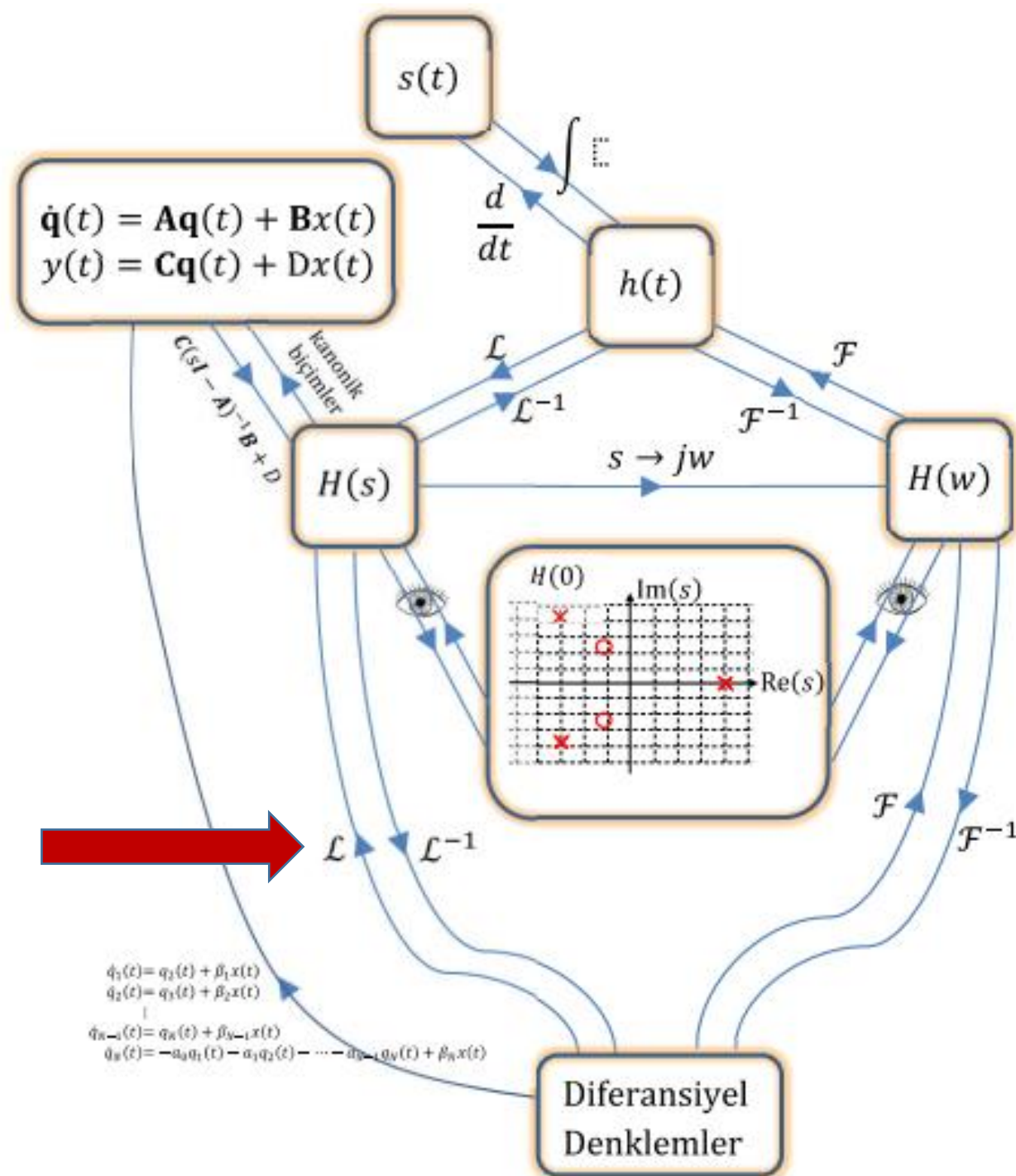


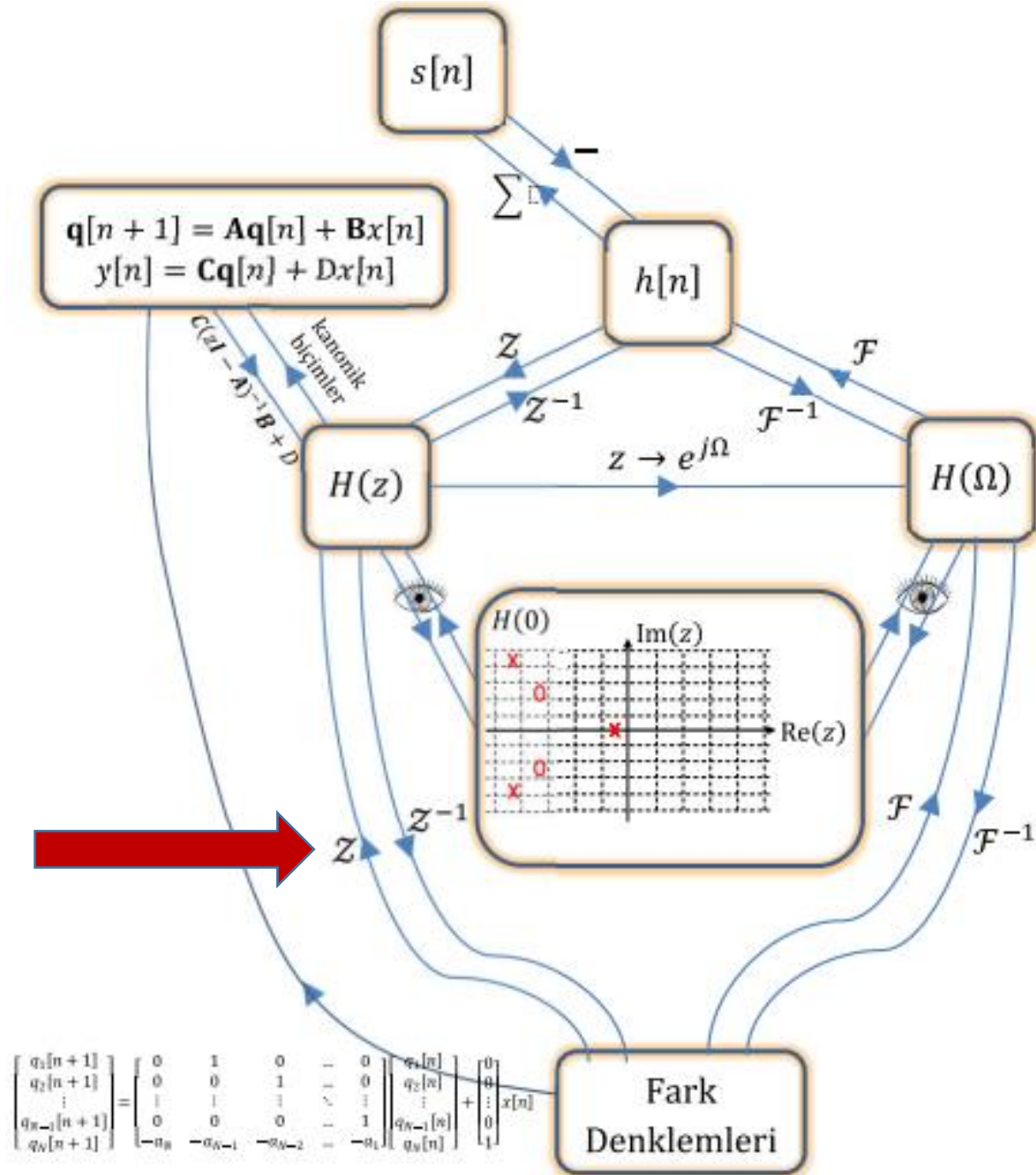
İşaret İşleme

Z Dönüşümü ve Ayırık Zamanlı Sistemler-H9CD3

Dr. Meriç Çetin

versiyon231020





Z Dönüşümü

Giriş

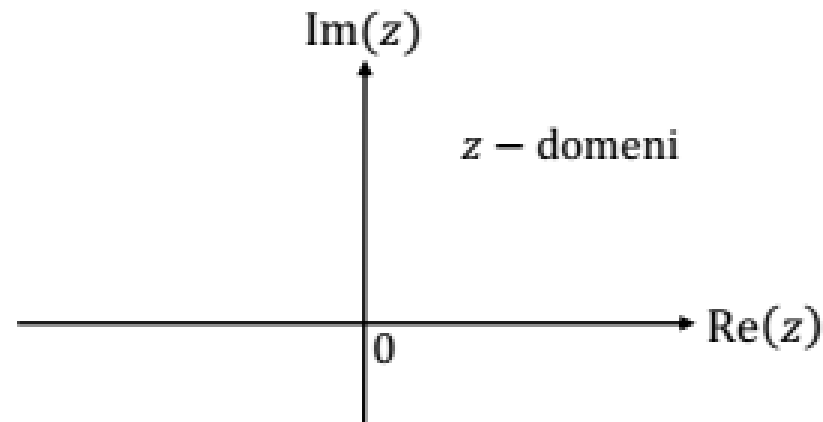
- Önceki bölümde görüldüğü gibi darbe cevabı bilinen bir sistemin girişine belli bir sinyal uygulandığında çıkış sinyali, giriş sinyali ile sistemin darbe cevabının konvolüsyonu ile bulunabilir.
- Ancak, ayrık-zamanlı giriş sinyali ve/veya darbe cevabının analitik veya grafik ifade olarak edilmesi zorlaştıkça bu konvolüsyon hesabı da zorlaşmaktadır.
- Buna alternatif olarak Z-dönüşümü kullanılmaktadır.
- Buna göre, zaman domenindeki sinyaller önce Z-domenine dönüştürülmekte, ardından çıkış sinyalinin bu domendeki büyüklüğü bulunmakta ve son olarak bu büyüklük tekrar zaman domenine dönüştürülmektedir.
- Ayrıca, Z-dönüşümü sayesinde bir DZD sistemin pek çok özelliği de analiz edilebilmektedir.

Z Dönüşümünün Tanımı

Ayrık-zamanlı bir $x[n]$ işaretinin z -dönüşümü $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$ ile gösterilir ve şu şekilde tanımlanır:

$$x[n] \leftrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

buradaki z değişkeni $z = re^{j\Omega}$ biçiminde karmaşık bir değişkendir. z -dönüşümünün bulunduğu ortama aşağıda görüldüğü gibi *z-domeni* adı verilmektedir. z -dönüşümü ile ayrık zaman değişkeni olan n -domenindeki bir $x[n]$ sinyali z -domenindeki bir $X(z)$ sinyaline dönüştürülmektedir.



Bir örnek

$x[n] = a^n u[n]$ sinyalinin z-dönüşümü

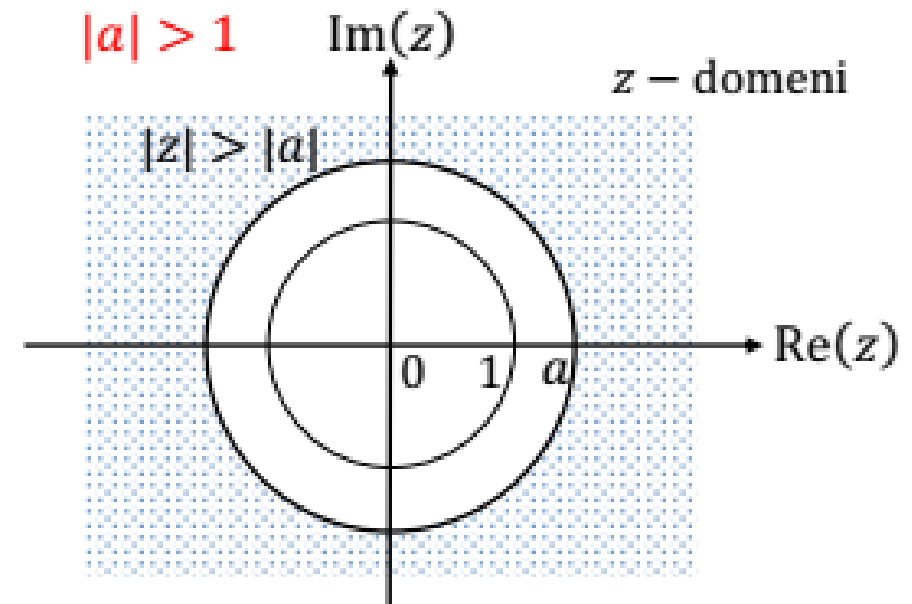
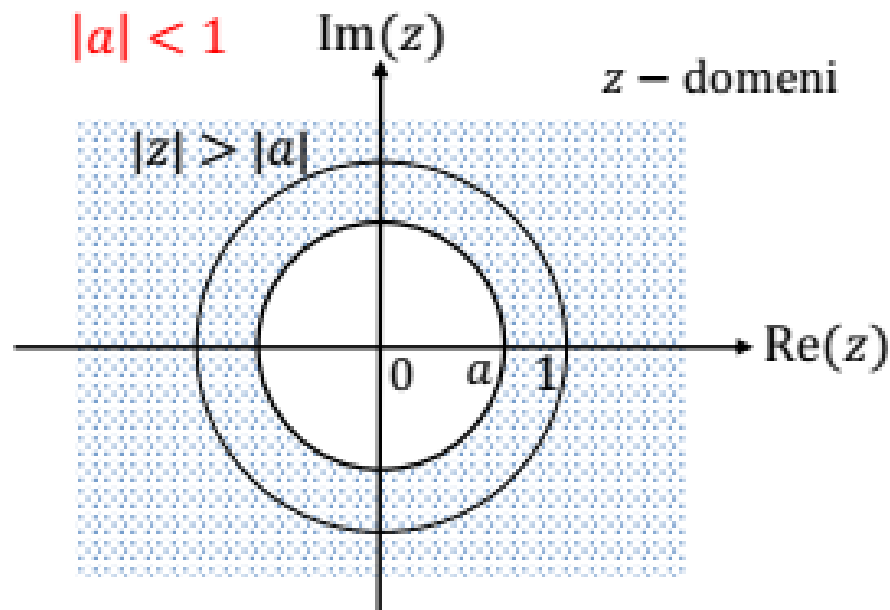


$$\begin{aligned} x[n] = a^n u[n] &\leftrightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n \\ &= \frac{z}{z-a} \quad |z| > |a| \end{aligned}$$

Bir örnek

$$x[n] = a^n u[n] \text{ sinyalinin } z\text{-dönüşümü}$$

Görüldüğü gibi bu toplamın yani z -dönüşümünün mevcut olabilmesi için $|z| > |a|$ şartının sağlanması gerekir. z -domeninde bu şart aşağıdaki gibi bir bölgeye denk düşmektedir ki bu bölgeye yakınsama bölgesi denir.



Z Dönüşümü $X(z)$ 'in Sıfırları ve Kutupları

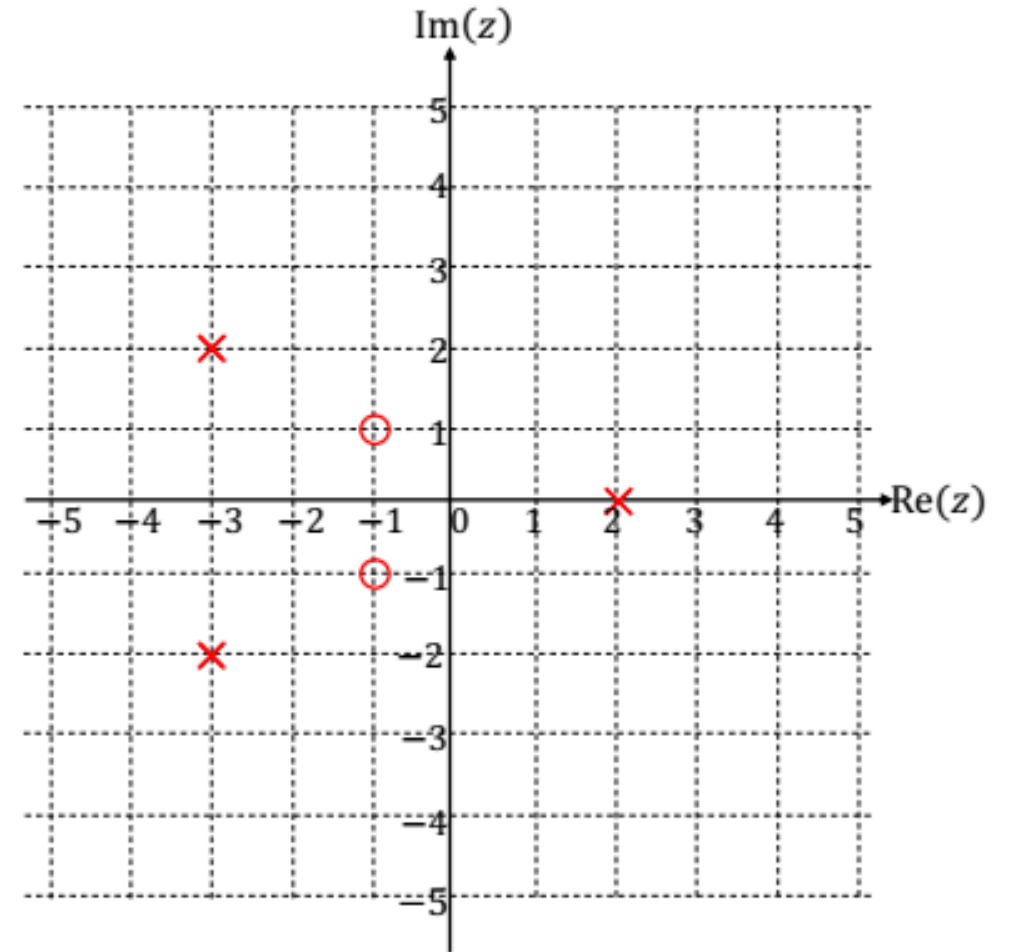
z -dönüşümü olan $X(z)$ en genel halde aşağıdaki gibi iki polinomun oranı şeklindedir:

$$X(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_{m-1} z + a_m}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_{n-1} z + b_n} = \frac{a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{b_0 (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_n)}$$

burada a_k ve b_k 'lar reel sabitler, m ve n ise pozitif tamsayılar olup rasyonel fonksiyonlar için her zaman $m \leq n$ sağlanmaktadır. Pay polinomunun kökleri olan z_k 'lara $X(z)$ 'nin *sıfırları* denmektedir çünkü z 'nin bu değerleri için $X(z) = 0$ olmaktadır. Benzer şekilde, payda polinomunun kökleri olan p_k 'lara da $X(z)$ 'nin *kutupları* denmektedir

$$X(z) = \frac{2z^2 + 4z + 4}{z^3 + 4z^2 + z - 26} = 2 \frac{(z + 1 + j)(z + 1 - j)}{(z - 2)(z + 3 + 2j)(z + 3 - 2j)}$$

$X(z)$ 'nin $z = -1 + j$ ve $z = -1 - j$ 'de sıfırları, $z = 2$, $z = -3 + 2j$ 'de ve $z = -3 - 2j$ 'de kutupları vardır ve sıfır-kutup grafiği şu şekilde gösterilmiştir.



Tablo z-Dönüşümünün Özellikleri

Özellik	$x[n]$	$X(z)$
	$x[n]$ $x_1[n]$ $x_2[n]$	$X(z)$ $X_1(z)$ $X_2(z)$
Doğrusallık	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$
Zamanda Öteleme	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$
z_0^n ile Çarpma	$z_0^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$
Zamanda Genişletme	$x_{(m)}[n]$	$X(z^m)$
Zamanda Geri Dönüş	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Zamanda Fark	$x[n] - x[n - 1]$	$(1 - z^{-1})X(z)$
n ile Çarpma	$nx[n]$	$-z \frac{d}{dz} X(z)$
Konvolüsyon	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(z)X_2(z)$

Tablo · Bazı z-Dönüşüm Çiftleri

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$	$\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}$
$e^{\mp j\Omega_0 n} u[n]$	$\frac{z}{z - e^{\mp j\Omega_0}}$
$\cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - \cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$
$\sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$
$r^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - r\cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$
$r^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{r\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$

Ters Z Dönüşümü

Ters Z Dönüşümü

$X(z)$ sinyalinden $x[n]$ sinyaline geçiş aşağıdaki gibi ters z dönüşümü ile sağlanır:

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

burada C eğrisi orjini saat yönünün tersinde çevreler. Ancak, bu derste ters z-dönüşümü almak için daha çok aşağıda anlatıldığı gibi kısmi kesirlere ayırma yöntemi kullanılacaktır.

Ters Z Dönüşümü

- Kısmi Kesirlere Açılım

$$X(z) = \frac{a_0 (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_m)}{b_0 (z - p_1)(z - p_2) \dots (z - p_t)}$$

burada z_k 'lar $X(z)$ 'in sıfırları, p_k 'lar da $X(z)$ 'in kutuplarıdır ve hepsi tek katlıdır. Ters z-dönüşümünde kolaylık olması açısından $X(z)$ yerine $\frac{X(z)}{z}$ kısmi kesirlere ayrılır:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z - p_1} + \frac{c_2}{z - p_2} + \dots + \frac{c_n}{z - p_t}$$

Tablo · Bazı z-Dönüşüm Çiftleri

$x[n]$	$X(z)$
$\delta[n]$	1
$u[n]$	$\frac{z}{z-1}$
$-u[-n-1]$	$\frac{z}{z-1}$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{z}{z-a}$
$nu[n]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$-nu[-n-1]$	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$x[n] = \begin{cases} 1 & n \leq N \\ 0 & n > N \end{cases}$	$\frac{z^{N+1} - z^{-N}}{z-1}$
$e^{\mp j\Omega_0 n} u[n]$	$\frac{z}{z - e^{\mp j\Omega_0}}$
$\cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - \cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$
$\sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2\cos(\Omega_0)z + 1}$
$r^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^2 - r\cos(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$
$r^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{r\sin(\Omega_0)z}{z^2 - 2r\cos(\Omega_0)z + r^2}$


Bir Örnek

$X(z) = \frac{z}{2z^2 - 3z + 1}$ 'in ters z-dönüşümünü için $\frac{X(z)}{z}$ 'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\begin{aligned}\frac{X(z)}{z} &= \frac{1}{2z^2 - 3z + 1} \\ &= \frac{1}{2(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{c_1}{(z-1)} + \frac{c_2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{(z-1)} + \frac{-1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}\end{aligned}$$

$$c_1 = \left[(z-1) \frac{X(z)}{z} \right]_{z \rightarrow 1} = 1 \quad c_2 = \left[\left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{X(z)}{z} \right]_{z \rightarrow \frac{1}{2}} = -1$$

Buradan, $X(z) = \frac{z}{(z-1)} - \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)}$ için ters dönüşümü bulalım:

Z Tablosundan  $x[n] = u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Örnek: $X(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ 'in ters z-dönüşümünü bulalım. $\frac{X(z)}{z}$ 'i kısmi kesirlere ayıralım:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \quad c_1 = 1$$

$$= \frac{c_1}{(z-1)} + \frac{\lambda_1}{(z-2)} + \frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \quad \lambda_1 = -1$$

$$= \frac{1}{(z-1)} + \frac{-1}{(z-2)} + \frac{1}{(z-2)^2} \quad \lambda_2 = 1$$

Buradan, $X(z) = \frac{z}{z-1} + \frac{-z}{z-2} + \frac{z}{(z-2)^2}$

Şimdi ters dönüşümü bulalım:

Z Tablosundan



$$x[n] = u[n] - 2^n u[n] + n2^{n-1} u[n]$$

Bu ders notu için faydalanılan kaynaklar

Lecture 15

Discrete-Time System Analysis using z-Transform (Lathi 5.1)

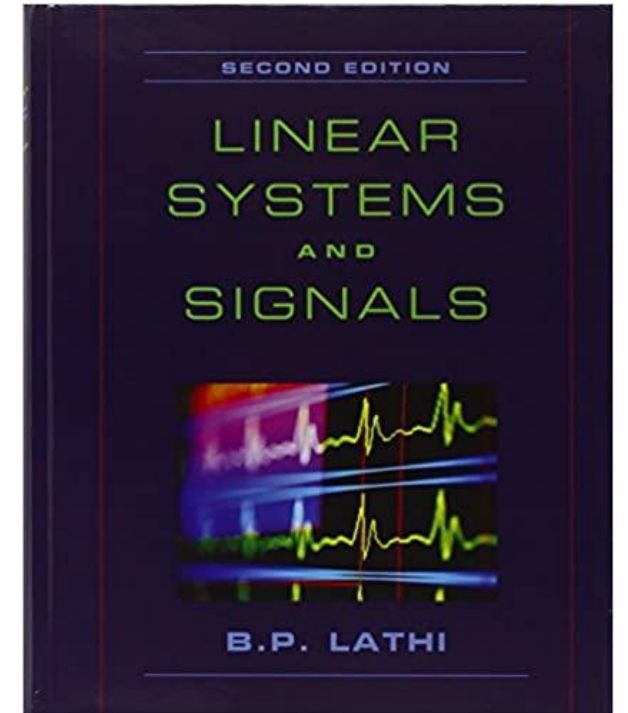
Peter Cheung
Department of Electrical & Electronic Engineering
Imperial College London

MIT OpenCourseWare
<http://ocw.mit.edu>

6.003 Signals and Systems
Fall 2011

EEEN343 Sinyaller ve Sistemler Ders Notları

Prof. Dr. Serdar İplikçi
Pamukkale Üniversitesi
Mühendislik Fakültesi
Elektrik-Elektronik Mühendisliği



For information about citing these materials or our Terms of Use, visit: <http://ocw.mit.edu/terms>.