Отчет

1 Авторы

Студенты группы M3439:

- Тепляков Валерий
- Плешаков Алексей
- Филипчик Андрей

2 Source code

Исходный код можно посмотреть тут

3 Задание 2

Даны следующие функции:

0. $f(x,y) = 100(y-x)^2 + (1-x)^2$
1. $f(x,y) = 100(y-x^2)^2 + (1-x)^2$
2. $f(x,y) = 2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)} + 3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2}$

Найдем минимум 0 и 1 функции и максимум 2. Последнее можно свести к задаче минимума умножив функцию на -1

Исследуем заданные задачи с помощью метода градиентного спуска (в качестве одномерной оптимизации используется золотое сечение), метода Ньютона и метода сопряженных градиентов.

Алгоритмы запускались из следующих начальных точек:

1. (0, 0)
2. (-1, 2)
3. (2, -1)
4. (4.2, 2.4)
5. (-0.01, 0.05)

Сводная таблица приведена ниже:

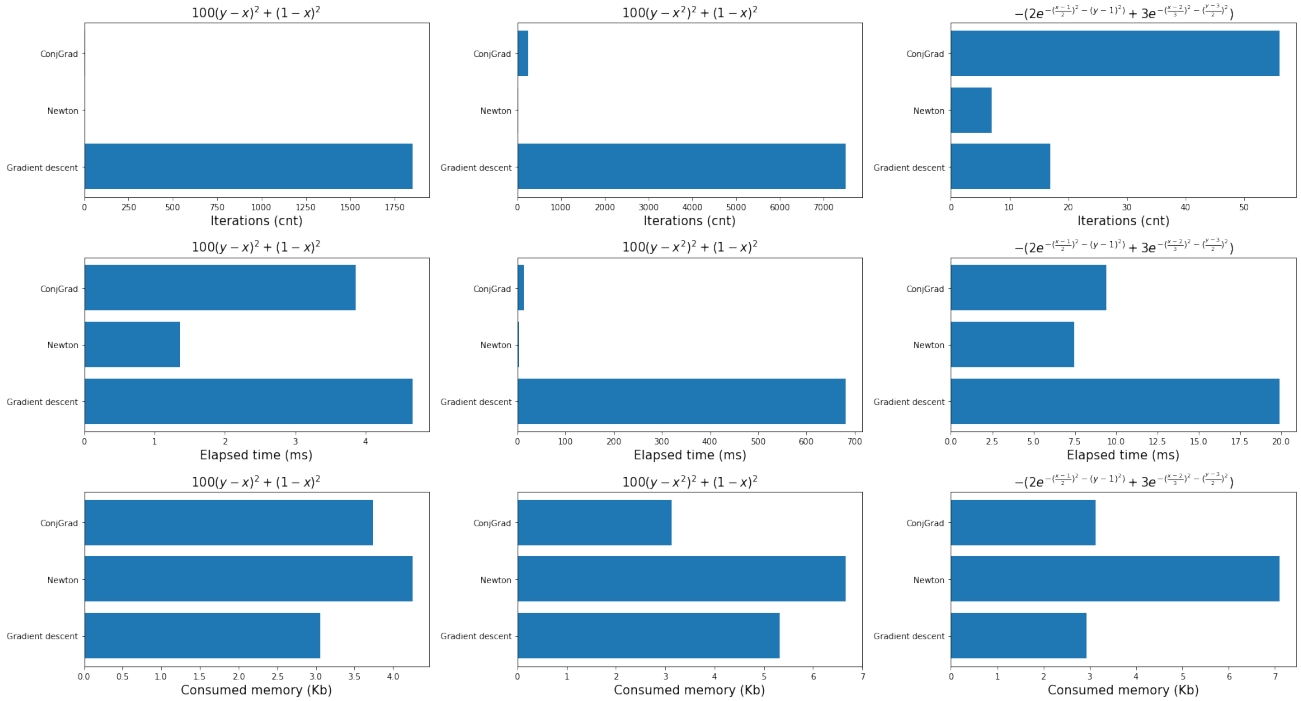
[4]:

fn	alg	init	min	iters
0	Gradient descent	[0, 0]	(0.99990, 0.99990)	1850
0	Newton	[0, 0]	(1.00000, 1.00000)	1
0	ConjGrad	[0, 0]	(1.00000, 1.00000)	2
0	Gradient descent	[-1, 2]	(1.00000, 1.00000)	8
0	Newton	[-1, 2]	(1.00000, 1.00000)	1
0	ConjGrad	[-1, 2]	(1.00000, 1.00000)	3
0	Gradient descent	[2, -1]	(1.00000, 1.00000)	6
0	Newton	[2, -1]	(1.00000, 1.00000)	1
0	ConjGrad	[2, -1]	(1.00000, 1.00000)	3
0	Gradient descent	[4.2, 2.4]	(1.00000, 1.00000)	8
0	Newton	[4.2, 2.4]	(1.00000, 1.00000)	1
0	ConjGrad	[4.2, 2.4]	(1.00001, 1.00001)	6
0	Gradient descent	[-0.01, 0.05]	(0.99998, 0.99999)	60
0	Newton	[-0.01, 0.05]	(1.00000, 1.00000)	1
0	ConjGrad	[-0.01, 0.05]	(1.00000, 1.00000)	3
1	Gradient descent	[0, 0]	(0.99960, 0.99919)	5106
1	Newton	[0, 0]	(1.00000, 1.00000)	13
1	ConjGrad	[0, 0]	(0.99977, 0.99954)	39
1	Gradient descent	[-1, 2]	(0.99957, 0.99914)	6190
1	Newton	[-1, 2]	(1.00000, 1.00000)	22
1	ConjGrad	[-1, 2]	(1.00014, 1.00027)	49
1	Gradient descent	[2, -1]	(1.00003, 1.00006)	7512
1	Newton	[2, -1]	(1.00000, 1.00000)	14
1	ConjGrad	[2, -1]	(1.00007, 1.00013)	236
1	Gradient descent	[4.2, 2.4]	(1.00002, 1.00005)	58
1	Newton	[4.2, 2.4]	(1.00000, 1.00000)	26
1	ConjGrad	[4.2, 2.4]	(0.99997, 0.99993)	222
1	Gradient descent	[-0.01, 0.05]	(0.99957, 0.99914)	6941
1	Newton	[-0.01, 0.05]	(1.00000, 1.00000)	14
1	ConjGrad	[-0.01, 0.05]	(0.99998, 0.99996)	30
2	Gradient descent	[0, 0]	(1.26303, 1.33440)	14
2	Newton	[0, 0]	(1.26304, 1.33440)	5
2	ConjGrad	[0, 0]	(1.26304, 1.33440)	32
2	Gradient descent	[-1, 2]	(1.26303, 1.33440)	17
2	Newton	[-1, 2]	(1.26303, 1.33440)	5
2	ConjGrad	[-1, 2]	(1.26303, 1.33440)	28
2	Gradient descent	[2, -1]	(1.26304, 1.33440)	17
2	Newton	[2, -1]	(1.26304, 1.33440)	7
2	ConjGrad	[2, -1]	(1.96715, 2.88612)	56
2	Gradient descent	[4.2, 2.4]	(1.96715, 2.88611)	15
2	Newton	[4.2, 2.4]	(1.96715, 2.88611)	4
2	ConjGrad	[4.2, 2.4]	(1.96715, 2.88611)	23
2	Gradient descent	[-0.01, 0.05]	(1.26303, 1.33440)	15
2	Newton	[-0.01, 0.05]	(1.26304, 1.33440)	5
2	ConjGrad	[-0.01, 0.05]	(1.26303, 1.33439)	28

4 Задание 3

Сравним используемые методы по количеству итераций для нахождения минимума, по времени работы и затраченной памяти. Видно, что реализованный метод Ньютона сходится сильно быстрее, а градиентный спуск уступает остальным алгоритмам из-за отсутствии информации о гессиане функций. Можно сказать, что все алгоритмы затрачивают минимальное количество памяти, потому что при таких маленьких значениях делать выводы какой алгоритм лучше

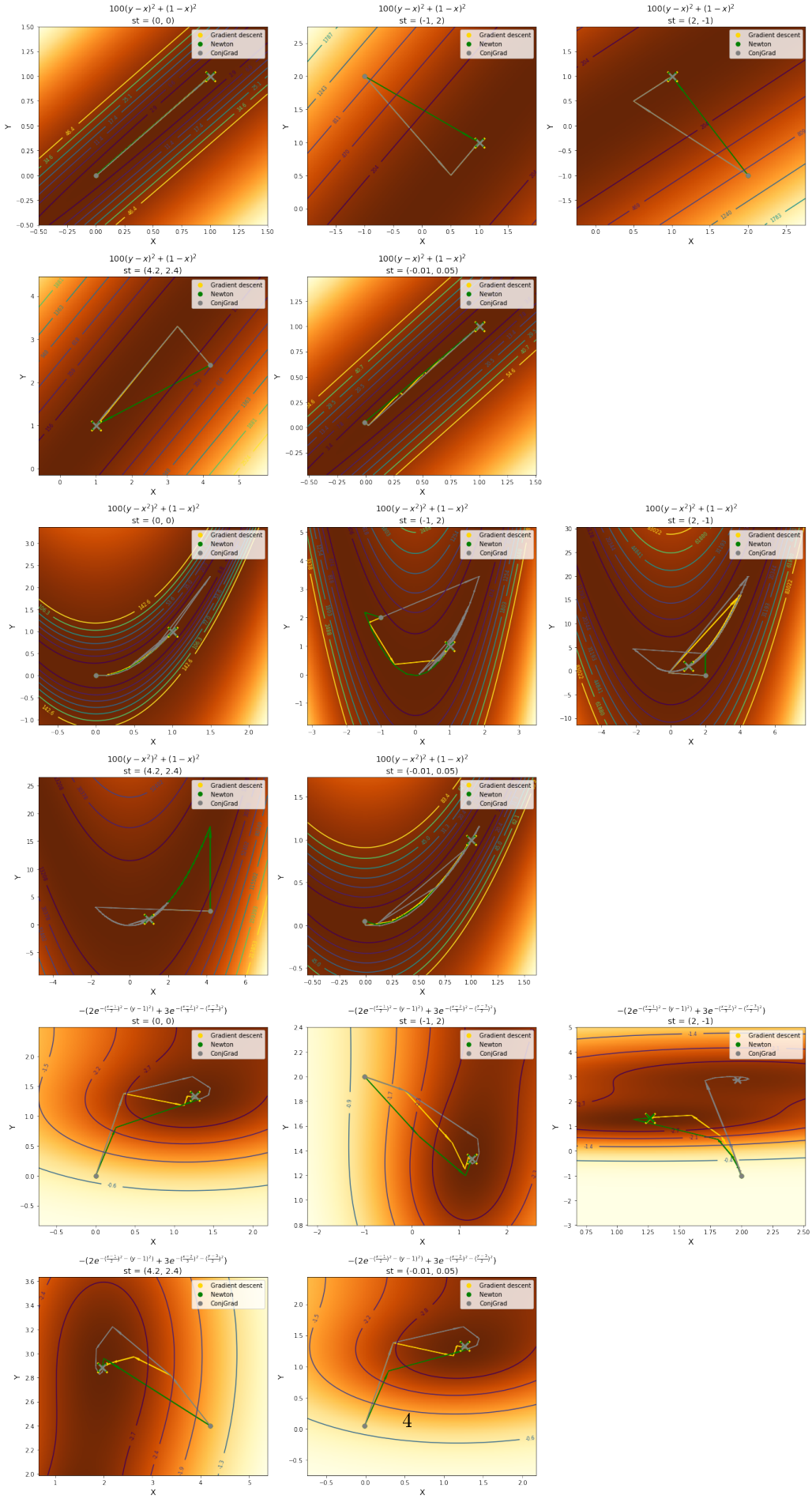
не рационально.



5 Задание 4

На графиках ниже можно наблюдать траектории различных алгоритмов на всех функциях и всех исходных точках (точка на графике — стартовое значение, крестик — результат алгоритма)

Также на графиках изображены линии уровня, и сетка раскрашена по значениям функции в точках (чем темнее — тем меньше значение, но помним, что 2 функция инвертированна)


$100(y-x)^2+(1-x)^2$
st = (0, 0)
$100(y-x)^2+(1-x)^2$
st = (-1, 2)
$100(y-x)^2+(1-x)^2$
st = (2, -1)
$100(y-x)^2+(1-x)^2$
st = (4.2, 2.4)
$100(y-x)^2+(1-x)^2$
st = (-0.01, 0.05)
$100(y-x^2)^2+(1-x)^2$
st = (0, 0)
$100(y-x^2)^2+(1-x)^2$
st = (-1, 2)
$100(y-x^2)^2+(1-x)^2$
st = (2, -1)
$100(y-x^2)^2+(1-x)^2$
st = (4.2, 2.4)
$100(y-x^2)^2+(1-x)^2$
st = (-0.01, 0.05)
$-(2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)}+3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2})$
st = (0, 0)
$-(2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)}+3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2})$
st = (-1, 2)
$-(2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)}+3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2})$
st = (2, -1)
$-(2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)}+3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2})$
st = (4.2, 2.4)
$-(2e^{-(\frac{x-1}{2})^2-(y-1)^2)}+3e^{-(\frac{x-2}{3})^2-(\frac{y-3}{2})^2})$
st = (-0.01, 0.05)
Gradient descent
Newton
ConjGrad
X
Y