

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

(a)  $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

(a)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$

(b)  $\alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

(c)  $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$

(d)  $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$

(e)  $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

(a)  $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

(b)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$

(c)  $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(d)  $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(e)  $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(f)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(g)  $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(h)  $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

(i)  $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

(j)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(k)  $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

(l)  $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(m)  $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(n)  $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

(o)  $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

## Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть  $\Gamma$  — какой-то список высказываний и пусть  $\alpha$  — высказывание.

(a) Покажите, что  $\Gamma \vdash \alpha$  влечёт  $\Gamma \models \alpha$ .

(b) Покажите, что  $\Gamma \models \alpha$  влечёт  $\Gamma \vdash \alpha$ .

2. (Теорема Гливленко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ , если существует вывод формулы  $\alpha$  из гипотез  $\Gamma$  в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как  $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$ .

- (a) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ .
- (b) Покажите, что если  $\alpha$  — аксиома (1...9 схемы), то  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg\alpha$ .
- (c) Покажите, что  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ .
- (d) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg\alpha$  и  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ , то  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg\beta$ .
- (e) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg\alpha$  (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \neg\neg\alpha$ .
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$ . Покажите, что формула  $\alpha$  исчисления, такая, что  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ , существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречиво.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.