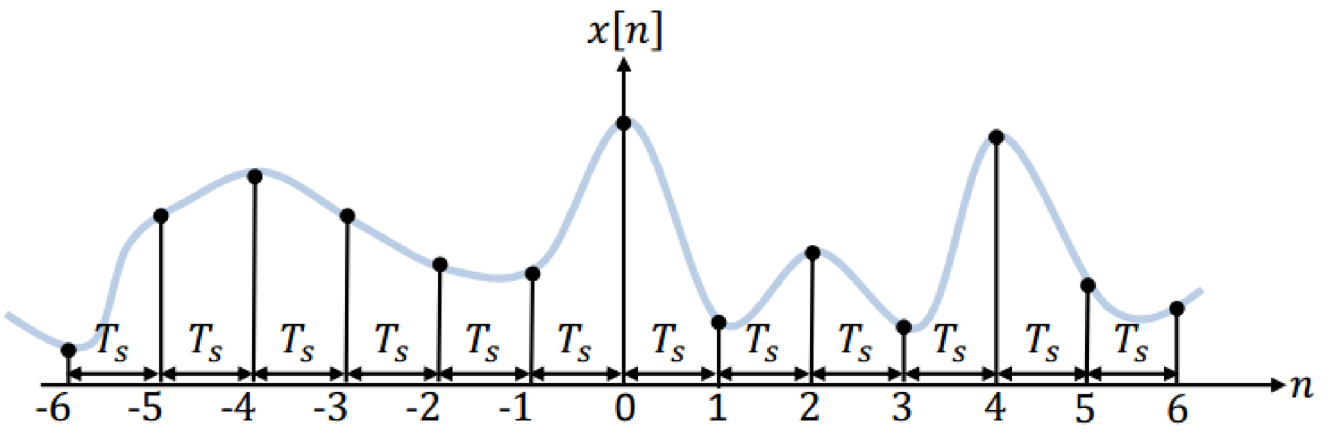
versiyon151020

Ayrık zamanlı sinyaller

- Ayrık zamanlı sinyal temelde bir sayı dizisidir.
- Bu tür sinyaller, nüfus çalışmaları, milli gelir modelleri, radar izleme gibi doğası gereği ayrık zamanlı durumlarda doğal olarak ortaya çıkar.
- Ayrıca, örneklenmiş veri sistemlerinde ve dijital filtrelemede sürekli zamanlı sinyallerin örneklenmesi sonucunda da ortaya çıkabilir.
- Bu tür sinyaller x[n], y[n] vb. ile gösterilebilir, burada değişken n tamsayı değerleri alır ve x[n], x etiketli dizideki n'inci sayıyı gösterir.
- Bu gösterimde, n ayrık zaman değişkeni, t gibi sürekli zaman değişkenini kapatmak için ayırdığımız parantezler yerine köşeli parantezler içine alınmıştır.
- Girişleri ve çıkışları ayrık zamanlı sinyaller olan sistemlere ayrık zamanlı sistemler denir.
- Dijital bir bilgisayar, bu tür sistemlerin örneğidir.
- Ayrık zamanlı bir sistem, çıktı olarak başka bir y[n] dizisi elde etmek için x[n] gibi bir sayı dizisini işler.

• Ayrık Zamanlı Sinyaller:

- Sürekli zamanlı bir x(t) sinyalinin örneklemesi sonucu elde edilen ayrık zamanlı sinyal, aynı zamanda x(nT) olarak ifade edilebilir.
- Burada T, örnekleme aralığıdır ve n, tamsayı değerleri alır.
- Böylece, **x(nT), t = nT'deki x(t)** sinyalinin değerini gösterir.
- Böyle bir sinyal, aynı zamanda, x[n] = x(nT) olan geleneksel ayrık zaman notasyonu x[n] ile gösterilebilir.



Yani, $x_n = x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = x(nT_s)$

T_s örnekleme periyodudur.

Ayrık zamanlı bir sinyalin boyutu

- Ayrık zamanlı bir x[n] sinyalinin boyutu enerji ya da güç ile ölçülebilir.

herhangi bir ayrık-zamanlı $x[n]$ sinyalinin normalize enerjisi

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad \text{ile,}$$

normalize ortalama gücü

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \quad \text{şeklindedir.}$$

EXAMPLE 3.1

Find the energy of the signal $x[n] = n$, shown in Fig. 3.3a and the power for the periodic signal $\gamma[n]$ in Fig. 3.3b.

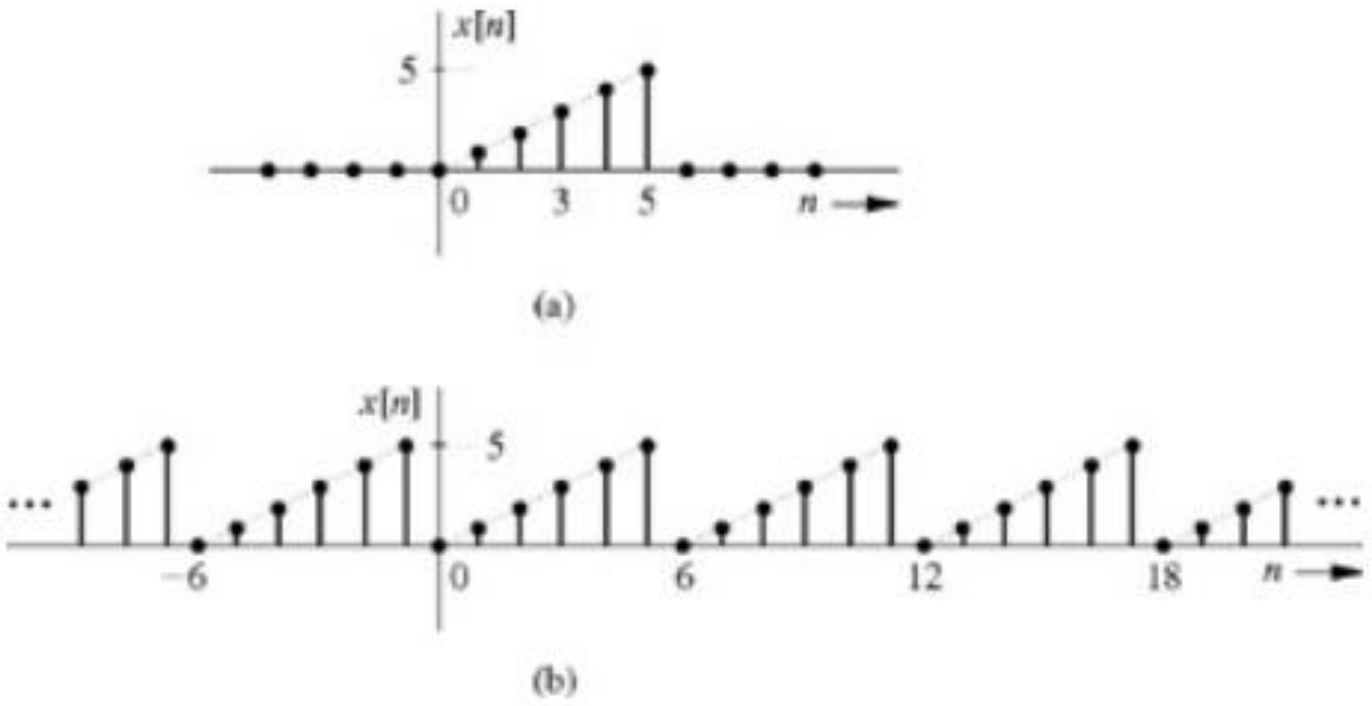
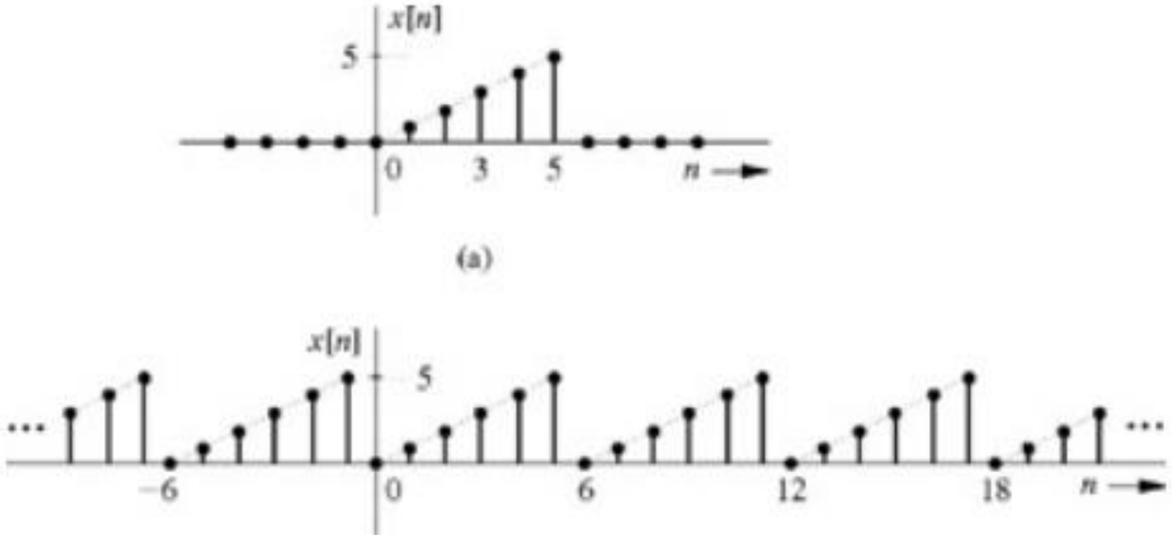


Figure 3.3: (a) Energy and **(b)** power computation for a signal.



By definition

$$E_x = \sum_{n=0}^{5} n^2 = 55$$

A periodic signal $x[n]$ with period N_0 is characterized by the fact that

$$x[n] = x[n + N_0]$$

The smallest value of N_0 for which the preceding equation holds is the *fundamental period*. Such a signal is called N_0 *periodic*. Figure 3.3b shows an example of a periodic signal γ[n] of period N_0 = 6 because each period contains 6 samples. Note that if the first sample is taken at n = 0, the last sample is at $n = N_0 - 1 = 5$, not at $n = N_0 = 6$. Because the signal γ[n] is periodic, its power P_y can be found by averaging its energy over one period. Averaging the energy over one period, we obtain

$$P_y = \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{5} n^2 = \frac{55}{6}$$

Heart Rate from Electrocardiogram Data

```
S = load('noisyecg.mat');
noisyECG = S.noisyECG_withTrend;
plot(noisyECG)
xlabel('milliseconds')
ylabel('millivolts')
```

Bu sinyalin enerji ve gücü nedir?

Ayrık zamanlı sistem denklemleri

- **Fark denklemleri**

- n'inci dereceden bir doğrusal fark denkleminin genel formunu vermeden önce, bir fark denkleminin iki biçimde yazılabileceğini hatırlatalım;
  - ilk olarak, y[n-1], y[n-2], x[n-1], x[n-2] vb. gecikme terimleri kullanılabilir ya da
  - İlerletme/öteleme terimleri kullanır y[n+1], y[n+2] vb.

Fark denklemleri

- Gecikme formu daha doğal olmasına rağmen, sadece genel notasyonel kolaylık için değil, aynı zamanda diferansiyel denklemler için operasyonel formla sonuçlanan notasyonel tekdüzelik için de genellikle ilerletme/öteleme formu tercih ederiz.

$$y[k+n] + a_{n-1}y[k+n-1] + \cdots + a_1 y[k+1] + a_0 y[k] = b_m f[k+m] + b_{m-1} f[k+m-1] + \cdots + b_1 f[k+1] + b_0 f[k]$$

- **Fark denklemlerinin iteratif çözümü**

$$y[k] = -a_{n-1}y[k-1] - a_{n-2}y[k-2] - \cdots - a_0 y[k-n] + b_n f[k] + b_{n-1} f[k-1] + \cdots + b_0 f[k-n]$$

Fark denklemlerinin iteratif çözümüne bir örnek

EXAMPLE 3.8

Solve iteratively

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \qquad (3.18a)$$

with initial condition $y[-1] = 16$ and causal input $x[n] = n^2$ (starting at $n = 0$).

$$y[n] = 0.5y[n-1] + x[n]$$

If we set $n = 0$ in this equation, we obtain

$$y[0] = 0.5y[-1] + x[0]$$

$$= 0.5(16) + 0 = 8$$

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \tag{3.18a}$$

Bir örnek-devam

with initial condition $y[-1] = 16$ and causal input $x[n] = n^2$ (starting at $n = 0$).

Now, setting $n = 1$ in Eq. (3.18b) and using the value $y[0] = 8$ (computed in the first step) and $x[1] = (1)^2 = 1$, we obtain

$$y[1] = 0.5(8) + (1)^2 = 5$$

Next, setting $n = 2$ in Eq. (3.18b) and using the value $y[1] = 5$ (computed in the previous step) and $x[2] = (2)^2$, we obtain

$$y[2] = 0.5(5) + (2)^2 = 6.5$$

Continuing in this way iteratively, we obtain

$$y[3] = 0.5(6.5) + (3)^2 = 12.25$$

$$y[4] = 0.5(12.25) + (4)^2 = 22.125$$

$$\vdots$$

The output $y[n]$ is depicted in Fig. 3.15.

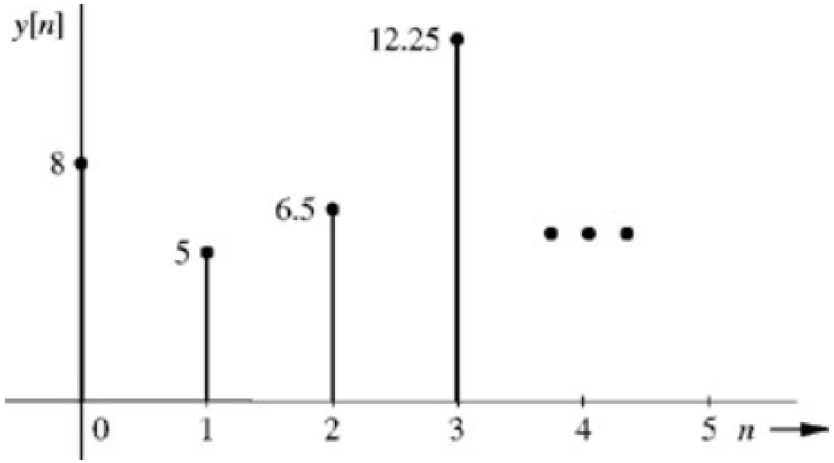


Figure 3.15: Iterative solution of a difference equation.

Fark denklemleri çözümü için notasyon

- Fark denklemlerinde, kompaktlık için diferansiyel denklemlerde kullanılana benzer işlemsel gösterimi kullanmak uygundur.
- **Sürekli zamanlı sistemlerde**, farklılaşma işlemini belirtmek için **D operatörünü** kullanılıyordu.
- **Ayrık zamanlı sistemler** için, bir diziyi bir zaman birimi ile ilerletme işlemini belirtmek için **E operatörünü** kullanacağız.

$$Ef[k] \equiv f[k+1]$$

$$E^2 f[k] \equiv f[k+2]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E^n f[k] \equiv f[k+n]$$

Fark denklemleri çözümü için notasyon örnekleri

$$y[k+1] - ay[k] = f[k+1]$$

Using the operational notation, we can express this equation as

$$Ey[k] - ay[k] = Ef[k]$$

or

$$(E-a)y[k] = Ef[k]$$

$$y[k+2] + \tfrac{1}{4}y[k+1] + \tfrac{1}{16}y[k] = f[k+2]$$

can be expressed in operational notation as

$$\left(E^2 + \tfrac{1}{4}E + \tfrac{1}{16}\right)y[k] = E^2 f[k]$$

A general nth-order difference can be expressed as

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1E + a_0)y[k] =$$
$$(b_nE^n + b_{n-1}E^{n-1} + \cdots + b_1E + b_0)f[k]$$

or

$$Q[E]y[k] = P[E]f[k]$$

where $Q[E]$ and $P[E]$ are nth-order polynomial operators

$$Q[E] = E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1E + a_0$$
$$P[E] = b_nE^n + b_{n-1}E^{n-1} + \cdots + b_1E + b_0$$

Ayrık Zamanlı Sistemlerde

Sıfır Giriş Cevabı

Sıfır Giriş Cevabı

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1E + a_0)y[k] = (b_nE^n + b_{n-1}E^{n-1} + \cdots + b_1E + b_0)f[k]$$

$$Q[E]y[k] = P[E]f[k]$$

The zero-input response $y_0[n]$ is the solution with $x[n] = 0$; that is

$$Q[E]y_0[k] = 0$$

$$(E^n + a_{n-1}E^{n-1} + \cdots + a_1E + a_0)y_0[k] = 0$$

$$y_0[k+n] + a_{n-1}y_0[k+n-1] + \cdots + a_1y_0[k+1] + a_0y_0[k] = 0$$

- Bu tür bir fark denklemini aşağıdaki gibi bir fonksiyonla sistematik olarak çözebiliriz

$$y_0[k] = c\gamma^k$$

Sıfır Giriş Cevabı

$$Ey_0[k] = y_0[k+1] = c\gamma^{k+1}$$
$$E^2 y_0[k] = y_0[k+2] = c\gamma^{k+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E^n y_0[k] = y_0[k+n] = c\gamma^{k+n}$$

$$c(\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + a_1\gamma + a_0)\gamma^k = 0$$

For a nontrivial solution of this equation

$$(\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \cdots + a_1\gamma + a_0) = 0$$

or

$$Q[\gamma] = 0$$

Katsız kök olduğunda;

$Q[\gamma]$ is an nth-order polynomial and can be expressed in the factorized form

$$(\gamma - \gamma_1)(\gamma - \gamma_2)\cdots(\gamma - \gamma_n) = 0$$

the general solution is a linear combination of the n solutions. Thus

$$y_0[k] = c_1\gamma_1^k + c_2\gamma_2^k + \cdots + c_n\gamma_n^k$$

where $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ are the roots of Eq.

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ are arbitrary constants determined from n auxiliary conditions,

EXAMPLE 3.10

a. For an LTID system described by the difference equation

$$y[n+2] - 0.6y[n+1] - 0.16y[n] = 5x[n+2] \qquad (3.38a)$$

find the total response if the initial conditions are $y[-1] = 0$ and $y[-2] = 25/4$, and if the input $x[n] = 4^{-n}u[n]$.

The system equation in operational notation is

$$(E^2 - 0.6E - 0.16)y[n] = 5E^2x[n]$$

The characteristic polynomial is

$$\gamma^2 - 0.6\gamma - 0.16 = (\gamma + 0.2)(\gamma - 0.8)$$

The characteristic equation is

$$(\gamma + 0.2)(\gamma - 0.8) = 0 \tag{3.39}$$

The characteristic roots are $\gamma_1 = -0.2$ and $\gamma_2 = 0.8$. The zero-input response is

$$y_0[n] = c_1(-0.2)^n + c_2(0.8)^n \tag{3.40}$$

To determine arbitrary constants c_1 and c_2, we set $n = -1$ and -2 in Eq. (3.40), then substitute $y_0[-1] = 0$ and $y_0[-2] = 25/4$ to obtain[†]

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -5c_1 + \tfrac{5}{4}c_2 \\ \tfrac{25}{4} &= 25c_1 + \tfrac{25}{16}c_2 \end{aligned}\right\} \implies \begin{aligned} c_1 &= \tfrac{1}{5} \\ c_2 &= \tfrac{4}{5} \end{aligned}$$

Therefore

$$y_0[n] = \tfrac{1}{5}(-0.2)^n + \tfrac{4}{5}(0.8)^n \qquad n \geq 0 \tag{3.41}$$

Katlı kök olduğunda;

In the discussion so far we have assumed the system to have n distinct characteristic roots $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ with corresponding characteristic modes $\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots, \gamma_n^k$. If two or more roots coincide (repeated roots), the form of characteristic modes is modified. Direct substitution shows that if a root γ repeats r times (root of multiplicity r), the characteristic modes corresponding to this root are $\gamma^k, k\gamma^k, k^2\gamma^k, \ldots, k^{r-1}\gamma^k$. Thus, if the characteristic equation of a system is

$$Q[\gamma] = (\gamma - \gamma_1)^r(\gamma - \gamma_{r+1})(\gamma - \gamma_{r+2}) \cdots (\gamma - \gamma_n)$$

the zero-input response of the system is

$$y_0[k] = (c_1 + c_2 k + c_3 k^2 + \cdots + c_r k^{r-1})\gamma_1^k + c_{r+1}\gamma_{r+1}^k + c_{r+2}\gamma_{r+2}^k + \cdots + c_n\gamma_n^k$$

A similar procedure may be followed for repeated roots. For instance, for a system specified by the equation

$$(E^2 + 6E + 9)y[n] = (2E^2 + 6E)x[n]$$

Let us determine $y_0[n]$, the zero-input component of the response if the initial conditions are $y_0[-1] = -1/3$ and $y_0[-2] = -2/9$.

The characteristic polynomial is $\gamma_2 + 6\gamma + 9 = (\gamma + 3)^2$, and we have a repeated characteristic root at $\gamma = -3$. The characteristic modes are $(-3)^n$ and $n(-3)^n$. Hence, the zero-input response is

$$y_0[n] = (c_1 + c_2 n)(-3)^n$$

We can determine the arbitrary constants c_1 and c_2 from the initial conditions following the procedure in part (a). It is left as an exercise for the reader to show that $c_1 = 4$ and $c_2 = 3$ so that

$$y_0[n] = (4 + 3n)(-3)^n$$

Kompleks kök olduğunda;

First we express the complex conjugate roots γ and γ^* in polar form. If $|\gamma|$ is the magnitude and β is the angle of γ, then

$$\gamma = |\gamma|e^{j\beta} \qquad \text{and} \qquad \gamma^* = |\gamma|e^{-j\beta}$$

The zero-input response is given by

$$\begin{aligned} y_0[k] &= c_1\gamma^k + c_2(\gamma^*)^k \\ &= c_1|\gamma|^k e^{j\beta k} + c_2|\gamma|^k e^{-j\beta k} \end{aligned}$$

For a real system, c_1 and c_2 must be conjugates so that $y_0[k]$ is a real function of k. Let

Then $$c_1 = \frac{c}{2}e^{j\theta} \qquad \text{and} \qquad c_2 = \frac{c}{2}e^{-j\theta}$$

$$\begin{aligned} y_0[k] &= \frac{c}{2}|\gamma|^k \left[e^{j(\beta k+\theta)} + e^{-j(\beta k+\theta)}\right] \\ &= c|\gamma|^k \cos(\beta k + \theta) \end{aligned}$$

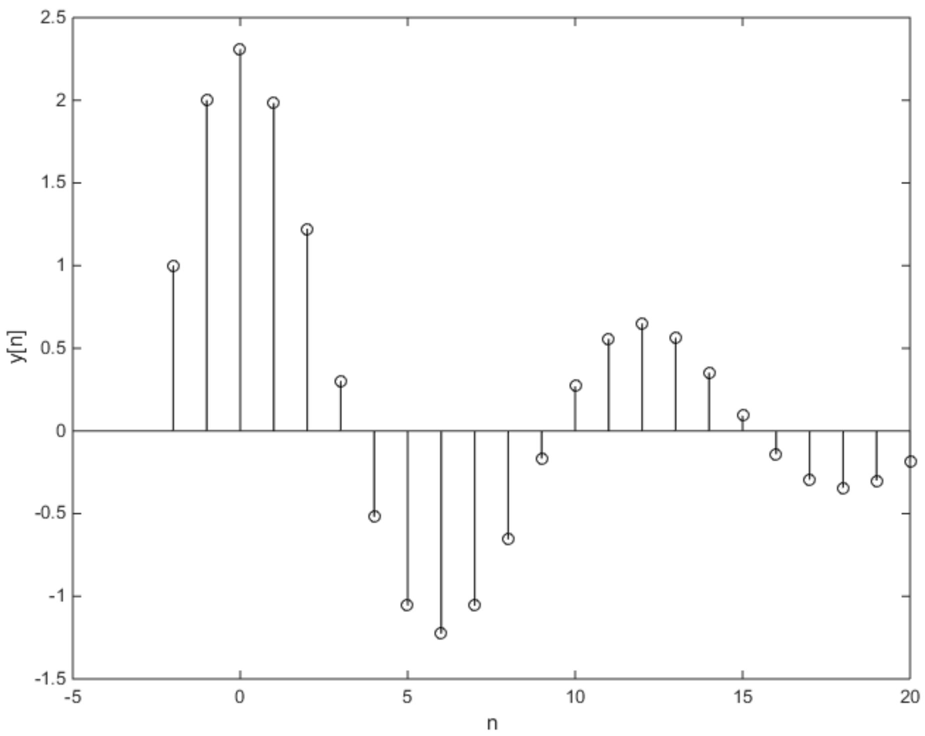
where c and θ are arbitrary constants determined from the auxiliary conditions.

COMPUTER EXAMPLE C3.4

Using the initial conditions $y[-1] = 2$ and $y[-2] = 1$, find and sketch the zero-input response for the system described by $(E^2 - 1.56E + 0.81)y[n] = (E + 3)x[n]$.

```
n = (-2:20)'; y=[1;2;zeros(length(n)-2,1)];
for k = 1:length(n)-2
y(k+2) = 1.56*y(k+1) -0.81*y(k);
end

clf; stem(n,y,'k'); xlabel('n'); ylabel('y[n]');
```



Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar