20.2 Общий случай

Из результатов п. 19.6 и предидущего п.20.1 непосредственно вытекает следующая теорема.

ТОРЕМА 1. *Неопределённый интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором знаменатель дроби не обращается в нуль, существует и выражается через элементарные функции, а именно он является алгебраической суммой суперпозиций рациональных дробей, арктангенсов и натуральных логарифмов.*

Теорема 1 есть прямое следствие формул (19.24), (19.30), (18.7), (18.8), (18.9), (20.1)–(20.6). Эти формулы дфют и конкретный способ вычисление интеграла от рациональное функции: сначала делением числителя на знаменатель выделяется «целая часть», т.е.данная рациональная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (19.24). Если получившаяся правильная рациональная дробь оказывается ненулевой, то она раскладывается на сумму элементарных дробей (19.30), после чего, используя линейность интеграла (18.7) и (18.8), можно вычислить интегралы от каждого слагаемого отдельно, согласно формулам (18.9) и (20.1)–(20.6).

Примеры. 1. Вычислим $\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)}$. Уже известно (см.(19.32)), что

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x-2)},$$

поэтому

$$\int \frac{xdx}{(x^2-1)(x-2)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+1| + \frac{2}{3}\ln|x-2| + C.$$

2. Вычислим $\int \frac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2)}\,dx$. Согласно общему правилу, выделим целую часть, разделив числитель на знаменатель; имеем

$$\frac{x^6+2x^4+2x62-1}{x(x^2+1)^2} = x + \frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2}$$

Для получившейся правильной рациональной дроби уже найдено ее разложение на элементарные дроби (см. формулу (19.33)):

$$\frac{x^2-1}{x(x^2+1)^2} = -\frac{1}{x} + \frac{2x}{(x^2+1)^2} + \frac{x}{x^2+1},$$

поэтому

$$\begin{aligned}\int \tfrac{x^6+2x^4+2x^2-1}{x(x^2+1)^2}dx = \int xdx - \int \tfrac{dx}{x} + \int \tfrac{2xdx}{(x^2+1)^2} + \int \tfrac{x}{x^2+1} = \\ = \tfrac{x^2}{2} - \ln|x| + \int \tfrac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} + \tfrac{1}{2}\int \tfrac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \\ = \tfrac{x^2}{2} - \ln|x| - \tfrac{1}{x^2+1} + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + C.\end{aligned}$$

Следует иметь в виду, что указанный метод вычисления неопределенного интеграла от рациональной дроби является общим: с помощью его можно вычислить неопределенный интеграл от любой рациональной дроби, если можно получить конкретное разложение знаменателя на множетели вида (19.10). Однако естественно, что в отдельных частных случаях бывает целесообразнее для значительного сокращения вычислений действовать иными путями.

Например, для вычисления интеграла $I = \int \frac{x^2dx}{(1-x^2)^3}$ проще не раскладывать подынтегральную функцию на элементырные дроби, а применить правило интегрирования по частям. Положив $u = x, dv = \frac{xdx}{(1-x^2)^3}$ и, следовательно, $du = dx$, $v = \frac{1}{4(1-x^2)^2}$, получим

$$I = -\frac{1}{2}\int x\frac{d(1-x^2)}{(1-x^2)3} = \frac{x}{4(1-x^2)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{1}{(1-x^2)^2}dx$$