

Projet personnel hors cursus académique

Réalisé de manière autonome

Étude et implémentation de méthodes de pricing d'options financières

Black–Scholes, Monte Carlo et volatilité stochastique

Auteur : Fares Osman

Statut : Étudiant ingénieur – Mines Saint-Étienne

Nature du projet : Travail personnel, hors enseignement encadré

Objectif : Approfondissement en finance quantitative

Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Cadre probabiliste	3
1.2	Processus stochastiques	3
1.3	Mouvement brownien	4
1.4	Équations différentielles stochastiques	4
1.5	Mesure risque-neutre et valorisation	4
1.6	Notations financières	4
1.7	Principes financiers des options	5
2	Modèle de Black–Scholes	5
2.1	Hypothèses du modèle	5
2.2	Dynamique du sous-jacent	6
2.3	Dérivation de l'équation de Black–Scholes (formule d'Itô)	6
2.4	Formule de valorisation	7
2.5	Formules de Black–Scholes	7
2.6	Illustration : prix du call en fonction de S_0	8
2.7	Remarques et limites du modèle	8
3	Sensibilités : les Greeks	8
3.1	Définition générale	8
3.2	Delta	9
3.3	Gamma	9
3.4	Vega	9
3.5	Validation numérique	10
3.6	Résultats : comparaison analytique vs différences finies	10
4	Volatilité implicite	10
4.1	Définition	10
4.2	Résolution numérique	10
4.3	Smile et surface de volatilité	11
4.4	Rôle dans la suite du projet	11
4.5	Résultats : smile de volatilité implicite	11
5	Méthodes de Monte Carlo pour le pricing	12
5.1	Principe général	12
5.2	Simulation du sous-jacent	12
5.3	Estimateur Monte Carlo	13
5.4	Erreur statistique et intervalle de confiance	13
5.5	Réduction de variance	13
5.6	Comparaison avec Black–Scholes	13
5.7	Résultats : convergence Monte Carlo (GBM)	14
6	Synthèse des validations numériques	14
7	Modèle de volatilité stochastique de Heston	15
7.1	Présentation du modèle	15
7.2	Interprétation des paramètres	15
7.3	Méthodes de pricing	15
7.4	Schéma de discrétisation	15
7.5	Résultats : skew Heston vs Black–Scholes (inversion en volatilité implicite)	16
7.6	Contrôles de cohérence (bornes d'arbitrage et mesure risque-neutre)	17
7.7	Calibration	17

7.8 Lien avec la suite du projet	17
8 Conclusion et perspectives	17
A Reproductibilité et organisation du code	19

1 Préliminaires

La valorisation des produits dérivés financiers constitue un problème central en finance quantitative, à l'interface entre probabilités, analyse stochastique et modélisation économique. Dans le cadre des marchés continus et en absence d'arbitrage, le pricing d'options repose sur des principes mathématiques rigoureux permettant de relier la dynamique du sous-jacent aux prix observés sur le marché.

L'objectif de ce rapport est double :

- établir un cadre théorique cohérent pour la valorisation d'options européennes ;
- mettre en œuvre et comparer plusieurs méthodes de pricing, analytiques et numériques.

Dans un premier temps, le modèle de Black–Scholes est étudié en détail. Il constitue une référence fondamentale en raison de sa simplicité et de l'existence de formules fermées pour les options vanilles. Ses limites empiriques, notamment l'hypothèse de volatilité constante, motivent ensuite l'introduction de méthodes numériques (Monte Carlo) et de modèles plus riches.

La suite du travail est consacrée à :

- l'analyse des sensibilités (Greeks) et leur validation numérique ;
- le calcul de la volatilité implicite et l'étude des smiles de volatilité ;
- l'implémentation de méthodes de Monte Carlo avec réduction de variance ;
- l'étude du modèle de volatilité stochastique de Heston et de son impact sur la structure de volatilité implicite.

L'ensemble des résultats présentés repose sur des implémentations numériques développées spécifiquement pour ce projet, permettant de relier de manière explicite les hypothèses théoriques aux observations numériques.

1.1 Cadre probabiliste

Définition 1 (Espace probabilisé). On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, où :

- Ω est l'ensemble des états possibles du monde,
- \mathcal{F} est une tribu sur Ω ,
- \mathbb{P} est une mesure de probabilité.

Définition 2 (Variable aléatoire). Une variable aléatoire réelle est une application mesurable

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Lorsque X est intégrable, son espérance est définie par :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Définition 3 (Loi normale). Une variable aléatoire Z suit une loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0, 1)$, si sa densité est donnée par :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

On note $N(\cdot)$ sa fonction de répartition.

1.2 Processus stochastiques

Définition 4 (Processus stochastique). Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires $(X_t)_{t \geq 0}$ définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Définition 5 (Filtration). Une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{F} , représentant l'information disponible au cours du temps.

Un processus (X_t) est dit *adapté* si X_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout t .

1.3 Mouvement brownien

Définition 6 (Mouvement brownien standard). Un mouvement brownien standard (W_t) $_{t \geq 0}$ est un processus stochastique vérifiant :

- $W_0 = 0$,
- pour tout $t \geq 0$, $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$,
- les accroissements sont indépendants et stationnaires,
- les trajectoires sont continues.

Le mouvement brownien constitue la source fondamentale d'aléa dans les modèles continus de finance.

1.4 Équations différentielles stochastiques

Définition 7 (Processus d'Itô). Un processus (S_t) $_{t \geq 0}$ est dit processus d'Itô s'il vérifie une équation différentielle stochastique de la forme :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Ce processus correspond au mouvement brownien géométrique, utilisé pour modéliser le prix d'un actif financier dans le modèle de Black–Scholes.

1.5 Mesure risque-neutre et valorisation

Hypothèse (Absence d'arbitrage). On suppose que le marché est sans opportunité d'arbitrage.

Sous cette hypothèse, il existe une probabilité \mathbb{Q} , équivalente à \mathbb{P} , appelée *mesure risque-neutre*, telle que le prix actualisé des actifs est une martingale.

Propriété 1 (Formule de valorisation). Soit $\Phi(S_T)$ le payoff d'un produit dérivé à maturité T . Sa valeur à la date initiale est donnée par :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\Phi(S_T)],$$

où r est le taux sans risque constant.

Cette relation est le fondement des méthodes de pricing étudiées dans la suite du rapport.

1.6 Notations financières

Dans toute la suite du document, on se place dans un cadre de marché continu, sur un horizon temporel $[0, T]$, où $T > 0$ désigne une maturité fixée.

Définition 8 (Actif sous-jacent). On note $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ le processus représentant le prix de l'actif sous-jacent à la date t .

La valeur initiale de l'actif est notée :

$$S_0 > 0.$$

Définition 9 (Paramètres financiers). On introduit les paramètres suivants :

- $K > 0$: prix d'exercice (strike),
- $T > 0$: maturité du contrat,
- $r \in \mathbb{R}$: taux d'intérêt sans risque constant,
- $q \in \mathbb{R}$: taux de dividende continu,
- $\sigma > 0$: volatilité.

Définition 10 (Option européenne). Une option européenne est un contrat financier donnant lieu à un paiement unique à la date T , dépendant uniquement de la valeur S_T de l'actif sous-jacent à maturité.

Définition 11 (Payoffs). Les payoffs des options européennes standards sont définis par :

$$\text{Call : } \Phi_{\text{call}}(S_T) = (S_T - K)^+, \quad (1)$$

$$\text{Put : } \Phi_{\text{put}}(S_T) = (K - S_T)^+, \quad (2)$$

où l'on utilise la notation :

$$x^+ = \max(x, 0).$$

Définition 12 (Valeur d'une option). On note C_0 (resp. P_0) la valeur à la date initiale $t = 0$ d'une option call (resp. put) européenne de maturité T et de strike K .

Propriété 2 (Parité put-call). Dans un marché sans arbitrage, les prix d'un call et d'un put européens de mêmes paramètres vérifient la relation :

$$C_0 - P_0 = S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}.$$

Cette relation sera utilisée comme test de cohérence numérique dans les implémentations présentées ultérieurement.

1.7 Principes financiers des options

Cette section introduit les notions financières nécessaires à la valorisation d'options : prime, valeur intrinsèque, valeur temps, volatilité et principe de couverture.

Définition 13 (Prime). Le prix d'une option à la date initiale $t = 0$ est appelé *prime*. On note C_0 (resp. P_0) la prime d'un call (resp. put) européen.

Définition 14 (Valeur intrinsèque). La valeur intrinsèque d'un call (resp. put) à la date 0 est :

$$\max(S_0 - K, 0) \quad (\text{resp. } \max(K - S_0, 0)).$$

Définition 15 (Valeur temps). La *valeur temps* est définie comme la différence entre la prime et la valeur intrinsèque. Elle représente la valeur de l'incertitude sur l'évolution future de S_t jusqu'à T .

Définition 16 (Volatilité). La volatilité σ mesure l'amplitude des fluctuations du sous-jacent. Dans le modèle de Black–Scholes, elle est supposée constante et intervient comme paramètre de dispersion de la loi de S_T .

Propriété 3 (Monotonie en volatilité). À paramètres (S_0, K, T, r, q) fixés, les prix C_0 et P_0 sont des fonctions croissantes de σ .

Définition 17 (Couverture). La couverture d'une position optionnelle consiste à construire un portefeuille combinant option et sous-jacent (et éventuellement actif sans risque) afin de réduire l'exposition au risque de marché. Dans le cadre de Black–Scholes, l'argument de valorisation repose sur l'existence d'une couverture instantanée fondée sur le Delta.

2 Modèle de Black–Scholes

Dans cette section, on introduit le modèle de Black–Scholes, qui constitue le cadre de référence pour la valorisation des options européennes dans un marché continu.

2.1 Hypothèses du modèle

Le modèle de Black–Scholes repose sur les hypothèses suivantes :

- le marché est sans opportunité d'arbitrage ;
- les actifs sont parfaitement liquides et divisibles ;
- il n'existe pas de coûts de transaction ni de contraintes de vente à découvert ;
- le taux d'intérêt sans risque r et le taux de dividende q sont constants ;
- la volatilité σ est constante ;
- le prix du sous-jacent suit une dynamique continue.

Ces hypothèses permettent l'obtention de formules analytiques explicites pour le prix des options européennes.

2.2 Dynamique du sous-jacent

Hypothèse 2 (Dynamique de Black–Scholes). Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le prix du sous-jacent $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$ suit l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}, \quad (3)$$

où $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Propriété 4. La solution explicite de cette équation est donnée par :

$$S_T = S_0 \exp \left((r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma \sqrt{T} Z \right), \quad (4)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Preuve. On applique la formule d'Itô à la fonction $f(t, S_t) = \ln(S_t)$. Les dérivées partielles sont :

$$\frac{\partial f}{\partial S} = \frac{1}{S_t}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = -\frac{1}{S_t^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

La dynamique de $f(S_t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial f}{\partial S} dW_t^{\mathbb{Q}} \\ &= \left((r - q) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et T :

$$\ln S_T - \ln S_0 = (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_0).$$

Comme $W_T^{\mathbb{Q}} - W_0 \sim \mathcal{N}(0, T)$, on peut écrire $W_T^{\mathbb{Q}} = \sqrt{T}Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, d'où le résultat en prenant l'exponentielle.

2.3 Dérivation de l'équation de Black–Scholes (formule d'Itô)

On note $V(t, S)$ la valeur à la date t d'un produit dérivé de payoff $\Phi(S_T)$ à la maturité T .

Hypothèse 3 (Régularité). On suppose que V est suffisamment régulière : $V \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times (0, +\infty))$.

Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le sous-jacent suit :

$$dS_t = (r - q) S_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Propriété 5 (Formule d'Itô appliquée à $V(t, S_t)$). On a :

$$dV(t, S_t) = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q) S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Construction d'un portefeuille de couverture. On considère le portefeuille autofinançant :

$$\Pi_t = V(t, S_t) - \Delta_t S_t.$$

En choisissant

$$\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}(t, S_t),$$

le terme stochastique en $dW_t^{\mathbb{Q}}$ est éliminé, et Π_t devient localement sans risque.

Hypothèse 4 (Absence d'arbitrage). Un portefeuille sans risque doit croître au taux sans risque, donc :

$$d\Pi_t = r \Pi_t dt.$$

En substituant les expressions ci-dessus, on obtient l'équation aux dérivées partielles de Black–Scholes :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV = 0, \quad (t, S) \in [0, T) \times (0, +\infty), \quad (5)$$

avec condition terminale :

$$V(T, S) = \Phi(S).$$

Remarque 1. Pour $\Phi(S) = (S - K)^+$ (call) ou $\Phi(S) = (K - S)^+$ (put), la résolution de cette EDP conduit aux formules fermées de Black–Scholes présentées dans la suite.

2.4 Formule de valorisation

Soit $\Phi(S_T)$ le payoff d'une option européenne de maturité T . D'après la propriété de valorisation sous la mesure risque-neutre, sa valeur à la date initiale s'écrit :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\Phi(S_T)]. \quad (6)$$

Dans le cadre du modèle de Black–Scholes, cette espérance peut être calculée analytiquement pour les options vanilles.

2.5 Formules de Black–Scholes

On définit les quantités :

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - q + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}. \quad (7)$$

Démonstration (Calcul pour un Call). Le prix du Call est $C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T - K)^+]$. En utilisant l'expression de S_T , la condition d'exercice $S_T > K$ équivaut à :

$$S_0 e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}Z} > K \iff -Z < \frac{\ln(S_0/K) + (r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \equiv d_2.$$

L'espérance se décompose en deux intégrales sur le domaine $\{Z > -d_2\}$:

$$C_0 = e^{-rT} \left(\int_{-d_2}^{+\infty} S_0 e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma\sqrt{T}z} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz - K \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dz \right).$$

Le second terme correspond à la probabilité qu'une variable normale centrée réduite soit supérieure à $-d_2$, soit $N(d_2)$. Pour le premier terme, on complète le carré dans l'exponentielle :

$$-\frac{z^2}{2} + \sigma\sqrt{T}z - \frac{\sigma^2 T}{2} = -\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2.$$

En posant le changement de variable $u = z - \sigma\sqrt{T}$, la borne d'intégration devient $-d_2 - \sigma\sqrt{T} = -d_1$. On obtient finalement :

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2).$$

Propriété 6 (Prix du call européen). Le prix à la date 0 d'un call européen est donné par :

$$C_0 = S_0 e^{-qT} N(d_1) - K e^{-rT} N(d_2), \quad (8)$$

où $N(\cdot)$ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Propriété 7 (Prix du put européen). Le prix à la date 0 d'un put européen est donné par :

$$P_0 = K e^{-rT} N(-d_2) - S_0 e^{-qT} N(-d_1). \quad (9)$$

Ces expressions satisfont la relation de parité put-call introduite précédemment.

2.6 Illustration : prix du call en fonction de S_0

La Figure 1 représente le prix d'un call européen en fonction du prix initial du sous-jacent S_0 , calculé avec la formule de Black–Scholes.

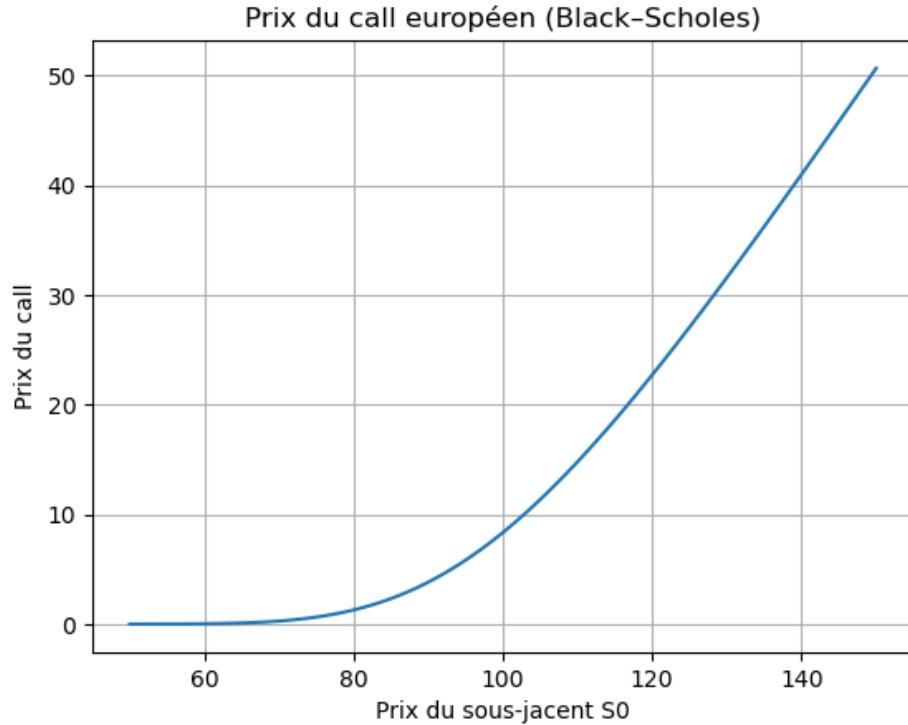


FIGURE 1 – Prix du call européen (Black–Scholes) en fonction de S_0 .

La courbe est (i) croissante, ce qui est cohérent avec un Delta positif, et (ii) convexe, ce qui est cohérent avec un Gamma strictement positif. On retrouve également le comportement limite : lorsque $S_0 \ll K$, le call vaut presque 0 ; lorsque $S_0 \gg K$, la croissance devient quasi linéaire et le prix se rapproche asymptotiquement de $S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}$.

2.7 Remarques et limites du modèle

Le modèle de Black–Scholes repose sur l'hypothèse de volatilité constante, qui est contredite par l'observation empirique des marchés (smile et skew de volatilité).

Ces limitations motivent l'introduction de méthodes numériques (Monte Carlo) et de modèles plus sophistiqués, tels que les modèles à volatilité locale ou stochastique, étudiés dans la suite de ce travail.

3 Sensibilités : les Greeks

Les Greeks mesurent la sensibilité du prix d'une option par rapport aux paramètres du modèle. Ils jouent un rôle central en gestion du risque et constituent un outil fondamental pour la couverture dynamique des portefeuilles d'options.

Dans cette section, on se place dans le cadre du modèle de Black–Scholes introduit précédemment.

3.1 Définition générale

Définition 13 (Greeks). Les Greeks sont définis comme les dérivées partielles du prix d'une option par rapport aux variables du modèle.

Soit $V_0 = V(S_0, K, T, r, q, \sigma)$ le prix d'une option. On définit :

- **Delta** : sensibilité au prix du sous-jacent,
- **Gamma** : convexité par rapport au sous-jacent,
- **Vega** : sensibilité à la volatilité,
- **Theta** : sensibilité au passage du temps,
- **Rho** : sensibilité au taux d'intérêt.

Dans la suite, on se concentre sur les sensibilités principales : Delta, Gamma et Vega.

3.2 Delta

Définition 14 (Delta). Le Delta d'une option est défini par :

$$\Delta = \frac{\partial V_0}{\partial S_0}.$$

Propriété 8. Dans le modèle de Black–Scholes, le Delta d'un call européen est donné par :

$$\Delta_{\text{call}} = e^{-qT} N(d_1),$$

et celui d'un put européen par :

$$\Delta_{\text{put}} = e^{-qT} (N(d_1) - 1).$$

Le Delta mesure la variation instantanée du prix de l'option pour une variation du prix du sous-jacent.

3.3 Gamma

Définition 15 (Gamma). Le Gamma d'une option est défini par :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V_0}{\partial S_0^2}.$$

Propriété 9. Dans le modèle de Black–Scholes, le Gamma est identique pour le call et le put et s'écrit :

$$\Gamma = \frac{e^{-qT}}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right).$$

Le Gamma mesure la convexité du prix de l'option et joue un rôle central dans la gestion du risque non linéaire.

3.4 Vega

Définition 16 (Vega). Le Vega d'une option est défini par :

$$\text{Vega} = \frac{\partial V_0}{\partial \sigma}.$$

Propriété 10. Dans le modèle de Black–Scholes, le Vega (identique pour call et put) est donné par :

$$\text{Vega} = S_0 e^{-qT} \sqrt{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right).$$

Le Vega mesure la sensibilité du prix de l'option à une variation de la volatilité et sera utilisé dans la section consacrée à la volatilité implicite.

3.5 Validation numérique

Dans les implémentations numériques, les Greeks analytiques sont validés par des approximations en différences finies. Par exemple, le Delta est approché par :

$$\Delta \approx \frac{V(S_0 + h) - V(S_0 - h)}{2h},$$

où $h > 0$ est un pas de discrétisation suffisamment petit.

Cette validation permet de contrôler la cohérence des formules analytiques et la stabilité numérique des implémentations.

3.6 Résultats : comparaison analytique vs différences finies

Les Greeks analytiques ont été validés par une approximation en différences finies centrées. Le Tableau 1 présente les résultats obtenus pour un call européen.

TABLE 1 – Validation des Greeks : analytique vs différences finies (call européen).

Greek	Analytique	Différences finies	$ A - FD $
Delta(call)	0.554049	0.554049	5.97×10^{-11}
Gamma(call)	0.019528	0.019528	2.88×10^{-10}
Vega(call)	39.055420	39.055420	1.25×10^{-9}

Les écarts sont de l'ordre de 10^{-10} à 10^{-9} , ce qui confirme la cohérence des formules analytiques et la stabilité numérique de l'approximation par différences finies.

4 Volatilité implicite

La volatilité σ n'est pas directement observable sur les marchés. Dans la pratique, elle est inférée à partir des prix observés des options. Cette volatilité déduite est appelée *volatilité implicite*.

4.1 Définition

Définition 17 (Volatilité implicite). Soit V_0^{mkt} le prix observé sur le marché d'une option européenne de paramètres (S_0, K, T, r, q) . La volatilité implicite σ_{impl} est définie comme l'unique solution positive de l'équation :

$$V^{\text{BS}}(S_0, K, T, r, q, \sigma_{\text{impl}}) = V_0^{\text{mkt}},$$

où V^{BS} désigne le prix donné par la formule de Black–Scholes.

L'existence et l'unicité de cette solution sont garanties par la monotonie du prix de l'option par rapport à σ .

4.2 Résolution numérique

L'équation définissant la volatilité implicite ne possède pas de solution analytique explicite. Elle est donc résolue numériquement à l'aide de méthodes itératives.

Méthode 1 (Bisection). On cherche σ_{impl} dans un intervalle $[\sigma_{\text{min}}, \sigma_{\text{max}}]$ tel que :

$$V^{\text{BS}}(\sigma_{\text{min}}) \leq V_0^{\text{mkt}} \leq V^{\text{BS}}(\sigma_{\text{max}}),$$

puis on applique un algorithme de bisection jusqu'à convergence.

Cette méthode est robuste mais relativement lente.

Méthode 2 (Newton–Raphson). En utilisant le Vega défini précédemment, on itère :

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{V^{\text{BS}}(\sigma_n) - V_0^{\text{mkt}}}{\text{Vega}(\sigma_n)}.$$

Cette méthode est plus rapide mais nécessite une initialisation adéquate et une vigilance sur les cas limites.

4.3 Smile et surface de volatilité

Définition 18 (Smile de volatilité). Pour une maturité T fixée, le *smile de volatilité* est la fonction :

$$K \mapsto \sigma_{\text{impl}}(K, T).$$

Dans le modèle de Black–Scholes, la volatilité est supposée constante, ce qui implique un smile plat. Cependant, les données de marché présentent généralement des smiles ou des skews de volatilité, traduisant l'inadéquation de l'hypothèse de volatilité constante.

Définition 19 (Surface de volatilité). La surface de volatilité implicite est définie par la fonction :

$$(K, T) \mapsto \sigma_{\text{impl}}(K, T).$$

Cette surface constitue l'objet central de la calibration des modèles avancés ultérieurement.

4.4 Rôle dans la suite du projet

La volatilité implicite est utilisée :

- comme indicateur synthétique des anticipations du marché,
- pour comparer les prix issus de différents modèles,
- comme cible de calibration pour les modèles à volatilité locale ou stochastique.

Les implémentations numériques présentées dans la suite permettent de calculer et de visualiser smiles et surfaces de volatilité implicite à partir de données simulées ou de marché.

4.5 Résultats : smile de volatilité implicite

La Figure 2 présente des smiles de volatilité implicite obtenus à partir de données synthétiques pour différentes maturités.

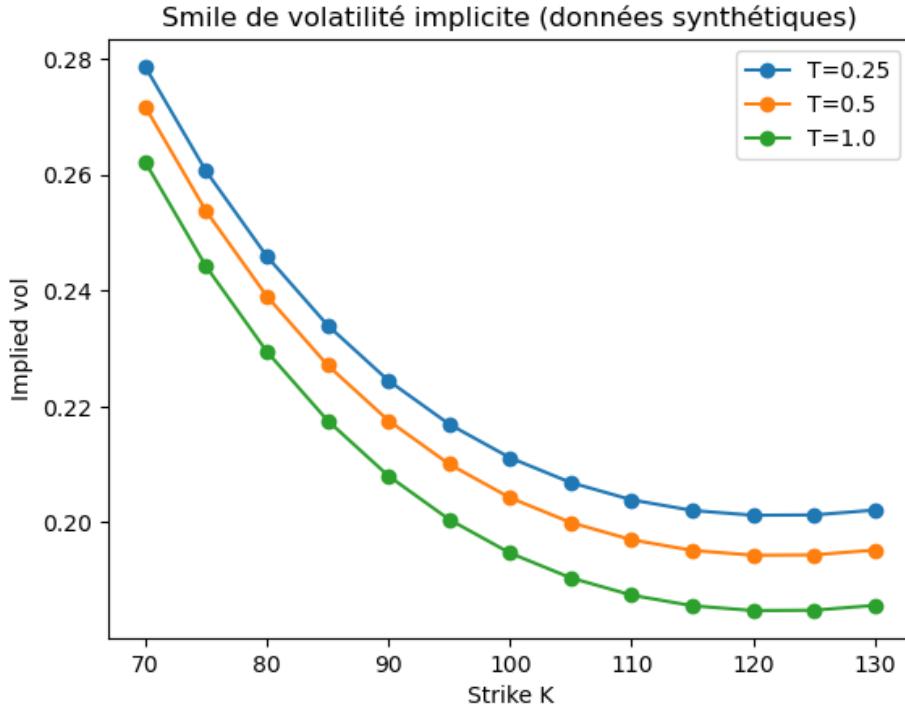


FIGURE 2 – Smile de volatilité implicite (données synthétiques) pour plusieurs maturités.

Le modèle de Black–Scholes suppose une volatilité constante, ce qui correspondrait à un smile plat. L’apparition d’un smile (ou d’un skew) met en évidence la nécessité de modèles plus riches, notamment à volatilité stochastique. Cela motive naturellement l’introduction du modèle de Heston dans la section suivante.

5 Méthodes de Monte Carlo pour le pricing

Les méthodes de Monte Carlo constituent un outil fondamental en finance quantitative pour la valorisation de produits dérivés lorsque les formules analytiques ne sont pas disponibles ou lorsque le modèle sous-jacent est trop complexe.

Dans cette section, on présente l’application des méthodes de Monte Carlo à la tarification des options européennes dans le cadre du modèle de Black–Scholes.

5.1 Principe général

Principe. Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le prix d’une option européenne de payoff $\Phi(S_T)$ est donné par :

$$V_0 = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\Phi(S_T)].$$

La méthode de Monte Carlo consiste à approximer cette espérance par une moyenne empirique calculée à partir de simulations indépendantes du sous-jacent à maturité.

5.2 Simulation du sous-jacent

Sous le modèle de Black–Scholes, la valeur du sous-jacent à la maturité T s’écrit :

$$S_T = S_0 \exp \left((r - q - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T} Z \right), \quad (10)$$

où $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

On génère un échantillon $(Z_i)_{1 \leq i \leq N}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ce qui permet d’obtenir N trajectoires indépendantes du sous-jacent à maturité.

5.3 Estimateur Monte Carlo

Définition 20 (Estimateur Monte Carlo). L'estimateur Monte Carlo du prix de l'option est défini par :

$$\widehat{V}_0^{(N)} = e^{-rT} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(S_T^{(i)}),$$

où $S_T^{(i)}$ est la i -ème réalisation simulée du sous-jacent à la maturité.

Propriété 11. L'estimateur $\widehat{V}_0^{(N)}$ est non biaisé et converge presque sûrement vers V_0 lorsque $N \rightarrow \infty$.

5.4 Erreur statistique et intervalle de confiance

D'après le théorème central limite, on a :

$$\sqrt{N} (\widehat{V}_0^{(N)} - V_0) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\Phi^2),$$

où σ_Φ^2 désigne la variance du payoff actualisé.

On en déduit un intervalle de confiance asymptotique à 95% :

$$\widehat{V}_0^{(N)} \pm 1.96 \frac{\widehat{\sigma}_\Phi}{\sqrt{N}},$$

où $\widehat{\sigma}_\Phi$ est une estimation empirique de l'écart-type.

Cette relation montre que l'erreur décroît en $O(N^{-1/2})$, ce qui justifie l'utilisation de techniques de réduction de variance.

5.5 Réduction de variance

Méthode 1 (Variables antithétiques). Pour chaque réalisation Z , on considère également $-Z$. Cette symétrisation permet de réduire la variance de l'estimateur sans coût de calcul significatif supplémentaire.

Méthode 2 (Variable de contrôle). On utilise une variable aléatoire Y de prix connu, fortement corrélée avec le payoff étudié. Dans le cadre du modèle de Black–Scholes, le prix analytique constitue un choix naturel de variable de contrôle.

L'estimateur corrigé s'écrit alors :

$$\widehat{V}_0^{\text{CV}} = \widehat{V}_0^{(N)} + \beta (V^{\text{BS}} - \widehat{V}_{(N)}^{\text{BS}}),$$

où β est choisi de manière à minimiser la variance.

5.6 Comparaison avec Black–Scholes

Les implémentations numériques permettent de comparer les prix obtenus par Monte Carlo avec les formules analytiques de Black–Scholes.

Cette comparaison est utilisée :

- pour valider les implémentations Monte Carlo,
- pour étudier la convergence en fonction du nombre de simulations,
- pour analyser l'impact des techniques de réduction de variance.

5.7 Résultats : convergence Monte Carlo (GBM)

La Figure 3 compare l'erreur absolue $|\hat{V}_0^{(N)} - V_0^{BS}|$ en fonction du nombre de simulations N , pour trois estimateurs : Monte Carlo standard, variables antithétiques, et variable de contrôle.

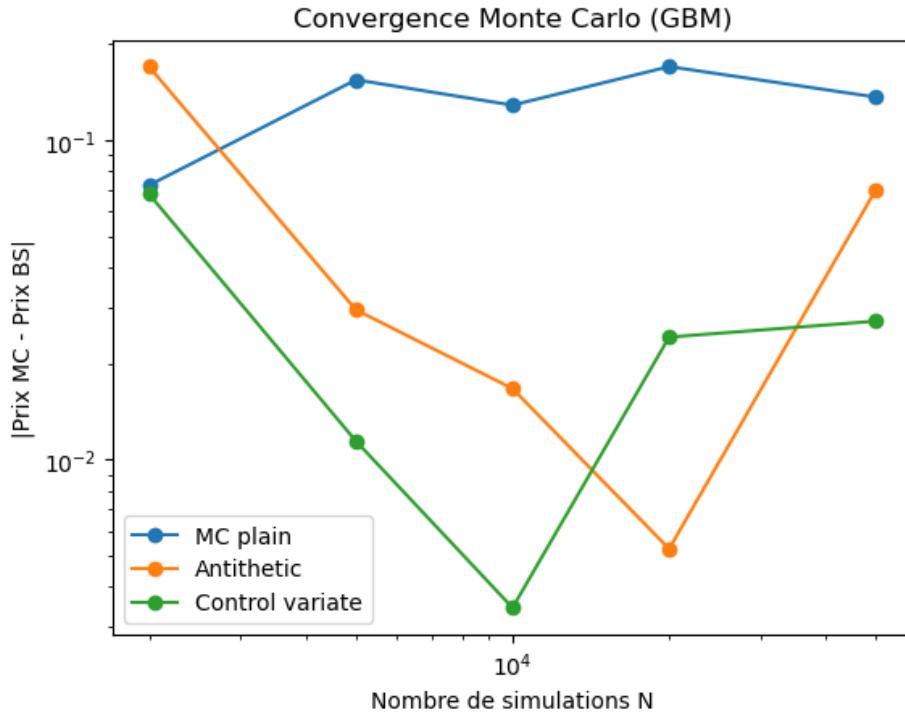


FIGURE 3 – Convergence Monte Carlo vers le prix analytique Black–Scholes.

On observe que les méthodes de réduction de variance diminuent significativement l'erreur pour un même budget de simulations. La variabilité non monotone de l'erreur est attendue : elle provient de la nature statistique de l'estimateur Monte Carlo, dont l'erreur typique décroît en $O(N^{-1/2})$.

Intervalle de confiance. Pour chaque estimateur, on peut associer un intervalle de confiance à 95% :

$$\hat{V}_0^{(N)} \pm 1.96 \frac{\hat{\sigma}_\Phi}{\sqrt{N}}.$$

Dans une implémentation de production, cet intervalle permet de contrôler la précision demandée et de choisir N de manière cohérente avec une tolérance ε .

6 Synthèse des validations numériques

Les implémentations ont été validées par des contrôles croisés :

- cohérence analytique (formules Black–Scholes) ;
- validation numérique des Greeks (différences finies) ;
- convergence Monte Carlo vers la référence analytique et efficacité des réductions de variance ;
- mise en évidence d'un smile de volatilité implicite, incompatible avec l'hypothèse de volatilité constante.

Ces observations justifient l'étude d'un modèle à volatilité stochastique tel que Heston.

7 Modèle de volatilité stochastique de Heston

Les observations de marché montrent que l'hypothèse de volatilité constante du modèle de Black–Scholes est insuffisante pour reproduire les smiles et skews de volatilité implicite. Le modèle de Heston introduit une volatilité aléatoire afin de mieux capturer ces phénomènes.

7.1 Présentation du modèle

Hypothèse 3 (Modèle de Heston). Sous la mesure risque-neutre \mathbb{Q} , le prix du sous-jacent $(S_t)_{t \geq 0}$ et sa variance instantanée $(v_t)_{t \geq 0}$ suivent le système d'équations différentielles stochastiques :

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^{(1)}, \quad (11)$$

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t) dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t^{(2)}, \quad (12)$$

où :

- $\kappa > 0$ est la vitesse de rappel à la moyenne,
- $\theta > 0$ est le niveau de variance de long terme,
- $\xi > 0$ est la volatilité de la variance,
- $(W_t^{(1)}, W_t^{(2)})$ sont deux mouvements browniens corrélés tels que :

$$d\langle W^{(1)}, W^{(2)} \rangle_t = \rho dt, \quad \rho \in [-1, 1].$$

Le processus (v_t) est de type Cox–Ingersoll–Ross (CIR) et assure, sous certaines conditions, la positivité de la variance.

7.2 Interprétation des paramètres

Chaque paramètre du modèle possède une interprétation économique :

- θ contrôle le niveau moyen de volatilité,
- κ mesure la vitesse de retour vers ce niveau,
- ξ détermine l'amplitude des fluctuations de la volatilité,
- ρ explique l'asymétrie du smile de volatilité.

En particulier, une corrélation négative ($\rho < 0$) permet de reproduire le skew observé sur les marchés actions.

7.3 Méthodes de pricing

Dans le cadre du modèle de Heston, le prix d'une option européenne peut être obtenu :

- soit par une formule semi-fermée basée sur la fonction caractéristique,
- soit par simulation de Monte Carlo du système couplé (S_t, v_t) .

Dans ce projet, on privilégie une approche Monte Carlo, cohérente avec la section précédente et adaptée à l'étude numérique de la convergence et des erreurs.

7.4 Schéma de discrétisation

Le système est discrétisé sur une grille temporelle $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Pour la variance, on utilise un schéma de type *full truncation Euler* :

$$v_{t_{k+1}} = v_{t_k} + \kappa(\theta - v_{t_k}^+) \Delta t + \xi \sqrt{v_{t_k}^+} \sqrt{\Delta t} Z_k^{(2)}, \quad (13)$$

où $x^+ = \max(x, 0)$.

Le sous-jacent est simulé avec un schéma d'Euler exponentiel utilisant la variance tronquée au début du pas, $v_{t_k}^+$:

$$S_{t_{k+1}} = S_{t_k} \exp \left((r - q - \frac{1}{2}v_{t_k}^+) \Delta t + \sqrt{v_{t_k}^+ \Delta t} Z_k^{(1)} \right). \quad (14)$$

Gestion de la corrélation. Pour générer les variables corrélées $(Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)})$ avec une corrélation ρ , on utilise la décomposition de Cholesky sur deux variables gaussiennes indépendantes $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$Z_k^{(1)} = \varepsilon_1, \quad (15)$$

$$Z_k^{(2)} = \rho \varepsilon_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \varepsilon_2. \quad (16)$$

Cette méthode assure que $\mathbb{E}[Z_k^{(1)} Z_k^{(2)}] = \rho$.

7.5 Résultats : skew Heston vs Black–Scholes (inversion en volatilité implicite)

Afin de comparer Black–Scholes et Heston sur un objet standard en pratique, nous calculons des prix d'options sous Heston par Monte Carlo, puis nous en déduisons la volatilité implicite Black–Scholes en résolvant :

$$C^{BS}(S_0, K, T, r, q, \sigma_{\text{impl}}) = C^{\text{Heston}}(S_0, K, T, r, q; \kappa, \theta, \xi, \rho, v_0).$$

Cette représentation permet de visualiser la structure de volatilité (smile/skew) induite par la volatilité stochastique.

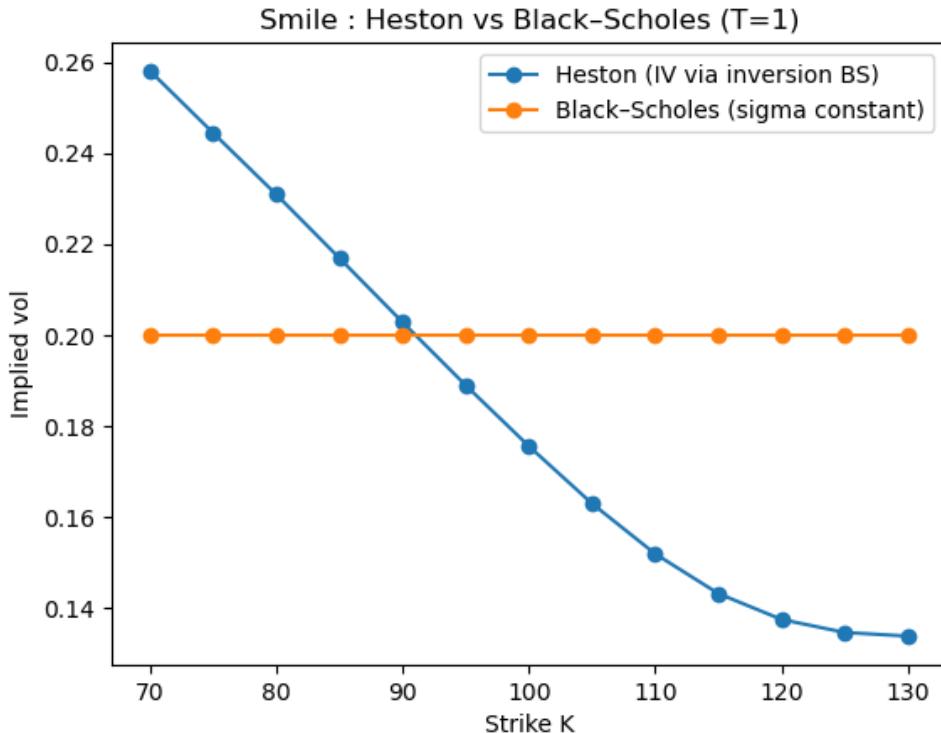


FIGURE 4 – Volatilité implicite (inversion Black–Scholes) des prix Heston vs volatilité constante Black–Scholes, pour $T = 1$.

La courbe Black–Scholes est plate car la volatilité est supposée constante. À l'inverse, Heston génère un *skew* décroissant en fonction du strike, phénomène typique des marchés actions lorsque $\rho < 0$. Intuitivement, une baisse du sous-jacent tend à s'accompagner d'une hausse de la variance instantanée, rendant les options de strike bas relativement plus chères, ce qui se traduit par une volatilité implicite plus élevée pour les faibles strikes.

7.6 Contrôles de cohérence (bornes d'arbitrage et mesure risque-neutre)

Les prix simulés sont soumis à des contrôles élémentaires de cohérence :

- **bornes sans arbitrage** pour un call :

$$\max(0, S_0 e^{-qT} - K e^{-rT}) \leq C_0 \leq S_0 e^{-qT},$$

et pour un put :

$$\max(0, K e^{-rT} - S_0 e^{-qT}) \leq P_0 \leq K e^{-rT}.$$

- **moment risque-neutre** : sous \mathbb{Q} , on doit avoir

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0 e^{(r-q)T},$$

ce qui permet de détecter rapidement un biais de discréétisation dans la simulation.

Ces tests jouent un rôle important dans une implémentation de production, car ils permettent d'identifier des erreurs de signe, de discounting ou de schéma numérique.

7.7 Calibration

Les paramètres $(\kappa, \theta, \xi, \rho, v_0)$ sont calibrés en minimisant l'erreur entre les volatilités implicites de marché et celles produites par le modèle :

$$\min_{\Theta} \sum_i (\sigma_{\text{impl}}^{\text{mkt}}(K_i, T_i) - \sigma_{\text{impl}}^{\text{Heston}}(K_i, T_i))^2.$$

Cette calibration permet d'ajuster le modèle à une surface de volatilité observée.

7.8 Lien avec la suite du projet

Le modèle de Heston constitue une extension naturelle de Black–Scholes et permet, contrairement à l'hypothèse de volatilité constante, de générer une structure de volatilité implicite non plate.

Dans nos simulations, l'inversion Black–Scholes des prix Heston met en évidence un *skew* de volatilité implicite en fonction du strike, alors que Black–Scholes conserve une volatilité constante. Ce résultat illustre l'impact conjoint de la volatilité stochastique (paramètre ξ) et de la corrélation ρ sur la forme de la courbe $\sigma_{\text{impl}}(K, T)$.

Cette section fournit ainsi un cadre cohérent pour :

- comparer les structures de volatilité implicite obtenues sous différents modèles ;
- motiver une étape de calibration sur une surface de volatilité (données de marché ou synthétiques) ;
- étudier l'influence des paramètres $(\kappa, \theta, \xi, \rho, v_0)$ sur le smile/skew et la stabilité numérique.

8 Conclusion et perspectives

Ce projet a permis d'étudier et d'implémenter plusieurs briques fondamentales de la finance quantitative :

- le pricing analytique Black–Scholes et ses sensibilités (Greeks) ;
- l'inférence de volatilité implicite par inversion numérique ;
- le pricing Monte Carlo et l'apport de techniques de réduction de variance ;
- une extension à volatilité stochastique (Heston) permettant de reproduire un skew de volatilité implicite.

Les résultats numériques confirment la cohérence théorique : validation des Greeks par différences finies, convergence des estimateurs Monte Carlo, et apparition d'une structure de volatilité implicite non plate sous Heston.

Perspectives. Plusieurs prolongements naturels sont possibles :

- calibration des paramètres de Heston sur une surface de volatilité de marché ;
- amélioration du schéma numérique (QE scheme, Andersen) et étude de la convergence en pas de temps ;
- extension à d'autres produits (barrières, asiatiques) et comparaison de méthodes (PDE, FFT, Monte Carlo).

A Reproductibilité et organisation du code

Les expériences numériques ont été réalisées en Python, avec une architecture modulaire (fonctions de pricing, greeks, Monte Carlo, volatilité implicite). Les figures du rapport sont générées par un notebook qui appelle ces modules, garantissant la reproductibilité des résultats via des graines pseudo-aléatoires fixées.

- `bs.py` : formules Black–Scholes (prix, d_1, d_2) ;
- `greeks.py` : greeks analytiques et différences finies ;
- `mc_gbm.py` : simulation GBM et pricing Monte Carlo ;
- `mc_variance_reduction.py` : antithétique et variable de contrôle ;
- `implied_vol.py` : inversion (bisection / Newton) ;
- `heston_mc.py` : simulation Heston (full truncation Euler).