T.C.
İstanbul Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü
Ekonometri Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi

Bayesyen Regresyon ve WinBUGS ile Bir Uygulama

Oya Ekici

25010202060

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Karun Nemlioğlu

İstanbul, 2005

ÖZ

Bu çalışmanın amacı Bayesyen yaklaşımın temel özelliklerine işaret ederek, regresyon analizini Bayesyen ilkelere göre gerçekleştirmektir. Bayesyen yaklaşımın ön bilginin kullanılmasına olanak vermesi sayesinde regresyon analizinde çok daha etkin parametre tahmini yapılabilmektedir. Parametrelere ilişkin çıkarsama, hipotez testi veya güven aralıkları hesabı ön bilgi ve örneklem bilgisine dayandırılarak yapılır. Tekrarlanan davranışları göz önünde bulundurarak çıkarsama sürecine gitmeye gerek duyulmaz. Bayesyen yaklaşım özellikle ekonometrik modellerde karşılaşılan sorunlarda çözüm olabilmektedir. Örneklem ister büyük ister küçük olsun, yöntem çalışmaktadır. Bilgisayarların gelişmesi ve yazılımdaki ilerlemelerle Bayesyen yaklaşımın uygulanmasında artık (nümerik integral) hesaplamaya ilişkin hiç bir sorunla karşılaşılmamaktadır.

ABSTRACT

The purpose of this study is to carry out regression analysis in the line with Bayesian principles by pointing out the main features of Bayesian approach. In regression analysis, Bayesian approach can realize more effective parameter estimation by means of providing the opportunity to use prior information. The inference about parameters, hypothesis testing or confidence interval are performed on the basis of the both prior information and sampling information we have. There is no need to apply the inference procedure in terms of their behavior in repeated. Bayesian approach especially provides solutions to the problems that are met in econometric models. Bayesian approach works well both in small and large sample size. Any longer, there is no difficulty to compute numerical integration of the applications within the Bayesian context as the technical impovements of computer effort and software products are increased.

ÖNSÖZ

Yöntemin doğasına bakıldığında ekonometrik çalışmalar için oldukça elverişli kabul edilen Bayesyen analiz ile az sayıda uygulama çalışması yapıldığı görülmüştür.

Genel olarak denilebilir ki, ön bilginin oluşturulması her zaman için çalışmanın önem taşıyan kısmı olmuştur. Ancak ön bilgi her durumda kendiliğinden mevcut olmayabilir. Bu da uygulamanın bir güçlüğü olarak araştırmacının karşısına çıkar. Tezin uygulama çalışmasında, ön bilginin elde edilmesinde paralel bir çalışma olarak kabul edilebilecek bir analiz yapılıp, buradan elde edilen sonuçlar ön bilgi olarak alınmıştır. Ancak bu paralelliği yakalamada verinin aynı yapıda olmasının da katkısı vardır. Aynı yapıda ve özellikte veriyi bulmakta güçlüklerle karşılaşılabilmektedir.

Çalışma boyunca yeri geldikçe, Bayesyen yaklaşımın Klasik yaklaşımdan farklılıklarına değinilmiştir. Ön bilginin kullanılmasıyla Klasik yaklaşımdan farklı sonuça ulaşan Bayesyen yaklaşım, sübjektif olması gerekçesiyle eleştirilmektedir. Yapılan tüm çalışmalarda, modellemelerde sübjektiflik vardır. Ayrıca ön bilgi bir şekilde analize katılmaktadır. Bayesyen yaklaşımda bu kurallı bir biçimde yapılmaktadır. Ancak ön bilgi kullanılmasa da elde edilen aynı sonuçlar Klasik yaklaşımdan farklı yorumlanmaktadır.

Bu bağlamda, güçlü temelleri olan Klasik yaklaşım öyle yaygın bir biçimde kabul görmüştür ki aksi yorum mevcut değilmişçesine istatistiksel çalışmalar yapılmakta ve uygulanmaktadır. Ancak böyle bir tutumla iyi çalışabilecek, almaşık yöntemler göz ardı edilebilmektedir.

Tez çalışmam boyunca yaptığı eleştiriler ve düzeltme katkıları için danışmanım Doç. Dr. Karun Nemlioğlu’na teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SAYFA

SAYFA

ŞEKİL DİZİNİ

SAYFA

TABLO DİZİNİ

KISALTMALAR

H.P.D.	Son yoğunluğun en yüksek olduğu bölge veya aralık anlamında (Highest Posterior Density Region or Interval) için "En Yüksek Son Yoğunluk Bölgesi veya Aralığı" kullanılmıştır.
o.y.f.	Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
E.K.K.	En Küçük Kareler
MCMC	Markov Chain Monte Carlo
AB	Avrupa Birliği

TERİM DİZGİSİNE İLİŞKİN NOTLAR

Çalışmada "**Bayesyen**", "Bayes görüşüne ait" anlamında kullanılmıştır. Türkçe bir sözcük değildir. Daha önce "Bayesgil", "Bayescil" olarak yer aldığı görülmüştür. Ancak buradaki eklerin kullanımı da tartışmalıdır.

Çalışmada "**Ortalama**" derken aritmetik ortalama kastedilmektedir.

"a priori" ve "a posteriori" karşılığı, sırasıyla "önsel" ve "sonsal" kullanıldığından, çalışmada "Prior Distribution", Ön dağılım; "Posterior Distribution", Son dağılım şeklinde ifade edilmiştir. Örneklem dağılımı anlamında "Likelihood Function" için Benzerlik Fonksiyonu kullanılmıştır.

"**Conjugate Prior Distribution**" için "Eşlenik Ön Dağılım" veya "Bileşik Ön Dağılım" kullanıldığı görülmüştür. Türkçe'de yaygın olarak kullanılan, fikir birliğine varılmış tek bir karşılık yoktur. Terim içeriği gereği matematiksel özellik taşır. Sözlükte "conjugate", matematik terimleri dizgisine dayalı karşılığında da "eşlenik" olarak tanımlanmaktadır. Bu nedenle çalışma boyunca "**Eşlenik Ön Dağılım**" benimsenecektir.

"Kernel" için "Çekirdek"

"Ignorance" için "Tam bilgisizlik"

"Improper" için "Uygunsuz"

"Invariance" için "Değişmezlik" kullanılmıştır.

GİRİŞ

Bayesyen yaklaşım özü Bayes Teoremine dayandırılarak yapılandırılmış bir yaklaşım sistemidir. Bu yaklaşım istatistikte ve pek çok ekonometrik çalışmada uygulanmaktadır. Değişkenler arası ilişkiyi oluşturmada regresyon, ekonometride en temel yöntemlerden biri iken, Klasik yaklaşım her zaman istenilen etkinlikte bu analizi gerçekleştirememektedir. Bu noktada Bayesyen yaklaşımın gelişme süreci göz önünde bulundurulduğunda, kendi disiplini olan alternatif bir yaklaşım olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla pek çok istatistiksel kavram bu yaklaşımda farklı yorumlanmakta ve ele alınmaktadır. Bayesyen regresyonun daha iyi anlaşılmasını sağlamak üzere öncelikle yaklaşımın alt yapısı sunulmak istenmiştir.

Birinci Bölümde Bayesyen yaklaşımın tarihi arka planı anlatılmış, sürecin oluşumunda katkıda bulunanlara yer verilmiştir. Kavramlara tek tek değinilerek, Bayesyen yaklaşım için ne anlama geldiği açıklanmıştır.

İkinci Bölümde Bayesyen analiz gerçekleştirilirken hangi ilkeler çerçevesinde yapılacağı açıklanmıştır. Ayrıca Bayesyen yaklaşım için son derece önemli bir konu olan Ön Dağılımın belirlenmesi sorununa değinilmiştir.

Üçüncü Bölümde belirtilen ilkeler etrafında, tek değişkenli ve çoklu regresyon modellerinin Bayesyen analizi teorik olarak ele alınmıştır. Regresyonda ön bilginin kullanıldığı ve kullanılmadığı durumlara değinilmiştir.

Dördüncü Bölümde bir uygulama çalışması yapılmıştır. Bu çalışma ile ön bilginin kullanılmasına örnek olacak bir uygulama tasarlanmıştır.

Özetle, çalışmanının genelinde işaret edilen nokta ön bilgi varolduğunda, Bayesyen regresyonun tahmininin nasıl sonuçlar verdiğidir.

BÖLÜM -I-
İSTATİSTİKTE BAYESYEN ÇIKARSAMANIN GELİŞİMİ

Bu bölümde başlangıç bilgileri niteliğinde, Bayesyen yaklaşımı tanıtmaya dönük tarihsel sürece yer verilmiştir. Bunu takiben, Bayesyen yaklaşımın öne sürdüğü anlayışın temelleri açıklanmaya çalışılmıştır. Bayesyen yaklaşımın düşünce sistematiği ve kavramlara bakışı ortaya konmuştur. Özellikle ikinci alt bölümde, Bayes yaklaşımın almaşık düşünce biçimlerinden farkı ortaya konmaya çalışılmıştır.

1.1. Sürecin Oluşumu ve Katkıda Bulunanlar

İstatistik gelişirken temel olarak iki farklı felsefi yaklaşımın belirginleştiği görülmektedir. Klasik (veya Frekansçı, Berkeley istatistiği) yaklaşım ve Bayesyen yaklaşım. Bu disiplinin başlangıç aksiyomlarının yorumlanmasında, pek çok konu ve kavramın ele alınışında bu yaklaşımlardan biri diğerine alternatif olmuştur. Ancak zaman içinde, bu konuda çalışanların tutumuna bağlı olarak, ve belki de algılanması daha kolay olması nedeniyle, istatistik alanında Klasik yaklaşım daha fazla hakim olmuştur.

İstatistiğin bir disiplin olarak ortaya çıkmaya başlaması P.S. Laplace, C.F. Gauss, A. de Morgan ve A.M. Legendre gibi bilim adamlarının çalışmalarıyla gerçekleşmiştir. Bu çalışmaları takiben F. Galton, R.A. Fisher, J. Neyman, E.S. Pearson, ve F.Y. Edgeworth'un katkılarıyla önemli ilerleme kaydedilmiştir. Klasik ve Bayesyen yaklaşımın, gerek ilgili yaklaşımı benimseyenlerin çalışmaları anlamında, gerekse istatistik alanında sağlamak istedikleri hakimiyetleri anlamında zaman zaman iç içe geçen gelişim süreçleri olmuştur.

Bayesyen yaklaşım ilk defa, İngiltere'de yaşayan bir rahip, aynı zamanda matematikçi olan Thomas Bayes (?-1761) tarafından yazılan ve ölümünden birkaç yıl sonra arkadaşı Richard Price'nin bulup yayınladığı bir denemeyle ("An Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances") ortaya konmuştur. Bu denemeyle bugünkü Bayes dünyasının çekirdeği olan Bayes teoremi bulunmuştur. Bu yaygın olan görüşün aksine, teoremin, teoreme adını veren Thomas Bayes tarafından ortaya atıldığına dair ciddi şüpheler vardır. Teoremin ortaya çıkmasının öncesinde (1730'larda), yakın çevrede başka bilim adamları tarafından tartışıldığı ve neticelendirildiği bilinmektedir. David Hartley tarafından -Bayes'in ölümünden 12 yıl önce- 1749 çıkarılan kitabın bir yerinde yazar, "ters olasılık" sorununun çözümü için birisiyle görüştüğünü, tartıştığını belirtiyor ve çözüm yolunu kısaca veriyor. Bu kişinin kim olabileceğine dair araştırma yapıldığında, Bayes'den başka isimlerden şüphelenilmiştir.[1]

İstatistik yazını incelendiğinde, 18. yüzyılın sonlarından 20. yüzyılın başlarına kadar istatistiksel çıkarsamanın Bayesyen yaklaşımın etkisinde olduğu görülmektedir. 1764'te Bayes teoremi sürece katkıda bulunurken, yine yakın dönemde bağımsız bir şekilde başlayıp devam eden daha detaylı ve özgün analizleriyle Laplace etkili olmuştur. 1800'lerin sonlarında Edgeworth, A. Wald, Galton ve Pearson'un çabaları ve 1900'lerin başında Neyman ile Pearson'un birlikte yaptıkları çalışmalar bu alandaki yapılanmayı ciddi olarak hızlandırmıştır. Klasik çıkarsama yöntemi Neyman ve Pearson tarafından, benzerlik (likelihood) temelli çıkarsama yöntemi Fisher tarafından geliştirilmiştir.[2] Bayes'den ayrı bir kanaldan ilerlemeye başlayan klasik yaklaşım ile, kavramlar ve çıkarsama yöntemleri tamamen farklı inşa edilmiştir. Klasik yaklaşımı benimseyen bilim adamlarından öne çıkan bu üç isim, Pearson, Neyman ve Fisher, Bayesyen yaklaşıma ve "ters olasılık" konusuna olan eleştirel tutumlarıyla bu yaklaşıma olan güveni sarsmaya çalışmışlardır. Bu suretle 1920'ler ile 1950'ler arası Bayesyen yaklaşımın gelişiminin olumsuz etkilendiği söylenebilir.

Belirtildiği gibi, bir dönem Klasik yaklaşımın etkisi ile geri planda kalan Bayesyen yaklaşıma, F.P. Ramsey'in "Gerçeklik ve Olasılık" ("Truth and Probability") adlı denemesi ile tekrar ilgi duyulmaya başlanmıştır.[3] Ayrıca 1900'lerin ortalarında **H. Jeffreys** ("Ters olasılık"taki mantıksal eksiklikleri gidermiş, objektif yaklaşımlı Bayesyen analizi geliştirmiş ve Bayesyen regresyon konusunda ilk çalışmayı yapmıştır. Ayrıca Bayesyen hipotez testini geliştirmiştir.), **I.J. Good**, **L.J. Savage** (Matematiksel istatistik alanında katkıları vardır.), **B. de Finetti** (Subjektif

[1] Stephen Stigler, "Who Discovered Bayes's Theorem," The American Statistician, Vol. 37, No. 4., November 1983, s. 290-296.
[2] Jeff Gill, **Bayesian Methods**, New York, Chapman & Hall, 2002, s. 14.
[3] Anscombe F.J., "Bayesian Statistics," The American Statistician, Vol. 15, No. 1, Feb. 1961, s. 21.

yaklaşımlı Bayesyen analizi geliştirmiştir.), **D.V. Lindley** ve **R. Schlaifer** (Bayesyen yaklaşım çerçevesinde, İşletme sorunlarına ve endüstriyel sorunlara yeni yaklaşımlar geliştirmiştir.) gibi bilim adamlarının da klasik teknikte gözlenen eksikliklere cevap verir nitelikteki çalışmaları, Klasik yaklaşımdan önemli ölçüde etkilenen Bayesyen yaklaşıma olan ilginin yeniden canlanmasını sağlamıştır. 1950'lerden sonra Bayesyen model seçimi ve hipotez testi geliştirilmiştir. Böylelikle bu süreç içinde teorik altyapı daha ayrıntılı yapılandırılmıştır. Fakat bazı matematiksel yapıların çözüme kavuşturulamaması önemli bir engeldi ve model seçiminde elde edilen bazı son (posterior) yapıların integral hesaplamalarının çözülmesi imkansızdı. Ancak **N. Metropolis** (Markov Zinciri Monte Carlo tekniğinde temel oluşturacak çalışmaları gerçekleştirmiştir.), **W.K. Hastings** (Markov Zinciri Monte Carlo tekniğinin istatistik alanındaki uygulamalarını geliştirmiştir.), **P.H. Peskun**, ve **S. Geman**'ın çalışmalarıyla, **A.E. Gelfand** ve **A.F.M. Smith**'in katkılarıyla bu sorun aşılmıştır.

Doğal olarak artık modern Bayesyen istatistik, simülasyon tekniklerine bağlı olan uygulamalarla kendini daha iyi açıklamaktadır. Bilgisayar teknolojisinin gelişmesiyle Bayesyen istatistiğin matematikle ilgili alanlarında karşılaşılan güçlükler de ortadan kalkmıştır.

1.2. Bayesyen Çıkarsamanın Temelleri ve İstatistiksel Kavramlara İlişkin Yorumları

Bir yöntem olarak istatistik, değerlendirilirken ve ele alınırken, bilim felsefesinde yer alan yaklaşımlara göre farklı düşüncelerin etkisinde kalmıştır. Ancak elbette ki bilim üretme sürecinde, bunların yön verici olduğu söylenemez. Bilim kendi başlangıç dinamiğine sahiptir. Bilim felsefesinde sözü edilen yaklaşımlar (veya mantıksal yöntemler), bilgiyi oluşturmakta kullanılan ve yöntembilim tartışmalarında oynadıkları merkezi rolden dolayı birer akıma dönüşen[4] tümevarım ve tümdengelimdir. İstatistik, bu yöntemlerin dışında, bilim felsefesindeki bazı ilkelerin değerlendirilmesine göre de kendi içinde birbirinden farklı yorum ve uygulamalar geliştirmiştir. Örneğin nedensellik ilkesi. Hemen hemen ilgilenilen bütün

[4] Ömer Demir, **Bilim Felsefesi**, 3.b., Ankara, Vadi Yayınları, 2000, s. 25.

araştırmaların özünde ya da bir yerinde, açıklanması gereken bir ilişki örgüsü vardır. "Hangi olay veya olgu, diğerinin meydana gelmesine sebebiyet vermiştir?, Bu hipotezde (veya önermede) ortaya konan ilişki nasıl değerlendirilmelidir?" gibi bir dizi soruyla araştırmaya, dolayısıyla da bilginin oluşumuna katkıda bulunmak hedeflenmektedir. Bunu yaparken de ilişkinin determinist mi yoksa olasılıklı mı olduğu benimsenen yoruma göre değişmektedir.

İstatistikte bu düşünsel çeşitlilikler zaman içerisinde belirginleşerek bir önceki bölümde de değinilen iki yaklaşımda kutuplaşmıştır. (Bilim ve bilim felsefesi arasındaki ilişki tartışılan bir konudur. Bilim felsefesinin, bilime yol çizdiği savunulamadığı gibi, bilimin de bilim felsefesine dayanarak kendini oluşturduğu savunulamaz. Ancak karşılıklı anolojiler kurulabilir.) Klasik yaklaşım tümdengelim yöntemi ile paralellikler gösterirken, Bayesyen yaklaşım, tümevarım yöntemiyle paralellik gösterir. Ayrıca her zaman bu ayrım pek net olamamakla birlikte Klasik yaklaşım nedensellik ilkesinin deterministik yorumuna yakın görünürken, Bayesyen yaklaşım olasılıklı yorumuna yakındır.

Önemli bazı istatistiksel konu ve kavramların Bayesyen yorumuna değinilirken, gerisinde yatan düşünceye ışık tutularak, Klasik yaklaşımdan farkı ortaya konmaya çalışılmıştır.

Belirsizliğin değerlendirilmesi : Bayesyen istatistiğe göre bir teori olsun, bir önerme veya bir nedensellik ilişkisi olsun, her kapsamdaki belirsizlik olasılıklarla ifade edilmelidir. Yaklaşımın asıl fikri budur. Sözgelimi ekonomide tüketimi belirleyenin gerçekten ne olduğunu açıklamaya çalışan pek çok yaklaşım vardır; "Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelirdir" yaklaşımı bunlardan biridir. Bayes'de bu ifadeyle ortaya konan ilişki olasılıklarla tanımlanır. Lindley'in de belirttiği gibi "Etrafımız belirsizliklerle sarılmıştır ve bu belirsizlikler hayatımızda hakim bir rol oynamaktadır. Bayesyen paradigma olasılık sayesinde onları anlamaya, idare ve kontrol etmeye ... yarayan güçlü bir araç sağlar."[5] Klasik yaklaşım belirsizliklerde deterministik davranır. Varsayımlar doğrultusunda söz konusu belirsizliği, orada iddia edilen ilişkiyi, sıklıklarına göre değerlendirerek, kabul edilmesi ya da

[5] Dennis Lindley, "Theory and Practice of Bayesian Statistics," The Statistician, 32, 1983, s. 1.

edilmemesi yönünde karar verir. Tüketim örneğinde ilişkiyi açıklayacak veriye dayanarak, “Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelirdir” der veya “Tüketimin temel belirleyicisi sürekli gelir değildir” der.

Bu bağlamda Bayesyen yaklaşımı benimseyenler, belirsizlikle ifade edilen bir teoriyi tamamen kabul etmenin veya körü körüne reddetmenin bilgi oluşturma sürecine pek bir katkı sağlamayacağı, aksine önemli sayılabilecek yanılsamalara yol açacağı şeklinde eleştiriler getirebilirler. Öte yandan bu eleştirileri getirirken kendilerini de “Bayesyen yaklaşımda belirsiz olan ilişki, olasılığının hesaplanması suretiyle bir derece aydınlatılmış olur. Böylelikle bilgi ve karar sürecine daha net, yanıltıcı olmayan ilaveler yapar.” şeklinde savunabilirler.

Olasılık : Olasılığın Mantıksal Teori, Klasik Teori, Frekansçı Teori, Sübjektif Teori, gibi teorilerle ortaya konan birbirinden farklı tanımları mevcuttur. Bayesyen yaklaşım bunlardan Sübjektif tanımı kabul etmektedir. Bu yaklaşımı esas alarak gelişen Bayesyen istatistikte bir olayın olasılığı, o olaya ilişkin inanç derecesi (ön bilgi, prior) ile denemeden elde edilen sonuçların (verinin) birleştirilmiş halidir. Bir araya getirme işlemi, Bayes teoremine dolayısıyla da koşullu olasılığa dayanmaktadır.

Bayesyen istatistikte olasılık “tümevarım olasılığı”dır. Amaç denemeler yaparak en yüksek olasılığa (“1” olasılığına) yani kesinliğe ulaşmaktır. Bu yol, doğrulamalar yapılarak ilerlenilen bir yoldur. Klasik yaklaşımın paralellik taşıdığı tümevarım yönteminin savunucusu Karl R. Popper’a göre ise “Aynı diğer kuramlar gibi istatistiksel kuramlar da varsayımsal-tümdengelimseldir. Ve diğer tüm kuramlar gibi, istatistiksel varsayımlar da yanlışlanmalarını sağlayan deneylerle –yani ikincil olabilirliklerini sıfıra ya da hemen hemen sıfıra indirgemeye yönelik deneylerle sınanır.”[6] Başka bir deyişle Klasik’te yanlışlama esas olduğundan amaç “0” olasılığına ulaşmaktır. Yaklaşımların bu konuyla ilgili farklılıklarını şöyle özetleyebiliriz:

---

[6] Karl R. Popper, **Bilimsel Araştırmanın Mantığı**, Çev. İlknur Aka – İbrahim Turan, 2. b., İstanbul, Yapı Kredi Yayınları, Kazım Taşkent Klasik Yapıtlar Dizisi, 2003, s. 498.

"t" bir teori ve "g" onunla ilgili gözlemler ise farklı olasılık yaklaşımlarına göre süreç;

Bayesyen yaklaşımda	Klasik yaklaşımda
Varsayımlarsız	Varsayımlarla
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Deneme	Deneme
$\Downarrow$	$\Downarrow$
Doğrulama	Yanlışlama
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\frac{1}{2} << p(t,g) < 1$	$p(t,g) = 0$

Bayesyen yaklaşımda herhangi bir olayın olasılığı hesaplanırken, deneme yapılan –elbette ki olayın konusuyla ilgili olarak– paranın veya zarın hilesiz olması gibi başlangıç varsayımlarına ihtiyaç duyulmamaktadır. Çünkü pratikte her zaman geçerli olamayacak böyle varsayımları yapmadan, bu konuda gerekli olan alt yapıyı ön bilgi ile sağlamaktadır. Örneğin araştırmacı hilesiz bir zar olduğunu düşünüyorsa ön olasılık 1/6 olurken, hileli bir zar ile yapılan denemde bu olasılık 2/6 olabilmektedir. Öte yandan Klasik yaklaşımda bu olasılık her zaman 1/6'dır. Laplace "Başarı Kuralı" adlı argümanıyla şans oyunlarında olasılık hesaplamalarını değişik bir yaklaşımla ortaya koymuştur. Bir bozuk para N defa atılmış ve K defa yazı geldiği gözlenmiş olsun. Ön dağılımının dikdörtgen dağılım –yani 0-1 aralığında bu olayın gerçekleşmesi olasılığının aynı- olduğu düşünülsün. Yazı gelmesi olayının son olasılığı (posterior), $(N+1)$'inci denemede $\left(\frac{K+1}{N+2}\right)$'dir. Denemenin başlangıcında, ilk atışta bir yazı gelmiş olsaydı Bayesyen son olasılık $\left(\frac{K+1}{N+2}\right) = \frac{2}{3}$ olurdu ki bu sonucun $\left(\frac{K}{N}\right) = \frac{1}{1}$ olmasından çok daha makul görünmektedir.[7]

Bayesyen yaklaşıma yöneltilen temel eleştiri olasılığın sübjektif olması üzerinedir. Bu konuda ilk çalışma olan "Ramsey ve de Finetti Teoremi (Dutch Book Teoremi)"ne göre, sübjektif bir değer sayılan inanç derecesinin sayısal ifadesi, bahis oranıyla $\left(\frac{p}{1-p}\right)$ ortaya konmaktadır. Doğal olarak bahis oranı olasılık aksiyomlarını

[7] Krzysztof Burdzy, "Probability is Symmetry On Foundations of Science of Probability," 2003, http://www.math.washington.edu/~burdzy/Bayes/book.pdf (1.02.2004).

sağlamamaktadır ve bununla bağlantılı olarak bu oranın mantıksal tutarlılığa sahip ve güvenilir olduğu söylenemez. Ancak başka bir kritere de başvurulabilir; bahis oranındaki *p*, ilgilenilen olayların gerçek fiziksel olasılıklarıyla belirleniyorsa bahis oranı "adil"dir (fair), anlamlıdır. Başka bir deyişle, inanç dereceniz denemelere dayalı bir olasılıkla (*p*) ölçülüyorsa, tutarlılık gereği bahis oranındaki bu olasılık değerinin olasılık aksiyomlarına uyması gerekmektedir.[8] Bu saptama paralelinde sübjektif inançlarla belirlenen bahis oranının, olasılık aksiyomlarını sağlayan -ve dolayısıyla da tutarlı- olasılık değeri ile belirlenmesi, bahis oranını adil yapar. Sübjektiflik tartışmaları devam ederken, Jeffreys, geliştirdiği Objektif tanım ile olasılığın Bayesyen istatistikte sübjektif olmadığını, onun önerdiği aşamalardan geçen tüm araştırmacıların aynı sonuca ulaştığını ileri sürmektedir.

Klasik yaklaşım olasılığın frekans tanımını kabul eder. Bu tanıma göre bir olayın olasılığı, o olayın çok sayıda tekrarlanarak yapılan denemelerinin (uzun dönemde) gerçekleşen sıklıklarıdır. N adet mümkün sonuçtan, K adet istenen olayın gerçekleşmesi olasılığı K/N 'dir (bir zar atılıyor, 2 sayısının gelmesi olasılığı $1/6$). Bir olay gerçekleşirken mümkün olan sonuçlardan her biri diğerine göre eşit muhtemel varsayılmaktadır. Bu anlamda daha önce de bahsedildiği gibi, Klasik yaklaşımın varsayımlarla yola çıkması, geri planda tümdengelimci yöntemi benimsediğinin göstergesidir. Klasik yaklaşım ile Popper'in görüşü arasındaki benzerliklerin bir ifadesi olarak Popper'in şu sözlerine yer verilebilir; "... İstatistiksel bir varsayımın sınanması da –aynı diğer varsayımlar gibi- tümdengelimlidir: içeriği –yani sınanabilirliği- yüksek olsa da, önce, varsayımlardan türeyebilecek şekilde bir sınama önermesi oluşturulur, sonra da deneyimle yüzleştirilir."[9] Bayes yaklaşımının, teorilerin olasılıklarının test edilmeleriyle kesinliğe ulaşılması -$p(t,g)=1$- hedefi, Popper tarafından imkansız görülmüştür. Elde edilen yeni veriye dayalı güncelleme yapıldığında olasılık değerinin yine değişmediğini öne sürer.

---

[8] Colin Howson ve Peter Urbach, **Scientific Reasoning: The Bayesian Approach**, 2.b., Illinois, Open Court, 1993, s. 79, 85, 86.
[9] Karl R. Popper, a.g.e., s. 491.

Parametre : Parametre Bayesyen yaklaşımda olasılık dağılımı olan bir rastlantı değişkeni gibi düşünülmektedir. Bu doğrultuda parametrenin tahmincisi için bir ön olasılık dağılımı belirlenir. Mevcut veri ile birleştirilerek parametre tahmincisinin son olasılık dağılımı (posterior) elde edilir. Özetle Bayes'de parametre ile ilgili tüm çıkarsama işlemleri son dağılıma dayanarak yapılır. Klasik yaklaşımda ise parametre, bilinmeyen bir sabit olarak görülür. Parametre tahmini sadece eldeki veriye dayanarak hesaplanır. Dolayısıyla parametrenin kendisi, tekrarlanan gerçek denemelerin sonucu olmadığından, olasılık dağılımının varolduğu düşünülemez.

Nokta Tahmin : İstatistiğin tahmin sorunsalında temel konulardan biri nokta tahminidir. Bayesyen yaklaşımda ilgilenilen parametrenin nokta tahmini genellikle son dağılımın ortalamasıdır (posterior mean). Karar teorisi açısından bakıldığında, zarar fonksiyonunun beklenen değeri, optimum tahmini verir: y gözlemler, θ parametre ve $\hat{\theta}$ bu parametrenin gözlemlerden tahmini ($\hat{\theta} = \hat{\theta}(y)$) iken, son olasılık dağılımı $p(\theta \setminus y)$, zarar fonksiyonu $L = L(\hat{\theta}, \theta)$'dır. Optimum tahmin ise

$$EL(\hat{\theta}, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) p(\theta \setminus y) d\theta \text{ 'dır.}$$

Klasik yaklaşımda deneme sonunda hesaplanan değer, en iyi tahmin olarak nitelendirilir. Onu iyi yapan özelliklerinin başında yansız, tutarlı ve etkin olması gelmektedir. Bu yaklaşımda etkinlik karşılaştırması yapılırken ortalama hata karesinin değeri ölçüt alınır. Buna karşın Klasik yaklaşım örnekten elde edilen bu en iyi tahminin, sözgelimi ortalamanın, değişmez bir değer olduğunu iddia etmez. (Zaten bu nedenledir ki tahminin hatasını ölçmeye çalışır veya tahminin ne kadar güvenle belirli bir aralıkta bulunabileceğini gösteren güven aralığına gereksinim duyar.) Ancak yine de parametrenin tahminine, objektif veya sübjektif olsun, olasılık tayin edilmesini reddeder.

Nokta tahmin başlığı altında istatistikte tahminin değerlendirilmesinde kullanılan, Bayes ve Klasik yaklaşım için birbirinden farklı önem derecelerine sahip bazı kriterlere de değinilmiştir;

-Yeterlilik : İlgilenilen parametreye ilişkin mümkün olan tüm bilgiyi içeren istatistik, yeterli istatistiktir. Bayesyen ve Klasik yaklaşım bu tanımda hemfikirdir. "Fakat yeterlilik Klasik nokta-tahmin teorisinde sadece bir varsayım olarak yer almaktayken, Bayesyen hesaplamada onun kanıtı mevcuttur."[10] Aslında Klasik yaklaşımın görüşüyle pek bağdaşmaz. Çünkü yeterliliğin özünde parametrenin koşullu olasılığı vardır. Bir parametrenin olasılığının olması da Klasik görüşe taban tabana zıttır.

Klasik yaklaşım önce, yeterli istatistiğin ilgili tüm bilgiyi içermesi sezgisinden hareket eder, sonra yeterliliği tahmincinin değerlendirmesinde bir kriter olarak nitelendirir. Ancak kanıt anlamında açıklamaları yoktur. Yani sezgilerinin kaynağını açıklayamazlar. Bayesyen yaklaşıma göre ise kaynak Bayes Teoreminden başka bir şey değildir.[11] Adım adım ilerleyerek bahsedilen kanıta ulaşılırsa: Parametre θ, örnek değerleri $X = X_1, X_2, ...X_n$ iken t de, $t = t(X)$, X'in fonksiyonu bir yeterli istatistiği gösteriyorken;

Yeterliliğin anlamını açıklayan matematiksel ilişkiler;

1-) $P(X \setminus t \,\&\, \theta) = P(X \setminus t)$ diğer bir ifadeyle,

$$\left(f(X_1, X_2, ..., X_n \setminus t) = \frac{f(X_1, X_2, ..., X_n, t)}{g(t)} = \frac{f(X_1, X_2, ..., X_n)}{g(t)} \right) \text{ ve}$$

2-) $P(\theta \setminus X) = P(\theta \setminus t)$'dir.

1-) $P(X \setminus t \,\&\, \theta) = P(X \setminus t)$; Benzerlik (likelihood) ilkesi açısından yazılan ifadeye göre, parametre(θ) ve yeterli istatistik(t) veri iken, X'leri gözlemenin olasılığı; sadece yeterli istatistik veri iken X'leri gözlemenin olasılığına eşittir. Dolayısıyla X'in koşullu olasılık dağılımı parametreden bağımsızdır. Parametre olmadan da "yeterli" istatistik aynı ilişki sağlar.

2-) $P(\theta \setminus X) = P(\theta \setminus t)$; Bu ifade ise başka bir açıdan (normal koşullu olasılık ile) bakarak aynı kavramı açıklar. Gözlemler (X) veri iken parametrenin

[10] Colin Howson ve Peter Urbach, a.g.e., s. 226.
[11] Colin Howson ve Peter Urbach, a.g.e., s. 227.

(θ) olasılığı; yeterli istatistik (t) veri iken elde edilen parametre olasılık değerine eşittir. Yani gözlemler yerine "yeterli" istatistik de parametrenin olasılığını açıklasa değer aynı olacaktır.

Yukarıdaki eşitliklerden hareketle, Bayes Teoremine göre yeterliliğin ispatı[12], θ, t ve X'in her değeri için,

$$P(X \setminus \theta \,\&\, t) = \frac{P(\theta \setminus X \,\&\, t).P(X \setminus t)}{P(\theta \setminus t)}$$

Burada $P(\theta \setminus X \,\&\, t)$ olasılığı, $P(\theta \setminus X)$'e eşittir. Çünkü t, X'den hesaplanmıştır. Teoremde yerine konursa,

$$P(X \setminus \theta \,\&\, t) = \frac{P(\theta \setminus X).P(X \setminus t)}{P(\theta \setminus t)}$$

olur. Bu aşamada birinci eşitlik kullanılırsa ikinci eşitlik; ikinci eşitlik kullanılırsa birinci eşitlik –sadeleştirmeyle- elde edilir. Böylelikle yeterliliğin ispatı yapılmış olur. Son olarak belirtmek gerekir ki yeterlilik, Bayesyen yaklaşım için oldukça önemli bir ölçüttür. İlerideki her iki bölümde belirtildiği gibi ön dağılımın elde edilmesinde de bu özellikten yararlanılır.

-Yansızlık : Tahmincinin beklenen değerinin, parametrenin gerçek değerine eşit olması demektir: θ parametre ve $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahmincisi iken, tahminci yansız ise $E(\hat{\theta}) = \theta$'dır.

Klasik yaklaşımda iyi bir tahminci yansızdır. Öte yandan Bayesyen tahminciye (son dağılımın ortalamasına) bakıldığında yansız olmadığı görülüyor. Bu ispat şöyle gösterilebilir;[13]

Y gözlemlerden elde edilen tahmin, $f(y \setminus \theta)$ bu gözlemlerin o.y.f.'si, θ ise parametredir. $E_\theta(Y) = \theta$ Klasik yaklaşımın yansızlık ifadesidir. Bayesyen nokta tahmini (son dağılımın ortalaması) aşağıdaki gibidir;

$$E(\theta \setminus y) = \int \theta \, P(\theta \setminus y) d\theta$$

O halde yukarıda belirtilen son dağılımın ortalamasının yansız olması için, şu eşitliği sağlaması gerekmektedir;

---

[12] Colin Howson ve Peter Urbach, a.g.e., s. 226-227.
[13] George Casella, Roger L. Berger, **Statistical Inference**, Belmont, California, Duxbury Press, 1990, s. 343-344.

$E_\theta[E(\theta \setminus Y)] = \int \left[\int \theta P(\theta \setminus y) d\theta\right] f(y \setminus \theta) dy = \theta$. (Burada tahminci olarak Y yerine, son dağılımın ortalaması koyulmuştur.)

Y tahmincisinin varyansının tanımından yola çıkılarak, Bayes tahmincinin beklenen değerinin parametre değerine eşit olup olmadığına bakılmaktadır.

Aşağıdaki ifade θ'ya göre koşullu hale getirilirse;

$$E\left[(Y-\theta)^2\right] = E\left[Y^2 - 2Y\theta + \theta^2\right]$$

$$= E\left[E\left(\left(Y^2 - 2Y\theta + \theta^2\right) \setminus \theta\right)\right] \quad \text{Beklenen değeri alınır.}$$

$$= E\left[E\left(Y^2 \setminus \theta\right) - 2\theta^2 + \theta^2\right] \quad \text{Burada } (E(Y \setminus \theta) = E_\theta Y = \theta) \text{ varsayılır.}$$

$$= E\left[E\left(Y^2 \setminus \theta\right) - \theta^2\right]$$

$$= E\left(Y^2\right) - E\left(\theta^2\right).$$

Benzer bir biçimde, Y'ye göre koşullu olursa;

$$E\left[(Y-\theta)^2\right] = E\left[E\left(\left(Y^2 - 2Y\theta + \theta^2\right) \setminus Y\right)\right]$$

$$= E\left(Y^2 - 2Y^2 + E\left(\theta^2 \setminus Y\right)\right) \quad \text{Burada } E(\theta \setminus Y) = Y \text{ varsayılır.}$$

$$= E\left(\theta^2\right) - E\left(Y^2\right).$$

Her iki hesaplamanın yansızlık değerlendirmesi yapılırsa;

Eğer $E\left(\theta^2\right) = E\left(Y^2\right)$ eşitliği sağlanıyorsa, başka bir deyişle $E\left[(Y-\theta)^2\right] = 0$ ise, tahminci Y, parametre θ'ya eşit demektir. Bunun gerçekleşme olasılığı -P(X=θ)=1- da "1" demek oluyor ki bu da imkansızdır. Dolayısıyla hem $E(Y \setminus \theta) \neq \theta$ ifadesi, hem de $E(\theta \setminus Y) \neq Y$ ifadesi kabul edilmelidir. Varılan sonuç gösterir ki son dağılımın ortalaması yanlıdır.

Bayesyen analizde bu sonucun değeri yoktur. Klasiğin iddia ettiği gibi yansızlığı gerekli görmemektedir. Çünkü en başta Bayesyen yaklaşım parametrenin tanımını farklı yapmaktadır. Tahmini Bayes yaklaşıma göre elde edip, Klasik yaklaşımın kriterlerine göre değerlendirmek pek doğru değildir.

Genellikle yanlı tahmincilerin yansız tahmincilere göre ortalama hata karesi daha küçüktür. Sözgelimi Ridge tahminci de yanlı bir tahmincidir ama yansız tahmincininkinden daha küçük bir ortalama hata karesi vardır. Şunu da söylemek gerekir ki tahminde karşılaşılan bazı sorunlar yanlı bir tahminci kullanıldığında giderilebilmektedir. Kısaca Bayesyen yaklaşım açısından bakıldığında hiç de önemli olmayan bir değerlendirme ölçütüdür.

-Tutarlılık : Tutarlılık kriteri tahmincinin limitteki özelliğidir. Örneklem büyüklüğü sonsuza gittikçe, tahmincinin değeri ile gerçek parametre değeri arasındaki farkın, epsilon gibi bir sayıdan küçük olma olasılığı 1'e yaklaşır: θ parametre, $\hat{\theta}$ bu parametrenin tahmincisi ve $\in$ başlangıçta belirlenen sıfırdan büyük herhangi bir sayı iken,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| \langle \in\right) = 1\text{'dir.}$$

Klasik yaklaşımda oldukça önemli bir özelliktir. Bayesyen yaklaşımda, tutarlılığın ilgilenilmesi gereken bir kriter olup olmadığı tartışılmaktadır. Bir görüşe göre tahmincinin tutarsızlığı göz ardı edilebilir. Zira Klasik yaklaşım bunun gerekliliğini yeterince açıklayamamaktadır.[14] Başka bir görüşe göre ise parametrik Bayesyen analizde daima tutarlı tahminci elde edilir ve bu önem verilmesi gereken bir konudur. Bunun da ötesinde parametrik olmayan Bayesyen analizde karşılaşılan, Diaconis ve D. Freedman'ın işaret ettiği[15] tutarsızlık sorunu önemle ele alınmalıdır. J. Berger bu değerlendirmeleriyle tutarlılığa vurgu yapmıştır.[16]

Bayesyen yaklaşımda, başka bir tanımla tutarlılığı ifade eden önemli diğer bir kavram da yine "tutarlılık" olarak çevrilebilecek "coherence"dir. Bu anlamda tutarlılık (coherence), ilgilenilen belirsiz önermelerin ortaya koyduğu olasılık sonuçlarının birbiriyle çelişkili olmaması fikrine dayanır.

-Etkinlik : Yine Klasik disiplin içinde anlamlı sayılabilecek değerlendirme ölçütlerinden biri olan etkinlik ile, tahmincinin mümkün olan en küçük varyansa sahip olması şartı aranmaktadır. Klasik yaklaşımda yansız tahmincilerden biri tercih edilecekse, varyansı küçük olan, başka bir ifadeyle olasılık dağılımı daha dar aralıkta yayılan, tahminci seçilir. Bilindiği gibi, ortalama hata karesi de etkinliği ölçmektedir.

---

[14] Colin Howson ve Peter Urbach, a.g.e., s. 232-233.

[15] Diaconis, P., Freedman, D., "On Inconsistent Bayes Estimates of Location," Annals of Statistics, Vol. 14, No. 1, March 1986, s. 68.

[16] James Berger, "Discussion: On the Consistency of Bayes Estimates," The Annals of Statistics, Vol. 14, No. 1, March 1986, 31-33.

Klasik yaklaşımın iddiasına göre, Bayes tahmincinin (son dağılımın ortalamasının) ortalama hata kareleri hesaplandığında, elde edilen sonuç söz konusu tahmincilerin etkin olmadığını göstermektedir. Klasik yaklaşım bunu şöyle açıklamaktadır; Bayesyen analizde, hemen hemen ön dağılımın yol açtığı etki ile kalın kuyruklu olan son dağılımdan yapılan tahmin büyük ölçüde yanlıdır. Ayrıca etkinliği de sağlayamamaktadır. Bazı durumlarda aynı ön dağılımla hesaplanan parametrenin son dağılımının ortalaması, ortalama hata karesi kriterine göre iyi bir tahminci değilken, modu, iyi bir tahminci olabilmektedir.[17] (Örneğin varyans parametresinin tahmini için bilgi vermeyen ön dağılım seçilmiş olsun. Zarar fonksiyonu kareli ise optimum sonuç son dağılımın ortalaması iken, zarar fonksiyonu mutlak değer ise son dağılımın modu optimum tahmindir. Ortalama hata karesi kriterine göre ortalama kötü, mod iyi bir tahmindir.) Fakat Klasik yaklaşım sadece ortalamayı göz önünde bulundurarak Bayes tahmincinin iyi bir tahminci olmadığını söylemektedir. Üstü kapalı olarak da ön dağılımın buna yol açtığı belirtilmektedir.

Bayesyen anlayışta ortalama hata karesi keyfi bir kriterdir. Son dağılımın ortalaması, son dağılımın sadece bir ölçüsüdür. Ortalama bazen bilgi veren bir toplanma ölçüsü olurken, bazen de göz ardı edilmesi gereken bir ölçüdür. Dolayısıyla, dağılımın tamamı göz önünde bulundurularak, parametreye ilişkin çıkarsama yapılmalıdır. Dağılımın bir ölçüsü keyfi bir kritere göre değerlendirilmemelidir.[18]

-Kesinlik : Kesinlik (precision) varyans ile ters orantılıdır. Bu kavramın somutlaştırılması ikinci bölümde yapılmıştır. Bir değerlendirme ölçütü olarak kesinlik, istatistikte tahmin kriterleri olarak kabul edilen diğer kavramlarla karşılaştırmalı daha iyi anlatılabilir. Şekilde de görüldüğü gibi kesinlik, hatanın olasılıklı kısmını içerir ve sistematik hatanın yapılmadığı varsayılırsa, gerçek değerden sapmayı ifade eder. Tümüyle Bayesyen çatıda yapılan bir analizde varyans yerine kesinlik alınarak, gerçek değerin olasılığı hesaplanır.

---

[17] Box, G.E.P, Tiao, G.C., **Bayesian Inference In Statistical Analysis**, Wiley Classics Library Edition, New York, John Wiley & Sons, 1992, s. 310-312.
[18] Box, G.E.P, Tiao, G.C., a.g.e., s. 312.

		Gözlenen Değer		
Toplam	Stokastik hata		kesinlik	
Hata		Beklenen Değer		Doğruluk
	Sistematik hata		yanlılık	
		Gerçek Değer		

Güven Aralığı : İstatistiğin tahmin sorunsalında temel konulardan biri de aralık tahminidir. Güven aralıklarına ilişkin bilgi, başka bir deyişle parametrenin belirli değerler arasında yer aldığı (veya Bayesyen yaklaşıma göre yer alma olasılığının) bilgisi anakütleyi tanımada, tanımlamada yardımcıdır.

Bu noktada belirtmek gerekir ki Bayesyen yaklaşım, Klasik yaklaşımın "güven aralığı" (*confidence interval*) tanımlaması yerine, "güvenilir aralık" (*credible interval*), "Bayesyen aralık" (*Bayesian interval*) veya "En Yüksek Son Yoğunluk Bölgesi veya Aralığı" (*Highest Posterior Density Region or Interval*) tanımlamalarını kullanmaktadır.

Aslında tanımlamada farklı olduğu gibi yorumlamada da farklıdır; Bayesyen yaklaşımda, son dağılımın ortalaması için, örneğin 0,95 güven düzeyinde bir güven aralığından söz ediyorsak, bu aralığın son dağılımın ortalamasını içermesi olasılığı -son dağılımın ortalamasını içereceğine olan inanç derecesi- %95'tir.

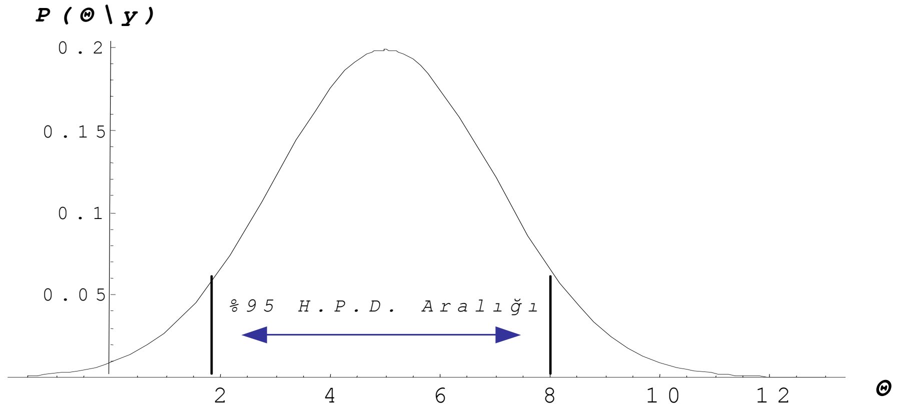
Bayes'de hesaplanan son dağılım $p(\theta \setminus y)$'a göre, y veri iken parametre θ'nın, parametre uzayının belirli bir $\overline{R}$ altbölgesinde bulunması olasılığı;

$P\{\theta \in \overline{R} \setminus y\} = \int_{\overline{R}} P(\theta \setminus y)\, d\theta$ dır.

Yukarıdaki ifadede, kapsanacak olasılık miktarı 0,95 olarak belirlenirse;

$$P\{\theta \in \overline{R} \setminus y\} = \int_{\overline{R}} P(\theta \setminus y)\, d\theta = \left(1-\alpha\right) = 0{,}95\,,$$

aranılan bölgenin sınırlarına ya da aralığın değerlerine ulaşılabilir. Bu bölge/aralık "En Yüksek Son Yoğunluk" bölgesi/aralığı (*Highest Posterior Density Region/Interval*) olarak adlandırılır. Çünkü bölge/aralığın içindeki her bir noktanın olasılık yoğunluğu, dışındaki noktaların her birinden daha büyüktür. Ayrıca içereceği olasılık miktarı veri iken, bölge parametre uzayında mümkün olan en küçük hacme sahip bölgedir; aralık da mümkün olan en dar aralıktır.[19] 0,95 için H.P.D. aralığı;



Şekil 1. 2 θ' nın son dağılımı ve H.P.D. aralığı

Klasik yaklaşım içinde iki farklı yorum mevcuttur. Birisi sübjektif olan "0,95 güvenle konuşulabilir ki parametre bu aralıktadır." (subjective-confidence interpretation) yorumu. Bir diğeri de Neyman'ın kabul ettirdiği şu an tek hakim yorum olan, "Tekrarlanan denemeler sonucu, farklı veri setine dayalı aralıkların %95'i parametrenin gerçek değerini içerir." (categorical-assertion interpretation) yorumudur. Bu bağlamda Klasik yaklaşımın güven aralıklarını da sıklık yorumuyla değerlendirdiği söylenebilir. Bu yorumda, diyelim ki %95 güven düzeyi için, uzun dönemde hesaplanan aralıkların 100 tanesinden 95'inin gerçek ortalamayı içerdiği ifade edilir. θ parametre iken, sözgelimi 0,90 güven düzeyinde yapılan hesaplama sonucu elde edilen aralık $\theta_1 \langle \theta \langle \theta_2$ olsun. Bu aralık $[\theta_1, \theta_2]$, olabilecek aralıklardan sadece biridir. Bunun devamında farklı rastlantısal örnekten elde edilebilecek aralıkların gerçek ortalamayı içerme oranının %90 olduğu kabul edilir. Parametre değeri, bilindiği gibi Klasik yaklaşımda sabit bir değerdir ve olasılık dağılımı yoktur. Bu bilinmeyen değeri aralık ya kapsar ya da kapsamaz. Dolayısıyla dikkat edilmelidir ki, rastlantısal olan aralıktır, parametre değil.

[19] Box, G.E.P, Tiao, G.C., a.g.e., s. 122-123.

Hipotez Testi : İstatistikte anakütleyi anlamaya ve çözmeye çalışırken parametrelere ilişkin iddiaların yer aldığı bazı önermelerden yararlanılır. Hipotez olarak adlandırdığımız bu önermelerde ortaya atılanlar araştırmacının karar vermesini sağlayan bir test sürecinden geçer; hipotez testi sürecinde parametrenin iddia edilen değere eşit olup olmadığı veya sözü edilen aralıkta bulunup bulunmadığı test edilir ve böylelikle anakütle ile ilgili belirsizlik bir parça aydınlatılmış olur.

Bayes, hipotezlere olasılık tayin eder. Bu Bayesyen yaklaşımın olasılık teorisine daha geniş bir mantıksal açıdan bakması nedeniyledir. Klasik Aristo mantığına göre bu değerin 0 veya 1 olması değil, 0-1 aralığında değerler alması söz konusudur.[20] Yani bir hipotez kabul ya da reddedilmez, onun sahip olduğuna inanılan olasılığı belirlenir. Ancak bu noktada belirtmek gerekir ki, Bayes yaklaşım, çift taraflı hipotez testi söz konusu ise zayıftır. Çünkü sürekli bir dağılımda parametrenin "0"a eşit olma olasılığı "0"dır. Buna önerilen çözüm, örneğin regresyon katsayısı için "0"a yakın bir değer almaktır.

Bayesyen yaklaşımda bilinen süreç burada da geçerlidir. Hipotezlerin ön olasılıkları belirlenir ve ardından son olasılıklarına ulaşılır. Burada karar verilirken son olasılığı en fazla olan hipotez, en iyi seçim olacaktır. Bayesyen yaklaşımda hipotezlerin olasılıkları karşılaştırılarak karar verildiği için genellikle "hipotez testi" yerine "hipotezlerin karşılaştırılması" ifadesi benimsenmektedir.[21] h_0 ve h_1 hipotezleri, y gözlemleri, θ ve ϕ parametreleri, θ_0 ve ϕ_0 bu parametrelerin belirli değerlerini gösterirken;

$$\frac{P(h_0 \setminus \mathrm{y})}{P(h_1 \setminus \mathrm{y})} = \frac{P(h_0)}{P(h_1)} \times \frac{P(y \setminus \theta = \theta_0)}{P(y \setminus \phi = \phi_0)} \qquad \textbf{(1. 1)}$$

sonucuna göre değerlendirme yapılır. Bu ifade (1.1) şöyle açıklanabilir;

son bahis oranı = ön bahis oranı x *bayes faktör*

(posterior odds = prior odds x *bayes factor)*

[20] Michael D. Alder, Workshop on Intelligent System, December 2003, http://www.maths.uwa.edu.au/~mike/mumford/workshop_session1.pdf
[21] Arnold Zellner, **An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**, New York, John Wiley & Sons, 1971, s. 292.

(1.1) eşitliğinde $P(h_0) = P(h_1)$ ise veya bilgi vermeyen ön dağılım için $P(h_0) = P(h_1) = \frac{1}{2}$ ise son bahis oranı **Bayes Faktör**e eşit çıkar. Bu durumda da bayes faktör **Benzerlik Oranı** (Likelihood Ratio, LR) ile aynı olur.

Klasik yaklaşımda hipotez testi süreci Fisher'in çalışmalarıyla başlamış ve gelişmiştir. Ona göre araştırmacı reddetmesi gereken hipotezi h_0 olarak belirler. Bu yaklaşımıyla Fisher'in Popper'in yanlışlaması ile paralellik taşıdığı söylenebilir. Gerekliyse başlangıç varsayımı (örneğin atılan paranın hilesiz bir para olması) yapılır ve hipotez belirlenir. Kullanılacak test istatistiği örnekten elde edilen bilgiyle hesaplanır. Benimsenen testin önem düzeyine (significance level) dayanarak, kurulan h_0 hipotezi kabul veya reddedilir. Ancak daha sonra Neyman ve Pearson çalışmalarıyla bu konunun geliştirilmesine önemli katkı sağlamışlardır. Neyman ve Pearson, h sıfır (h_0) hipotezinin, alternatif bir hipotez (h_a) ile karşılaştırılması gerektiğini düşünmüşlerdir. Yine hipotezler ya kabul ya da reddedilecektir. Test süreci de aynıdır. Ancak burada çıkarım yapılırken iki tip hata ortaya çıkmaktadır: Birinci tip hata (h_0 doğru iken hipotezi reddetme) ve ikinci tip hata (h_0 yanlışken hipotezi kabul etme). Karar verirken, testin gücünü (yanlış olan h_0'ı reddetme olasılığını) maksimum yapmak gerekmektedir. Ancak aynı zamanda h_0'ı reddederken, h_0'ın doğru olma olasılığının da minimum olması gerekmektedir. Daha önce de değinildiği gibi Benzerlik Oranı istatistiği de hipotezlerin karşılaştırmasına olanak verir; h_0 altında, parametrenin verilen bir değere eşit olma olasılığının en yüksek olduğu benzerlik tahmininin, parametrenin tüm mümkün değerleri için en yüksek benzerlik tahmini değerine oranlanması ile bulunur.

Hipotezlerle ilgili karar vermede görüldüğü üzere, Bayesyen ve Klasik yaklaşım tamamen birbirinden farklıdır. Daha önce de değinildiği gibi, hipotezlere olasılık tayin ederek, tekrarlanan denemelerin sonuçları ışığında en yüksek olasılık değeri olanı seçmek (Bayes'in kesinliğe ulaşma hedefi doğrultusunda) yöntem olarak tümevarım ile paralellik gösterirken; yanlışlanması istenen hipotezi belirleyerek, tekrarlanan denemelerle bunun reddedilmesi yoluna gidilmesi tümdengelimci yöntem ile paralellik göstermektedir. Bu paralellik etkileşimin değil, benzerliğin ifadesidir.

BÖLÜM -2- BAYESYEN ANALİZİN İLKELERİ

Bu bölümde Bayesyen yaklaşımın özünü teşkil eden, Bayes Teoremi açıklanmıştır. Bunu takiben Bayesyen analizi gerçekleştirmede temel yapıların neler olduğuna, nasıl elde edildiğine yer verilmiştir. Daha sonra Bayesyen yaklaşım için oldukça önemli olan ön dağılımın belirlenmesine ilişkin tekniklere değinilmiştir.

2.1. Bayes Teoremi

Bayes Teoremi koşullu olasılık tanımından yola çıkarak açıklanır. Bir örneklem uzayında A ve B gibi iki olay için, B veri iken A'nın gerçekleşmesi olasılığı, yani koşullu olasılığı;

$$P(A \setminus \mathrm{B}) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad \text{burada } P(B) > 0\text{'dır.} \tag{2. 1}$$

Aynı eşitlik, A veri iken B'nin gerçekleşmesi durumunda da sağlanacaktır;

$$P(A \setminus B).P(B) = P(A \cap B) = P(B \setminus A).P(A) \tag{2. 2}$$

Burada (2.2)'de sağlanan sonucu genelleştirerek ifade edersek, aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan -ayrık- olaylardan (A_1, A_2, ..., A_k) oluşan bir örneklem uzayı olsun. Bu örneklem uzayında, bir de *B* olayı olsun. Buna göre *B* veri iken, herhangi bir A_i olayının gerçekleşmesi olasılığı;

$$P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i).P(B \setminus A_i)}{P(B)} \tag{2. 3}$$

(2.3)'de paydadaki marjinal dağılım *P(B)* aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$P(B) = P(A_1).P(B \setminus A_1) + ... + P(A_k).P(B \setminus A_k) = \sum_{j=1}^{k} P(A_j).P(B \setminus A_j).$$

Eşitliklerin düzenlenmesiyle;

$$P(A_i \setminus B) = \frac{P(A_i).P(B \setminus A_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A_j).P(B \setminus A_j)}, \quad (\, i = 1, 2, ..., k\,) \tag{2. 4}$$

elde edilir. Böylelikle (2.4) ifadesi, Bayes Teoremini[22] gösterir.

Teorem, ön olasılıkların veriden elde edilen bilgilerle güncellendiğini ifade eder. Bu teoremi uygulayabilmek için ön olasılık değerleri olan $P(A_i)$ değerlerini bilmek gereklidir. Değişik bir bakış açısıyla yaklaşılırsa teoremin, ilgilenilen olaya göre, olasılıkların hesabında tersine bir gidişe izin verdiği de söylenebilir.

2.2. Bayesyen İstatistikte Tahmin

Parametrenin, olasılık dağılımı olan bir rastlantı değişkeni gibi düşünüldüğü Bayesyen yaklaşımda, çıkarsama için, bir önceki bölümde değinilen Bayes teoremine göre;

p bir olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f.) olduğunu gösterirken θ parametre vektörü ve *y* gözlemler vektörü, $p(y,\theta)$ birleşik o.y.f. (joint p.d.f.) ise,

$$p(y \backslash \theta).p(\theta) = p(y,\theta) = p(\theta \backslash y).p(y) \qquad \textbf{(2. 5)}$$

(2.5) eşitliklerinden,

$$p(\theta \backslash y) = \frac{p(\theta).p(y \backslash \theta)}{p(y)}$$

elde edilir. Bilindiği gibi *y* değerleri, gözlenen veridir. Bundan ötürü paydadaki $p(y)$, c^{-1} gibi belirli bir sabittir. $p(y)$'nin açılımı,

$p(y) = \int p(y \backslash \theta).p(\theta)d\theta$ parametrenin dağılımı sürekli ise ,

$p(y) = \sum p(y \backslash \theta).p(\theta)$ parametrenin dağılımı kesikli ise.

Sözü edilen sabit c, son dağılımın integralini veya toplamını 1'e eşitleyen bir normalleştirme sabitidir. Sabiti ortadan kaldırarak daha az karmaşık ifadeyle son o.y.f. yazılırsa;

$$p(\theta \backslash y) \propto p(\theta).p(y \backslash \theta) \qquad \textbf{(2. 6)}$$

$$son\ oyf \propto \ddot{o}n\ oyf \times benzerlik\ \ fonksiyonu$$

Yukarıda (2.6)'da yer alan ve çalışma boyunca da kullanılacak "$\propto$" işareti, **oransallığı** gösterir.

[22] Teoremin dayandığı orjinal mektup (/makale); Thomas Bayes, "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances," Biometrica, Vol. 45, 1958, s. 293-315. (Reproduction of 1763 paper)

Bayesyen yaklaşımda parametre ile ilgili her türlü çıkarsama için, önce son dağılım hesaplanmalıdır. Bayesyen sürecin işlemesine ilişkin temel fikir sağlaması hedeflendiğinden ön dağılımın oluşturulması ile ilgili hesaplamalara bu bölümde yer verilmemiştir. Parametreye ilişkin sözü edilen çıkarsama süreci yaygın olarak kullanılan normal dağılım varsayımı altında şöyle gerçekleşmektedir.

y normal bir anakütleden çekilen n adet bağımsız gözlemi temsil etsin. μ parametresi anakütle ortalaması, σ^2 ise anakütle varyansı olsun. Burada varyansın bilindiği varsayılsın. Ön dağılımın da normal dağılım olduğu varsayılsın; $\overline{\mu}$ ön dağılımın ortalamasını ve $\overline{\sigma}^2$ ön dağılımın varyansını göstersin.

Amaç μ'nün son dağılımına ulaşmak ise;

$p\left(\mu \setminus y,\sigma^2\right) \propto p(\mu).p\left(y \setminus \mu,\sigma^2\right)$ sağlamak üzere, Ön dağılım;

$$p(\mu) \sim N\left(\overline{\mu},\overline{\sigma}^2\right) \quad \text{ve} \quad p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi.\overline{\sigma}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{\sigma}^2}(\mu-\overline{\mu})^2\right] \quad \textbf{(2. 7)}$$

olur. Görüldüğü gibi (2.7)'de parametreye ilişkin başlangıç tahminleri, $\overline{\mu}$ ve $\overline{\sigma}^2$ aracılığıyla analize yansıtılır.

Benzerlik fonksiyonu $\prod_{i=1}^{n} p\left(y_i \setminus \mu,\sigma^2\right)$ ile elde edilir. Buna göre sonuç,

$$p\left(y \setminus \mu,\sigma^2\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\mu)^2\right] \text{'dir.}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left((y_i-\hat{\mu})-(\mu-\hat{\mu})\right)^2\right]$$

Burada $\hat{\mu}$ (örneklemin ortalaması) eklenip çıkarılarak, eşitliğe dahil edilir.

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu})^2 - 2(y_i-\hat{\mu})(\mu-\hat{\mu}) + (\mu-\hat{\mu})^2\right] \quad \textbf{(2. 8)}$$

(2.8)'de ortadaki ifade, gözlemlerin örneklem ortalamasından farklarının toplamının sıfır olması sebebiyle (yani $\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu})(\mu-\hat{\mu}) = 0$) ortadan kalkar;

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\mu})^2 - n(\mu-\hat{\mu})^2\right)\right] \quad \textbf{(2. 9)}$$

(2.9)'da İlk ifade örneklem varyansının serbestlik derecesiyle sadeleşmiş halidir: Serbestlik derecesi $v = n - 1$ iken, $s^2 = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu})^2$ 'dir. Bu eşitliklere göre (2.9)'daki ifadede gerekli düzenlemeler yapılırsa, benzerlik fonksiyonunun son hali,

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(vs^2 - n(\mu - \hat{\mu})^2\right)\right] \tag{2. 10}$$

olur.

Son dağılımı elde etmek üzere, ön bilgiyi yansıtan ön dağılım (2.7) ve örneklemden edinilen bilgiyi yansıtan benzerlik (2.10) çarpılırsa;

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi.\overline{\sigma}^2}} \exp\left[-\frac{1}{2\overline{\sigma}^2}(\mu - \overline{\mu})^2\right] . \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^n \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(vs^2 - n(\mu - \hat{\mu})^2\right)\right],$$

sabit değerler $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi.\sigma^2}}\right)^{n+1}$ ve $\exp[vs^2]$, oransal ifade biçiminden dolayı kaybolur ve

$$\propto \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu - \overline{\mu})^2}{\overline{\sigma}^2} + \frac{n}{\sigma^2}(\mu - \hat{\mu})^2\right]\right\} \tag{2. 11}$$

ulaşılır. (2.11)'de Dağılımın çekirdeğinde ("kernel"inde) varyans terimleri bir tarafta, ortalama terimleri diğer tarafta olacak şekilde düzenleme yapılırsa,

$$\propto \exp\left[-\left(\frac{\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n}{2\overline{\sigma}^2\sigma^2/n}\right)\left(\mu - \frac{\hat{\mu}\overline{\sigma}^2 + \overline{\mu}\sigma^2/n}{\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n}\right)^2\right] \tag{2. 12}$$

elde edilir. Görüldüğü gibi (2.12)'de son dağılım da normal dağılımdır. Son dağılımın çekirdeğinde açıktır ki son dağılımın ortalaması $\overline{\overline{\mu}}$, $E\mu = \frac{\hat{\mu}\overline{\sigma}^2 + \overline{\mu}\sigma^2/n}{\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n}$'ye eşittir.[23] Son dağılımın ortalaması bazı değişiklikler neticesinde aşağıdaki gibi de ifade edilebilir;

$$\overline{\overline{\mu}} = \frac{\hat{\mu}\overline{\sigma}^2 + \overline{\mu}\sigma^2/n}{\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n} = \frac{(\hat{\mu}\overline{\sigma}^2)/\overline{\sigma}^2}{(\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n)/\overline{\sigma}^2} + \frac{(\overline{\mu}\sigma^2/n)/(\sigma^2/n)}{(\overline{\sigma}^2 + \sigma^2/n)/(\sigma^2/n)}$$

[23] Arnold Zellner, a.g.e., s. 15.

$$\bar{\bar{\mu}} = \frac{\hat{\mu}}{1+\dfrac{\sigma^2/n}{\bar{\sigma}^2}} + \frac{\bar{\mu}}{1+\dfrac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2/n}} \qquad \textbf{(2. 13)}$$

Bu sonuca göre, son dağılımın ortalaması ($\bar{\bar{\mu}}$), aslında ön dağılımın ortalaması ($\bar{\mu}$) ile örneklemin ortalamasının ($\hat{\mu}$) ağırlıklı ortalamasıdır. Başka bir ifadeyle ön dağılımın ortalaması ile örneklem ortalamasının bir doğrusal kombinasyonudur denilebilir.

Parametreyi tanımlamaya yardımcı ortalama ve varyans ölçüleri, kesinlikler (precision) anlamında da ifade edilebilir. **Kesinlik**, Bayesyen yaklaşım için önemli bir ölçüdür. Parametrenin tahmininin kesinliğini ifade eder. Birinci bölümde değinildiği gibi, varyans ile ters orantılıdır. Kesinlik =1/ Varyans. Buna göre varyans azaldıkça kesinlik “1”e yaklaşacaktır. Varyans parametresine kesinlikler anlamında bakılırsa, $\bar{h} = \dfrac{1}{\bar{\sigma}^2}$ ön dağılımın kesinliğini, $h = \dfrac{1}{\sigma^2/n}$ ise örneklemin kesinliğini gösterir. Son dağılımın ortalaması (2.13) bu kesinliklere göre yazılırsa;

$$\bar{\bar{\mu}} = \hat{\mu}\cdot\frac{h}{\bar{h}+h} + \bar{\mu}\cdot\frac{\bar{h}}{\bar{h}+h}$$

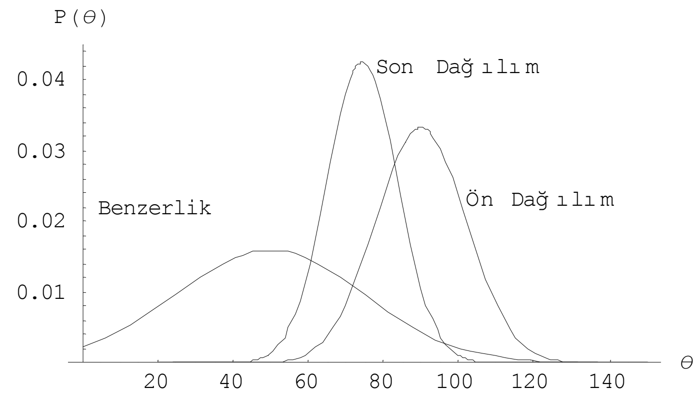
elde edilir. Kesinliklere bağlı yorumuna gelince, ön bilginin kesinliği arttıkça ön dağılımın ortalaması baskın olurken, örneklemin kesinliği arttıkça örneklemden elde edilen ortalama değeri son dağılımın ortalamasında daha baskın olur.

Son dağılımın varyansı $\bar{\bar{\sigma}}^2$,

$$Var(\mu) = \left(\frac{\bar{\sigma}^2\sigma^2/n}{\bar{\sigma}^2+\sigma^2/n}\right)\text{'dir.}$$

Kesinlikler ile ifade edilirse, $Var(\mu) = \dfrac{1}{\bar{h}+h}$ şeklindedir. Buna göre son dağılımın kesinliği $\bar{\bar{h}}$, örneklemin kesinliği ile ön dağılımın kesinliğinin toplamıdır. $\left(\bar{\bar{h}} = h+\bar{h}\right)$

Özetle son dağılımın ortalamasının elde edilişinde ön dağılım ile örneklem bilgisi, kesinlikleri ölçüsünde uzlaşır. Şekil 2.1’de dağılımlar çizimle örneklenmiştir;



Şekil 2. 6 Ön Dağılım, Benzerlik Fonksiyonu ve Son Dağılımın Temsili

Öte yandan teknik olarak bahsetmek gerekirse çıkarsama süreci şöyle işlemektedir; son dağılımın ortalaması hesaplanmak isteniyorsa, varyansın bilinmediği durum için marjinal son dağılım hesaplanır. Marjinal son dağılımı hesaplamak için, birleşik son dağılım elde edildikten sonra σ 'ya göre integrali alınır; (bilgi vermeyen ön dağılımın olduğu varsayılmıştır.)

$$p(\mu \setminus y) = \int_0^\infty p(\mu, \sigma \setminus y) d\sigma \;\propto\; \int_0^\infty \sigma^{-(n+1)} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \left[vs^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 \right] \right\} d\sigma ,$$

$$\propto \left(vs^2 + n(\mu - \hat{\mu})^2 \right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad \textbf{(2. 14)}$$

Bilinmeyen olarak sadece ortalamanın kaldığı (2.14)'teki ifadenin tek değişkenli Student t o.y.f. ile aynı yapıda olduğu açıktır.

Benzer bir biçimde son dağılımın varyansı hesaplanmak isteniyorsa birleşik son dağılım elde edildikten sonra μ 'ye göre integrali alınır;

$$p(\sigma \setminus y) = \int_{-\infty}^\infty p(\mu, \sigma \setminus y) d\mu \;\propto\; \sigma^{-(v+1)} \exp\left(\frac{-vs^2}{2\sigma^2} \right) \qquad \textbf{(2. 15)}$$

(2.15)'teki ifadeye bakıldığında σ 'nın marjinal son o.y.f.'sinin Ters-Gama o.y.f. ile aynı yapıda olduğu görülmektedir.

Bu şekilde bilgi vermeyen ön dağılımla hesaplama yapıldığında çıkarsama sonuçları Klasik yaklaşımın örnekleme sürecinde ulaşılan sonuçlar ile aynı olur.

2.3. Ön Dağılımın Belirlenmesi Sorunu

Ön dağılım, araştırmacının elindeki bilgileri analize yansıtma aracıdır. Bu aracı belirlemede yani ön dağılımın seçiminde veya oluşturulmasında çok çeşitli sınıflandırmalar yapılabilir. Bayesyen yaklaşım içinde ön dağılım seçiminden kaynaklanan fikir ayrılıkları vardır. Bu bağlamda öncelikle ön dağılım tercihine göre Bayesciler gruplandırılabilir. Daha sonra bu genel çerçeve altında ön dağılım türlerine göre bir ayırıma gidilebilir[24];

Klasik Bayesciler, dikdörtgen ön dağılım gibi bilgi vermeyen ön dağılım (non-informative prior) belirlemeyi uygun görürler.

Modern Parametrik Bayesciler, tasarlanmış özelliklere sahip eşlenik ön dağılım (conjugate prior) seçerler.

Sübjektif Bayesciler, benzer bir alanda daha önce elde edilen izlenimler doğrultusunda, çoğunlukla uzman görüşünden elde edilen bilgiye göre ortaya çıkarılan ön dağılım (elicited prior) seçerler.

Diaconis ve Ylvisaker tarafından yapılan bu tasnif, hem ön dağılımlar hem de yaklaşımlar açısından, pratikte bu kadar net değildir. Takip eden alt bölümde yukarıda adı geçen ön dağılımların teknik detayına yer verilmiştir.

2.3.1. Bilgi Vermeyen Ön Dağılımlar

Parametreyi açıklama gücü çok azdır. Ayrıca bu tür dağılımlar, Bayesyen yaklaşıma yöneltilen sübjektiflik eleştirilerini bertaraf eder. Genel kapsamda belirtilmelidir ki bilgi vermeyen ön dağılımlardan hiçbiri, tam bilgisizlik (ignorance) durumunu yansıtmaz. Bunun nedenlerine bu alt bölümde yeri geldikçe değinilmiştir.

Bu grupta sayılabilecek ön dağılımlar şunlardır;

Dikdörtgen Ön Dağılım (Flat, Uniform Prior)

Jeffreys'in Ön Dağılımı (Jeffreys's Prior)

Referans Ön Dağılım (Reference Prior)

Belirsiz Ön Dağılım (Diffuse, Vague, Weak, Locally Uniform Prior)

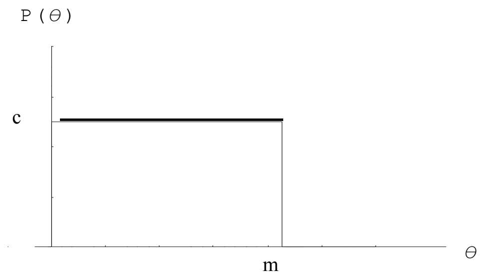
[24] Jeff Gill, a.g.e., s. 114.

Dikdörtgen Ön Dağılım

Dikdörtgen ön dağılımda, belirlenen aralıkta parametreye aynı olasılık değerleri atanır;

$$p(\theta) = c = \frac{1}{m} \quad \text{ve} \quad 0 \leq \theta \leq m \quad \text{iken,}$$

belirtilen aralıktaki her noktada, parametrenin olasılığı c'ye eşittir.



Şekil 2. 7 Dikdörtgen Ön Dağılım

Bu, "yetersiz neden ilkesi"ne ("principle of insufficient reason") dayanır[25]. Belirli bir neden olmadıkça, bir olayın gerçekleşme olasılığı başka bir olaya göre daha muhtemel değildir. Eşit olasılıklar tayin edilir.

Genel olarak parametrenin belirli bir aralıkta yer aldığı, sınırlandırılabildiği, doğası gereği oran olduğu durumlarda kullanılabilir. Tam bilgisizlik durumunu sağladığı söylenemez. Örneğin parametreye [*0 – m*] aralığında diyorsak, *m* sonsuza giderken ön dağılım daha az bilgi verir hale gelir. Ancak bu durumda parametrenin olasılığı $p(\theta)$, sıfıra yaklaşır. Giderek θ'nın hiçbir değeri muhtemel olmaz.

Reel eksende $[-\infty, \infty]$ aralığında, θ'nın tüm değerleri için $p(\theta) = c$ iken, dikdörtgen ön dağılım "uygunsuz"dur (improper). Yani olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali (veya toplamı) alındığında, sonsuz çıkar ve olasılıklar toplamının 1'e eşit olma aksiyomunu bozar. "Uygun" (proper) dağılımlarda 1'e eşittir. Uygunsuz ön dağlımlar hesaplamada güçlük çıkarır. Şunu da belirtmelidir ki böyle bir ön dağılımdan elde edilen son dağılım, uygunsuz olmak zorunda değildir.

Dikdörtgen ön dağılımın bir diğer zayıf yanı "değişmezlik" (invariant) özelliğini taşımamasıdır. Parametre dönüşüme uğradığında elde edilen yeni ön dağılım, dikdörtgen dağılım olmayabilir. Bilgi vermeme özelliğini yitirebilir ve dolayısıyla eşit olasılıklar özelliğini bozabilir. Dikdörtgen ön dağılımı güçlü kılan yanları da vardır. Örneklem büyüklüğü arttıkça dikdörtgen dağılım olmasının etkileri azalır.

---

[25] D. S. Sivia, **Data Analysis, A Bayesian Tutorial**, New York, Oxford Un. Press, 1996, s. 106-7, 120.

Sorunlu (nuisance) parametrelerin son dağılımdan integral ile çıkarılması kolay olur. Ayrıca bazı eşlenik ön dağılımlar limitte dikdörtgen ön dağılım ile aynı olur[26].

[26] Jeff Gill, a.g.e., s. 121, 123.

Jeffreys'in Ön Dağılımı

Jeffreys'in felsefi görüşü objektif veya gerekirci ("necessarist") diye nitelenebilir. Objektif olması nedeniyle tam bilgisizlik durumuna inanır. Görüşünü "yetersiz neden ilkesi"ne dayandırır. Olasılıklar eşit alınmıyorsa, bir olayın diğerine göre daha çok veya daha az muhtemel olmasının bir açıklaması olmalı diye düşünür. Belirli bir nedene (definite reason) dayandırmak düşüncesi de gerekirci yaklaşımının uzantısıdır denilebilir. Ayrıca Jeffreys'e göre belirsizliği temsil edecek tek bir ön dağılım olması gerekmez.[27]

Jeffreys sözü edilen temel motivasyondan hareketle, parametre belirli bir aralıkla sınırlı olsun ya da olmasın ($[-\infty,\infty]$ veya $[0,\infty]$), ön dağılımı bir sabite eşitler. Bu durumda da belirlenen dikdörtgen ön dağılım, uygunsuz olur. Çalışmasının ilerleyen aşamasında Fisher'in bilgi matrisini kullanır;

$$I(\theta) = -E_\theta\left[\frac{\partial^2 \log f(y \setminus \theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

$$f(y \setminus \theta) = \sigma^{-1} f\left(\frac{(y-\theta)}{\sigma}\right), \quad (\theta \in R \qquad ve \qquad \sigma \rangle\ 0 \text{ olmak üzere}) \tag{2. 16}$$

Burada ((2.16)'da) tüm durumları içeren bir sonuç elde etmek için, benzerlik fonksiyonu olarak, konum ve şekil parametrelerini içeren, en genel formu ile bir konum-şekil yoğunluk fonksiyonu alınmıştır. Bu benzerlik fonksiyonu ile bilgi matrisi şöyle elde edilir[28];

$$I(\theta) = -E_\theta\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(-\log\sigma - \frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) & \frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\sigma}\left(-\log\sigma - \frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial\theta\,\partial\sigma}\left(-\log\sigma - \frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) & \frac{\partial^2}{\partial\sigma^2}\left(-\log\sigma - \frac{(y-\theta)^2}{2\sigma^2}\right) \end{bmatrix}$$

$$= -E_\theta\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sigma^2} & \frac{2(\theta-y)}{\sigma^3} \\ \frac{2(\theta-y)}{\sigma^3} & \frac{1}{\sigma^2} - \frac{3(y-\theta)^2}{\sigma^4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma^2} \end{bmatrix} \tag{2. 17}$$

---

[27] Robert E. Kass, Larry Wasserman, "The Selection of Prior Distributions by Formal Rules," Journal of the American Statistical Association, Vol. 91, No.435, September 1996, s. 1343-1344.
[28] James O. Berger, **Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis**, 2. b., New York, Springer-Verlag Inc., 1985, s. 88.

Ön dağılım, elde edilen bilgi matrisinin determinantının kareköküdür: $\pi(\theta) = \det(I(\theta))^{1/2}$. (2.17)'de ulaşılan sonuç, birkaç işlemle ilerletilirse;

$$\pi(\theta) = \left(\frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{2}{\sigma^2} \right)^{1/2} \quad \text{ve} \quad \pi(\theta) \propto \frac{1}{\sigma^2} \qquad \textbf{(2. 18)}$$

ön dağılım nihai olarak (2.18)'deki gibi olur. Benzerlik fonksiyonu, sadece (θ) gibi konum parametresi olan bir o.y.f. ise hesaplanan bilgi matrisi bir sabite eşit çıkar. Dolayısıyla ön dağılım da bir sabite eşit olur.

Böyle ((2.18)'deki gibi) bir ön dağılım seçmesinde Jeffreys'in en temel argümanı parametrenin kuvvet dönüşümüne karşı değişmezlik özelliğine sahip olmasıdır;

$$\pi_\gamma(\gamma) \cdot \left(\frac{d\gamma}{d\theta} \right) = \pi_\theta(\theta), \qquad \gamma = h(\theta) \text{ olmak üzere } [29] \qquad \textbf{(2. 19)}$$

$\gamma = \sigma^n$ ise, $d\gamma = n.\sigma^{n-1} d\sigma$, $\dfrac{d\gamma}{\gamma} = \dfrac{n.\sigma^{n-1} d\sigma}{\sigma^n}$, $\dfrac{d\gamma}{\gamma} \propto \dfrac{d\sigma}{\sigma}$ elde edilir. Böylelikle değişken dönüşümü formülüne göre ön dağılımın değişmezlik özelliği ispatlanmış olunur. Bu sayede bir model, standart sapma, varyans veya kesinlik parametreleri anlamında parametreleştirilebilir.

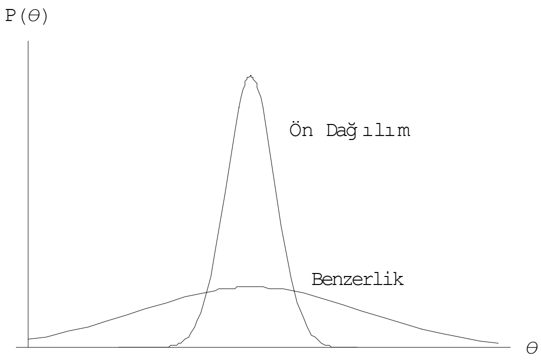
Özetle Jeffreys'in ön dağılımı belirlemesinde izlediği yol şöyle açıklanabilir; öncelikle Fisher'in bilgi matrisini kullanmıştır; Son dağılımın logaritmasını almakla dağılımın -parametreleri içeren- üslü ifadesini elde eder ve katlı diferansiyelini almakla parametrelerin marjinallerine ulaşır (parametreyi yalnız bırakır). Daha sonra bu hesaplanan parametre fonksiyon veya değerlerinin beklenen değerini alır. Parametre bilgisini içeren bu Fisher'in bilgi matrisinin determinantını almakla da geometrik olarak düşünülürse, parametre uzayında, parametre vektörlerinin gerdiği alana (hacim veya hiperhacme) ulaşılmış olur. Nihai olarak mevcut parametre bilgisi doğrultusunda, parametre uzayında, parametre olasılık bölgesi belirlenmiş olur.

---

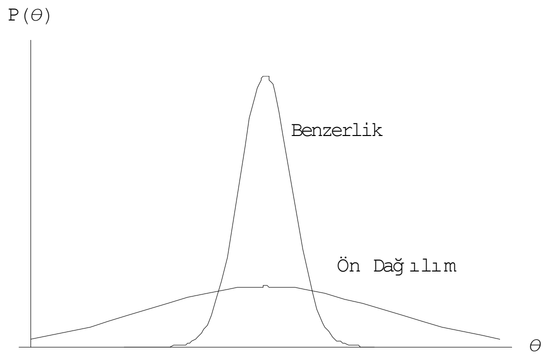
[29] J. Hartigan, "Invariant Prior Distributions," The Annals of Mathematical Statistics, Vol. 35, June 1964, s. 842.

Referans Ön Dağılım

Referans ön dağılım terimi çoğunlukla kısıtlı anlamda kullanıla gelmiştir. Box-Tiao ve pek çoğu için referans ön dağılım, standart olarak kullanılması uygun olan ve benzerlik fonksiyonunun baskın geleceği bir yapıdadır.[30] Ayrıca benzerlik baskın bir yapı varsa hesaplanan son dağılım hala uygun bir dağılımdır. Aslında referans ön dağılımın baskın geldiği bir yapı da mümkün olabilir. Ön dağılımın baskın geldiği bir yapı, bilgi veren yapıdır. Bu bağlamda referans ön dağılımın, bilgi vermeyen ön dağılım olması gerekmez.



Şekil 2. 8 Baskın Ön Dağılım [31]



Şekil 2. 9 Baskın Benzerlik Fonksiyonu [31]

Berger-Bernardo "referans ön dağılım" terimini genel anlamında kullanmıştır. Onların geliştirdiği yönteme göre ilgilenilen parametre için referans ön dağılım, son dağılım ve ön dağılım arasındaki Kullback-Leibler uzaklığını maksimize etmekle bulunur.

$Y_1^n = (Y_1, ..., Y_n)$, n adet i.i.d. rastlantı değişkeni ise Kullback-Leibler uzaklığı $K_n\left(\pi(\theta \setminus y_1^n), \pi(\theta)\right)$ şeklindedir. Burada $\pi(\theta \setminus y_1^n)$ son dağılım, $\pi(\theta)$ ön dağılımdır. Buna göre;

$$K_n\left(\pi(\theta \setminus y_1^n), \pi(\theta)\right) = \int \log\left[\frac{\pi(\theta \setminus y_1^n)}{\pi(\theta)}\right] \pi(\theta \setminus y_1^n) d\theta \quad ^{32} \qquad \textbf{(2. 20)}$$

İki dağılımın birbirine oranının logaritması alınır, son dağılım ile çarpılır.

[30] Box, G.E.P, Tiao, G.C., a.g.e., s. 23.
[31] Box, G.E.P, Tiao, G.C., a.g.e., s. 22.
[32] Robert E. Kass, Larry Wasserman, a.g.e., s. 1350.

$K_n^\pi = E\left(K_n\left(\pi\left(\theta \setminus y_1^n\right), \pi(\theta)\right)\right)$ ifadesi, Kullback-Leibler uzaklığının ((2.20)'nin) beklenen değeridir. Amaç bu ifadeyi maksimum yapmaktır; $K_\infty^\pi = \lim_{n\to\infty} K_n^\pi$. Ancak genellikle K_∞^π sonsuzdur. Bu sorunla başa çıkmak için öncelikle sonlu uzaklık olan K_n^π'yi maksimum yapan ön dağılımlar (π_n) bulunur. Daha sonra bu ön dağılımlara karşılık gelen son dağılımların limiti bulunur. Sonuç olarak bu şekilde elde edilen ön dağılım limitte Bayes teoreminden son dağılım üreten bir dağılım olur. Birkaç düzenleme yapıldıktan sonra bu ön dağılım (sürekli parametre uzayı için) Jeffreys'in ön dağılımına döner.[33]

Referans ön dağılım gürültü parametreleri ile başa çıkmada oldukça başarılıdır. Daha açık bir ifadeyle parametre vektörü, w ilgilenilen parametre ve λ gürültü parametresi iken, $\theta = (w, \lambda)$ şeklinde ayrılabiliyorsa, θ ile ilgili çıkarsama yapmada referans ön dağılım iyidir. Gürültü parametresi olmadığında ve belirli koşullar sağlandığında, referans ön dağılım Jeffreys'in ön dağılımı ile aynı olur. Yani ilgilenilen parametre ve gürültü parametresi ayrımı varsa bu yöntem Jeffreys'inkinden farklı sonuç verir.[34]

Belirsiz Ön Dağılım

Bilindiği gibi parametrenin (Bayesyen yaklaşımda rastlantı değişkeni gibi düşünüldüğünden) dağılımının türüne göre, bu parametrenin dağılımının ölçüsünü-şeklini veren parametre değişmektedir. Sözgelimi konum parametresi için bir normal dağılım alınabilir. Şekil parametresi için de gama dağılımı alınabilir. Büyük varyansın belirsizlikle özdeş olması fikrine dayanarak, bu dağılımların şekil parametrelerine öyle değerler atanır ki oldukça geniş bir aralıkta yer alan, neredeyse dikdörtgen ön dağılım kadar düz, bilgi vermeyen bir ön dağılım oluşturulur;[35]

$p(\theta) \sim N\left(\overline{\mu}, \overline{\sigma}^2\right)$, $\overline{\sigma}^2$'ye büyük değer atanır.

$p(\sigma) \sim G(\alpha, \beta)$, α ve β'ya (0,001 gibi) çok küçük değerler atanır.

---

[33] Robert E. Kass, Larry Wasserman, a.g.e., s. 1350.
[34] Robert E. Kass, Larry Wasserman, a.g.e., s. 1350-1351.
[35] H. Raiffa ve R. Schlaifer, **Applied Statistical Decision Theory**, America, MIT Press, 1968, s. 63.

Bu şekilde oluşturulan belirsiz ön dağılımın, en güçlü yanı uygun dağılım olmasıdır. Dikdörtgen ön dağılım yerine belirsiz ön dağılım almakla, sözü edilen özelliğinden ötürü hesaplamada oldukça kolaylık sağlanmış olunur.

Belirsiz ön dağılımın da zayıf yanı vardır. Son dağılımın uygunsuz olduğu, gözlem sayısının az olduğu ve benzerlik fonksiyonunun çok yayvan bir zirve yaptığı durum varsayılsın. Belirsiz ön dağılımla (sözgelimi varyansı büyük normal dağılımla) tekrar hesaplama yapılsa bile iyi sonuç alınmaz. Çünkü bu kez de uygun olmakla birlikte, yeni ön dağılımın varyansına aşırı duyarlı bir son dağılım elde edilmiş olunur.[36] Aslında bu sınırlı veri durumu, uygulamada sıklıkla karşılaşılabilecek bir sorundur.

2.3.2. Eşlenik Ön Dağılım

Gereksiz tekrardan kaçınmak için eşlenik ön dağılımın hesaplanmasına ilişkin teknik ayrıntıya regresyon bölümünde değinilmiştir. İlerde tekrar açıklanmak üzere denilebilir ki eşlenik ön dağılım benzerlik fonksiyonunun dağılım yapısından faydalanarak belirlenebilir. Benzerlik fonksiyonu yeterli istatistiklerine göre çarpanlarına ayrılır. Hesaplanan yeterli istatistiklerin dağılımları, oluşturulacak eşlenik ön dağılıma temel teşkil eder.

Eşlenik ön dağılım yapısında bir ön dağılımın belirlenmesinde, gerekçelerden bazıları şunlardır; Belirlenen ön dağılımla benzerlik fonksiyonundan son dağılımın elde edilmesi kolay olmalıdır. Eşlenik ön dağılım zengin olmalıdır. Zengin olmasından kasıt, bu dağılımda araştırmacının ön bilgi ve düşüncesini ifade etmeye yarar bir dağılım üyesinin yer almasıdır.[37]

Belirtilen gerekçelerin ötesinde, sağladığı fayda açısından söylenebilir ki eşlenik ön dağılım seçmekle, her zaman aynı evrenden yeni örneklem bilgisinin alınması mümkün olmaktadır. Böylece ilgilenilen parametreye ilişkin ön bilgiler yeniden gözden geçirilebilmekte ve daha tutarlı sonuçlara ulaşılmaktadır.[38] Yöntem olarak örneklemin dağılım ailesine göre seçilen ön dağılımın, benzerlik ile

---

[36] Robert E. Kass, Larry Wasserman, a.g.e., s. 1359, 1361.
[37] H. Raiffa ve R. Schlaifer, a.g.e., s. 44.
[38] Atilla Yardımcı, 1992, "Çoklu Bağlantılı Çoklu Doğrusal Regresyonda Bayes Yaklaşımı," Y.L., Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Üniversitesi.

birleşmesinde matematiksel kolaylık sağlar. Özellikle üstel dağılım ailesi için hesaplaması kolaydır. Ayrıca eşlenik ön dağılım, uygun bir o.y.f.'dir.

Ancak eşlenik ön dağılım dikkatli kullanılmalıdır. Çünkü bu ön dağılım oldukça spesifik parametrik ön bilgiyi gösterir.[39]

Yukarıda da sözü edildiği gibi farklı benzerlik fonksiyonları ile hangi eşlenik ön dağılımların kullanılacağı önemlidir.[40] Ortaya çıkan son dağılımın bilinen bir fonksiyonel yapıya sahip olması gerekmektedir. Bu Tablo 2.1 ile örneklenebilir;

BENZERLİK FONKSİYONU	ÖN DAĞILIM	SON DAĞILIM
Binom	Beta	Beta
Negatif Binom	Beta	Beta
Normal	Normal	Normal
Poisson	Gama	Gama
Üstel	Gama	Gama
Gama	Gama	Gama

Tablo 2. 2 Benzerlik Fonksiyonuna Göre Eşlenik Ön Dağılım ve Karşılık Gelen Son Dağılım

2.3.3. Sübjektif Ön Dağılım

Bayesyen yaklaşımda objektif-sübjektif tartışması ön dağılımın belirlenmesinin de öncesinde, olasılığın değerlendirilmesinden başlamaktadır. Bakış açısı sübjektif cepheden olan de Finetti, olasılığın tanımını çeşitli yollarla yapmaktadır. Tanımından birisi bahis oranına dayanır. Bir diğeri cezalandırmaya dayalı skor kuralıdır.[41] Belirsizliği sayısallaştırmak girift bir sorundur. Dolayısıyla olasılıkta olduğu gibi, ön dağılımın sübjektif olarak belirlenmesinde de çalışmanın konusuna göre farklı yöntemler uygulanabilir. Bunların tamamını ele almak amaç dışı görüldüğünden ancak birkaçına yer verilecektir.

---

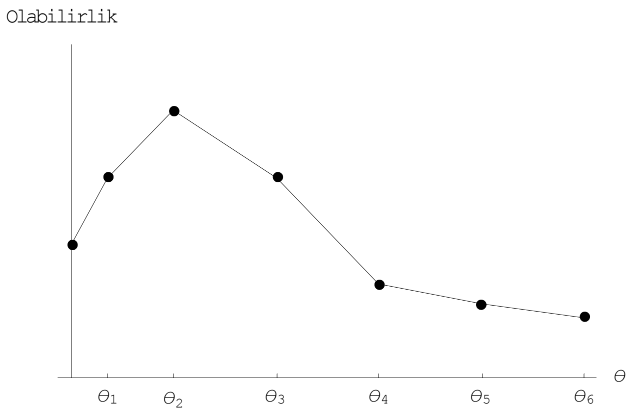
[39] Jeff Gill, a.g.e., s. 120.
[40] H. Raiffa ve R. Schlaifer, a.g.e., s. 53, 54.
[41] Maria Carla Galavotti, "Subjectivism, Objectivism and Objectivity in Bruno de Finetti's Bayesianism," Foundations of Bayesianism, Ed. David Corfield ve Jon Williamson, Kluwer Academic Publishers, 2001, s.161, 162-163.

Histogram Yaklaşımı

θ, gerçek bir doğru üzerinde bir aralığı temsil ediyorsa, histogram yaklaşımı kullanılabilir. Yaklaşıma göre, θ aralıklara bölünür. Her bir aralığa sübjektif olasılıklar tayin edilir. Daha sonra olasılıklara karşılık gelen histogram çizimi yapılır. Bu histogramdan ön olasılık yoğunluğu $p(\theta)$ elde edilir. Aralık sayısına veya genişliğine ilişkin bir kural yoktur. Dahası elde edilen ön dağılım, çalışma güçlüğü çıkarabilecek bir yapıda olabilir. Bunlar, yaklaşımın zayıf noktalarındandır. Bir diğer zayıf noktası, oluşturulan ön dağılımın kuyruğu olmaması ihtimalidir. Bu şu anlama gelir; uç değerlerin ön dağılımda karşılığı olmayabilir.[42]

Nispi Olabilirlik Yaklaşımı

Parametre θ, gerçek bir doğrunun alt kümesi ise bu yaklaşım kullanılabilir. Parametrenin bir değerinin, diğer bir değerine göre sezgisel olarak kaç kez daha muhtemel olduğu fikrine dayalı çizim yapılır. Bu taslak çizimden ön dağılım belirlenir.



Şekil 2. 10 Nispi Olabilirlik Yaklaşımı ile bir Ön Dağılım

Kıyaslama yaparken daha fazla parametre değeri, daha ince değerlendirmeye tabi tutulabilir. Bulunan ön dağılım, uygun dağılım olmayabilir. Ayrıca örneğin Şekil.2.5'te olduğu gibi "parametre θ'nın, birbirinden ayrı θ_1 ve θ_3 gibi iki değeri alma olasılığı eşit" türünden ifadelerin tutarlılığı kontrol edilmelidir.[43]

---

[42] James O. Berger, a.g.e., s. 77.
[43] James O. Berger, a.g.e., s. 78.

Verilen Bir Fonksiyonel Yapı İle Karşılaştırma

Araştırmacının fikrine bağlı olarak bir fonksiyon yapısı belirlenir. Daha sonra bu fonksiyon yapısını en iyi karşılayan dağılım türü seçilir. Örneğin Şekil.2.5'teki gibi bir fonksiyonel yapıyla Gama dağılımının yakın olabileceği düşüncesi, ön bilgiyi temsil etmek üzere Gama dağılımı, $G(\alpha,\beta)$, varsayımının yapılmasını sağlar. Bu aşamada gama ön dağılımının parametreleri α ve β sübjektif olarak belirlenir. Bunun çeşitli yolları vardır. Tahmin edilen ön momentlerden hesaplamak, bunlardan biridir. Yani belirlenen fonksiyondan ortalama ve varyans hesaplanır. Daha sonra $Ortalama = \alpha.\beta$ ve $Varyans = \alpha.\beta^2$ eşitliklerinden yararlanarak, α ve β değerlerine ulaşılır. Bir başka yöntem de ön dağılımı kartillere ayırmaktır.[44] Araştırmacı ayrılan kartillere sübjektif olarak taşıdığına inandığı değerleri atar. Bu kartillere karşılık gelen olasılık alanları hesaplanır.

Son olarak Bölüm 2.3. altında yer alan bu üç ana başlık dışında, iki önemli ön dağılım türüne daha yer verilecektir.

2.3.4. Maksimum Entropi Ön Dağılımı

Entropi, fizikten ödünç alınmış bir terimdir. İstatistikteki yerini, bilgi kuramı ile doğrudan ilişkisi olması nedeniyle almıştır. Bir anlamda, olasılık dağılımının doğası gereği taşıdığı belirsizliği ölçer.[45] Başka bir deyişle gözlemlerin belirsizliğini sayısallaştırır.

Entropi ön dağılımı, ön dağılım parametrelerinin dağılımına ilişkin belirsizliğin nispi seviyesini tanımlar. Birbirinden farklı ön dağılımlar tarafından sağlanan belirsizlik veya mutlak kesinlik aynı şekilde modellenir. Bu nedenle esnek olduğu söylenebilir. Ancak parametre dönüşümü sonucu değişmezlik özelliğine sahip değildir. Dolayısıyla sınırlı uygulama alanı vardır.[46]

Kesikli parametre $\theta = (\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ için entropi $H(\theta)$ ise ;

$$H(\theta) = -\sum P(\theta_i).\log P(\theta_i) \qquad \textbf{(2. 21)}$$

[44] James O. Berger, a.g.e., s. 80-81.
[45] James O. Berger, a.g.e., s. 91.
[46] Jeff Gill, a.g.e., s. 135, 136.

(2.21)'de olasılığın logaritmasını almakla bilginin (üstel olarak artması sezgisinden yararlanarak) artarak artması durumu sağlanmış olur. Negatifi ile, bilginin karşıt durumu olarak bilgisizliği açıklar. Entopinin (2.21)'deki matematiksel ifadesiyle iki uç durum tespiti yapılabilir. Birisi entropinin minimumunu (bilgi olması hali), diğeri maksimumunu (bilgisizliği) ifade eder.

Birinci durumda;

$P(\theta_k)=1$ iken, yani parametrenin belirlenen bir değeri alma olasılığı 1 ise; $i \neq k$ olmak üzere, $P(\theta_i)=0$ alınır, yani parametrenin belirlenen bir başka değeri alma olasılığına "0" atanır. Burada parametreye ilişkin tam bilgi verilmiş olunur ve dolayısıyla belirsizlik "0" olur;

$$H(\theta)=-\sum_{i=1}^{n} P(\theta_i)\log P(\theta_i)=0$$

İkinci durumda, ön dağılım dikdörtgen ön dağılım olarak alınırsa, örneğin $P(\theta_i)=\frac{1}{n}$ tayin edilirse, bu ön dağılımın entropisi maksimuma ulaşmış olur;

$$H(\theta)=-\sum \frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n}\right)=\log n \qquad \textbf{(2. 22)}$$

(2.22)'de elde edilen entropi, bilgi vermeyen ön dağılım ile aynıdır. Parametrenin gözlenen değerlerinin sayısı arttıkça (yani $n \to \infty$), $P(\theta_i)=\frac{1}{n}$ değeri azalır. (Aslında giderek parametrenin hiçbir değerinin gerçekleşmeyeceği durumuna yaklaşılır, yani limitte $P(\theta_i)=0$ olur. Dolayısıyla limitte bilgi veren yapıya ulaşması bir çelişkidir. θ'yı sonlu tanımlamakla çelişkiden kurtulunabilir.) Öte yandan entropinin değeri logaritmik olarak artar, dolayısıyla ön belirsizlik artar.

Ayrıca sözü edilen iki yapı arasında düşünülünce, entropi ön dağılım için $H(\theta)\leq \log n$ şeklinde sınır oluşturur.[47]

---

[47] James O. Berger, a.g.e., s. 91.

2.3.5. Hiyerarşik Ön Dağılım

Ön parametrenin değerine ilişkin belirsizlikle başa çıkmada bir yol, bu parametrelere ilave bir ön dağılım atamaktır. Bu yeni ilave ön dağılımın parametreleri hiperparametre olarak bilinir. Bazı kaynaklarda bu sebepten hiyerarşik ön dağılım, hiper ön dağılım olarak da adlandırılmaktadır. Örnek bir durumla hiyerarşik ön dağılım oluşumu şöyle açıklanabilir;[48]

y_i gözlemler iken, bu gözlemlerin poisson dağıldığı varsayılsın. Dağılımda parametre λ'dır. λ için ön dağılım atamak gerekse, gama dağılımı kullanılabilir. Çünkü gama dağılımı poisson'un eşleniğidir aynı zamanda da oldukça esnek bir parametrik yapısı vardır. Gama ön dağılımı da α ve β şeklinde iki parametre tarafından tanımlanır. Gama parametreleri α ve β, (λ'da olduğu gibi), pozitif reel sayılarla sınırlandırılır. Onlara da (α ve β'ya) gama dağılımı atamak yerindedir. Süreci sonlandırmak üzere gama dağılımlarına dışardan hiperparametre değerleri (*A*, *B*, *C*, *D*) verilir. İstatistiksel notasyon ile şöyle özetlenebilir;

$$y_i \sim Poi(\lambda_i) \quad \Rightarrow \quad \lambda_i \sim G(\alpha,\beta) \quad \Rightarrow \quad \alpha \sim G(A,B) \quad \text{ve} \quad \beta \sim G(C,D)$$

Burada y_i'ler koşullu bağımsızdır. Ayrıca α ve β'nın da bağımsız olduğu varsayılmıştır.

Görüldüğü gibi, yapısal bilgi ve sübjektif ön bilgi aynı anda kullanmak isteniyorsa, aşamalı olarak bu şekilde oluşturmak kolay olacaktır. Araştırmacı gama dağılımı atamakla yapı belirlerken, hiperparametre değeri vererek de sübjektif ön bilgiyi analize katar. Aslında hiyerarşik ön dağılım tamamen yeni bir yapı değildir. Sadece ön dağılımı daha kolay temsil eden, aşamalı bir oluşturulma sürecine sahiptir; netice itibariyle herhangi bir hiyerarşik ön, standart bir ön olarak yazılabilir.[49]

Bir ileri aşamada, Bayes Teoremi ve de koşullu olasılık tanımından yararlanarak, birleşik ön dağılım elde edilir. Buradan da birleşik son dağılım hesaplanır. Birleşik ön dağılım[50];

[48] Jeff Gill, a.g.e., s. 354, 355.
[49] James O. Berger, a.g.e., s. 107, 108.
[50] Jeff Gill, a.g.e., s. 355.

$$p(y,\lambda,\alpha,\beta)=\prod_{i=1}^{n} p(y_i \setminus \lambda_i).p(\lambda_i \setminus \alpha,\beta).p(\alpha \setminus A,B).p(\beta \setminus C,D) \qquad \textbf{(2. 23)}$$

şeklinde yazılır. (2.23)'te *A*, *B* ve *C*, *D* için değer vermek yerine dağılım belirlenirse, hiyerarşiye bir aşama daha eklenmiş olur. J. Gill'in belirttiği gibi, hiyerarşik ön dağılımı belirlemede kullanılacak aşama sayısına ilişkin bir sınırlama yoktur. Ancak uygulamada iki aşamadan fazlası nadiren kullanışlıdır.

Hiyerarşik ön dağılımla oluşturulmuş modelleme, (MCMC) simülasyon tekniğinin geliştirilmesiyle etkin olarak kullanılmaya başlanmıştır.

Ön dağılım, Bayesyen yaklaşımın ayırt edici özelliğidir denilebilir. Ancak en çok da bu özelliği eleştirilmektedir. Ön dağılımın kullanılmasının, öncelikle analizi sübjektif yapacağı görüşü vardır. Bayesyen yaklaşımı benimseyenlerce iddia edilen de zaten araştırmacının analizlerde bir şekilde kendi fikrini yansıtmakta olduğudur. Çoğu zaman kaçınılmaz olarak yansıtılan bu etki, Bayesyen yaklaşımda kurallı bir biçimde analize dahil edilir, demektedirler[51].

[51] Arnold Zellner, **Basic Issues in Econometrics**, Chicago, The University of Chicago Press, 1984, s. 188, 190, 196.

BÖLÜM -3- BAYESYEN REGRESYON

Uygulamalı istatistiksel analizin önemli bir bölümünü regresyon tekniği oluşturur. Regresyon tekniğinde tahmincinin seçimi, tahmin, test süreci gibi aşamalar vardır. Bu aşamalardan tahmincinin seçiminde kriter, tahmincinin yansızlık, etkinlik, kesinlik gibi istatistiksel özellikleri ve verinin dağılımı (veya dağılım varsayımları) olmaktadır. Ancak bunların da ötesinde tüm bu istatistiksel özelliklerin hangi istatistik anlayışı çatısında değerlendirildiğine bağlıdır. Bayesyen yaklaşım alternatif kabul edilirse, yapılacak regresyon analizi bu bölümde ele alınan biçimde gerçekleşecektir.

Bayesyen yaklaşımın karakteristiğini yansıtan özellik, analizde ön bilgiye yer verilmesidir. Bu regresyon analizi için de böyledir. Bilindiği gibi Bayesyen yaklaşımda, denemeler yapılmadan önce parametreye ilişkin sahip olunan ön bilgi, ön o.y.f. sayesinde analize dahil edilir. Aslında ön bilgi her araştırmada mevcut olmayabilir veya farklı seviyelerde ön bilgi olabilir. Bu sebepten regresyonda önemli bir aşamayı teşkil eden ön dağılımın oluşturulması konusu, bu kriterle ayrıma giderek, bilgi veren ve bilgi vermeyen ön o.y.f. şeklinde iki başlık oluşturur.

Daha önceki bölümde değinilen Bayesyen yaklaşım ile istatistiksel çıkarsamada olduğu gibi regresyon parametresi de Klasik regresyonunkinin aksine bilinmeyen bir sabit ($\beta\, tahmin \sim N\left[\beta, \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}\right]$) değil, bir rastlantı değişkeni ($P(\beta \setminus \sigma) \sim N\left[\beta\, tahmin, \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}\right]$) olarak kabul edilir. İfadeden açıkça görüldüğü üzere, tahminci ve parametre adeta rol değiştirmiştir. Bayesyen regresyonda $\beta_0, \beta_1, \ldots\ldots, \beta_k$ ve σ^2 parametreleri birer rastlantı değişkenidir ve olasılık dağılımları vardır.

Doğrusal modele Bayesyen ilkeler uygulandığı zaman analizin temelini oluşturan süreç, Bayesyen istatistiksel çıkarsamada olduğu gibi gerçekleşecektir:

$$\text{Son Dağılım} \propto \text{Ön Dağılım} \times \text{Benzerlik Fonksiyonu}$$

$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \setminus y, X\right) = P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2\right).P\left(y, X \setminus \beta_0, \beta_1, \sigma^2\right)$$ [52]

[52] George G. Judge v. d., **The Theory and Practice of Econometrics**, New York, John Wiley & Sons, 1985, s. 103.

3.1. Basit Doğrusal Regresyon Modeli

Bu bölümde tek açıklayıcı değişkeni olan doğrusal regresyon modeli analiz edilecektir.

Model

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \qquad (i = 1, 2, ..., n \text{ için}) \qquad \textbf{(3. 1)}$$

şeklinde ifade edilir. Burada y_i bağımlı değişken, x_i bağımsız değişken, u_i rastlantısal hata terimi, β_0 *ve* β_1 regresyonun parametreleri, başka bir deyişle sabit katsayı ve eğim katsayısıdır.

Bayesyen yaklaşımda, doğrusal regresyon varsayımları şunlardır;

a-) Hata terimleri her "*x*" değeri için "0" ortalamalı ve "σ^2" varyanslı, bağımsız Normal dağılır. $\left(u_i \overset{i.i.d.}{\sim} N\left(0, \sigma^2\right) \right)$. (Başka bir ifadeyle hata terimlerinin varyansı tüm gözlemler için aynıdır)

b-) Rastlantı değişkenleri bağımsızdır.

c-) Katsayılarda doğusaldır.

d-) Ölçme hataları yoktur.

Regresyonda X ya sabit ya da rastlantı değişkenidir. Rastlantı değişkeni olması durumunda hata terimi u_i'lerden bağımsızdırlar. Ayrıca X'in rastlantı değişkeni olmasıyla ilgili olarak bir varsayım daha yapılır; Ön dağılım parametrelerinin bağımsızlığı.[53] Klasik regresyonda, X veri iken y'nin koşullu olasılığı hakkında X'in dağılımının bilgi sağlamadığı varsayılır. Bayesyen yaklaşımda da mantık aynıdır. Aslında tam bir Bayesyen model X'in dağılımını da, $g(X \backslash \psi)$, içerir. Böyle bir modelin birleşik benzerlik fonksiyonu ve ön dağılımı sırasıyla (3.2)'deki gibidir[54];

$$P\left(y, X \backslash \beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi\right) = P\left(y \backslash X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2\right).g(X \backslash \psi)$$
$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi\right). \qquad \textbf{(3. 2)}$$

---

[53] D. V. Lindley, **Introduction to Probability and Statistics From A Bayesian Viewpoint, Part 2**, London, Cambridge University Press, 1965, s. 57, 203, 204.
[54] Andrew Gelman v. d., **Bayesian Data Analysis**, London, Chapman & Hall, 1995, s. 235.

$P\left(y \setminus X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right)$' yi belirleyen β_0, β_1, σ^2 parametreleri ve $g(X \setminus \psi)$'yi belirleyen ψ parametresi ön dağılımlarında bağımsızdır;

$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi \right) = P(\psi).P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right). \qquad \textbf{(3. 3)}$$

Ön dağılımlarının bağımsız olması varsayımından faydalanarak, birleşik son dağılım çarpanlarına ayrılır;

$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi \setminus y, X\right) = P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \setminus y, X\right).P(\psi \setminus X)$$

$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2, \psi \setminus y, X\right) = \left[P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right).P\left(y \setminus X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right)\right].\left[P\left(X \setminus \psi\right).P(\psi)\right]$$

$$P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \setminus y, X\right) \propto P\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right).P\left(y \setminus X, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right) \qquad \textbf{(3. 4)}$$

(3.4)'te görüldüğü üzere oransallık ifadesi ile yazılınca, bilgi kaybı olmadan Klasik regresyonda olduğu gibi X'in dağılımına olan bağımlılık ortadan kaldırılmış olur.

(3.1) ifadesinde X, β_0, β_1 ve σ^2 veri iken, y ortalaması $E\left(y_i \setminus x_i, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ ve varyansı $Var\left(y_i \setminus x_i, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right) = \sigma^2$ ($i = 1, 2, ..., n$ için) ile bağımsız Normal dağılır. Bu varsayımlara göre benzerlik fonksiyonu;

$$P\left(y \setminus X, \beta_0, \beta_1, \sigma \right) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum \left(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i\right)^2 \right], (i = 1, 2, ..., n \text{ için}) \qquad \textbf{(3. 5)}$$

3.1.1. Bilgi Vermeyen Ön Dağılım ile Analiz:

Ön dağılımın seçimi araştırmacının bilgi ve düşüncesine bağlıdır. Rastlantısal deneme veya örnekleme sürecinde deneme yapılıp, sonuçlar ortaya çıkmadan önce, parametreye ilişkin ilk anda sahip olunan bilgiyi ön dağılımın temsil ettiği düşünülür. Elbette ki ön bilginin miktarında ara aşamalar da vardır. Tam bilgisizlik, az bilgi olması ve tam bilgi olması durumu olabilir. Çalışmada regresyon analizinde kolaylık sağlanması amacıyla, 2. Bölümde yer alan ön dağılım sınıflandırmasından farklı bir ayrıma gidilmiştir. Tam bilgisizlik ve bilgi olması durumu ile ön dağılım oluşturulacaktır. Ön bilginin olmaması durumunun dışında, gözlem sayısı çok ve parametre sayısı küçük ise bilgi vermeyen ön dağılım kullanılması daha doğrudur. Çünkü veriden gelen bilgi kaçınılmaz olarak daha baskın çıkacaktır.

3.1.1.1. Varyans Bilinmiyorsa:

Ön dağılımın analizi

β_0, β_1 ve σ için en yaygın bilgi vermeyen ön dağılım;

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma) = P(\beta_0, \beta_1).P(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \qquad \textbf{(3. 6)}$$

$(-\infty \langle \beta_0, \beta_1 \langle \infty$, $\quad 0 \langle \sigma \langle \infty$ olmak üzere), şeklindedir.

(3.6) Eşitliğinin ayrıntısına bakılırsa, $P(\beta_0, \beta_1) = c$ gibi bir sabite, $P(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$ 'ya eşittir. β_0, β_1 ve $\log\sigma$ parametreleri, bağımsız ve dikdörtgen dağılırlar. σ'nin sıfırdan büyük olduğu bilinmektedir. Buna göre $\beta = \log\sigma$ eşitliğinden, $P(\sigma)d\sigma \propto \frac{d\sigma}{\sigma}$ ifadesine ulaşılır. Parametrenin her değerine karşılık gelen olasılık aynıdır. Bu nedenle belirlenen ön dağılımın parametre değerlerine ilişkin tam bilgisizliği yansıttığı söylenebilir.

Son dağılımın analizi

Ön dağılım ile benzerlik fonksiyonu çarpılarak β_0, β_1 ve σ için birleşik son dağılım elde edilir;

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma \setminus y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2\right] \qquad \textbf{(3. 7)}$$

E.K.K. yöntemiyle yapılan tahminde parametre tahmincileri;

$$v = n - 2 \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$$

$$s^2 = \frac{\sum(y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{v} \qquad \textbf{(3. 8)}$$

Dağılımı E.K.K. tahmincileri cinsinden yazmak için, (3.7)'de $\sum\left(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i\right)^2$ ifadesinde parantez içi, "$\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x_i$" eklenip çıkarılarak genişletilir;

$$\sum\left(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i\right)^2=\sum\left(y_i-\beta_0-\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_0-\beta_1 x_i-\hat{\beta}_1 x_i+\hat{\beta}_1 x_i\right)^2$$

$$=\sum\left\{\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i\right)-\left[\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i\right]\right\}^2$$

$$=\sum\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i\right)^2-\sum 2\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i\right)\left[\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i\right]$$

$$+\sum\left[\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i\right]^2$$

Yukarıda, açılımı elde edilen ifadede, çapraz çarpım terimi "$\sum 2\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i\right)\left[\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i\right]$", $\sum\left(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i\right)=0$ olması nedeniyle kaybolur.

$$=vs^2+\sum\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)^2+\sum\left[\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i\right]^2+\sum 2\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)x_i$$

$$=vs^2+n\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)^2+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)^2\sum x_i^2+2\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)\sum x_i \qquad \textbf{(3. 9)}$$

Birleşik son dağılımda yukarıda elde edilen sonuç yerleştirilir:

$$P\left(\beta_0,\beta_1,\sigma \setminus y,X\right)\propto\frac{1}{\sigma^{n+1}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2+n\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)^2+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)^2\sum x_i^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)\sum x_i\right]\right\} \qquad \textbf{(3. 10)}$$

(3.10) Eşitliği, β_0 *ve* β_1'in koşullu son o.y.f.'sinin, $\hat{\beta}_0$ *ve* $\hat{\beta}_1$ ortalamalı $\sigma^2\left(X'X\right)^{-1}$ kovaryans ile Çok değişkenli Normal dağıldığını gösterir. Elde edilen son o.y.f. de Normal dağılmaktadır. Dağılımın fonksiyonel kısmını belirleyen bölüm, yoğunluk fonksiyonun çekirdeğidir (kernelidir). Burada çekirdek,

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)^2+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)^2\sum x_i^2+2\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)\sum x_i\right]\right\}$$

ifadesidir. Diğer bölüm "$\dfrac{1}{(2\pi)^n\,\sigma^{n+1}}$", olasılık fonksiyonunun integralini "1" yapan **normalleştirme sabiti**dir.

Uygulamaya bakıldığında σ^2'nin bilindiği durumlar nadirdir. Bu nedenle birleşik son dağılımın σ'ya göre integrali alınır. Sonuçta β_0 *ve* β_1 için marjinal son o.y.f. elde edilmiş olunur. Bu dağılım, yani marjinal yapı parametreye ilişkin çıkarsama yapılmasını sağlamaktadır.

$$P(\beta_0, \beta_1 \setminus y, X) = \int_0^\infty P(\beta_0, \beta_1, \sigma \setminus y, X)\, d\sigma$$

$$\propto \left[vs^2 + n\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)^2 + \left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)^2 \sum x_i^2 + 2\left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)\sum x_i \right]^{-\frac{n}{2}} \qquad \textbf{(3. 11)}$$

(3.11) ifadesi, iki değişkenli Student t dağılımı ile aynı yapıdadır. Başka bir deyişle β_0 *ve* β_1 parametrelerinin marjinal son dağılımı, Student t dağılmaktadır.

β_0 *ve* β_1 Parametrelerine ilişkin çıkarsama

Parametrelerin her birinin marjinal son dağılımı Student t o.y.f.'sinin özelliklerine dayanarak aşağıdaki şekilde elde edilir[55];

$$P(\beta_0 \setminus y, X) \propto \left[v + \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{s^2 \sum x_i^2 / n} \left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right)^2 \right]^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad -\infty \langle\ \beta_0 \ \langle \infty \qquad \textbf{(3. 12)}$$

$$P(\beta_1 \setminus y, X) \propto \left[v + \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{s^2} \left(\beta_1 - \hat{\beta}_1\right)^2 \right]^{-\frac{(v+1)}{2}} \qquad -\infty \langle\ \beta_1 \ \langle \infty \qquad \textbf{(3. 13)}$$

Karar alma teorisine dayalı tahmin tekniğinden bilinmektedir ki kareli yapıda en iyi tahmini son dağılımın ortalaması verir. Dağılımların konum parametresi yani ortalamaları $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'dir. Dolayısıyla Bayes tahmincileri, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ile yani E.K.K. tahmincileri ile aynıdır.

Gerekli dönüşümler yapılınca yukarıdaki eşitlikler (3.12) ve (3.13) şu hale gelir[56];

$$\left[\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{s^2 \sum x_i^2 / n} \right]^{-\frac{1}{2}} \left(\beta_0 - \hat{\beta}_0\right) = t_v \qquad \textbf{(3. 14)}$$

[55] Arnold Zellner, a.g.e., s. 61.
[56] Arnold Zellner, a.g.e., s. 61.

$$\left[\frac{\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)}{s/\left[\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}}\right]=t_v \qquad \textbf{(3. 15)}$$

(3.14) ve (3.15)'te t_v rastlantı değişkenidir. Buna göre parametrelerin v serbestlik dereceli Student t o.y.f.'si vardır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, t-dağılım tablosundan β_0 *ve* β_1'ye ilişkin çıkarsamalar yapmak mümkün olacaktır.

σ Parametresine ilişkin çıkarsama

Bu altbölümde varyansın bilinmediği durumların açıklanması hedeflendiğinden, doğal olarak varyans (veya standart sapma) parametrelerden biri olmaktadır.

σ'nın marjinal son dağılımını elde etmek için, birleşik son dağılımın - (3.10)'un - β_0 *ve* β_1'e göre integrali alınır. Bunun sonucunda;

$$P(\sigma \setminus y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}}\exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right), \qquad 0 \langle\ \sigma\ \langle\ \infty \qquad \textbf{(3. 16)}$$

ifadesine ulaşılır.[57] Burada σ, Ters-Gama dağılır. Standart sapma için beklenen değer ve varyans;

$$E(\sigma)=s\left(\sqrt{\frac{v}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left[(v-1)/2\right]}{\Gamma(v/2)}, \qquad Var(\sigma)=\frac{vs^2}{v-2}-\left[E(\sigma)\right]^2 \qquad \textbf{(3. 17)}$$

σ'dan σ^2'ye dönüştürme yapılarak, varyans (σ^2) için de marjinal son o.y.f. elde edilir[58];

$$P(\sigma^2 \setminus y, X) \propto \left[\left(\sigma^2\right)^{\frac{n}{2}}\right]^{-1}\exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right), \qquad 0 \langle\ \sigma^2\ \langle\ \infty \qquad \textbf{(3. 18)}$$

Varyans için beklenen değer, $E(\sigma^2)=\dfrac{vs^2}{v-2}$ şeklindedir.

Kesinlik Parametresi *h* için çıkarsama

Bayesyen İstatistikte önemli yeri olan kesinlik parametresi $\left(h=1/\sigma^2\right)$ için, marjinal son dağılımı elde etmek üzere gerekli dönüştürme işlemleri yapılırsa;

---

[57] Arnold Zellner, a.g.e., s. 61.
[58] Arnold Zellner, a.g.e., s. 62.

$$P(h \backslash y, X) \propto h^{\frac{v}{2}-1} \exp\left(\frac{vs^2 h}{2}\right),^{59} \qquad 0 \langle\, h \,\langle\, \infty \qquad \textbf{(3. 19)}$$

Bu ifadeye (3.19) bakıldığında vs^2h'ın, v serbestlik dereceli χ^2 dağıldığı görülmektedir.

Kesinlik parametresi için beklenen değer, $E(h) = \frac{1}{s^2}$'dir.

3.1.1.2. Varyans Biliniyorsa:

Burada elde edilen son dağılımda σ biliniyorsa, modelde parametre olarak sadece katsayı parametreleri kalır. Model (3.11) yapısında olur. Bu noktadan sonra yapılacak işlemler aynıdır.

Genel olarak değinilirse, bilgi vermeyen ön dağılımla çalışıldığında, nokta tahmincisi (hatta dolayısıyla aralık tahmini) gibi çıkarsama sonuçları, E.K.K. tahmincisi ile aynı olacaktır. Ancak unutulmamalıdır ki yorum açısından farklıdır.

3.1.2. Bilgi Veren Ön Dağılım ile Analiz:

Bir iktisadi araştırmayı gerçekleştirirken çoğu durumda parametreye ilişkin bilgi mevcut değildir. Ancak araştırmacı ya daha önce yapılan bir araştırmadan ya da iktisat teorisinden gelen ön bilgiye sahiptir. Daha önceki denemelerden edinilenlere dayanılarak bilgi edinilmesi yoluyla oluşturulan ön dağılım Veriye-dayalı (Data-base) ön dağılım iken, kişisel gözlemler veya teorik dayanaklar dolayısıyla oluşturulan ön dağılım ise Veriye-dayalı olmayan (Nondata-base) ön dağılım olarak adlandırılır[60].

Bilginin eldeki formuna bakılırsa, modeldeki bir parametreye ilişkin bilgi olabilir; β_j parametresi normal -$\beta_j \sim N(\beta_{j0}, \sigma^2_{\beta_j})$- dağılır. β_{j0} ve $\sigma^2_{\beta_j}$ bilinmektedir. Veya modeldeki diğer bazı parametrelere ilişkin bilgi olabilir; β parametre vektörü, $\beta \sim N(\beta_0, \sigma^2_\beta)$ dağılır. Bunun dışında parametre üzerine

[59] Arnold Zellner, a.g.e., s. 62.
[60] Arnold Zellner, a.g.e., s. 18-19.

eşitsizlik kısıtları getirerek ifade edilen bir ön bilgi olabilir; $\beta_1 \geq 0$ veya $\beta_2 \leq \beta_3 \leq \beta_4$ gibi. Her durumda da yapılacak işlemler farklıdır.[61]

Daha kapsayıcı bir analizde, ön bilgiyi yansıtacak ön dağılımın, benzerlik fonksiyonu ile birleşebilecek matematiksel uygunluğa sahip bir yapıda olması gerekmektedir. Ayrıca bu sayede elde edilen son dağılım da analiz yapmaya elverişli bir fonksiyonel yapıya sahip olacaktır. Sözü edilen özellikte bir ön dağılımı belirlemek için "**Doğal Eşlenik Ön Dağılım**" (Natural Conjugate Prior) veya "**Eşlenik Ön Dağılım**" (Conjugate Prior) oluşturulur. Bu iki ön dağılım arasında önemli bir nüans vardır;

Eşlenik Ön Dağılım, benzerlik fonksiyonu ile birleştiğinde ortaya çıkan dağılım (son dağılım), ön dağılım ile aynı dağılım sınıfına düşer.

Doğal Eşlenik Ön Dağılım ile benzerlik fonksiyonu birleştiğinde ortaya çıkan dağılım, Doğal Eşlenik Ön Dağılımla aynı dağılım olduğu gibi, buna ilaveten benzerlik fonksiyonu ile aynı yapıdadır[62]. Doğal Eşlenik Ön Dağılım elde edilirken öncelikle, bilinmeyen parametreler türünden oluşturulmuş bir fonksiyon olan benzerlik fonksiyonunu "yeterli istatistikler" anlamında yazmak gerekmektedir.

Dolayısıyla Doğal Eşlenik Ön Dağılım, benzerlik fonksiyonundan elde edilmektedir. Benzerlik fonksiyonundan parametrelerine göre çarpanlara ayırma yöntemi (Neyman's Factorization Theorem[63]) ile yeterli istatistikler oluşturulur.

3.1.2.1. Varyans Bilinmiyorsa:

Ön dağılımın analizi

Benzerlik fonksiyonu;

$$P(y \setminus X, \beta_0, \beta_1, \sigma) \propto P_1(y, \sigma \setminus X, \beta_0, \beta_1) . P_2(y \setminus \sigma)$$

$$P_1(y, \sigma \setminus X, \beta_0, \beta_1) = \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2 + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)\sum x_i\right]\right\}$$

(3. 20)

$$P_2(y \setminus \sigma) = \frac{1}{\sigma^n} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \textbf{(3. 21)}$$

---

[61] Andrew Gelman v. d., a.g.e., s. 259-261.
[62] H. Raiffa ve R. Schlaifer, a.g.e., s. 48-49.
[63] D. V. Lindley, a.g.e., s. 47, 50.

(3.20)'de dağılım, Normal dağılıma uymaktadır. Dağılımda β_0 *ve* β_1 yeterli istatistiktir. Burada görüldüğü üzere σ yoktur.

(3.21)'de dağılım Ters-Gama dağılımına uymaktadır. Dağılımda σ yeterli istatistiktir. Burada da görüldüğü üzere β_0 *ve* β_1 parametreleri yer almamaktadır.

Özetle β_0 *ve* β_1 ile σ'ya, yani yeterli istatistiklerine göre çarpanlarına ayrılmıştır. Sonuçta elde edilen dağılımlar Normal ve Ters-Gama dağılımları olmuştur.

Yeterli istatistiklerin oluşturduğu bu yapıdan Doğal Eşlenik Ön Dağılıma geçerken, notasyonda da gerekli değişiklikler yapılarak Doğal Eşlenik Ön Dağılım tahmincilerini ifade etmek gerekmektedir. Buna göre yeterli istatistiklerin yerini alacak ön dağılım tahmincilerini göstermek üzere, $\overline{\beta}_0, \overline{\beta}_1, \overline{v}, \overline{s}^2$ ve ön dağılıma ait gözlem sayısını göstermek üzere *t*, gözlemler için $\sum x_j$ $(j = 1,2,......, t$ iken) kullanılmıştır. Zımni olarak Veriye-dayalı ön bilgi olduğu düşünülür. Ayrıca yine zımni olarak ön dağılım ile örneklem dağılımında anakütle varyanslarının birbirine eşit olduğu varsayılmıştır.[64] Katsayı parametreleri için ;

$$P(\beta_0, \beta_1 \setminus y, X) \propto \frac{1}{\sigma^t} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(t\left(\beta_0 - \overline{\beta}_0\right)^2 + \left(\beta_1 - \overline{\beta}_1\right)^2 \sum x_j^{\,2} + 2\left(\beta_0 - \overline{\beta}_0\right)\left(\beta_1 - \overline{\beta}_1\right) \sum x_j \right) \right]$$

(3. 22)

Standart sapma parametresi için;

$$P(\sigma \setminus y) = \frac{2}{\Gamma(\overline{v}/2)} \left(\frac{\overline{v}\overline{s}^2}{2} \right)^{\frac{\overline{v}}{2}} \frac{1}{\sigma^{\overline{v}+1}} \exp\left(-\frac{\overline{v}\overline{s}^2}{2\sigma^2} \right)$$ elde edilir ve oransallık ifadesiyle kısaltılırsa;

$$P(\sigma \setminus y) \propto \frac{1}{\sigma^{\overline{v}+1}} \exp\left(-\frac{\overline{v}\overline{s}^2}{2\sigma^2} \right) \qquad \textbf{(3. 23)}$$

şeklinde olur.

64 Anakütle varyanslarının birbirine eşit olmadığı durum da tartışılmıştır. Ayrıntılı inceleme için; Tiao ve Zellner, "Bayes's theorem and the use of prior knowledge in regression analysis," Biometrica, Vol. 51, 1 ve 2, 1964.

(3.22) ve (3.23) ifadelerinin birleşmesiyle ve oransallık sabitlerinin atılmasıyla birleşik ön o.y.f elde edilir. Bu elde edilen dağılım, Normal-Gama dağılımı olmaktadır;

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma \setminus y, x) \propto \sigma^{-t-\bar{v}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\overline{vs}^2 + t(\beta_0 - \bar{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 \sum x_j^{\ 2}\right.\right.$$
$$\left.\left. + 2(\beta_0 - \bar{\beta}_0)(\beta_1 - \bar{\beta}_1)\sum x_j\right)\right] \quad \textbf{(3. 24)}$$

Bu ifadenin σ'ya göre integrali alınarak, β için "marjinal ön o.y.f." elde edilir. Aynı şekilde β'ya göre integrali alınarak σ için marjinal ön o.y.f. elde edilebilir. Yapılan işlemler neticesinde β parametreleri için marjinal ön yoğunluğun da Çok değişkenli Student t dağıldığı görülür.

Son dağılımın analizi

Doğal Eşlenik Ön Dağılımdan son o.y.f.'nin elde edilmesi aşamasında, Bayes Teoremine göre Doğal Eşlenik Ön Dağılım, Benzerlik fonksiyonu ile çarpılır. Buradan "Birleşik Son o.y.f." elde edilir.

$$P(\beta_0, \beta_1, \sigma \setminus y, X) \propto \sigma^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i)^2\right] \quad \textbf{(3. 25)}$$

$$\propto \sigma^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + n(\beta_0 - \hat{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^{\ 2} + 2(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1)\sum x_i\right]\right\}.$$

$$.\sigma^{-t-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\overline{vs}^2 + t(\beta_0 - \bar{\beta}_0)^2 + (\beta_1 - \bar{\beta}_1)^2 \sum x_j^{\ 2} + 2(\beta_0 - \bar{\beta}_0)(\beta_1 - \bar{\beta}_1)\sum x_j\right]\right\}$$

(3. 26)

$$\propto \sigma^{-n-t-\bar{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\overline{vs}^2 + vs^2\right) + T\left(\beta_0 - \frac{n\hat{\beta}_0 + t\bar{\beta}_0}{T}\right)^2 + \frac{nt(\hat{\beta}_0 - \bar{\beta}_0)^2}{T^2}\right.\right.$$
$$+ \left(\sum x_i^{\ 2} + \sum x_j^{\ 2}\right)\left(\beta_1 - \frac{\left(\sum x_i^{\ 2}\hat{\beta}_1\right) + \left(\sum x_j^{\ 2}\bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^{\ 2} + \sum x_j^{\ 2}}\right)^2 + \frac{\sum x_i^{\ 2}\sum x_j^{\ 2}(\hat{\beta}_1 - \bar{\beta}_1)^2}{\left(\sum x_i^{\ 2} + \sum x_j^{\ 2}\right)^2}$$
$$\left.\left. + 2\left(\sum x_i(\beta_0 - \hat{\beta}_0)(\beta_1 - \hat{\beta}_1) + \sum x_j(\beta_0 - \bar{\beta}_0)(\beta_1 - \bar{\beta}_1)\right)\right]\right\}, \qquad (T = n + t)$$

(3. 27)

(3.27)'de parametreden bağımsız olan ifadeler oransallık terimi ile kaybolur. Daha yalın hale getirmek için, x_i ve x_j yerine onların ortalamalarına göre düzeltilmiş halini alırsak (3.27)'deki çapraz çarpım terimleri de ($2\left(\sum x_i\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)+\sum x_j\left(\beta_0-\overline{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\overline{\beta}_1\right)\right)$) kaybolur. Birleşik son o.y.f. son hali ile aşağıdaki gibidir;

$$P(\beta_0,\beta_1,\sigma \setminus y,X) \propto \sigma^{-n-t-\overline{v}-1}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\overline{v}\overline{s}^2+vs^2\right)+T\left(\beta_0-\frac{n\hat{\beta}_0+t\overline{\beta}_0}{T}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\sum x_i^2+\sum x_j^2\right)\left(\beta_1-\frac{\left(\sum x_i^2\hat{\beta}_1\right)+\left(\sum x_j^2\overline{\beta}_1\right)}{\sum x_i^2+\sum x_j^2}\right)^2\right]\right\} \qquad \textbf{(3. 28)}$$

Birleşik son o.y.f. (3.28), Normal-Gama tipindedir. β_0 ve β_1 için marjinal son o.y.f. σ veri iken, $\overline{\overline{\beta}}_0$, $\overline{\overline{\beta}}_1$ ortalaması ve $\sigma^2\dfrac{1}{\left(\sum x_i^{\,2}+\sum x_j^{\,2}\right)^{-1}}$ varyansı ile Normal dağılır. Ayrıca marjinal son o.y.f. σ için $\overline{\overline{v}}\,\overline{\overline{s}}^2$ parametreli Ters-Gama dağılır.[65]

β_0 *ve* β_1 Parametrelerine ilişkin çıkarsama

σ'ya göre integrali alındığında, katsayı parametreleri β_0 ve β_1 için marjinal son o.y.f.'nin Student t dağıldığı görülür. Ayrıca düzenlemeler sonrası çekirdeğin son durumuna bakıldığında, sabit katsayı için Bayes tahminci $\overline{\overline{\beta}}_0$'ın $\dfrac{n\hat{\beta}_0+t\overline{\beta}_0}{n+t}$ ile (veya $\overline{\overline{\beta}}_0=\overline{y}+\overline{\overline{\beta}}_1\overline{x}$) eğim katsayısı için Bayes tahminci $\overline{\overline{\beta}}_1$'in $\dfrac{\left(\sum x_i^{\,2}\hat{\beta}_1\right)+\left(\sum x_j^{\,2}\overline{\beta}_1\right)}{\sum x_i^{\,2}+\sum x_j^{\,2}}$ ile temsil edildiği görülür. Regresyonun kalıntıların kareleri toplamı yani $\overline{\overline{v}}\,\overline{\overline{s}}^2=\overline{v}\overline{s}^2+vs^2+$ "*ön dağılım ile e.k.k. tahmincisi arasındaki farkı ölçen terimler*" (3.27'de) ile belirlenir.[66]

Kesinlik Parametresi *h* için çıkarsama

Kesinlikler açısından bakıldığında, örneğin eğim katsayısının kesinliği için, ön dağılımın kesinliği $h(\overline{\beta}_1)=\dfrac{\sum x_j^{\,2}}{\sigma^2}$ iken, örneklemin kesinliği $h(\hat{\beta}_1)=\dfrac{\sum x_i^{\,2}}{\sigma^2}$'dir.

[65] Arnold Zellner, a.g.e., s. 61.
[66] J.N. Corcoran, Bayesian Linear Regression-Single Variable, (Çevrimiçi) http://amath.colorado.edu/seminars/2003fall/ProbStatSlides/linreg.pdf, (04.04.2004), s. 70.

Son dağılımın kesinliği, ön kesinlik ile örneklem kesinliğinin toplamıdır; $h(\beta_1)=\dfrac{\sum x_j^{\,2}+\sum x_i^{\,2}}{\sigma^2}$.

Netice olarak elde edilen son o.y.f., parametrelere ilişkin mevcut tüm bilgiyi - ön bilgi ve örneklem bilgisini- temsil eder. Eğer istenirse bu aşamada aralık tahmini veya hipotez testi yapılabilir.

Burada görüldüğü gibi son dağılımın ortalaması, Bayes tahminci $\bar{\bar{\beta}}$, ön dağılımın ortalaması $\bar{\beta}$ ile örneklem tahmincisi $\hat{\beta}$'nın ağırlıklı ortalamasıdır. Ağırlıklar bilindiği gibi kovaryanslarının tersi ile oluşturulur.

3.1.2.2. Varyans Biliniyorsa:

Varyans artık bir parametre olmadığından modelde sadece sabit ve katsayı parametreleri için hesaplama yapılır. Bu sebepten bu alt bölümde fazla ayrıntıya girmeden temel farklar ortaya konacaktır.

Normal dağılım için σ bilindiğinde Benzerlik fonksiyonu şu şekildedir;

$$P(y,X,\sigma\setminus\beta_0,\beta_1)\propto\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[n\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)^2+\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)^2\sum x_i^{\,2}+2\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)\sum x_i\right]\right\}$$

(3. 29)

Bu yapıyla uygun düşecek olan ön dağılım da Normal dağılımdır;

$$P(\beta_0,\beta_1)\propto\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[t\left(\beta_0-\bar{\beta}_0\right)^2+\left(\beta_1-\bar{\beta}_1\right)^2\sum x_j^{\,2}+2\left(\beta_0-\bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\bar{\beta}_1\right)\sum x_j\right]\right\}$$

(3. 30)

Bu iki dağılımın çarpımından elde edilecek son o.y.f. ise;

$$P(\beta_0,\beta_1\setminus y,X)\propto$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[T\left(\beta_0-\frac{n\hat{\beta}_0+t\bar{\beta}_0}{T}\right)^2+\left(\sum x_i^{\,2}+\sum x_j^{\,2}\right)\left(\beta_1-\frac{\left(\sum x_i^{\,2}\hat{\beta}_1\right)+\left(\sum x_j^{\,2}\bar{\beta}_1\right)}{\sum x_i^{\,2}+\sum x_j^{\,2}}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\left(\sum x_i\left(\beta_0-\hat{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\hat{\beta}_1\right)+\sum x_j\left(\beta_0-\bar{\beta}_0\right)\left(\beta_1-\bar{\beta}_1\right)\right)\right]\right\},\quad (T=n+t)\qquad \textbf{(3. 31)}$$

Görüldüğü gibi bu dağılım yine Normal dağılımdır. Elde edilen son dağılımın ortalaması yine Bayes tahminciyi verecektir.

3.2. Çoklu Doğrusal Regresyon Modeli

Çoklu regeresyon modelinin Bayesyen analizinde çok sayıda bağımsız değişkenin, bağımlı değişken üzerindeki etkisi araştırılmaktadır. Bayesyen süreç aynıdır. Gereksiz tekrardan kaçınmak için varyansın bilinmediği varsayılmıştır. Model ele alınırken matrisel notasyon kullanılmıştır.

Model

$$y = X\beta + u \qquad \textbf{(3. 32)}$$

$y =$ bağımlı değişkene ilişkin *n* x 1 mertebesinden gözlemler vektörü,

$X =$ rankı *k* olan, *k* adet bağımsız değişkene ilişkin *n* x *k* mertebesinden gözlemler matrisi,

$\beta =$ *k* x 1 mertebesinden regresyonun katsayılar vektörü,

$u =$ *n* x 1 mertebesinden hata terimleri vektörü.

Basit doğrusal regresyonda belirtilen varsayımlar, doğal olarak çoklu regresyon için de geçerlidir.

Regresyonun sabit katsayısı varsa *X*'in ilk sütunu 1'lerden oluşacaktır. (*i'* =(1, 1, 1, ..., 1)). *X*'in kalan elemanları rastlantı değişkeni olabilir de olmayabilir de. Rastlantı değişkeni ise *u*'dan bağımsız, β ve σ'yı içermeyen, bir dağılımla dağıldığı varsayılır.

Bu varsayımlar doğrultusunda, benzerlik fonksiyonu X, β ve σ veri iken;

$$P(y \setminus X, \beta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right]$$

$$s^2 = \frac{(y - X\beta)'(y - X\beta)}{v}, \qquad v = n - k, \qquad \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'y$$

Yukarıda verilenlere göre;

$$(y - X\beta)'(y - X\beta) = \left[y - X\hat{\beta} - X(\beta - \hat{\beta})\right]'\left[y - X\hat{\beta} - X(\beta - \hat{\beta})\right]$$

$$= \left[(y - X\hat{\beta})' - X'(\beta - \hat{\beta})'\right]\left[(y - X\hat{\beta}) - X(\beta - \hat{\beta})\right]$$

$$= (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}) + (\beta - \hat{\beta})' X'X(\beta - \hat{\beta}) + (y - X\hat{\beta})' X(\beta - \hat{\beta}) - (\beta - \hat{\beta})' X'(y - X\hat{\beta})$$

$\left(y - X\hat{\beta}\right) = 0$ olduğundan eşitliğin son iki ifadesi "0" dır.

$= vs^2 + \left(\beta - \hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta - \hat{\beta}\right)$, elde edilen bu sonuca göre benzerlik fonksiyonunun son hali;

$$\propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \left(\beta - \hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta - \hat{\beta}\right)\right]\right\}$$ şeklinde olur.

3.2.1. Bilgi Vermeyen Ön Dağılım ile Analiz:

β ve $\log\sigma$'nın elemanları bağımsız ve dikdörtgen dağılıyorsa, ön dağılımı "belirsiz ön dağılım" olarak ele alınmış olur.

$$P(\beta, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \qquad -\infty \langle \beta_i \langle \infty \ , \quad 0 \langle \sigma \langle \infty\ , \qquad (i = 1, 2, ..., k \text{ için})$$

Benzerlik fonksiyonu ile ön dağılım birleşirse;

$$P(\beta, \sigma \setminus y, X) \propto \frac{1}{\sigma^{n+1}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \left(\beta - \hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta - \hat{\beta}\right)\right]\right\} \qquad \textbf{(3. 33)}$$

Bu ifadeden (3.33) görülebilir ki, σ veri iken β için koşullu son o.y.f., β ortalamalı ve $\sigma^2 \left(X'X\right)^{-1}$ varyanslı olmak üzere, (*k* boyutlu) Çok değişkenli Normal dağılır. σ nadiren bilindiği için koşullu kovaryans matrisi hesaplanamaz. Bununla başa çıkmanın için, σ'ya göre birleşik son dağılımın integrali alınır. Böylelikle β'nın elemanları için marjinal son o.y.f.'ye ulaşılır.

$$P(\beta \setminus y) = \int_0^\infty P(\beta, \sigma \setminus y) d\sigma = \int_0^\infty P(\beta \setminus \sigma, y) P(\sigma \setminus y) d\sigma$$

$$\propto \left[1 + \frac{1}{v}\left(\beta - \hat{\beta}\right)' \frac{X'X}{s^2}\left(\beta - \hat{\beta}\right)\right]^{-\frac{(k+v)}{2}} \qquad \textbf{(3. 34)}$$

(3.34)'ten dağılımın Çok değişkenli Student t dağılımı şeklinde olduğu görülmektedir. Tek tek parametrelere ilişkin çıkarsama yapmak isteniyorsa, $P(\beta \setminus y)$ ifadesinin, istenilen parametre dışındaki parametrelere göre integrali alınır. Buna göre β_0 için $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$'ya göre integrali alınacaktır.

Buna alternatif olarak Çok değişkenli Student t dağılımının özellikleri de kullanılabilir. Her iki durumda da elde edilecek sonuç şudur;

$$P(\beta_1 \setminus y) \propto \left[1 + \frac{1}{v}\left(\frac{\beta_1 - \hat{\beta}_1}{s\sqrt{a_{11}}}\right)^2\right]^{-\frac{(1+v)}{2}}$$

$\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}$ vektörünün ilk elemanı; a_{11}, $(X'X)^{-1}$ matrisinin ilk diyagonal elemanıdır.

Eğer ilgilenilen parametre σ ise, bu sefer β gürültü parametresi olur. β'ya göre integrali alınır;

$$P(\sigma \setminus y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(\beta, \sigma \setminus y)\, d\beta \propto \frac{1}{\sigma^{v+1}} \exp\left(-\frac{vs^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \textbf{(3. 35)}$$

Ön bilgi analize dahil edilmediğinde son dağılımın ortalaması e.k.k. tahmincisi ile aynıdır.

3.2.2. Bilgi Veren Ön Dağılım ile Analiz:

Regresyonun belirtilen varsayımları sonucu ve Bayesyen süreç gereği Doğal Eşlenik Ön Dağılım, Normal-Gama formunda bir dağılımdır. Matrisel notasyon ile Doğal Eşlenik Ön Dağılımın yapısı (3.36)'daki gibidir;

$$P(\beta \setminus \sigma) \propto \sigma^{-k} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\beta - \overline{\beta})' Q(\beta - \overline{\beta})\right] \qquad \textbf{(3. 36)}$$

$$P(\sigma \setminus y) \propto \sigma^{-\overline{v}-1} \exp\left[-\frac{\overline{v}\overline{s}^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (\overline{v} = t - k) \qquad \textbf{(3. 37)}$$

(3.36) ve (3.37) ifadeleri birleştirilerek (doğal eşlenik ön dağılım olan) birleşik ön o.y.f. elde edilir;

$$P(\beta \setminus \sigma) \propto \sigma^{-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\overline{v}\overline{s}^2 + (\beta - \overline{\beta})' Q(\beta - \overline{\beta})\right]\right\}$$

$\overline{\beta}$, $\overline{v}$, $\overline{s}^2$ ve Q, ön dağılım parametrelerinin tahmincileridir. Başka bir bakış açısıyla ön bilginin analize yansıtıldığı araçlardır. Burada Q pozitif tanımlı simetrik bir matristir. Veriye-dayalı olması halinde bir önceki veri setinden hesaplanmıştır. Veriye-dayalı değilse değer olarak dışarıdan belirlenir. Bunun kaynağı da daha önce belirtildiği gibi teoriye, uzman bir görüşe veya paralel bir çalışmanın sonucuna bağlıdır.

σ veri iken β vektörü, k değişkenli Normal dağılır. Ortalaması $\overline{\beta}$ ve kovaryans matrisi $\sigma^2 Q^{-1}$ 'dir. β veri iken σ 'nın dağılımı Ters-Gama 2 dağılımıdır.

Benzerlik fonksiyonu;

$$P(y \setminus \beta,\sigma) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \left(\beta-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta-\hat{\beta}\right)\right]\right\} \quad (v = n-k) \qquad \textbf{(3. 38)}$$

Son dağılım;

$$P(\beta,\sigma \setminus y) \propto \sigma^{-n-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \overline{vs}^2 + \underbrace{\left(\beta-\overline{\beta}\right)' Q\left(\beta-\overline{\beta}\right) + \left(\beta-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta-\hat{\beta}\right)}_{\boldsymbol{W}}\right]\right\}$$

(3. 39)

Son dağılımı tüm terimleriyle istenilen biçime getirmek üzere birkaç işlem yapılır[67];

(3.39)'da Ön dağılım tahmincileri ve e.k.k tahmincileri ile oluşturulan kareli yapılar (yani ***W*** ifadesi) ayrı ayrı yazılıp, parantezin içi çözümlenir;

$$\left(\beta-\overline{\beta}\right)' Q\left(\beta-\overline{\beta}\right) = \beta' Q\beta - 2\overline{\beta}Q\beta + \overline{\beta}Q\overline{\beta}$$

$$\left(\beta-\hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta-\hat{\beta}\right) = \beta' X'X\beta - 2\hat{\beta}X'X\beta + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} \qquad \textbf{(3. 40)}$$

İşlem kolaylığı için her iki satırda da en sonda olan ve parametreyi (β'yı) içermeyen ifadeler şimdilik göz ardı edilip, daha sonra yazılır. (3.40)'taki iki ifadenin toplamı aşağıdaki gibidir;

$$W = \beta' X'X\beta - 2\hat{\beta}X'X\beta + \beta' Q\beta - 2\overline{\beta}Q\beta \qquad \textbf{(3. 41)}$$

$$W = \beta'(Q + X'X)\beta - 2\left(\overline{\beta}Q + \hat{\beta}X'X\right)\beta \qquad \textbf{(3. 42)}$$

$$M = Q + X'X \qquad \textbf{(3. 43)}$$

$$m = Q\overline{\beta} + X'X\hat{\beta} \qquad \textbf{(3. 44)}$$

[67] David Birkes, Yadolah Dodge, **Alternative Methods of Regression**, New York, John Wiley & Sons, 1993, s. 167.

(3.43) ve (3.44)'teki eşitlikten faydalanarak, (3.42) kısaca şöyle ifade edilir;

$$W = \beta' M\beta - 2m'\beta \quad \textbf{(3. 45)}$$

(3.45)'teki ifade cebirsel olarak yazılınca ($b^2 - 2mb$)'ye benzer bir yapıda olduğu görülür. "Kareyi tamamlama" işlemi ile $b^2 - 2mb = (b-m)^2 - m^2$ eşitliğine ulaşılır. Aynı mantık ile (3.45)'teki ifade şöyle olur;

$$W = \beta' M\beta - 2m'\beta = \left(\beta - M^{-1}m\right)' M\left(\beta - M^{-1}m\right) - m'M^{-1}m \quad \textbf{(3. 46)}$$

$$M^{-1}m = \overline{\overline{\beta}} \qquad \text{ve} \qquad M^{-1} = \left(Q + X'X\right)^{-1} \quad \textbf{(3. 47)}$$

Son dağılımın ortalaması, $\overline{\overline{\beta}} = \left(Q + X'X\right)^{-1}\left(Q\overline{\beta} + X'X\hat{\beta}\right)$ eşitliğini sağlar. (3.47)'ye göre (3.46) değiştirilir;

$$W = \beta' M\beta - 2m'\beta = \left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q + X'X\right)\left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right) - m'M^{-1}m \quad \textbf{(3. 48)}$$

(3.48)'de elde edilen sonuç, dağılımda (3.39'da) tekrar yerine koyulur;

$$P(\beta, \sigma \setminus y) \propto \sigma^{-n-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \overline{v}\overline{s}^2 + \left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q + X'X\right)\left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right) - m'M^{-1}m\right]\right\}$$

(3. 49)

Parametreyi içermediği için göz ardı edilen (3.40)'taki ifadeler, (3.49)'a ilave edilir;

$$P(\beta, \sigma \setminus y) \propto \sigma^{-n-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \overline{v}\overline{s}^2 + \left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q + X'X\right)\left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{\beta}Q\overline{\beta} + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} - m'M^{-1}m\right]\right\} \quad \textbf{(3. 50)}$$

(3.50)'de $m'M^{-1}m$ yerine, (3.43) ve (3.44)'teki eşitliklerde belirlenen karşılıkları yazılır;

$$P(\beta, \sigma \setminus y) \propto \sigma^{-n-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \overline{v}\overline{s}^2 + \left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q + X'X\right)\left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \overline{\beta}Q\overline{\beta} + \hat{\beta}X'X\hat{\beta} - \left(\overline{\beta}Q + \hat{\beta}X'X\right)'\left(Q + X'X\right)^{-1}\left(\overline{\beta}Q + \hat{\beta}X'X\right)\right]\right\} \quad \textbf{(3. 51)}$$

(3.51) birkaç işlem ile ilerletilir ve sonuçta şu elde edilir;

$$P(\beta, \sigma \setminus y) \propto \sigma^{-n-k-\overline{v}-1} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[vs^2 + \overline{v}\overline{s}^2 + \left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q + X'X\right)\left(\beta - \overline{\overline{\beta}}\right)\right.\right.$$

$$+\frac{QX'X\left(\overline{\beta}-\hat{\beta}\right)'\left(\overline{\beta}-\hat{\beta}\right)}{\left(Q+X'X\right)}\Bigg]\Bigg\} \qquad \textbf{(3. 52)}$$

(3.52)'den son dağılımın varyansının parametrelerine ilişkin şöyle bir eşitlik elde edilir;

$$\overline{\overline{v}}\,\overline{\overline{s}}^2=\overline{v}\overline{s}^2+vs^2+\frac{QX'X\left(\overline{\beta}-\hat{\beta}\right)'\left(\overline{\beta}-\hat{\beta}\right)}{Q+X'X} \qquad \overline{\overline{v}}=n+\overline{v} \qquad \textbf{(3. 53)}$$

(3.53)'te kalıntıların kareleri toplamı SSE olarak adlandırılırsa, şu eşitlik elde edilmiş olunur;

son SSE = ön SSE + örneklem SSE

+ "ön tahminci ile e.k.k. tahmincisi arasındaki farkı ortaya koyan terim"

Zellner kalıntılarla ilgili ilave bir yorum getirmiştir. Buna göre regresyonun gerçekleşen hata terimleri de parametre olarak düşünülebilir ve Bayesyen analizin uzantısı olarak, parametrede olduğu gibi gerçekleşen hata terimlerinin de son dağılımı türetilebilir[68].

(3.52)'deki dağılım yeterli istatistiklerine göre yazılırsa;

$$\propto \sigma^{-k}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\beta-\overline{\overline{\beta}}\right)'\left(Q+X'X\right)\left(\beta-\overline{\overline{\beta}}\right)\right]\sigma^{-\overline{\overline{v}}-1}\exp\left(-\frac{\overline{\overline{v}}\,\overline{\overline{s}}^2}{2\sigma^2}\right)$$

elde edilir.

Buna göre birleşik son o.y.f. $\overline{\overline{\beta}}$ ortalamalı ve $\sigma^2\left(Q+X'X\right)^{-1}$ varyanslı Çok değişkenli Normaldir. σ için marjinal son o.y.f. $\overline{\overline{v}}$, $\overline{\overline{s}}^2$ parametreleri ile Ters-Gama dağılır. β için marjinal son o.y.f. Çok değişkenli Student t'dir ve şöyle ifade edilir;

$$P\left(\beta \setminus y\right)\propto\left[1+\frac{1}{\overline{\overline{v}}}\left(\beta-\overline{\overline{\beta}}\right)'\frac{\left(Q+X'X\right)}{\overline{\overline{s}}^2}\left(\beta-\overline{\overline{\beta}}\right)\right]^{\frac{-\overline{\overline{v}}-k}{2}}$$

β 'nın tek bir elemanı için, örneğin β_1 için, Tek değişkenli Student t o.y.f. ile;

$$P\left(\beta_1 \setminus y\right)\propto\left[1+\frac{1}{\overline{\overline{v}}}\frac{\left(\beta_1-\overline{\overline{\beta}}_1\right)'\left(\beta_1-\overline{\overline{\beta}}_1\right)}{\overline{\overline{s}}^2 a_{11}}\right]^{\frac{-\overline{\overline{v}}-1}{2}}$$

[68] Arnold Zellner, "Bayesian Analysis of Regression Error Terms," Journal of the American Statistical Association, Vol. 70, No. 349, Mar. 1975, s. 138-139.

a_{11}, $\left(Q + X'X\right)^{-1}$ matrisinde ilk diyagonal elemandır.[69] Bu ifade diğer parametreler düşünülerek genelleştirilirse, bu eleman, ilgilenilen parametrenin indisi ile matrisin aynı sayılı diyagonal elemanıdır.

3.3. Bayesyen Regresyon Modelinin Geometrik Yorumu

Bayesyen yaklaşımda regresyon parametresi bir rastlantı değişkeni olarak düşünülür. Bu noktadan hareketle, parametre bir rastlantı değişkeni ise olasılık dağılımı vardır ve olasılık dağılımı, güven bölgeleri (HPD region) ile ifade edilebilir. Bunlar, farklı güven düzeylerinde parametrenin olasılık dağılımına dayalı olarak yapılan kontur (kenar çizgisi-contour) çizimleridir. Bu çizimler bir bakıma regresyon modelinin geometrik yorumunu ortaya koyar. Klasik anlayıştaki gibi parametrenin bilinmeyen bir sabit olduğu düşünülseydi, parametrenin değil, tahmincinin temsili mümkün olacaktı. Klasik yaklaşım sözü edilen birleşik güven bölgelerini (joint confidence region) tahminci için çizmektedir. Daha genel bir ifadeyle, Klasik yaklaşımda tahminci gözlem matrisinin gerdiği uzayda temsil edilebileceği gibi, dağılımı göz önüne alınarak güven aralığı veya güven bölgesi ile de temsil edilebilir. Dolayısıyla Bayesyen yaklaşım, regresyonun geometrik ifadesi itibariyle Klasikten bu noktada da ayrılmaktadır.

Bayesyen kapsamda güven bölgesi (en yüksek son yoğunluk bölgesi) tanımı ve özellikleri için şunlar ifade edilebilir;

A bir model ve $\beta^* \in R^k$ olmak üzere, β^* noktasının olasılığı parametrenin olasılığından daha büyüktür; $P\left(\beta^* \setminus A\right) \rangle\, P\left(\beta \;\setminus A\right)$. Ayrıca bu nokta veri iken Benzerlik fonksiyonunun olasılığı, parametre veri iken gerçekleşen olasılıktan daha büyüktür;

$$P\left(y_0 \setminus X, \beta^*, h, A\right) \rangle\, P\left(y_0 \setminus X, \beta \;, h, A\right)$$

Bilgi veren ön dağılım seçilmesi durumunda, Bayesyen yaklaşımın karakteristiği daha iyi yansıtıldığından, geometrik yorum burada bu duruma göre geliştirilmiştir. Aşamalı olarak ele alınırsa;

[69] George G. Judge v. d., a.g.e., s. 109.

Benzerlik fonksiyonu $P(\beta \setminus y)$, çekirdeğindeki pozitif sonlu kareli yapının (quadratic form) monoton azalan bir fonksiyonudur. Bu kareli yapı ve kısıtı ;

$$f(\beta) = \left(\beta - \hat{\beta}\right)' X'X\left(\beta - \hat{\beta}\right)$$

$$f(\beta) = c_1 \qquad c_1 \rangle 0 \qquad \textbf{(3. 54)}$$

Ön dağılım da, çekirdeğindeki pozitif sonlu kareli yapının monoton azalan bir fonksiyonudur. Bu kareli yapı ve kısıtı;

$$f(\beta) = \left(\beta - \overline{\beta}\right)' Q\left(\beta - \overline{\beta}\right)$$

$$f(\beta) = c_2 \qquad c_2 \rangle 0 \qquad \textbf{(3. 55)}$$

(3.54) ve (3.55)'teki ifadeler β'nın k boyutlu uzayındaki dağılımın ($P(\beta \setminus y)$) bir konturunu tanımlar. Değişken sayısı $k = 2$ ise bu kenar çizgisi elips olur, $k = 3$ ise elipsoit, $k \rangle 3$ ise hiperelipsoit olur.

Varyansın bilindiği varsayımı altında Çok değişkenli Normal Dağılımın özelliklerine göre bu kareli yapılar $\frac{f(\beta)}{\sigma^2}$, $\chi^2(\alpha, k)$ dağılır. (Varyansın bilinmediği durumlarda $\frac{f(\beta)}{ks^2}$ olur ve bu yapı da $F(\alpha, k, v)$ dağılır.)[70]

Bu bağlamda c_1 ve c_2 kısıtlarının $\chi^2(\alpha, k)$ tablo değerlerine eşit olduğu düşünülebilir. Örneğin $c_2 = \chi^2(0{,}05;\ 2)$ ise elips içindeki β'nın ön olasılığı 0,95'tir.

Özetle sözü edilen yapılar -(3.54) ve (3.55)- için ayrı ayrı güven bölgesini elde etmek üzere; varyans biliniyorsa $f(\beta) \le \chi^2(\alpha, k)$, bilinmiyorsa $\frac{f(\beta)}{ks^2} \le F(\alpha, k, v)$ eşitsizliklerinden yararlanarak konturlar çizilir. Örneğin $k = 2$ için, elipsin merkezinde, hesaplanan β parametre çiftinin değerleri yer alacaktır.

Bu şekilde elde edilen ön dağılım ve benzerlik fonksiyonunun kontur çizimleri aynı eksen sisteminde gösterilirse, son dağılımın kontur çizimlerinin bu iki dağılımın kesiştiği (teğet olduğu) bölgede konumlanması beklenir. Zira daha önce de belirtildiği gibi, bilgi veren ön dağılım ile oluşturulmuş son dağılımın ortalaması $\overline{\overline{\beta}}$, ön dağılım ve örneklem ortalamasının ağırlıklı ortalamasıdır.

[70] Box, G.E.P., Tiao, G.C., a.g.e., s. 116-117.

Son dağılımın kontur çizimi için kısıtlanmış optimizasyon hesabı yapılır. Bu doğrultuda, belirtilen noktalar kümesi, amaç fonksiyonu için birinci derece koşulunu (birinci dereceden diferansiyelinin sıfıra eşit olma koşulu altında, çözümü sağlayan noktalardır) çözen noktalardır. Birinci derece koşulu altında $\left[\dfrac{\partial f(\beta)}{\partial \sigma^{-2}}=0, \quad \dfrac{\partial f(\beta)}{\partial Q}=0 \quad ve \quad \dfrac{\partial f(\beta)}{\partial \lambda}=0\right]$ amaç fonksiyonu şöyledir;

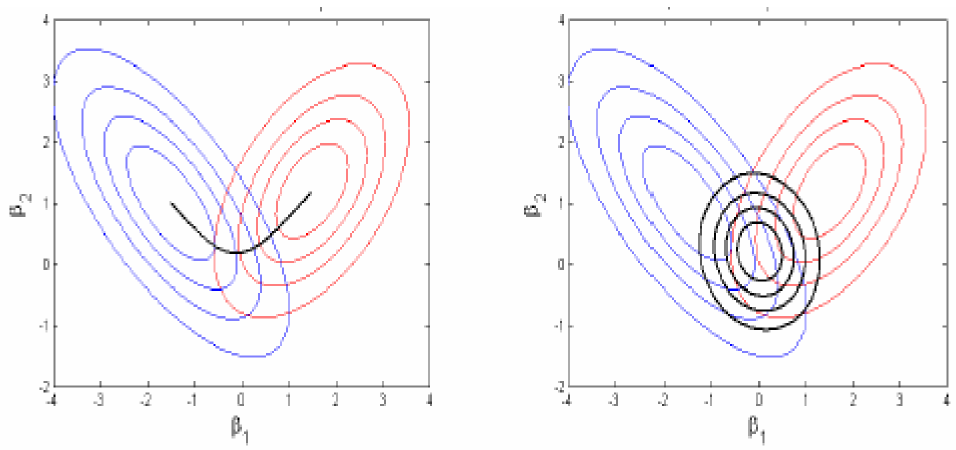
$$\left(\beta-\hat{\beta}\right)' \sigma^{-2} X'X\left(\beta-\hat{\beta}\right)+\lambda\left(\beta-\overline{\beta}\right)' Q\left(\beta-\overline{\beta}\right) \qquad \textbf{(3. 56)}$$

Amaç fonksiyonu (3.56) irdelenirse, ön dağılımın varyansında gerçekleşecek bir birim değişiklik, λ kadar etki edecektir. Burada $\lambda=1$ alınmasıyla, ön dağılım üzerinde tıpkı bir etkisiz eleman gibi düşünülerek, örneklem varyansının olduğu gibi ön dağılım varyansının da son dağılıma yansıması sağlanmak istenmiştir. Bu yolla elde edilecek parametre tahmincisi, son dağılımın ortalaması $\overline{\overline{\beta}}$ olur;

$$\beta\left(1;\sigma^{-2}\right)=\overline{\overline{\beta}}$$

Tüm noktalar kümesi λ tarafından kanıtlanmıştır. Bu eğri şöyle ifade edilebilir;

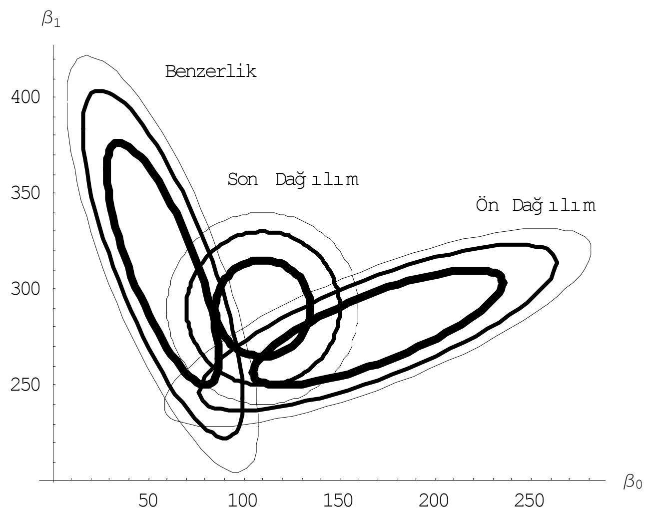
$$\beta\left(\lambda;\sigma^{-2}\right)=\left(\sigma^{-2}X'X+\lambda Q\right)^{-1}\left(\sigma^{-2}X'X\hat{\beta}+\lambda Q\overline{\beta}\right)$$ [71]



Şekil 3. 3 Normal Doğrusal Regresyon, Geometrik Yorumu [72]

[71] John Geweke, Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics, July 2003, (Çevrimiçi) http://www2.cirano.qc.ca/~bacc/outgoing2003/july2003.pdf (01.03.2004), s. 36-37.
[72] John Geweke, a.g.e., s. 37.

Şekil 3.1'de örnek olarak, her iki şekilde de pozitif eğimli elipsler ön dağılımı; negatif eğimli elipsler örneklem dağılımını temsil etmektedir. Soldaki şekilde parametrelerin son dağılımı eğri ile temsil edilmiştir. Diğer iki dağılımın birbirine teğet olduğu bölgede konumlanmıştır. Benzer biçimde, sağdaki şekilde son dağılım güven bölgelerini oluşturan konturlar ile temsil edilmiştir. Örneklem kesinliği $\left(h = \sigma^{-2}\right)$ 0'a yaklaştıkça limitte paremetrenin olasılığı, $\overline{\beta}$'ya eşit olacaktır. Öte yandan kesinlik sonsuza giderken limitte, parametrenin olasılığı, $\hat{\beta}$'ya eşit olacaktır.



Şekil 3. 4 Bayesyen Regresyonun Geometrik Temsili

Şekil 3.2'de başka bir veri kümesi ile çizim yapılmıştır. Burada ön dağılımın eğimi bir önceki şekile göre biraz daha farklı çıkmıştır. Bilindiği gibi elipslerin majör ve minör eksenleri öz vektörleridir. Majör ve minör eksenlerinin yönü, $X'X$ tarafından veya ilgili değişkenler arası örneklem korelasyonu tarafından belirlenir. Eğer parametreler arası korelasyon sıfır ise elipslerin ekseni parametrelerin eksenine paralel olur.[73] Yukarıdaki örnek şekilde (Şekil.3.2), regresyonun parametreleri arası ilişki ön dağılımda pozitif iken, örneklem dağılımında negatiftir. Ayrıca ön dağılımda parametreler arası ilişki Şekil 3.1'dekine göre daha zayıftır.

[73] Sanford Weisberg, **Applied Linear Regression**, 2.b., Minnesota, John Wiley & Sons, 1985, s. 97.

3.4. Bayesyen Regresyonun Genel Bir Değerlendirmesi

Bilgi vermeyen bir ön dağılım kullanıldığında elde edilen sonuç Klasik regresyon sonuçları ile aynı olmaktadır. Başka bir deyişle regresyonun parametrelerinin nokta tahmin ve güven aralıkları tahmin sonuçları aynı çıkmaktadır.

Öte yandan, regresyon analizinde Bayes yaklaşımı ön bilgi kullanmaya da olanak vermektedir. Bayes teoreminin koşullu yapısı sayesinde ön bilgi ile örneklemden sağlanan bilgi birleştirilebilmektedir. Bayesyen yaklaşımın en temel argümanı Klasik yaklaşımla analiz yapan pek çok araştırmacının ad hoc yol ile ön bilgiyi kullanmasıdır. Ancak Bayesyen yaklaşım belirlenmiş ve tutarlı ilkeler çerçevesinde ön bilgiyi kullanmaktadır.

Bayesyen regresyon belirtilen varsayımları doğrultusunda Klasik regresyonda olduğu gibi, parametreleri test edilebilmektedir.

Bayesyen regresyon tahmincisi yanlıdır. Bu yan ön bilgiden gelir. Dolayısıyla bu yanlılık tahminci için olumsuz bir kriter olarak düşünülmemektedir. Ön bilginin analize dahil edildiği çalışmalarda daha dar güven aralıklarına ulaşılabilmektedir.

Bayesyen regresyon küçük örneklemde de iyi çalışmaktadır. Başka bir deyişle örneklem sayısı az olsa bile Bayesyen analiz yapılabilmektedir.

Ayrıca Klasik regresyonda, örneğin çoklu doğrusal bağlılık nedeniyle katsayılar belirlenememekte, tekrar parametreleştirmeye gidilmekte ve açıklanmak istenen model, ilişki dönüşüme uğramaktadır. Bayesyen regresyonda ön bilginin dahil edilmesiyle bu sorun aşılabilmektedir.

BÖLÜM -4- UYGULAMA

Bu bölümde çoklu doğrusal regresyonun Bayesyen uygulamasını yapmak üzere, iktisadi bir ilişkiyi açıklayan ticari büyüme modeli oluşturulmuştur.

4.1. Modelin İktisadi Dayanağı

Dünyadaki eğilime bakıldığında, ülkeler başta coğrafi konumlarına göre ticaret hacmini arttırıcı önlem olarak bütünleşme hareketlerine gitmektedir. Bu bölgesel bütünleşme hareketlerinin birlik içi ticareti daha hızlı arttırdığı bütün örnekler için olmasa da genel olarak doğrudur. Bölgesel bütünleşme ile gümrük birliklerinin dinamik etkileri görülmekte, içeride rekabet artmakta ve yatırımlar uyarılmaktadır.

Ancak yine de sonucun olumlu olması, bütünleşme anlaşmasının nasıl bir içerik oluşturduğu, anlaşmaya katılmanın serbest olup olmadığı gibi faktörlere de bağlıdır. Yani ülkelerin gerçekte bu anlaşmalardan nasıl etkilendiği tartışılmalıdır.

Türkiye de pek çok bütünleşme hareketine gitmektedir. Bunlardan biri 1995 yılında Avrupa Birliği ile yapılan Gümrük Birliği antlaşmasıdır. Türkiye'nin bu antlaşmadan nasıl etkilendiğini yorumlamak için rakamlara bakarak incelemek gereklidir. Dış ticarete ilişkin veriler değerlendirildiğinde, 2002 yılı itibari ile Türkiye-AB arasındaki ticaret hacminin 1995 yılındaki 27,9 milyar dolar seviyesinden 41,6 milyar seviyesine ulaştığı görülmektedir. Gümrük Birliği sonrası dönemde AB'den yapılan ithalat iç ve dış makro ekonomik gelişmelere paralel olarak dalgalı bir seyir izlese de, artış oranı AB'ye yapılan ihracattaki artış oranından daha fazla olmuştur. 1995- 2000 yılları arasında AB'den yapılan ithalatın % 57,8 oranında artmasına karşılık AB'ye yapılan ihracat % 30,9 oranında artabilmiştir. 2001 yılında ise yaşanan ekonomik krizin etkisiyle ticaret dengesinde Türkiye lehine bir gelişme kaydedilmiştir. 2001 yılında AB'ye yapılan ihracatın %11,1 oranında artmasına karşılık, AB'den yapılan ithalat %31,3 oranında gerilemiştir. 2002 yılında yaşanan gelişmelere bakıldığında ise, AB'nden yapılan ithalatın tekrar artışa geçtiği, bir önceki yıla göre % 27,4 oranında artış göstererek 18,3 milyar dolar seviyesinden 23,2 milyar dolar seviyesine ulaştığı gözlenmektedir. Buna mukabil söz konusu dönemde AB'ye yapılan ihracat ise % 13,7 oranında artış göstererek 16,1 milyar dolarlık seviyesinden 18.3 milyar dolarlık seviyeye ulaşmıştır. Ekonomide yaşanan olumlu gelişmeler, 2003 yılında da devam etmiştir. 2003 yılının ilk yarısına ilişkin ticaret verileri değerlendirildiğinde, AB'ye yapılan ihracatın bir önceki yılın aynı dönemine göre %36,5, ithalatın ise % 35,8 oranında artış gösterdiği gözlenmektedir.[74] Tüm bunlar özünde, antlaşmanın da ötesinde, AB ile yapılan ticaretin Türkiye'nin istikrarı ile doğrudan ilgili olduğunu göstermiştir.

Bu tür bütünleşme hareketlerinin ülkenin ticaretine etkisi, daha da detayına inilirse, birlik ile ticareti arttırmada ülkenin uyguladığı politikaların etkisi, araştırmaya değer bir konu olarak ortaya çıkmaktadır.

4.2. Model Tanımlama

Genellikle yapılan çalışmalarda, ticaret rakamlarındaki değişmenin büyümeye etkisi araştırılmaktadır. Bu anlamda yapılan deneysel modellemeler bu hipotezi - ticaretin ülkenin büyümesine etkisi olduğu hipotezini - destekleyecek kanıtlar sunmaktadır. Ancak başka bir bakış açısıyla modellemeye gidilirse, ticaretteki büyümenin, ülkenin genel olarak iyileşmesi ile de açıklanabileceği ortaya konulabilir. Ülkenin iyileşme durumunun hangi değişkenlerle açıklanabileceği de yapılan çalışmalarla detaylandırılmıştır. Tran Van Hoa çalışmasında Helpman Krugman'ın önerdiği model hipotezini, farklı modelleme teknikleriyle açıklamıştır.[75] Özellikle bu teze konu olan uygulamada Tran Van Hoa'nın kurduğu bir model örnek alınmıştır. Bu modelde Japonya'nın ticaretindeki büyümeyi, ticaret yaptığı bir birlik olan ASEAN'ın[*] Gayri safi Yurtiçi Hasılası ve Japonya'nın Gayri safi Yurtiçi

[74] Dış Ticaret Müsteşarlığı, **Dış Ticaret Dergisi**, "Türkiye-AB İlişkilerindeki Gelişmeler ve AB İle Dış Ticaretimiz," Ekim 2003, Özel Sayı.

[75] Tran Van Hoa, Growth of Asian Regional Trade and Income Convergence: Evidence from ASEAN+3 Based on Extended Helpman-Krugman Hypothesis and Flexible Modelling Approach, (Çevrimiçi), http://www.uow.edu.au/commerce/econ/wplist.html, (04.02.2005), s. 1-13.

[*] ASEAN'ın açılımı "Güneydoğu Asya Milletleri Örgütü"dür. Üye ülkeleri Mayıs 1999 itibariyle Endonezya, Malezya, Filipinler, Singapur, Tayland, Vietnam, Laos, Kamboçya Myanmar ve Brunnei Darussalam olan, ilk olarak 1967 kurulmuş, ana hatlarıyla amacı üye ülkelerin ekonomik büyümesini hızlandırmak, sosyal ve kültürel gelişmelerini sağlamak olan, bölgede barışı da hedefleyen bir birliktir.

Hasılası ile açıklamaktadır. Ayrıca, birlik ile Japonya'nın "kişi başına düşen gelir"leri arasındaki farkı ifade eden gelir yakınsaması ile de açıklamaktadır. Bilhassa bu önemli bir etken olarak öne sürülmektedir. Bunun dışında birliğin nüfusu, Japonya'nın M2 seviyesi, enflasyon oranı, döviz kuru, işsizlik oranı etken görülmektedir.[76] Van Hoa, çalışmasının bir parçası olan bu modelleme için çok farklı analiz yöntemleri uygulamıştır.

Sadece model açısından, bu çalışma ile paralellik oluşturulmaya çalışılarak, Japonya ile ASEAN arasındaki ilişki, Türkiye ve AB için kurgulanmış ve model buna göre oluşturulmuştur. Van Hoa'nın modeline ilave olarak, birlik ile ticaret yapmanın etkisini yansıtacak olan, Gümrük Birliğinin kabul edildiği yılı ifade eder nitelikteki gölge değişken, modele dahil edilmiştir.

Model

$$trade.tr = \beta_1 + \beta_2.ab.gdp + \beta_3.tr.gdp + \beta_4.gap.ab.tr + \beta_5.ab.pop + \beta_6 m2.r$$

$$+ \beta_7.i.r + \beta_8.e.r + \beta_9.u.r + \beta_{10}.dum.95 + u_i \qquad \textbf{(4. 1)}$$

Bu deneysel uygulamanın değişkenlerinin seçiminde belirleyici olan ve temeli iktisada dayanan sezgiyi açıklamak için, bir nevi nedensellik incelemesi yapılmaya çalışılmıştır; Buna göre, öncelikle birliğin ve ülkenin GSYİH' sının artması veya azalması, doğaldır ki ticarete etki edecektir. Sözgelimi bu büyüklükte artış olması halinde, tüketici davranışını açıklamaya çalışan düşüncenin uzantısı olarak, refah seviyesindeki artışın bireyin ithal malını tercihine sebep olması ve dolayısıyla ticareti artıracağı söylenebilir. Orta ve uzun vadede anlamlı olan bu düşünce, yapılabilecek açıklamalardan sadece biridir. Büyüme seviyesini oluşturan bileşenler arasında ticaretin de olduğu düşünülürse, sarmal etkileşim içinde oldukları da söylenebilir.

Birlik ve ülkenin gelir yakınsaması (yani kişi başına düşen gelirleri arasındaki farkın azalması), ikili ticarette taraf olanlar açısından karşılıklı ticaretin artmasına veya azalmasına yol açabilir. Bu konuda yapılan deneysel çalışmalar, yeterli

[76] Tan Van Hoa, a.g.e., s. 5.

derecede güçlü kanıt sunmamaktadır.[77] Ancak Tran Van Hoa'nın modelinde azalmasına yol açtığı sonucuna varılmıştır. Bu da aslında, "ülke ile birliğin aralarında gelir farkı varsa bu durum ticareti harekete geçirici bir etki ortaya çıkarabilir" şeklinde açıklanabilir. Gelir seviyesi bakımından daha refah olan taraf, bir yandan üretim seviyesinin artmasının bir sonucu olarak daha fazla ihracat yaparken, bir yandan da tüketim alışkanlıklarının lükse kayması nedeniyle ithalat yapacaktır. Yani toplamda ticareti artacaktır.

Birliğin nüfusu, birlik yapısının büyüklüğünün bir temsili olarak modelde yer almaktadır.

Diğer değişkenlere gelince, M2 para miktarına ilişkin oran ile modelde para politikasının etkisini gösterilmiş, enflasyon oranı ile de enflasyon politikası gösterilmek istenmiştir. Döviz kuru ise modelde ülkenin ticaret politikasını yansıtmak üzere vardır. Döviz kuru ile ticari büyüme de sarmal bir ilişki içindedir. Son olarak işsizlik oranı ile sanayi politikasının etkisi ifade edilmiştir. Gölge değişken, daha önce sözü edildiği gibi, iki uçlu sonucu olan, ülkenin birlikle yaptığı antlaşma dönemi, öncesi ve sonrası olarak tasarlanmıştır.

[77] Tan Van Hoa, a.g.e., s. 5.

4.3. Veri Tanımlama

Hem yöntem hem de kaynak bakımından, verinin uyumlu seçilmesi gerekmektedir. Aynı karakterdeki (para birimi, ortalama veya yıl sonu değerlerine göre hesaplanmış v.s. farklılaşmaları olmayan) seriler, farklı dönemler için mevcut olduğundan, seriler için alınan dönem arzu edilenden kısa olmuştur. 1970-2004 aralığı hedeflenmiş, ancak 1980-2000 arası mümkün olmuştur.

Bütün veriler yıllık alınmıştır. Karşılaştırma yapılabilmesi ve işlem görecek olması dolayısıyla verilerde aynı para birimi kullanılmıştır. Reel hale getirilen seriler seçilmiş olunup, bu serilerin de aynı yıl (1995) baz alınarak indirgeme yapılmış olmasına dikkat edilmiştir. Anlam ve içerik olarak modele uygun ise, değişkenin oran olarak ifadesi tercih edilmiştir. Parasal büyüklükle ifade edilen veriler büyük ölçüde aynı kaynaktan kullanılmıştır.

AB genişleme süreci, verinin dönemleri boyunca devam etmekte olduğundan üye ülke sayısında gerçekleşen değişim rakamlara sirayet etmektedir. AB'nin üye ülke sayısı 1979'da 9, 1981'de 10, 1986'da 12, 1995'te 15 ve nihayet 2004'te de 25'e ulaşmıştır. Tutarlılık gereği Avrupa Birliği ile ilgili tüm verilerde, AB (15)'e kadar olan yapı için elde edilen büyüklükler kullanılmıştır.

Değişkenleri takip ederek, verilerin özellikleri şöyle açıklanabilir;

Nüfus (ab.pop) = Tüm yaş grubu ve cinsiyet için hesaplanmış değerdir. (Kaynak : IMF Survey International Financial Statistics)

Gayri Safi Yurtiçi Hasıla (ab.gdp, tr.gdp) = Baz 1995 yılı olmak üzere, reel seri dolar para birimi cinsindendir. (Kaynak : World Bank Veri Tabanından World Development Indicator Tablosu)

Gelir Yakınsaması (gap.ab.tr) = Bu değer AB ve Türkiye(/İspanya) için ayrı ayrı "Kişi Başına Gelir"ler elde edildikten sonra, aralarındaki fark alınarak elde edilmiştir;

Kişi Başına Gelir (kbg)= Gayri safi Yurtiçi Hasıla / Nüfus

Gelir Yakınsaması=AB(kbg) – TR(kbg)

Para Miktarı (m2.r) = m2.r oranı Gayri safi Yurtiçi Hasıla'nın yüzdesi olarak ifade edilmektedir. Buradaki M2 para türü, kaynak tarafından para + para benzeri (quasi-money) olarak tanımlanmıştır. (Kaynak : World Bank Veri Tabanından World Development Indicator Tablosu)

Enflasyon Oranı (i.r) = Tüketici fiyatlarından hesaplanan yıllık yüzde orandır. (Kaynak : Dünya Bankası Veri Tabanından World Development Indicator Tablosu)

Döviz Kuru (e.r) = Bir dolar karşılığı, TL (/Pesetas) alınmıştır. (Kaynak : Penn World Table, Bu tablo da Birleşmiş Milletler ve Dünya Bankası veri tabanını kaynak göstermektedir.)

İşsizlik Oranı (u.r) = Toplam iş gücüne bölünerek elde edilmiş yüzde orandır. (Kaynak : OECD Labour Statistics)

Ticari Büyüme (trade.tr) = Bu büyüklük ülkenin AB ile yaptığı ihracat ve ithalat toplamı olarak ifade edilebilir veya bunun yerine açıklık (openness) olarak belirtilen; ihracat ve ithalat toplamının Gayri safi Yurtiçi Hasılaya bölümünden elde edilen oran alınabilir. Çalışmada tercih edilen veri, ihracat ve ithalat rakamlarının toplamıdır. Para birimi Euro olarak belirtilmiştir (Million Euro). (Kaynak : External and Intra-European Union Trade (Statistical Yearbook))

Gölge Değişken (dum.95, dum.93) = Türkiye için AB ile Gümrük Birliği antlaşmasının gerçekleştiği yıl olan 1995 yılından itibaren “1”, diğer yıllara ilişkin gözlemler “0” olarak tayin edilmiştir.

İspanya AB’ye 1986’da üye olmasına rağmen, gümrük birliğini ancak 1993’te yakalayabilmiştir. Bu nedenle 1993 yılından sonraki dönem için “1”, daha öncesi dönem için “0” tayin edilmiştir.

4.4. Modelin Bayesyen Analizinde İzlenecek Yöntem

En genel hatlarıyla Bayesyen algoritma şöyle özetlenebilir; İlk aşamada uygulanacak iktisadi model yapılandırılır, ilişki ortaya konur. Modelin parametrelerine ilişkin ön bilgi (dağılım) oluşturulur. Veri toplanır ve örneklem dağılımı oluşturulur. Bayes teoreminin yardımıyla, veriden gelen bilgi ön bilgi ile güncellenir. Son aşama olarak ulaşılan sonuç irdelenir.

4.4.1. Modelin Ön Dağılımının Seçimi

Bir uygulama Bayesyen yaklaşımla ele alınacaksa en hayati konu ön dağılımın seçilmesi konusudur. İkinci bölümde* teorisine detaylı olarak değinilmiştir. Çoklu Bayesyen regresyon analizi için bu modelde (4.1) öncelikle, veriye dayalı bir ön dağılım seçilmesinin uygulama için gerekli olduğu düşünülmektedir. Çünkü öncelikle ön dağılımın varyansının bilinmesi güçlüğü vardır. Ayrıca, örneğin Bioistatistik alanında aynı değişkenlerin önceki bir dönemde oluşan veri için hesaplanıp, bunun ön bilgiyi temsil etmesi, mümkün bir yöntemdir. Öte yandan sosyal bir ilişki modellemesi söz konusu ise anket uygulanıp, bunun sonuçlarına dayalı ön dağılım belirlemesi yoluna gidilebilir. Ayrıca araştırmacının veya uzmanın bilgisini yansıtacak ön dağılımın varlığı ya da teoriden gelen bir ön bilginin olması tamamen uygulamanın içeriğine bağlıdır.

(4.1) modelinde önceki bir dönem aralığına ait verilerle çalışmak çok anlamlı olmamaktadır. Çünkü iktisadi modellerde dönemler arası modelde farklı etkenler söz konusu olabilir. 1960-1980 arası veriler alınıp, ön dağılım bilgileri oluşturulsa, (nedenlerden sadece bir olarak) bu dönem ile 1980-2000 arası dönemde sözgelimi mevcut teknoloji seviyesindeki farklılık modellemenin kuralını bozacaktır. Ayrıca elde önceki döneme ait veri varsa, tek bir seferde tüm dönemle çalışılabilir. Ancak dönem aralıkları arasında kesinti varsa veya maliyet dolayısıyla önceden yapılmış bir çalışma sonuçları kullanılacaksa, bu tür bir yöntem anlamlı olabilir.

(4.1) modeli, anket ile sonuç elde edilebilecek bir içeriğe de sahip değildir. Uzmanlara tatbik edilen bir anket, böyle bir anketin tasarımı güç olmakla birlikte hazırlansa bile, oldukça kaba sonuçlar verecektir.

Son olarak araştırmacının veya uzmanın teorik olarak parametrelerin katsayılarını bilmesi mümkün değildir. İşaretine dair sezgisel fikir sahibi olması bile modelin tamamı için pek beklenemez; gelir yakınlaşmasının etkisi örneğin.

Bu durumda ön bilginin oluşturulmasında, veriye dayanan ve paralel olarak gerçekleştirilmiş bir çalışma yapılabilir. Tüm bu tespitlere dayanarak, bu tezin uygulaması için şöyle bir tasarı yapılmıştır; Türkiye ile pek çok açıdan benzer yapıda

* Bakınız Bölüm 2.3. Ön Dağılımın Belirlenmesi Sorunu

bir ülke olması nedeniyle, model İspanya için oluşturulup hesaplanmıştır. Bu sonuçlar da Türkiye modelinin Bayesyen analizinde ön bilgi niteliğinde alınmıştır. Teorik zeminine göre seçilen ön dağılımın türü aslında **Eşlenik Ön Dağılım**dır. Normal dağılım varsayımı olduğundan, eşlenik ön dağılım da normal gama dağılımıdır.

İspanya'nın seçilmesi konusuna biraz daha yakından bakmak gerekmektedir. Öncelikle model (4.1) bir ticari büyüme modelidir. Ticaret, coğrafi faktörlere sıkı sıkıya bağlı bir faaliyettir. İspanya denizi, iklimi ve yaşam tarzı bakımından Türkiye ile benzerlikler gösteren bir ülkedir.

Tarihi benzerlikler de taşımaktadır. Her iki ülke de imparatorluk mirasına sahiptir. Çok boyutlu dış politika gütmektedirler. İspanya Latin Amerika'yı Türkiye de Ortadoğu'yu ihmal etmemektedir. Üyelik öncesi tarım İspanya için de önemli bir sorundu. İspanya'nın da enflasyon ile mücadele etmesi gerekiyordu. Sanayi kuruluşlarının mali yapıları zayıftı, banka sistemi kırılgandı. Ticaret ve Ödemeler Dengesi sürekli açık veriyordu[78]. Yapılan pek çok çalışma, mukayeseli ekonometrik analizler Türkiye ile İspanya, Yunanistan ve Avustralya arasındaki benzerlik olduğu sonucuna ulaşmıştır.[79] Genel bir değerlendirme ile bu ülkeler arasında kıyaslama yapıldığında ise İspanya daha benzer görünmektedir. Tarım yapısı ve kırsal nüfusunun sorunları ve beklentileri açısından bakıldığında yine Türkiye'ye benzer bir ülke olduğu düşünülebilir.[80] Netice olarak, gelişme performansları bakımından Türkiye ile benzerlik gösterebileceği düşünülen AB ülkeleri yakından incelendiği vakit, İspanya'nın hep kıyaslama yapılan başlıca ülkelerden olduğu görülmüştür.

İspanya modeline ön bilgi olarak, bilgi vermeyen ön dağılımlardan biri olan "belirsiz ön dağılım" seçilir. Ortaya çıkan yapı, Bayesyen analizde önemli bir yeri olan "**Hiyerarşik Modelleme**" ye örnek teşkil eder. Bu hiyerarşik modellemenin aşamaları[*] şöyle özetlenebilir;

---

[78] İlter Türkmen, AB bağlamında Türkiye ve İspanya, (Çevrimiçi), http://www.obiv.org.tr/ilter139.htm, (24.05.2005) s. 1.

[79] Ahmet Samsar, Optimal Para Alanı Teorisi Çerçevesinde Türkiye Analizi, Uzmanlık Yeterlilik Tezi, (Çevrimiçi), http://www.tcmb.gov.tr/kutuphane/TURKCE/tezler/AhmetSamsar.pdf, (04.03.2005), s. 54.

[80] DPT Müsteşarlığı, Türkiye'nin Üyeliğinin AB'ye Muhtemel Etkileri, Kasım 2004, (Çevrimiçi), http://ekutup.dpt.gov.tr/ab/uyelik/etki/olasi.pdf, (02.04.2005), s. 31-33.

[*] Bölüm 4.6.'da sözü edilen hiyerarşik yapı, parametrelerle gösterilmiştir.

Belirsiz Ön Dağılım	(İspanya Modelinin hiper parametre değerleri atanır.)
↓	
İspanya Modeli	(Modelin parametreleri tahmin edilir.)
↓	
Türkiye Modeli	(Bir önceki modelin tahmin sonuçları, ön bilgi olarak alınır.)
↓	
Son Dağılım	(Ön bilgi sağlayan İspanya Modeli ile Benzerlik dağılımı kabul edilen Türkiye Modeli bir araya getirilerek son dağılım oluşturulur. Son Dağılım parametreleri tahmin edilir.)

Hesaplama için, hedef koşullu dağılımdan (target distribution) örnekleme değerleri üreten, **MCMC** (Markov Chain Monte Carlo) simülasyon yöntemi kullanılmıştır. Çoklu doğrusal regresyonun, örnekleme yapmadan, teorik bölümde anlatıldığı gibi hesaplaması yapılsa uygulama açısından başlangıç aşamasında bir çalışma olacağı düşünülmüştür. Simülasyonla çok fazla sayıda örnek çekilmesine izin vermesi sayesinde tek örneklemden edinilen yaklaşık sonuçlar yerine modeli daha iyi temsil edecek sonuçlara ulaşılabilinmektedir. Bu durumda ön dağılım ve örnekleme dağılımını salt varyanslarına göre ağırlıklı ortalamalarını alarak hesaplama yapılması arzu edilen bir durum değildir. Ancak yazılımın bu kadar geliştiği ve özellikle Bayesyen Analiz için etkin sonuçlar veren simülasyon çalışması ile uygulamayı geliştirmek kaçınılmaz olmuştur.

Son olarak bulgulara göre yöntemin üstünlükleri tartışılacaktır.

Diğer bölüme geçmeden, kullanılan simülasyon yöntemine ilişkin teorik bilgi sunulmuştur.

4.4.2. Markov Zinciri Monte Carlo Simülasyonu (MCMC)

Monte Carlo yöntemi ile, istenilen bir olasılık dağılımından birbirinden bağımsız, simülasyon değerleri takımı üretilir. Başka bir ifade ile son dağılımdan rastlantısal olarak çok sayıda değer çekilir. MCMC ise her bir simülasyon değerinin bir önceki değere bağlı olduğu, zincir değeri üretir. Eğer bu zincir yeterince uzun çalışırsa, ilgilenilen son dağılımın istenilen halini bulacaktır. Zincir dolaşarak çekilen değerlerden özet istatistikler üretir. Elde edilen örnekten son dağılımın ortalamasına, medyanına, HPD Bayesyen güven aralığına ulaşılabilir.

Yöntemde kullanılan Markov Zinciri, simülasyon ile belirlenen herhangi bir θ^t serisinde, sadece zincirin kendisinden bir önceki değerine θ^{t-1} bağımlı olduğu, diğerlerinden bağımsız olduğu olasıklı bir süreçtir[81];

$$P\left(\theta^t \in A \setminus \theta^0, \theta^1, ..., \theta^{t-2}, \theta^{t-1}\right) = P\left(\theta^t \in A \setminus \theta^{t-1}\right)$$

Burada A, tüm mümkün durum uzayında, belirlenmiş herhangi bir veri takımıdır. Kısacası Makov Zincirinin durum uzayında gezinen ve sadece bir önceki periyodu hatırlayan bir özelliği vardır. Bu örnekleme açısından oldukça iyi bir özelliktir. Çünkü zincir aslında durum uzayında en yüksek yoğunluğa sahip alanı bulur ve bağımsız olmayan bu dağılımdan bir örnek üretir. Böylece istenilen duruma daha çabuk ulaşır.

Çok boyutlu parametre yapısı için Gibbs Örneklemesi uygulanır. Dolayısıyla Gibbs aslında MCMC'nin genel halidir. Sözgelimi X veriyi gösterirken, θ parametre vektörü, θ_1 ve θ_2 gibi iki bileşenden oluşuyorsa;

$$P(\theta_1 \setminus \theta_2, X) \text{ ve } P(\theta_2 \setminus \theta_1, X)$$

koşullu dağılımlarının bilindiği varsayılsın, burada bulunması gereken $P(\theta_1 \setminus X)$ ve $P(\theta_2 \setminus X)$ olasılıklarıdır (hedef koşullu dağılımlar). Bunun için, parametreler için makul olabilecek herhangi bir başlangıç değeri seçerek $\left(\theta_1^0, \theta_2^0\right)$, Gibbs Örnekleme süreci yürütülür. Dışarıdan tayin edilen bu değerler ile başlayan ve aşağıdaki sırayı takip eden iki koşullu dağılımdan örnek çekilir[82];

---

[81] Jeff Gill, a.g.e., s. 301, 302.
[82] Jeff Grynaviski, Bayesian Analysis of The Normal Distribution, (Çevrimiçi), http://home.uchicago.edu/~grynav/bayes/ABSLec7.ppt, (10.01.2005), s. 17-18.

$$\theta_1^1 \sim P\left(\theta_1 \setminus \theta_2^0, Y\right)$$
$$\theta_2^1 \sim P\left(\theta_2 \setminus \theta_1^1, Y\right)$$
$$\theta_1^2 \sim P\left(\theta_1 \setminus \theta_2^1, Y\right)$$
$$\theta_2^2 \sim P\left(\theta_2 \setminus \theta_1^2, Y\right)$$
$$\theta_1^3 \sim P\left(\theta_1 \setminus \theta_2^2, Y\right)$$
$$\theta_2^3 \sim P\left(\theta_2 \setminus \theta_1^3, Y\right)$$
$$...........$$

Regresyon parametreleri için bu süreç genelleştirilerek yazılırsa $y \sim N(\beta_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k, \tau)$ iken;

$$\beta_1^t \sim P\left(\beta_1 \setminus \beta_2^{t-1}, \beta_3^{t-1}, ..., \beta_k^{t-1}, \tau^{t-1}, Y\right)$$

$$\beta_2^t \sim P\left(\beta_2 \setminus \beta_1^{t}, \beta_3^{t-1}, ..., \beta_k^{t-1}, \tau^{t-1}, Y\right)$$

$$.... \qquad ....$$

$$\beta_k^t \sim P\left(\beta_k \setminus \beta_1^{t}, \beta_2^{t}, ..., \beta_{k-1}^{t-1}, \tau^{t-1}, Y\right)$$

$$\tau^t \sim P\left(\tau \setminus \beta_1^{t}, \beta_2^{t}, ..., \beta_k^{t}, Y\right)$$

şeklinde Gibbs Örneklemesine dayalı simülasyon süreci gerçekleşir.

Kaç iterasyon sonucu istenilen değere yakınsayacağı (convergence) tayin edilen başlangıç değerlerine, zincir sayısına ve modelin etkin bir şekilde işleyip işlememesine bağlıdır. Bu konuda geliştirilmiş teşhisçiler vardır. Kullanılan programda (WinBUGS) iterasyonun takibinin yapıldığı iz çizimleri (trace plot) elde edilebilmektedir. Bu çizimler yorumlanarak yakınsayıp, yakınsamadığı belirlenebilmektedir.

MCMC simülasyon yöntemi Bayesyen Analizin doğasına son derece uymaktadır. Parametrelerinin koşullu yapısı, yapılan sıralı örneklemeyi anlamlı kılmaktadır. Özellikle eşlenik ön dağılım ve hiyerarşik modelleme bu yöntemi kendiliğinden desteklemektedir.

$$P\left(\beta, \sigma^2 \setminus y\right) = P\left(\beta \setminus \sigma^2, y\right) \cdot P\left(\sigma^2 \setminus y\right)$$

Bu aşamada daha kapsamlı teorik ayrıntıya yer vermek hedef dışı görüldüğünden, simülasyonun dayandığı temel ve adımları genel olarak açıklanmıştır.

4.5. Kullanılan Paket Program (WinBUGS 1.4)

WinBUGS yazılımının temeli BUGS'a (Bayesian inference Using Gibbs Sampling) dayanmaktadır. BUGS 1996'da yayınlanmasının ardından, biraz daha geliştirilerek ve grafik arayüzlü hale dönüştürülerek, yeni bir isimle 2003'te WinBUGS olarak kullanıma sunulmuştur. (Komut satırları daha kısadır, değişkenlerin model dışında ayrıca bildirimine gerek yoktur, dizilerin boyutu sınırlandırılmamıştır, deyimlerin noktalı virgülle sonlandırılmasına gerek yoktur.)Yazılım, MCMC kullanarak karmaşık istatistiksel modellerin Bayesyen analizini gerçekleştirmek üzere oluşturulmuştur. Yüksek seviyeli bir programlama dilidir.

Çalışmada tercih edilmesinin nedenleri arasında, model oluşturmak ve buna ilişkin çıkarsama yapmak üzere ideal bir program olması yer almaktadır. Bayesyen analiz için yazılan pek çok program vardır. Bunlar içinde yaygın olarak kullanılanlardan biridir. Özellikle yüksek seviyeli olduğu için, amacı programlama olmayan, istatistiksel çalışma yapmak isteyen bir kullanıcı için uygun bir yazılımdır.

4.6. Modelin Analizi

İspanya Modeli

$$trade.isp = \beta_1 + \beta_2.ab.gdp + \beta_3.isp.gdp + \beta_4.gap.ab.isp + \beta_5.ab.pop + \beta_6 m2.r$$
$$+ \beta_7.i.r + \beta_8.e.r + \beta_9.u.r + \beta_{10}.dum.93 + u_i$$

Türkiye Modeli

$$trade.tr = \beta_1 + \beta_2.ab.gdp + \beta_3.tr.gdp + \beta_4.gap.ab.tr + \beta_5.ab.pop + \beta_6 m2.r$$
$$+ \beta_7.i.r + \beta_8.e.r + \beta_9.u.r + \beta_{10}.dum.95 + u_i$$

4.6.1. İspanya Modeli

İspanya Modelinin Ön Dağılımı

WinBUGS uygunsuz olan bir ön dağılım (improper prior) ile çalışmamaktadır. Bu nedenle İspanya modeli için ön dağılım olarak bilgi vermeyen ön dağılım olan belirsiz ön dağılım (vague prior) seçilmiştir. Buna göre sırasıyla, tüm parametreler (b) için, ortalaması 0, ve kesinliği 0.001 (yani oldukça büyük varyansı) olan normal dağılım; modelin kesinliği (tau) için ise alfa ve beta parametresi çok küçük olan gama dağılımı atanır;

```
b[j] ~ dnorm(0 , 0.001)
tau ~ dgamma(0.001 , 0.001)
```

Ayrıca yukarıda da görüldüğü gibi belirtmek gerekir ki WinBUGS kesinlikler ile çalışmaktadır. Bir dağılımı tanımlarken, varyans yerine kesinliği alır. Kesinliğin tanımı; Kesinlik =1/ Varyans*.

Özet Çıktı ve Yorumu

Böyle bir ön dağılımla verinin birleştiği modelin, ilk aşamada tüm parametreler ile çıktısı alınmıştır. WinBUGS'ın son dağılıma ilişkin özet istatistikleri verdiği bu tabloda öncelikle, MC Hatasına (MC Error'a) bakılmaktadır. MC Hatası, Markov Zinciri algoritması ile yapılan tahminin standart hatasını gösterir. Bilindiği

---

* Bakınız Bölüm 1.2. ve Bölüm 2.2.

gibi bu değerin mümkün oldukça küçük olması istenir (yani genellikle 0.05'ten küçük). Son dağılımın ortalaması Markov Zinciri ile çekilen örnek değerlerinin ortalamasıdır. MC Hata değerine bakarak zincir sayısında da karar verilir. Ayrıca güven aralıkları da çıktı olarak verilmektedir. Bu tablo aşağıdaki gibidir;

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
R2	2.1	1.075	1.615E+10	0.6235	0.9024	1.241	1	500000
b[1]	-0.0141	31.61	0.04486	-62.03	-0.01129	62.05	1	500000
b[2]	-1.815E-4	0.1046	1.267E-4	-2.09E-5	-4.691E-6	1.149E-5	1	500000
b[3]	0.001278	0.2156	1.826E-4	-7.09E-4	0.001201	0.003115	1	500000
b[4]	-0.06131	31.61	0.04553	-62.2	0.08189	61.75	1	500000
b[5]	-0.5301	0.471	7.469E-4	-1.308	-0.5307	0.2463	1	500000
b[6]	-0.05248	31.66	0.04364	-62.0	-0.06158	62.05	1	500000
b[7]	0.01088	31.65	0.04533	-61.95	-0.02439	62.13	1	500000
b[8]	-0.02698	31.65	0.04424	-62.15	-0.06195	61.97	1	500000
b[9]	-0.07831	31.57	0.0452	-61.88	-0.05054	61.82	1	500000
b[10]	-0.01149	31.59	0.04421	-61.92	0.05563	61.76	1	500000
deviance	767.7	4.987	0.01795	763.8	766.9	775.6	1	500000
tau	2.411E-15	1.0E-10	6.325E-14	1.101E-15	2.323E-15	4.217E-15	1	500000

İspanya Modeli başlangıçta 10 parametre ile çalıştırılmıştır. 500.000 örnek çekilmiştir. 5 zincir kullanılmıştır. Konvansiyon olarak, parametre sayısı çok ise MCMC uzun çalıştırılmaktadır. Dolayısıyla iterasyon sayısı çok olmalıdır. Bu şekilde model güncellenerek, MC Hatası 0.05'ten az olması sağlanmıştır. Ancak parametrelerin işaretleri beklendiği gibi çıkmamıştır; b[1], b[2], b[5], b[7], b[8], b[10]. R^2 (modelin belirginlik seviyesi) 0.90'a yakın çıkmıştır. Modelde çoklu doğrusal bağlılık belirtileri olduğundan tekrar parametreleştirme gereği görülmüştür.

İkinci aşamada model çıktısı;

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
R2	0.9102	0.1562	1.262E-4	0.6234	0.9027	1.241	1	1500000
b[1]	-4.707E-6	8.187E-6	6.882E-9	-2.09E-5	-4.714E-6	1.153E-5	1	1500000
b[2]	0.001203	9.664E-4	8.121E-7	-7.148E-4	0.001204	0.003116	1	1500000
b[3]	-0.09723	125.0	0.1018	-62.07	0.02632	61.85	1	1500000
b[4]	-0.5302	0.3929	3.296E-4	-1.311	-0.5298	0.2468	1	1500000
b[5]	0.3216	383.5	0.3138	-62.04	0.02888	61.96	1	1500000
deviance	767.6	3.133	0.003155	763.8	766.9	775.6	1	1500000
tau	2.406E-15	1.0E-10	8.165E-14	1.102E-15	2.318E-15	4.21E-15	1	1500000

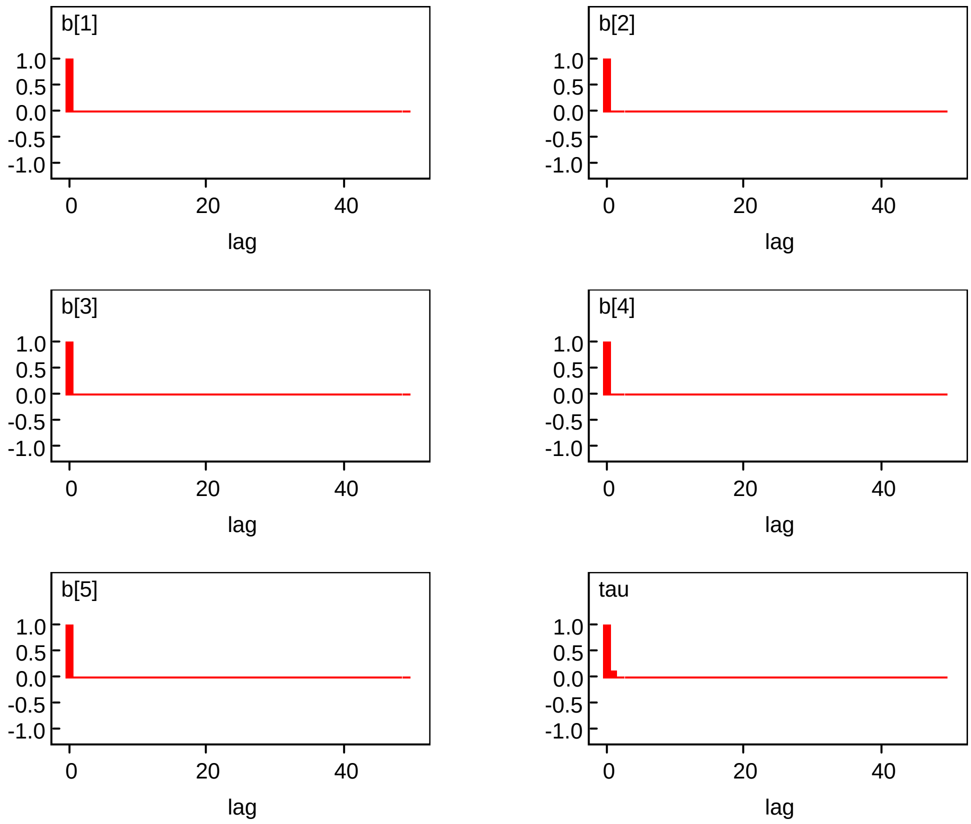
Burada model aşağıdaki yapıda oluşturulmuştur;

```
trade.isp = b[1]*ab.gdp[i] + b[2]*isp.gdp[i]+
     b[3]*gap.ab.isp[i]+b[4]*ab.pop[i]+ b[5]*e.r[i]+u[i]
```

MC Hata değerlerine bakılınca b[3] ve b[5] hariç istenilen değerlere yakınsadığı görülmektedir. Program, sınırsız dizilerle çalışılabilmesine izin verdiği için iterasyon sayısında sınır yoktur. Ancak çalışılan bilgisayar kapasitesi nedeniyle yakınsama gösteren b[3] ve b[5] için 1.500.000'de kalınmıştır. Kuvvetli bir delil olarak işaretleri beklendiği gibi sırasıyla (-) ve (+) olması ve simülasyona devam edilmesi halinde istenilen duruma yakınsayacağı düşüncesi ile bu parametreler de kabul edilmiştir.

Otokorelasyon Çizimi

Otokorelasyon çiziminin sonuçlarına göre;

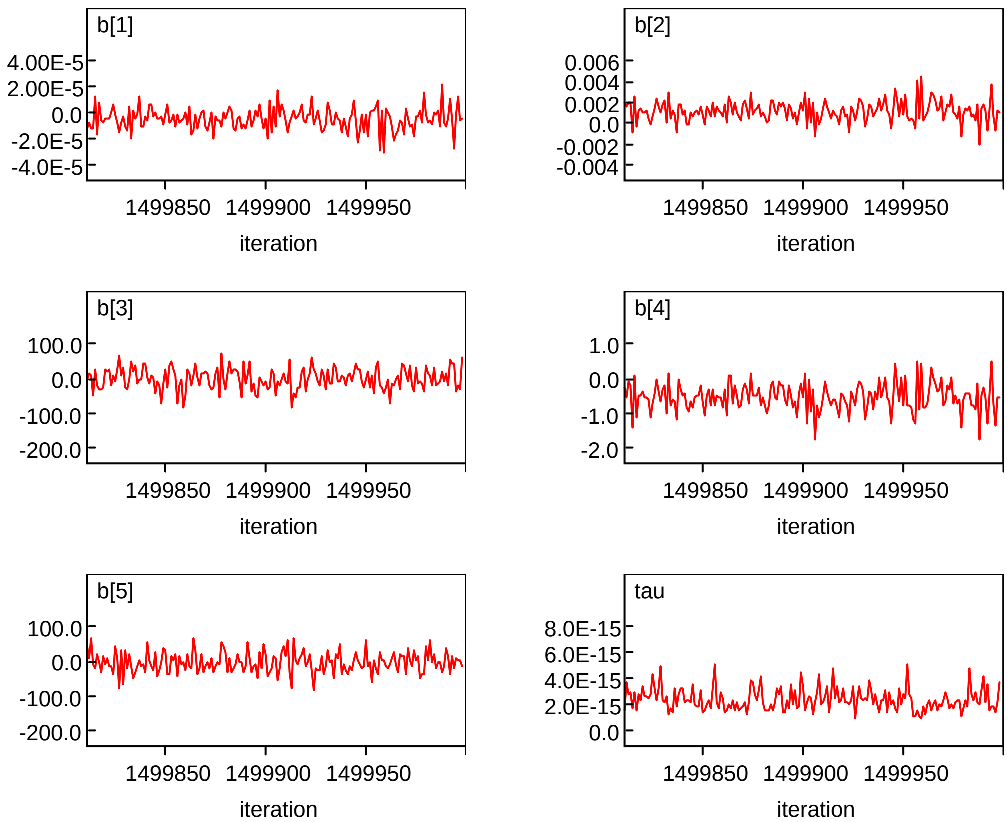


Şekil 4. 7 Otokorelasyon Çizimi (parametreler ve tau için)

Normalde simülasyonda gerçekleşen değerlerin herbiri birbirinden bağımsız değildir. Otokorelasyon bu bağımlılığı ölçmek için bir yoldur. Bu otokorelasyon çizimi gecikmenin bir fonksiyonu olarak, zincirde birbirini takip eden değerlerin Pearson korelasyonunu gösterir. Yüksek bir otokorelasyon parametrenin son dağılımını daha yavaş aradığını gösterir. Buna göre yukarıdaki çizimden modelin parametreleri için otokorelasyonun söz konusu olmadığı görülmüştür.

İz Çizimi Çıktısı

İz Çizimi çıktısı, zincirin gerçekleşen değerlerinin bir iz çizimini verir. Bu sayede simülasyonun istenilen değere yakınsayıp yakınsamadığına ilişkin bilgi edinilir;

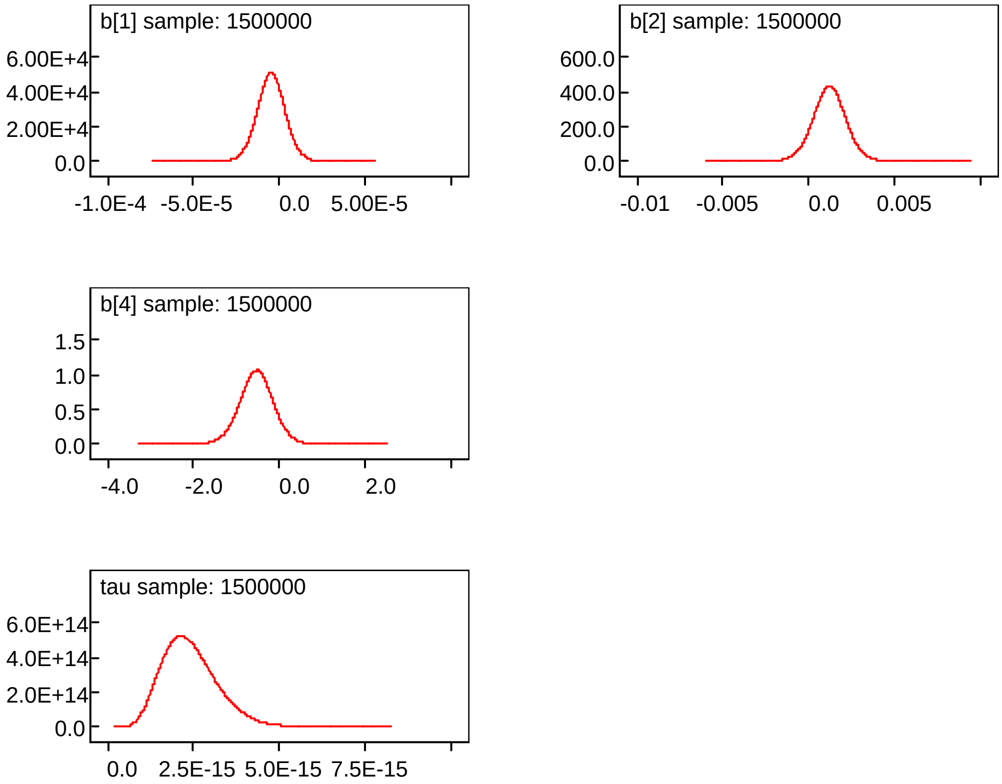


Şekil 4. 8 İz Çizimi (parametreler ve tau için)

Bu çizim Markov Zincirinin son dağılımı ne kadar hızlı (veya yavaş) aradığını gösterir. Eğer salınımı fazla ise hızlı arıyor demektir. Salınımı az ise eğimin hatasının uzun süre aynı alanda kaldığı söylenebilir. Salınımın çok olduğu yerde Markov Zincirinin oldukça hızlı bir şekilde, yeni alanlara geçiş yapmaktadır. Buna göre yukarıdaki çıktılar, tüm parametreler için yakınsama gösterdiğine işaret etmektedir. Yalnız b[3] ve b[5] biraz daha yavaş yakınsamaktadır. Salınımları biraz daha azdır.

Kernel Yoğunluk Çizimi

Modelin parametrelerinin yoğunluk çizimi aşağıdaki gibidir;



Şekil 4. 9 Kernel Yoğunluk Çizimi (parametreler ve tau için)

Şekillere göre parametrelerin son dağılımlarının normal dağılım olduğu görülmektedir.

4.6.2. Türkiye Modeli

Türkiye Modelinin Ön Dağılımı

İspanya modeli ile tahmin edilen parametre değerleri, Türkiye modeli için ön dağılım bilgileri olmaktadır;

Katsayı parametreleri (-0.004707, 0.001203, -0.09723, -0.5302, 0.3216)

Kesinlikleri (14919.367, 1.07074, 0.000064, 6.47792, 0.0000068)

Yukarıdaki katsayı parametreleri çıktıdan da açıkça görülebilir. Kesinlikler için ayrıca hesaplama yapılmıştır.

Ön dağılıma göre oluşturulan Türkiye modelinin analizinde, (tekrar parametreleştirilen) İspanya modelinden çoklu doğrusal bağlılık nedeniyle tahmin edilmeyen diğer parametre ve kesinlikler için ortalaması 0, kesinliği 0.001 olmak üzere bilgi vermeyen yapı oluşturulmuştur. Modelin sabit parametre içermesi gerektiği bilgisi ile, sabit katsayı parametresi için dışarıdan ortalama ve kesinlik için (1000,10000) değer verilmiştir. Aslında modelde nüfus da değişken olarak aldığından, nüfus "0" olduğunda sabit parametre de olmaz. Ancak bu sefer de testler yapılamamaktadır. Ayrıca Van Hoa'nın modelinde sabit parametre pozitif bir sayıdır ve modelde etkili denilebilecek kadar da büyük bir sayıdır. Tüm bunlar düşünülerek, sabit katsayı için sözü edilen değerler atanmıştır.

Özet Çıktı ve Yorumu

Buna göre 500.000 iterasyon ile güncellenen modelin çıktısı aşağıdaki gibidir;

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
R2	54780.0	3.118E+7	45300.0	0.7869	0.9707	1.18	1	500000
b[1]	1.0E+3	0.009932	1.419E-5	1.0E+3	1.0E+3	1.0E+3	1	500000
b[2]	7.466E-7	3.658E-5	4.929E-8	1.639E-7	8.193E-7	1.49E-6	1	500000
b[3]	-3.35E-5	0.00557	6.006E-6	-2.15E-4	-3.869E-5	1.341E-4	1	500000
b[4]	-0.1183	12.5	0.018	-24.68	-0.06155	24.32	1	500000
b[5]	-0.1283	0.03987	5.795E-5	-0.2075	-0.1281	-0.05067	1	500000
b[6]	-0.05248	31.66	0.04364	-62.0	-0.06156	62.05	1	500000
b[7]	-0.02046	31.65	0.04533	-61.98	-0.0582	62.1	1	500000
b[8]	30.27	6.662	0.01071	19.79	30.29	40.67	1	500000
b[9]	-0.07762	31.57	0.0452	-61.88	-0.04986	61.83	1	500000
b[10]	-0.01158	31.59	0.04421	-61.92	0.05553	61.76	1	500000
deviance	677.9	4.478	0.01226	673.2	677.2	686.9	1	500000
tau	1.735E-13	1.0E-10	6.325E-14	7.718E-14	1.668E-13	3.08E-13	1	500000

Yapılan iterasyon ile MC Hatasının düşük olması sağlanmıştır, MC Hatası 0.05'ten küçüktür. Parametrelerin işareti beklendiği gibi sırasıyla şöyle gerçekleşmiştir;

b[2],	b[4],	b[6],	b[7],	b[8],	b[9]	b[10]
ab.gdp,	gap.ab.tr	m2.r	i.r	e.r	u.r	dum.95
(+,	-,	-,	-,	+,	-,	-)

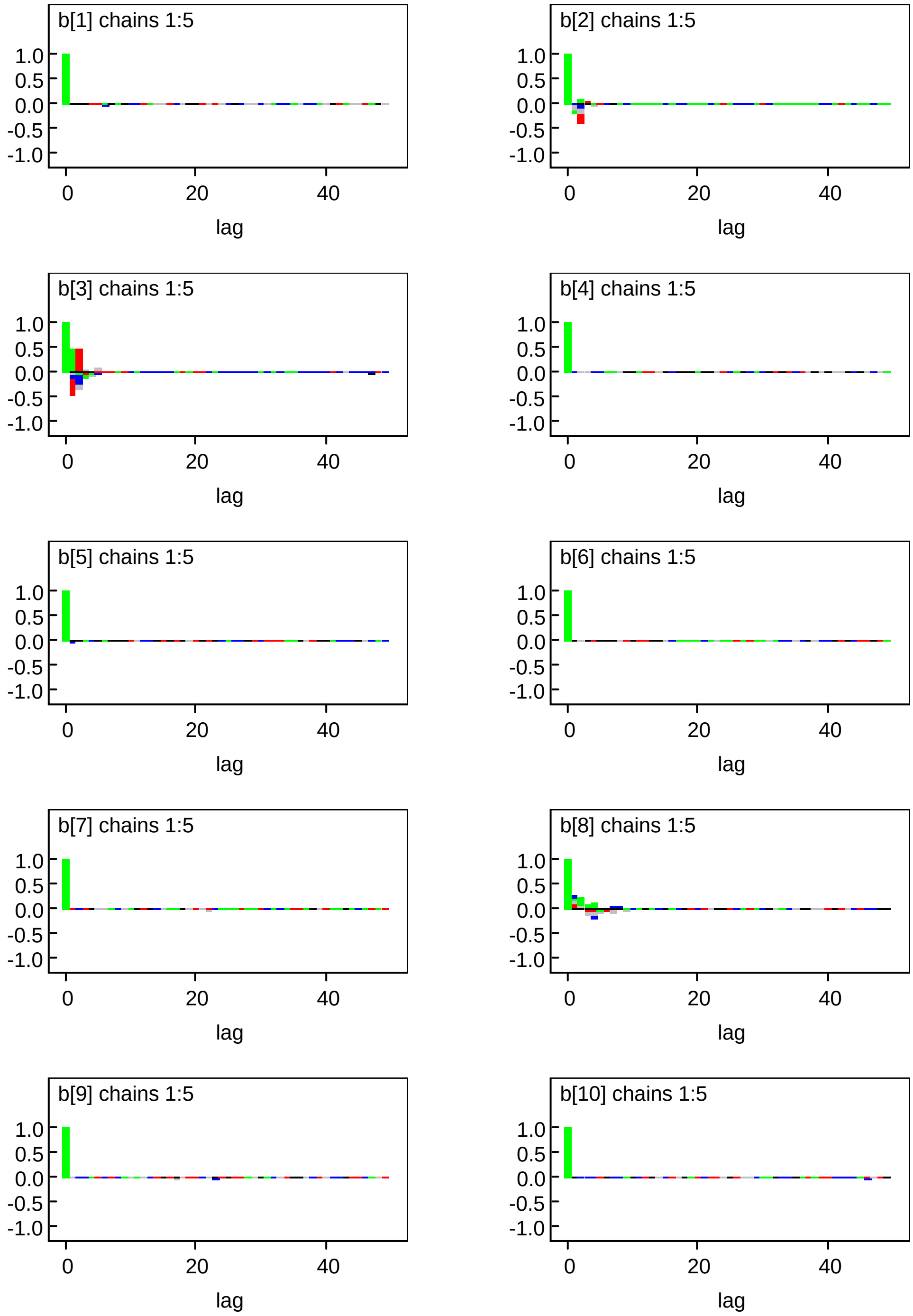
b[5] parametresinin işareti (+) olması beklenirken, (-) olmuştur. Tran Van Hoa'nın modelinde de nüfus (-) işaretli çıkmıştır[83]. b[3] parametresi ise (-) işaretli ve oldukça az etkisi olan bir parametre olarak sonuç vermiştir. Ancak başından İterasyonun 50.000 seviyesine kadar bu parametre (+) işaretli iken, etkisinin az olması nedeniyle yaklaşık 100.000 iterasyondan sonra (-)'e dönmüştür;

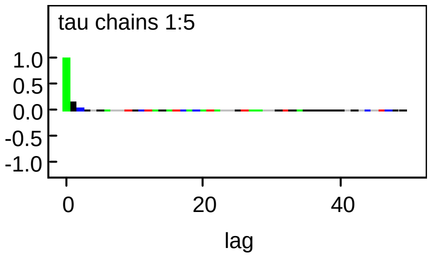
node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
R2	547800.0	9.859E+7	453800.0	0.7878	0.9715	1.182	1	50000
b[1]	1.0E+3	0.009987	4.417E-5	1.0E+3	1.0E+3	1.0E+3	1	50000
b[2]	7.727E-8	1.157E-4	4.935E-7	1.648E-7	8.219E-7	1.491E-6	1	50000
b[3]	1.718E-5	0.01761	6.018E-5	-2.149E-4	-3.976E-5	1.341E-4	1	50000
b[4]	-0.1661	12.39	0.05701	-24.51	-0.1272	23.97	1	50000
b[5]	-0.1288	0.04197	2.09E-4	-0.2085	-0.1284	-0.05096	1	50000
b[6]	-0.1273	31.75	0.1463	-62.45	-0.208	62.01	1	50000
b[7]	-0.3187	31.69	0.1392	-62.39	-0.3935	62.1	1	50000
b[8]	30.19	13.94	0.07993	19.78	30.27	40.68	1	50000
b[9]	-0.1732	31.6	0.1481	-61.98	-0.2118	62.27	1	50000
b[10]	-0.03538	31.55	0.149	-61.73	-4.012E-4	61.57	1	50000
deviance	678.1	9.126	0.1065	673.2	677.2	686.9	1	50000
tau	1.734E-13	1.0E-10	2.0E-13	7.648E-14	1.671E-13	3.072E-13	1	50000

[83] Tan Van Hoa, a.g.e., s. 6.

Otokorelasyon Çizimi

Modelin Otokorelasyon çiziminin sonuçlarına göre;



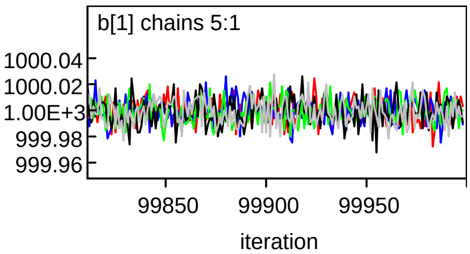


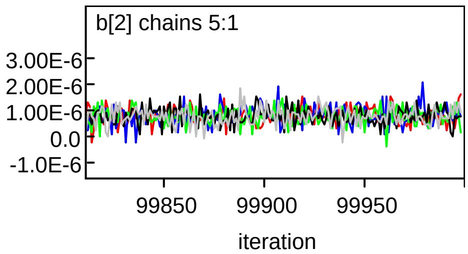
Şekil 4. 10 Otokorelasyon Çizimi (parametreler ve tau için)

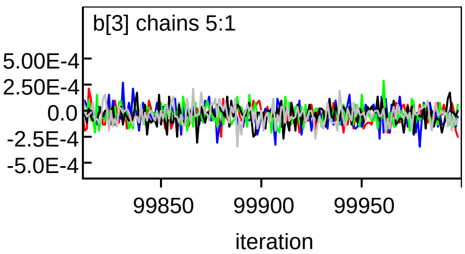
Çizimlere göre b[2], b[3], b[8] hariç hemen otokorelasyonun ilk anda 0'a indiği görülmektedir. Bu parametrelerde de daha sonra otokorelasyon 0'a inmiştir.

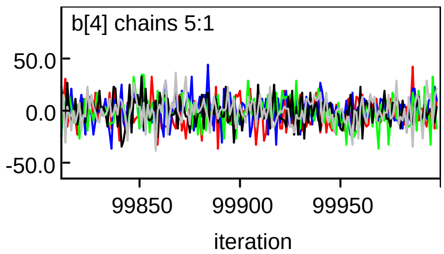
İz Çizimi Çıktısı

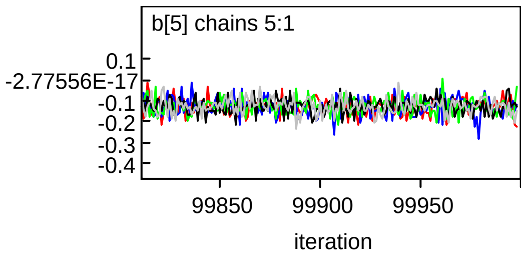
Modelin iz çizimi;

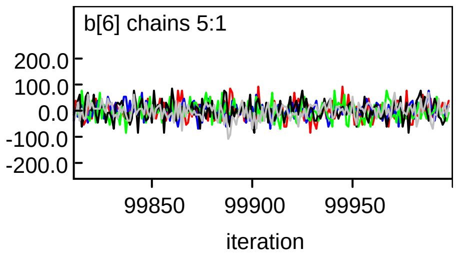


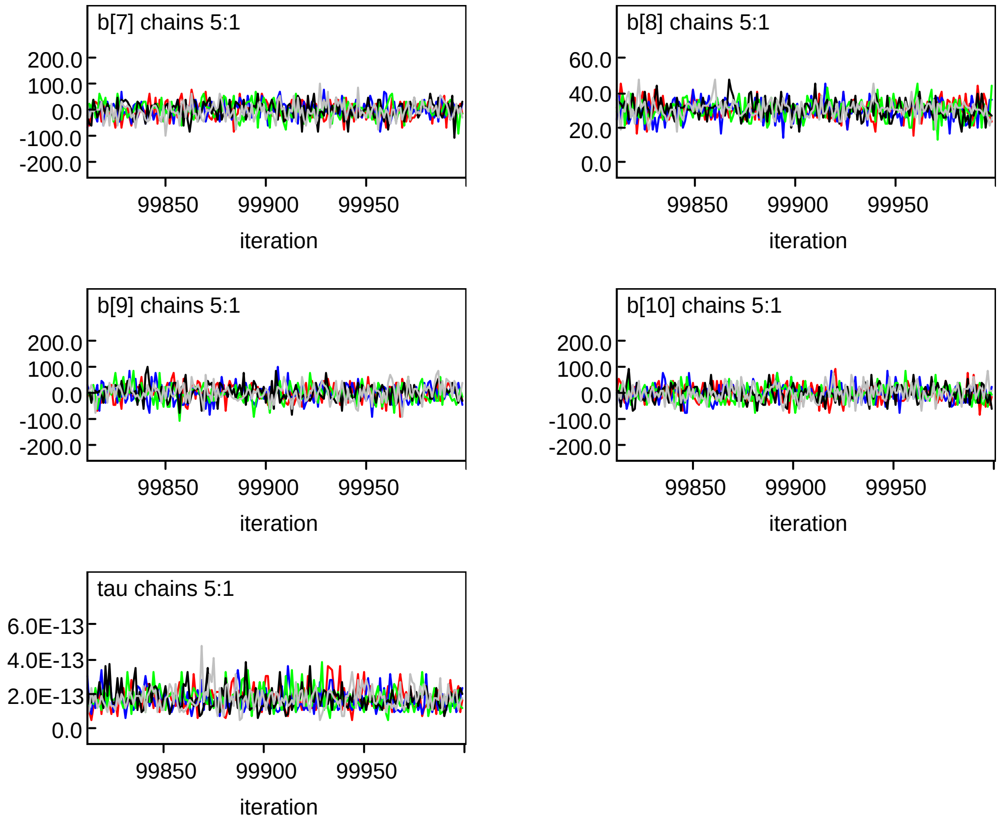








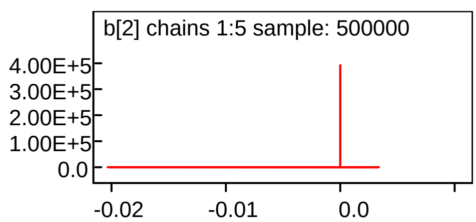


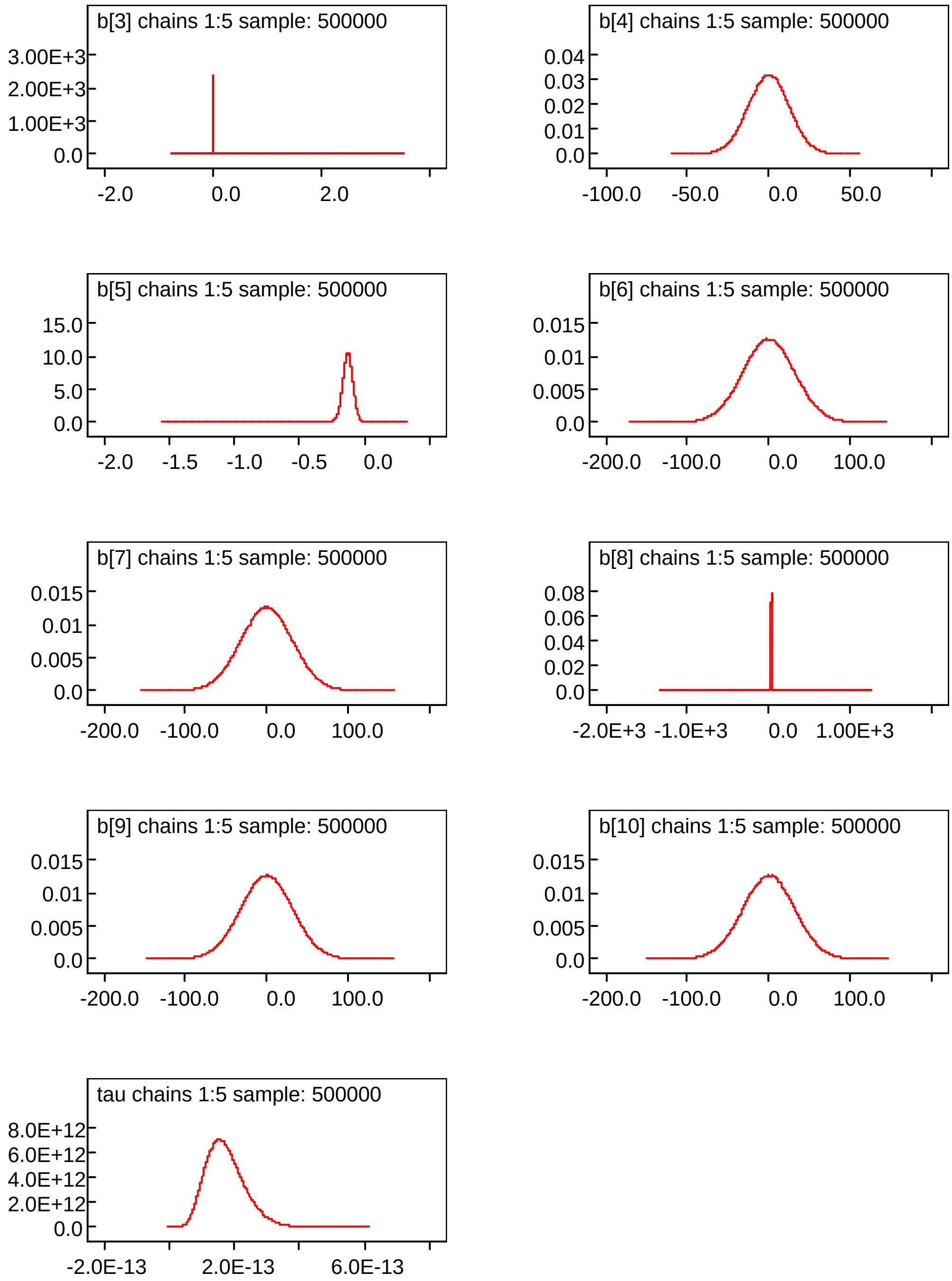


Şekil 4. 11 İz Çizimi (parametreler ve tau için)

Yukarıda her renk, bir zincirin iterasyon karşılığında gerçekleşen değerlerini göstermektedir. Parametrelerin iz çizimlerine göre salınım gösterdikleri görülmektedir. Yani zincirler daha geniş alanda değer aramaktadır.

Kernel Yoğunluk Çizimi





Şekil 4. 12 Kernel Yoğunluk Çizimi (parametre ve tau için)

Çizime göre tüm parametreler normal dağılmaktadır. Baştan itibaren MC Hata değeri düşük olan b[2], b[3] ve b[8] parametreleri iterasyonun uzaması nedeniyle aynı değerde yoğunlaşmıştır.

4.6.3. Bulgular, Karşılaştırması ve Yorumu

EKK ile yapılan Klasik Analiz sonuçlarına göre, Türkiye modeli aşağıdaki gibidir; (Bu analiz için Mathematica programı kullanılmıştır)

Model Çıktısı

ParameterTable →

	Estimate	SE	TStat	PValue
1	-1.02816×10^{9}	1.33354×10^{9}	-0.771002	0.456948
b2	-0.0000118939	0.0000223722	-0.531637	0.605547
b3	0.000492468	0.00114263	0.430995	0.674797
b4	43003.6	76955.	0.558814	0.587484
b5	3.04249	4.07109	0.747342	0.470531
b6	-2.59965×10^{7}	4.09242×10^{7}	-0.635235	0.538265
b7	-63995.2	43702.2	-1.46435	0.171085
b8	45.2466	24.2206	1.8681	0.0885966
b9	-1.33297×10^{6}	1.54948×10^{6}	-0.860267	0.408001
b10	-467782.	3.23134×10^{6}	-0.144764	0.887515

RSquared → 0.971058, AdjustedRSquared → 0.947378, EstimatedVariance → 6.80148×10^{12}

ANOVATable →

	DF	SumOfSq	MeanSq	FRatio	PValue
Model	9	2.5102×10^{15}	2.78911×10^{14}	41.0073	3.433×10^{-7}
Error	11	7.48163×10^{13}	6.80148×10^{12}		
Total	20	2.58501×10^{15}			

Güven Aralıkları Çıktısı (ParameterCITable)

1	{-3.96326×10^{9}, 1.90694×10^{9}}
b2	{-0.0000611346, 0.0000373469}
b3	{-0.00202245, 0.00300738}
b4	{-126373., 212380.}
b5	{-5.91791, 12.0029}
b6	{-1.1607×10^{8}, 6.40771×10^{7}}
b7	{-160183., 32192.7}
b8	{-8.06258, 98.5558}
b9	{-4.74335×10^{6}, 2.07742×10^{6}}
b10	{-7.57992×10^{6}, 6.64435×10^{6}}

Varyans Şişiren Çarpanına İlişkin Çıktı

VarianceInflation→{0., 190377., 5559.36, 95897.2, 2481.38, 19.4009, 3.06528, 46.4311, 21.4732, 6.57939}

Durbin Watson İstatistiği Çıktısı

DurbinWatsonD→1.89505

Korelasyon Tablosu

1.	0.9859	0.998314	0.982993	0.793848	0.459645	0.731056	-0.874638	0.782961	0.932104
0.9859	1.	0.975506	0.985128	0.774689	0.44229	0.692768	-0.862479	0.801087	0.901946
0.998314	0.975506	1.	0.972741	0.791823	0.459668	0.732976	-0.875464	0.764992	0.932477
0.982993	0.985128	0.972741	1.	0.776134	0.470125	0.700338	-0.839278	0.815587	0.911926
0.793848	0.774689	0.791823	0.776134	1.	0.0302296	0.916953	-0.538406	0.783354	0.888437
0.459645	0.44229	0.459668	0.470125	0.0302296	1.	0.0961463	-0.646905	0.350185	0.290474
0.731056	0.692768	0.732976	0.700338	0.916953	0.0961463	1.	-0.530279	0.733384	0.890203
-0.874638	-0.862479	-0.875464	-0.839278	-0.538406	-0.646905	-0.530279	1.	-0.702501	-0.763482
0.782961	0.801087	0.764992	0.815587	0.783354	0.350185	0.733384	-0.702501	1.	0.797247
0.932104	0.901946	0.932477	0.911926	0.888437	0.290474	0.890203	-0.763482	0.797247	1.

Tablo 4. 6 Değişkenler Arası Korelasyonu Gösteren Matris

Model Çıktısına göre, görüldüğü gibi parametrelerin işaretleri tamamen beklenenden farklıdır. Çok az sayıda anlamlı t oranı vardır ancak öte yandan R^2 oldukça yüksek çıkmıştır. Güven aralıkları tablosuna bakıldığında da güven aralıklarının geniş oldukları görülmektedir. Tüm bu nedenlerle çoklu doğrusal bağlılığın olduğu söylenebilir. Varyans şişiren çarpanının (VŞÇ) 10'dan büyük olması ciddi derecede çoklu doğrusal bağlılık olduğunda işaret eder. Varyans Şişiren Çarpanına İlişkin Çıktıdaki değerler, ilgili parametre ile birleşen VŞÇ'leri gösterir. Bu değerlerin yüksek olması da çoklu doğrusal bağlılığın varlığını gösterir.

Çoklu doğrusal bağlılığa dikkat çekmek üzere bu veri için değişkenler arası korelasyon sonuçları da hesaplanmıştır. Buna göre Tablo 4.1'de de izlenebileceği gibi, pek çok değişken arasında 0.90'ın üzerinde korelasyon olduğu görülmüştür.

Buna ilave olarak modelde otokorelasyon sorunu da olabilir. Bunun için Durbin Watson istatisitiği test edilmiştir;

n = 21, k` = 9 → iken tabloda $d_L = 0,461$ ve $d_U = 2,633$ değerindedir.

Modelden hesaplanan Durbin Watson Çıktısı 1,895 ile belirtilen tablo değerlerine göre, karasızlık bölgesine düşmektedir. Dolayısıyla modelde otokorelasyon olabilir.

Tüm bu değerlendirmeler üzerine modelde çoklu doğrusal bağlılık sorununu gidermek üzere ön bilgi kullanmak gerektiği söylenebilir. Bu nedenle de modelin Bayesyen analizine başvurulmuştur. Ön bilgi kullanılmazsa yapılacak şey modelin tekrar oluşturulması, yeniden parametreleştirmeye gidilmesidir ki bu da öncelikli olarak arzu edilen bir durum değildir. Ön bilgi kullanarak aralarında yüksek korelasyon olan değişkenlerin, farklı düzleme düşmesi sağlanabilmektedir.[84]

Bu sebeplerden dolayı Türkiye modelinin Bayesyen analizi için İspanya modelinden elde edilen ön bilgilerle Türkiye modelinden elde edilen örneklem bilgisi birleştirilmiştir.

Bayes yaklaşımda otokorelasyonu gidermek üzere bloklama yapılmasına izin veren bir ayar yapılmıştır. (WinBUGS'da "Options" menüsü altında "Blocking Options")

Normallik varsayımına gelince, Monte Carlo simülasyonu yapılırken zaten, dağılım tercihi baştan belirtilir. Simülasyon değerleri belirtilen dağılımdan çekilir.

[84] Andrew Gelman v.d., a.g.e., s. 251.

Dolayısıyla normallik varsayımı bozulmaz. Başlangıç varsayımı nedeniyle hata terimleri de normal dağılır.

4.6.4. Sonuçların Yorumu

Uygulamanın sonucuna göre çoklu doğrusal bağlılık sorunu nedeniyle Klasik yöntem çerçevesinde, aynı parametre yapısı ile tahmin edilmeyen model Bayesyen yöntem ile mümkün olmuştur.

Bayesyen analiz sonucu R^2 değeri Türkiye modeli için elde edilen özet tabloda da görüleceği gibi 0.97'dir. (Zincir sayısı 5 olduğu için ortalama (mean) kolonu altında yazılan değere değil de medyan (median) kolonuna bakılmalıdır)

Katsayıların anlamını değerlendirmek gerekirse, döviz kuru politikasını yansıtmak üzere seçilen döviz kuru değişkeni (e.r), modele en fazla etki eden değişken olmuştur. Parametrenin işareti pozitiftir ve oldukça büyük çıkmıştır. Enflasyon oranı (i.r) ve M2 para miktarı'nın (m2.r) parametresi negatiftir. Bu iki parametrenin negatif çıkması enflasyonist politikanın da ticareti olumsuz etkilediğini göstermektedir. Gelir yakınsamasının ticaret seviyesini azaltıcı etkisi olduğu sonucu çıkmıştır. Bu uygulamanın başında Bölüm 4.1.'de değinilen bir yoruma dayanarak açıklanabilmektedir. İşsizlik oranının ekonomiyi küçültücü etkisi düşünülünce ticarete de olumsuz etkisi olduğu aşikardır. Modelde de işsizlik oranına ilişkin parametre (u.r) negatif çıkmıştır. Birliğin GSYİH'sı (ab.gdp) ve ülkenin GSYİH'sı (tr.gdp)'nın parametreleri pozitif çıkmıştır. Ancak çok küçük değerdedirler. Bu sonuç da, sözü edilen değişkenlerin etkilerinin az olduğuna işaret etmektedir. Gölge değişkenin parametresi negatif işaretli çıkmıştır. Türkiye'nin Gümrük Birliği antlaşması sonrası düzenlemelerden etkilenmesi pek söz konusu olmamıştır. Bölüm 4.1.'de bunun nedenlerine değinilmiştir. Asıl belirleyici, ülkenin istikrar seviyesi olmuştur. Krizlerin yaşandığı dönemde (1995 ve 1999) döviz kurundaki değişmeler ticaretin lehine bir hareketlilik ortaya çıkarmıştır. Bu nedenledir ki modelde döviz kuru çok etkili çıkmıştır.

BÖLÜM -5- SONUÇ

Bayesyen yaklaşımın teorik kısmı anlatılmış, bunu yaparken de yaklaşımın temel düşüncesi açıklanmıştır. Ön dağılım türlerine değinilmiştir. Ayrıca ön dağılımın belirlenmesinde uygulanan yöntemler anlatılmıştır.

Bayesyen regresyon tek değişkenli ve çoklu olarak anlatılmıştır. Yöntemin üstünlükleri tartışılmıştır. Yapılan uygulamada aşamalı olarak ön bilginin dahil edildiği hiyerarşik modellemeye gidilmiştir. Ön bilgi örneklem bilgisi ile güncellenerek, parametreler için son dağılım elde edilmiştir. Buradan da parametreye ilişkin bazı çıkarsamalar yapılmıştır. İşlemleri yürütmede MCMC simülasyon yönteminden destek alınmıştır. Modelin Bayesyen analizini gerçekleştirmekle öncelikle gözlem sayısı az olmasına rağmen tahmin yapılabilmiştir. Ayrıca daha da önemlisi çoklu doğrusal bağlılık olan bir modelde parametre tahmini yapılabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Klasik yaklaşıma göre ele alınan çoklu doğrusal regresyonda ise yöntemin zayıf noktaları olması sebebiyle zaman zaman analiz neredeyse imkansız olmaktadır. Özellikle iktisadi modellerde verinin yapısı da buna yol açmakta, tahmini daha da önemlisi ilişkiyi açıklamakta engel olarak araştırmacının karşısına çıkmaktadır.

Görüldüğü gibi, konunun derinliği nedeniyle, çalışma ilerledikçe çoklu doğrusal bağlılık sorunu başka bir odak noktası olarak belirmiştir. Önemli açılımlar bulabileceği düşünülen bu konuya, kapsamı arttıracağı endişesiyle teorik bölümde yer verilememiştir.

Uygulama neticesinde modelin yapısını bozmadan ve de sınırlı örnek sayısı olmasına rağmen, Bayesyen regresyonla daha etkin parametre tahmini yapılabildiği sonucuna varılmıştır.

KAYNAKÇA DİZİNİ

Alder, Michael D.: Workshop on Intelligent System, December 2003, http://www.maths.uwa.edu.au/~mike/mumford/workshop_session1.pdf, 24 s.

Anscombe F. J.: "Bayesian Statistics," **The American Statistician**, Vol. 15, No.1, Feb. 1961, s. 21-24.

Bayes, Thomas : "Essay towards solving a problem in the doctrine of chances," **Biometrica**, Vol. 45, 1958, 293-315. (Reproduction of 1763 paper)

Berger, James : "Discussion: On the Consistency of Bayes Estimates," **The Annals of Statistics**, Vol. 14, No. 1, March 1986, 30-37.

Berger, James O.: **Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis**, 2. b., New York, Springer-Verlag Inc., 1985, 617 s.

Birkes, David ve Dodge, Yadolah : **Alternative Methods of Regression**, New York, John Wiley & Sons, 1993, 228 s.

Box, G.E.P ve Tiao, G.C. : **Bayesian Inference In Statistical Analysis**, Wiley Classics Library Edition, New York, John Wiley & Sons, 1992, 588 s.

Burdzy, Krzysztof : "Probability is Symmetry On Foundations of Science of Probability," 2003, http://www.math.washington.edu/~burdzy/Bayes/book.pdf, (01.02.2004), 98 s.

Casella George, Berger Roger L.: **Statistical Inference**, Belmont, California, Duxbury Press, 1990, 650 s.

Corcoran, J.N.: Bayesian Linear Regression-Single Variable, (Çevrimiçi) http://amath.colorado.edu/seminars/2003fall/ProbStatSlides/linreg.pdf, (04.04.2004), 110 s.

Demir, Ömer : **Bilim Felsefesi**, 3.b., Ankara, Vadi Yayınları, 2000, 176 s.

Dış Ticaret Müsteşarlığı : **Dış Ticaret Dergisi**, "Türkiye-AB İlişkilerindeki Gelişmeler ve AB İle Dış Ticaretimiz," Ekim 2003, Özel sayı.

Diaconis, P. ve Freedman, D.: "On Inconsistent Bayes Estimates of Location," **Annals of Statistics**, Vol. 14, No. 1, March 1986, 68-87.

DPT Müsteşarlığı : "Türkiye'nin Üyeliğinin AB'ye Muhtemel Etkileri", Kasım 2004, (Çevrimiçi), http://ekutup.dpt.gov.tr/ab/uyelik/etki/olasi.pdf, (02.04.2005), 50 s.

Galavotti, Maria Carla : "Subjectivism, Objectivism and Objectivity in Bruno de Finetti's Bayesianism," **Foundations of Bayesianism**, Ed. David Corfield ve Jon Williamson, Kluwer Academic Publishers, 2001, 413 s.

Gelman, Andrew v. d.: **Bayesian Data Analysis**, London, Chapman & Hall, 1995, 526 s.

Geweke, John : Contemporary Bayesian Econometrics and Statistics, July 2003, (Çevrimiçi) http://www2.cirano.qc.ca/~bacc/outgoing2003/july2003.pdf (01.03.2004), 231 s.

Gill, Jeff : **Bayesian Methods**, New York, Chapman & Hall, 2002, 459 s.

Grynaviski, Jeff : Bayesian Analysis of The Normal Distribution, (Çevrimiçi), http://home.uchicago.edu/~grynav/bayes/ABSLec7.ppt, (10.01.2005), 32 s.

Hartigan, J.: "Invariant Prior Distributions," **The Annals of Mathematical Statistics**, Vol. 35, June 1964, 836-845.

Howson, Colin ve Urbach, Peter : **Scientific Reasoning: The Bayesian Approach**, 2.b., Illinois, Open Court, 1993, 470 s.

Judge, George G. v. d.: **The Theory and Practice of Econometrics**, New York, John Wiley & Sons, 1985, 1019 s.

Kass, Robert E., Wasserman, Larry : "The Selection of Prior Distributions by Formal Rules," **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 91, No.435, September 1996, 1343-1362.

Lindley, D. V.: **Introduction to Probability and Statistics From A Bayesian Viewpoint, Part 2**, London, Cambridge University Press, 1965, 292 s.

Lindley, Dennis : "Theory and Practice of Bayesian Statistics," **The Statistician**, 32, 1983, 1-11.

Popper, Karl R.: **Bilimsel Araştırmanın Mantığı**, Çev. İlknur Aka – İbrahim Turan, 2. b., İstanbul, Yapı Kredi Yayınları, Kazım Taşkent Klasik Yapıtlar Dizisi, 2003, 596 s.

Raiffa, H. ve Schlaifer, R.: **Applied Statistical Decision Theory**, America, MIT Press, 1968, 356 s.

Samsar, Ahmet : Optimal Para Alanı Teorisi Çerçevesinde Türkiye Analizi, Uzmanlık Yeterlilik Tezi, (Çevrimiçi), http://www.tcmb.gov.tr/kutuphane/TURKCE/tezler/AhmetSamsar.pdf, (04.03.2005), 123 s.

Sivia, D. S. : **Data Analysis, A Bayesian Tutorial**, New York, Oxford Un. Press, 1996, 189 s.

Stigler, Stephen : "Who Discovered Bayes's Theorem," **The American Statistician**, Vol. 37, No. 4., November 1983, s. 290-296.

Tiao ve Zellner : "Bayes's theorem and the use of prior knowledge in regression analysis," **Biometrica**, Vol. 51, 1 ve 2, 1964, 219-230.

Türkmen, İlter : AB bağlamında Türkiye ve İspanya, (Çevrimiçi),http://www.obiv.org.tr/ilter139.htm , (24.05.2005).

Van Hoa, Tran : Growth of Asian Regional Trade and Income Convergence: Evidence from ASEAN+3 Based on Extended Helpman-Krugman Hypothesis and Flexible Modelling Approach, (Çevrimiçi), http://www.uow.edu.au/commerce/econ/wplist.html, (04.02.2005), s. 1-13

Weisberg, Sanford : **Applied Linear Regression**, 2.b., Minnesota, John Wiley & Sons, 1985, 324 s.

Yardımcı, Atilla : 1992, "Çoklu Bağlantılı Çoklu Doğrusal Regresyonda Bayes Yaklaşımı," Y.L., Fen Bilimleri Enstitüsü, Hacettepe Ünv., 72 s.

Zellner, Arnold : **An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics**, New York, John Wiley & Sons, 1971, 431 s.

Zellner, Arnold : **Basic Issues in Econometrics**, Chicago, The University of Chicago Press, 1984, 334 s.

Zellner, Arnold : "Bayesian Analysis of Regression Error Terms," **Journal of the American Statistical Association**, Vol. 70, No. 349, Mar. 1975, 138-144.

OECD

IMF Survey - International Financial Statistics

World Bank - World Development Indicator

External and Intra-European Union Trade - Statistical Yearbook

EK-A- Program Kodları

İlk Aşamada İspanya Modelinin Kodu

```
model ispanya {
     for (i in 1:N) {
     trade.isp[i] ~ dnorm(mu[i] , tau)

       mu[i] <-    b[1]
                   + b[2]*ab.gdp[i]
                   + b[3]*isp.gdp[i]
                   + b[4]*gap.ab.isp[i]
                   + b[5]*ab.pop[i]
                   + b[6]*m2.r[i]
                   + b[7]*i.r[i]
                   + b[8]*e.r[i]
                   + b[9]*u.r[i]
                   + b[10]*dum.93[i]

       numerator[i] <- (mu[i] - mean(trade.isp[]))*(mu[i] -
     mean(trade.isp[]))

       denominator[i] <- (trade.isp[i] -
     mean(trade.isp[]))*(trade.isp[i] - mean(trade.isp[]))

       se[i] <- (mu[i] - trade.isp[i])*(mu[i] - trade.isp[i])
       }
       for (j  in 1:K) {b[j] ~ dnorm(0 , 0.001)}

     tau ~ dgamma(0.01 , 0.01)

     R2  <- sum(numerator[]) / sum(denominator[])
     SSE <- sum(se[])
     MSE <- sum(se[]) / N-K
     sigma2  <- 1/tau
}
```

Verilerin Kodları

```
list(trade.isp = c(16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 16287000,
16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 72091000,
72091000, 72091000, 72091000, 92581000, 110294000, 123415000,
127993000, 157121000, 156977000, 199969000),
      ab.gdp = c(63799999999992.0, 63799999999992.0,
64400000000023.3, 65499999999974.5, 67100000000027.6,
68800000000010.2, 70600000000013.1, 72699999999986.2,
75699999999960.7, 78399999999965.1, 80799999999999.3,
82300000000032.0, 83200000000033.5, 82899999999972.4,
85199999999986.2, 87299999999959.3, 88799999999992.0,
91100000000005.8, 93800000000010.2, 96500000000014.6,
100000000000000.0),
      isp.gdp = c(405957593806.51, 405419854067.80, 410473257190.77,
417739095445.47, 425194446325.34, 435065049009.94, 449219114741.48,
474137836522.39, 498291969203.38, 522344660187.67, 542096607541.32,
555898376214.90, 561063842922.31, 555276542083.58, 568509826257.97,
584186478213.80, 598424638337.95, 622518682626.38, 649569788402.67,
676838429372.28, 705153206187.23),
```

```
      gap.ab.isp = c(7135.16, 7176.42, 7225.26, 7362.19, 7635.01,
7864.93, 7995.63, 7914.71, 8101.65, 8178.07, 8256.36, 8243.38,
8286.74, 8267.28, 8488.35, 8610.18, 8635.39, 8735.67, 8764.93,
8885.29, 9157.60),
      ab.pop = c(354568384, 356055083, 356916846, 357524409,
357971193, 358475350, 359143136, 359986265, 360812786, 362096684,
363718661, 365323934, 366992256, 368855807, 370237192, 371345602,
372373880, 373383763, 374240835, 375176446, 376381404),
      m2.r = c(0.490387658, 0.48738633, 0.458107697, 0.436299485,
0.414032682, 0.419687245, 0.415341542, 0.417172975, 0.437346547,
0.435385401, 0.4594137, 0.469668833, 0.434655275, 0.442417929,
0.443649998, 0.406873782, 0.410609101, 0.431580676, 0.46236553,
0.46364855, 0.486544781),
      i.r = c(15.55, 14.56, 14.41, 12.18, 11.27, 8.82, 8.80, 5.25,
4.84,6.79, 6.72, 5.94, 5.93, 4.57, 4.72, 4.67, 3.56, 1.97, 1.83,
2.31,3.43),
      e.r = c(71.70, 92.32, 109.86, 143.43, 160.76, 170.04, 140.05,
123.48, 116.49, 118.38, 101.93, 103.91, 102.38, 127.26, 133.96,
124.69, 126.66, 146.41, 149.40, 156.17, 180.60),
      u.r = c(11.41, 14.03, 15.84, 17.33, 20.08, 21.45, 20.98,
20.22, 19.24, 17.24, 16.23, 16.31, 18.36, 22.64, 24.12, 22.90,
22.18, 20.75, 18.71, 15.75, 13.93),
      dum.93 = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1), N=21,
K=10)
```

Başlangıç Değerleri

```
list(b = c(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0), tau = 1)
```

İkinci Aşamada İspanya Modelinin Kodu (Tekrar Parametreleştirme)

```
model ispanya {
     for (i in 1:N) {
     trade.isp[i] ~ dnorm(mu[i] , tau)
      mu[i] <-    b[1]*ab.gdp[i]
                  + b[2]*isp.gdp[i]
                  + b[3]*gap.ab.isp[i]
                  + b[4]*ab.pop[i]
                  + b[5]*e.r[i]
      numerator[i] <- (mu[i] - mean(trade.isp[]))*(mu[i] -
     mean(trade.isp[]))

      denominator[i] <- (trade.isp[i] -
     mean(trade.isp[]))*(trade.isp[i] - mean(trade.isp[]))

      se[i] <- (mu[i] - trade.isp[i])*(mu[i] - trade.isp[i])
      }
      for (j  in 1:K) {b[j] ~ dnorm(0 , 0.001)}
     tau ~ dgamma(0.001 , 0.001)
     R2  <- sum(numerator[]) / sum(denominator[])
     SSE <- sum(se[])
     MSE <- sum(se[]) / N-K
     sigma2  <- 1/tau
}
```

Verilerin Kodları

```
list(trade.isp = c(16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 16287000,
16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 16287000, 72091000,
72091000, 72091000, 72091000, 92581000, 110294000, 123415000,
127993000, 157121000, 156977000, 199969000),
      ab.gdp = c(63799999999992.0, 63799999999992.0,
64400000000023.3, 65499999999974.5, 67100000000027.6,
68800000000010.2, 70600000000013.1, 72699999999986.2,
75699999999960.7, 78399999999965.1, 80799999999999.3,
82300000000032.0, 83200000000033.5, 82899999999972.4,
85199999999986.2, 87299999999959.3, 88799999999992.0,
91100000000005.8, 93800000000010.2, 96500000000014.6,
100000000000000.0),
      isp.gdp = c(405957593806.51, 405419854067.80, 410473257190.77,
417739095445.47, 425194446325.34, 435065049009.94, 449219114741.48,
474137836522.39, 498291969203.38, 522344660187.67, 542096607541.32,
555898376214.90, 561063842922.31, 555276542083.58, 568509826257.97,
584186478213.80, 598424638337.95, 622518682626.38, 649569788402.67,
676838429372.28, 705153206187.23),
      gap.ab.isp = c(7135.16, 7176.42, 7225.26, 7362.19, 7635.01,
7864.93, 7995.63, 7914.71, 8101.65, 8178.07, 8256.36, 8243.38,
8286.74, 8267.28, 8488.35, 8610.18, 8635.39, 8735.67, 8764.93,
8885.29, 9157.60),
      ab.pop = c(354568384, 356055083, 356916846, 357524409,
357971193, 358475350, 359143136, 359986265, 360812786, 362096684,
363718661, 365323934, 366992256, 368855807, 370237192, 371345602,
372373880, 373383763, 374240835, 375176446, 376381404),
      e.r = c(71.70, 92.32, 109.86, 143.43, 160.76, 170.04, 140.05,
123.48, 116.49, 118.38, 101.93, 103.91, 102.38, 127.26, 133.96,
124.69, 126.66, 146.41, 149.40, 156.17, 180.60), N = 21, K = 5)
```

Başlangıç Değerleri

```
list(b = c(0, 0, 0, 0, 0), tau = 1)
```

Türkiye Modelinin Kodu

```
model turkiye {
     for (i in 1:N) {
      trade.tr[i] ~ dnorm(mu[i] , tau)

      mu[i] <-    b[1]
                  + b[2]*ab.gdp[i]
                  + b[3]*tr.gdp[i]
                  + b[4]*gap.ab.tr[i]
                  + b[5]*ab.pop[i]
                  + b[6]*m2.r[i]
                  + b[7]*i.r[i]
                  + b[8]*e.r[i]
                  + b[9]*u.r[i]
                  + b[10]*dum.95[i]

      numerator[i] <- (mu[i] - mean(trade.tr[]))*(mu[i] -
     mean(trade.tr[]))

      denominator[i] <- (trade.tr[i] -
     mean(trade.tr[]))*(trade.tr[i] - mean(trade.tr[]))

      se[i] <- (mu[i] - trade.tr[i])*(mu[i] - trade.tr[i])
      }
      for (j  in 1:K) {

            b[j] ~ dnorm(mu.pr[j], tau.pr[j])}

     tau ~ dgamma(0.01 , 0.01)

     R2  <- sum(numerator[]) / sum(denominator[])
     SSE <- sum(se[])
     MSE <- sum(se[]) / N-K
     sigma2  <- 1/tau
}
```

Verilerin Kodları

```
list(trade.tr = c(2800000, 3500000, 3500000, 3500000, 3500000,
8100000, 7800000, 9400000, 9500000, 11100000, 13600000, 14400000,
14900000, 18300000, 16400000, 22600000, 22600000, 22600000,
22600000, 35700000, 47500000),
      ab.gdp = c(63799999999992.0, 63799999999992.0,
64400000000023.3, 65499999999974.5, 67100000000027.6,
68800000000010.2, 70600000000013.1, 72699999999986.2,
75699999999960.7, 78399999999965.1, 80799999999999.3,
82300000000032.0, 83200000000033.5, 82899999999972.4,
85199999999986.2, 87299999999959.3, 88799999999992.0,
91100000000005.8, 93800000000010.2, 96500000000014.6,
100000000000000.0),
      tr.gdp = c(86998893847.72, 91224090785.31, 94474729556.30,
99171073260.90, 105827392421.77, 110316013429.66, 118051342724.57,
129248700013.12, 131989541883.19, 132321937532.17, 144568536161.33,
```

```
145908042264.94, 154639499907.02, 167076042292.37, 157961308234.94,
169318540203.71, 181181054975.77, 194822492993.86, 200846143477.87,
191388405806.37, 205472860897.91),
      gap.ab.tr = c(16037.97, 15915.76, 16020.23, 16248.88,
16588.26, 16998.62, 17362.97, 17736.57, 18523.56, 19241.53,
19640.47, 19979.87, 20021.66, 19666.48, 20406.17, 20766.52, 20965.3,
21355.1, 21981.58, 22834.22, 23521.14),
      ab.pop = c(354568384, 356055083, 356916846, 357524409,
357971193, 358475350, 359143136, 359986265, 360812786, 362096684,
363718661, 365323934, 366992256, 368855807, 370237192, 371345602,
372373880, 373383763, 374240835, 375176446, 376381404),
      m2.r = c(0.1422, 0.1724, 0.2128, 0.2220, 0.2050, 0.2013,
0.2267, 0.2442, 0.2251, 0.2143, 0.1972, 0.2104, 0.2184, 0.2042,
0.2246, 0.2415, 0.2700, 0.2818, 0.2993, 0.3971, 0.3959),
      i.r = c(110.17, 36.58, 30.84, 31.40, 48.38, 44.96, 34.62,
38.85, 73.67, 63.27, 60.31, 65.97, 70.07, 66.10, 106.26, 88.11,
80.35, 85.73, 84.64, 64.87, 54.92),
      e.r = c(76.04, 111.22, 162.55, 225.46, 366.68, 521.98, 674.51,
857.22, 1422.35, 2121.68, 2608.64, 4171.82, 6872.42, 10984.60,
29608.70, 45845.10, 81404.90, 151865.00, 260724.00, 418783.00,
625218.00),
      u.r = c(9.20, 10.20, 10.90, 12.10, 11.90, 11.20, 10.90, 9.40,
8.40, 8.60, 8.00, 8.00, 8.30, 8.70, 8.40, 7.50, 6.50, 6.70, 6.80,
7.70 , 6.60),
      dum.95 = c(0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,1,1),
      mu.pr = c(1000, -0.004707, 0.001203, -0.09723, -0.5302, 0, 0,
0.3216, 0,0),
      tau.pr = c(10000,14919.367, 1.07074, 0.000064, 6.47792, 0.001,
0.001, 0.0000068, 0.001, 0.001),
      N = 21, K = 10)
```

Başlangıç Değerleri

Programın türettiği değerler kullanılmıştır.

EK-B-1- Veri Tabloları - TÜRKİYE MODELİ

Yıl	*TR. Nüfus*	*tr.gdp*	*ab.pop*	*ab.gdp*	*gap.ab.tr*
1970	35321000	58404835478	339.974.976	47.400.000.000.016	12.288,66
1971	36238000	61655997322	341.401.057	48.999.999.999.978	12.651,20
1972	37190000	66234509016	343.627.614	51.199.999.999.972	13.118,87
1973	38157000	68395195329	345.570.553	54.200.000.000.037	13.891,74
1974	39108000	72221542327	347.246.328	55.299.999.999.988	14.078,57
1975	40025000	77402786292	348.644.295	55.000.000.000.018	13.841,53
1976	40911000	85500096332	349.893.642	57.499.999.999.982	14.343,66
1977	41760000	88412712961	350.979.603	59.000.000.000.015	14.692,93
1978	42606000	89741556959	352.152.283	60.800.000.000.018	15.158,95
1979	43503000	89181436095	353.350.599	62.899.999.999.991	15.751,01
1980	44484000	86998893848	354.568.384	63.799.999.999.992	16.037,97
1981	45548000	91224090785	356.055.083	63.799.999.999.992	15.915,76
1982	46696000	94474729556	356.916.846	64.400.000.000.023	16.020,23
1983	47873000	99171073261	357.524.409	65.499.999.999.975	16.248,88
1984	49079000	1,05827E+11	357.971.193	67.100.000.000.028	16.588,26
1985	50286000	1,10316E+11	358.475.350	68.800.000.000.010	16.998,62
1986	51440000	1,18051E+11	359.143.136	70.600.000.000.013	17.362,97
1987	52569000	1,29249E+11	359.986.265	72.699.999.999.986	17.736,57
1988	53723000	1,3199E+11	360.812.786	75.699.999.999.961	18.523,56
1989	54902000	1,32322E+11	362.096.684	78.399.999.999.965	19.241,53
1990	56154000	1,44569E+11	363.718.661	80.799.999.999.999	19.640,47
1991	57262000	1,45908E+11	365.323.934	82.300.000.000.032	19.979,87
1992	58374000	1,54639E+11	366.992.256	83.200.000.000.034	20.021,66
1993	59491000	1,67076E+11	368.855.807	82.899.999.999.972	19.666,48
1994	60612000	1,57961E+11	370.237.192	85.199.999.999.986	20.406,17
1995	61737000	1,69319E+11	371.345.602	87.299.999.999.959	20.766,52
1996	62873000	1,81181E+11	372.373.880	88.799.999.999.992	20.965,30
1997	64015000	1,94822E+11	373.383.763	91.100.000.000.006	21.355,10
1998	65157000	2,00846E+11	374.240.835	93.800.000.000.010	21.981,58
1999	66293000	1,91388E+11	375.176.446	96.500.000.000.015	22.834,22
2000	67420000	2,05473E+11	376.381.404	100.000.000.000.000	23.521,14
2001	68529000	1,90074E+11		101.800.000.000.003	
2002	69626000	2,04869E+11		102.900.000.000.045	
2003				103.800.000.000.047	
2004					

Tablo 4. 7 Türkiye modeli için değişkenlere ilişkin gözlemler

Yıl	*m2.r*	*i.r*	*e.r*	*u.r*	*trade.tr*	*dum*
1970	0,1973	6,93	11,05		0,70	0
1971	0,1992	15,74	14,92		0,70	0
1972	0,2116	11,67	14,15		0,70	0
1973	0,2143	15,44	14,15		0,70	0
1974	0,2005	15,82	13,93		0,70	0
1975	0,1963	19,20	14,44		0,70	0
1976	0,1938	17,36	16,05		0,70	0
1977	0,1956	27,08	18,00		0,70	0
1978	0,1778	45,28	24,28		0,70	0
1979	0,1538	58,69	31,08		2,50	0
1980	0,1422	110,17	76,04	9,19999948	2,80	0
1981	0,1724	36,58	111,22	10,20000649	3,50	0
1982	0,2128	30,84	162,55	10,89999962	3,50	0
1983	0,2220	31,40	225,46	12,10000038	3,50	0
1984	0,2050	48,38	366,68	11,89999962	3,50	0
1985	0,2013	44,96	521,98	11,19999981	8,10	0
1986	0,2267	34,62	674,51	10,89999956	7,80	0
1987	0,2442	38,85	857,22	9,400000532	9,40	0
1988	0,2251	73,67	1.422,35	8,399999619	9,50	0
1989	0,2143	63,27	2.121,68	8,600000381	11,10	0
1990	0,1972	60,31	2.608,64	8	13,60	0
1991	0,2104	65,97	4.171,82	8	14,40	0
1992	0,2184	70,07	6.872,42	8,300000191	14,90	0
1993	0,2042	66,10	10.984,60	8,699999809	18,30	0
1994	0,2246	106,26	29.608,70	8,399999619	16,40	0
1995	0,2415	88,11	45.845,10	7,5	22,60	1
1996	0,2700	80,35	81.404,90	6,5	22,60	1
1997	0,2818	85,73	151.865,00	6,699999809	22,60	1
1998	0,2993	84,64	260.724,00	6,800000191	22,60	1
1999	0,3971	64,87	418.783,00	7,699999809	35,70	1
2000	0,3959	54,92	625.218,00	6,599999905	47,50	1
2001	0,4622	54,40		8,5	40,50	1
2002	0,4445	44,96		10,60000038	46,30	1
2003					52,20	1
2004						1

Tablo 4. 8 Türkiye modeli için değişkenlere ilişkin gözlemler

EK-B-2- Veri Tabloları - İSPANYA MODELİ

Yıl	*İsp. Nüfus*	*isp.gdp*	*ab.pop*	*ab.gdp*	*gap.ab.isp*
1970	33779000	284320312465	339.974.976	47.400.000.000.016	5.525,13
1971	34190000	297539758829	341.401.057	48.999.999.999.978	5.650,08
1972	34448000	321788487693	343.627.614	51.199.999.999.972	5.558,57
1973	34810000	346850791776	345.570.553	54.200.000.000.037	5.720,09
1974	35147000	366339567182	347.246.328	55.299.999.999.988	5.502,23
1975	35515000	368325966942	348.644.295	55.000.000.000.018	5.404,39
1976	35937000	380494660408	349.893.642	57.499.999.999.982	5.845,74
1977	36367000	391295265409	350.979.603	59.000.000.000.015	6.050,47
1978	36778000	397019849072	352.152.283	60.800.000.000.018	6.470,22
1979	37108000	397184795245	353.350.599	62.899.999.999.991	7.097,54
1980	37386000	405957593807	354.568.384	63.799.999.999.992	7.135,16
1981	37741000	405419854068	356.055.083	63.799.999.999.992	7.176,42
1982	37943000	410473257191	356.916.846	64.400.000.000.023	7.225,26
1983	38121000	417739095445	357.524.409	65.499.999.999.975	7.362,19
1984	38273000	425194446325	357.971.193	67.100.000.000.028	7.635,01
1985	38408000	435065049010	358.475.350	68.800.000.000.010	7.864,93
1986	38519000	449219114741	359.143.136	70.600.000.000.013	7.995,63
1987	38609000	474137836522	359.986.265	72.699.999.999.986	7.914,71
1988	38691000	498291969203	360.812.786	75.699.999.999.961	8.101,65
1989	38768000	522344660188	362.096.684	78.399.999.999.965	8.178,07
1990	38836000	542096607541	363.718.661	80.799.999.999.999	8.256,36
1991	38916000	555898376215	365.323.934	82.300.000.000.032	8.243,38
1992	39006000	561063842922	366.992.256	83.200.000.000.034	8.286,74
1993	39083000	555276542084	368.855.807	82.899.999.999.972	8.267,28
1994	39143000	568509826258	370.237.192	85.199.999.999.986	8.488,35
1995	39210000	584186478214	371.345.602	87.299.999.999.959	8.610,18
1996	39340000	598424638338	372.373.880	88.799.999.999.992	8.635,39
1997	39745000	622518682626	373.383.763	91.100.000.000.006	8.735,67
1998	39853000	649569788403	374.240.835	93.800.000.000.010	8.764,93
1999	40202000	676838429372	375.176.446	96.500.000.000.015	8.885,29
2000	40500000	705153206187	376.381.404	100.000.000.000.000	9.157,60
2001	40734000	724008431360		101.800.000.000.003	
2002	40917000	738564153902		102.900.000.000.045	
2003				103.800.000.000.047	
2004					

Tablo 4. 9 İspanya modeli için değişkenlere ilişkin gözlemler

Yıl	*m2.r*	*i.r*	*e.r*	*u.r*	*trade.isp*	*dum*
1970	0,541292776	5,76	70			0
1971	0,58365903	8,24	69,469			0
1972	0,616365202	8,29	64,271			0
1973	0,618051917	11,39	58,26	2,09		0
1974	0,582656037	15,72	57,686	2,41		0
1975	0,592232527	16,93	57,407	3,53		0
1976	0,594495665	17,63	66,903	4,47		0
1977	0,555195228	24,53	75,962	5,19		0
1978	0,530757643	19,78	76,668	6,94		0
1979	0,505438982	15,67	67,125	8,63		0
1980	0,490387658	15,55	71,702	11,41	16,287	0
1981	0,48738633	14,56	92,322	14,03	16,287	0
1982	0,458107697	14,41	109,859	15,84	16,287	0
1983	0,436299485	12,18	143,43	17,33	16,287	0
1984	0,414032682	11,27	160,761	20,08	16,287	0
1985	0,419687245	8,82	170,044	21,45	16,287	0
1986	0,415341542	8,80	140,048	20,98	16,287	0
1987	0,417172975	5,25	123,478	20,22	16,287	0
1988	0,437346547	4,84	116,487	19,24	16,287	0
1989	0,435385401	6,79	118,378	17,24	16,287	0
1990	0,4594137	6,72	101,934	16,23	72,091	0
1991	0,469668833	5,94	103,912	16,31	72,091	0
1992	0,434655275	5,93	102,379	18,36	72,091	0
1993	0,442417929	4,57	127,26	22,64	72,091	1
1994	0,443649998	4,72	133,958	24,12	92,581	1
1995	0,406873782	4,67	124,689	22,9	110,294	1
1996	0,410609101	3,56	126,662	22,18	123,415	1
1997	0,431580676	1,97	146,414	20,75	127,993	1
1998	0,46236553	1,83	149,395	18,71	157,121	1
1999	0,46364855	2,31	156,174	15,75	156,977	1
2000	0,486544781	3,43	180,595	13,93	199,969	1
2001		3,59		10,49	208,638	1
2002		3,07		11,36	212,324	1
2003				11,3	223,053	1
2004						1

Tablo 4. 10 İspanya modeli için değişkenlere ilişkin gözlemler