CENG 114 BİLGİSAYAR BİLİMLERİ İÇİN AYRIK YAPILAR

Doç. Dr. Tufan TURACI
tturaci@pau.edu.tr

- Pamukkale Üniversitesi
- Mühendislik Fakültesi
- Bilgisayar Mühendisliği Bölümü

- Hafta 3-4

Ders İçereği

- **İspat Yöntemleri**
- **Bilgisayar Bilimlerinde Kümeler**

İspat Yöntemleri

Doğruluğu ispatsız olarak kabul edilen matematiksel ifadelere aksiyom denir.

Doğruluğu ispat edilebilen doğru bir matematiksel ifadeye teorem denir.

$p \Rightarrow q$ şeklindeki teoremlerin ispatları için ispat tekniklerini verelim.

1) Doğrudan ispat:

Keyfi bir $x \in E$ için $p(x)$ in doğru olduğu kabul edilerek $q(x)$'in doğru olduğu ispatlanırsa "$\forall x \in E\ [p(x) \Rightarrow q(x)]$" önermesi doğru olur. Bu tür ispata doğrudan ispat denir.

Örnek

Tamsayılar tek tamsayı iki tamsayının farkıdır.

İspat: n tek tamsayı olsun. Böylece $n=2k+1$ olur, $k \in \mathbb{Z}$ 'dir.

$$n = 2k+1 = (k+1)^2 - k^2$$ 'dir.

$k \in \mathbb{Z}$ old.dan n, 2 tamsayının farkıdır. İspat biter.

Teorem: Eğer n tek tamsayı ise, o zaman $3n+7$ bir çift tamsayıdır.

İspat: n tek sayı olsun. $n=2k+1$ olur, $k \in \mathbb{Z}$.

$$3n+7 = 3.(2k+1)+7$$
$$= 6k+10 = 2.(3k+5)$$

$(3k+5) \in \mathbb{Z}$ olduğundan $3n+7$ çift tamsayı olur.

Teorem: Eğer n tek tamsayı ise o zaman, $4n^3+2n-1$ bir tek tamsayıdır.

İspat: n tek olsun. Yani $n=2k+1$ olsun.

$$4n^3+2n-1 = 4\cdot(2k+1)^3+2\cdot(2k+1)-1$$

$$= 4\cdot(8k^3+3\cdot 4k^2+3\cdot 2k+1)+4k+2-1$$

$$= 32k^3+48k^2+24k+4+4k+1$$

$$= 2(\underbrace{16k^3+24k^2+14k+2}_{\text{Çift olduğundan}})+1$$

Çift olduğundan $4n^3+2n-1$ sayısı tektir.

Teorem: $x \in \mathbb{Z}$ için eğer $2 | x^2-1$ ise o zaman $4 | x^2-1$ 'dir.

İspatlayınız.

$2 | x^2-1$ olduğundan $x^2-1=2y$ olacak şekilde $y \in \mathbb{Z}$ vardır.

$x^2 = 2y+1$ olur. (x^2 tektir)

Böylece $x = 2k+1$ olur, $k \in \mathbb{Z}$.

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$$

$x^2-1 = 4k^2+4k = 4(k^2+k)$, $k^2+k \in \mathbb{Z}$ olduğundan $4 | x^2-1$ 'dir.

② Karşıt Ters ile İspat !

Eğer $\forall x \in [p(x) \Rightarrow q(x)]$ niceleşmiş önermesinin doğruluğunun ispatı "$\forall x \in [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)]$" karşıt tersi kullanılarak doğrudan ispat yapılırsa bu tekniğe karşıt ters ile ispat denir.

Örnek)

Teorem: Eğer $x \in \mathbb{Z}$ için $5x-7$ bir çift tam sayı ise o zaman x bir tek tamsayıdır.

İspat) x'in çift sayı old. kabul edelim. yani $x = 2k$ olsun, $k \in \mathbb{Z}$.

$$
\begin{aligned}
5x-7 = 5\cdot(2k)-7 &= 10k-7 \\
&= 10k-8+1 \\
&= 2(\underbrace{5k-4}_{\in \mathbb{Z}})+1
\end{aligned}
$$

$\in \mathbb{Z}$ olduğundan $5x-7$ tek tamsayıdır.

Böylece $\forall x \in [\neg q(x) \Rightarrow \neg p(x)]$ old. gösterdik. İspat biter.

Teorem: $x \in \mathbb{Z}$ olsun. $11x-7$'nin çift sayı olması için gerek ve yeter şart x'in tek olmasıdır.

1. eğer x tek ise $11x-7$ çifttir.
2. eğer $11x-7$ çift ise x tektir.

1'i ispatlayalım.
(doğrudan ispatı kullanalım.)

$x = 2k+1$ olsun.

$$11(2k+1)-7 = 22k+4$$
$$= 2(\underbrace{11k+2}_{\in \mathbb{Z}})$$

$\in \mathbb{Z}$ old. dan

$11x-7$ çifttir.

2'yi ispatlayalım
(karşıt ters)

x çift olsun ($x=2k$)

$$11(2k)-7 = 22k-7$$
$$= 2(\underbrace{11k-4}_{\in \mathbb{Z}})+1$$

$\in \mathbb{Z}$ old. dan

$11x-7$ tek olur.

İspat biter.

Örnek: x, bir tamsayı olsun. Eğer, 5x-7 tek bir tamsayı ise o zaman 9x+2 çift tamsayıdır.

Çözüm: Sınıfta yapılacaktır…

③ Durum İncelemeli İspat !

$x \in \mathbb{Z}$ olsun. x'in özelliklerini içeren durumlar sözkonusu olacak ispat yapmaya durum ile ispat tekniği denir.

Teorem: Eğer $n \in \mathbb{Z}$ ise o zaman n^2+3n+5 tektir.

İspat: İspat n'in çift veya tek olma durumuna göre 2 durumda incelenir.

Durum 1: $n=2k$ olsun.

$$n^2+3n+5 = 4k^2+6k+5$$
$$= 2(\underbrace{2k^2+3k+2}_{\in \mathbb{Z}})+1 \quad \text{(tek tanımı)}$$

Durum 2: $n=2k+1$ olsun

$$n^2+3n+5 = 4k^2+4k+1+6k+3+5$$
$$= 2(\underbrace{2k^2+5k+4}_{\in \mathbb{Z}})+1 \quad \text{(tek tanımı)}$$

Durum 1 ve 2 'den ispat biter.

Örnek: x ve y iki tamsayı olsun. Eğer, x.y çift sayı olması için gerek ve yeter şart x' in çift veya y' nin çift sayı olmasıdır.

Çözüm: Sınıfta yapılacaktır…

④ Çelişki ile İspat !

$\forall x \in E\, P(x)$ nicelenmiş önermesi için doğ. değeri her zaman 1 olmayabilir. Bu durum araştırılırken;

$$\neg[\forall x \in P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in \neg P(x)$$

mantıksal denkliği yardımıyla elde edilen $x \in E$ ye "$\forall x \in P(x)$" nicelenmiş önermesi için aksine örnek denir.

Örnek: Real sayılar kümesinde tanımlı "$\forall x \in R$ için $(x^2-1)^2 > 0$" nicelenmiş önermesinin doğ. değerini bulalım.

Önerme yanlış.

$x = 1$ için $(x^2-1)^2 = 0$

$x = -1$ için $(x^2-1)^2 = 0$

$x = \mp 1$ aksine örneklerdir.

$\forall x \in E \; [p(x) \Rightarrow q(x)]$ önermesi verilsin.

Bir $x \in E$ için $p(x)$ açık önermesinin doğru ve $q(x)$ açık önermesinin yanlış old. kabul edilerek hipotezler, tanımlar, bir olası yanlış veya bir teorem ile çelişki elde edilebiliyorsa

$$\forall x \in E \; [p(x) \Rightarrow q(x)]$$

nicelenmiş önermesi doğru olur. Bu tekniğe çelişki ile ispat denir.

Teorem: Pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut değildir.

İspat: Kabul edelim ki en küçük sayı mevcut olsun. Bu durumda eğer $r \in \mathbb{R}^+$ en küçük ise her $x \in \mathbb{R}^+$ için $r < x$ olur.

Fakat her zaman $\frac{r}{2} < r$ ve $r/2 \in \mathbb{R}^+$ olup $0 < \frac{r}{2} < r$ elde edilir. Bu ise r'nin en küçük reel sayı olması ile çelişir. Bu sebeple pozitif reel sayıların en küçüğü mevcut değildir.

Teorem) $\sqrt{5}$ irrasyonel sayıdır.

İspat) $\sqrt{5}$ rasyonel olsun.

$$\sqrt{5} = \frac{a}{b} \longrightarrow \sqrt{5} = \frac{5k}{b}$$

$a^2 = 5b^2$

a^2, 5'in katı olduğundan

$a = 5k$ olur.

$5b^2 = 25k^2$

$b^2 = 5k^2$

$\Downarrow$ b^2, 5'in katı old. dan

$b = 5t$ olsun.

Rasyonel sayı tanımından $\frac{a}{b}$ rasyonel olmak üzere; a ve b

aralarında asal olmalıdır. $a=5k$ $b=5t$ old. dan a ve b aralarında

da asal değildir. O zaman $\frac{a}{b}=\sqrt{5}$ rasyonel değildir.

Biz $\sqrt{5}$'i rasyonel kabul etmiştik, çelişki elde ettik.

İspat biter, $\sqrt{5}$ rasyonel değildir.

5 Tümevarım ile İspat

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı $P(n)$ açık önermesi verilsin. Eğer;

(i) $P(1)$ doğru

(ii) her $n \geq 0$ doğal sayısı için $P(n)$ doğru iken $P(n+1)$ doğru ise o zaman her $n \in \mathbb{N}$ için $P(n)$ doğrudur.

$\boxed{\text{Teorem:}}$ Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $1+2+\cdots+n = \frac{n.(n+1)}{2}$ dir.

İspat:
(1) $n=1$ için $1 = \frac{1.\cancel{2}}{\cancel{2}}$

$1 = 1$ ✓ doğru

(2) $n=k$ için kabul edelim

$1+2+\cdots+k = \frac{k.(k+1)}{2}$ olsun.

③ $n=k+1$ için doğru mudur?

$$\underbrace{1+2+\dots+k}+k+1 \stackrel{?}{=} \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{k\cdot(k+1)}{2}+k+1$$

$$\Rightarrow \frac{k\cdot(k+1)+2\cdot(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Eşitliği gösterdik.
ispat biter.

Örnek

Her $n \geq 1$ doğal sayısı için $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n.(n+1)(2n+1)}{6}$ do

İspat!

1 $n=1$ için $1^2 = \frac{1.2.3}{6} \Rightarrow 1=1$ ✓

2 $n=k$ için doğru olsun.

$$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6}$$ olsun.

③ $n = k+1$ için doğru mudur?

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{} + (k+1)^2 \overset{\boxed{?}}{=} \underbrace{\frac{(k+1).(k+2).(2k+3)}{6}}_{A \text{ olsun.}}$$

$$\Rightarrow \frac{k.(k+1).(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k.(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1)\left[(2k^2+k) + (6k+6)\right]}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1).\left[2k^2 + 7k + 6\right]}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{(k+1).(k+2)(2k+3)}{6} = A$$ olduğundan ispat biter.

Örnek

$\forall n \in \mathbb{N}^+$ için $5^n - 2^n$ sayısı 3 ile bölünebilirdir. $(3 \mid 5^n - 2^n)$

İspat

(1) $n=1$ için $5^1 - 2^1 = 3$, $3 \mid 3$ old. dan doğru ✓

(2) $n=k$ için doğru olsun.

$5^k - 2^k = 3.a$ olsun.

(3) $n=k+1$ için doğru mudur?

$$5^{k+1} - 2^{k+1} \overset{?}{=} 3.b$$

$$\Rightarrow 5^k.5 - 2^k.2$$

$$\Rightarrow 3.5^k + 2.5^k - 2.2^k$$

$$\Rightarrow 3.5^k + 2.\underbrace{(5^k - 2^k)}_{3a}$$

$$\Rightarrow 3.5^k + 6a = 3.\underbrace{(5^k + 2a)}_{b \text{ olmak üzere}}$$

$5^{k+1} - 2^{k+1} = 3b$ old. dan $3 \mid 5^{k+1} - 2^{k+1}$ 'dir.

İspat biter.

Çalışma Sorusu:

$\forall n \in N^{+}$ için $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n.(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ old. ispatlayınız

Küme Teorisi

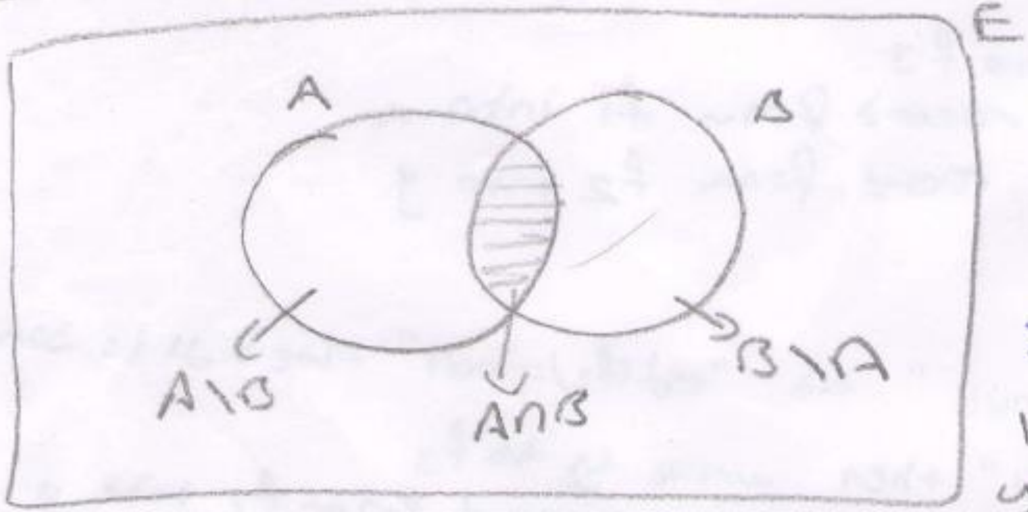
Hangi tip olursa olsun objeler topluluğu küme olarak adlandırılır. Objeler her şey olabilir ve bunlara kümenin elemanları denir.

Eleman Sayısı: Eğer A sonlu bir küme ise kardinalitesi, $|A|$, içerdiği (farklı) elemanların sayısıdır.

* Eğer A sonsuz sayıda elemana sahip ise, sonsuz kardinaliti vardır denir ve $|A| = \infty$ ile gösterilir.

Kümelerin Eşitliği: Eğer $\forall x$ için $\{x \in A \Leftrightarrow x \in B\}$ ise $A = B$ di denir.

Alt kümeler: A'nın tüm elemanları aynı zamanda B'nin de elemanları ise A kümesi B kümesinin alt kümesidir denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir. Sembolik olarak $\forall x$ için $\{x \in A \rightarrow x \in B\}$ ise $A \subseteq B$'dir.



Ayrık küme | Kesişimi boş küme olan kümelere ayrık küme denir.

Simetrik Fark | A ve B kümelerinin simetrik farkı yalnızca A ya da yalnızca B kümesine ait olan elemanların kümesidir. $A \Delta B$ ile gösterilir.

$$A \Delta B = (A/B) \cup (B/A)$$

Küme Özellikleri ve İspat Yöntemleri

$A, B, C \in E(x)$ ve A'nın tümleyeni $\bar{A}$ olsun.
evrensel küme

1. $\bar{\bar{A}} = A$

2. a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (De morgan)
   b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

3. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

6. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$ (eş güçlülük)

7. $A \cup \bar{A} = E$ Tümleme
   $A \cap \bar{A} = \emptyset$

8. $A \cup E = E$ Baskınlık
   $A \cap \emptyset = \emptyset$

9. $A \cup \emptyset = A$ birim olma
   $A \cap E = A$

10. $A \cup (A \cap B) = A$ yutma özelliği
    $A \cap (A \cup B) = A$

İspat

2.a) $x \in E(x)$ olsun.

$x \in \overline{A \cup B} \equiv x \notin A \cup B$

$\equiv x \notin A$ ve $x \notin B$

$\equiv x \in \bar{A}$ ve $x \in \bar{B}$

$\boxed{\equiv x \in \bar{A} \cap \bar{B}}$

5.a) $x \in A \cap (B \cup C) \equiv x \in A$ ve $x \in (B \cup C)$

$\equiv x \in A$ ve $x \in B$ veya $x \in C$

$x \in B$ ise $x \in A \cap B$ olur. Böylece $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$'dir.

$x \in C$ ise $x \in A \cap C$ olur. Böylece $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$'dir.

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$(A\cap B)\cup(A\cap C) \subseteq A\cup(B\cap C)$ midir?

$x \in (A\cap B)\cup(A\cap C) \equiv x\in A\cap B$ veya $x\in A\cap C$

* $x\in A\cap B$ ise $x\in A$ ve $x\in B$ $\equiv x\in A$ ve $x\in B\cup C$ dur.
* $x\in A\cap C$ ise $x\in A$ ve $x\in C$ $\equiv x\in A$ ve $x\in B\cup C$ olur.

Böylece $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cup(B\cap C)$ dur. İspat biter.

* Bir kümenin eleman sayısına kümenin kardinalitesi denir. A kümesi için $|A|$ ile gösterilir.

$A=\{1,2,3,4\} \Rightarrow |A|=4$

$B=\{\ \} \Rightarrow |B|=0$ olur.

$C=Z^+ \Rightarrow |C|=\infty$

$=\{x\in Z \mid x>0\}$

Kuvvet Kümesi = Herhangi bir $A \subseteq E$ için A kümesinin bütün alt kümelerinden oluşan kümeye A'nın kuvvet kümesi denir ve $P(A)$ ile gösterilir.

$|P(A)| = 2^{|A|}$ 'dir.

$A = \{1, 2, 3\}$

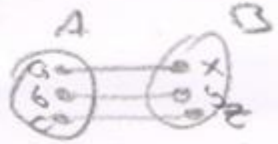
$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Özalt kümesi $= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ $\quad 2^{|A|} - 1$ 'dir.

Sonsuz Küme =?

A, B iki küme $f: A \to B$ bir fonk. olsun. f fonk.nu 1-1 ve örten ise bu fonksiyona birebir eşleme denir. A'dan B'ye en az bir 1-1 eşleme varsa A ve B kümelerine eşit güçlü kümeler denir. $A \sim B$ ile gösterilir.

Örn) $A = \{a, b, c\}$ ve $B = \{x, y, z\}$ $\quad A \sim B$ 'dir.



1-1 ve örten.

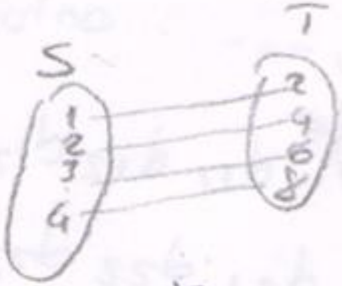
En az bir alt kümesine eşit sayılı olan kümeye sonsuz küme denir. Sonsuz olmayan kümeye sonlu küme denir.

$A = \{\emptyset\}$ ise sonlu küme $|A| = 0$

$A = \{x\}$ ise " " $|A| = 1$

Örn. $S = Z^+$ olsun.

$T = \{x \mid x = 2k \text{ ve } k \in Z^+\}$ olsun.



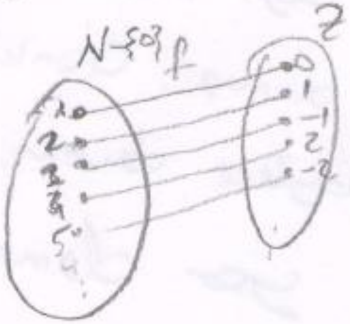
O zaman Z^+ sonsuz kümedir.

Tanım) Doğal sayıların bir alt kümesine eşit güçlü olan kümeye sayılabilir küme denir. Bir küme sayılabilir değilse sayılamayan küme denir.

⊛ Doğal sayılar, Tam sayılar, Rasyonel sayılar, Asal sayılar → sayılabilir sonsuz

⊛ Reel sayılar, kompleks sayılar → sayılamaz sonsuz

Örnek)



$N-\{0\} \sim Z$ old. dan Z sayılabilir bir kümedir.

Örnek) Q sayılabilir dir.

1/1	1/2	1/3	1/4	---- 1/n
2/1	2/2	2/3	2/4	---- 2/n
3/1	3/2	3/3	3/4	---- 3/n
4/1	4/2	4/3	4/4	---- 4/n

$\frac{1}{1} \to 1$

$\frac{2}{1} \to 2$

$\frac{1}{2} \to 3$

$\frac{1}{3} \to 4$

$\frac{1}{1}$ var $\frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}$ yok
1-1 olmaz.

$\frac{1}{2}$ var $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ yok
1-1 olmaz.

⁝ old. dan Q sayılabilir dir.

Çalışma Sorusu: Reel sayılar kümesi sayılabilir mi? Kanıtlayınız.

Bilgisayar Bilimlerinde Kümeler

1) f_1 ve f_2 içerdikleri kayıtlar tamsayı olacak şekilde uzunluk-
ları bilinmeyen iki dosya olsun. Eğer bu 2 dosyadaki kayıtlar
küçükten büyüğe sıralı ise, içindeki kayıtlar küçükten büyüğe sıralı
olacak şekilde bu iki dosyanın kayıtlarının birleşimini $A \cup B$
f_3 dosyasını yazdırınız. {Pseudo kodu yazınız.}

```
function birlesim (merge) (file f1, file f2, file f3)
    get next record from f1 into x
    get next record from f2 into y
    while (not eof(f1) OR not eof(f2))
        if x<y then
            write x to f3
            get next record from f1 into x
        else if (y<x) then
            write y to f3
            get next record from f2 into y
        else
            write x to f3
            get next record from f1 into x
            get next record from f2 into y
        end if
    end while
    if "eof(f1) = null" and "eof(f2) = null" then go to son
BAS1: if "eof(f1) = null" then   bas1: write y to f3
                                 get next record from f2 into y
                                 if eof(f2) = null then go to son
                                   else
                                     go to BAS 1
                                 endif
      end if
```

```
                                         bas2:
if "eof(f2) = null" then write x to f3
                         get next record from f1 into x
                         if eof(f1) = null then go to son
                            else
                            goto Bas 2
                         endif
                     end if
SON:
---end function.
```

Çalışma Sorusu:

Aynı soruda;

i) $A \cap B$ ii) A/B iii) B/A' leri f3'le yazdırınız.

Çalışma Sorusu:

n elemanlı bir kümenin alt kümelerinin sayısı 2^n'dir.
5 elemanlı bir $S=\{a,b,c,d,e\}$ kümesinin elemanlarının 5
uzunluklu bir dizide tutulduğunu varsayalım. S kümesinin
tüm alt kümelerini listeleyen algoritmayı oluşturunuz.

Kaynaklar

- *Discrete Mathematics and Its Applications*, Kennet H. Rosen

(Ayrık Matematik ve Uygulamaları, Kennet H. Rosen (Türkçe çeviri), Palme yayıncılık)

- *Discrete Mathematics: Elementary and Beyond*, L. Lovász, J. Pelikán, K. Vesztergombi, 2003.

- *Introduction to Algorithms*, T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, 2009.

- *Introduction To Design And Analysis Of Algorithms*, A. Levitin, 2008.