

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

$$(a) \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

$$(a) \alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$$

$$(b) \alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$(c) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$$

$$(d) \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$$

$$(e) \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

$$(a) \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$(b) \alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$$

$$(c) \neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(d) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(e) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(f) \alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(g) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(h) \alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(i) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$(j) \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(k) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$(l) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(m) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(n) \neg\alpha \vdash \neg\alpha$$

$$(o) \alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

## Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть  $\Gamma$  — какой-то список высказываний и пусть  $\alpha$  — высказывание.

$$(a) \text{ Покажите, что } \Gamma \vdash \alpha \text{ влечёт } \Gamma \models \alpha.$$

$$(b) \text{ Покажите, что } \Gamma \models \alpha \text{ влечёт } \Gamma \vdash \alpha.$$

2. (Теорема Гливенко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать  $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$ , если существует вывод формулы  $\alpha$  из гипотез  $\Gamma$  в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как  $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$ .

- (a) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ .
- (b) Покажите, что если  $\alpha$  — аксиома (1...9 схемы), то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ .
- (c) Покажите, что  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$ .
- (d) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$  и  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$ , то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\beta$ .
- (e) Покажите, что если  $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$  (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если  $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$ , то  $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ .
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы  $\alpha$  выполнено  $\vdash \alpha$ . Покажите, что формула  $\alpha$  исчисления, такая, что  $\vdash \alpha$  и  $\vdash \neg\alpha$ , существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречно.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречно, то противоречно и интуиционистское исчисление высказываний.

### Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару  $\langle X, \Omega \rangle$ , где  $X$  — некоторое множество, а  $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$  — множество каких-то подмножеств  $X$ . Множество  $X$  мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а  $\Omega$  — *топологией*. Элементы множества  $\Omega$  мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам (*аксиомам топологического пространства*):

1.  $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$  (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если  $\{A_i\}, A_i \in \Omega$  — некоторое семейство элементов  $\Omega$ , то  $\bigcup_i A_i \in \Omega$  (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если  $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$  — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто:  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
  - (a) Покажите, что при  $X = \{0, 1\}, \Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$  пара  $\langle X, \Omega \rangle$  является топологическим пространством.
  - (b) Покажите, что если  $X$  — непустое множество, то пара  $\langle X, \{\emptyset, X\} \rangle$  является топологическим пространством.
  - (c) Предложите примеры как минимум двух множеств  $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$ , для которых  $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$  — не топологическое пространство.
  - (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар  $\langle X, \Omega \rangle$ , в которых бы аксиома не была выполнена.
  - (e) Для  $X = \mathbb{R}^n$  и  $\Omega$ , содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что  $\langle X, \Omega \rangle$  является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
  - (a)  $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$  (топология стрелки)
  - (b)  $X \neq \emptyset, \Omega = \mathcal{P}(X)$  (дискретная топология)
  - (c)  $X = \mathbb{R}, \Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A \text{ — конечно}\}$  — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
  - (d)  $X$  — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками:  $A \in \Omega$  тогда и только тогда, когда если  $a \in A$  и  $a \geq b$ , то  $b \in A$ .
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
  - (a) Покажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.
  - (b) Пусть  $A$  — замкнутое, а  $B$  — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость  $B \setminus A$  и  $A \setminus B$ ?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
  - (а) Для множества  $A$  внутренностью  $A^\circ$  назовём максимальное открытое множество, что  $A^\circ \subseteq A$ .
  - (б) Для множества  $A$  замыканием  $\bar{A}$  назовём минимальное замкнутое множество, содержащее  $A$ .
5. Найдите  $[0, 1]^\circ$  и  $\overline{[0, 1]}$  в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя  $\mathbb{R}$ )?
6. Найдите  $\{0\}^\circ$  и  $\overline{\{0\}}$  в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя  $\mathbb{R}$ )?

## Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

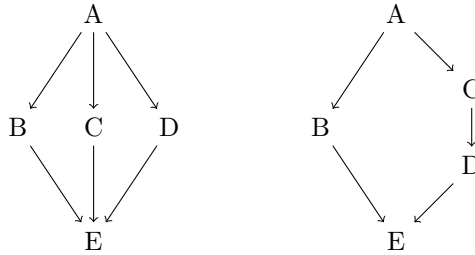
1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.
2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов  $a, b, c$  выполнено  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ . А будет ли выполнено  $(a + b) \cdot c = a \cdot c \rightarrow b \cdot c$ ?
3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях  $a, b$  и  $c$  выполнены следующие утверждения:
  - (а) Из  $a \sqsubseteq b$  следует  $b \rightarrow c \sqsubseteq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \sqsubseteq c \rightarrow b$ ;
  - (б) Из  $a \sqsubseteq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \sqsubseteq c$ ;
  - (с)  $a \sqsubseteq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;
  - (д)  $b \sqsubseteq a \rightarrow b$ ;
  - (е)  $a \rightarrow b \sqsubseteq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;
  - (ф)  $a \sqsubseteq b \rightarrow a \cdot b$ ;
  - (г)  $a \rightarrow c \sqsubseteq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга  $\langle H, \sqsubseteq \rangle$  и переменные  $A, B, C$  со значениями  $a, b, c$  ( $a, b, c \in H$ ). Покажите, что:
  - (а-і) Если  $\phi$  — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных  $A, B, C$  вместо метаварiableных при любых  $a, b, c$  будет выполнено  $\llbracket \phi \rrbracket = \text{И}$ ;
  - (j) Аналогично, будет выполнено  $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \text{И}$ ;
  - (к) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и  $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \rrbracket = \text{И}$  и  $\llbracket \alpha \vee \neg \alpha \rrbracket = \text{И}$ .
  - (л) Пусть  $\phi$  и  $\phi \rightarrow \tau$  — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда  $\tau$  — тоже истинное высказывание
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:
  - (а)  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$  (закон Пирса);
  - (б)  $(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$ ;
  - (с)  $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$ ;
  - (д)  $P \rightarrow \neg \neg P$ ;
  - (е)  $\neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$ ;

## Домашнее задание №5: «Гёделевы алгебры, модели Крипке»

- Ещё немного про решётки. Будем говорить, что решётка содержит *диамант* или *пентагон*, если найдутся 5 элементов указанным на диаграмме образом упорядоченных. При этом, если  $p + q = r$  или  $p \cdot q = r$  на данной диаграмме, то это же свойство выполнено и в исходной решётке.



- Назовём решётку *модулярной*, если при всяких  $x$  и  $z$ , таких, что  $z \sqsubseteq x$ , выполнено  $(x \cdot y) + z = x \cdot (y + z)$ . Покажите, что решётка является модулярной тогда и только тогда, когда не содержит пентагонов.
  - Рассмотрим модулярную решётку: покажите, что она дистрибутивна тогда и только тогда, когда не содержит диамантов.
- Покажите, что  $(\approx)$  является отношением эквивалентности. На основании этого покажите, что определение  $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$  корректно (не зависит от выбора конкретных представителей класса эквивалентности).
  - Пусть  $A$  — алгебра Гейтинга. Покажите, что  $\Gamma(A)$  — тоже алгебра Гейтинга.
  - Пусть задана алгебра Гейтинга  $A$ :



Постройте  $\Gamma(A)$ .

- Можно ли для алгебры  $\Gamma(\mathbb{R})$  построить топологию, порождающую данную алгебру? Вам нужно определить какой-то новый носитель и открытые множества для нём — или указать, что это невозможно.
- Могло сложиться впечатление, что  $\mathcal{L}$  и  $\Gamma(\mathcal{L})$  почти ничем не отличаются. В связи с этим давайте немного изучим данный вопрос:
  - Мы выяснили, что алгебра Линденбаума — полная модель ИИВ. А справедливо ли это для  $\Gamma(\mathcal{L})$  — существует ли формула  $\alpha$ , общезначимая в  $\Gamma(\mathcal{L})$ , но недоказуемая?
  - Приведите пример неатомарной формулы  $\alpha$  и такой оценки переменных, что  $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \omega$ .
  - Мы можем построить аналог алгебры Линденбаума для классического ИВ, а потом применить к ней операцию «гёделевизации». Но если так получится доказать свойство дизъюнктивности для классической логики, то мы найдём противоречие в логике. Какое противоречие мы получим и какой переход в наших рассуждениях не получится сделать по аналогии?
- Рассмотрим два множества,  $a = (-\infty, 1)$  и  $b = (0, \infty)$ . Пусть  $\llbracket A \rrbracket = a$  и  $\llbracket B \rrbracket = b$ . Понятно, что  $\llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathbb{R}} = 1$ . Однако, ни  $A$ , ни  $B$  не истинны — не закралась ли где ошибка в теорему о дизъюнктивности ИИВ?
- Модели Крипке.** Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности можем взять дерево вместо такого графа). Узлы назовём *мирами* и пронумеруем натуральными числами:  $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$ . Будем писать  $W_i \preceq W_j$ , если существует путь из  $W_i$  в  $W_j$ . Понятно, что  $W_i \preceq W_i$ .

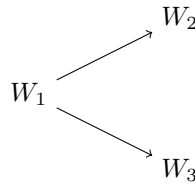
Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать  $W_i \Vdash A_k$ , если переменная  $A_k$  вынуждена в мире  $W_i$ . При этом, если  $W_i \preceq W_j$ , то всегда должно быть выполнено и  $W_j \Vdash A_k$  (знание, полученное нами, не исчезает в последующих мирах).

Обобщим отношение вынужденности на случай произвольной формулы:

- Если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \& \beta$ ;
- Если  $W_i \Vdash \alpha$  и  $W_i \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$ ;
- Если в любом мире  $W_k : W_i \preceq W_k$  выполнено, что из  $W_k \Vdash \alpha$  следует  $W_k \Vdash \beta$ , то  $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$ ;
- Если ни в каком мире  $W_k : W_i \preceq W_k$  не выполнено  $\alpha$ , то  $W_i \Vdash \neg \alpha$ .

Так определённую упорядоченную тройку  $\langle W, (\preceq), (\Vdash) \rangle$  — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности — назовём моделью Крипке. Будем говорить, что формула  $\alpha$  вынуждается моделью (или является истинной в данной модели), если  $W_i \Vdash \alpha$  в любом мире  $W_i$ . Будем записывать это как  $\Vdash \alpha$ .

- (а) Построим пример модели, опровергающей формулу  $P \vee \neg P$  (деревья в моделях Крипке у нас будут расти вправо):



В данной модели переменная  $P$  вынуждена только в мире  $W_2$ .

Укажите все узлы, в которых вынуждено  $P$ ,  $\neg P$ ,  $P \vee \neg P$  и сделайте вывод о вынужденности закона исключённого третьего в данной модели.

- (б) Постройте модель, опровергающую формулу  $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ .
- (с) Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых  $W_i, W_j, \alpha$ , если  $W_i \preceq W_j$  и  $W_i \Vdash \alpha$ , то  $W_j \Vdash \alpha$ .
- (д) Покажите, что по любой модели Крипке  $K$  можно построить такую алгебру Гейтинга  $H$ , что  $\Vdash_K \alpha$  тогда и только тогда, когда  $\llbracket \alpha \rrbracket_H = 1_H$ . Покажите из этого, что любая модель Крипке — действительно модель ИИВ.
- (е) Предложите формулу, глубина опровергающей модели для которой (если её рассматривать как дерево) не может быть меньше 2. Можете ли предложить соответствующую конструкцию для произвольной глубины  $n$ ?

## 9. Теорема о нетабличности интуиционистской логики.

- (а) Рассмотрим следующее утверждение  $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$ : покажите, что это утверждение верно в классической логике, но недоказуемо в интуиционистской. Интуитивно недоказуемость в интуиционистской логике очевидна: пусть  $A$  — сегодня дождь,  $B$  — сегодня мороз  $-30^\circ$  по Цельсию,  $C$  — сегодня понедельник. У нас нет никаких конструктивных способов показать из одного утверждения другое.
- (б) Обозначим за  $R(n)$  следующее утверждение:

$$\bigvee_{1 \leq i < j \leq n} (A_i \rightarrow A_j)$$

Покажите, что для любой табличной модели ИИВ  $T$  найдётся такой  $n$ , что  $\llbracket R(n) \rrbracket_T = \text{И}$ .

- (с) Покажите, что  $\not\vdash R(n)$  в ИИВ ни при каком  $n > 1$ . Как из этого показать, что никакая табличная модель ИИВ не является полной?