① Aşağıdakilerden hangisi $f(x)$ fonksiyonunun Taylor serisi DEĞİL DİR?

A) $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\frac{h^3}{3!} + \dots$

B) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-x_0)^3}{3!} + \dots$

C) $f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \dots$

D) $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)x + f''(x_0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{(x-0)^3}{3!}$

② $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x=1$ deki Taylor açılımında x^3 lü terimin başındaki katsayı nedir?

A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

Çözüm:

$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$

$f'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f'(1) = 1$

$f''(x) = -x^{-2} \Rightarrow f''(1) = -1$

$f'''(x) = 2x^{-3} \Rightarrow f'''(1) = 2$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + f''(1)\frac{(x-1)^2}{2!} + f'''(1)\frac{(x-1)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = 0 + 1(x-1) + (-1)\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{2(x-1)^3}{3!} + \dots$$

$$f(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \dots$$

③ $f(x) = \ln x$ fonksiyonunun $x=1$ deki Taylor açılımında ilk dört terimini yazınız.

A) $(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots$

(8) $X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(X_n + \frac{3}{x_n} \right)$ iterasyonu hangisini hesaplar?

A) $\sqrt{3}$

B) $\sqrt{2}$

C) $\sqrt{5}$

D) 3

(9) (n+1) data olan $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$ noktadan kaçıncı dereceden polinom üretilir.

A) n. dereceden !

B) n. dereceden veya n. dereceden az !

C) (n+1). dereceden

D) (n+1). dereceden veya daha fazla

(10) $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, y_2 = f(x_2))$ noktasından geçen Lagrange interpolasyon polinomu?

A) $P(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} f(x_1) + \frac{(x - x_1)}{x_2 - x_1} f(x_2)$

B) $P(x) = \frac{(x_1 - x_2)}{(x - x_2)} f(x_1) + \frac{(x_2 - x_1)}{x - x_1} f(x_2)$

C) $P(x) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} x + \frac{x_1 \cdot f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_1 - x_2}$

D) $P(x) = \frac{x}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x}{x_2 - x_1} f(x_2)$

④ $1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\dots$. a=0 daki açılımı hangi fonksiyona aittir

A) e^x

B) sin x

C) cos x

D) ln(x+1)

⑤ n.ci dereceden polinomun kaç tane sıfırlayanı vardır?

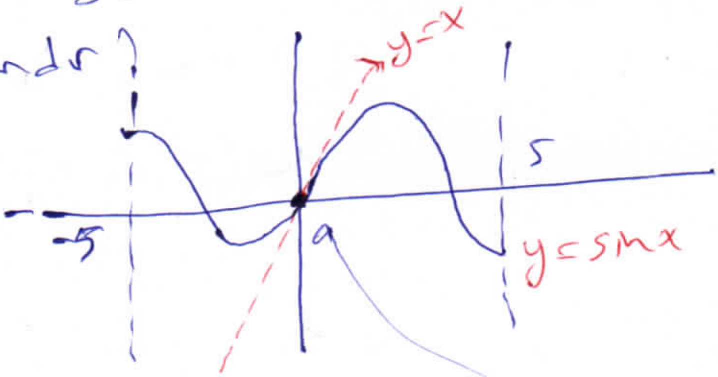
A) n+1

B) n+2

C) n

D) n−1

⑥ sin x − x = 0 denkleminin kaç tane kökü (reel) vardır?



$y=\sin x$

$y=x$

$y=y$

$x=\sin x$

$0=0$

$x=0$

⑦ $x_{n+1}=g(x_n)$ sabit nokta iterasyonu için $g(x)=\frac{x}{3}+\frac{4}{3x}$ ise $f(x)=0$ nedir?

A) $x^2-2=0$

B) $\frac{x}{3}+\frac{4}{3x}=0$

C) $\frac{1}{3}-\frac{4}{3x^2}=0$

D) $x-\frac{1}{3}+\frac{4}{3x^2}$

$x=\frac{x}{3}+\frac{4}{3x}$

$x=\frac{x^2+4}{3x}$

$3x^2=x^2+4$

$2x^2-4=0$

$f(x)=x^2-2=0$

(11) Bir ülkenin Her 5 yıllık nüfüsü veriliyor, 2000 – 2015 arasında

yıl	2000	2005	2010	2015
nufus(milyon)	30.69	32.24	34.01	35.83

$$p(x) = L_0(x)\,30.69 + L_1(x)\,32.24 + L_2(x)\,34.01 + L_3(x)\,35.83$$

ise $L_0(x) = ?$

A) $\dfrac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(2005-2000)(2005-2010)(2005-2015)}$

B) $\dfrac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(2000-2005)(2000-2010)(2000-2015)} = \dfrac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{(-5)(-10)\cdot(-15)} = \dfrac{(x-2005)(x-2010)(x-2015)}{-750}$

B) $\dfrac{(x-2000)(x-2010)(x-2005)}{-50}$

C) $\dfrac{(x-2000)(x-2010)(x-20015)}{-150}$

(12)

x	y		
1	1		
		a	
3	9		c
		b	
4	16		

Bölünmüş farklar tablosunda a, b, c nedir?

A) $a = 4$ $b = 7$ $c = 1$ ✓

B) $a = 8$ $b = 7$ $c = 3$

C) $a = 8$ $b = 4$ $c = 3$

C) $a = 7$ $b = 4$ $c = 3$

D) $a = 7$

$a = \dfrac{9-1}{3-1} = 4$, $b = \dfrac{16-9}{4-3} = 7$ $c = \dfrac{7-4}{4-1} = 1$

(13)

$P_2(x) = a_1 + a_2(x-1)$

x	y			
1	1	4	1	0
3	9	7	1	
4	16	9		
5	25			

$P(x) = 1 + 4(x-1) + 1(x-1)(x-3) + 0\cdot(x-1)(x-3)(x-4)$

(14) $y = \alpha e^{\beta x}$ için $(x_0,y_0),(x_1,y_1)\ldots,(x_m,y_m)$ için en küçük kareler ile

- $\ln y = \ln\alpha + \beta x$
- $\alpha = e^{a_0}$, $\beta = a_1$ ve $y = e^{a_0} e^{a_1 x}$
- $(x_0,\ln y_0),(x_1,\ln y_1),\ldots,(x_m,\ln y_m)$ noktalarına

en küçük kareler ile $a_0 = \ln(\alpha)$, $\beta = a_1$ katsayıları alınır.

(15) $y = \alpha x^{\beta}$, $(x_0,y_0),\ldots,(x_m,y_m)$ noktaları için en küçük kareler için

- $\ln y = \ln\alpha + \beta\ln(x)$
- $a_0 = \ln(\alpha)$, $a_1 = \beta$, $\{(\ln x_0, \ln y_0),\ldots,(\ln x_m, \ln y_m)\}$
- $\alpha = e^{a_0}$, $\beta = a_1$ ve $y = e^{a_0} x^{a_1}$

Nümerik Türev

1.

① $f(x)$ fonksiyon için hangisi nümerik türev?

A) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

B) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x-h) - f(x)}{-h}$

C) $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$

D) Yukarıdakilerin hepsi

② $x_i - x_{i-1} = h$ için $f'(x_i) = ?$

A) $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$

B) $\dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$

C) $\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$

D) hepsi

③ Analiz Temel Teoremi

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, $F'(x) = f(x)$ ve

④ $\int_a^b f(x)\,dx$ in anlamı:

$x=a$ ve $x=b$ arasındaki $y=f(x)$ fonksiyonun altında kalan ALAN.

örnek

$$I = \int_{0.5}^{3.5} x\cdot\sqrt{(16-x^2)^3}\,dx$$ integralini $\Delta x = h = 0.5$ için yamuklar ile yaklaşık hesaplayınız.

Çözüm: $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow 0.5 = \frac{3.5-0.5}{n} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{n} \Rightarrow n = 6$

n	x_n	$f(x_n)$
1	0.5	31.25
2	1.0	58.09
3	1.5	76.48
4	2.0	83.18
5	2.5	76.11
6	3.0	55.56
7	3.5	25.42

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong h\left[\frac{f_0}{2} + f_1 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right]$$

veya

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{2}\left[f_0 + 2f_1 + \dots + 2f_{n-1} + f_n\right]$$

$$I = \frac{0.5}{2}\left[31.25 + 2*(58.09) + \dots + 2*(55.56) + 25.42\right]$$

$$\cong 188.88$$

$$I = \int_{0.5}^{3.5} x\cdot\sqrt{(16-x^2)^3}\,dx$$ integralini $n=6$ için simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle hesaplayınız.

Çözüm: $h = \frac{3.5-0.5}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0.5$

n	1	2	3	4	5	6	7
x	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
f(x)	31.25	58.09	76.48	83.18	76.11	55.56	25.42

$$I = \int_{0.5}^{3.5} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6\right]$$

$$= \frac{0.5}{3}\left[31.25 + 4*58.09 + 2*76.48 + \dots + 4*55.56 + 25.42\right]$$

$$= 191.504$$

Örnek: $I = \int_{0.5}^{3.5} x \cdot \sqrt{(16-x^2)^3}\, dx$ için

$x = \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$ dönüşümü ile

$x = \frac{1}{2}(3)t + \frac{1}{2}(4) = 1.5t + 2$

$dx = 1.5\, dt \Rightarrow$

$$I = \int_{0.5}^{3.5} x\sqrt{(16-x^2)^3}\, dx = \int_{-1}^{1} \left(\frac{3t}{2}+2\right)\sqrt{\left(16-\left(\frac{3t+4}{2}\right)^2\right)^3}\, \frac{3}{2}\, dt$$

$$I = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (1.5t+2)\sqrt{\left(16-(1.5t+2)^2\right)^3}\, dt$$

$$I = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} (1.5t+2)\sqrt{(12-6t-2.25t^2)^3}\, dt$$

x	y	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	2			
		$\rightarrow 5 = \frac{7-2}{1-0} = 5$		
1	7		$\rightarrow \frac{4-5}{2-0} = -\frac{1}{2}$	
		$\rightarrow -4 = \frac{3-7}{2-1} = -4$		
2	3		$\rightarrow \frac{\frac{2}{3}+4}{5-1} =$	
		$\rightarrow \frac{1-3}{5-2} = \frac{-2}{3} = \frac{2}{3}$		
5	1			

① $f(x) = x^4 - 3x + 1$ fonksiyonu için $x_0 = 0$ için Newton-Raphson ile $x_1 = ?$

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) 3 D) -3 E) 0

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = x_0 - \frac{(x_0^4 - 3x_0 + 1)}{(4x_0^3 - 3)}$$

$$x_1 = 0 - \frac{(0 - 0 + 1)}{(0 - 3)} = \frac{1}{3}$$

② $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$ denkleminin kökünü Newton-Raphson ile $x_0 = 2$ ~~ikinci~~ için $x_1 = ?$

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{4}{3}$ C) 1 D) $-\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

$$x_1 = x_0 - \frac{(x_0^3 - x_0^2 + 4x_0 - 4)}{(3x_0^2 - 2x_0 + 4)} = 2 - \frac{8}{12}$$

③
$$-3x_1 + 2x_2 - x_3 = -1$$
$$6x_1 - 6x_2 + 7x_3 = -7$$
$$3x_1 - 4x_2 + 4x_3 = -6$$
$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

④ $\int_{0.5}^{3.5} x\sqrt{(16 - x^2)^3}\, dx$) Gerçek = 191.45

$h = \frac{b-a}{n}$

$1.0 = \frac{3.5 - 0.5}{n}$

$n = 3$

$h = 1.0$

$x = \underline{0.5}, \underline{1.5}, \underline{2.5}, \underline{3.5}$

$= h\left[\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \frac{y_3}{2}\right] = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + y_3\right]$

$= \frac{1}{2}\left[31.25 + 2(76.48) + 2(76.11) + 25.4\right] = 180.92$

örnek: $f(x) = -x^3 - \cos x = 0$ için

$x_0 = -1$ için $x_2 = ?$

$f(x) = -x^3 - \cos x$

$f'(x) = -3x^2 + \sin x$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(-x_n^3 - \cos x_n)}{-3x_n^2 + \sin x_n}$$

$n=0 \Rightarrow$

$$x_1 = x_0 - \frac{(-x_0^3 - \cos x_0)}{-3x_0^2 + \sin x_0} = -1 - \frac{1 - \cos(1)}{-3 + \sin(1)}$$

$$x_1 = -0.787032$$

$n=1 \Rightarrow$

$$x_2 = x_1 - \frac{(-x_1^3 - \cos x_1)}{-3x_1^2 + \sin x_1} = -0.574064$$

I) $f(x)=c$ sabit fonksiyon

II) $f(x)=ax+b$ doğrusal (lineer) fonksiyon

III) $f(x)=ax^2+bx+c$ quadratik fonksiyon

5) Hangisi dikdörtgenler için gerçek sonuç verir?

I

6) Hangisi yamuklar yöntemi için gerçek sonuç verir?

II

7) Hangisi Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemi için TAM sonuç verir?

III

8)

t	2	5	7	9	12
V	12	16	24	15	33

$\int_{t=2}^{12} v(t)\,dt$ integralini Yamuklar yöntemi ile sonuç!

$h=\frac{12-2}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$=h\left[\frac{v_0}{2}+v_1+v_2+v_3+\frac{v_4}{2}\right]$

$=\frac{5}{2}\left[\frac{12}{2}+16+24+15+\frac{33}{2}\right]$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i * y_i$
1	1.1	1	1.1
2	1.8	4	3.6
3	3.3	9	9.3
4	4.6	16	18.4

$n = 4$

$\sum_{i=1}^{4} x_i = 10, \quad \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 30, \quad \sum_{i=1}^{4} y_i = 10.8$

$\sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 33$

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.8 \\ 33 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{4} (p(x_i) - y_i)^2$$

$p(x)$ $a_0 + a_1 x$

Örnekler

1) $f(x) = x^2 - 7$ ifadesinin bir kökünü $x_0 = 3$ başlangıç değeri için Newton-Raphson yöntemiyle 4 ondalıklı olarak hesaplayınız.

2) $x^2 - \sin x - 1 = 0$ denkleminin bir reel kökünü $x_0 = 1.5$ başlangıç değeri için sabit nokta iterasyonu yöntemiyle 4 ondalıklı (4 d.p) bulunuz.

3) $\int_0^{0.8} e^{x^2} dx$ integralini $n = 3$ için;

a) Sağdan dikdörtgenler
b) Soldan dikdörtgenler
c) Ortanokta
d) Yamuklar
e) Simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle

yaklaşık olarak hesaplayınız.

4) $\int_{0.2}^{1.5} e^{x^2} dx$ int. için

n	Simp $\frac{1}{3}$
2	$\to$ 0.65181
4	$\to$ 0.65860
6	$\to$ 0.65878
8	$\to$ 0.65881
10	$\to$ 0.65882

n	Simp $\frac{3}{8}$
3	$\to$ 0.65593
6	$\to$ 0.65872
9	$\to$ 0.65881
12	$\to$ 0.65882

örnek

$$y(x) = 2\int_0^1 e^{\left(\frac{t^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right)} dt$$ ifadesini $x=1$ için

a) $n=10$ için simpson $\frac{1}{3}$ yöntemiyle yaklaşık hesaplayın

çözüm: simp $\frac{1}{3}$ yöntemi

$$\int_a^b f(t)\,dt \approx \frac{h}{3}\left[f_0+4f_1+2f_2+4f_3+2f_4+\dots+4f_{n-1}+f_n\right]$$

$$y(1) = 2\int_0^1 e^{\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\right)} dt$$

$n=10$

$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{10}=0.1$

$t_j = t_0 + j*h$

$$y(1) = 2\int_0^1 e^{t^2/2-\frac{1}{2}} dt = \frac{h}{3}[f(0)+4f(0.1)+2f(0.2)+4f(0.3)$$
$$+2f(0.4)+4f(0.5)+2\cdot f(0.6)+4f(0.7)+2f(0.8)$$
$$+4f(0.9)+f(1.0)]$$

$y(1) = 1.4496$

örnek: $\int_1^5 \frac{\ln x}{x^4} dx$ için

a) integrali $x=\frac{(b-a)t+(a+b)}{2}$, $\Rightarrow dx=\frac{(b-a)}{2}dt$

yöntemiyle $\int_{-1}^1 F(t)\,dt$ ifadesine çeviriniz

$x=\frac{(5-1)t+(5+1)}{2}=2t+3 \Rightarrow dx=2dt$

$$\int_{-1}^1 \frac{\ln x}{x^4} dx = \int_{-1}^1 \frac{\ln(2t+3)}{(2t+3)^4}(2\cdot dt)$$

$$F(t)=\frac{2\ln(2t+3)}{(2t+3)^4}$$

b) $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

ifadesini hesaplayınız

$$\int_{-1}^{1} 2\frac{\ln(2t+3)}{(2t+3)^4}\,dt \approx \frac{5}{9} * 0.1680 + \frac{8}{9} * 0.0271 + \frac{5}{9} * 0.0071$$

$$= \underline{0.1214}$$

Örnek: $y(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right)$ ifadesinde

$x = 2$ için ve $n = 10$ için simp $\frac{1}{3}$ yöntemiyle bulunuz

Çözüm: $y(2) = \tan\left[\frac{\pi}{4} + \int_1^2 \frac{\sin t}{t}\,dt\right]$

$a = 1$

$b = 2$

$n = 10$

$h = \frac{b-a}{10} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$

$$I = \int_1^2 \frac{\sin t}{t}\,dt \cong \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \dots + 4f_9 + f_{10}\right]$$

$$\cong 0.6593$$

$$y(2) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 0.6593\right) = 7.8883$$