Matrices

Vincent Nozick

IMAC
INGÉNIEUR
ESIPE

Université Gustave Eiffel

La complexité

Motivation :

- Énoncer formellement l'efficacité d'un algorithme
- Si possible indépendament du processeur, des accès mémoire, du langage de programmation, du compilateur, etc.

Approches :

- étude du pire des cas
- étude du cas moyen
- étude du cas le plus courant

Comparaison asymptotique

Notation de Landau :

$$f(n) = \mathcal{O}\big(g(n)\big)$$

$\mathcal{O}\big(g(n)\big)$ est l'ensemble des fonctions $f(n)$ telles qu'il existe une constante $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et un entier $N \geq 0$ tel que $\forall n > N$, $f(n) < k \times g(n)$.

Autrement dit :
f est en $\mathcal{O}(g)$ lorsque pour n suffisamment grand, $\dfrac{f(n)}{g(n)} < k$.

Constantes

Remarque :
La notation de Landau ne se préoccupe pas des constantes.

$$2x + 5 \text{ est en } \mathcal{O}(x)$$

Terme dominant

Contribution de chaque terme dans $f(n) = 2n^2 + 12n + 20$:

n	$2n^2$	$12n$	20	$f(n)$
1	2	12	**20**	34
5	50	**60**	20	130
10	**200**	120	20	340
15	**450**	180	20	650
20	**800**	240	20	1060
25	**1250**	300	20	1570
30	**1800**	360	20	2180
35	**2450**	420	20	2890
40	**3200**	480	20	3700
100	**20000**	1200	20	21220

Comparaison asymptotique

Terme dominant :

- $f(n) = 3n^3 - 8n$ est en $\mathcal{O}(n^3)$
- $f(n) = n^2 + e^n$ est en $\mathcal{O}(e^n)$
- etc.

En informatique

Boucles `for` echaînées :

```
for(int i=0; i<n; ++i}
  ...

for(int i=0; i<n; ++i}
  ...

for(int i=0; i<n; ++i}
  ...
```

$\rightarrow \mathcal{O}(3n)$

Boucles `for` encastrées :

```
for(int i=0; i<n; ++i}
  for(int j=0; j<n; ++j}
    for(int k=0; k<n; ++k}
      ...

.
```

$\rightarrow \mathcal{O}(n^3)$

Temps vs espace mémoire

Remarque :

- On regarde souvent la complexité en temps, mais la complexité en espace mémoire est également très pertinente.
- On constate souvent qu'un progrès dans l'une des deux complexité se fait au détriment de l'autre.

Les vecteurs

Un vecteur (colonne) : $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Transposition de vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^\top = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

Autrement dit:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top$$

Addition de vecteurs

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Condition : $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de même dimension.

Multiplication avec un scalaire

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Produit scalaire (dans un espace Euclidien)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

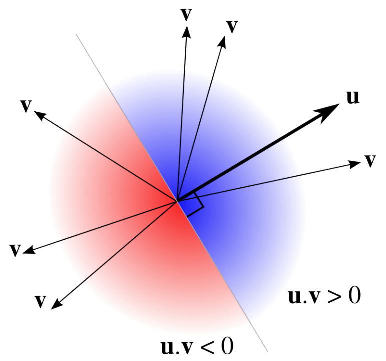
produit scalaire :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$$= \mathbf{x}^\top \mathbf{y}$$

Condition : $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont de même dimension.

Produit scalaire : propriété géométrique



Le produit scalaire est l'intensité (signée) de la projection d'un vecteur sur un autre.

Produit scalaire

Propriété géométrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (valable pour toutes dimensions), où

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Complexité Les vecteurs Les matrices Multiplication matricielle Type de matrices Propriétés Applications

Produit scalaire

Propriété géométrique :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \alpha$$

où α est l'angle entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (valable pour toutes dimensions), où

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Applications géométriques :

→ trouver l'angle entre 2 vecteurs : $\alpha = \pm \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right)$

→ trouver la projection $\mathbf{v}'$ de $\mathbf{v}$ sur $\mathbf{u}$: $\mathbf{v}' = \text{proj}_{\mathbf{v}}(\mathbf{u}) = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}$

Produit vectoriel

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Condition : défini uniquement en dimension 3.

Remarque : $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|\,\sin\alpha\,\mathbf{w}$ avec $\|\mathbf{w}\| = 1$ et $\mathbf{w} \perp \mathbf{x}, \mathbf{y}$

Norme de vecteurs

Propriétés :

- $\|\mathbf{x}\| > 0$ ssi $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ et $\|\mathbf{x}\| = 0$ ssi $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- $\|k\mathbf{x}\| = |k|.\|\mathbf{x}\|$
- $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

Norme L_1 : $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (norme de Manhattan)

Norme L_2 : $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$ (norme Euclidienne)

Norme L_p : $\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$

Norme L_∞ : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\left(|x_1|, ..., |x_n|\right)$

Les matrices

Une matrice : $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$

Les matrices

Élément d'une matrice $\mathbf{M}$: m_{ij}

$$\mathbf{M} = \underbrace{\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}}_{j} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} m \\ m \\ m \end{bmatrix}}\right\} i$$

i : ligne
j : colonne

Addition matricielle

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{11}+n_{11} & m_{12}+n_{12} & m_{13}+n_{13} \\ m_{21}+n_{21} & m_{22}+n_{22} & m_{23}+n_{23} \\ m_{31}+n_{31} & m_{32}+n_{32} & m_{33}+n_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{M}_{ij} + \mathbf{N}_{ij} \qquad \rightarrow \mathcal{O}(n^2)$$

Condition : $\mathbf{M}$ et $\mathbf{N}$ ont les mêmes dimensions.

Multiplication matrice-vecteur

$$\mathbf{y} = \mathbf{M}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3 \\ m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3 \\ m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_{1\bullet}^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{m}_{2\bullet}^\top \mathbf{x} \\ \mathbf{m}_{3\bullet}^\top \mathbf{x} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \end{array}$$

où $\mathbf{m}_{i\bullet}^\top$ correspond à la $i$eme ligne de $\mathbf{M}$

Multiplication vecteur-matrice

$$\mathbf{y}^\top = \mathbf{x}^\top \mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} m_{11}x_1 + m_{21}x_2 + m_{31}x_3 \\ m_{12}x_1 + m_{22}x_2 + m_{32}x_3 \\ m_{13}x_1 + m_{23}x_2 + m_{33}x_3 \end{pmatrix}^\top$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^\top \mathbf{m}_{\bullet 1} \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{m}_{\bullet 2} \\ \mathbf{x}^\top \mathbf{m}_{\bullet 3} \end{pmatrix}^\top \begin{array}{l} \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \\ \rightarrow \text{produit scalaire} \end{array}$$

où $\mathbf{m}_{\bullet j}$ correspond à la $j$eme colonne de $\mathbf{M}$

Produit externe

Produit scalaire : $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = u$

Produit externe : $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top = \mathbf{A}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Big(y_1, y_2, \cdots, y_m \Big) = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{ij} = x_i y_j$$

Multiplication matricielle

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}\mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{1\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 1} & \mathbf{m}_{1\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 2} & \mathbf{m}_{1\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 3} \\ \mathbf{m}_{2\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 1} & \mathbf{m}_{2\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 2} & \mathbf{m}_{2\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 3} \\ \mathbf{m}_{3\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 1} & \mathbf{m}_{3\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 2} & \mathbf{m}_{3\bullet}^\top \mathbf{n}_{\bullet 3} \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{m}_{i\bullet}^\top$ correspond à la $i$eme ligne de $\mathbf{M}$
et $\mathbf{n}_{\bullet j}$ correspond à la $j$eme colonne de $\mathbf{N}$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \end{array}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} \color{blue}{n_{11}} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ \color{blue}{n_{21}} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ \color{blue}{n_{31}} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{blue}{m_{11}} & \color{blue}{m_{12}} & \color{blue}{m_{13}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \end{array}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix} n_{11} & \color{blue}{n_{12}} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & \color{blue}{n_{22}} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & \color{blue}{n_{32}} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \color{blue}{m_{11}} & \color{blue}{m_{12}} & \color{blue}{m_{13}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a_{11} & \color{red}{a_{12}} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix} \end{array}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & {\color{blue}n_{13}} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & {\color{blue}n_{23}} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & {\color{blue}n_{33}} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {\color{blue}m_{11}} & {\color{blue}m_{12}} & {\color{blue}m_{13}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & {\color{red}a_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & {\color{blue}n_{14}} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & {\color{blue}n_{24}} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & {\color{blue}n_{34}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {\color{blue}m_{11}} & {\color{blue}m_{12}} & {\color{blue}m_{13}} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & {\color{red}a_{14}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} {\color{blue}n_{11}} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ {\color{blue}n_{21}} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ {\color{blue}n_{31}} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ {\color{blue}m_{21}} & {\color{blue}m_{22}} & {\color{blue}m_{23}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ {\color{red}a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & {\color{blue}n_{12}} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & {\color{blue}n_{22}} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & {\color{blue}n_{32}} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ {\color{blue}m_{21}} & {\color{blue}m_{22}} & {\color{blue}m_{23}} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & {\color{red}a_{22}} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

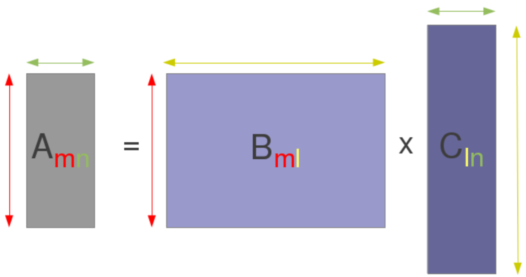
Multiplication graphique de matrices

$$\begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} & n_{34} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}$$

Condition pour $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$:
nb colonnes de $\mathbf{B}$ = nb lignes de $\mathbf{C}$

Multiplication matricielle



Pour chacune des $m \times n$ cases de $\mathbf{A}$:
1 produit scalaire de l éléments.

complexité : $\mathcal{O}(lmn) \sim \mathcal{O}(n^3)$

Strassen

Introduction :

- multiplication matricielle standard : $\mathcal{O}(n^3)$
- avec la méthode de Strassen : $\mathcal{O}(n^{\log_2 7}) = \mathcal{O}(n^{2.81})$
- méthode récursive.
- efficace seulement sur les grosses matrices.

Strassen

Méthode :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{r} & \text{s} \\ \hline \text{t} & \text{u} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{a} & \text{b} \\ \hline \text{c} & \text{d} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \text{e} & \text{f} \\ \hline \text{g} & \text{h} \\ \hline \end{array}$$

Strassen

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ae+bg} & \text{af+bh} \\ \hline \text{ce+dg} & \text{cf+dh} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{a} & \text{b} \\ \hline \text{c} & \text{d} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \text{e} & \text{f} \\ \hline \text{g} & \text{h} \\ \hline \end{array}$$

8 produits de sous-matrices
4 additions de sous-matrices

Strassen

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \overset{\text{r}}{\text{ae+bg}} & \overset{\text{s}}{\text{af+bh}} \\ \hline \overset{\text{t}}{\text{ce+dg}} & \overset{\text{u}}{\text{cf+dh}} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \text{a} & \text{b} \\ \hline \text{c} & \text{d} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \text{e} & \text{f} \\ \hline \text{g} & \text{h} \\ \hline \end{array}$$

on définit :

$P_1 = af - ah$
$P_2 = ah + bh$
$P_3 = ce + de$
$P_4 = dg - de$
$P_5 = ae + ah + de + dh$
$P_6 = bg + bh - dg - dh$
$P_7 = ae + af - ce - cf$

tels que :

$r = P_5 + P_4 - P_2 + P_6$
$s = P_1 + P_2$
$t = P_3 + P_4$
$u = P_1 + P_5 - P_3 - P_7$

Strassen

Factorisation :

$$
\begin{aligned}
P_1 &= af - ah & P_1 &= a(f-h)\\
P_2 &= ah + bh & P_2 &= (a+b)h\\
P_3 &= ce + de & P_3 &= (c+d)e\\
P_4 &= dg - de & P_4 &= d(g-e)\\
P_5 &= ae + ah + de + dh & P_5 &= (a+d)(e+h)\\
P_6 &= bg + bh - dg - dh & P_6 &= (b-d)(g+h)\\
P_7 &= ae + af - ce - cf & P_7 &= (a-c)(e+f)
\end{aligned}
$$

Strassen

$$
\begin{aligned}
P_1 &= a(f-h)\\
P_2 &= (a+b)h\\
P_3 &= (c+d)e\\
P_4 &= d(g-e)\\
P_5 &= (a+d)(e+h)\\
P_6 &= (b-d)(g+h)\\
P_7 &= (a-c)(e+f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
r &= P_5 + P_4 - P_2 + P_6\\
s &= P_1 + P_2\\
t &= P_3 + P_4\\
u &= P_1 + P_5 - P_3 - P_7
\end{aligned}
$$

→ 7 produits de sous-matrices
→ 18 additions de sous-matrices

ce qui comporte moins d'opérations que 8 produits de sous-matrices et 4 additions de sous-matrices

Strassen

Remarques :

- efficace sur les grosses matrices, mais pas sur les petites.
- pas très stable numériquement.
- gestion spécifique de la mémoire.

Vérification du produit matriciel

Méthode :

Soit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.
Le produit de la matrice $\mathbf{A}$ avec le vecteur somme-des-colonnes $\mathbf{b}$ de la matrice $\mathbf{B}$ doit être égal au vecteur somme-des-colonnes $\mathbf{c}$ de la matrice $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{Ab} = \mathbf{c}$$

Si $\mathbf{Ab} \neq \mathbf{c}$, alors il y a une erreur de calcul.
La réciproque n'est pas forcément vraie.

Vérification du produit matriciel

Exemple :

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 15 \\ 4 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2+15 \\ 4+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vérification du produit matriciel

Exemple :

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 26 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Le calcul est probablement exact

Différents types de matrices

- matrices carrées
- matrices triangulaires
- matrices diagonales
- matrices creuses
- ...

Matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (supérieure)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice triangulaire (inférieure)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice transposée

La transposée $\mathbf{M}^\top$ de $\mathbf{M}$ est définie par:

$$\mathbf{M}^\top_{ij} = \mathbf{M}_{ji}$$

Remarque : $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$

Matrice symétrique

$$\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{M}_{ji} \quad \forall i, j$$

autrement dit : $\mathbf{M} = \mathbf{M}^\top$

($\rightarrow \mathbf{M}$ est carrée)

Matrice antisymétrique

$$\mathbf{M}_{ij} = -\mathbf{M}_{ji} \quad \forall i, j$$

autrement dit : $\mathbf{M} = -\mathbf{M}^\top$

$\rightarrow \mathbf{M}$ est carrée et $\mathbf{M}_{ii} = 0 \;\rightarrow$ la diagonale est nulle

Matrice hermitienne

Si on prend des coefficients complexes,

$$\mathbf{M}_{ij} = \overline{\mathbf{M}}_{ji} \quad \forall i, j$$

exemple : matrice Hamiltonienne en mécanique quantique

Matrice identité

$$\mathbf{Id} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ matrice carrée
$\rightarrow$ matrice diagonale

matrice : $\mathbf{Id}.\mathbf{M} = \mathbf{M}$
vecteur : $\mathbf{Id}.\mathbf{x} = \mathbf{x}$

matrice : $\mathbf{M}.\mathbf{Id} = \mathbf{M}$
vecteur : $\mathbf{x}^\top.\mathbf{Id} = \mathbf{x}^\top$

Matrice de permutation

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ un 1 par ligne
$\rightarrow$ un 1 par colonne
$\rightarrow$ 0 pour le reste

$\mathbf{P}$ est une matrice orthogonale
$\mathbf{P}$ permute les éléments d'une matrice ou d'un vecteur

Matrice inverse

Soit $\mathbf{M}$ une matrice carrée,
il existe au plus une matrice $\mathbf{M^{-1}}$ telle que:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{Id}$$

Si $\mathbf{M}^{-1}$ existe, $\mathbf{M}$ est dite **inversible**, sinon $\mathbf{M}$ est **singulière**.

Matrice inverse

Propriétés :

- $\left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{M}$
- $\left(\mathbf{M}^{\top}\right)^{-1} = \left(\mathbf{M}^{-1}\right)^{\top} = \mathbf{M}^{-\top}$
- $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
- $[\text{diag}(m_i)]^{-1} = \left[\text{diag}\left(\frac{1}{m_i}\right)\right]$

Matrice orthogonale

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}^{\top}$$

exemple : une matrice de rotation

$$R_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Produit vectoriel

Produit vectoriel :

$$\mathbf{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)^{\top} \qquad \mathbf{v} = \left(v_1, v_2, v_3\right)^{\top}$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

Forme matricielle :

$$[\mathbf{u}]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\mathbf{z} = [\mathbf{u}]_\times \mathbf{v} \quad \text{(produit matrice-vecteur)}$$

Matrice de Householder

$$\mathbf{H_u} = \mathbf{Id}_n - 2\frac{\mathbf{u}\mathbf{u}^\top}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

$\rightarrow$ matrice de réflexion par rapport à l'hyperplan de normale $\mathbf{u}$.

Complexité Les vecteurs Les matrices Multiplication matricielle Type de matrices Propriétés Applications

Matrice creuse

Matrice qui contient beaucoup de zéros.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 \\
0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \mathbf{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{7} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Complexité Les vecteurs Les matrices Multiplication matricielle Type de matrices Propriétés Applications

Rang d'une matrice

Définition :

Le rang d'une matrice est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Complexité Les vecteurs Les matrices Multiplication matricielle Type de matrices Propriétés Applications

Rang d'une matrice

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rang d'une matrice

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rang } 2$$

Rang d'une matrice

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \text{rang } 2$$

$\rightarrow L_3 = L_1 + L_2$
$\rightarrow L_4 = L_1 + 2L_2$
$\rightarrow L_1$ et L_2 sont indépendantes
$\Rightarrow$ matrice de rang 2

$\rightarrow C_1 = C_2$
$\rightarrow C_3 = C_4$
$\rightarrow C_1$ et C_3 sont indépendantes
$\Rightarrow$ matrice de rang 2

Trace d'une matrice

Définition :

La trace d'une matrice carrée est la somme des éléments de sa diagonale.

$$\text{Tr}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$$

Noyau d'une matrice

Définition :

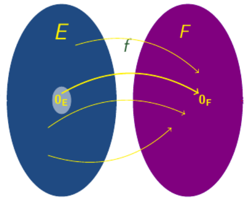
Le noyau (kernel / right null space) d'une matrice $\mathbf{M}$ est l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}$ tels que :

$$\mathbf{Mx} = \mathbf{0}$$

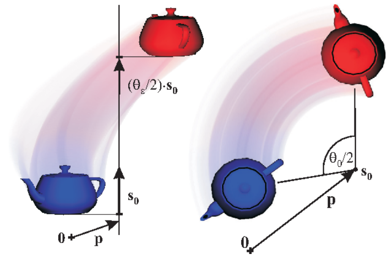
Applications

- on s'intéresse à la façon dont tout ça se code.
- on s'intéresse à la façon dont on peut l'utiliser.

Transformations



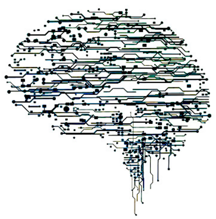
application linéaire



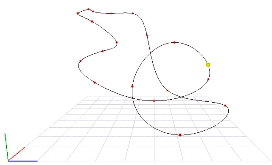
transformation géométrique

projection

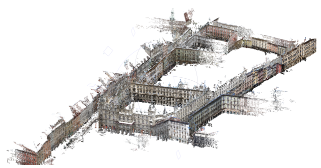
Résolution de problèmes



réseaux de neurones



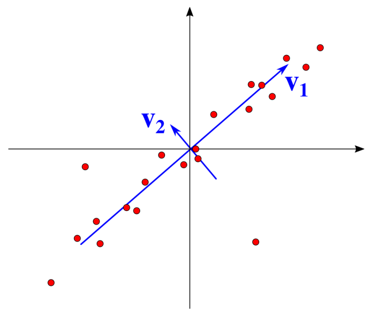
spline



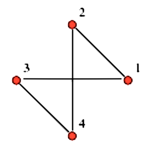
reconstruction 3d

Gestion de données

nuage de points 3D



analyse en composantes principales



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrices d'adjacence

Biblio

Compréhension : ▸ 3Blue1Brown

Implémentation : ▸ Eigen (C++)