

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

$$(a) \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

$$(a) \alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$$

$$(b) \alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$(c) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$$

$$(d) \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$$

$$(e) \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

$$(a) \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$(b) \alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$$

$$(c) \neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(d) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(e) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(f) \alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(g) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(h) \alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(i) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$(j) \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(k) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$(l) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(m) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(n) \neg\alpha \vdash \neg\alpha$$

$$(o) \alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

## Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть  $\Gamma$  — какой-то список высказываний и пусть  $\alpha$  — высказывание.

$$(a) \text{ Покажите, что } \Gamma \vdash \alpha \text{ влечёт } \Gamma \models \alpha.$$

$$(b) \text{ Покажите, что } \Gamma \models \alpha \text{ влечёт } \Gamma \vdash \alpha.$$

2. (Теорема Гливленко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ , если существует вывод формулы  $\alpha$  из гипотез  $\Gamma$  в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как  $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$ .

- (a) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ .
- (b) Покажите, что если  $\alpha$  — аксиома (1...9 схемы), то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ .
- (c) Покажите, что  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ .
- (d) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$  и  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ , то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\beta$ .
- (e) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$  (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ .
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$ . Покажите, что формула  $\alpha$  исчисления, такая, что  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ , существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречно.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречно, то противоречно и интуиционистское исчисление высказываний.

### Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $X$  — некоторое множество, а  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$  — множество каких-то подмножеств  $X$ . Множество  $X$  мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а  $\Omega$  — *топологией*. Элементы множества  $\Omega$  мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам (*аксиомам топологического пространства*):

1.  $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$  (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если  $\{A_i\}, A_i \in \Omega$  — некоторое семейство элементов  $\Omega$ , то  $\bigcup_i A_i \in \Omega$  (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$  — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто:  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
  - (a) Покажите, что при  $X = \{0, 1\}, \Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  пара  $\langle X, \Omega \rangle$  является топологическим пространством.
  - (b) Покажите, что если  $X$  — непустое множество, то пара  $\langle X, \{\emptyset, X\} \rangle$  является топологическим пространством.
  - (c) Предложите примеры как минимум двух множеств  $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$ , для которых  $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$  — не топологическое пространство.
  - (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар  $\langle X, \Omega \rangle$ , в которых бы аксиома не была выполнена.
  - (e) Для  $X = \mathbb{R}^n$  и  $\Omega$ , содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что  $\langle X, \Omega \rangle$  является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
  - (a)  $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$  (топология стрелки)
  - (b)  $X \neq \emptyset, \Omega = \mathcal{P}(X)$  (дискретная топология)
  - (c)  $X = \mathbb{R}, \Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A \text{ — конечно}\}$  — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
  - (d)  $X$  — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками:  $A \in \Omega$  тогда и только тогда, когда если  $a \in A$  и  $a \geq b$ , то  $b \in A$ .
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
  - (a) Покажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.
  - (b) Пусть  $A$  — замкнутое, а  $B$  — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость  $B \setminus A$  и  $A \setminus B$ ?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
  - (а) Для множества  $A$  внутренностью  $A^\circ$  назовём максимальное открытое множество, что  $A^\circ \subseteq A$ .
  - (б) Для множества  $A$  замыканием  $\bar{A}$  назовём минимальное замкнутое множество, содержащее  $A$ .
5. Найдите  $[0, 1]^\circ$  и  $\overline{[0, 1]}$  в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя  $\mathbb{R}$ )?
6. Найдите  $\{0\}^\circ$  и  $\overline{\{0\}}$  в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя  $\mathbb{R}$ )?

## Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

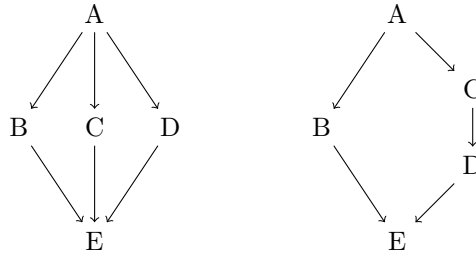
1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.
2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов  $a, b, c$  выполнено  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . А будет ли выполнено  $(a + b) \cdot c = a \cdot c \rightarrow b \cdot c$ ?
3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях  $a, b$  и  $c$  выполнены следующие утверждения:
  - (а) Из  $a \sqsubseteq b$  следует  $b \rightarrow c \sqsubseteq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \sqsubseteq c \rightarrow b$ ;
  - (б) Из  $a \sqsubseteq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \sqsubseteq c$ ;
  - (в)  $a \sqsubseteq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;
  - (г)  $b \sqsubseteq a \rightarrow b$ ;
  - (д)  $a \rightarrow b \sqsubseteq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;
  - (е)  $a \sqsubseteq b \rightarrow a \cdot b$ ;
  - (ж)  $a \rightarrow c \sqsubseteq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга  $\langle H, \sqsubseteq \rangle$  и переменные  $A, B, C$  со значениями  $a, b, c$  ( $a, b, c \in H$ ). Покажите, что:
  - (а-и) Если  $\phi$  — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных  $A, B, C$  вместо метаварiableных при любых  $a, b, c$  будет выполнено  $\llbracket \phi \rrbracket = \mathbf{I}$ ;
  - (ж) Аналогично, будет выполнено  $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \mathbf{I}$ ;
  - (з) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и  $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$  и  $\llbracket \alpha \vee \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$ .
  - (и) Пусть  $\phi$  и  $\phi \rightarrow \tau$  — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда  $\tau$  — тоже истинное высказывание
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:
  - (а)  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  (закон Пирса);
  - (б)  $(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$ ;
  - (в)  $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$ ;
  - (г)  $P \rightarrow \neg \neg P$ ;
  - (д)  $\neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$ ;

## Домашнее задание №5: «Гёделевы алгебры, модели Крипке»

- Ещё немного про решётки. Будем говорить, что решётка содержит *диамант* или *пентагон*, если найдутся 5 элементов указанным на диаграмме образом упорядоченных. При этом, если  $p + q = r$  или  $p \cdot q = r$  на данной диаграмме, то это же свойство выполнено и в исходной решётке.



- Назовём решётку *модулярной*, если при всяких  $x$  и  $z$ , таких, что  $z \sqsubseteq x$ , выполнено  $(x \cdot y) + z = x \cdot (y + z)$ . Покажите, что решётка является модулярной тогда и только тогда, когда не содержит пентагонов.
  - Рассмотрим модулярную решётку: покажите, что она дистрибутивна тогда и только тогда, когда не содержит диамантов.
- Покажите, что  $(\approx)$  является отношением эквивалентности. На основании этого покажите, что определение  $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$  корректно (не зависит от выбора конкретных представителей класса эквивалентности).
  - Пусть  $A$  — алгебра Гейтинга. Покажите, что  $\Gamma(A)$  — тоже алгебра Гейтинга.
  - Пусть задана алгебра Гейтинга  $A$ :



Постройте  $\Gamma(A)$ .

- Можно ли для алгебры  $\Gamma(\mathbb{R})$  построить топологию, порождающую данную алгебру? Вам нужно определить какой-то новый носитель и открытые множества для нём — или указать, что это невозможно.
- Могло сложиться впечатление, что  $\mathcal{L}$  и  $\Gamma(\mathcal{L})$  почти ничем не отличаются. В связи с этим давайте немного изучим данный вопрос:
  - Мы выяснили, что алгебра Линденбаума — полная модель ИИВ. А справедливо ли это для  $\Gamma(\mathcal{L})$  — существует ли формула  $\alpha$ , общезначимая в  $\Gamma(\mathcal{L})$ , но недоказуемая?
  - Приведите пример неатомарной формулы  $\alpha$  и такой оценки переменных, что  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \omega$ .
  - Мы можем построить аналог алгебры Линденбаума для классического ИВ, а потом применить к ней операцию «гёделевизации». Но если так получится доказать свойство дизъюнктивности для классической логики, то мы найдём противоречие в логике. Какое противоречие мы получим и какой переход в наших рассуждениях не получится сделать по аналогии?
- Рассмотрим два множества,  $a = (-\infty, 1)$  и  $b = (0, \infty)$ . Пусть  $\llbracket A \rrbracket = a$  и  $\llbracket B \rrbracket = b$ . Понятно, что  $\llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathbb{R}} = 1$ . Однако, ни  $A$ , ни  $B$  не истинны — не закралась ли где ошибка в теорему о дизъюнктивности ИИВ?
- Модели Крипке.** Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности можем взять дерево вместо такого графа). Узлы назовём *мирами* и пронумеруем натуральными числами:  $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ . Будем писать  $W_i \preceq W_j$ , если существует путь из  $W_i$  в  $W_j$ . Понятно, что  $W_i \preceq W_i$ .

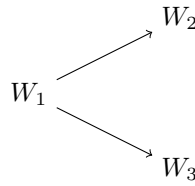
Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать  $W_i \Vdash A_k$ , если переменная  $A_k$  вынуждена в мире  $W_i$ . При этом, если  $W_i \preceq W_j$ , то всегда должно быть выполнено и  $W_j \Vdash A_k$  (знание, полученное нами, не исчезает в последующих мирах).

Обобщим отношение вынужденности на случай произвольной формулы:

- Если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \& \beta$ ;
- Если  $W_i \Vdash \alpha$  или  $W_i \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$ ;
- Если в любом мире  $W_k : W_i \preceq W_k$  выполнено, что из  $W_k \Vdash \alpha$  следует  $W_k \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ ;
- Если ни в каком мире  $W_k : W_i \preceq W_k$  не выполнено  $\alpha$ , то  $W_i \Vdash \neg \alpha$ .

Так определённую упорядоченную тройку  $\langle W, (\preceq), (\Vdash) \rangle$  — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности — назовём моделью Крипке. Будем говорить, что формула  $\alpha$  вынуждается моделью (или является истинной в данной модели), если  $W_i \Vdash \alpha$  в любом мире  $W_i$ . Будем записывать это как  $\Vdash \alpha$ .

- (а) Построим пример модели, опровергающей формулу  $P \vee \neg P$  (деревья в моделях Крипке у нас будут расти вправо):



В данной модели переменная  $P$  вынуждена только в мире  $W_2$ .

Укажите все узлы, в которых вынуждено  $P$ ,  $\neg P$ ,  $P \vee \neg P$  и сделайте вывод о вынужденности закона исключённого третьего в данной модели.

- (b) Постройте модель, опровергающую формулу  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ .
- (c) Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых  $W_i, W_j, \alpha$ , если  $W_i \preceq W_j$  и  $W_i \Vdash \alpha$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .
- (d) Покажите, что по любой модели Крипке  $K$  можно построить такую алгебру Гейтинга  $H$ , что  $\Vdash_K \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\llbracket \alpha \rrbracket_H = 1_H$ . Покажите из этого, что любая модель Крипке — действительно модель ИИВ.
- (e) Предложите формулу, глубина опровергающей модели для которой (если её рассматривать как дерево) не может быть меньше 2. Можете ли предложить соответствующую конструкцию для произвольной глубины  $n$ ?

## 9. Теорема о нетабличности интуиционистской логики.

- (a) Рассмотрим следующее утверждение  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ : покажите, что это утверждение верно в классической логике, но недоказуемо в интуиционистской. Интуитивно недоказуемость в интуиционистской логике очевидна: пусть  $A$  — сегодня дождь,  $B$  — сегодня мороз  $-30^\circ$  по Цельсию,  $C$  — сегодня понедельник. У нас нет никаких конструктивных способов показать из одного утверждения другое.
- (b) Обозначим за  $\rho_n$  следующее утверждение:

$$\bigvee_{i \neq j; 0 \leq i, j \leq n} (A_i \rightarrow A_j)$$

Покажите, что для любой табличной модели ИИВ  $T$  найдётся такое  $n$ , что  $\llbracket \rho_n \rrbracket_T = \text{И}$ .

- (c) Покажите, что  $\not\Vdash \rho_n$  в ИИВ ни при каком  $n > 1$ . Как из этого показать, что никакая табличная модель ИИВ не является полной?

## Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. Новые аксиомы и правила вывода для исчисления предикатов имеют ограничения (требования свободы для подстановки и отсутствия свободных вхождений). Если эти требования будут нарушены, исчисление станет некорректным. Данный факт можно показать, построив соответствующие опровергающие оценки для каких-то доказуемых формул. Постройте соответствующие формулы, доказательства и оценки.

2. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

- (a)  $\forall x.\phi \rightarrow \phi$
- (b)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$
- (c)  $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
- (d)  $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\neg\phi)$
- (e)  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\neg\phi)$
- (f)  $(\forall x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\phi)$
- (g)  $(\exists x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\phi)$

3. Опровергните формулы  $\phi \rightarrow \forall x.\phi$  и  $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$

4. Докажите теорему о дедукции для исчисления предикатов:

- (a) Если  $\Gamma, \alpha \vdash \beta \rightarrow \forall x.\gamma$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \forall x.\gamma$  (если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ ).
- (b) Если  $\Gamma, \alpha \vdash (\exists x.\gamma) \rightarrow \beta$ , то  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\exists x.\gamma) \rightarrow \beta$  (если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ ).
- (c) Сведите всё вместе и постройте общее доказательство теоремы.

5. Рассмотрим формулу  $\alpha$  с двумя свободными переменными  $x$  и  $y$  (мы предполагаем, что эти метаварьирующие соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких:

- (a)  $\forall x.\forall y.\alpha, \forall y.\forall x.\alpha$
- (b)  $\exists x.\exists y.\alpha, \exists y.\exists x.\alpha$
- (c)  $\forall x.\forall y.\alpha, \forall x.\exists y.\alpha, \exists x.\forall y.\alpha, \exists x.\exists y.\alpha$
- (d)  $\forall x.\exists y.\alpha, \exists y.\forall x.\alpha$

## Домашнее задание №7: «Исчисление предикатов»

1. Пусть дано непротиворечивое множество замкнутых формул  $\Gamma$ , и пусть дана формула  $\alpha$ . Покажите, что как минимум либо  $\Gamma \cup \{\alpha\}$ , либо  $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$  непротиворечиво.
2. Пусть  $D$  — предметное множество, и оно состоит из строк. Пусть  $\Gamma$  — некоторое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Пусть

$$\llbracket f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \rrbracket = \langle f_i(\rangle ++ \llbracket \theta_1 \rrbracket ++ \llbracket \theta_2 \rrbracket ++ \dots ++ \llbracket \theta_k \rrbracket ++ \rangle \rangle$$

Пусть

$$P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Gamma \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Покажите тогда, что  $\psi \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\llbracket \psi \rrbracket = \text{И}$ . Для этого:

- (a) покажите, что  $\alpha \& \beta \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \Gamma$  и  $\beta \in \Gamma$ ;
- (b) покажите, что  $\alpha \vee \beta \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\alpha \in \Gamma$ , либо  $\beta \in \Gamma$ , либо выполнено оба утверждения;
- (c) покажите, что  $\alpha \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда  $\neg\alpha \notin \Gamma$ .
- (d) покажите, что  $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$  тогда и только тогда, когда либо  $\neg\alpha \in \Gamma$ , либо одновременно  $\alpha \in \Gamma$  и  $\beta \in \Gamma$ .
- (e) при помощи сформулированных выше вспомогательных утверждений докажите требуемое утверждение.

3. Формализация понятий свободных переменных, свободы для подстановки, замены переменных.

Рассмотрим множество  $FV$  (свободных переменных) для формул:

$$FV(\psi) = \begin{cases} \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \psi \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ FV(\alpha) \cup FV(\beta), & \text{если } \psi \equiv \alpha \star \beta \\ FV(\alpha), & \text{если } \psi \equiv \neg\alpha \\ FV(\varphi) \setminus \{x\}, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } \forall x.\varphi \text{ или } \exists x.\varphi \end{cases}$$

и для термов:

$$FV(\theta) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } \theta \equiv x \\ \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \theta \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{cases}$$

Рассмотрим операцию замены переменных, определим её для формул:

$$\alpha[x := \theta] = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ P(\theta_1[x := \theta], \theta_2[x := \theta], \dots, \theta_k[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ (\psi[x := \theta]) \star (\varphi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ \neg(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \neg\psi \\ \forall y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \forall y.\psi \\ \exists y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

и для термов:

$$\rho[x := \theta] = \begin{cases} \rho, & \text{если } x \notin FV(\rho) \\ \theta, & \text{если } \rho \equiv x \\ f(\rho_1[x := \theta], \rho_2[x := \theta], \dots, \rho_k[x := \theta]), & \text{если } \rho \equiv f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k) \end{cases}$$

*Контекстом* подстановки  $\alpha[x := \theta]$  назовем следующую функцию от формулы и заменяемой переменной:

$$CX(\alpha, x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ CX(\psi, x) \cup CX(\varphi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ CX(\psi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \neg\psi \\ CX(\psi, x) \cup \{y\}, & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и либо } \alpha \equiv \forall y.\psi, \text{ либо } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

- Покажите, что  $x \in FV(\alpha)$  тогда и только тогда, когда  $x$  входит свободно в  $\alpha$  (*подсказка*: доказательство ведётся индукцией по длине формулы  $\alpha$ );
- Покажите, что  $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \emptyset$  тогда и только тогда, когда  $\theta$  свободна для подстановки вместо  $x$  в  $\alpha$ ;
- Покажите на основании данных определений, что если  $x \notin FV(\alpha)$ , то при любом множестве  $D$  и любых оценках символов и переменных из  $\llbracket \beta \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$  следует  $\llbracket (\exists x.\beta) \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$ ;
- Покажите на основании данных определений, что если  $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \emptyset$ , то при любом множестве  $D$  и любых оценках символов и переменных  $\llbracket \alpha[x := \theta] \rightarrow \exists x.\alpha \rrbracket = \text{И}$ .

## Домашнее задание №8: «Предварённая форма»

В силу значительного объёма данного задания, часть пунктов задания не будет раскрыта (будет сформулирована по аналогии) — эти пункты при ответе могут раскрываться на большое количество отдельных подпунктов, каждый из которых оценивается независимо.

1. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

- Покажите, что если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ , то

$$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \rightarrow (\forall x.\beta \vee \alpha)$$

- Покажите, что

$$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$

где  $p$  и  $q$  — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае  $x$  может совпадать с  $y$ .

- Докажите аналогичные утверждения для  $\&$ .
- Как будут сформулированы аналогичные утверждения для  $\rightarrow$  и  $\neg$ ? Сформулируйте и докажете их.

2. Научимся вносить квантор всеобщности «внутри»:

- Покажите, что если  $x$  не входит свободно в  $\alpha$ , то

$$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

- (b) Покажите, что если  $p$  не входит свободно в  $\beta$  и  $q$  не входит свободно в  $\alpha$ , то

$$\vdash (\forall p. \forall q. \alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x. \alpha[p := x]) \vee (\forall y. \beta[q := y])$$

при условии, что  $x$  свободно для подстановки вместо  $p$  в  $\alpha$  и  $y$  свободно для подстановки вместо  $q$  в  $\beta$ .

- (c) Докажите аналогичные утверждения для  $\&$ .
- (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для  $\rightarrow$  и  $\neg$ ? Сформулируйте и докажите их.
3. Сформулируйте и докажите аналогичные предыдущим пунктам утверждения для квантора существования.
4. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ , тогда:
- (a) Докажите:
- $$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \& \alpha \rightarrow \psi \& \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$
- (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.
- (c) Докажите  $\vdash (\forall x. \alpha) \rightarrow (\forall x. \beta)$ . Надо ли наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  какие-либо ограничения?
- (d) Докажите  $\vdash (\exists x. \alpha) \rightarrow (\exists x. \beta)$ . Надо ли наложить на формулы  $\alpha$  и  $\beta$  какие-либо ограничения?
5. Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если  $\alpha$  — формула, то для неё найдётся такая формула  $\beta$  с поверхностными кванторами, что:
- (a)  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (b)  $\vdash \beta \rightarrow \alpha$

## Домашнее задание №9: «Машина Тьюринга, неразрешимость исчисления предикатов»

1. Давайте договоримся, что указывая внешний алфавит, мы не будем упоминать «пустой» символ  $\varepsilon$ , будем считать, что он всегда есть в алфавите. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции:
- (a) заменяющую ведущие нули числа в двоичной системе счисления на  $\varepsilon$  (в алфавите  $A = \{0, 1\}$ );
- (b) в числе из алфавита  $\{0, 1, 2\}$  вырезающую все нули, заполняя образующиеся пустоты сдвигая число влево: например, из числа 20001010232 должно получиться 211232;
- (c) разворачивающую строку в алфавите  $\{a, b\}$  в обратном порядке: из строки aaabababa должна получиться строка abababaaa.
2. Рассмотрим алфавит  $A$ , множество всех слов в этом алфавите  $A^*$  и некоторый язык  $L \subseteq A^*$ . Напомним, что мы будем называть машину Тьюринга разрешающей язык  $L$ , если на каждом слове  $w \in A^*$  машина заканчивает работу в допускающем ( $s_A$ ) или отвергающем ( $S_D$ ) состоянии, причём машина переходит в допускающее состояние  $s_A$  тогда и только тогда, когда  $w \in L$ . Постройте машины Тьюринга, разрешающие следующие языки:
- (a) язык всех ненулевых двоичных чисел ( $A = \{0, 1\}$ );
- (b) язык всех чётных четверичных чисел ( $A = \{0, 1, 2, 3\}$ );
- (c) язык всех десятичных чисел, делящихся на 3 ( $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ );
- (d) язык всех правильных скобочных последовательностей ( $A = \{(\, , \,)\}$ );
- (e) язык всех корректно заданных машин Тьюринга (придумайте сами представление для машины Тьюринга);
- (f) язык всех машин Тьюринга, имеющих не меньше трёх состояний;
- (g) язык всех машин Тьюринга, завершающих работу не более чем за пять переходов.
3. Постройте логические формулы, кодирующие машины Тьюринга из первых двух подпунктов предыдущей задачи в исчислении предикатов.
4. Формализуйте доказательство того, что если машина Тьюринга достигает состояния  $P_x$  при наличии на ленте последовательности  $\langle s, w \rangle$  (напомним, что данная запись означает, что головка находится на первом символе строки  $w$ , а слева от неё — строка  $s$ , записанная в обратном порядке), то тогда  $\vdash P_x(s, w)$ .



## Домашнее задание №10: «Аксиоматика Пеано, рекурсивные функции»

1. Возьмём следующие определения сложения и умножения, применяемые в аксиоматике Пеано. **Важно:** в отличие от определений с лекции, мы будем проводить разбор второго аргумента.

$$a + b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ (a + x)', & b = x' \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & b = 0 \\ a + (a \cdot x), & b = x' \end{cases}$$

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a \cdot (a^x), & b = x' \end{cases}$$

Также определим следующую запись для натуральных чисел:  $1 = 0'$ ,  $2 = 0''$ , и т.д.

Также определим отношение порядка: пусть  $a \leq b$  означает, что найдётся такой  $c$ , что  $a + c = b$ . Естественным образом можно далее определить  $a < b$  (когда  $a \leq b$  и  $a \neq b$ ),  $b > a$  (когда  $a < b$ ) и  $b \geq a$  (когда  $a \leq b$ ).

Докажите следующие утверждения:

- (a)  $a + b = b + a$
- (b)  $a + (b + c) = (a + b) + c$
- (c)  $a \cdot 1 = a$
- (d)  $a \cdot b = b \cdot a$
- (e)  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- (f)  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- (g)  $2 \cdot a = a + a$
- (h) Покажите, что если  $a \leq b$ , то  $a + c \leq b + c$
- (i) Покажите, что если  $a \leq b$  и  $c \leq d$ , то  $a + c \leq b + d$
- (j) Покажите, что  $a^b \neq b^a$
- (k) Покажите, что  $a^{b^c} \neq (a^b)^c$
- (l) При каких  $a$  и  $b$  выполнено  $a \cdot b > a + b$ ? Докажите полученное утверждение.

2. Докажите следующие утверждения в формальной арифметике:

- (a)  $\vdash p = p$
- (b)  $\vdash 0 + a = a$
- (c)  $\vdash 2 + 2 = 4$
- (d)  $\vdash 2 \cdot 2 = 4$
- (e)  $\vdash a = b \rightarrow b = a$
- (f)  $\vdash a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
- (g)  $\vdash a = b \rightarrow a + c = b + c$

3. Определим новое обозначение: будем писать  $x \leq y$  вместо  $\exists a. x + a = y$  (и воспринимать это новое обозначение как своего рода макроподстановку). Также, введём обозначение для записи натуральных чисел в формальной арифметике:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\overline{n-1})', & n > 0 \end{cases}$$

Естественно, данные обозначения целиком принадлежат мета-языку. Покажите следующие утверждения:

- (a)  $\vdash 1 \leq 2$
- (b)  $\vdash a = b \rightarrow a \leq b$
- (c)  $\vdash a \leq b \rightarrow a' \leq b'$

$$(d) \vdash a \leq b \rightarrow \forall c. a + c \leq b + c$$

$$(e) \vdash a \leq b \vee b \leq a$$

(f) Обозначим за  $\phi_n(x)$  формулу  $x = 0 \vee x = 0' \vee x = 0'' \vee \dots \vee x = \bar{n}$ . Покажите тогда, что при любом натуральном  $n$  выполнено  $\vdash a \leq \bar{n} \rightarrow \phi_n(a)$

(g) При любом натуральном  $n$  выполнено  $\vdash \phi_n(a) \rightarrow a \leq \bar{n}$

4. Покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

$$(a) x + y$$

$$(b) 2x$$

$$(c) x^2$$

$$(d) x \cdot y$$

$$(e) x^y$$

5. Введём операцию «ограниченное вычитание»:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, & b > a \\ a - b, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также определим деление с остатком: пусть даны натуральные числа  $a$  и  $b$  ( $b > 0$ ). Известно, что найдутся два числа  $k$  и  $x$  ( $0 \leq x < b$ ), такие, что  $a = k \cdot b + x$ . Будем называть  $k$  частным от деления (и обозначать как  $a/b$ ), а  $x$  — остатком ( $a \% b$ ).

Тогда покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

$$(a) x \dot{-} y$$

$$(b) x/y$$

$$(c) x \% y$$

$$(d) \max(x, y)$$

$$(e) \text{«частичный логарифм»}: \text{plog}_x(a) = \max\{t : a \% (x^t) = 0\}$$

(f) Функция, вычисляющая  $n$ -е простое число