İşaret İşleme

Laplace Dönüşümü, Transfer Fonksiyonu-H9CD2

Dr. Meriç Çetin

versiyon211020

Transfer Fonksiyonu

Transfer Fonksiyonu Kavramı

Bir önceki bölümde, $h(t)$ darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir $x(t)$ sinyali uygulandığında $y(t)$ çıkışının

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

konvolüsyonu ile bulunabileceği ve bu nedenle de $h(t)$ darbe cevabının sistemin giriş-çıkış ilişkisini ifade etmede kullanılabileceği ifade edilmişti. Laplace dönüşümünün özelliklerinden olan

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s)$$

şeklindeki konvolüsyon özelliği kullanılırsa,

$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) = Y(s)$$

Transfer Fonksiyonu Kavramı-devam

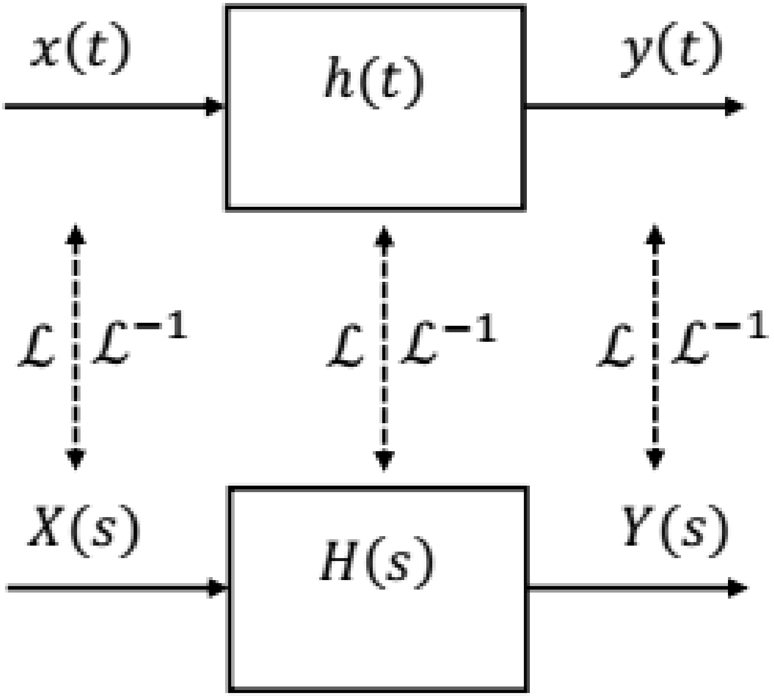
$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) = Y(s)$$

ifadesi elde edilir. Burada $X(s)$, $H(s)$ ve $Y(s)$ sırasıyla $x(t)$, $h(t)$ ve $y(t)$'nin Laplace dönüşümleridir. Aynı eşitlik

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

ile ifade edilebilir. $h(t)$'nin Laplace dönüşümü $H(s)$'ye *transfer fonksiyonu* denir. Artık, darbe cevabı bilinen bir sisteme belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali transfer fonksiyonu yardımıyla bulunabilir.

Transfer Fonksiyonu Kavramı-devam



$$y(t) = x(t) * h(t) \leftrightarrow X(s)H(s) = Y(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Laplace Transformu ve Diferansiyel Denklemler

Tablo Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x(t)$	$X(s)$
	$x(t)$ $x_1(t)$ $x_2(t)$	$X(s)$ $X_1(s)$ $X_2(s)$
Doğrusallık	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$
Zamanda Öteleme	$x(t - t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$
s-domeninde Öteleme	$e^{s_0t}x(t)$	$X(s - s_0)$
Zamanda Ölçekleme	$x(at)$	$X\left(\frac{s}{a}\right)$
Zamanda Geri Dönüş	$x(-t)$	$X(-s)$
Zamanda Türev	$\frac{d}{dt}x(t)$	$sX(s)$
s-domeninde Türev	$-tx(t)$	$\frac{d}{ds}X(s)$
Türev	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$

Tablo Bazı Laplace Dönüşüm Çiftleri

$x(t)$	$X(s)$
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s}{s^2+w_0^2}$
$\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{s^2+w_0^2}$
$e^{-at}\cos(w_0 t)u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+w_0^2}$
$e^{-at}\sin(w_0 t)u(t)$	$\frac{w_0}{(s+a)^2+w_0^2}$

Laplace Transformu ve Diferansiyel Denklemler

Önceki bölümden bilindiği gibi, N. mertebeden sürekli-zamanlı DZD bir sistemin giriş-çıkış ilişkisi, aşağıdaki gibi sabit katsayılı doğrusal diferansiyel denklemle ifade edilebilmektedir:

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \cdots + a_N y^{(N)}(t) = b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \cdots + b_M x^{(M)}(t)$$

buradaki a_k ve b_k katsayıları reel ve sabit katsayılardır. Şimdi, giriş-çıkış ilişkisi bu şekildeki bir denklem ile ifade edilen DZD bir sistemin transfer fonksiyonunu bulalım: İlk olarak denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım:

$$a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 s^2 Y(s) + \cdots + a_N s^N Y(s) = b_0 X(s) + b_1 s X(s) + \cdots + b_M s^M X(s)$$
$$(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N) Y(s) = (b_0 + b_1 s + \cdots + b_M s^M) X(s)$$

Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

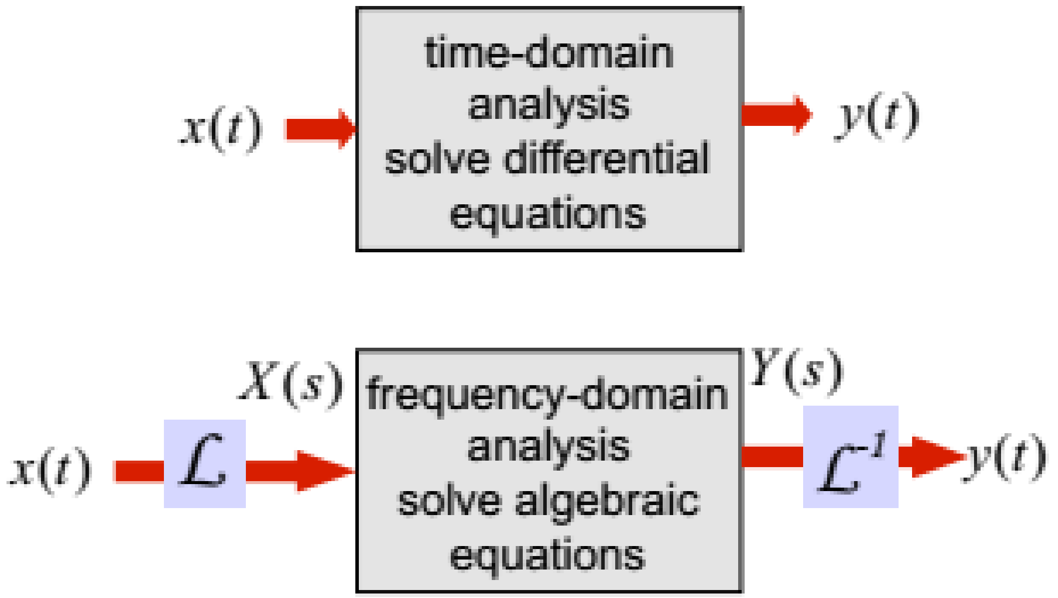
$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \cdots + b_M s^M}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_N s^N}$$

Laplace Transform for Solving Differential Equations

- Remember the time-differentiation property of Laplace Transform

$$\frac{d^k y}{dt^k} \Leftrightarrow s^k Y(s)$$

- Exploit this to solve differential equation as algebraic equations:



L4.3 p371

Örnek

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 1.6\dot{y}(t) + y(t) = 3\ddot{x}(t) + 6.2\dot{x}(t) + 4x(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

Not: Sistemin başlangıç koşulları sıfırdır.

Örnek-devam

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 1.6\dot{y}(t) + y(t) = 3\ddot{x}(t) + 6.2\dot{x}(t) + 4x(t)} \longrightarrow y(t) =?$$

İlk olarak denklemin her iki tarafının Laplace dönüşümünü alalım:

$$s^2Y(s) + 1.6sY(s) + Y(s) = 3s^2X(s) + 6.2sX(s) + 4X(s).$$

Şimdi transfer fonksiyonunu yazabiliriz:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s^2 + 6.2s + 4}{s^2 + 1.6s + 1}$$

Giriş sinyalinin Laplace dönüşümü

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}$$

Örnek-devam

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 1.6\dot{y}(t) + y(t) = 3\ddot{x}(t) + 6.2\dot{x}(t) + 4x(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

çıkışın Laplace dönüşümü şu şekilde bulunur:

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

$$= \frac{3s^2 + 6.2s + 4}{s^2 + 1.6s + 1}\frac{1}{s+1}$$

$Y(s)$'yi kısmi kesirlere ayıralım:

$$= \frac{2}{s+1} + \frac{s+2}{s^2 + 1.6s + 1}$$

$$= \frac{2}{s+1} + \frac{s+2}{(s+0.8)^2 + 0.36}$$

$$= \frac{2}{s+1} + \frac{s+0.8}{(s+0.8)^2 + (0.6)^2} + 2\frac{0.6}{(s+0.8)^2 + (0.6)^2}$$

$Y(s)$'nin ters Laplace dönüşümünü alırsak çıkış sinyali $y(t)$ bulunur:

$$y(t) = 2e^{-t}u(t) + e^{-0.8t}\cos 0.6t\, u(t) + 2e^{-0.8t}\sin 0.6t\, u(t)$$

Başka bir örnek

Örnek: Giriş-çıkış ilişkisi aşağıdaki gibi sabit katsayılı doğrusal bir denklem ile ifade edilen nedensel bir DZD sistemi ele alalım. Sistemin girişinden uygulanan $x(t) = e^{-t}u(t)$ sinyaline karşı sistemin $y(t)$ çıkışını bulunuz. Sistemin başlangıç koşulları $y(0) = 2$ ve $\dot{y}(0) = 1$ şeklindedir.

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

İlk olarak denklemin her iki tarafının tek-yanlı Laplace dönüşümünü alalım:

$$[s^2Y_l(s) - sy(0) - \dot{y}(0)] + 5[sY_l(s) - y(0)] + 6Y_l(s) = X_l(s).$$

$$[s^2Y_l(s) - 2s - 1] + 5[sY_l(s) - 2] + 6Y_l(s) = X_l(s).$$

$x(t) = e^{-t}u(t) \rightarrow$ $\boxed{\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t)}$ $\rightarrow y(t) = ?$

Başka bir örnek-devam

Giriş sinyalinin Laplace dönüşümü

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(s) = \frac{1}{s+1}$$

şeklinde olduğundan,

$$s^2Y_l(s) + 5sY_l(s) + 6Y_l(s) = \frac{1}{s+1} + 2s + 1 + 10$$

yazılabilir, buradan

$$Y_l(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2 + 5s + 6)}$$

elde edilir. $Y_l(s)$'yi kısmi kesirlere ayıralım:

Başka bir örnek-devam

$$x(t) = e^{-t}u(t) \longrightarrow \boxed{\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = x(t)} \longrightarrow y(t) = ?$$

$$Y_l(s) = \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s^2+5s+6)}$$

$$= \frac{2s^2 + 13s + 12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} + 6\frac{1}{s+2} - \frac{9}{2}\frac{1}{s+3}$$

$Y_l(s)$'nin ters Laplace dönüşümünü alırsak çıkış sinyali $y(t)$ bulunur:

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + 6e^{-2t}u(t) - \frac{9}{2}e^{-3t}u(t)$$

■ **Example 6.9**

Solve the second-order linear differential equation

$$\left(D^2 + 5D + 6\right) y(t) = (D+1)f(t) \tag{6.42a}$$

if the initial conditions are $y(0^-) = 2$, $\dot{y}(0^-) = 1$, and the input $f(t) = e^{-4t}u(t)$.

The equation is

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y(t) = \frac{df}{dt} + f(t) \tag{6.42b}$$

Let

$$y(t) \Longleftrightarrow Y(s)$$

Then from Eq. (6.34)

$$\frac{dy}{dt} \Longleftrightarrow sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 2$$

and

$$\frac{d^2y}{dt^2} \Longleftrightarrow s^2Y(s) - sy(0^-) - \dot{y}(0^-) = s^2Y(s) - 2s - 1$$

Moreover, for $f(t) = e^{-4t}u(t)$,

$$F(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \text{and} \quad \frac{df}{dt} \Longleftrightarrow sF(s) - f(0^-) = \frac{s}{s+4} - 0 = \frac{s}{s+4}$$

Taking the Laplace transform of Eq. (6.42b), we obtain

$$\left[s^2Y(s) - 2s - 1\right] + 5\left[sY(s) - 2\right] + 6Y(s) = \frac{s}{s+4} + \frac{1}{s+4} \tag{6.43a}$$

Collecting all the terms of $Y(s)$ and the remaining terms separately on the left-hand side, we obtain

$$\left(s^2 + 5s + 6\right)Y(s) - (2s + 11) = \frac{s+1}{s+4} \tag{6.43b}$$

so that

$$\left(s^2+5s+6\right)Y(s) = \underbrace{(2s+11)}_{\text{initial condition terms}} + \underbrace{\frac{s+1}{s+4}}_{\text{input terms}}$$

Therefore

$$\mathbf{Y}(s) = \underbrace{\frac{2s+11}{s^2+5s+6}}_{\text{zero-input component}} + \underbrace{\frac{s+1}{(s+4)(s^2+5s+6)}}_{\text{zero-state component}}$$

$$= \left[\frac{7}{s+2} - \frac{5}{s+3}\right] + \left[\frac{-1/2}{s+2} + \frac{2}{s+3} - \frac{3/2}{s+4}\right]$$

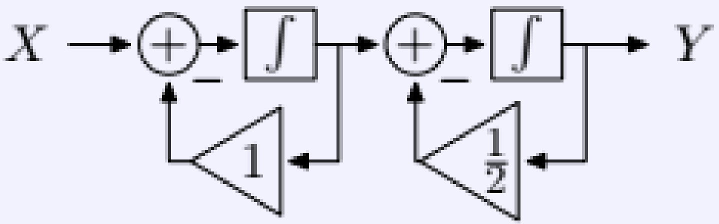
Taking the inverse transform of this equation yields

$$y(t) = \underbrace{\left(7e^{-2t} - 5e^{-3t}\right)u(t)}_{\text{zero-input response}} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \tfrac{3}{2}e^{-4t}\right)u(t)}_{\text{zero-state response}}$$

Özetle;

Summary: Relations among CT representations

Block Diagram



System Functional

$$\frac{Y}{X} = \frac{2\mathcal{A}^2}{2 + 3\mathcal{A} + \mathcal{A}^2}$$

Impulse Response

$$h(t) = 2(e^{-t/2} - e^{-t})\,u(t)$$

Laplace transform

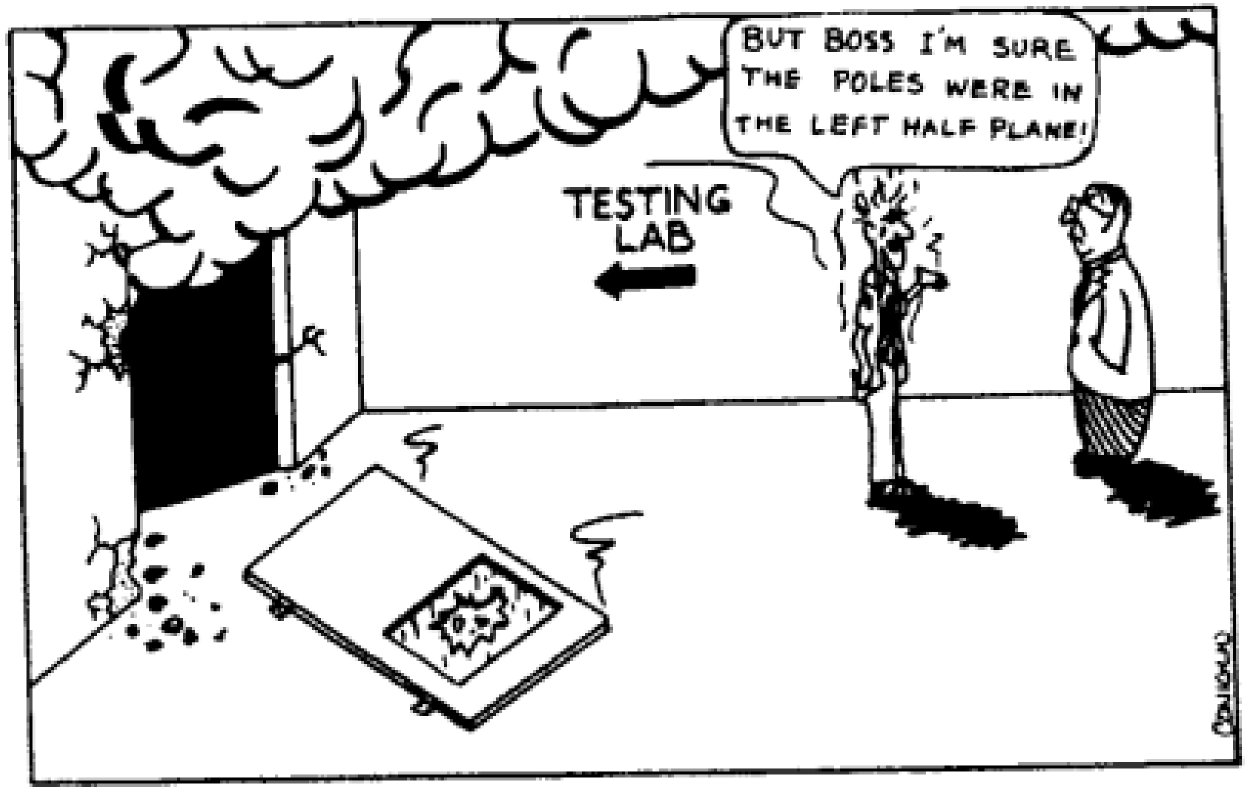
Differential Equation

$$2\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + y(t) = 2x(t)$$

System Function

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{2s^2 + 3s + 1}$$

Kararlılık


BUT BOSS I'M SURE THE POLES WERE IN THE LEFT HALF PLANE!
TESTING LAB

Kararlılık

EXAMPLE 4.14

$$H(s) = \left(\frac{1}{s-1}\right)\left(\frac{s-1}{s+1}\right) = \frac{1}{s+1}$$

The impulse response of the cascade system is $h(t) = e^{-t}u(t)$,

which is absolutely integrable. Consequently, the system is BIBO stable.

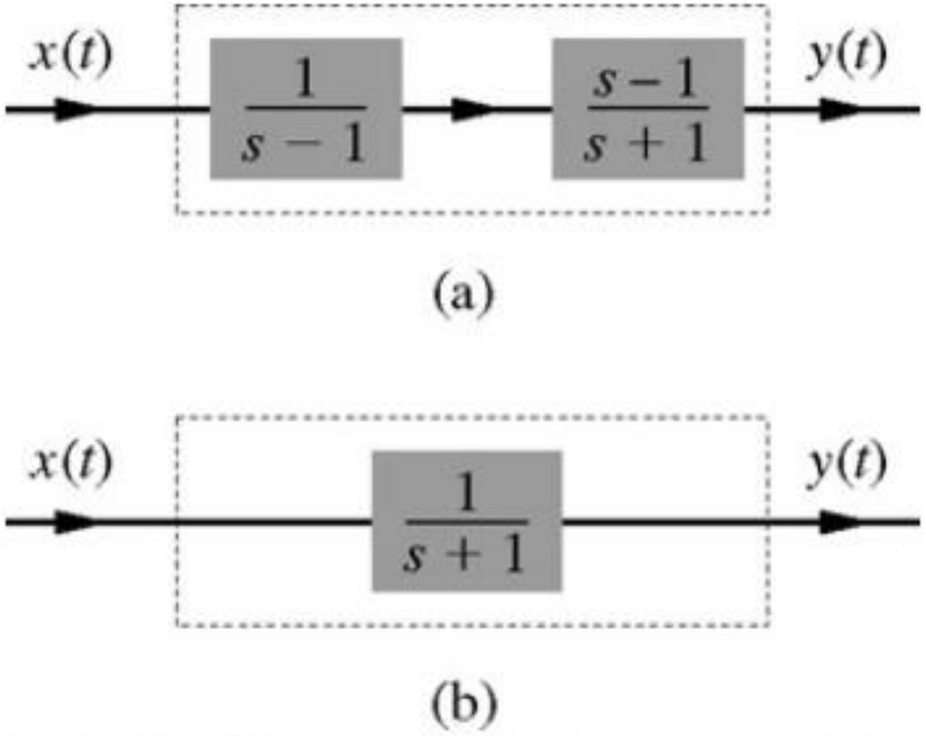


Figure 4.9: Distinction between BIBO and asymptotic stability.

Blok Diyagramlar

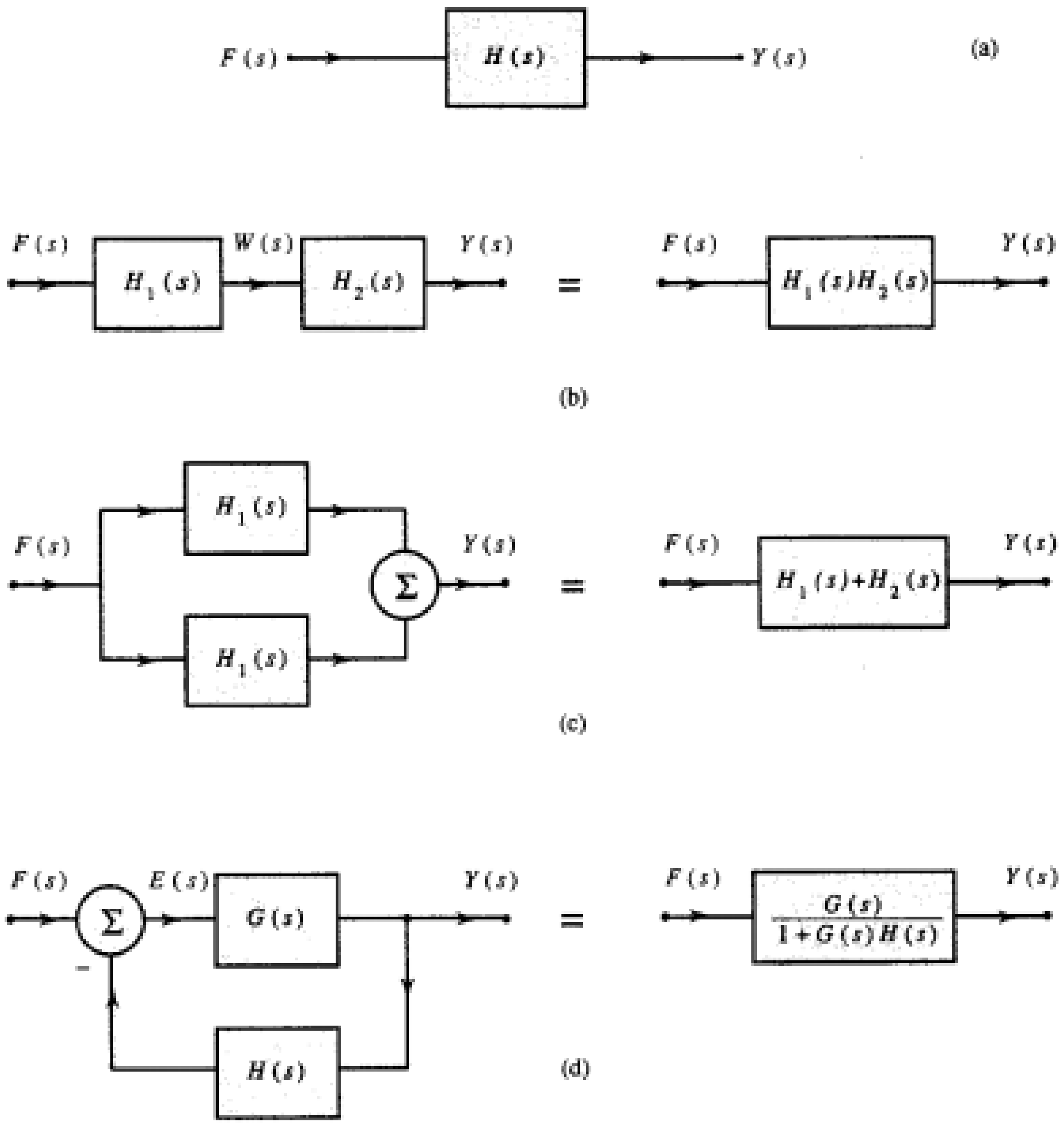


Fig. 6.18 Elementary connections of blocks and their equivalents.

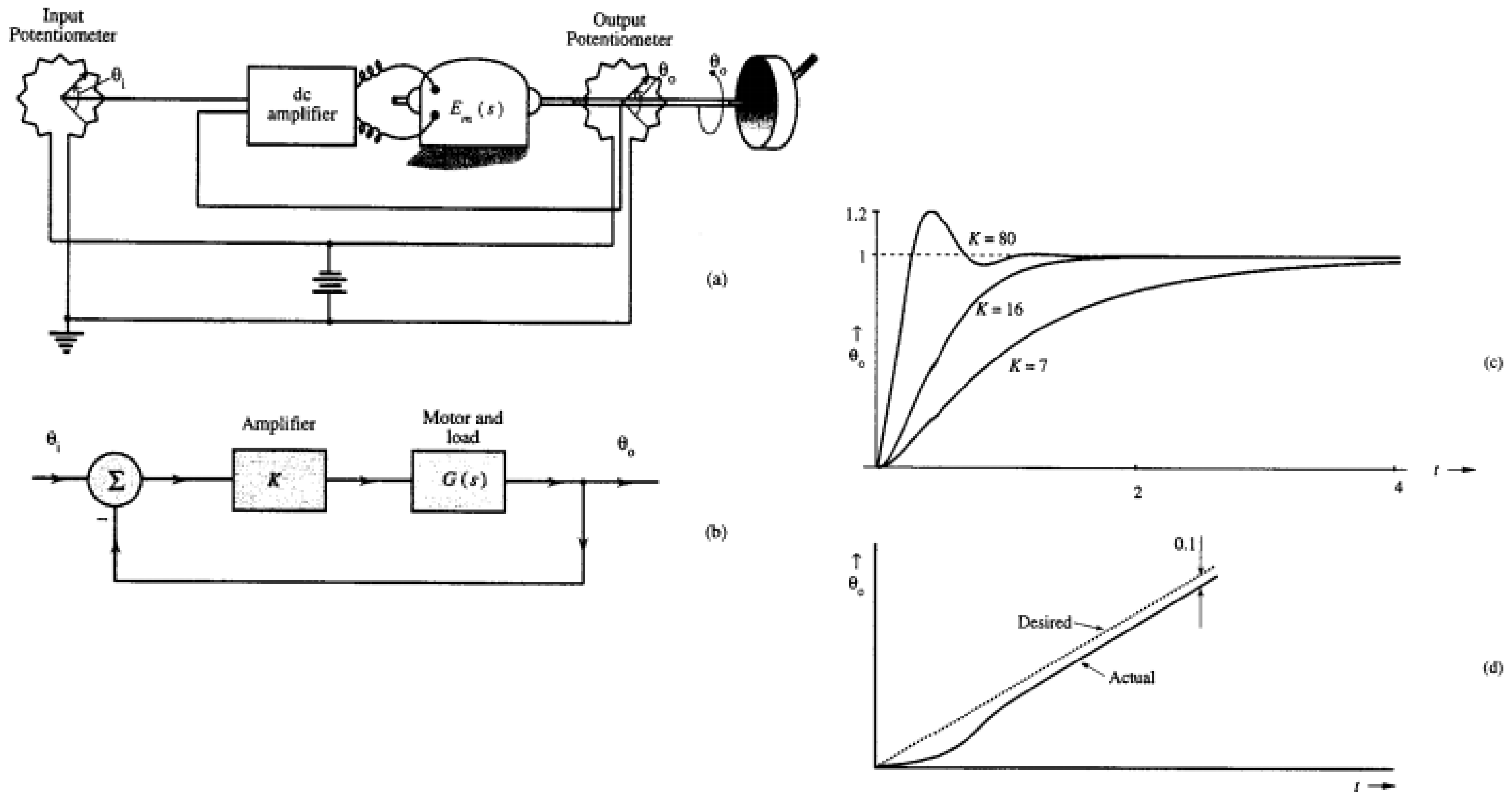


Fig. (a) An automatic position control system (b) its block diagram (c) the unit step response (d) the unit ramp response.

COMPUTER EXAMPLE C4.4

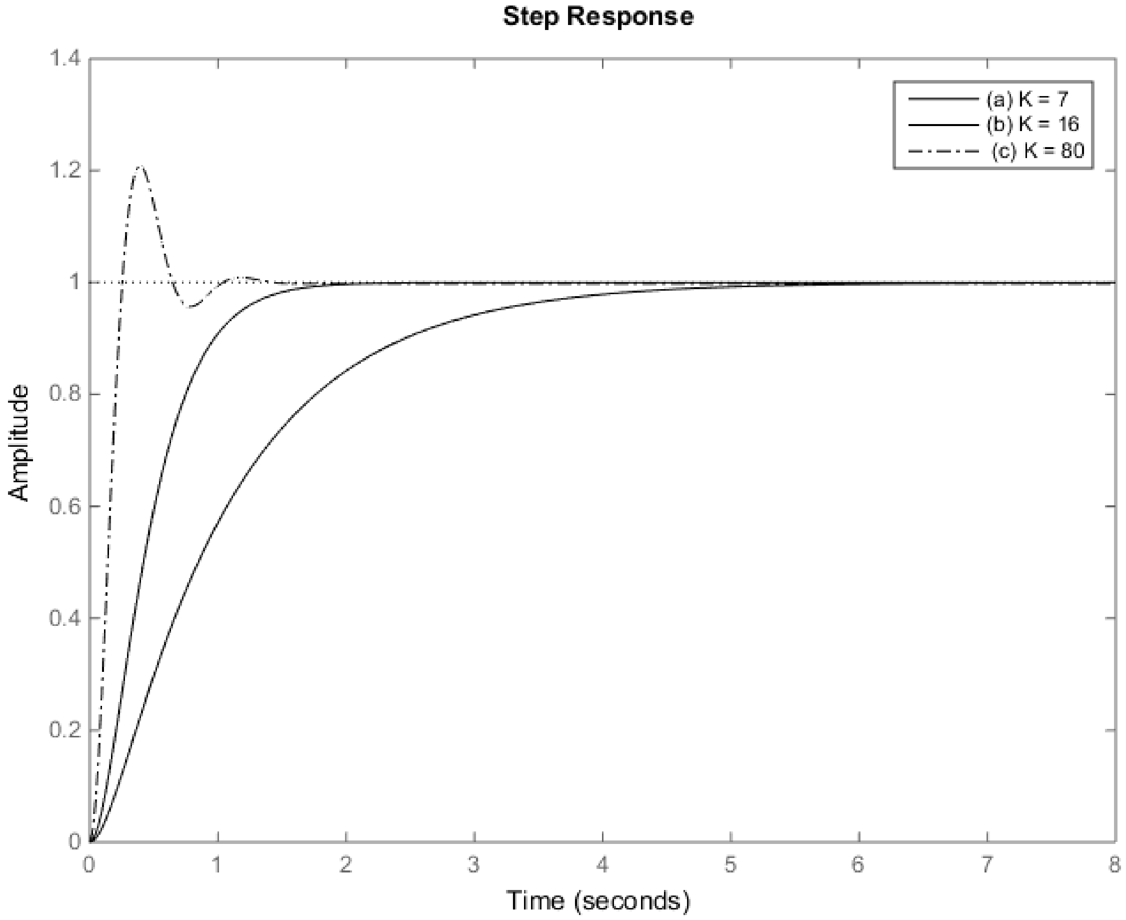
Using the feedback system of Fig. 4.18d with $G(s) = K/(s(s + 8))$ and $H(s) = 1$, determine the step response for each of the following cases:

a. $K = 7$

b. $K = 16$

c. $K = 80$

```
H = tf(1,1); K = 7; G = tf([0 0 K],
conv([0 1 0], [0 1 8]));
TFa = feedback(G, H);
H = tf(1,1); K = 16; G = tf([0 0 K],
conv([0 1 0], [0 1 8]));
TFb = feedback (G,H);
H = tf(1,1); K = 80; G = tf([0 0 K],
conv([0 1 0], [0 1 8]));
TFc = feedback (G,H);
figure(1); clf; step(TFa, 'k-',TFb, 'k
- ',TFc, 'k-. ');
legend( '(a) K = 7 ', '(b) K = 16 ', '
(c) K = 80 ',0);
```



Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

Lecture 6

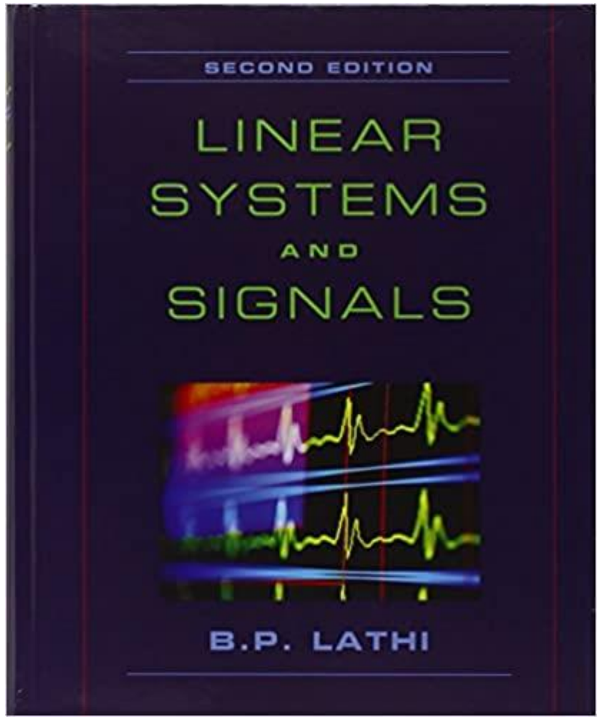
Frequency-domain analysis: Laplace Transform
(Lathi 4.1 – 4.2)

Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

EEEN343 Sinyaller ve Sistemler

Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği



MIT OpenCourseWare
http://ocw.mit.edu

6.003 Signals and Systems
Fall 2011