Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:
   (a) $\alpha \to \alpha \to \neg\beta \vee \beta \,\&\, \neg\alpha \vee \neg\beta \to \alpha \,\&\, \alpha \to \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):
   (a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$
   (b) $\alpha \,\&\, \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (c) $\alpha \to \beta \to \gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \to \gamma$
   (d) $\alpha \,\&\, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$
   (e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):
   (a) $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$
   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha\&\beta$
   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   (e) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$
   (f) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (i) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (j) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (k) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$
   (l) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (m) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$
   (n) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (o) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.
   (a) Покажите, что $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.
   (b) Покажите, что $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. (Теорема Гливенко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)
$$\neg\neg\alpha \to \alpha$$
   заменена на следующую:
$$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$$
   Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

(a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

(b) Покажите, что если α — аксиома ($1 \dots 9$ схемы), то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

(c) Покажите, что $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.

(d) Покажите, что если $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\alpha \to \beta)$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$.

(e) Покажите, что если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливенко).

(f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

(g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречиво.

(h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.

Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ — множество каких-то подмножеств X. Множество X мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а Ω — *топологией*. Элементы множества Ω мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам *(аксиомам топологического пространства)*:

1. $\varnothing \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если $\{A_i\}$, $A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω, то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$, $A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:

   (a) Покажите, что при $X = \{0, 1\}$, $\Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ пара $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.

   (b) Покажите, что если X — непустое множество, то пара $\langle X, \{\varnothing, X\} \rangle$ является топологическим пространством.

   (c) Предложите примеры как минимум двух множеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$, для которых $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$ — не топологическое пространство.

   (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар $\langle X, \Omega \rangle$, в которых бы аксиома не была выполнена.

   (e) Для $X = \mathbb{R}^n$ и Ω, содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.

2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.

   (a) $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$ (топология стрелки)

   (b) $X \neq \varnothing$, $\Omega = \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология)

   (c) $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A - \text{конечно}\}$ — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)

   (d) X — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками: $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда если $a \in A$ и $a \geq b$, то $b \in A$.

3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.

   (a) Покажите, что пересечение произвольного семейство замкнутых множеств — замкнуто.

   (b) Пусть A — замкнутое, а B — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость $B \setminus A$ и $A \setminus B$?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
   (a) Для множества A внутренностью A° назовём максимальное открытое множество, что $A^\circ \subseteq A$.
   (b) Для множества A замыканием $\overline{A}$ назовём минимальное замкнутое множество, содержащее A.
5. Найдите $[0,1]^\circ$ и $\overline{[0,1]}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя $\mathbb{R}$)?
6. Найдите $\{0\}^\circ$ и $\overline{\{0\}}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя $\mathbb{R}$)?