

# Отчет

## 1 Авторы

Студенты группы М3439:

- Тепляков Валерий
- Плешаков Алексей
- Филипчик Андрей

## 2 Source code

Исходный код можно посмотреть [тут](#)

All tests passed.

## 3 Вопросы

1. Общая и каноническая форма задачи линейного программирования

Общая форма:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m_1}, \\ \sum a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \\ \sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{m_2 + 1, m}. \end{cases}$$

Каноническая форма (только равенство + неотрицательность):

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \\ \sum a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0, \quad \forall j. \end{cases}$$

2. Методы естественного базиса. Метод искусственного базиса

Искусственный базис: Рассмотрим каноническую форму задачи; пусть правая часть равенств в ней поэлементно больше нуля (если нет, домножим равенство на  $-1$ ). Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m -x_{n+j} \rightarrow \max, \\ \sum a_{ij} x_j + x_{n+j} = b_j, \quad j = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Неизвестные  $x_{n+i}$  называются искусственными переменными. как как  $b_i > 0$ , база  $< n+1, \dots, n+m >$  допустима, а задача сведена к новой ЗЛП.

Естественный базис: решение задачи, удовлетворяющее ограничениям и проистекающее из постановки задачи (максимизация прибыли - любой план производства, удовлетворяющий нормам, задача о назначении - любое физически возможное назначение)

3. Доказать, что ОДР (область допустимых решений) является выпуклым множеством

Пусть произвольное условие  $\sum a_{ij}x_j = b_i \equiv (a_i, x) = b$  выполнено в некоторых точках  $x_1$  и  $x_2$ . Возьмем произвольную точку  $x_l \in (x_1, x_2)$ . Ее можно представить в виде  $x_l = lx_1 + (1-l)x_2$ ,  $l \in (0, 1)$ . Тогда, для этой точки

$$(a_i, x_l) = (a_i, lx_1 + (1-l)x_2) = l(a_i, x_1) + (1-l)(a_i, x_2) \leq lb + (1-l)b = (l+1-l)b = b$$

То есть  $(a_i, x_l) \leq b$  и множество удовлетворяет условию выпуклости

4. Может ли ОДР в задаче линейного программирования состоять из одной единственной точки? Если да, то привести пример

Рассмотрим ЗЛП

$$\begin{cases} x_0 \rightarrow \max, \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

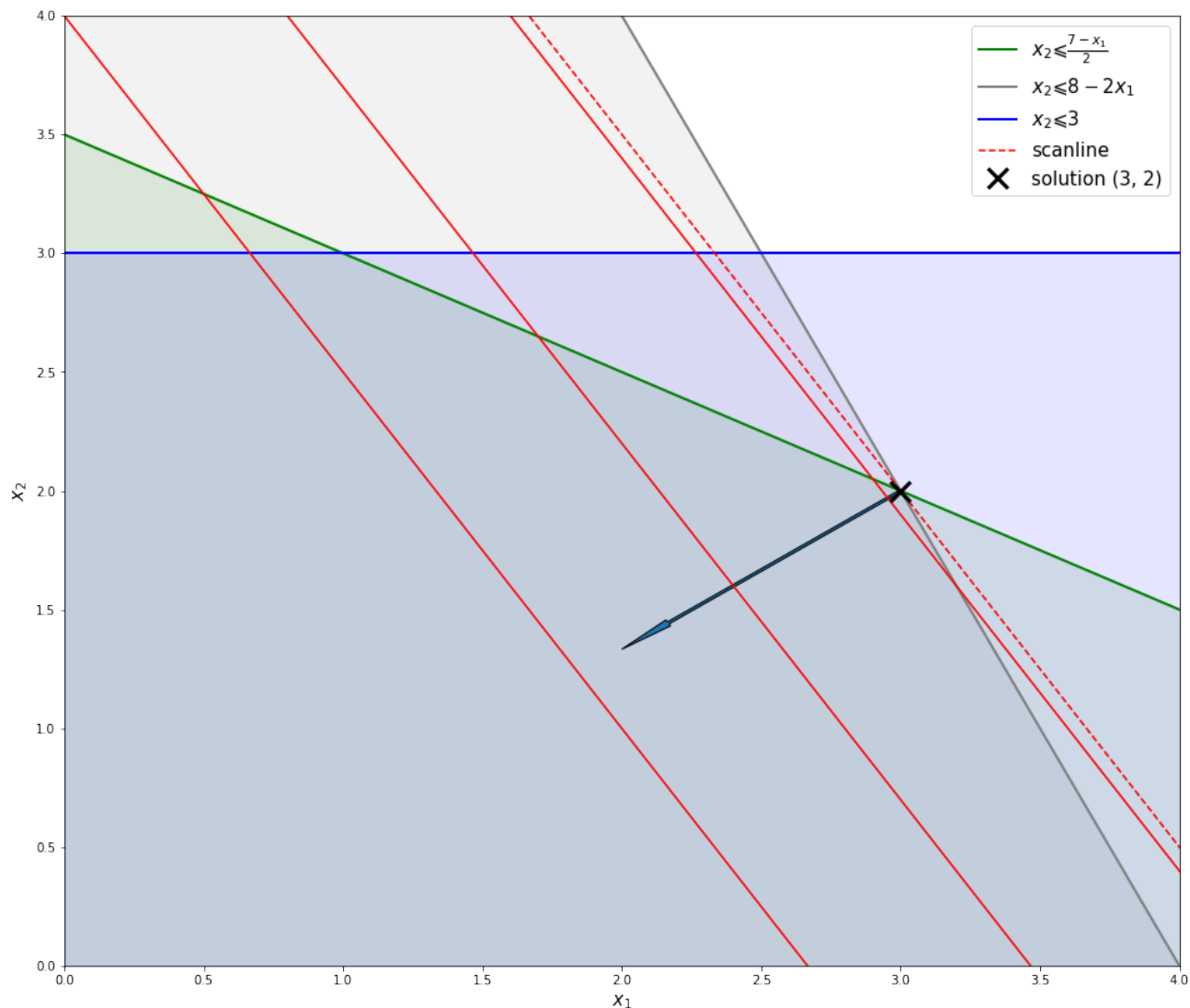
Очевидным образом такая задача имеет множество решений из одной точки.

5. Графический метод решения задачи линейного программирования. Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Построим линии ограничений на осях  $x_1Ox_2$ . Будем двигать прямую с вектором нормы  $(-3, -2)$  в направлении, противоположном вектору нормы (так как ищем минимум, а не максимум).  $(3, 2)$  — решение, как крайняя точка



6. Найти все базисы системы равенств и соответствующие им базисные решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Вычтем из второй строки первую:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -2x_2 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

Очевидно, что ровно одна из переменных  $x_2, x_4$  должна являться базисной; тогда вторую базисную переменную можно выбрать как  $x_1$ , так и  $x_4$ . Соответственно, все базисы и соответствующие им решения выглядят следующим образом:

- $x_1, x_2, (1, 0, 0, 0)$
- $x_1, x_4, (1, 0, 0, 0)$
- $x_2, x_3, (0, 0, 1, 0)$

- $x_3, x_4, (0, 0, 1, 0)$

7. В данной системе ограничений выразить базисные переменные указанного базисного допустимого решения  $\bar{x} = (1, 2, 0)^T$  через небазисные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases}$$

Так как в данном решении  $x_3 = 0$ , сделаем  $x_3$  небазисной переменной. тогда  $x_2 = 2 - x_3, x_1 = 3 - 2x_3 - x_2$ , и решение действительно вычисляется в  $(1, 2, 0)$ .

8. Исследовать на оптимальность решение  $\bar{x} = (0, 0, 1, 1)^T$  задачи:

$$f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

При запуске симплекс-метода на данной системе видно, что решение  $\bar{x} = (0, 0, 1, 1)^T$  является оптимальным.