Теоретические («малые») домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

   (a) $\alpha \to \alpha \to \neg\beta \vee \beta \,\&\, \neg\alpha \vee \neg\beta \to \alpha \,\&\, \alpha \to \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

   (a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$
   (b) $\alpha \,\&\, \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (c) $\alpha \to \beta \to \gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \to \gamma$
   (d) $\alpha \,\&\, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$
   (e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

   (a) $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$
   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (f) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (i) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (j) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (k) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$
   (l) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (m) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$
   (n) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (o) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.

   (a) Покажите, что $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.
   (b) Покажите, что $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. (Теорема Гливенко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

   $$\neg\neg\alpha \to \alpha$$

   заменена на следующую:

   $$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

   Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

(a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\texttt{и}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\texttt{к}} \alpha$.

(b) Покажите, что если α — аксиома ($1 \dots 9$ схемы), то $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg\alpha$.

(c) Покажите, что $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.

(d) Покажите, что если $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg(\alpha \to \beta)$, то $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg\beta$.

(e) Покажите, что если $\vdash_{\texttt{к}} \alpha$, то $\vdash_{\texttt{и}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливенко).

(f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\texttt{к}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\texttt{и}} \neg\neg\alpha$.

(g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречиво.

(h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.