

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

(a) $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

(a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$

(b) $\alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

(c) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$

(d) $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$

(e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

(a) $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

(b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$

(c) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(d) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(e) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(f) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(g) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(h) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

(i) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

(j) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(k) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

(l) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(m) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(n) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

(o) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.

(a) Покажите, что $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.

(b) Покажите, что $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. (Теорема Гливенко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

- (a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$.
- (b) Покажите, что если α — аксиома (1...9 схемы), то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$.
- (c) Покажите, что $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$.
- (d) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\beta$.
- (e) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$.
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречно.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречно, то противоречно и интуиционистское исчисление высказываний.

Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ — множество каких-то подмножеств X . Множество X мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а Ω — *топологией*. Элементы множества Ω мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам (*аксиомам топологического пространства*):

1. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если $\{A_i\}, A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω , то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

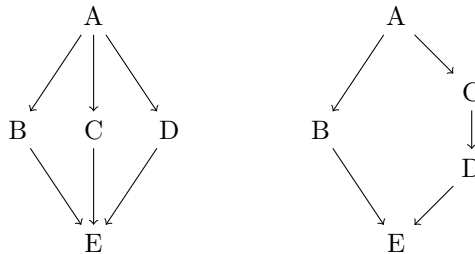
Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
 - (a) Покажите, что при $X = \{0, 1\}, \Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ пара $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
 - (b) Покажите, что если X — непустое множество, то пара $\langle X, \{\emptyset, X\} \rangle$ является топологическим пространством.
 - (c) Предложите примеры как минимум двух множеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$, для которых $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$ — не топологическое пространство.
 - (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар $\langle X, \Omega \rangle$, в которых бы аксиома не была выполнена.
 - (e) Для $X = \mathbb{R}^n$ и Ω , содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
 - (a) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ (топология стрелки)
 - (b) $X \neq \emptyset, \Omega = \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология)
 - (c) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A \text{ — конечно}\}$ — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
 - (d) X — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками: $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда если $a \in A$ и $a \geq b$, то $b \in A$.
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
 - (a) Покажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.
 - (b) Пусть A — замкнутое, а B — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость $B \setminus A$ и $A \setminus B$?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
 - (а) Для множества A внутренностью A° назовём максимальное открытое множество, что $A^\circ \subseteq A$.
 - (б) Для множества A замыканием \bar{A} назовём минимальное замкнутое множество, содержащее A .
5. Найдите $[0, 1]^\circ$ и $\overline{[0, 1]}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?
6. Найдите $\{0\}^\circ$ и $\overline{\{0\}}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?

Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.
2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов a, b, c выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. А будет ли выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c \rightarrow b \cdot c$?
3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях a, b и c выполнены следующие утверждения:
 - (а) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \rightarrow c \sqsubseteq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \sqsubseteq c \rightarrow b$;
 - (б) Из $a \sqsubseteq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
 - (с) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (д) $b \sqsubseteq a \rightarrow b$;
 - (е) $a \rightarrow b \sqsubseteq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (ф) $a \sqsubseteq b \rightarrow a \cdot b$;
 - (г) $a \rightarrow c \sqsubseteq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ и переменные A, B, C со значениями a, b, c ($a, b, c \in H$). Покажите, что:
 - (a-i) Если ϕ — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных A, B, C вместо метаварiableнных при любых a, b, c будет выполнено $\llbracket \phi \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (j) Аналогично, будет выполнено $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (к) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$ и $\llbracket \alpha \vee \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$.
 - (л) Пусть ϕ и $\phi \rightarrow \tau$ — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда τ — тоже истинное высказывание
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:
 - (а) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ (закон Пирса);

- (b) $(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$;
- (c) $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$;
- (d) $P \rightarrow \neg\neg P$;
- (e) $\neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;