

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

(a) $\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

(a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$

(b) $\alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$

(c) $\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$

(d) $\alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$

(e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

(a) $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

(b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$

(c) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(d) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(e) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$

(f) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(g) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

(h) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

(i) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

(j) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(k) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

(l) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(m) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

(n) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

(o) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.

(a) Покажите, что $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.

(b) Покажите, что $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. (Теорема Гливленко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

- (a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$.
- (b) Покажите, что если α — аксиома (1...9 схемы), то $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg\alpha$.
- (c) Покажите, что $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$.
- (d) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg\beta$.
- (e) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \neg\neg\alpha$.
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречно.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречно, то противоречно и интуиционистское исчисление высказываний.

Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ — множество каких-то подмножеств X . Множество X мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а Ω — *топологией*. Элементы множества Ω мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам (*аксиомам топологического пространства*):

1. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если $\{A_i\}, A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω , то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
 - (a) Покажите, что при $X = \{0, 1\}, \Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ пара $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
 - (b) Покажите, что если X — непустое множество, то пара $\langle X, \{\emptyset, X\} \rangle$ является топологическим пространством.
 - (c) Предложите примеры как минимум двух множеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$, для которых $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$ — не топологическое пространство.
 - (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар $\langle X, \Omega \rangle$, в которых бы аксиома не была выполнена.
 - (e) Для $X = \mathbb{R}^n$ и Ω , содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
 - (a) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ (топология стрелки)
 - (b) $X \neq \emptyset, \Omega = \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология)
 - (c) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A \text{ — конечно}\}$ — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
 - (d) X — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками: $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда если $a \in A$ и $a \geq b$, то $b \in A$.
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
 - (a) Покажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.
 - (b) Пусть A — замкнутое, а B — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость $B \setminus A$ и $A \setminus B$?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
 - (а) Для множества A внутренностью A° назовём максимальное открытое множество, что $A^\circ \subseteq A$.
 - (б) Для множества A замыканием \bar{A} назовём минимальное замкнутое множество, содержащее A .
5. Найдите $[0, 1]^\circ$ и $\overline{[0, 1]}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?
6. Найдите $\{0\}^\circ$ и $\overline{\{0\}}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?

Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

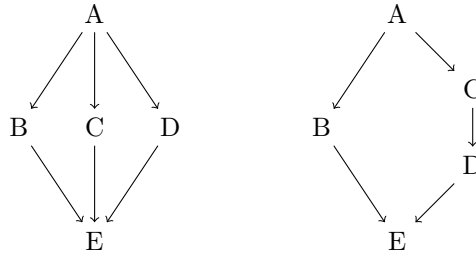
1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.
2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов a, b, c выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. А будет ли выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c \rightarrow b \cdot c$?
3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях a, b и c выполнены следующие утверждения:
 - (а) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \rightarrow c \sqsubseteq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \sqsubseteq c \rightarrow b$;
 - (б) Из $a \sqsubseteq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
 - (с) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (д) $b \sqsubseteq a \rightarrow b$;
 - (е) $a \rightarrow b \sqsubseteq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (ф) $a \sqsubseteq b \rightarrow a \cdot b$;
 - (г) $a \rightarrow c \sqsubseteq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ и переменные A, B, C со значениями a, b, c ($a, b, c \in H$). Покажите, что:
 - (а-и) Если ϕ — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных A, B, C вместо метаварiableных при любых a, b, c будет выполнено $\llbracket \phi \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (j) Аналогично, будет выполнено $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (к) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$ и $\llbracket \alpha \vee \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$.
 - (л) Пусть ϕ и $\phi \rightarrow \tau$ — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда τ — тоже истинное высказывание
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:
 - (а) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ (закон Пирса);
 - (б) $(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$;
 - (с) $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$;
 - (д) $P \rightarrow \neg \neg P$;
 - (е) $\neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$;

Домашнее задание №5: «Гёделевы алгебры, модели Крипке»

- Ещё немного про решётки. Будем говорить, что решётка содержит *диамант* или *пентагон*, если найдутся 5 элементов указанным на диаграмме образом упорядоченных. При этом, если $p + q = r$ или $p \cdot q = r$ на данной диаграмме, то это же свойство выполнено и в исходной решётке.



- Назовём решётку *модулярной*, если при всяких x и z , таких, что $z \sqsubseteq x$, выполнено $(x \cdot y) + z = x \cdot (y + z)$. Покажите, что решётка является модулярной тогда и только тогда, когда не содержит пентагонов.
 - Рассмотрим модулярную решётку: покажите, что она дистрибутивна тогда и только тогда, когда не содержит диамантов.
- Покажите, что (\approx) является отношением эквивалентности. На основании этого покажите, что определение $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$ корректно (не зависит от выбора конкретных представителей класса эквивалентности).
 - Пусть A — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(A)$ — тоже алгебра Гейтинга.
 - Пусть задана алгебра Гейтинга A :



Постройте $\Gamma(A)$.

- Можно ли для алгебры $\Gamma(\mathbb{R})$ построить топологию, порождающую данную алгебру? Вам нужно определить какой-то новый носитель и открытые множества для нём — или указать, что это невозможно.
- Могло сложиться впечатление, что \mathcal{L} и $\Gamma(\mathcal{L})$ почти ничем не отличаются. В связи с этим давайте немного изучим данный вопрос:
 - Мы выяснили, что алгебра Линденбаума — полная модель ИИВ. А справедливо ли это для $\Gamma(\mathcal{L})$ — существует ли формула α , общезначимая в $\Gamma(\mathcal{L})$, но недоказуемая?
 - Приведите пример неатомарной формулы α и такой оценки переменных, что $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \omega$.
 - Мы можем построить аналог алгебры Линденбаума для классического ИВ, а потом применить к ней операцию «гёделевизации». Но если так получится доказать свойство дизъюнктивности для классической логики, то мы найдём противоречие в логике. Какое противоречие мы получим и какой переход в наших рассуждениях не получится сделать по аналогии?
- Рассмотрим два множества, $a = (-\infty, 1)$ и $b = (0, \infty)$. Пусть $\llbracket A \rrbracket = a$ и $\llbracket B \rrbracket = b$. Понятно, что $\llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathbb{R}} = 1$. Однако, ни A , ни B не истинны — не закралась ли где ошибка в теорему о дизъюнктивности ИИВ?
- Модели Крипке.** Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности можем взять дерево вместо такого графа). Узлы назовём *мирами* и пронумеруем натуральными числами: $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$. Будем писать $W_i \preceq W_j$, если существует путь из W_i в W_j . Понятно, что $W_i \preceq W_i$.

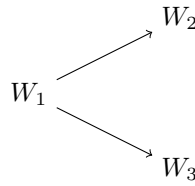
Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать $W_i \Vdash A_k$, если переменная A_k вынуждена в мире W_i . При этом, если $W_i \preceq W_j$, то всегда должно быть выполнено и $W_j \Vdash A_k$ (знание, полученное нами, не исчезает в последующих мирах).

Обобщим отношение вынужденности на случай произвольной формулы:

- Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \& \beta$;
- Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$;
- Если в любом мире $W_k : W_i \preceq W_k$ выполнено, что из $W_k \Vdash \alpha$ следует $W_k \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$;
- Если ни в каком мире $W_k : W_i \preceq W_k$ не выполнено α , то $W_i \Vdash \neg \alpha$.

Так определённую упорядоченную тройку $\langle W, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности — назовём моделью Крипке. Будем говорить, что формула α вынуждается моделью (или является истинной в данной модели), если $W_i \Vdash \alpha$ в любом мире W_i . Будем записывать это как $\Vdash \alpha$.

- (а) Построим пример модели, опровергающей формулу $P \vee \neg P$ (деревья в моделях Крипке у нас будут расти вправо):



В данной модели переменная P вынуждена только в мире W_2 .

Укажите все узлы, в которых вынуждено P , $\neg P$, $P \vee \neg P$ и сделайте вывод о вынужденности закона исключённого третьего в данной модели.

- (b) Постройте модель, опровергающую формулу $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.
- (c) Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α , если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.
- (d) Покажите, что по любой модели Крипке K можно построить такую алгебру Гейтинга H , что $\Vdash_K \alpha$ тогда и только тогда, когда $\llbracket \alpha \rrbracket_H = 1_H$. Покажите из этого, что любая модель Крипке — действительно модель ИИВ.
- (e) Предложите формулу, глубина опровергающей модели для которой (если её рассматривать как дерево) не может быть меньше 2. Можете ли предложить соответствующую конструкцию для произвольной глубины n ?

9. Теорема о нетабличности интуиционистской логики.

- (a) Рассмотрим следующее утверждение $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$: покажите, что это утверждение верно в классической логике, но недоказуемо в интуиционистской. Интуитивно недоказуемость в интуиционистской логике очевидна: пусть A — сегодня дождь, B — сегодня мороз -30° по Цельсию, C — сегодня понедельник. У нас нет никаких конструктивных способов показать из одного утверждения другое.
- (b) Обозначим за ρ_n следующее утверждение:

$$\bigvee_{i \neq j; 0 \leq i, j \leq n} (A_i \rightarrow A_j)$$

Покажите, что для любой табличной модели ИИВ T найдётся такое n , что $\llbracket \rho_n \rrbracket_T = \text{И}$.

- (c) Покажите, что $\not \Vdash \rho_n$ в ИИВ ни при каком $n > 1$. Как из этого показать, что никакая табличная модель ИИВ не является полной?

Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. Новые аксиомы и правила вывода для исчисления предикатов имеют ограничения (требования свободы для подстановки и отсутствия свободных вхождений). Если эти требования будут нарушены, исчисление станет некорректным. Данный факт можно показать, построив соответствующие опровергающие оценки для каких-то доказуемых формул. Постройте соответствующие формулы, доказательства и оценки.

2. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

- (a) $\forall a. \phi \rightarrow \phi$
- (b) $(\forall a. \phi) \rightarrow (\exists a. \phi)$
- (c) $(\forall a. \forall a. \phi) \rightarrow (\forall a. \phi)$
- (d) $(\forall a. \phi) \rightarrow (\neg \exists a. \neg \phi)$
- (e) $(\exists a. \phi) \rightarrow (\neg \forall a. \neg \phi)$
- (f) $(\forall a. \neg \phi) \rightarrow (\neg \exists a. \phi)$
- (g) $(\exists a. \neg \phi) \rightarrow (\neg \forall a. \phi)$

3. Опровергните формулы $\phi \rightarrow \forall a. \phi$ и $(\exists a. \phi) \rightarrow (\forall a. \phi)$

4. Докажите теорему о дедукции для исчисления предикатов:

- (a) Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta \rightarrow \forall a. \gamma$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \forall a. \gamma$ (если a не входит свободно в α).
- (b) Если $\Gamma, \alpha \vdash (\exists a. \gamma) \rightarrow \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\exists a. \gamma) \rightarrow \beta$ (если a не входит свободно в α).
- (c) Сведите всё вместе и постройте общее доказательство теоремы.

5. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными a и b . Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких:

- (a) $\forall a. \forall b. \alpha, \forall b. \forall a. \alpha$
- (b) $\exists a. \exists b. \alpha, \exists b. \exists a. \alpha$
- (c) $\forall a. \forall b. \alpha, \forall a. \exists b. \alpha, \exists a. \forall b. \alpha, \exists a. \exists b. \alpha$
- (d) $\forall a. \exists b. \alpha, \exists b. \forall a. \alpha$