

Manik

Tanım: Doğru yada yanlış hüküm bildiren bir ifadeye önerme denir. Önermenin doğru olduğu hüküm değerine önermenin doğruluk değeri denir. Eğer önerme doğru ise doğruluk değeri 1, yanlış ise 0 ile gösterilir.

Örn: p : 3 tek bir sayıdır \Rightarrow doğru önerme $p=1$
 q : cumadan sonra pazar gelir \Rightarrow yanlış önerme $q=0$

Ö Soru içeren cümleler önerme olamaz.
 p : Sen kimsin? \Rightarrow önerme değildir.
 q : Ne kadar ilginç bir soru \Rightarrow önerme değildir (görecelidir).
 r : Kapatı aç! \Rightarrow önerme değildir (Emir cümlesi)

Ö Basit cümlelere ayrılan önermelere ilkel (basit) önerme denir.

Tanım: Bazı bağlaçlar ve basit önermeler kullanılarak elde edilen önermelere bileşik önerme denir.

Bağlaçlar

① Değil işlemi: Bir p önermesinden p nin değili olan (tam tersi) $\neg p$ önermesi elde edilir.
 p : 3 tek bir sayıdır
 $\neg p$: 3 tek sayı değildir.

② Birleştirme Bağlacı: "ve" (\wedge): p ve q önermelerinin birleşimi $p \wedge q$ ile gösterilir.

p : 10 çift sayıdır
 q : 7 eseldir } $p \wedge q = 10 \text{ çift sayıdır } \underline{\text{ve}} 7 \text{ eseldir.}$

③ Ayırma Bağlacı: "veya" (\vee): $p \vee q$ ifadesi p ve q önermelerinin ayrılmasını gösterir.

$p \vee q$: 10 çift sayıdır veya 7 eseldir.

$p \vee q \Rightarrow$ En az bir yada 2 si doğru olan $p \vee q$ doğrudur.

④ Gerektilme Bağlacı: "ise" (\rightarrow) p 'nin q 'yu gerektirmesi $p \rightarrow q$ şeklinde yazılır ve " p , q 'yu gerektirir" şeklinde okunur.

$p \rightarrow q$: 10'un çift sayı olması, 7'nin esol olmasını gerektirir.

$p \rightarrow q$: 10 çift sayı ise o zaman 7 eseldir.

$p \rightarrow q$: 10'un çift sayı olması, 7'nin esol olmasını için yeterlidir.

⑤ Çift Karıllılık Bağlacı: "merek ve gerek" (\leftrightarrow) p ve q önermelerinin çift karıllı olması $p \leftrightarrow q$ ile gösterilir ve " p gerek ve yeter şart q " ya da " p gerek ve gerek q " şeklinde okunur.

Örnek:

p : Yözmek için denize girilir.

q : Yarın hava bulutlu olacak.

r : Bilgisayarlar çalışmıyor olacak kullanılır.

bu 3 önermeler olsun.

$(p \vee q) \leftrightarrow r$: Yözmek için denize girilmek veya yarın havanın bulutlu olması için gerek ve yeter şart bilgisayarların çalışmamasıdır.

$(r \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$: Eğer bilgisayarlar çalışmıyor olacak kullanılıyor ve yarın hava bulutlu değil ise o zaman yüzmek için denize girilmez.

Doğruluk Tabloları

Bir önermenin doğruluk değerlerini gösteren tabloya doğruluk tablosu denir.

* p_1, p_2, \dots, p_n önermeler olmak üzere bir önerme için 2^n durum vardır.

Örnek $\neg p$ önermesi için tablo:

p	$\neg p$
0	1
1	0

(1 Önerme = 2' durum)

Örnek $p \wedge q$ önermesinin doğruluk tablosu

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Örnek $p \vee q$ önermesinin doğruluk tablosu

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Q.1) $P \Rightarrow Q$ önermenin
doğruluk tablosu

P	Q	$P \Rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Q.2) $P \Leftrightarrow Q$ önermenin
doğruluk tablosu

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Q.3) $\neg Q \wedge (\neg r \Leftrightarrow P)$ bileşik önermenin
doğruluk tablosu

Olusumlar:

P	Q	r	$\neg Q$	$\neg r$	$(\neg r \Leftrightarrow P)$	$\neg Q \wedge (\neg r \Leftrightarrow P)$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	1	0

$P=0, Q=0$ ve $r=0$ için
 $P=0, Q=0$ ve $r=1$ için

Önerme doğru dur.
Önerme doğru dur.

Önerme doğru dur.

Q.4) $[(P \vee Q) \wedge r] \rightarrow r$

Önerme doğru dur.

P	Q	r	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge r$	$(P \vee Q) \wedge r \rightarrow r$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Totoloji ve Gelişki

(5)

Eğer bir bileşik önerme, önermeyi oluşturan bileşenlerinin her mümkün doğruluk değeri için doğru ise bu önermeye totoloji; eğer hiçbir zaman doğru ise gelişki denir.

(1) Bir öncelik 2. örnekteki önerme bir totolojidir.

(2) $(p \wedge q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$ bileşik önermenin doğruluk tablosu?

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$q \rightarrow \neg p$	$(p \wedge q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0

Hiçbir bileşik önerme doğru değildir.

Montik Kuralları

Tanım: P ve q önermeleri verilsin. Eğer P'nin doğru (yanlış) olması için gerekli ve yeter şart q'nun doğru (yanlış) olması ise o zaman P ile q mantiksel denktir, ve $P \equiv q$ ile gösterilir.

(3) p ve $\neg(\neg p)$ önermelerinin tablosu;

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

$$p \equiv \neg(\neg p)$$

(4) $p \wedge q$ ve $q \wedge p$ önermelerinin tablosu;

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

(6)

(a) $\neg p \vee q$ ve $p \Rightarrow q$ tablosu

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

2. önerme denk önermedir.
 $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ olur.

Montik Kuralları

- ① $\neg \neg p \equiv p$ (Çift İnkâr Kuralı)
- ② $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (De Morgan Kuralı)
 $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
- ③ $p \vee q \equiv q \vee p$ (Değişme Özelliği)
 $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- ④ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (Birleşme Özelliği)
 $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- ⑤ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (Dağılma Özelliği)
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- ⑥ $p \vee p \equiv p$ (Eşlenimsizlik (Idempotent) Kuralı)
 $p \wedge p \equiv p$
- ⑦ $p \vee 0 \equiv p$ (Özeldeğer Kuralı)
 $p \wedge 1 \equiv p$
- ⑧ $p \vee \neg p = 1 (T)$ (Tors Olma Kuralı)
 $p \wedge \neg p = 0 (F)$

9) $P \vee 1 \equiv 1$ (Bosku Olur kuralı)
 $P \wedge 0 \equiv 0$

10) $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

11) $P \leftrightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$

12) $P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
 $P \wedge (P \vee Q) \equiv P$

Dualite

Tanım: P bir önerme olsun. Eğer P ; V ve \neg den başka bir
 başka işlemiyle ise o zaman P^d önermesi; P ile srasıyla
 \neg ve \vee nin; V ve \neg ile değişimyle; ve F ve T in
 srasıyla T ve F ile yer değiştirmesiyle elde edilen P^d
 önermesine P nin duali denir.

$\neg \Rightarrow \text{total } \neg P$, $F \Rightarrow \text{Gelişki}$

Özellik: P ilkel (basit) bir önerme ise P^d ve P ile $(\neg P)^d$ ve
 $(\neg P)$ eşittir. İlkel olmak üzere $P \vee \neg P$ ve $P \wedge \neg P$ birbiri
 zıttır. Böylece $P \vee T$ ve $P \wedge F$ önermeleri birbirini dualite

Örnek: P, Q, R ilkel önermeler ve S bilindik önerme olsun. Örneğin

$S : [(\neg P \vee Q) \wedge R] \vee [(P \vee T) \wedge \neg P]$ 'nin duali;

$S^d : [(\neg P \wedge Q) \vee T] \wedge [(P \wedge F) \vee \neg P]$ 'dir.

Teoremler p ve q , V ve Λ den başka bir mantıksal değere
 iğermeyen önermeler olsun. Eğer $p \equiv q$ ise $p^d \equiv q^d$ dir. (8)

Özellikler: Kullanarak En Sade Birim Bulma

Örnek (A) (B)

$$[(p \vee q) \vee (q \vee \neg r) \wedge (p \vee r)] \stackrel{?}{=} \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Sol taraf için, sağ taraf ebe odullm.

$$\underbrace{[(p \vee q) \vee (q \vee \neg r)]}_{(1)} \wedge \underbrace{[(p \vee q) \vee (p \vee r)]}_{(2)} \text{ degilne}$$

$$\begin{aligned} 1 &\equiv [p \vee (q \vee (q \vee \neg r))] && \text{degilne} && \text{de. 2} &\equiv [(q \vee p) \vee (p \vee r)] \\ &\equiv [p \vee ((q \vee q) \vee \neg r)] && \downarrow \text{birleşme} && \text{de.} &\equiv [q \vee (p \vee (p \vee r))] \\ &\equiv [p \vee (q \vee \neg r)] && \downarrow \text{idempotent} && \text{birleşme} &\equiv [q \vee ((p \vee p) \vee r)] \\ &\equiv [p \vee (q \vee \neg r)] && \downarrow \text{birleşme} && \text{idempotent} &\equiv [q \vee (p \vee r)] \\ &\equiv [(p \vee q) \vee \neg r] && \text{birleşme} && \text{de.} &\equiv [(p \vee q) \vee r] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \wedge 2 &\rightarrow \equiv [(p \vee q) \vee \neg r] \wedge [(p \vee q) \vee r] \\ &\equiv [(p \vee q) \vee (\neg r \wedge r)] && \downarrow \text{degilne} \\ &\equiv [(p \vee q) \vee 0] && \downarrow \text{ters olma} \\ &\equiv [p \vee q] && \downarrow \text{özdeşlik} \\ &\equiv \underline{\underline{p \vee q}} \end{aligned}$$

(B) de nersan

$$\begin{aligned} B &\equiv \neg(\neg p) \vee \neg(\neg q) \\ &\equiv \text{aift degilne} \\ &\equiv \underline{\underline{p \vee q}} \end{aligned}$$

$A \equiv B$ dir

Örnek: p, q, r illel önermeler olmak üzere;
aşağıdaki önermelerin mantıksal değeri olup olmadığını gösteriniz.

- (a) $(p \vee q) \rightarrow r$ ve $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
(b) $(p \wedge q) \rightarrow r$ ve $((p \wedge r) \rightarrow (\neg q))$

Bir Cerektirmanın Ters, Karsıt ve Karsıt Ters

Örnek: Bir $p \rightarrow q$ önermesi verilsin.

- Önermesine $p \rightarrow q$ önermesinin tersi;
- Önermesine $p \rightarrow q$ "karsıtı";
- Önermesine $p \rightarrow q$ "karsıt tersi" denir.

Örnek: p : Ali futbol oynar
 q : Ali golistendir. Önermeleri karıştıralım.

$p \rightarrow q$: Eğer Ali futbol oynarsa o zaman golistendir.
(Gerçek)

Tersi: $(\neg p \rightarrow \neg q)$: Eğer Ali futbol oynamıyorsa o zaman golisten değildir.

Karsıtı: $(q \rightarrow p)$: Eğer Ali golisten ise o zaman futbol oynuyordur.

Karsıt Ters: $(\neg q \rightarrow \neg p)$: Eğer Ali golisten değilse o zaman futbol oynamıyordur.

① p, q, r ilkel önermeler verilsin.

$[p \vee (q \wedge r)] \vee \neg [p \vee (q \wedge r)] \equiv T_0 (=1)$ olduğunu tablo yardımıyla ve mantık kuralları kullanarak gösteriniz.

① Tablo:

			A		B	
p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$\neg A$	$A \vee B$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0	1

Ok. T_0 dir.

② Kurallar yardımıyla

$$\begin{aligned}
 & [p \vee (q \wedge r)] \vee [\neg p \wedge \neg (q \wedge r)] \\
 & \equiv [p \vee (q \wedge r)] \vee [\neg p \wedge \neg (q \wedge r)] \\
 & \equiv [p \vee (q \wedge r) \vee \neg p] \wedge [p \vee (q \wedge r) \vee \neg (q \wedge r)] \\
 & \equiv [p \vee \neg p \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee (q \wedge r) \vee \neg (q \wedge r)] \\
 & \equiv [T_0 \vee (q \wedge r)] \wedge [p \vee T_0] \\
 & \equiv T_0 \wedge T_0 \equiv \underline{\underline{1}}
 \end{aligned}$$

② Mantık kurallarını kullanmak:

$$[[(p \wedge q) \wedge r] \vee [(p \wedge q) \wedge \neg r]] \vee \neg q \Rightarrow p$$

Önermesini sadeleştiriniz

$$\equiv [[(p \wedge q) \wedge (r \vee \neg r)] \vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [[(p \wedge q) \wedge T_0] \vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p \wedge q) \vee \neg q] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg q)] \Rightarrow p$$

$$\equiv [(p \vee \neg q) \wedge T_0] \Rightarrow p$$

$$\equiv (p \vee \neg q) \Rightarrow p$$

$$\equiv \neg (p \vee \neg q) \vee p$$

$$\equiv (\neg p \wedge q) \vee p \equiv (\neg p \vee p) \wedge (q \vee p) \equiv T_0 \wedge (q \vee p) \equiv \underline{\underline{q \vee p}}$$

③ p ve q için önermeler değeri üzere;
aşağıdaki ifadelerin doğruluğu yazınız.

(a) $r: q \rightarrow p$ ise r^d ?

$r: \neg q \vee p$ olur. O zaman, $r^d: \neg \neg q \wedge \neg p$

(b) $r: p \rightarrow (q \vee r)$ ise r^d ?

$r: \neg p \vee (q \vee r)$ old. den $r^d: \neg \neg p \wedge \neg (q \vee r)$