Non-lineer Denklem sistemlerinin yaklaşık çözüm Yöntemler

Sistem - S.N

1

Sabit Nokta Yinelemesi

Daha önceki bölümlerde anlattığımız sabit nokta iterasyonunun bir genelleştirilmesine değineceğiz.
ilk olarak 2D ve 3D durumlarda sabit nokta kavramını tanıtalım.

Tanım: iki boyutlu Durum:

$f_1(x,y)=0$
$f_2(x,y)=0$ } ile verilen doğrusal olmayan denklem sisteminden elde edilen

$x=g_1(x,y)$
$y=g_2(x,y)$ } sisteminin bir sabit noktası

$\underline{X}_0=(x_0,y_0)$ noktası başlangıç noktası olsun

$x_{n+1}=g_1(x_n,y_n)$
$y_{n+1}=g_2(x_n,y_n)$ } $n=0,1,2,\ldots$ sabit nokta iterasyon olur.

Üç Boyutlu Durum:

$f_1(x,y,z)=0$
$f_2(x,y,z)=0$
$f_3(x,y,z)=0$ } doğrusal olmayan denklem sisteminden elde edilen

$x=g_1(x,y,z)$
$y=g_2(x,y,z)$
$z=g_3(x,y,z)$ } sistemin sabit nokta iterasyon

$X_0=(x_0,y_0,z_0)$ başlangıç noktası ile $n=0,1,2,3,\ldots$ için

$x_{n+1}=g_1(x_n,y_n,z_n)$
$y_{n+1}=g_2(x_n,y_n,z_n)$
$z_{n+1}=g_3(x_n,y_n,z_n)$ } Sabit nokta iterasyon elde edilir.

Sistem - S.N ②

$$\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} \quad 2D$$

ve

$$\underline{g}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \\ g_3(x,y,z) \end{pmatrix} \quad 3D$$

için

$\underline{x_0} = (x_0, y_0)$

2D için

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}(\underline{x_0})\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}(\underline{x_0})\right| < 1$$

ve

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial z}(\underline{x_0})\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial z}(\underline{x_0})\right| < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial y}(\underline{x_0})\right| + \left|\frac{\partial g_3}{\partial z}(\underline{x_0})\right| < 1$$

ise bu durumda $\underline{x} = \underline{g}(\underline{x})$ denklem sisteminin bir sabit noktasıdır ve sabit nokta iterasyonu yakınsar.

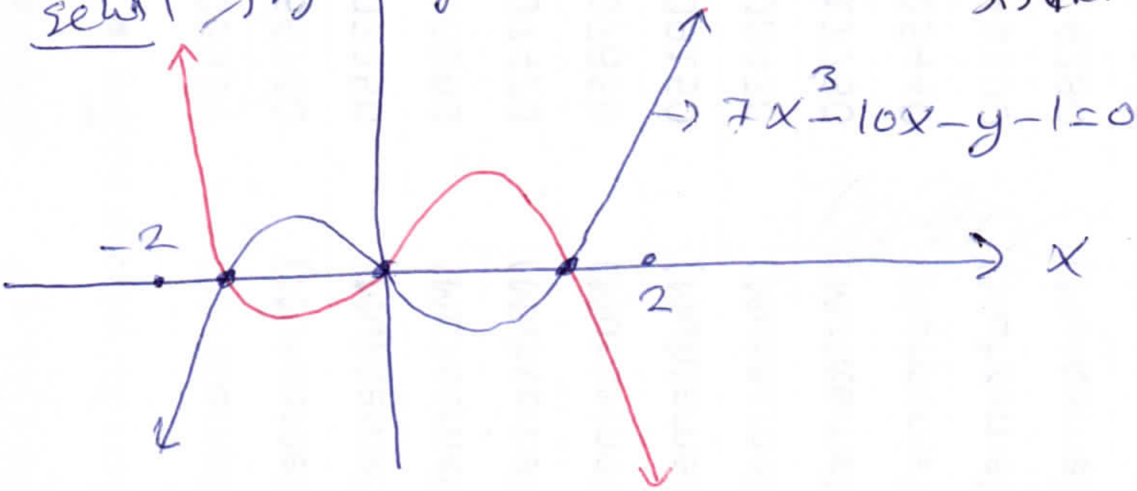
__örnek:__ $f_1(x,y) = 7x^3 - 10x - y - 1 = 0$

$f_2(x,y) = 8y^3 - 11y + x - 1 = 0$

denklem sistemini ele alalım. Non-lineer denklem sistemi aradığımız sistemi bu iki fonksiyonun kesişim noktası kökleridir.

$$x_{n+1} = \frac{7x_n^3 - y_n - 1}{10} = g_1(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = \frac{8y_n^3 + x_n - 1}{11} = g_2(x_n, y_n)$$



B bölgesi b

$$B=\{(x,y) \mid -0.5 \le x \le 0.5,\ -0.5 \le y \le 0.5\}$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)\right| = 2.1x^2+0.1<1$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\right| = 0.090+(2.1818181)y^2<1$$

bulunur.

$$x=\frac{7x^3-y-1}{10}=g_1(x,y)$$

$$y=\frac{8y^3+x-1}{11}=g_2(x,y)$$

$$x_{n+1}=\frac{7x_n^3-y_n-1}{10}=g_1(x_n,y_n)$$

$$y_{n+1}=\frac{8y_n^3+x_n-1}{11}=g_2(x_n,y_n)$$

formülü yakınsaklığını garanti eder. $(x_0,y_0)=(0.5,\ 0.5)$ başlangıç değeri için sabit nokta yinelemesi

$$\underline{X}=\underline{g}(\underline{X})$$

n	x_n	y_n
1	−0.625	−0.04545455
2	−0.10471640	−0.09652261
3	−0.09115153	−0.10108280
4	−0.09042186	−0.09994674
5	−0.09052283	−0.09985537
6	−0.09053371	−0.09986256
7	−0.09053371	−0.09986256

1. Örnek: $1+y^2-4x^2=0$
$3+2x-x^2-y^2=0$ başlangıç noktası $(1,2)$

$$x_{n+1}=g_1(x_n,y_n)=(8x_n-4x_n^2+y_n^2+1)/8$$
$$y_{n+1}=g_2(x_n,y_n)=(2x_n-x_n^2+4y_n-y_n^2+3)/4$$

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.125	2
2	1.117	1.996
3	1.116	1.997
4	1.116	1.997

$x=1.116$, $y=1.997$

Newton metodu

n	x_n	y_n
0	1	2
1	1.125	2
2	1.117	1.997
3	1.117	1.997