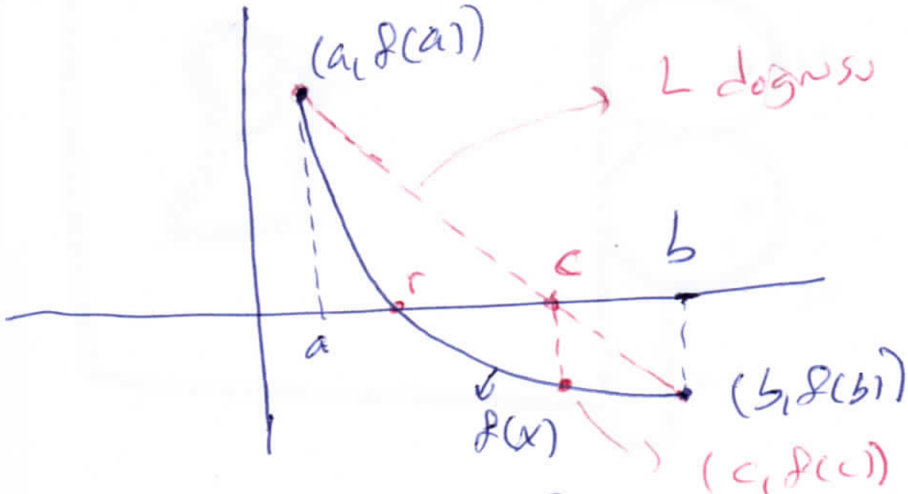
Regula Falsi method

Regula Falsi method iki başlangıç değer ile iterasyona başlar. Bir sonraki metodda da göreceğimiz Secant yönteminde iki başlangıç değer ile iterasyona başlayacak. Fakat ve $f(a)*f(b)<0$ şartını sağlayacaktır

$$= b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b)$$

Bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu $f(a)$ ve $f(b)$ değerini alırsa $(a,f(a))$ ve $(b,f(b))$ noktaları için $f(a)*f(b)<0$ olmalıdır ki iterasyon yapabilelim.



$(a,f(a))$ ve $(b,f(b))$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ olacaktır.

Bu doğru (L doğrusu) x-eksenini $(c,0)$ noktasında kessin ve $(c,0)$ ve $(b,f(b))$ noktalarından geçen doğrunun eğimi $m = \dfrac{0-f(b)}{c-b}$ olur.

$$m = m \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{-f(b)}{c-b}$$

$$c = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b)$$ bulunur.

son ifadeyi en genel hali ile yazarsak

$f(x)=0$ denkleminin yaklaşık kökü için

$f(a) * f(c) < 0 \Rightarrow$ yaklaşık kök $[a,c]$'de

$f(c) * f(b) < 0 \Rightarrow$ " kök $[c,b]$'de

ve yaklaşık kök $f(c)=0$ ise yaklaşık kök $\underline{c}$ dir.

Böylece verilen uygun bir a_0 ve b_0 başlangıç değerleri için

$$c_n = b_n - \frac{(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} * f(b_n), \quad n=0,1,\ldots$$

yaklaşımı ile c_n kökü elde edilir

<u>örnek</u> $\sqrt[3]{2}$ sayısının yaklaşık değerini $a_0=1$ ve $b_0=2$ başlangıç değerleri için Regula Falsi yöntemiyle 10 iterasyon için bulunuz

$$x_n = b - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} * f(b)$$

$f(x)=0$

$x=\sqrt[3]{2}$

$x^3-2=0$

$f(x)=x^3-2=0$

$f(1)=-1 < 0$

$f(2)=8-2=6>0$

kök var

n	a	b		f(c)
1	1	2	1.1429	-0.50729
2	1.1429	2	1.2097	-0.22986
3	1.2097	2	1.2388	-0.098736
4	1.2388	2	1.2512	-0.041433
5	1.2512	2	1.2563	-0.017216
6	1.2563	2	1.2584	-0.0071239
7	1.2584	2	1.2593	-0.0029429
8	1.2593	2	1.2597	-0.0012148
9	1.2597	2	1.2598	-0.00050134
10	1.2598	2	1.2599	-0.00020687

R-F (3)

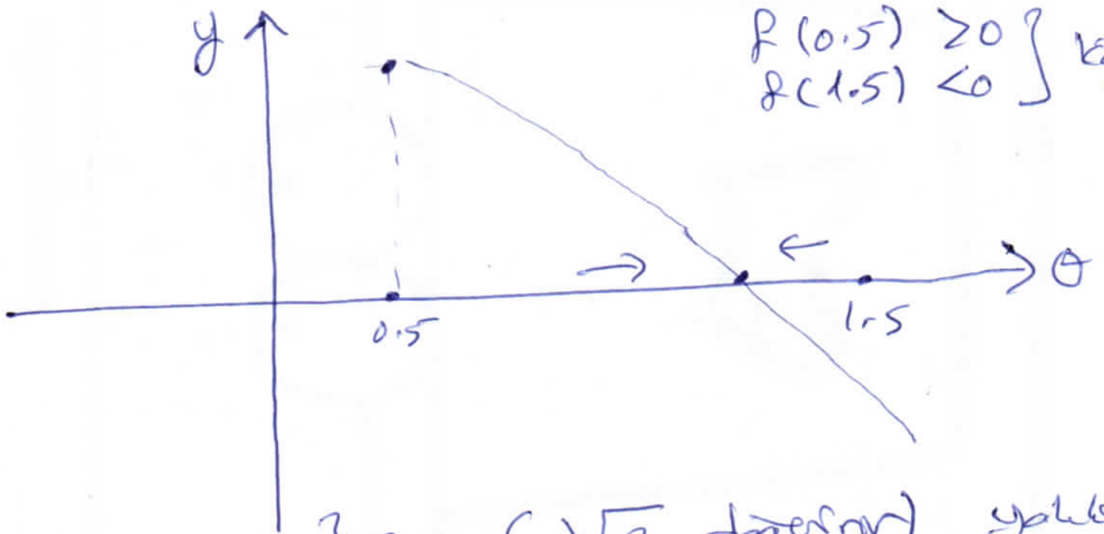
örnek $f(\theta) = 10\pi - 50\theta + 25\sin\theta$

$a = 0.5$, $b = 1.5$ Regula Falsi ile $\theta_6 = ?$

$$\theta_n = b_n - \frac{b_n - a_n}{f(b_n) - f(a_n)} * f(b_n)$$

n	a	b	θ_n	$f(\theta)$
1	0.5	1.5	0.99669	2.5733
2	0.99669	1.5	1.0577	0.31063
3	1.0577	1.5	1.065	0.036638
4	1.065	1.5	1.0658	0.0043094
5	1.0658	1.5	1.0659	0.0005067
6	1.0659	1.5	1.0659	5.9575e-05

$f(0.5) > 0$, $f(1.5) < 0$ } kök var



ödev kolon $f(x) = x^2 - 2$ ($\sqrt{2}$ değerini) yaklaşık

[0, 2] aralığında Regula-Falsi ile

$x_9 = ?$ 6. d.p bulunuz

$$x_n = b_n - \frac{(b_n^2 - 2) * (b_n - a_n)}{(b_n^2 - 2) * (a_n^2 - 2)}$$

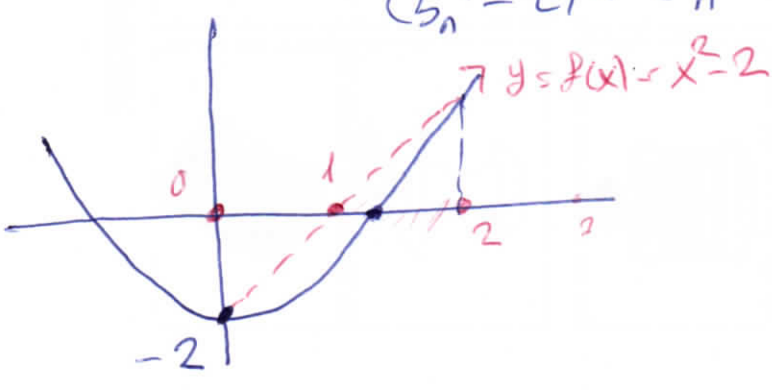
$c_0 = 1$, $c_1 = 1.333333$

$c_2 = 1.4$, $c_3 = 1.41176$

$c_4 = 1.413793$, $c_5 = 1.414141$

$c_6 = 1.414201$, $c_7 = 1.414211$

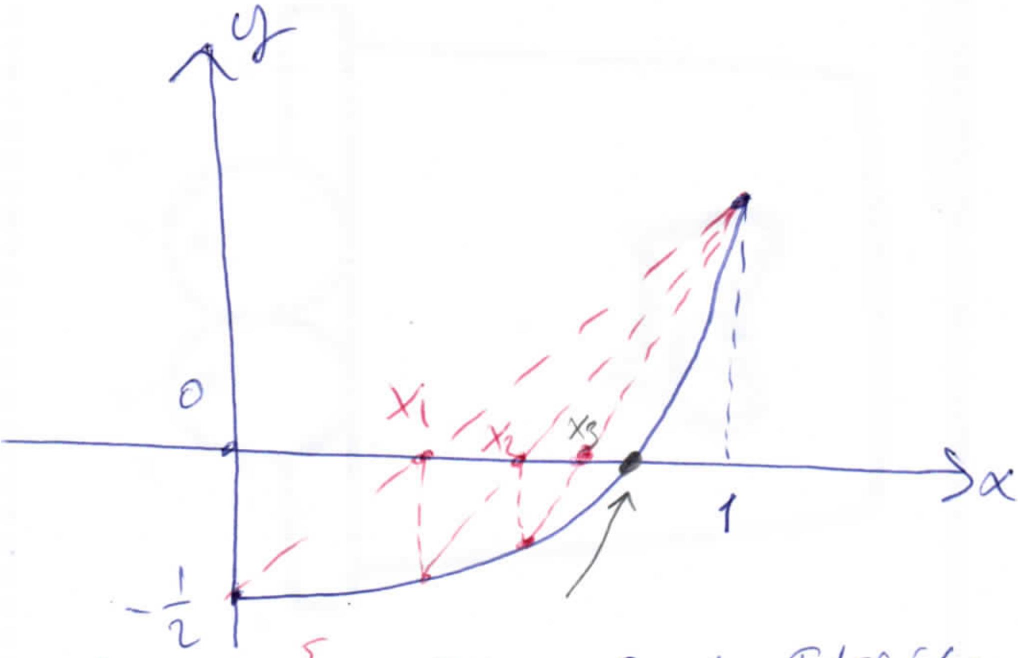
$c_8 = 1.414213$, $c_9 = 1.414213$



R-F (4)

<u>örnek:</u> $f(x) = x^5 - \frac{1}{2} = -0.5 + x^5$ fonksiyonunun bir pozitif kökünü $\varepsilon = 0.0001$ hata ile $[0,1]$ arasında Regula falsi ile bulunuz.

n	a	b	x_n	$f(x_n)$
1	0	1	0.5	-0.46875
2	0.5	1	0.74194	-0.22518
3	0.74194	1	0.83355	-0.09261
4	0.83355	1	0.86801	-0.0072543
5	0.86801	1	0.8699	-0.0018732
6	0.8699	1	0.87038	-0.00048113
7	0.87038	1	0.87051	-0.00012352
8	0.87051	1	0.87054	-3.1687E-05



$f(x) = x^5 - 0.5$ için Regula-Falsi ile ilk 3 approximation.

Secant Yöntemi

Bir $f(x)$ fonksiyonunun yaklaşık kökünü bulmak için x_0 ve x_1 gibi iki adet başlangıç değer biliniyorsa kullanılabilecek en uygun yöntemdir diyebiliriz. Burada $(x_0, f(x_0))$ ve $(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen secant doğrusu ile $f(x)=0$ denkleminin bir kökünü bulmaya gidilir. $(x_0, f(x_0))$ ve $(x_1, f(x_1))$ noktalarından geçen secant doğrusunun x-eksenini kestiği nokta x_2 ise $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, 0)$ noktalarından geçen secant doğrusunun eğimi

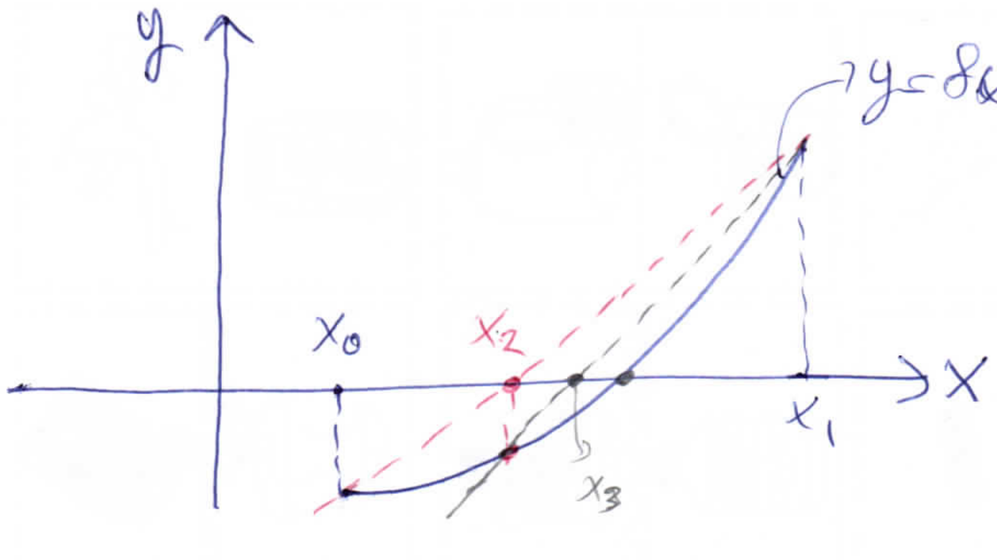
$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0 - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} * f(x_1) \quad \text{olur.}$$

$n \geq 1$ için

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} * f(x_n) \quad \text{Rekörsif}$$

(yenileme) formülü elde edilir.



örnek: $\sqrt{3}$ değerini ($f(x) = x^2 - 3$). Secant (2)

$x_0 = 1$, $x_1 = 2$ değerleri için secant yöntemiyle $x_6 = ?$

n	x_n	$f(x_n)$
1	1	-2
2	2	1
3	1.6667	-0.22222
4	1.7273	-0.016529
5	1.7321	0.00031888
6	1.7321	-4.4042e-07 <

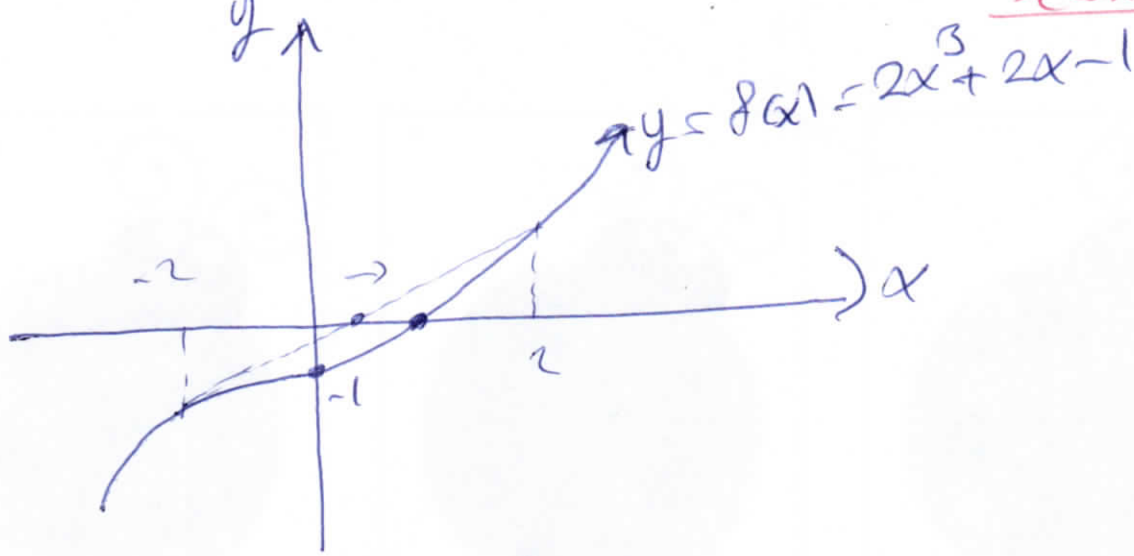
örnek: $f(\theta) = 20\pi - 50.\theta + 25 \sin\theta$ secant yöntemiyle: [0,2] 3.dp.

n	θ_k	$f(\theta_k)$
1	1	33.869
2	2	-14.436
3	1.7012	2.5692
4	1.7462	0.13835
5	1.7488	-0.0015105
6	1.7487	8.6907e-07 <

örnek: $f(x) = x^3 + 2x - 1$ fonksiyonunun bir sıfır yerini $x_0 = -2$ ve $x_1 = 2.0$ başlangıç değerler için secant yöntemiyle bulunuz.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} * f(x_n) \text{ ile}$$

Secant 3



$x_0 = -2$ $\quad$ $x_1 = 2$

$x_2 = 1.6666668$ $\quad$ $x_3 = 0.27074236$

$x_4 = 0.47513565$ $\quad$ $x_5 = 0.45143620$

$x_6 = 0.45337540$ $\quad$ $x_7 = 0.45339767$

$x_8 = 0.45339765$ $\quad$ $x_9 = 45339765$

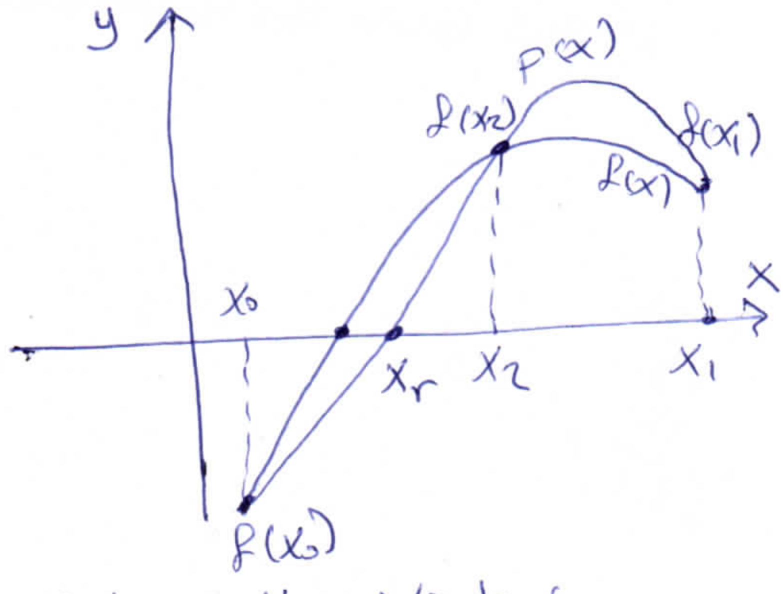
Aranan kök 0.45339765 dır.

Müller Yöntemi

Müller yönteminde ikinci dereceden bir polinom yardımıyla kök tahmini yapılabilmektedir. Bununla birlikte polinom tanımlayabilmek için üç tane noktaya ihtiyaç duyacağız. x_0, x_1, x_2 noktaları Müller yönteminin başlangıç değerleridir. Bu üç başlangıç değer için $P(x)=ax^2+bx+c$ için $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ ve $(x_2, f(x_2))$ noktaları için ikinci derece polinomu oluşturabiliriz. Bu polinomun kökü kolonun doğrusal çözümlere göre gerçek köke daha iyi yakınsayacağını (yaklaşacağını) varsayabiliriz.

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + b(x_0 - x_2) \qquad (1)$$
$$f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2)$$

$$h_0 = x_1 - x_0$$
$$h_1 = x_2 - x_1$$
$$d_0 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h_0}$$
$$d_1 = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_1}$$



şekil: Müller Yöntemi

Bu ifadeler (1) nolu denklemde yerine yazılırsa

$$(h_0 + h_1)b - (h_0 + h_1)^2 a = h_0 d_0 + h_1 d_1$$
$$h_1 b - h_1^2 a = h_1 d_1$$

elde edilir buradan a ve b çözülürse

$a = \dfrac{d_1 - d_0}{h_1 + h_0}$, $b = a \cdot h_1 + d_1$, $c = f(x_2)$

$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$ eğer $|b + \Delta| > |b - \Delta|$. $e = b + \Delta$

$|b + \Delta| > |b - \Delta|$. $e = b - \Delta$

$x_r = x_2 - \dfrac{2c}{e}$, x_2 yerine x_r değeri ile iterasyona başlayabiliriz.

• Müller Yöntemi:

Bu yöntemde $f(x)$ fonksiyonunun köklerini bulmak için verilen x_0, x_1 ve x_2 değerleri ve hesaplanan $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ ve $y_2 = f(x_2)$ değerler ile bu noktalardan $p(x) = ax^2 + bx + c$ ikinci derece polinomu (parabolü) geçirilir. Polinomdaki x değeri değiştirilerek $p(x)$ polinomunun $y = f(x)$ fonksiyonu ile çakışması sağlanır. Yazılan polinomda a, b, c katsayıları hesaplanır. $p(x) = ax^2 + bx + c$ şekline gelir. $p(x) = 0$ kökünü bulmak için

$$x_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}, \quad \Delta = b^2 - 4ac$$

çözümü yapılır.

Δx değerinin min olması için $\mp\sqrt{\Delta}$ değerinin min olması gerekir. Min olan x değeri bulunur ve istenilen mutlak değere ulaşıncaya kadar devam edilir.

Örnek: $f(x) = x^3 - 3.7x^2 + 6.25x - 4.069$ fonksiyonunun $x_0 = 1$, $x_2 = 1.25$ ve $x_2 = 1.5$ değerlerine göre kökü $\varepsilon = 0.005$ için nedir?

Çözüm:

$x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -0.51900$

$x_1 = 1.25 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = -0.84625$

$x_2 = 1.5 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = 0.35600$

$x_0 = 1 \Rightarrow a + b + c = -0.519$

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$x_1 = 1.25 \Rightarrow 1.563a + 1.25b + c = -0.085$

$x_2 = 1.5 \Rightarrow 2.25a + 1.5b + c = 0.356$

$a = 0.05, \; b = 1.625, \; c = -2.194$

$p(x) = ax^2 + bx + c$ ise <u>moller 2</u>

$p(x) = 0$ için

$0.05x^2 + 1.625x - 2.194 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 1.298$

$x_2 = -33.798$ bulunur.

Buradan x_1 değeri fonksiyonu min yapan değerdir

işlem

$x_0 = 1.25 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -0.85$

$x_1 = 1.298 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = -0.003$

$x_2 = 1.5 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = 0.356$

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$p(x) = 0$

$a = 0.348$

$b = 0.806$

$c = -1.635$

$0.348x^2 + 0.806x - 1.635 = 0$

$x_1 = 1.30000$ $\qquad \varepsilon = 1.298 - 1.3$

$x_2 = -3.615 \Rightarrow \qquad \varepsilon = -0.002 \Rightarrow |\varepsilon| = 0.002 < 0.005$

işlem burada kesilir.

$\underline{x = 1.3}$ bulunur.

$f(x) = 3x + \sin(x) - e^x = 0$ fonksiyonunun müller 3

$x_0 = 0.5$
$x_1 = 1.0$ 3 iterasyon için müller
$x_2 = 0.0$ için
metodu ile çözünüz.

çözüm:

$x_0 = 0.5 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = 0.330704$
$x_1 = 1.0 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 1.12319$
$x_2 = 0.0 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = -1$

$p(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow p(x) = 0$ için

$0.25a + 0.5b + c = 0.330704$
$a + b + c = 1.12319$
$0.0 + 0.b + c = -1$

$a = -1.07644, \ b = 3.19963, \ c = -1$
$p(x) = 0 \Rightarrow -1.07644x^2 + 3.19963x - 1 = 0$

$x_1 = 0.354914$ ✓ (min olduğu için)
$x_2 = 2.6175$ ✗

Bir sonraki iterasyon için
$x_0 = 0.354914 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -0.0138063$
$x_1 = 0.5 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = 1.12319$
$x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = -1$

$0.125964.a + 0.354914\,b + c = -0.0138063$
$0.25.a + 0.5.b + c = 0.330704$
$0.a + 0.b + c = -1$

$a = -0.808314, \ b = 3.06557, \ c = -1$

müller 4

$p(x) = 0$

$-0.80834x^2 + 3.06557x - 1 = 0$

$x_1 = 0.360464 \leftarrow$ (min)

$x_2 = 3.43208$ ✗

Üçüncü iterasyon için:

$x_0 = 0.354914 \Rightarrow y_0 = f(x_0) = -0.0138063$
$x_1 = 0.360464 \quad y_1 = f(x_1) = 0.000105818$
$x_2 = 0 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = -1$

$a = -0.75458, \quad b = 3.04649, \quad c = -1$

$p(x) = 0$

$-0.75458x^2 + 3.04649x - 1 = 0$

$x_1 = 0.309465 \qquad \cancel{x_2 = 4.28206}$

x kök $\Rightarrow \underline{\underline{x = 0.309465}}$ bulunur.