SAYISAL ANALİZ

HESSE MATRİSİ (HESSIAN MATRIX)

Skaler değerli bir fonksiyonun ya da skaler alanın ikinci dereceden kısmi türevlerinden oluşan bir kare matristir.

Çok değişkenli bir fonksiyonun yerel eğriliğini ifade eder.

Eğer f'in tüm ikinci dereceden kısmi türevleri alınabiliyorsa ve fonksiyonun tanım kümesinde sürekliyse, o zaman f'in Hesse matrisi H bir kare matris nxn matris olarak şu şekilde tanımlanır;

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 . \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 . \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 . \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 . \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n . \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n . \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

f'in karışık türevlerinin sürekli oldukları kabul edilirse, türevleme sırası önemli değildir. Yani Hessian ilk köşegene göre simetriktir. Örneğin;

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

ÖRNEK ÇÖZÜMLER

Örnek 1 = $f(x,y) = x^3 - 2xy - y^6$'nın $(1,2)$ noktasındaki Hessian'ı;

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (x^3 - 2xy - y^6) = 3x^2 - 2y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (x^3 - 2xy - y^6) = -2x - 6y^5$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (3x^2 - 2y) = 6x$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (3x^2 - 2y) = -2$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (-2x - 6y^5) = -2$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (-2x - 6y^5) = -30y^4$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -30y^4 \end{bmatrix}$$

$$Hf(1,2) = \begin{bmatrix} 6.1 & -2 \\ -2 & -30.2^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & -480 \end{bmatrix}$$

Örnek 2 = $f(x,y) = e^{x/2} . \sin y$'nin $(0, \pi/2)$ noktasındaki Hessian'ı;

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (e^{x/2} . \sin y) = \frac{1}{2} . e^{x/2} . \sin y$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (e^{x/2} . \sin y) = e^{x/2} . \cos y$$

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (\frac{1}{2} . e^{x/2} . \sin y) = \frac{1}{4} . e^{x/2} . \sin y$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (\frac{1}{2} . e^{x/2} . \sin y) = \frac{1}{2} . e^{x/2} . \cos y$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} . (e^{x/2} . \cos y) = \frac{1}{2} . e^{x/2} . \cos y$$

$$f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} . (e^{x/2} . \cos y) = e^{x/2} . (-\sin y)$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix}$$

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} e^{x/2} . \sin y & \frac{1}{2} e^{x/2} . \cos y \\ \frac{1}{2} e^{x/2} . \cos y & -e^{x/2} . \sin y \end{bmatrix}$$

$$Hf(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} . e^0 . \sin(\pi/2) & \frac{1}{2} e^0 . \cos(\pi/2) \\ \frac{1}{2} e^0 . \cos(\pi/2) & -e^0 . \sin(\pi/2) \end{bmatrix}$$

$$Hf(0, \pi/2) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$