Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3234-M3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:
   (a) $\alpha \to \alpha \to \neg\beta \vee \beta \,\&\, \neg\alpha \vee \neg\beta \to \alpha \,\&\, \alpha \to \alpha \vee \beta \vee \beta$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):
   (a) $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \,\&\, \neg\beta)$
   (b) $\alpha \,\&\, \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$
   (c) $\alpha \to \beta \to \gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \to \gamma$
   (d) $\alpha \,\&\, \beta \to \gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$
   (e) $\alpha, \neg\alpha \vdash \beta$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):
   (a) $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$
   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (e) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (f) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (g) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (h) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (i) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (j) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (k) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$
   (l) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$
   (m) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$
   (n) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (o) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.
   (a) Покажите, что $\Gamma \vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \models \alpha$.
   (b) Покажите, что $\Gamma \models \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha$.

2. (Теорема Гливенко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)
   $$\neg\neg\alpha \to \alpha$$
   заменена на следующую:
   $$\alpha \to \neg\alpha \to \beta$$
   Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

(a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

(b) Покажите, что если α — аксиома ($1 \dots 9$ схемы), то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

(c) Покажите, что $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.

(d) Покажите, что если $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\alpha \to \beta)$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$.

(e) Покажите, что если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливенко).

(f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

(g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречиво.

(h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречиво, то противоречиво и интуиционистское исчисление высказываний.

Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ — множество каких-то подмножеств X. Множество X мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а Ω — *топологией.* Элементы множества Ω мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам *(аксиомам топологического пространства)*:

1. $\varnothing \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если $\{A_i\}$, $A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω, то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n$, $A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
   (a) Покажите, что при $X = \{0, 1\}$, $\Omega = \{\varnothing, \{0\}, \{0, 1\}\}$ пара $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
   (b) Покажите, что если X — непустое множество, то пара $\langle X, \{\varnothing, X\} \rangle$ является топологическим пространством.
   (c) Предложите примеры как минимум двух множеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$, для которых $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$ — не топологическое пространство.
   (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар $\langle X, \Omega \rangle$, в которых бы аксиома не была выполнена.
   (e) Для $X = \mathbb{R}^n$ и Ω, содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
   (a) $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing\}$ (топология стрелки)
   (b) $X \neq \varnothing$, $\Omega = \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология)
   (c) $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A\text{— конечно}\}$ — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
   (d) X — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками: $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда если $a \in A$ и $a \geq b$, то $b \in A$.
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
   (a) Покажите, что пересечение произвольного семейство замкнутых множеств — замкнуто.
   (b) Пусть A — замкнутое, а B — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость $B \setminus A$ и $A \setminus B$?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):

   (a) Для множества A внутренностью A° назовём максимальное открытое множество, что $A^\circ \subseteq A$.
   (b) Для множества A замыканием $\overline{A}$ назовём минимальное замкнутое множество, содержащее A.

5. Найдите $[0,1]^\circ$ и $\overline{[0,1]}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя $\mathbb{R}$)?

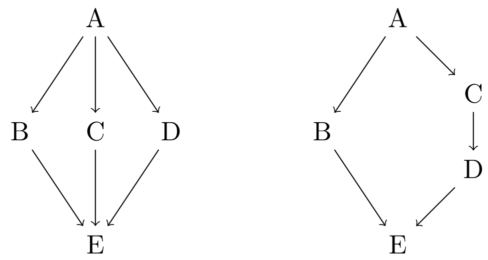
6. Найдите $\{0\}^\circ$ и $\overline{\{0\}}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя $\mathbb{R}$)?

Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.

2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов a, b, c выполнено $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. А будет ли выполнено $(a+b)\cdot c = a\cdot c \to b\cdot c$?

3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.

5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях a, b и c выполнены следующие утверждения:

   (a) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \to c \sqsubseteq a \to c$ и $c \to a \sqsubseteq c \to b$;
   (b) Из $a \sqsubseteq b \to c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
   (c) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
   (d) $b \sqsubseteq a \to b$;
   (e) $a \to b \sqsubseteq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
   (f) $a \sqsubseteq b \to a \cdot b$;
   (g) $a \to c \sqsubseteq (b \to c) \to (a + b \to c)$

6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ и переменные A, B, C со значениями a, b, c ($a, b, c \in H$). Покажите, что:

   (a-i) Если ϕ — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных A, B, C вместо вместо метапеременных при любых a, b, c будет выполнено $[\![\phi]\!] = \texttt{И}$;
   (j) Аналогично, будет выполнено $[\![\alpha \to \neg\alpha \to \beta]\!] = \texttt{И}$;
   (k) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и $[\![\alpha \to \neg\neg\alpha]\!] = \texttt{И}$ и $[\![\alpha \vee \neg\alpha]\!] = \texttt{И}$.
   (l) Пусть ϕ и $\phi \to \tau$ — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда τ — тоже истинное высказывание

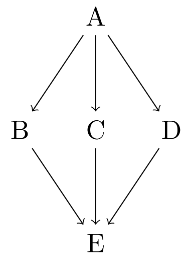
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.

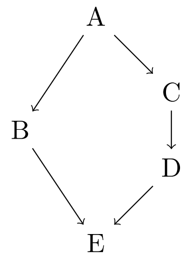
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:

   (a) $((P \to Q) \to P) \to P$ (закон Пирса);
   (b) $(\neg P \to Q) \vee (P \to \neg Q)$;
   (c) $(P \to \neg Q) \to (Q \to \neg P)$;
   (d) $P \to \neg\neg P$;
   (e) $\neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;

Домашнее задание №5: «Гёделевы алгебры, модели Крипке»

1. Ещё немного про решётки. Будем говорить, что решётка содержит *диамант* или *пентагон*, если найдутся 5 элементов указанным на диаграмме образом упорядоченных. При этом, если $p + q = r$ или $p \cdot q = r$ на данной диаграмме, то это же свойство выполнено и в исходной решётке.





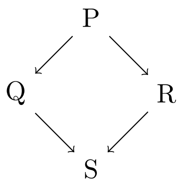
   (a) Назовём решётку *модулярной*, если при всяких x и z, таких, что $z \sqsubseteq x$, выполнено $(x \cdot y) + z = x \cdot (y + z)$. Покажите, что решётка является модулярной тогда и только тогда, когда не содержит пентагонов.

   (b) Рассмотрим модулярную решётку: покажите, что она дистрибутивна тогда и только тогда, когда не содержит диамантов.

2. Покажите, что $(\approx)$ является отношением эквивалентности. На основании этого покажите, что определение $[\alpha]_\approx \sqsubseteq [\beta]_\approx$ корректно (не зависит от выбора конкретных представителей класса эквивалентности).

3. Пусть A — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(A)$ — тоже алгебра Гейтинга.

4. Пусть задана алгебра Гейтинга A:



   Постройте $\Gamma(A)$.

5. Можно ли для алгебры $\Gamma(\mathbb{R})$ построить топологию, порождающую данную алгебру? Вам нужно определить какой-то новый носитель и открытые множества для нём — или указать, что это невозможно.

6. Могло сложиться впечатление, что $\mathscr{L}$ и $\Gamma(\mathscr{L})$ почти ничем не отличаются. В связи с этим давайте немного изучим данный вопрос:

   (a) Мы выяснили, что алгебра Линденбаума — полная модель ИИВ. А справедливо ли это для $\Gamma(\mathscr{L})$ — существует ли формула α, общезначимая в $\Gamma(\mathscr{L})$, но недоказуемая?

   (b) Приведите пример неатомарной формулы α и такой оценки переменных, что $[\![\alpha]\!]_{\Gamma(\mathscr{L})} = \omega$.

   (c) Мы можем построить аналог алгебры Линденбаума для классического ИВ, а потом применить к ней операцию «гёделевизации». Но если так получится доказать свойство дизъюнктивности для классической логики, то мы найдём противоречие в логике. Какое противоречие мы получим и какой переход в наших рассуждениях не получится сделать по аналогии?

7. Рассмотрим два множества, $a = (-\infty, 1)$ и $b = (0, \infty)$. Пусть $[\![A]\!] = a$ и $[\![B]\!] = b$. Понятно, что $[\![A \vee B]\!]_\mathbb{R} = 1$. Однако, ни A, ни B не истинны — не закралась ли где ошибка в теорему о дизъюнктивности ИИВ?

8. **Модели Крипке.** Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности можем взять дерево вместо такого графа). Узлы назовём *мирами* и пронумеруем натуральными числами: $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$. Будем писать $W_i \preceq W_j$, если существует путь из W_i в W_j. Понятно, что $W_i \preceq W_i$.

Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать $W_i \Vdash A_k$, если переменная A_k вынуждена в мире W_i. При этом, если $W_i \preceq W_j$, то всегда должно быть выполнено и $W_j \Vdash A_k$ (знание, полученное нами, не исчезает в последующих мирах).

Обобщим отношение вынужденности на случай произвольной формулы:

- Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \mathbin{\&} \beta$;
- Если $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$;
- Если в любом мире $W_k : W_i \preceq W_k$ выполнено, что из $W_k \Vdash \alpha$ следует $W_k \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \to \beta$;
- Если ни в каком мире $W_k : W_i \preceq W_k$ не выполнено α, то $W_i \Vdash \neg\alpha$.

Так определённую упорядоченную тройку $\langle W, (\preceq), (\Vdash)\rangle$ — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности — назовём моделью Крипке. Будем говорить, что формула α вынуждается моделью (или является истинной в данной модели), если $W_i \Vdash \alpha$ в любом мире W_i. Будем записывать это как $\Vdash \alpha$.

(a) Построим пример модели, опровергающей формулу $P \vee \neg P$ (деревья в моделях Крипке у нас будут расти вправо):

$$\begin{tikzcd}
 & W_2 \\
W_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & W_3
\end{tikzcd}$$

В данной модели переменная P вынуждена только в мире W_2.

Укажите все узлы, в которых вынуждено P, $\neg P$, $P \vee \neg P$ и сделайте вывод о вынужденности закона исключённого третьего в данной модели.

(b) Постройте модель, опровергающую формулу $((P \to Q) \to P) \to P$.

(c) Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α, если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.

(d) Покажите, что по любой модели Крипке K можно построить такую алгебру Гейтинга H, что $\Vdash_K \alpha$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha]\!]_H = 1_H$. Покажите из этого, что любая модель Крипке — действительно модель ИИВ.

(e) Предложите формулу, глубина опровергающей модели для которой (если её рассматривать как дерево) не может быть меньше 2. Можете ли предложить соответствующую конструкцию для произвольной глубины n?

9. Теорема о нетабличности интуиционистской логики.

(a) Рассмотрим следующее утверждение $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$: покажите, что это утверждение верно в классической логике, но недоказуемо в интуиционистской. Интуитивно недоказуемость в интуиционистской логике очевидна: пусть A — сегодня дождь, B — сегодня мороз $-30°$ по Цельсию, C — сегодня понедельник. У нас нет никаких конструктивных способов показать из одного утверждения другое.

(b) Обозначим за ρ_n следующее утверждение:

$$\bigvee_{i \neq j; 0 < i,j \leq n} (A_i \to A_j)$$

Покажите, что для любой табличной модели ИИВ T найдётся такое n, что $[\![\rho_n]\!]_T = \texttt{И}$.

(c) Покажите, что $\nvdash \rho_n$ в ИИВ ни при каком $n > 1$. Как из этого показать, что никакая табличная модель ИИВ не является полной?

Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. Новые аксиомы и правила вывода для исчисления предикатов имеют ограничения (требования свободы для подстановки и отсутствия свободных вхождений). Если эти требования будут нарушены, исчисление станет некорректным. Данный факт можно показать, построив соответствующие опровергающие оценки для каких-то доказуемых формул. Постройте соответствующие формулы, доказательства и оценки.

2. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:
   (a) $\forall x.\phi \to \phi$
   (b) $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$
   (c) $(\forall x.\forall x.\phi) \to (\forall x.\phi)$
   (d) $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$
   (e) $(\exists x.\phi) \to (\neg\forall x.\neg\phi)$
   (f) $(\forall x.\neg\phi) \to (\neg\exists x.\phi)$
   (g) $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$
3. Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$
4. Докажите теорему о дедукции для исчисления предикатов:
   (a) Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta \to \forall x.\gamma$, то $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \forall x.\gamma$ (если x не входит свободно в α).
   (b) Если $\Gamma, \alpha \vdash (\exists x.\gamma) \to \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \to (\exists x.\gamma) \to \beta$ (если x не входит свободно в α).
   (c) Сведите всё вместе и постройте общее доказательство теоремы.
5. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких:
   (a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$
   (b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$
   (c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$
   (d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

Домашнее задание №7: «Исчисление предикатов»

1. Пусть дано непротиворечивое множество замкнутых формул Γ, и пусть дана формула α. Покажите, что как минимум либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ непротиворечиво.
2. Пусть D — предметное множество, и оно состоит из строк. Пусть Γ — некоторое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Пусть

   $$[\![f_i(\theta_1, \theta_2, \dots \theta_k)]\!] = \text{«}f_i(\text{»} +\!+ [\![\theta_1]\!] +\!+ [\![\theta_2]\!] +\!+ \dots +\!+ [\![\theta_k]\!] +\!+ \text{«})\text{»}$$

   Пусть

   $$P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \texttt{И}, & \text{если } P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Gamma \\ \texttt{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

   Покажите тогда, что $\psi \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\psi]\!] = \texttt{И}$. Для этого:
   (a) покажите, что $\alpha \,\&\, \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Gamma$;
   (b) покажите, что $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$, либо $\beta \in \Gamma$, либо выполнено оба утверждения;
   (c) покажите, что $\alpha \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\neg\alpha \notin \Gamma$.
   (d) покажите, что $\alpha \to \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда либо $\neg\alpha \in \Gamma$, либо одновременно $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Gamma$.
   (e) при помощи сформулированных выше вспомогательных утверждений докажите требуемое утверждение.
3. Формализация понятий свободных переменных, свободы для подстановки, замены переменных.

   Рассмотрим множество FV (свободных переменных) для формул:

   $$FV(\psi) = \begin{cases} \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \psi \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ FV(\alpha) \cup FV(\beta), & \text{если } \psi \equiv \alpha \star \beta \\ FV(\alpha), & \text{если } \psi \equiv \neg\alpha \\ FV(\varphi) \setminus \{x\}, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } \forall x.\varphi \text{ или } \exists x.\varphi \end{cases}$$

и для термов:

$$FV(\theta) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } \theta \equiv x \\ \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \theta \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{cases}$$

Рассмотрим операцию замены переменных, определим её для формул:

$$\alpha[x := \theta] = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ P(\theta_1[x := \theta], \theta_2[x := \theta], \dots, \theta_k[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ (\psi[x := \theta]) \star (\varphi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ \neg(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \neg\psi \\ \forall y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \forall y.\psi \\ \exists y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

и для термов:

$$\rho[x := \theta] = \begin{cases} \rho, & \text{если } x \notin FV(\rho) \\ \theta, & \text{если } \rho \equiv x \\ f(\rho_1[x := \theta], \rho_2[x := \theta], \dots, \rho_k[x := \theta]), & \text{если } \rho \equiv f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k) \end{cases}$$

Контекстом подстановки $\alpha[x := \theta]$ назовем следующую функцию от формулы и заменяемой переменной:

$$CX(\alpha, x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ CX(\psi, x) \cup CX(\varphi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ CX(\psi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \neg\psi \\ CX(\psi, x) \cup \{y\}, & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и либо } \alpha \equiv \forall y.\psi, \text{ либо } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

(a) Покажите, что $x \in FV(\alpha)$ тогда и только тогда, когда x входит свободно в α (*подсказка:* доказательство ведётся индукцией по длине формулы α);

(b) Покажите, что $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \varnothing$ тогда и только тогда, когда θ свободна для подстановки вместо x в α;

(c) Покажите на основании данных определений, что если $x \notin FV(\alpha)$, то при любом множестве D и любых оценках символов и переменных из $[\![\beta \to \alpha]\!] = \texttt{И}$ следует $[\![(\exists x.\beta) \to \alpha]\!] = \texttt{И}$;

(d) Покажите на основании данных определений, что если $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \varnothing$, то при любом множестве D и любых оценках символов и переменных $[\![\alpha[x := \theta] \to \exists x.\alpha]\!] = \texttt{И}$.

Домашнее задание №8: «Предварённая форма»

В силу значительного объёма данного задания, часть пунктов задания не будет раскрыта (будет сформулирована по аналогии) — эти пункты при ответе могут раскрываться на большое количество отдельных подпунктов, каждый из которых оценивается независимо.

1. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \to (\forall x.\beta \vee \alpha)$$

   (b) Покажите, что

   $$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$

   где p и q — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае x может совпадать с y.

   (c) Докажите аналогичные утверждения для &.

   (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

2. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \to (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \to ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

(b) Покажите, что если p не входит свободно в β и q не входит свободно в α, то

$$\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \to (\forall x.\alpha[p := x]) \vee (\forall y.\beta[q := y])$$

при условии, что x свободно для подстановки вместо p в α и y свободно для подстановки вместо q в β.

(c) Докажите аналогичные утверждения для &.

(d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

3. Сформулируйте и докажите аналогичные предыдущим пунктам утверждения для квантора существования.

4. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \to \beta$, тогда:

   (a) Докажите:

   $$\vdash \psi \vee \alpha \to \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \,\&\, \alpha \to \psi \,\&\, \beta \quad \vdash (\psi \to \alpha) \to (\psi \to \beta) \quad \vdash (\beta \to \psi) \to (\alpha \to \psi)$$

   (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

   (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \to (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

   (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \to (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

5. Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если α — формула, то для неё найдётся такая формула β с поверхностными кванторами, что:

   (a) $\vdash \alpha \to \beta$

   (b) $\vdash \beta \to \alpha$

Домашнее задание №9: «Машина Тьюринга, неразрешимость исчисления предикатов»

1. Давайте договоримся, что указывая внешний алфавит, мы не будем упоминать «пустой» символ ε, будем считать, что он всегда есть в алфавите. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие фунцкии:

   (a) заменяющую ведущие нули числа в двоичной системе счисления на ε (в алфавите $A = \{0, 1\}$);

   (b) в числе из алфавита $\{0, 1, 2\}$ вырезающую все нули, заполняя образующиеся пустоты сдвигая число влево: например, из числа `20001010232` должно получиться `211232`;

   (c) разворачивающую строку в алфавите $\{a, b\}$ в обратном порядке: из строки `aaabababa` должна получиться строка `abababaaa`.

2. Рассмотрим алфавит A, множество всех слов в этом алфавите A^* и некоторый язык $L \subseteq A^*$. Напомним, что мы будем называть машину Тьюринга разрешающей язык L, если на каждом слове $w \in A^*$ машина заканчивает работу в допускающем (s_A) или отвергающем (S_D) состоянии, причём машина переходит в допускающее состояние s_A тогда и только тогда, когда $w \in L$. Постройте машины Тьюринга, разрешающие следующие языки:

   (a) язык всех ненулевых двоичных чисел ($A = \{0, 1\}$);

   (b) язык всех чётных четверичных чисел ($A = \{0, 1, 2, 3\}$);

   (c) язык всех десятичных чисел, делящихся на 3 ($A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$);

   (d) язык всех правильных скобочных последовательностей ($A = \{(,)\}$);

   (e) язык всех корректно заданных машин Тьюринга (придумайте сами представление для машины Тьюринга);

   (f) язык всех машин Тьюринга, имеющих не меньше трёх состояний;

   (g) язык всех машин Тьюринга, завершающих работу не более чем за пять переходов.

3. Постройте логические формулы, кодирующие машины Тьюринга из первых двух подпунктов предыдущей задачи в исчислении предикатов.

4. Формализуйте доказательство того, что если машина Тьюринга достигает состояния P_x при наличии на ленте последовательности $\langle s, w \rangle$ (напомним, что данная запись означает, что головка находится на первом символе строки w, а слева от неё — строка s, записанная в обратном порядке), то тогда $\vdash P_x(s, w)$.

Домашнее задание №10: «Аксиоматика Пеано, рекурсивные функции»

1. Возьмём следующие определения сложения и умножения, применяемые в аксиоматике Пеано. **Важно:** в отличие от определений с лекции, мы будем проводить разбор второго аргумента.

$$a + b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ (a + x)', & b = x' \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & b = 0 \\ a + (a \cdot x), & b = x' \end{cases}$$

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a \cdot (a^x), & b = x' \end{cases}$$

   Докажите следующие утверждения:

   (a) $a + b = b + a$

   (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$

   (c) $a \cdot 1 = a$ (определим 1 как $0'$)

   (d) $a \cdot b = b \cdot a$

   (e) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

   (f) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

   (g) $2 \cdot a = a + a$

   (h) Пусть $a \le b$ означает, что найдётся такой c, что $a + c \le b$. Покажите, что если $a \le b$, то $a + c \le b + c$

   (i) Покажите, что если $a \le b$ и $c \le d$, то $a + c \le b + d$

   (j) Покажите, что $a^b \ne b^a$

   (k) Покажите, что $a^{b^c} \ne (a^b)^c$

   (l) При каких a и b выполнено $a \cdot b > a + b$? Докажите полученное утверждение.

2. Докажите следующие утверждения в формальной арифметике:

   (a) $\vdash p = p$

   (b) $\vdash 0 + a = a$

   (c) $\vdash 2 + 2 = 4$

   (d) $\vdash 2 \cdot 2 = 4$

   (e) $\vdash a = b \to b = a$

   (f) $\vdash a = b \to a + 1 = b + 1$

   (g) $\vdash a = b \to a + c = b + c$

3. Определим новое обозначение: будем писать $x \le y$ вместо $\exists a.x{+}a = y$ (и воспринимать это новое обозначение как своего рода макроподстановку). Также, введём обозначение для записи натуральных чисел в формальной арифметике:

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\overline{n-1})', & n > 0 \end{cases}$$

   Естественно, данные обозначения целиком принадлежат мета-языку. Покажите следующие утверждения:

   (a) $\vdash 1 \le 2$

   (b) $\vdash a = b \to a \le b$

   (c) $\vdash a \le b \to a' \le b'$

   (d) $\vdash a \le b \to \forall c.a + c \le b + c$

   (e) $\vdash a \le b \lor b \le a$

(f) Обозначим за $\phi_n(x)$ формулу $x = 0 \vee x = 0' \vee x = 0'' \vee \dots \vee x = \overline{n}$. Покажите тогда, что при любом натуральном n выполнено $\vdash a \le \overline{n} \to \phi_n(a)$

(g) При любом натуральном n выполнено $\vdash \phi_n(a) \to a \le \overline{n}$

4. Покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

   (a) $x + y$

   (b) $2x$

   (c) x^2

   (d) $x \cdot y$

   (e) x^y

5. Введём операцию «ограниченное вычитание»:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, & b > a \\ a - b, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также определим деление с остатком: пусть даны натуральные числа a и b ($b > 0$). Известно, что найдутся два числа k и x ($0 < x \le b$), такие, что $a = k \cdot b + x$. Обозначим эти числа так: $k = a/b$ (частное) и $x = a\%b$ (остаток).

Тогда покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

   (a) $x \dot{-} y$

   (b) x/y

   (c) $x\%y$

   (d) $\max(x, y)$

   (e) «частичный логарифм»: $\mathrm{plog}_x(a) = \max\{t : a\%(x^t) = 0\}$

   (f) Функция, вычисляющая n-е простое число