Chebyshev polynomsal

23.12.2021

(1)

Şimdi de düzlemimizi $-1 \le x_0 < x_1 \dots x_N \le 1$ düğümlerinde (noktalarında) dayalı olarak $f(x)$ fonksiyonunu $[-1,1]$ kapalı aralığında polinom interpolasyonuna çevirelim.

$$f(x) = P_N(x) + E_N(x),$$

burada $E_N(x) = Q(x) \dfrac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}$ ve

$Q(x)$ polinomu $(N+1)$. dereceden polinom;

$$Q(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_1)\dots (x-x_N) \text{ dir.}$$

Bağıntıyı kullanarak

$$|E_N(x)| \le Q(x) \frac{\max\limits_{-1 \le x \le 1} \{|f^{(N+1)}(x)|\}}{(N+1)!},$$

İlk sekiz Chebyshev polinomu Tablo 4.11'de verilmektedir.

Tablo 4.11: $T_0(x) - T_7(x)$ Chebyshev polinomları

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

Chebyshev polinomların Özellikler (2)

Özellik 1: (Rekürsif-Tekrarlama bağıntısı):

Chebyshev polinomları Aşağıdaki gibi Türetilebilir,

$T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$

$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $n = 2, 3, 4, \ldots$

Özellik 2:

$T_N(x)$ polinomunda, $N \geq 1$ için x^N in katsayısı 2^{N-1} dır.

Özellik 3: $N = 2M$ olduğunda, $T_{2M}(x)$ polinomu çift fonksiyondur, Yani

$$T_{2M}(-x) = T_{2M}(x).$$

$N = 2M+1$ iken $T_{2M+1}(x)$ fonksiyonu Tek fonksiyondur, Yani

$$T_{2M+1}(-x) = -T_{2M+1}(x).$$

ÖZELLİK 4. ($[-1,1]$ kare aralığında Trigonometrik gösterim) :

$$T_N(x) = \cos(N \cdot \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Özellik 5: ($[-1,1]$ de farklı sıfırlar): $T_N(x)$ polinomu $[-1,1]$ de N tane farklı x_k sıfıra sahiptir;

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N}\right), \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Bu değerlere Chebyshev apsisleri (düğüm noktaları) denir.

Özellik 6: (Ekstrim Değerler):

$$|T_N(x)| \leq 1 \quad , \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Özellik 1'de $T_0(x)$ ve $T_1(x)$ verilerek diğer polinomlar rahatlıkla elde edilir.

$$\left.\begin{array}{l} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \end{array}\right\} \Rightarrow T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

$$T_2(x) = 2x\,T_{2-1}(x) - T_{2-2}(x) = 2x\,T_1(x) - T_0$$

$$T_2(x) = 2x(x) - 1 = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 2x\,T_{3-1}(x) - T_{3-2}(x) = 2x\,T_2(x) - T_1(x)$$

$$T_3(x) = 2x(2x^2-1) - x = 4x^3 - 2x - x$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Ayrıca $T_n(x) = \cos(n.\arccos x)$, $-1 \leq x \leq 1$

$$T_n(x) = \cos(n.\cos^{-1}(x))$$

n=0 iken

$$T_0(x) = \cos(0.\cos^{-1}(x)) = \cos(0) = 1$$

n=1 iken

$$T_1(x) = \cos(1.\cos^{-1}x) = \cos(\cos^{-1}(x)) = I(x) = x$$

$$T_1(x) = x$$

$\cos^{-1}x = \theta$ ise $x = \cos\theta$

n=2 iken

$$T_2(x) = \cos(2.\cos^{-1}x)$$

$$T_2(x) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = 2x^2 - 1$$

n=3 iken $\qquad \cos^{-1} \cancel{x} = \theta$ $\qquad$ ④

$x = \cos x$

$$T_3(x) = \cos(3 \cdot \cos^{-1} x)$$

$$T_3(x) = \cos(3\theta) = \cos(2\theta + \theta)$$

$$T_3(x) = \cos 2\theta \cdot \cos\theta - \sin 2\theta \cdot \sin\theta$$

$$= (2\cos^2\theta - 1)\cdot\cos\theta - 2\sin\theta\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cdot\sin^2\theta\cdot\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1-\cos^2\theta)\cdot\cos\theta$$

$$= 2\cos^3\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta - \cos\theta$$

$$T_3(x) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Chebyshev polinomları $[-1,1]$ kapalı aralığında geçerlidir. Eğer $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ kapalı aralığında Chebyshev polinomu için aşağıdaki dönüşüm yapılmalıdır

$$x = \left(\frac{b-a}{2}\right)t + \frac{a+b}{2} \quad \text{veya} \quad t = 2\left(\frac{x-a}{b-a}\right) - 1$$

burada $a \le x \le b$ ve $-1 \le t \le 1$.

$[-1,1]$ deki T_{N+1} in Chebyshev düğümleri gereklidir,

$$t_k = \cos\left((2N-1-2k)\frac{\pi}{2N+2}\right), \quad k=0,1,\dots,N$$

ve $[a,b]$ deki interpolasyon düğümleri

$$x_k = t_k\left(\frac{b-a}{2}\right) + \frac{a+b}{2}, \quad k=0,1,\dots,N.$$

Chebyshev interpolasyon polinomu

(5)

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x_k)$$

$$P_N(x) = C_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \dots + C_N T_N(x)$$

Chebyshev interpolasyon polinomu bu şekilde verilebilir. $\{c_k\}$ katsayıları kolayca bulunabilir.

(17) $x_k = \cos\left(\pi \frac{2k+1}{2N+2}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N$

(18) $\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k) * T_j(x_k) = 0, \quad i \neq j$ iken

(19) $\sum_{k=0}^{N} T_i(x_k) * T_j(x_k) = \frac{N+1}{2}, \quad i = j \neq 0$ iken

(20) $\sum_{k=0}^{N} T_0(x_k) * T_0(x_k) = N+1$

denklem (18) ile (20) aşağıdaki özellikle, teoremin ispatında kullanılacaktır.

Teorem 4.8: $f(x)$ fonksiyonunun, $[-1,1]$ kapalı aralığındaki $P_N(x)$ Chebyshev yaklaşık polinomu (N derece $P_N(x) \leq N$), $\{T_j(x)\}$ ler aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$f(x) \simeq P_N(x) = \sum_{j=0}^{N} c_j T_j(x).$$

$\{c_j\}$ katsayıları

(22) $\begin{cases} C_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) * T_0(x_k) \\ C_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) * 1 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) \end{cases}$

(23) $C_j = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) * T_j(x_k) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^{N} f(x_k) \cos\left(\frac{\pi * (2k+1) * j}{2N+2}\right),$

$j = 1, 2, 3, \dots N.$

Örnek: $f(x)=e^x$ fonksiyonunun $[-1,1]$ kapalı aralığında $P_3(x)$ Chebyshev yaklaşık polinomunu bulunuz. (6)

Çözüm: $\{c_j\}$ katsayıları (22) ve (23) nolu formüllerden hesap edilir ve $x_k=\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2N+2}\right)$

$$x_k=\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2\cdot(3)+2}\right)=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right),\quad k=0,1,2,3$$

$$c_0=\frac{1}{\underset{\underset{3}{\|}}{N+1}}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * T_0(x_k)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k}=1.26606568$$

$$c_1=\frac{2}{\underset{\underset{3}{\|}}{N+1}}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * T_1(x_k)=\frac{2}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * x_k=1.13031500$$

$$c_2=\frac{2}{\underset{\underset{3}{\|}}{N+1}}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * T_2(x_k)=\frac{2}{4}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} *$$

$$T_2(x_k)=\cos(2\arccos(x_k))=\cos\left(2*\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2N+2}*\pi\right)\right)\right)$$

$$T_2(x_k)\ \cos\left(2*\pi*\left(\frac{2k+1}{2N+2}\right)\right)\Rightarrow T_2(x_k)=\cos\left(2\pi\left(\frac{2k+1}{8}\right)\right)$$

$$c_2=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * \cos\left(2\pi*\left(\frac{2k+1}{8}\right)\right)=0.27145036$$

$$c_3=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * T_3(x_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} e^{x_k} * \cos\left(3\pi\left(\frac{2k+1}{8}\right)\right)=0.04379392$$

Böylece e^x in $P_3(x)$ chebyshev polinomu:

$$P_3(x)=1.26606568 * T_0(x)+1.130315 * T_1(x)$$
$$=0.27145036 * T_2(x)+0.04379392\ T_3(x)$$

$T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_2(x)=2x^2-1$ ve $T_3(x)=4x^3-3x$ yazılıp düzenlenirse

$$P_3(x)=0.99461532+0.99893224x+0.54290072x^2+0.17517568x^3$$

3. dereceden chebysev polinomu elde edilir.

ÖDEVLER

Aşağıdaki sorularda Chebyshev polinomları bulunuz

1) $f(x) = \sin x$, $[-1,1]$ de

a) $P_3(x) = ?$

b) $|\sin(x) - P_3(x)|$ Hata sınırını bulunuz

2) $f(x) = \ln(x+1)$, $[-1,1]$ de

a) $P_3(x) = ?$

b) $|\ln(x+1) - P_3(x)|$ hata sınırını bulunuz

3) $f(x) = \cos x$, $[-1,1]$ de

a) $P_2(x) = ?$

b) $|\cos x - P_2(x)|$ hata sınırını belirleyiniz

4) $f(x) = e^x$, $[-1,1]$ de

a) $P_2(x) = ?$

b) $|e^x - P_2(x)|$ hata sınırını belirleyiniz.

5) $f(x) = \sin x$, $N=7$ için Chebyshev polinomunu bulunuz.

Cevap: $\sin x \simeq 0.99999998x - 1.16666599x^2 + 0.00832995x^5 - 0.00019297x^7$

6) $f(x) = \cos x$, $N=6$, Chebyshev polinomunu bulunuz

Cevap: $\cos x \cong 1 - 0.49999734x^2 + 0.04164535x^4 - 0.00134608x^6$

7) $f(x) = e^x$, $N=7$, Chebyshev polinomunu bulunuz

Cevap: $e^x \simeq 0.99999980 + 0.99999998x + 0.50000634x^2 + 1.16666737x^3 + 0.04163504x^4 + 0.00833298x^5 + 0.00143925x^6 + 0.00020399x^7$ bulunur.

```
>> syms X
chebyshevT([0,1,2,3,4],x)

ans
[1, X, 2x^2-1, 4x^3-3x, 8x^4-8x^2+1]
```