

**THÈSE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

Spécialité

Océanologie, Météorologie et Environnement

(Ecole Doctorale des Sciences de l'Environnement d'Île-de-France)

Présentée par

Jonathan Gula

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Sujet de la thèse :

**INSTABILITÉS AGÉOSTROPHIQUES DES ÉCOULEMENTS
BAROCLINES DANS L'ATMOSPHÈRE ET DANS L'OcéAN ET
LEUR ÉVOLUTION NON-LINÉAIRE**

soutenue le 22 octobre 2009

devant le jury composé de :

Mme Pascale BOURUET-AUBERTOT	Examinateur
M. Jan-Bert FLÓR	Examinateur
M. Jacques VANNESTE	Rapporteur
M. Jean-Marc CHOMAZ	Rapporteur
M. Vladimir ZEITLIN	Directeur de thèse
M. Riwal PLOUGONVEN	Co-Directeur de thèse

Cette thèse a été préparée au sein du :

Laboratoire de Météorologie Dynamique
Ecole Normale Supérieure
24, rue Lhomond
75231 Paris Cedex 05
France

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout Vladimir Zeitlin qui a bien voulu diriger ces recherches pendant ces trois années. J'ai apprécié ses explications, son exigence et j'ai beaucoup appris de son expérience. Son soutien et ses encouragements constants m'ont été précieux.

Je remercie chaleureusement Riwal Plougonven pour avoir assuré conjointement la direction de ce travail. Sa disponibilité, sa patience et les nombreuses discussions que nous avons eues m'ont permis de mener à bien ce travail.

Je suis très reconnaissant à Jacques Vanneste et Jean-Marc Chomaz qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Ma gratitude va également à Jan-Bert Flòr et Pascale Bouruet-Aubertot qui ont accepté de faire partie du jury de cette thèse.

Instabilités agéostrophiques des écoulements baroclines dans l'atmosphère et dans l'océan et leur évolution non-linéaire

Résumé

Les écoulements atmosphériques et océaniques sont habituellement séparés en une partie lente, proche de l'équilibre géostrophique, et une partie rapide qui interagissent faiblement. Les instabilités agéostrophiques procurent néanmoins un mécanisme capable de coupler les mouvements équilibrés et non-équilibrés.

L'étude de tels mécanismes dans cette thèse est d'abord effectuée par des études systématiques de stabilité linéaire dans le modèle de l'eau peu profonde. L'instabilité de Rossby-Kelvin (RK), issue du couplage barocline d'une onde de Rossby (équilibrée) et d'une onde de Kelvin ou de Poincaré (non-équilibrées), est mise en évidence dans un canal. Ces résultats sont étendus à un anneau en géométrie cylindrique et montrent que dans les configurations proches des dispositifs expérimentaux il peut y avoir une compétition entre l'instabilité RK et l'instabilité barocline classique. Les instabilités des courants côtiers, caractérisés par la présence d'un bord vertical et d'un "outcropping", sont ensuite étudiées de manière exhaustive. Les instabilités dues à l'interaction d'un mode frontal et d'une onde de Kelvin (KF) ou d'une onde de Rossby (RF) sont mises en évidence.

Le développement non-linéaire de ces instabilités est étudié dans le modèle de l'eau peu profonde par une méthode numérique aux volumes finis et dans un fluide continument stratifié à l'aide d'un modèle méso-échelle. Ces simulations montrent que les instabilités RK et KF ont un développement non-linéaire marqué par une croissance à amplitude finie et une saturation. Le déferlement de l'onde de Kelvin conduit alors à la formation d'un front de Kelvin, zone localisée de mélange et de dissipation, à l'émission d'ondes d'inertie-gravité et à la réorganisation de l'écoulement moyen. Dans le cas des courants côtiers cette réorganisation est suivie du développement d'une instabilité secondaire qui conduit à la formation et au détachement de vortex.

Mots clés :

instabilité agéostrophique ; écoulements baroclines ; courant côtier ; onde de Kelvin

Ageostrophic instabilities of baroclinic flows in the atmosphere and ocean and their non-linear evolution

Abstract

For the atmosphere and oceans, which are forced mostly at low frequency, there is a time-scale separation leading to a weak coupling between the slow balanced and fast unbalanced components of the dynamics. Ageostrophic instabilities may provide a route to escape this separation and couple balanced and unbalanced motions.

To understand these mechanisms systematic linear stability analyses in a two-layer rotating shallow water model are provided. A focus is made on the Rossby-Kelvin (RK) instability in a rectilinear channel and in the annulus for comparison with the experiments. We demonstrate the existence of crossover regions where baroclinic and RK compete having similar growth rates. We then revisit the linear stability problem for coastal currents and study various instabilities due to resonances between vortical (Rossby-like), frontal and coastal trapped waves.

The nonlinear evolution of these instabilities is then studied in the shallow-water approximation with the help of high-resolution DNS and in a continuously stratified fluid using a mesoscale model. It is shown that saturation for the RK instability and the Kelvin-frontal (KF) instability is achieved through the breaking of the Kelvin mode forming a Kelvin front and leading to inertia-gravity waves and reorganization of the mean flow through dissipative and wave-meanflow interaction effects. We also show for coastal currents how nonlinear saturation of the ageostrophic instabilities and reorganization of the potential vorticity field lead to coherent vortex structures appearing and eventually detaching from the coast.

Keywords :

ageostrophic instability ; baroclinic flow ; coastal current ; Rossby waves ; Kelvin waves ;

Table des matières

1	Introduction	15
1.1	Équilibres et séparation d'échelles dans l'atmosphère et l'océan	15
1.1.1	Échelles et forces	15
1.1.2	Équilibres à grande échelle	17
1.1.3	Les modèles équilibrés	19
1.1.4	Mouvements non-équilibrés	20
1.2	Séparation des mouvements équilibrés et non-équilibrés	21
1.2.1	Scénario classique : l'ajustement géostrophique	22
1.2.2	Émission spontanée	22
1.2.3	Instabilités agéostrophiques	23
2	Ondes et instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde	25
2.1	Hypothèses et équations du modèle de l'eau peu profonde	26
2.2	Propriétés importantes du modèle	29
2.2.1	Conservation de la vorticité potentielle	29
2.2.2	Séparation entre mouvements lents et mouvements rapides	29
2.3	Généralités sur les analyses de stabilité	31
2.4	Ondes dans le modèle de l'eau peu profonde	32
2.4.1	Ondes de Rossby	33
2.4.2	Ondes de gravité dans un modèle sans rotation	34
2.4.3	Ondes de Poincaré	36
2.4.4	Conditions aux bords	37
2.4.5	Mode de Kelvin	38
2.4.6	Mode frontal	40
2.4.7	Mode inertiel	41
2.5	Les critères classiques d'instabilité	43
2.5.1	Instabilité barotrope	43
2.5.2	Instabilité barocline	43
2.6	Instabilités et résonances d'ondes	44
2.6.1	Ondes à énergie négative, pseudo-moments et pseudo-énergie	44
2.6.2	Interaction résonante de deux ondes	45
2.6.3	Instabilité et niveaux critiques	47
2.7	Instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde à gravité réduite	48
2.7.1	Instabilité d'un écoulement cisailé	48
2.7.2	Instabilités frontales	52
2.8	Instabilités dans un modèle de l'eau peu profonde à deux couches	54
2.8.1	Instabilité barocline	56
2.8.2	Instabilité Kelvin-Helmholtz	56
2.8.3	Instabilité Rossby-Kelvin	56

2.8.4	Instabilités frontales dans le modèle à deux couches	57
2.9	Contenu et organisation de la thèse	59
3	Modélisation numérique	61
3.1	Méthode de collocation pour les problèmes de stabilité linéaire	61
3.1.1	Équations aux valeurs propres	62
3.1.2	Méthode pseudo-spectrale de collocation	62
3.2	Méthode aux volumes finis pour les systèmes hyperboliques	64
3.2.1	Rappel sur les systèmes hyperboliques	64
3.2.2	Description de la méthode générale	65
3.2.3	Schéma pour l'eau peu profonde en rotation avec topographie et assèchement	69
3.3	De l'eau peu profonde à la stratification continue : le modèle WRF	72
4	Instabilités dans un anneau en rotation	73
4.1	Introduction	73
4.1.1	Résultats expérimentaux	73
4.1.2	Émission spontanée d'ondes d'inertie-gravité ?	78
4.1.3	Instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde	78
4.2	<i>Instabilities of two-layer shallow-water flows in the rotating annulus</i>	79
4.2.1	Introduction	80
4.2.2	One-layer shallow water in the rotating annulus	81
4.2.3	Two-layer shallow water in the rotating annulus	86
4.2.4	Summary and discussion	95
4.3	Conclusion	101
5	Instabilités dans un canal : évolution non-linéaire de l'instabilité RK	103
5.1	Introduction	103
5.2	<i>Ageostrophic instabilities of fronts in a channel in a stratified rotating fluid</i>	105
5.2.1	Introduction	106
5.2.2	Linear stability analysis in the two-layer fluid	108
5.2.3	RK instability in the continuously stratified fluid	115
5.2.4	Non-linear evolution of the Rossby-Kevin instability	122
5.2.5	Summary	126
5.3	Conclusion	128
6	Instabilités d'un courant côtier	131
6.1	Introduction	131
6.2	<i>Instabilities of buoyancy driven coastal currents and their nonlinear evolution. Part I. Passive lower layer</i>	133
6.2.1	Introduction	134
6.2.2	The model and the linear stability problem	136
6.2.3	Non-linear evolution of the leading instability	142
6.2.4	Summary and concluding remarks	156
6.3	De la gravité réduite au modèle deux couches	157
6.4	<i>Instabilities of buoyancy driven coastal currents and their nonlinear evolution. Part II. Active lower layer</i>	157
6.4.1	Introduction	160
6.4.2	The 2-layer rotating shallow water model and the linear stability problem	161

6.4.3	Non-linear evolution of unstable modes	174
6.4.4	Summary and Conclusions	193
6.5	Conclusion	195
7	Résumé et conclusions	197
A	Compléments au chapitre 5	199
A.1	Toit rigide Vs surface libre	199
A.2	Evolution non-linéaire du mode RK dans le modèle de l'eau peu profonde	202
	Bibliographie	205

Chapitre 1

Introduction

*'Ce qui vient au monde pour ne rien troubler
ne mérite ni égards ni patience.'*
René Char.

1.1 Équilibres et séparation d'échelles dans l'atmosphère et l'océan

1.1.1 Échelles et forces

Les circulations générales de l'atmosphère et de l'océan sont forcées à de très grandes échelles temporelles et spatiales, l'atmosphère principalement par le rayonnement solaire, et les flux de chaleur dus à l'océan ou à la surface terrestre, et l'océan par les flux de chaleur et le vent dans la couche basse de l'atmosphère. En réaction à ces excitations, des circulations se mettent en place, en général dans le sens d'une homogénéisation de l'état du fluide, d'un retour vers un état d'équilibre. Ces circulations ont des dimensions spatiales et temporelles très variées qui vont dépendre des différents mécanismes mis en jeu. On peut avoir un aperçu sur la figure 1.1 du très large spectre de processus dynamiques dans l'atmosphère et dans l'océan à toutes les échelles de longueur.

La dynamique des fluides géophysiques est de manière générale gouvernée par les propriétés les plus importantes de ces fluides qui sont la rotation, la stratification et dans une moindre mesure la compressibilité. On peut associer à ces phénomènes les principaux mécanismes de rappel qui opèrent dans l'atmosphère et l'océan et caractériser ainsi schématiquement les différents types d'ondes et les différentes échelles qui leur correspondent.

Rappelons qu'une onde est la propagation d'une perturbation produisant sur son passage une variation réversible de propriétés physiques locales. Elle transporte de l'énergie sans transporter de matière. Pour que des ondes se propagent dans un milieu il faut que celui soit stable : sous l'action d'une perturbation extérieure, le milieu doit développer un mécanisme de rappel le ramenant vers sa position d'équilibre. La nature et les propriétés de l'onde dépendent de la manière dont ce mécanisme agit.

La compressibilité entraîne l'existence d'*ondes acoustiques*, correspondant à des vibrations qui se propagent longitudinalement grâce à l'élasticité du milieu. Mais dans les domaines de la dynamique des fluides géophysiques ces ondes ont en général un impact

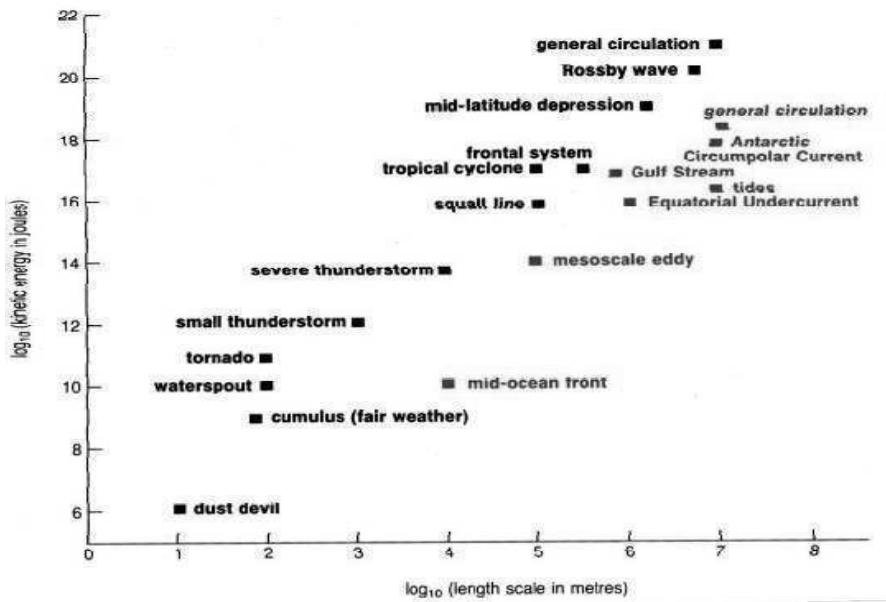


FIG. 1.1 – Les différentes échelles de temps et de longueur des mouvements dans l'atmosphère et dans l'océan. Tiré de Brown *et al.* (2001).

négligeable étant donné les vitesses caractéristiques dans l'océan et dans l'atmosphère très faibles par rapport à la vitesse du son.¹

Mais la compressibilité peut néanmoins jouer un rôle, avec les gradients de température, pour la stratification qui se met en place sous l'action de la gravité. Lorsqu'une particule de fluide est déplacée d'un niveau d'équilibre vertical vers une région de fluide moins dense, la flottaison agit comme une force de rappel et donne naissance aux *ondes de gravité*. Ces ondes ont un rôle très important dans la dynamique de l'océan et de l'atmosphère et seront largement décrites dans ce manuscrit. On parle d'onde de gravité de surface lorsque une onde de gravité apparaît à la surface libre d'un fluide, comme les vagues ou la houle à la surface de l'océan, et d'une onde interne de gravité lorsque le niveau d'équilibre correspond à une surface géopotentielle pour un fluide stratifié (à l'intérieur de l'océan ou de l'atmosphère, figure 1.2 et figure 1.3). Comme on peut le voir sur la figure 1.4 les ondes de gravité occupent un large spectre de la variabilité océanique, en partant des ondes de gravité courtes excitées par le vent jusqu'aux ondes de gravité longues générées par les forçages atmosphériques de grande échelle ou par des phénomènes sismiques.

Pour les ondes de gravité de grande échelle (voir figure 1.4) les effets de la rotation terrestre vont se faire ressentir. Comme on le verra plus en détail dans la suite, les effets de la rotation et de la gravité vont en fait être conjoints et on parlera alors entre autres d'*ondes d'inertie-gravité*. La force de Coriolis, en agissant perpendiculairement à la vitesse, va aussi permettre l'apparition des *oscillations inertielles*. Ces oscillations correspondent à un cas limite d'ondes sans variation de hauteur ou pression que nous décrirons plus en détail dans la suite.

¹ A l'échelle la plus petite, l'existence de tensions de surface à l'interface de deux fluides non-miscibles, comme par exemple à la surface de l'océan, va provoquer l'apparition d'*ondes capillaires*, de très haute fréquence et de très faible longueur d'onde, qui auront elles aussi un impact très faible dans la plupart des situations évoquées dans la suite.

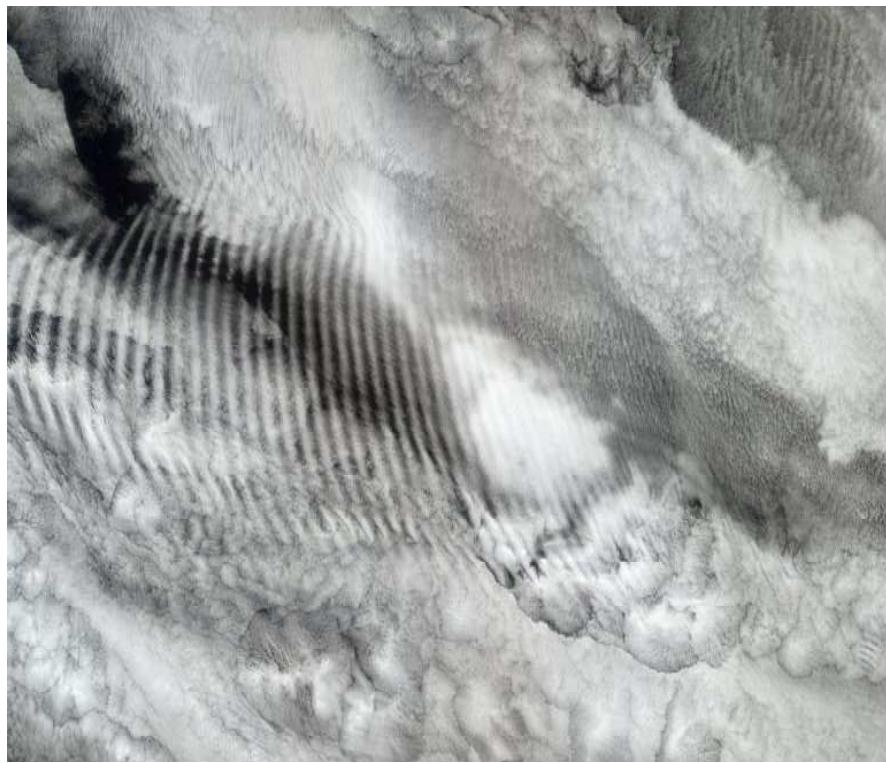


FIG. 1.2 – Ondes de gravité à la surface de stratocumulus. L'image correspond à un domaine de taille $245\text{km} \times 378\text{km}$ (NASA Earth Observatory Collection).

Et enfin, à l'échelle la plus grande, c'est la rotation différentielle, due à la courbure de la terre, qui entraîne l'apparition d'une force de rappel liée à la conservation du moment cinétique d'une colonne de fluide, ou plus précisément, de la vorticité potentielle des particules. Les ondes qui découlent de ces phénomènes étant appelées ondes planétaires, ondes de vorticité ou plus communément *ondes de Rossby*. Ces ondes sont un des éléments les plus fondamentaux dans la compréhension de la circulation de l'atmosphère ou de l'océan à grande échelle.

1.1.2 Équilibres à grande échelle

Dans l'atmosphère, on parle d'échelle planétaire pour des phénomènes à l'échelle du rayon de la Terre (10000 km), sur des temps se comptant en mois ou en années, comme la Mousson, la circulation de Hadley ou les régimes de temps. On parle aussi d'échelle synoptique, qui correspond à des échelles de quelques centaines à plusieurs milliers de kilomètres et à des durées de l'ordre de quelques jours, dans lesquelles on trouve la plupart des structures les plus importantes en météorologie comme les dépressions et les anticyclones des moyennes latitudes (figure 1.5) ou les cyclones tropicaux. De la même façon, les grands courants marins et les tourbillons océaniques ($10 - 200\text{km}$) (figure 1.6) définissent les échelles planétaires et synoptiques dans l'océan.

A ces grandes échelles, étant donné les caractéristiques en couche mince de l'océan et de l'atmosphère et de la prépondérance de la rotation terrestre, on peut utiliser différentes approximations comme l'équilibre hydrostatique et l'équilibre géostrophique qui vont permettre de décrire les structures précédemment citées.

L'équilibre hydrostatique est une approximation classique en dynamique des fluides



FIG. 1.3 – Ondes internes de gravité dans l’océan Indien au large de la Somalie (NASA Johnson Space Center Collection).

géophysiques, qui suppose que l’accélération verticale est faible devant les termes de pression et de gravité. L’équation du mouvement vertical correspond alors à un équilibre entre la résultante verticale des forces de pression et le poids :

$$\partial_z p = -\rho g, \quad (1.1)$$

avec p la pression, ρ la densité, g la gravité et z la coordonnée verticale. On pourra considérer en général qu’un fluide est hydrostatique lorsque son échelle verticale est faible devant son échelle horizontale. Ce qui est valable dans la plupart des situations pour l’océan et l’atmosphère, en particulier lorsque l’on s’intéresse aux écoulements de grande échelle. Il est d’ailleurs à noter que les ondes acoustiques sont filtrées dès lors que l’on utilise cette approximation.

Les mouvements aux échelles planétaires ou synoptiques, en plus d’être proches de l’équilibre vertical hydrostatique, s’éloignent peu d’un équilibre horizontal qu’on appelle l’*équilibre géostrophique*. La rotation terrestre étant prépondérante aux échelles planétaires ou synoptiques, l’équilibre géostrophique traduit un équilibre entre le gradient horizontal de pression et la force de Coriolis.

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = f \mathbf{k} \times \mathbf{v}, \quad (1.2)$$

avec p la pression, ρ la densité, \mathbf{v} le vecteur vitesse, \mathbf{k} le vecteur unitaire selon la verticale et f l’accélération de Coriolis.

La pression joue alors le rôle de fonction de courant pour la vitesse géostrophique. D’un point de vue pratique le fluide tourne dans le sens cyclonique autour d’un minimum de pression et dans le sens anticyclonique autour d’un maximum de pression.

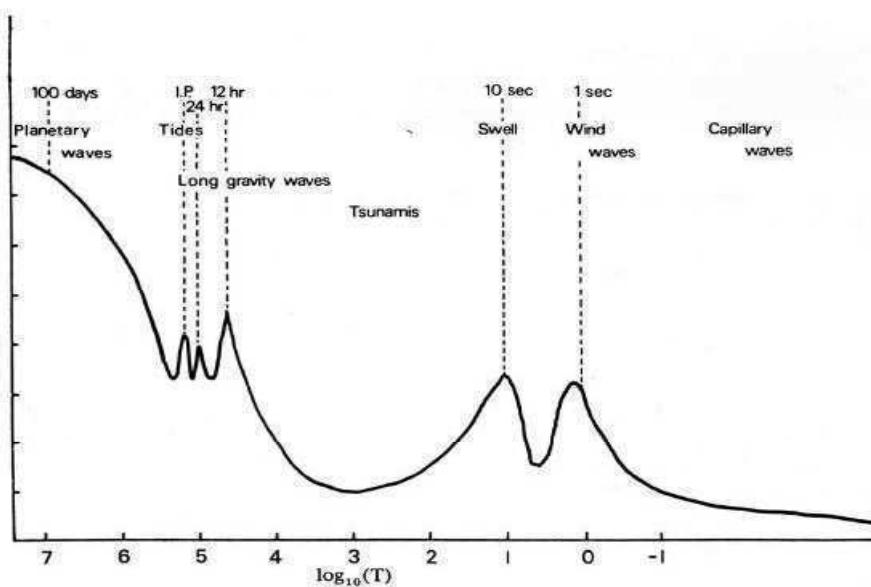


FIG. 1.4 – Répartition du spectre énergétique de la variabilité océanique correspondant aux différents types d'ondes présents dans l'océan. Tiré de Leblond & Mysak (1978).

Un moyen pour estimer l'importance de la rotation sur un écoulement est de comparer l'ordre de grandeur de l'accélération horizontale des particules de fluide avec l'ordre de grandeur de la force de Coriolis. On définit alors le *nombre de Rossby*

$$Ro = \frac{U}{fL}, \quad (1.3)$$

où U et L seront la vitesse et l'extension horizontale caractéristique de l'écoulement. Ainsi un nombre de Rossby petit devant 1 correspond à un écoulement proche de l'équilibre géostrophique tandis qu'un nombre de Rossby élevé est caractéristique d'importants effets agéostrophiques.

1.1.3 Les modèles équilibrés

la prépondérance, dans l'écoulement de grande échelle, de la composante lente proche de l'équilibre géostrophique est utilisée pour mettre au point des modèles qui ne décrivent que cette partie de l'écoulement, comme le *modèle quasi-géostrophique*. Celui-ci est obtenu en faisant l'hypothèse que le nombre de Rossby est petit, un nombre de Rossby faible signifiant que l'échelle de temps des mouvements est grande devant la période inertie $T = L/U \gg 1/f$. Dans le cadre du modèle quasi-géostrophique les mouvements "rapides", comme les ondes d'inertie-gravité, vont ainsi être exclus. L'écoulement est en équilibre géostrophique au premier ordre en Ro et la donnée de la vorticité potentielle quasi-géostrophique suffit pour obtenir l'état complet du fluide (pression, vitesse et température). C'est ce qu'on appelle l'inversion de la vorticité potentielle (Hoskins *et al.* (1985)).

Mais l'équilibre géostrophique strict n'a qu'une valeur diagnostique puisque les équations sont stationnaires au premier ordre. Il faut donc, pour connaître l'évolution quasi-géostrophique de l'écoulement, déterminer l'advection de la vorticité potentielle par le

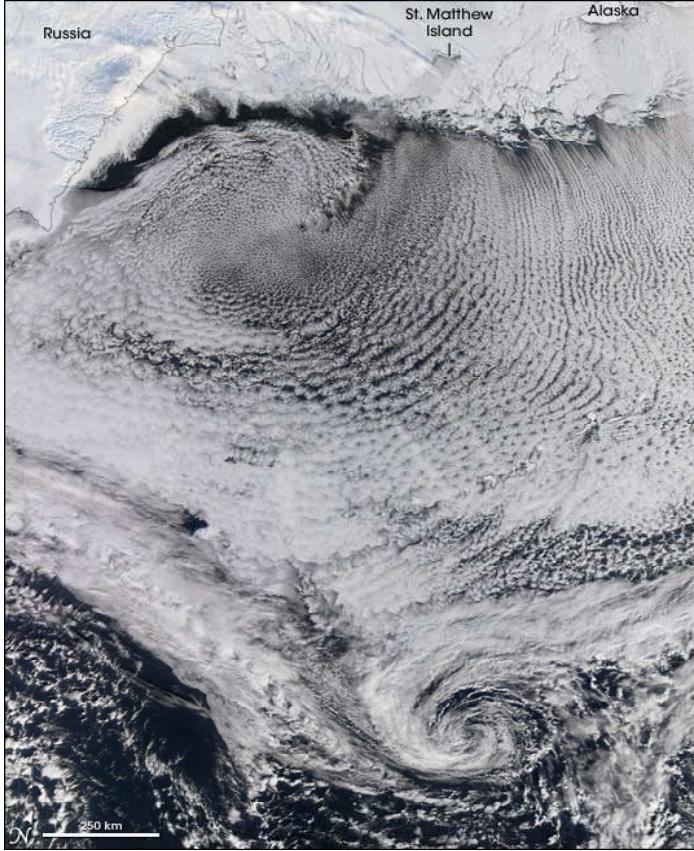


FIG. 1.5 – Formation d'un cyclone et d'un anticyclone au-dessus de la Mer de Bering (NASA Earth Observatory Collection).

champ de vent géostrophique précédemment calculé. C'est le principe du modèle quasi-géostrophique qui permet de décrire de manière satisfaisante nombre de phénomènes importants en météorologie ou en océanographie.

Plus généralement toute une hiérarchie de modèles équilibrés peuvent être construits sur un principe similaire en définissant des conditions d'équilibre et des relations diagnostiques différentes (voir par exemple Mohebalhojeh & Dritschel (2001) et les références incluses).

1.1.4 Mouvements non-équilibrés

Les modèles équilibrés, comme le modèle quasi-géostrophique, simplifient donc la description des écoulements en excluant les phénomènes rapides tels que les ondes d'inertie-gravité. Bien qu'une part importante de nos intuitions concernant la dynamique de l'océan et de l'atmosphère vienne de là, cela laisse néanmoins certaines questions ouvertes.

Dans l'océan, les mécanismes permettant le transfert d'énergie de la circulation mésoscale équilibrée vers les mouvements de petite échelle qui conduisent à la dissipation et au mélange ne sont pas encore tout à fait bien compris (Wunsch & Ferrari (2004); Molemaker *et al.* (2005)). Les ondes d'inertie-gravité sont observées partout dans l'at-

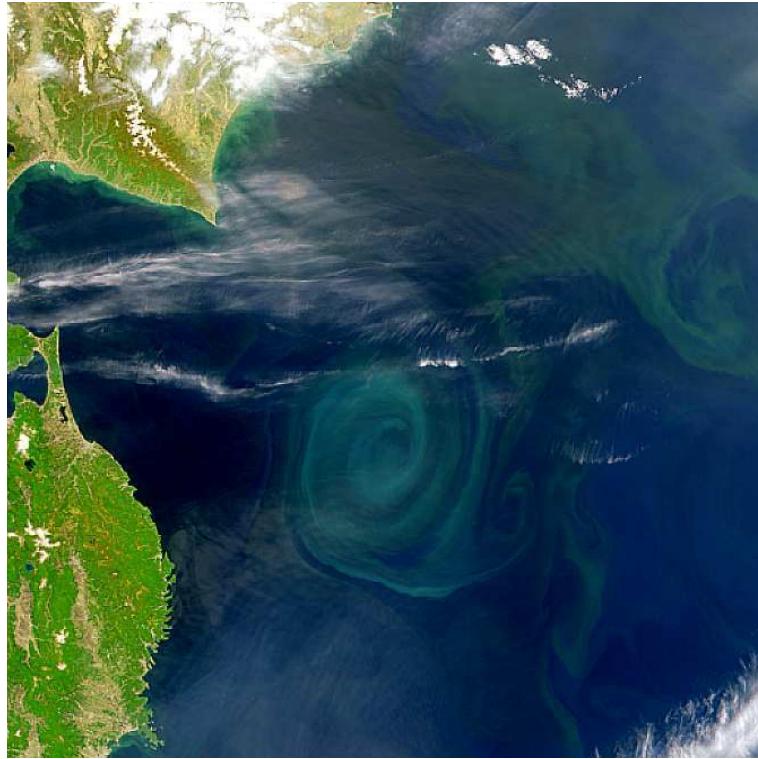


FIG. 1.6 – Tourbillon océanique au large du Japon (NASA/Goddard Space Flight Center).

mosphère (par ex. Dalin *et al.* (2004)) et dans l'océan (par ex. Thorpe (2005)) et les études théoriques, numériques et les observations ont montré que ces ondes d'inertie-gravité y jouaient un rôle important. Ces ondes peuvent transporter de l'énergie et du moment, elles contribuent à la turbulence et au mélange, notamment en cas de déferlement, et elles ont une influence non négligeable sur la circulation moyenne. Les ondes qui se propagent depuis la troposphère vers l'atmosphère moyenne jouent ainsi un rôle prépondérant pour forcer la circulation de celle-ci (Andrews *et al.* (1987), Holton *et al.* (1995)). Si les ondes de Rossby ont le rôle le plus important dans la stratosphère (quoique les ondes de gravité contribuent aussi : Dunkerton (1997), Austin & collaborators (2003)), les ondes de gravité sont essentielles pour la haute-atmosphère (Fritts & Alexander (2003)). Leur paramétrisation reste d'ailleurs une des difficultés majeures rencontrées dans la modélisation(Richter *et al.* (2008)).

Quels sont alors les nouveaux processus introduits lorsqu'on inclut dans la dynamique la partie rapide comme les ondes d'inertie-gravité ? Il importe donc de comprendre et quantifier plus précisément la dynamique de la partie rapide et les interactions possibles, notamment adiabatiques entre parties lentes et rapides, afin de déterminer les limites des modèles équilibrés.

1.2 Séparation des mouvements équilibrés et non-équilibrés

Comme nous l'avons vu les échelles temporelles et spatiales pour les mouvements lents équilibrés et les mouvements rapides non-équilibrés sont bien séparées dans les régimes de faible Ro . Du fait de cette séparation, leurs interactions sont faibles, au moins

en première approximation, et les mouvements équilibrés évoluent donc indépendamment des mouvements rapides (voir Reznik *et al.* (2001) et références incluses). C'est le mécanisme de l'ajustement géostrophique qui illustre le mieux cette séparation.

1.2.1 Scénario classique : l'ajustement géostrophique

La première étude de l'ajustement géostrophique a été réalisée par Rossby (1938) dans le cadre des équations de l'eau peu profonde en rotation. En considérant que le vent a mis en mouvement la couche océanique superficielle, il a montré que les conditions initiales non-équilibrées excitent des ondes d'inertie-gravité transitoires qui redistribuent la masse et la quantité de mouvement pour établir finalement un état en équilibre géostrophique. Plus généralement l'ajustement géostrophique est le processus classique par lequel l'océan ou l'atmosphère, une fois perturbé de son état d'équilibre, va retourner vers un tel état (Blumen (1972)). La partie non-équilibrée de l'état perturbé initial est évacuée en émettant des ondes d'inertie-gravité, ce que l'on pourra qualifier d'émission primaire. Ces ondes se dispersent et se propagent en laissant derrières elles la partie ajustée de l'écoulement qui évolue lentement. Ce processus est universel et accompagne la relaxation de toutes les perturbations, au moins pour les faibles Ro , puisque la partie équilibrée (vortex) et la partie non-équilibrée (les ondes d'inertie-gravité) de l'écoulement sont clairement identifiées et séparées dynamiquement dans ce régime. On peut dès lors étudier les problèmes d'ajustement analytiquement par des méthodes perturbatives de différents ordres en Ro (voir par exemple Reznik *et al.* (2001), Zeitlin *et al.* (2003), Zeitlin (2007)). L'ajustement géostrophique peut aussi être interprété comme un processus qui minimise l'énergie pour une distribution donnée de vorticité potentielle (Vallis (1992)). L'émission d'ondes d'inertie-gravité étant rapide (quelques f^{-1}) par rapport à l'évolution de la vorticité potentielle.

Pourtant, en dépit de cette séparation, les observations nous montrent que les jets et les fronts sont des sources importantes d'ondes d'inertie-gravité (Fritts & Nastrom (1992), Guest *et al.* (2000), Plougonven *et al.* (2003)). Les simulations numériques confirment ces émissions (O'Sullivan & Dunkerton (1995), Zhang *et al.* (2001), Plougonven & Snyder (2007)), dans le cadre de l'évolution tridimensionnelle d'un jet, mais peinent à en identifier précisément les mécanismes.

1.2.2 Émission spontanée

Ford (1994) a montré que même des écoulements équilibrés pouvaient subir un ajustement accompagné d'une émission spontanée d'ondes d'inertie-gravité, qu'on appelle aussi parfois émission secondaire d'ondes d'inertie-gravité.² Puisque dans ce cas, contrairement à l'ajustement géostrophique classique où la partie non-équilibrée provient de la perturbation à l'état initial, un état équilibré va s'écarte faiblement de l'équilibre spontanément au cours de son évolution (Ford *et al.* (2000), Viñedez & Dritschel (2006)).

Cette émission a donc des implications pour l'existence d'un "slow manifold", comme introduit par Leith (1980) et Lorenz (1980), qui correspond à un sous-espace de l'espace de phase dans lequel le fluide est affranchi des mouvements d'inertie-gravité. L'existence d'un tel sous-espace, et donc la possibilité qu'un écoulement puisse évoluer sans émettre d'ondes d'inertie-gravité a été longuement débattue. Certaines études numériques (Yavneh & McWilliams (1994)) comme les travaux de théoriques de Ford *et al.* (2000) sur

²Le terme d'émission secondaire est aussi parfois utilisé pour l'émission d'ondes d'inertie-gravité suite au déferlement d'une onde d'inertie-gravité primaire (Vadas & Fritts (2001)).

l'émission spontanée confirment néanmoins qu'il n'y a pas une existence stricte d'un tel espace.

Une approximation de ce sous-espace est possible même en présence d'ondes d'inertie-gravité (Warn *et al.* (1995), Vallis (1996), Wirosoetisno *et al.* (2002)) telle que les ondes soient suffisamment faibles pour ne pas le perturber de manière significative tout en gardant les propriétés utiles (Warn & Menard (1986)). S'il est admis que l'amplitude des ondes d'inertie-gravité décroît lorsque le nombre de Rossby décroît, et donc qu'elle est faible lorsque les écoulements sont proches de l'équilibre ($Ro \ll 1$), la dépendance exacte fait encore débat. Plusieurs études ont trouvé des dépendances variées comme, $Ro^{-1/2} \exp(-\alpha/Ro)$ (Vanneste & Yavneh (2004)), avec $\alpha \leq \pi/2$ (Plougonven *et al.* (2005), Plougonven *et al.* (2006)), ou $Ro^{-2} \exp(-\alpha/Ro)$ (Vanneste (2004)). Il n'est donc pas encore tout à fait clair que l'amplitude des ondes d'inertie-gravité soit algébrique ou exponentielle par rapport à Ro , ce qui a des implications très différentes en termes de dynamique équilibrée ou non.

Il y a différents mécanismes dynamiques qui permettent une émission spontanée d'ondes d'inertie-gravité et qui vont donc violer cette séparation : L'émission de Lighthill (Ford *et al.* (2000)), l'émission transitoire (Vanneste & Yavneh (2004), E.I. *et al.* (2008), Lott *et al.* (2009)) ou encore les instabilités non-équilibrées que nous allons voir maintenant.

1.2.3 Instabilités agéostrophiques

L'instabilité prépondérante pour les écoulements de grande échelle est l'instabilité barocline, connue depuis les travaux de Eady (1949), et qui est décrite par les modèles équilibrés comme le modèle quasi-géostrophique. Les critères classiques correspondant à l'apparition de cette instabilité concernent le changement de signe du gradient de vorticité potentielle. L'instabilité barocline peut être aussi interprétée comme l'interaction résonante de deux ondes de Rossby (Hoskins *et al.* (1985); Hayashi & Young (1987)).

Mais d'autres types d'instabilités, qui ne sont pas décrits par les modèles équilibrés et qui sont donc des *instabilités agéostrophiques*, existent. Dans le cas d'écoulements stratifiés en rotation avec un cisaillement de vitesse vertical, Stone (1966) a montré l'apparition de l'instabilité symétrique et de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz pour des cisaillements importants et donc un nombre de Rossby très grand (Vanneste (1993), Drazin & Reid (1981)). Pour des valeurs intermédiaires du cisaillement, Stone (1970) et Tokioka (1970) ont aussi identifié d'autres types d'instabilités agéostrophiques à des échelles plus courtes que l'instabilité barocline. Les structures de ces modes instables impliquaient des "niveaux critiques" (Jones (1967)), et des interactions entre les mouvements équilibrés et les ondes d'inertie-gravité au travers de ces niveaux critiques (Nakamura (1988) ; Plougonven *et al.* (2005)). Mais les taux de croissance de ces instabilités sont exponentiellement faibles vis-à-vis du nombre de Rossby (Molemaker *et al.* (2005)), et ne sont donc à priori significatifs que pour des cisaillements relativement importants. Pourtant il a été suggéré qu'en dépit de ses faibles taux de croissances, ces instabilités auraient néanmoins une grande importance en tant que mécanisme de transfert d'énergie entre mouvements équilibrés et non-équilibrés (Molemaker *et al.* (2005)).

De la même façon la formation des vortex intenses secondaires à cause de ces instabilités influence fortement la cyclogenèse frontale et entre clairement dans le cadre des études des événements météorologiques extrêmes. Alors que le développement et l'évolution des ondes baroclines à l'échelle synoptique sont bien compris dans l'atmosphère, ces vortex intenses secondaires qui apparaissent à de plus faibles échelles ne le sont pas et sont donc difficiles à prévoir (Parker (1998)).

Il est aussi nécessaire de quantifier les zones de dissipation et mélange produites par l'évolution de ces instabilités dans le contexte de dissipation globale dans l'océan (Wunsch & Ferrari (2004)) ou dans le contexte de perméabilité des barrières dynamiques pour les constituants dans l'atmosphère (Pierce & Fairlie (1993)). Pourtant les modèles de circulation générale n'intègrent quasiment pas ce type d'instabilités en raison de leur dynamique toujours assez mal comprise.

Nous allons donc nous intéresser plus particulièrement dans cette thèse à analyser différents types d'instabilités agéostrophiques susceptibles de coupler des mouvements équilibrés et non-équilibrés.

Chapitre 2

Ondes et instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde

'C'est en se tenant assez longtemps à la surface irisée que nous comprendrons le prix de la profondeur.'
Gaston Bachelard.

Dans la majorité des travaux qui seront présentés dans ce manuscrit, nous avons choisi d'utiliser le modèle de l'eau peu profonde en rotation sur le plan f à une ou plusieurs couches.

Ce modèle, en dépit de sa simplicité, contient tous les ingrédients de la dynamique de l'atmosphère et de l'océan à grande échelle, à savoir la rotation, une stratification simplifiée et permet aussi d'inclure les effets d'une topographie et des situations d'assèchement (incropping/outcropping). La dynamique non-linéaire de ce modèle est très riche, puisqu'elle permet la dynamique des vortex, les interactions onde-vortex et la dynamique non-linéaires des ondes dispersives ou très faiblement dispersives. Nous allons donc rappeler brièvement les caractéristiques de ce modèle et les approximations qu'il contient.

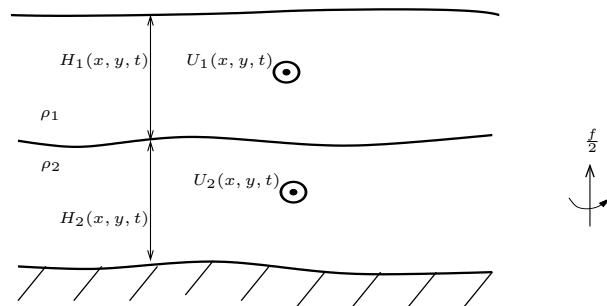


FIG. 2.1 – Le modèle de l'eau peu profonde à deux couches.

2.1 Hypothèses et équations du modèle de l'eau peu profonde

Pour étudier les écoulements océaniques et atmosphériques, on utilise les équations du mouvement pour un fluide stratifié en rotation. Les équations primitives hydrostatiques s'écrivent en notation standard :

$$\partial_t \mathbf{v}_h + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_h + \frac{1}{\rho} \nabla_h p = 0, \quad (2.1)$$

$$\partial_z p + \rho g = 0, \quad (2.2)$$

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.3)$$

avec le champs de vitesse $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_h, w) = (u, v, w)$ selon les coordonnées (x, y, z) où x est la coordonnée zonale dirigée vers l'Est, y est la coordonnée méridionale dirigée vers le Nord, z la coordonnée selon la verticale locale (normale au plan tangent définie comme opposée à la gravité effective g qui inclue une correction faible due à la force centrifuge (Holton (1992))). L'opérateur de dérivation est $\nabla = (\nabla_h, \partial_z) = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, ρ est la densité du fluide et p est la pression. Le paramètre de Coriolis f sera égal à $f = f_0 + \beta y$ si l'on se place dans l'approximation du plan- β ou à $f = 2\Omega \sin \Phi = cste$ dans l'approximation du plan- f , ce qui sera toujours le cas dans la suite.

On notera que ces équations sont non-dissipatives. Il est possible d'y rajouter les termes correspondant à la viscosité ou à la diffusivité, mais ce n'est en général pas nécessaire pour les écoulements aux échelles synoptiques dans l'océan et dans l'atmosphère qui ont des nombres de Reynolds extrêmement élevés. On négligera donc dans la suite toute forme de dissipation en considérant le fluide comme parfait.

L'approximation principale utilisée pour dériver les équations du modèle de l'eau peu profonde à une ou plusieurs couches consiste à supposer que les variations de toutes les variables sont faibles selon la verticale dans chacune des couches de fluide par rapport à leurs variations dans le plan horizontal. On fait alors l'hypothèse d'un écoulement quasi-bidimensionnel, justifiée par le fait que l'atmosphère et l'océan terrestre sont des fluides qui forment une couche mince : leurs échelles caractéristiques horizontales (plusieurs milliers de kilomètres) sont très grandes devant leurs échelles caractéristiques verticales (quelques centaines de mètres à quelques kilomètres pour l'océan et quelques dizaines de kilomètres pour l'atmosphère).

La dérivation des équation du modèle de l'eau peu profonde s'obtient donc en moyennant les équations précédentes sur la verticale. Une méthode générale, proposée par Jeffreys (1925) dans l'approximation linéaire et Obukhov (1949) pour le cas non-linéaire, est reproduite ici dans le cas d'un modèle à plusieurs niveaux en suivant Zeitlin (2007).

Les équations (2.1) et (2.3) peuvent être écrites comme des équations d'évolution de la quantité de mouvement :

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_z(\rho uw) - f \rho v = -\partial_x p, \quad (2.4)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_z(\rho vw) + f \rho u = -\partial_y p, \quad (2.5)$$

que l'on intègre selon la verticale entre deux surfaces matérielles z_1 et z_2 telles que :

$$\frac{dz_i}{dt} = w|_{z_i}, \quad i = 1, 2 \quad (2.6)$$

En utilisant la formule générale

$$\int_{z_1}^{z_2} dz F_x = \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz F - \partial_x z_2 F|_{z_2} + \partial_x z_1 F|_{z_1}, \quad (2.7)$$

on obtient à partir de (2.4) et (2.5) les équations :

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u^2 + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho uv - f \int_{z_1}^{z_2} dz fv \\ = -\partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz p - \partial_x z_1 p|_{z_1} + \partial_x z_2 p|_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho uv + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v^2 + f \int_{z_1}^{z_2} dz fu \\ = -\partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz p - \partial_y z_1 p|_{z_1} + \partial_y z_2 p|_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\partial_t \int_{z_1}^{z_2} dz \rho + \partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz \rho u + \partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz \rho v = 0. \quad (2.10)$$

En intégrant l'équilibre hydrostatique (2.2) entre z_1 et z_2 on définit la densité intégrée :

$$\mu = \int_{z_1}^{z_2} dz \rho = -\frac{1}{g}(p|_{z_2} - p|_{z_1}), \quad (2.11)$$

et on introduit la notation suivante pour la moyenne verticale pondérée par la densité pour toute fonction A :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{\mu} \int_{z_1}^{z_2} dz \rho A. \quad (2.12)$$

Les équations (2.8 - 2.10) peuvent ainsi s'écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu \langle u \rangle) + \partial_x(\mu \langle u^2 \rangle) + \partial_y(\mu \langle uv \rangle) - f \mu \langle v \rangle \\ = -\partial_x \int_{z_1}^{z_2} dz p - \partial_x z_1 p|_{z_1} + \partial_x z_2 p|_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\mu \langle v \rangle) + \partial_x(\mu \langle uv \rangle) + \partial_y(\mu \langle v^2 \rangle) + f \mu \langle u \rangle \\ = -\partial_y \int_{z_1}^{z_2} dz p - \partial_y z_1 p|_{z_1} + \partial_y z_2 p|_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\partial_t \mu + \partial_x(\mu \langle u \rangle) + \partial_y(\mu \langle v \rangle) = 0. \quad (2.15)$$

L'hypothèse d'un écoulement quasi-bidimensionnel, qui consiste à supposer que les variations de toutes les variables sont faibles selon la verticale par rapport à leurs variations dans le plan horizontal, va ensuite permettre de découpler les corrélations suivantes :

$$\langle uv \rangle \approx \langle u \rangle \langle v \rangle, \quad \langle u^2 \rangle \approx \langle u \rangle \langle u \rangle, \quad \langle v^2 \rangle \approx \langle v \rangle \langle v \rangle. \quad (2.16)$$

Ce qui nous permet d'écrire en utilisant les équations (2.13 - 2.15) et en omettant les crochets :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(z_2 - z_1)(\partial_t \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_h \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_h) = \\ -\nabla_h(-g\bar{\rho} \frac{(z_2 - z_1)^2}{2} + (z_2 - z_1) p|_{z_1}) - \nabla_h z_1 p|_{z_1} + \nabla_h z_2 p|_{z_2}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où l'on a introduit la densité moyenne :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{z_2 - z_1} \int_{z_1}^{z_2} dz \rho, \quad \mu = \bar{\rho}(z_2 - z_1) \quad (2.18)$$

que l'on va supposer constante.

Pour obtenir les équations du modèle de l'eau peu profonde, il ne reste désormais plus qu'à définir les conditions aux limites en z_1 et z_2 pour chacune des couches du modèle.

Dans le cas d'un *modèle à deux couches avec un fond plat et un toit rigide* comme utilisé dans le chapitre 4 et le chapitre 5, on va définir une surface matérielle $z = z_2(x, y, t) = h(x, y, t)$ comme l'interface entre les deux couches de fluides, dans les limites du domaine $z_1 = 0$ et $z_3 = H_0 = \text{cste}$. On obtient alors les équations du modèle de l'eau peu profonde à deux couches :

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_i + \frac{1}{\bar{\rho}_i} \nabla \pi_i = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.19)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{v}_2) = 0, \quad (2.20)$$

$$\partial_t (H_0 - h) + \nabla \cdot ((H_0 - h) \mathbf{v}_1) = 0, \quad (2.21)$$

$$\pi_2 = (\bar{\rho}_2 - \bar{\rho}_1)gh + \pi_1 \quad (2.22)$$

où les indices 1 (2) désignent la couche supérieure (inférieure) respectivement et π_1 est la valeur de la pression à la frontière supérieure.

Dans le cas d'un *modèle à deux couches avec un fond plat et une surface libre* comme utilisé dans le chapitre 6, la démarche est similaire en définissant $z_1 = 0$, $z_2(x, y, t) = h_2(x, y, t)$ et $z_3(x, y, t) = h_1(x, y, t)$. Les équations deviennent alors :

$$\partial_t \mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v}_i + \frac{1}{\bar{\rho}_i} \nabla (\bar{\rho}_1 g h_1 + \bar{\rho}_i g h_2) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.23)$$

$$\partial_t h_i + \nabla \cdot (h_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2.24)$$

où les indices 1 (2) désignent la couche supérieure (inférieure) respectivement.

On obtient bien sûr le *modèle à une couche*, en prenant au choix la limite $\rho_1 \rightarrow 0$ ou la limite $\rho_2 \rightarrow +\infty$ dans n'importe lequel des deux systèmes précédents :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v} + g \nabla h = 0, \quad (2.25)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) = 0. \quad (2.26)$$

Mais il est alors plus intéressant d'introduire le *modèle à gravité réduite* ou modèle à une couche et demie, qui sera utilisé dans le chapitre 6 et dans la suite de l'introduction, en prenant la limite $\mathbf{v}_2 \rightarrow \mathbf{0}$ et $h \ll H$ dans le modèle à deux couches avec toit rigide, qui donne alors :

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + f \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v} + g' \nabla h = 0, \quad (2.27)$$

$$\partial_t h + \nabla \cdot (h \mathbf{v}) = 0. \quad (2.28)$$

où $g' = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g$ est appelée la gravité réduite. Ce modèle correspond à une couche en mouvement, de densité ρ_1 , qui repose sur une couche de densité ρ_2 au repos et de profondeur très grande devant celle de la couche supérieure. On dira alors que la couche

inférieure est passive puisque le rapport de hauteur des deux couches ne permet pas d'interactions baroclines entre les deux couches. Cette représentation est néanmoins utile pour représenter beaucoup de phénomènes comme par exemple la dynamique de la couche superficielle de l'océan.

2.2 Propriétés importantes du modèle

2.2.1 Conservation de la vorticité potentielle

Une propriété essentielle du modèle, dans le cadre de la problématique de la séparation de l'écoulement entre une partie équilibrée et une partie non-équilibrée évoquée dans la partie précédente, concerne la conservation de la vorticité potentielle. On peut montrer que la vorticité potentielle est une propriété lagrangienne du fluide, c'est-à-dire qu'elle est conservée pour chaque particule de fluide.

En introduisant la vorticité relative ζ , qui pour le modèle de l'eau peu profonde correspond au rotationnel de la vitesse horizontale :

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = (\partial_x v - \partial_y u) \hat{\mathbf{z}} = \zeta \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.29)$$

on peut réécrire l'équation de conservation de la quantité de mouvement pour le modèle à une couche (2.25) sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{v} + (\zeta + f) \hat{\mathbf{z}} \wedge \mathbf{v} + \nabla(gh + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2) = 0. \quad (2.30)$$

En prenant le rotationnel de cette équation, on obtient :

$$\partial_t \zeta + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\zeta + f) + (\zeta + f) \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.31)$$

qui avec la conservation de la masse (2.26) donne simplement la conservation de la vorticité potentielle q :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta + f}{h} \right) = \frac{Dq}{Dt} = 0. \quad (2.32)$$

Dans le cas d'un modèle multi-couches, la vorticité potentielle sera conservée de la même façon pour chacune des couches :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\zeta_i + f}{h_i} \right) = \frac{Dq_i}{Dt} = 0, \quad (2.33)$$

où h_i est l'épaisseur de la couche i .

2.2.2 Séparation entre mouvements lents et mouvements rapides

Il est facile de mettre en évidence la séparation entre les mouvements lents équilibrés et les mouvements rapides non-équilibrés, décrite dans la partie 1.2, dans le cadre du modèle de l'eau peu profonde. On considère pour cela de faibles perturbations autour d'un état de repos où la hauteur de fluide est H . En linéarisant les équations (2.25) et (2.26) autour de cet état de repos, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \partial_t u - fv &= -g \partial_x h, \\ \partial_t v + fu &= -g \partial_y h, \\ \partial_t h + H(\partial_x u + \partial_y v) &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

On cherche la solution de ce système sous la forme d'ondes harmoniques :

$$(u, v, h) = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{h}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.35)$$

avec $\mathbf{k} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j}$ le nombre d'onde et ω la fréquence, que l'on peut remplacer dans le système (2.34) pour obtenir le système matriciel suivant :

$$\begin{pmatrix} -i\omega & -f & igk \\ f & -i\omega & igl \\ ikH & ilH & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{h} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.36)$$

C'est un système homogène avec des solutions non-triviales lorsque le déterminant s'anule, ce qui nous donne l'équation :

$$\omega(\omega^2 - f^2 - gH(k^2 + l^2)) = 0. \quad (2.37)$$

Cette équation admet trois solutions qui sont un état stationnaire $\omega = 0$ et deux solutions ondulatoires correspondant aux deux racines de :

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2). \quad (2.38)$$

qui sont ainsi séparées par un trou spectral, puisque les solutions ondulatoires ont une fréquence supérieure à f en valeur absolue alors que l'état stationnaire a une fréquence nulle.

La composante lente de l'écoulement est tout simplement stationnaire, et correspond à la partie de l'écoulement en équilibre géostrophique comme on peut le voir dans les équations (2.34). Ces mouvements sont incompressibles et ont une signature non-nulle sur la vorticité potentielle, qui dans l'approximation linéaire est conservée en chaque point puisque l'on néglige l'advection. Notons aussi que l'état équilibré du fluide se déduit simplement de la connaissance de la distribution de vorticité potentielle et des conditions aux limites de l'écoulement.

Les deux autres solutions correspondent aux ondes d'inertie-gravité, qui se propagent à des échelles de temps rapides ($T \leq f^{-1}$). On peut vérifier en utilisant les équations (2.34) que ces ondes seront à divergence non-nulle et qu'elles vont avoir par contre une signature nulle sur la vorticité potentielle. Ce sont des ondes dispersives.

Dans la limite des ondes courtes, pour $k^2 + l^2 \gg f^2/gH$, c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde des ondes est très petite devant le rayon de déformation, on retrouve la relation de dispersion pour les ondes de gravité sans rotation $c = \sqrt{gH}$, qui redeviennent alors non-dispersives.

Dans la limite des ondes longues, $k^2 + l^2 \ll f^2/gH$, la relation de dispersion devient simplement $\omega = f$, correspondant aux oscillations inertielles. Ces oscillations sont caractérisées par des mouvements sans variation de pression (c'est-à-dire de hauteur dans le cas du modèle à une couche), entièrement gouvernés par la force de Coriolis, et qui obéissent donc aux équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \partial_t u - fv &= 0, \\ \partial_t v + fu &= 0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

On notera que dans ce cas la vitesse de groupe devient nulle, et donc qu'un paquet d'ondes avec une fréquence proche de la fréquence inertuelle ne va pas se propager mais rester au même endroit pendant des temps longs.

Cette analyse linéaire illustre donc bien la séparation d'échelle entre :

- les mouvements lents vorticaux, qui sont en équilibre géostrophique et qui ont une divergence nulle
- les mouvements rapides propagatifs, qui ont une divergence non-nulle et qui ne modifient pas la vorticité potentielle.

On retrouve aussi intuitivement le scénario standard de l'ajustement géostrophique décrit dans la partie 1.2, où un état perturbé va s'ajuster vers un état équilibré en se séparant de sa partie non-équilibrée par une émission rapide d'ondes d'inertie-gravité. Pourtant, comme mentionné dans la partie précédente, certains mécanismes d'instabilité agéostrophiques vont permettre de passer outre cette séparation. Ce sont ces instabilités auxquelles nous allons nous intéresser plus particulièrement dans la suite.

2.3 Généralités sur les analyses de stabilité

Un écoulement va être défini par la donnée de plusieurs variables comme le champ de vitesse $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, le champ de pression $P(\mathbf{x}, t)$) et éventuellement des champs de température, etc, qui vont définir l'état de base du fluide. Même si en pratique, pour les écoulements observés dans l'océan ou dans l'atmosphère, il n'est pas toujours aisé d'isoler un état de base débarrassé des fluctuations dues aux instabilités (voir Pedlosky (1987)), on peut définir l'état de base comme un état équilibré aux vues des contraintes qui lui sont imposées (forces, sources, géométrie, etc.). Lorsque cet état de base est perturbé, la perturbation peut soit décroître et finir par disparaître, rester dans l'écoulement en gardant une amplitude constante ou croître. On dira alors que l'écoulement est (asymptotiquement) stable, marginalement stable ou instable, respectivement (voir par exemple Drazin & Reid (1981)). Pour revenir à une définition plus mathématique, on pourra dire qu'un écoulement (défini par un état de base $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, $P(\mathbf{x}, t)$) est *stable* (*dans le sens de Lyapounov*) si, quelque soit $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, 0)\|, \|p(\mathbf{x}, 0) - P(\mathbf{x}, 0)\| < \delta, \quad (2.40)$$

alors

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\|, \|p(\mathbf{x}, t) - P(\mathbf{x}, t)\| < \epsilon, \quad \forall t > 0 \quad (2.41)$$

où \mathbf{u} est le champ de vitesse et p le champ de pression. On dira de même que l'écoulement est asymptotiquement stable dans le sens de Lyapounov si

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{U}(\mathbf{x}, t)\|, \|p(\mathbf{x}, t) - P(\mathbf{x}, t)\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } t \rightarrow +\infty. \quad (2.42)$$

Dans la pratique, les problèmes de stabilité sont en général très complexes et souvent impossibles à résoudre pour des perturbations d'amplitude arbitraire du fait des fortes non-linéarités du système.

Une première méthode consiste alors à supposer une perturbation d'amplitude assez faible afin de pouvoir linéariser les équations du système autour de l'état de base, on parle alors d'analyse de *stabilité linéaire* d'un écoulement, comme nous allons le faire dans la suite de l'introduction et dans les prochains chapitres. Certaines instabilités, comme l'instabilité statique ou l'instabilité symétrique, peuvent ainsi être décrites en raisonnant sur les mouvements lagrangiens des particules de fluide. Mais la plupart des instabilités, comme celles qui vont nous intéresser dans la suite, ne peuvent être associées simplement aux mouvements individuels des particules de fluide, mais peuvent par contre être beaucoup plus facilement décrites du point de vue de propagations d'ondes. C'est pourquoi nous allons utiliser une méthode standard dans l'étude des instabilités qui est la méthode des *modes normaux* et qui consiste à introduire une

perturbation dans l'écoulement sous la forme d'un mode de Fourier $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)]$. On obtient alors un système aux valeurs propres qui nous permet de déterminer les conditions pour lesquelles la fréquence ω de ce mode va avoir une partie imaginaire positive non nulle, synonyme d'un mode exponentiellement croissant et donc instable. Il est possible de traiter chaque mode séparément car le système est linéaire, et par conséquent n'importe quelle combinaison de ces modes est une solution du système. Le succès d'une telle méthode dépend néanmoins de la possibilité de pouvoir décrire complètement une perturbation initiale arbitraire sur une base de modes normaux.

Si dans les configurations les plus simples il est possible de résoudre analytiquement le système aux valeurs propres de manière exacte, comme nous le ferons par exemple dans le chapitre 4 pour l'étude de stabilité d'une couche de fluide dans un anneau, dans les cas plus complexes nous aurons recours à une méthode numérique pseudo-spectrale, la *méthode de collocation*. Cette méthode est expliquée en détail dans la partie 3.1 du chapitre 3 qui regroupe les différentes méthodes numériques utilisées dans ce manuscrit. L'ensemble des études de stabilité linéaires présentées dans la suite de cette introduction, illustrant pour la plupart des résultats connus de la littérature, ont ainsi été reproduites par des méthodes analytiques lorsque c'était possible, ou en utilisant la méthode de collocation sinon.

L'étude linéaire des instabilités ne reste par définition valable que tant que la perturbation est d'amplitude très faible, soit durant stade initial de développement des instabilités. Lorsqu'un mode linéairement instable croît jusqu'à une amplitude finie, et éventuellement modifie l'état de base, la théorie linéaire cesse d'être valide puisque les effets non-linéaires influencent l'évolution de l'écoulement. Nous aurons alors besoin d'autres méthodes pour déterminer les stades ultérieurs de croissance, de saturation des modes, de modifications de l'écoulement moyen, etc. Le problème peut être traité analytiquement en utilisant des méthodes perturbatives pour des évolutions faiblement non-linéaires ou numériquement en simulant les équations non-linéaires dans différents modèles comme nous allons le faire dans la suite. Ainsi, dans les chapitres 5 et 6 nous nous intéresserons aux aspects non-linéaires de la stabilité des écoulements en utilisant tout d'abord le code aux volumes finis pour les systèmes hyperboliques tel que défini dans la partie 3.2 pour le modèle de l'eau peu profonde à une ou plusieurs couches, ou le modèle atmosphérique méso-échelle WRF qui est décrit dans la partie 3.3 pour l'étude d'écoulements continument stratifiés.

Dans la suite de cette introduction, nous allons voir quelques exemples d'analyses de stabilité linéaire par la méthode des modes normaux pour différents types d'écoulements. Dans le but de faciliter les interprétations des différents mécanismes d'instabilité, nous allons commencer par caractériser les différents types d'ondes rencontrés dans le modèle de l'eau peu profonde.

2.4 Ondes dans le modèle de l'eau peu profonde

Nous allons répertorier différents types d'ondes présents dans la dynamique du modèle de l'eau peu profonde, en rappelant d'abord les caractéristiques des ondes de vorticité ou *ondes de Rossby* ainsi que des *ondes d'inertie-gravité* évoquées dans la partie 1.1. Quelques ondes particulières, issues de propriétés plus spécifiques des écoulements telles que la présence de guide d'ondes, comme les *ondes topographiques*, les *ondes de Kelvin*, les *ondes inertielles* ou encore les *ondes frontales* seront discutées ensuite. Pour une revue exhaustive de toutes ces ondes, on pourra se reporter à Leblond & Mysak (1978).

2.4.1 Ondes de Rossby

Nous avons vu dans le cadre de l'analyse linéaire d'un écoulement au repos que la partie vorticale de l'écoulement était simplement stationnaire. Ce n'est néanmoins plus le cas dès lors que l'on prend en compte la variation de f (par exemple dans l'approximation du plan- β) ou lorsque l'on considère un état de base possédant un gradient de vorticité potentielle non nul.

On considère par exemple un écoulement zonal $U = \text{cste}$ équilibré ($H(y) = H_0 - gy/f$) sur le plan- f . Pour plus de commodité on se place dans l'approximation quasi-géostrophique (faible nombre de Rossby $Ro = U/fL$ où L est une dimension caractéristique du mouvement) qui va permettre de décrire les mouvements vorticaux tout en filtrant les mouvements rapides. On obtient alors l'équation d'évolution linéarisée suivante (cf. Holton (1992)) :

$$(\partial_t + U\partial_x) \left(\nabla^2 h - \frac{h}{R_d^2} \right) + \frac{U}{R_d^2} \partial_x h = 0 \quad (2.43)$$

où h est la perturbation de hauteur et $R_d = \sqrt{gH_0}/f$ le rayon de déformation de Rossby, et qui possède des solutions ondulatoires $h = \bar{h} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$ avec une relation de dispersion :

$$\omega = U k - k \frac{U/R_d^2}{k^2 + l^2 + 1/R_d^2} \quad (2.44)$$

On peut remarquer que la vorticité potentielle quasi-géostrophique de l'état de base s'écrit $Q \approx \frac{g}{f} \nabla^2 h - \frac{f}{H_0} h = f - \frac{U}{R_d^2} y$ et le gradient de vorticité potentielle $Q_y = -\frac{U}{R_d^2}$.

Si le rayon de déformation est très grand par rapport à l'échelle du mouvement ($R_d \gg L$), la variation de hauteur est très faible et le gradient de vorticité potentielle tend vers 0. On retrouve alors le cas stationnaire à la différence près que la vitesse de phase correspond dorénavant à la vitesse de l'écoulement de base, $c = U$, puisque l'écoulement n'est plus au repos comme dans le cas précédent et fournit une translation uniforme. Mais lorsque le rayon de déformation est fini, le gradient de vorticité potentielle n'est plus nul, et les ondes de Rossby vont se propager dans l'écoulement. Même si les vitesses de phase des ondes de Rossby restent toujours très faibles, notamment par rapport à celles des ondes d'inertie-gravité. C'est donc la variation de hauteur de l'état équilibré qui va jouer le rôle d'un effet β permettant l'apparition des ondes de Rossby.

Les courbes de dispersion des ondes de Rossby pour un écoulement zonal sont représentées figure 2.2.

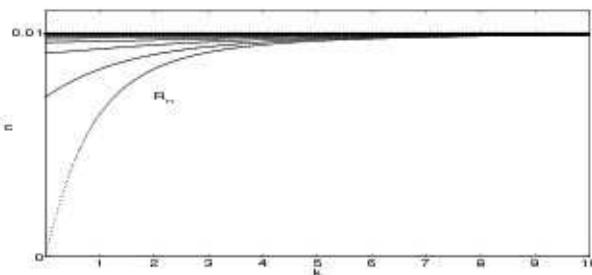


FIG. 2.2 – Courbes de dispersion $c = c(k)$ des ondes de Rossby pour un écoulement zonal : $U = 0.01$. Les courbes de bas en haut correspondent à des nombres d'onde méridionaux croissants.

Les champs de pression et de vitesse des ondes de Rossby sont représentées sur la figure 2.3 dans le cas d'un écoulement zonal constant. Le domaine est périodique en x et l'écoulement est au repos en $y = \pm\infty$. La structure de ces ondes correspond à une alternance de cyclones et d'anticyclones, et on peut noter son caractère équilibré en remarquant que les champs de vitesse suivent parfaitement les contours de pression.

La figure 2.4 nous montre à titre de confirmation les anomalies de divergence et de vorticité potentielle correspondant à l'onde de Rossby de la figure 2.3 (a). On retrouve donc bien des signatures nulles pour la divergence et non-nulle pour la vorticité.

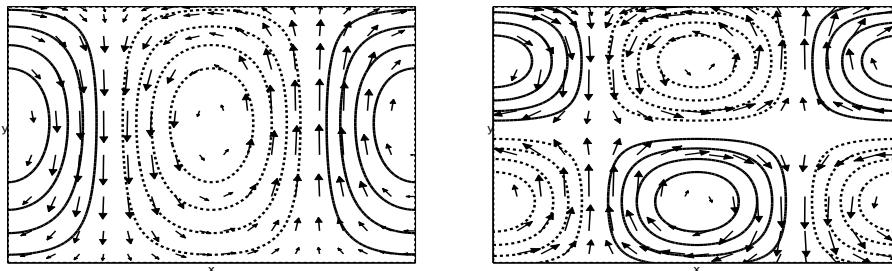


FIG. 2.3 – Champs de pression et vitesse pour les 2 premiers modes de Rossby dans un canal en rotation, $l = 1$ (gauche) et $l = 2$ (droite)

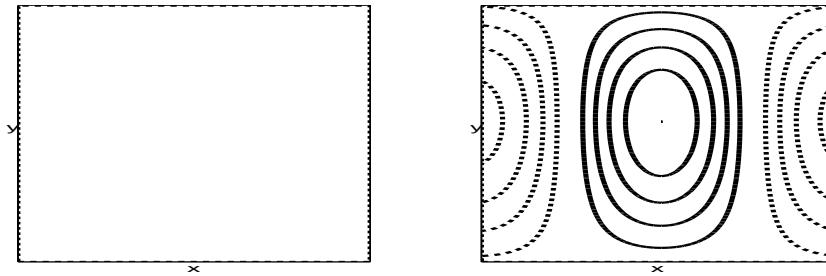


FIG. 2.4 – Divergence (gauche) et vorticité potentielle (droite) pour l'onde de Rossby représentée figure 2.3 (a).

2.4.2 Ondes de gravité dans un modèle sans rotation

Les ondes de gravité sont dues aux effets de la flottaison et de la gravité comme nous l'avons vu précédemment. Pour les caractériser nous allons simplement considérer une couche de fluide avec surface libre et sans rotation. Ce qui nous donne en linéarisant les équations (2.25) pour un état de base au repos ($U = 0$ et $H = cste$) l'équation d'évolution pour la perturbation de hauteur :

$$\partial_{tt} h - gH\nabla^2 h = 0. \quad (2.45)$$

En substituant par $h = \tilde{h} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)}$ avec $\mathbf{k} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j}$ le nombre d'onde et ω la fréquence, on obtient la relation de dispersion des ondes de gravité :

$$\omega^2 = gH(k^2 + l^2). \quad (2.46)$$

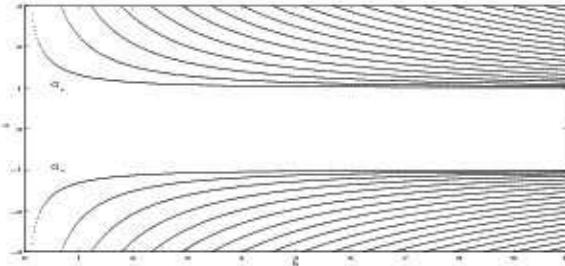


FIG. 2.5 – Courbes de dispersion $c = c(k)$ des ondes de gravité correspondant à un écoulement plan sans rotation.

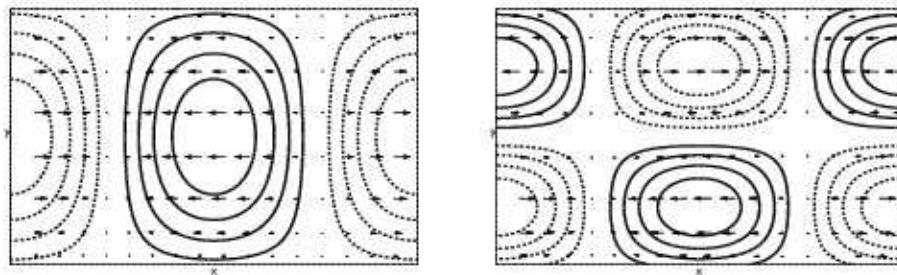


FIG. 2.6 – Champs de pression et vitesse pour les 2 premiers modes de gravité dans un écoulement plan sans rotation

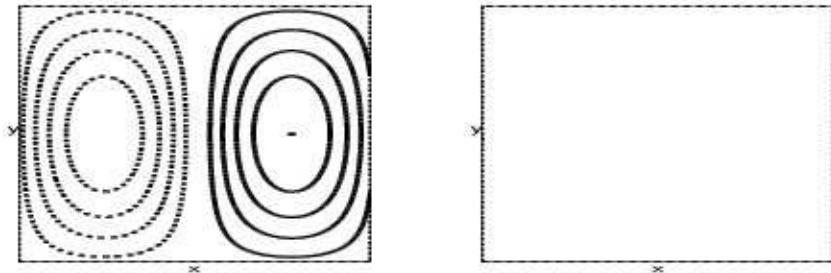


FIG. 2.7 – Divergence (gauche) et vorticité potentielle (droite) pour l'onde de gravité représentée figure 2.6 (a). L'intervalle entre chaque contour est égal à 1.

Les courbes de dispersion des ondes de gravité pour un écoulement zonal localisé sans rotation sont représentées figure 2.5. Les champs de pression et de vitesse des ondes de gravité sont représentées sur la figure 2.6 dans le cas d'un état de base au repos pour un domaine périodique en x . Contrairement aux ondes de Rossby précédentes, on peut voir que les champs de vitesses et de presion ne sont plus du tout équilibrés. La figure 2.7 nous montre les anomalies de divergence et de vorticité potentielle correspondant à l'onde de gravité de la figure 2.6 (a). On retrouve donc bien des signatures non-nulles pour la divergence et nulles pour la vorticité.

Nous allons maintenant voir comment la rotation va modifier la structure de ces ondes, notamment dans le cas d'un état de base en équilibre géostrophique avec une

vitesse non nulle.

2.4.3 Ondes de Poincaré

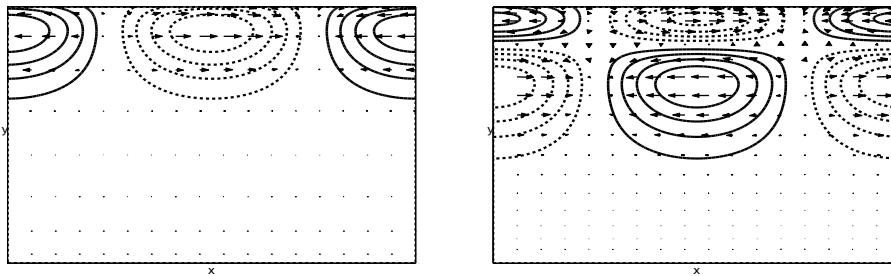


FIG. 2.8 – Champs de pression et vitesse pour les 2 premiers modes de Poincaré pour un écoulement zonal sur le plan f .

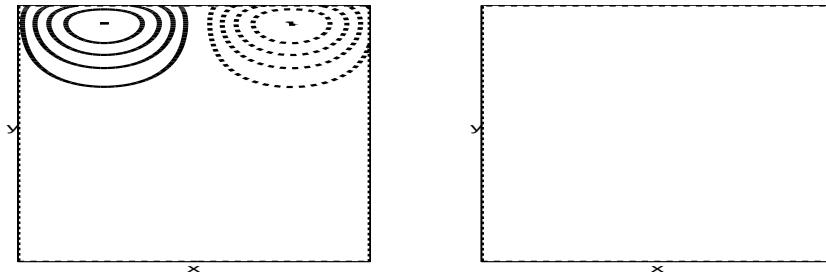


FIG. 2.9 – Divergence (gauche) et vorticité potentielle (droite) pour l'onde de gravité représentée figure 2.8 (a). L'intervalle entre chaque contour est égal à 1.

Les ondes d'inertie-gravité dans le modèle de l'eau peu profonde en rotation, ou ondes de Poincaré, sont comme leur nom l'indique issues des effets simultanés de la gravité et de la rotation terrestre. La relation de dispersion de ces ondes a été obtenue dans la partie 2.2.2 pour le modèle le plus simple, soit un modèle à une couche avec un fond plat et une surface libre sur le plan- f . En linéarisant autour d'un état de repos les équations (2.25), on avait ainsi obtenu la relation de dispersion pour ces ondes :

$$\omega^2 = f^2 + gH(k^2 + l^2). \quad (2.47)$$

Les champs de pression et de vitesse pour un exemple d'une onde de Poincaré dans un écoulement zonal équilibré sont représentés sur la figure 2.8. La structure est différente du cas sans rotation notamment en raison de la variation et de l'asymétrie de la hauteur de l'état de base $H(y) = H_0 - Uy$.

La figure 2.9 nous montre les anomalies de divergence et de vorticité potentielle correspondant à l'onde de gravité de la figure 2.8 (a). On retrouve donc bien des signatures non-nulles pour la divergence et nulles pour la vorticité potentielle.

2.4.4 Conditions aux bords

De manière générale dans un modèle de l'eau peu profonde en rotation il existe toujours des familles d'ondes de Poincaré (ondes d'inertie-gravité) se propageant dans le sens de propagation positif et dans le sens de propagation négatif, ainsi qu'une famille d'onde de Rossby si la vorticité potentielle n'est pas strictement constante dans le domaine. Mais il existe aussi d'autres types d'ondes aux caractéristiques "hybrides" dont l'existence est liée à la présence d'un guide d'onde, soit une côte, l'équateur ou encore une topographie.

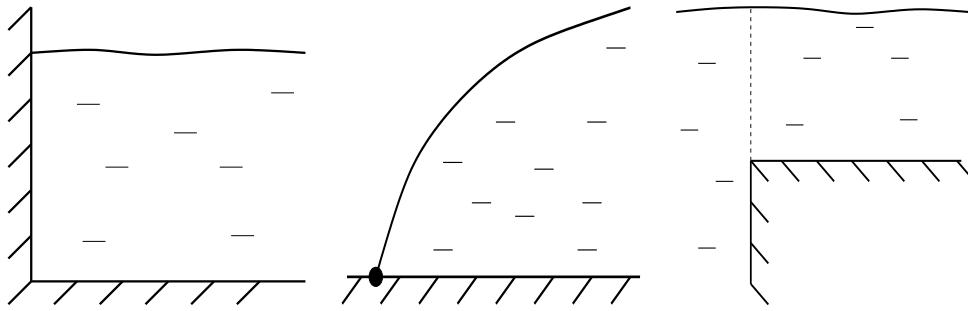


FIG. 2.10 – Différents types de conditions aux bords : (a) bord vertical $v(y_c) = 0$, (b) incropping $H(y_c) = 0$, (c) plateau $H(y_c) \rightarrow \infty$

Nous allons analyser dans la suite l'effet des différentes conditions aux bords représentées sur la figure 2.10. La structure méridionale des ondes de Poincaré est modifiée par les conditions aux bords, comme on peut le voir par exemple sur la figure 2.11 qui montre les structures des ondes de Poincaré dans un canal (murs verticaux en $y = \pm L$) ou sur la figure 2.12 en présence d'incropping, par comparaison avec la figure 2.8. Néanmoins les propriétés générales des ondes de Poincaré et de Rossby évoquées précédemment ne seront pas fondamentalement modifiées.

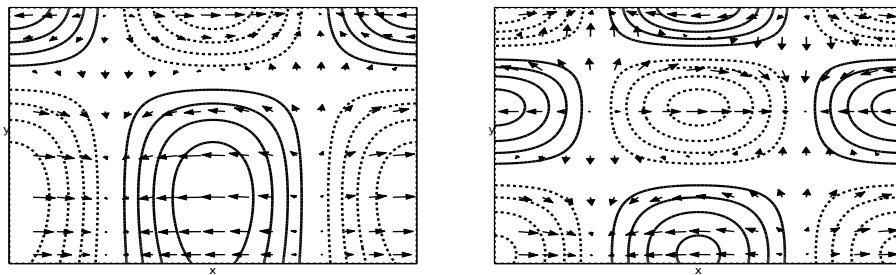


FIG. 2.11 – Champs de pression et vitesse pour les 2 premiers modes de Poincaré pour un écoulement zonal sur le plan f dans un canal (bords verticaux en $y = \pm L$).

Par contre les contraintes imposées par les différentes conditions aux bords du type de celles de la figure 2.10 vont avoir pour effet de piéger certaines ondes et vont donner naissance à de nouveaux types d'ondes avec des caractéristiques bien spécifiques. Une des situations les plus importantes dans l'océan concerne les bords verticaux qui vont donner naissance aux ondes de Kelvin (Kelvin (1871)).

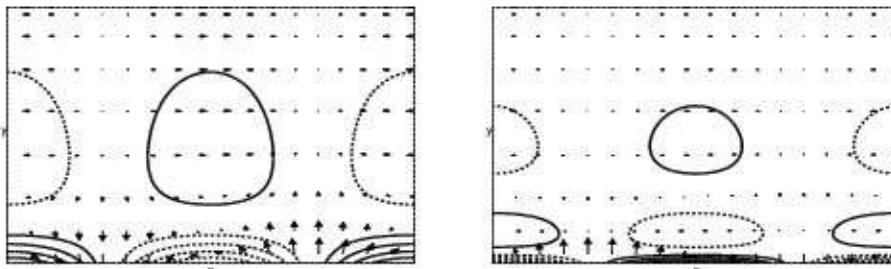


FIG. 2.12 – Champs de pression et vitesse pour les 2 premiers modes de Poincaré pour un écoulement zonal sur le plan f avec incropping en $y = -L$

2.4.5 Mode de Kelvin

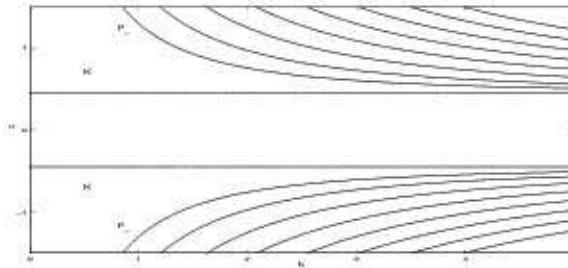


FIG. 2.13 – Courbes de dispersion $c = c(k)$ des ondes de Kelvin et de Poincaré pour un écoulement zonal au repos sur le plan f dans un canal (bords verticaux en $y = \pm L$)

Dans le modèle de l'eau peu profonde sur le plan f , une onde de Kelvin se propage le long d'un bord vertical (figure 2.10 (a)), qui a pour condition au bord $v(\pm L) = 0$ (vitesse normale au bord nulle). La particularité de l'onde de Kelvin est de respecter cette condition dans tout le domaine dans un fluide de hauteur constante.

En reprenant les équation du modèle à une couche de l'eau peu profonde pour un canal en rotation au repos, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_t u &= -g \partial_x h, \\ f u &= -g \partial_y h, \\ \partial_t h + H \partial_x u &= 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Et donc en substituant :

$$(u, h) = (\tilde{u}, \tilde{h}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (2.49)$$

avec ω la fréquence, que l'on peut remplacer dans le système (2.48) pour obtenir le système suivant :

$$\begin{aligned} -i\omega u &= -g i k h, \\ f u &= -g \partial_y h, \\ -i\omega h + H i k u &= 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

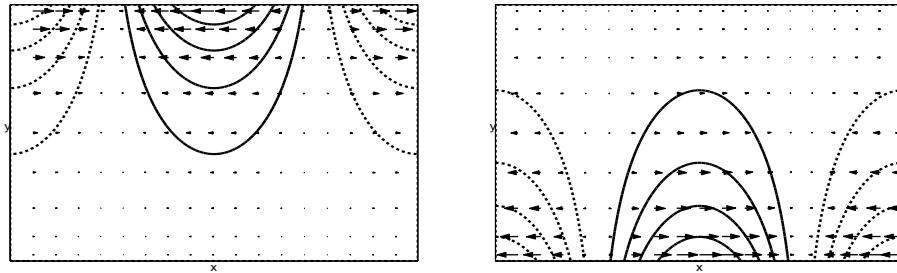


FIG. 2.14 – Champs de vitesse et pression pour les ondes de Kelvin se propageant sur chacun des bords d'un canal en rotation.

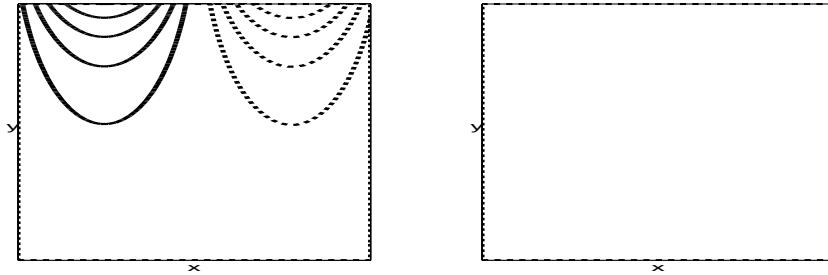


FIG. 2.15 – Divergence (gauche) et vorticité potentielle (droite) pour l'onde de Kelvin représentée figure 2.14 (a).

qui donne la relation de dispersion : $\omega = \pm\sqrt{gH}k$, identique à celle d'une onde de gravité en l'absence de rotation vue précédemment, et les champs de hauteur et de vitesse :

$$\begin{aligned} h(x, y, t) &= h_0 e^{(\frac{fky}{\omega} - ik(x-ct))}, \\ u(x, y, t) &= u_0 e^{(\frac{fky}{\omega} - ik(x-ct))}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

La force de Coriolis est donc exactement balancée par le gradient de pression de l'onde de Kelvin normal à la paroi. Physiquement les ondes de Kelvin sont donc partiellement en équilibre géostrophique perpendiculairement à la paroi, mais ont la forme d'ondes d'inertie-gravité dans la direction parallèle.

On vérifie d'ailleurs aisément que l'onde de Kelvin a une signature nulle sur l'anomalie de vorticité potentielle, :

$$q = \frac{f + v_x - u_y}{H + h} \approx \frac{f}{H} \left(1 - \frac{u_y}{f} - \frac{h}{H} \right) \quad (2.52)$$

avec

$$u_y = \frac{fk}{\omega} u = \frac{-f}{H} h \quad (2.53)$$

et donc

$$q = \frac{f}{H}. \quad (2.54)$$

L'anomalie de vorticité potentielle est nulle, l'onde de Kelvin est par contre fortement divergente et sera donc, comme les ondes de Poincaré, dans la catégorie des mouvements agéostrophiques.

On vérifie aussi que pour que cette solution ne diverge pas, la relation $fk/\omega y < 0$ doit être vérifiée. Ainsi dans l'hémisphère nord où $f > 0$, on aura toujours $ky < 0$, et l'onde de Kelvin ne pourra se propager que dans un seul sens, en gardant le bord à sa droite si l'on regarde dans la direction de propagation de l'onde. On notera aussi que l'extension spatiale L de l'onde dans la direction normale au bord est égale à $\omega/kf = \sqrt{gH}/f = R_d$, le rayon de déformation de Rossby. On pourra donc considérer qu'une côte est "verticale" dès lors que sa dimension horizontale dans la direction normale à la côte est petite devant le rayon de déformation. Ainsi dans le cas d'un océan profond ($H \approx 5\text{ km}$) aux moyennes latitudes, une région côtière avec une extension horizontale d'une centaine de kilomètres pourra être considérée comme verticale par comparaison avec le rayon de déformation barotrope : $R_d \approx 3000\text{ km}$.

L'exemple du spectre d'ondes dans un canal (bords verticaux en $y = -L$ et $y = +L$) en rotation est représentée sur la figure 2.13. En plus des ondes de Poincaré apparaissent désormais deux ondes de Kelvin se propageant chacune le long d'un bord. On peut voir que ces ondes sont très faiblement dispersives et vont ainsi avoir tendance à déferler rapidement (Fedorov & Melville (1995)). Les structures de ces deux ondes sont représentées sur la figure 2.14.

La figure 2.15 nous montre les anomalies de divergence et de vorticité potentielle correspondant à l'onde de gravité de la figure 2.14 (a). On retrouve donc bien des signatures non-nulles pour la divergence et nulles pour la vorticité.

2.4.6 Mode frontal

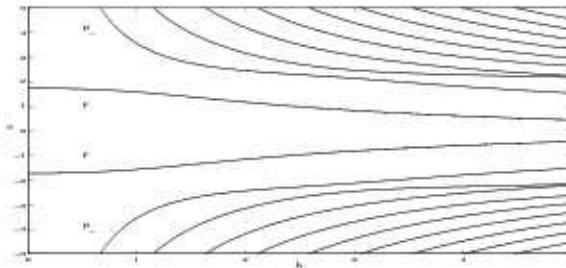


FIG. 2.16 – Courbes de dispersion $c = c(k)$ des modes frontaux et de Poincaré pour un écoulement zonal sur le plan f avec incropping en $y = \pm L$ (fronts couplés)

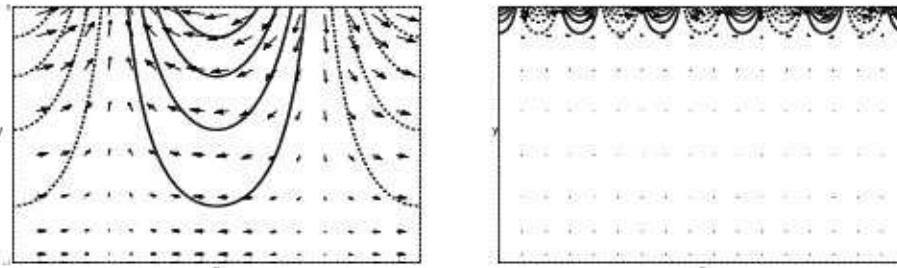


FIG. 2.17 – Champs de vitesse et pression pour le mode frontal à $k = 1$ (gauche) et $k = 5$ (droite).

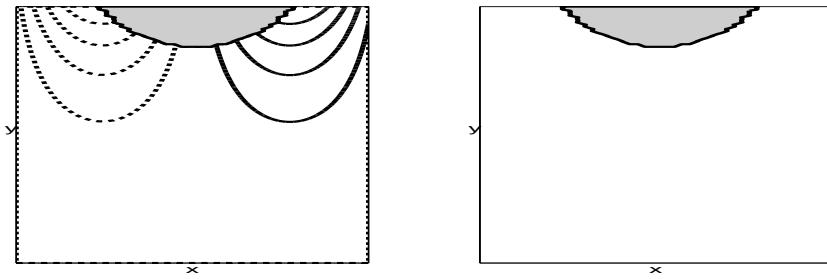


FIG. 2.18 – Divergence (gauche) et vorticité potentielle (droite) pour le mode frontal représenté figure 2.17 (a). La zone grisée correspond à une zone d'assèchement ($H + h = 0$).

La représentation simplifiée standard des fronts de densité dans la littérature utilise le modèle de l'eau peu profonde en rotation à une ou plusieurs couches avec une configuration de type "incropping/outcropping", ce qui se traduit par une intersection de l'interface entre deux couches de densité différentes avec le fond ou la surface du fluide (figure 2.10 (b)). Il existe alors un type d'onde piégée par la zone frontale que nous appellerons simplement mode frontal dans la suite. La structure de ce mode est visible sur la figure 2.17 pour des nombres d'onde petit (panneau (a)) et pour des nombres d'onde plus grands (panneau (b)). Ce mode a des caractéristiques similaires à une onde de Rossby lorsque k est faible et similaires à une onde d'inertie-gravité pour k grand. Les appellations varient quelque peu dans la littérature à son sujet : onde mixte Rossby-gravité (Iga (1993)), onde de Kelvin (Iga (1995), Hayashi & Young (1987)), onde de vorticité (Meacham & Stephens (2001)). L'appellation onde de vorticité étant justifiée par le fait que le front correspond à un gradient de vorticité potentielle infini (voir Boss *et al.* (1996)) et que le caractère de ce mode est comparable à celui d'une onde de Rossby pour des grandes longueurs d'onde.

L'exemple d'un écoulement avec deux fronts couplés ($H = 0$ en $y = -L$ et $y = +L$) en rotation est représenté sur la figure 2.16. En plus des ondes de Poincaré (P_n) apparaissent désormais deux modes frontaux (F) se propageant chacune le long d'un bord. La figure 2.18 nous montre les anomalies de divergence et de vorticité potentielle correspondant au mode frontal de la figure 2.17 (a). On retrouve donc une signature non-nulle sur la divergence et à priori nulle sur la vorticité, mais ce mode provoque un déplacement du front et donc une modification indirecte du champ de vorticité potentielle.

2.4.7 Mode inertiel

Dans le cas d'un plateau (figure 2.10 (c), qui correspond à une condition $H(y_c) \rightarrow +\infty$) ou d'un bord ouvert (qui correspond à un écoulement où la perturbation décroît à l'infini $h \rightarrow 0$ pour $y \rightarrow \pm\infty$), on peut montrer qu'un mode correspondant à l'oscillation inertuelle apparaît. Ce mode est d'ailleurs décrit par Iga (1995) comme un mode mixte Rossby-gravité dans le sens où il se comporte comme une onde de Rossby pour des grands nombres d'ondes et comme une onde d'inertie-gravité pour des petits nombres d'ondes (à l'inverse du mode frontal).

L'exemple d'un écoulement avec deux bords ouverts ($h = 0$ en $y = \pm\infty$) en rotation est représentée sur la figure 2.19. En plus des ondes de Poincaré (P_n) apparaissent désormais deux modes inertIELS (I) avec une relation de dispersion $kc = \pm f$. La structure

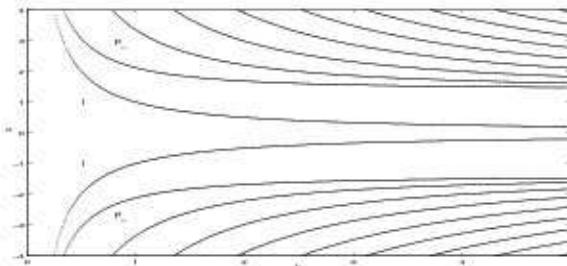


FIG. 2.19 – Courbes de dispersion (haut) et taux de croissance (bas) correspondant à un écoulement plan en rotation avec les conditions aux bords de la figure 2.10 (c) en $y = -L$ et $y = +L$

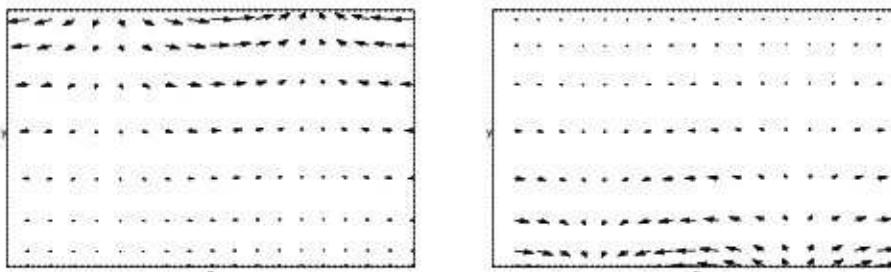


FIG. 2.20 – Champs de pression et vitesse pour les modes inertIELS correspondant aux relations de dispersion $kc = f$ (gauche) et $kc = -f$ (droite) pour $k = 1$.

de ces modes est représentée sur la figure 2.20.

Après avoir répertorié ces différents types d'ondes et discuté leurs principales caractéristiques, nous allons nous intéresser aux modes instables susceptibles d'apparaître dans différentes configurations pour le modèle de l'eau peu profonde. On dira d'un mode qu'il est instable si sa vitesse de phase $c = c_r + ic_i$ comporte une partie imaginaire non nulle $c_i \neq 0$, ce qui n'était le cas d'aucun des modes évoqués jusqu'à maintenant. Nous verrons aussi dans la suite qu'il est possible d'interpréter ces modes instables comme des interactions entre les différents modes stables.

2.5 Les critères classiques d'instabilité

Il est utile de commencer par rappeler les critères classiques d'instabilité concernant les écoulements quasi-géostrophiques.

2.5.1 Instabilité barotrope

On parlera en général d'instabilité barotrope lorsqu'une instabilité est provoquée par un cisaillement horizontal de l'écoulement.

Critère de Rayleigh-Kuo : Pour un écoulement plan-parallèle (profil de vitesse $U(y)$), le critère d'infexion bien connu de Rayleigh (1880) établit la stabilité de l'écoulement si le profil de vitesse $U(y)$ ne comporte pas de point d'infexion. Ce critère a ensuite été généralisé à des écoulements non-divergents en présence de rotation (paramètre $f = f_0 + \beta y$) par Kuo (1949), une condition nécessaire pour l'instabilité étant que le gradient de vorticité absolue $Q_y = \beta - U_{yy}$ ne change pas de signe quelque part dans l'écoulement.

Cette condition a enfin été renforcée par Fjørtoft (1950), pour donner le *critère de Fjørtoft* : Une condition suffisante pour la stabilité est qu'il existe une constante réelle α telle que $(\beta - U_{yy})(U - \alpha) \geq 0$ sur l'ensemble de l'écoulement. On peut d'ailleurs vérifier que le choix optimal pour la valeur de α correspond à la valeur de $U(y^*)$, y^* étant la coordonnée pour laquelle $(\beta - U_{yy}) = 0$.

2.5.2 Instabilité barocline

L'instabilité barocline est probablement l'instabilité la mieux connue et la plus étudiée depuis les premiers travaux de Charney (1947) et Eady (1949) en raison de son importance dans l'atmosphère et l'océan.

Dans le cas barocline, la stratification va jouer un rôle majeur. On peut exprimer un critère similaire au critère de Fjørtoft, sur la vorticité potentielle Q pour un écoulement stratifié dans le cas quasi-géostrophique :

Critère de Charney-Stern : Une condition nécessaire pour l'instabilité est que l'un de ces critères soit rempli :

- (i) Q_y change de signe à l'intérieur de l'écoulement,
 - (ii) Q_y est de signe opposé à U_z au bord supérieur du domaine ($z = H$),
 - (i) Q_y est de même signe que U_z au bord inférieur du domaine ($z = 0$),
 - (ii) U_z est de même signe aux bords inférieur et supérieur du domaine,
- où z est la coordonnée verticale.

Ce qui nous donne un équivalent du critère précédent, avec la présence de gradients de vorticité potentielle de signes opposés dans l'écoulement, mais cette fois-ci sur la verticale. Ce qui se traduit, dans le modèle de l'eau peu profonde à deux couches, par la présence de gradients de vorticité potentielle de signes opposés dans chacune des deux couches.

On pourra résumer tout ceci de manière plus générale en disant qu'un écoulement quasi-géostrophique sera instable si le gradient de vorticité potentielle change de signe dans l'écoulement. S'il change de signe selon la verticale, on parlera d'instabilité barocline, et s'il change de signe selon l'horizontale, on parlera d'instabilité barotrope. On pourra aussi parler d'instabilité mixte lorsque le changement de signe se produira à la fois selon l'horizontale et selon la verticale.

Dans un système sans forçage extérieur ni dissipation d'énergie, l'énergie totale et la quantité de mouvement du système doivent être conservées. Le critère de Rayleigh-Kuo peut ainsi être physiquement interprété comme la conséquence de la conservation de la quantité de mouvement totale de l'écoulement (Taylor (1915), et par exemple Vallis (1992) pour la dérivation du critère). Si un écoulement cisailé non-divergent ne comporte pas de point d'inflexion, l'apparition d'une perturbation va nécessairement modifier la quantité de mouvement totale de l'écoulement. Ceci se traduit par l'impossibilité pour toute perturbation de croître et donc par la stabilité de cet écoulement. De la même façon le critère de Charney-Stern traduit la conservation de la quantité de mouvement totale de l'écoulement pour un écoulement cisailé verticalement.

2.6 Instabilités et résonances d'ondes

Les critères de stabilité classiques décrits ci-dessus ne sont néanmoins plus suffisants pour des écoulements divergents, puisque dans ce cas des instabilités peuvent apparaître même en l'absence de gradients de vorticité potentielle.

2.6.1 Ondes à énergie négative, pseudo-moments et pseudo-énergie

Dans l'approximation quasi-géostrophique, la croissance d'un mode instable était nécessairement interprétée comme un transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers le mode instable, la baisse de l'énergie de l'écoulement moyen compensant le gain d'énergie par le mode instable. Mais les travaux de Cairns (1979), Ripa (1983), qui a généralisé le théorème Rayleigh-Fjørtoft au modèle de l'eau peu profonde ou encore Marinone & Ripa (1984) et Hayashi & Young (1987) ont montré que cette interprétation n'était plus forcément valide en dehors de l'approximation quasi-géostrophique (lorsque l'écoulement peut devenir divergent). Les transferts de quantité de mouvement ou d'énergie entre un mode instable et l'écoulement moyen ne sont donc plus forcément essentiels à la croissance de l'instabilité. Ceci est particulièrement visible pour un profil de vorticité nulle ou constante puisque dans ce cas il ne peut pas y avoir de transferts d'énergie ou de quantité de mouvement entre une onde et l'écoulement moyen, étant donné que ces flux doivent être proportionnels à des flux de vorticité potentielle (Hayashi & Young (1987)). La condition d'instabilité associée à la présence de gradients de vorticité n'est ainsi jamais remplie, mais ces écoulements peuvent pourtant devenir instables.

Un nouveau critère a ainsi été énoncé par Ripa (1983) pour un modèle à une couche :

Un écoulement sera linéairement stable si

$$\exists \alpha / \forall y \begin{cases} (U - \alpha)Q_y < 0 \\ (U - \alpha)^2 < g'H \end{cases} \quad (2.55)$$

où $U(y)$, $H(y)$ et $Q(y) = \frac{f-dU/dy}{H}$ sont la vitesse, la hauteur et la vorticité potentielle de l'écoulement de base.

Et de façon similaire pour un modèle à 2 couches (Ripa (1991)) : *Un écoulement sera linéairement stable si*

$$\exists \alpha / \forall y \begin{cases} (U_j - \alpha) \frac{dQ_j}{dy} \leq 0 \quad (j = 1, 2) \\ \frac{(U_1 - \alpha)^2}{H_1} + \frac{(U_2 - \alpha)^2}{H_2} \leq g' \end{cases} \quad (2.56)$$

où $U_j(y)$, $H_j(y)$ et $Q_j(y) = \frac{f-dU_j/dy}{H_j}$ sont les vitesses, les hauteurs et les vorticités potentielles de chacune des couches de l'écoulement de base.

La première des deux conditions est effectivement équivalente aux critères évoqués dans la section précédente, mais elle ne suffit plus désormais à assurer la stabilité de l'écoulement dans le cas agéostrophique. Une deuxième condition, liée à la divergence horizontale de l'écoulement, permet de déterminer la présence de modes instables à énergie 'négative' ou 'nulle', comme nous allons l'expliquer maintenant.

En s'inspirant de certaines idées utilisées notamment en physique des plasmas, on peut introduire le concept d'ondes à énergie négative. De manière générale on dira que les ondes peuvent avoir une énergie négative ou positive, selon que l'excitation de ces ondes fasse augmenter ou diminuer l'énergie totale du système dans un référentiel donné, comme décrit dans Cairns (1979). De manière plus formelle on peut définir une énergie de perturbation pour une onde, ou pseudo-énergie (E), qui correspond alors à l'énergie du système total lorsque cette onde est excitée à laquelle on soustrait l'énergie du système au repos (Hayashi & Young (1987)). On peut définir de la même façon des quantités de mouvement pour la perturbation ou pseudo-moments (M) pour les modes, sachant que les raisonnements sont équivalents avec la pseudo-énergie ou le pseudo-moment. Il est d'ailleurs possible de montrer que le pseudo-moment et la pseudo-énergie pour un mode stable sont proportionnels : $E = cM$ où c est la vitesse de phase du mode considéré, vitesse de phase qui dépend donc du référentiel considéré (Hayashi & Young (1987)).

Une onde qui possède une pseudo-énergie négative dans un référentiel donné, va donc croître et conduire au développement d'une instabilité lorsqu'un autre processus sera en capacité de lui extraire de l'énergie. Dans le cas d'un système dissipatif, ce rôle pourra être joué par un processus dissipatif, à condition que celui-ci ne soit pas important au point de modifier significativement les caractéristiques de l'onde. Ce processus va donc permettre à l'instabilité de se développer. Ce type d'instabilité correspond à la classe A selon Benjamin (1963).

Mais dans le cas d'un système sans forçage et non-dissipatif, un mode instable doit pouvoir se développer en ayant une énergie et une quantité de mouvement nuls. Un tel mécanisme est possible en cas de coexistence d'une onde de pseudo-énergie positive et d'une onde de pseudo-énergie négative, par les mêmes processus de transfert d'énergie qui vont faire croître chacune des deux ondes tout en gardant l'énergie globale inchangée. L'onde possédant une énergie négative va transférer de l'énergie à celle qui possède une énergie positive, ce qui aura pour effet de faire croître les deux modes sans aucun apport d'énergie de l'extérieur. C'est ce qu'on appelle une instabilité "réactive" en physique des plasmas (classe C selon Benjamin (1963)). Nous allons nous intéresser plus particulièrement à ce type d'instabilités étant donné l'absence de forçage et de dissipation dans les écoulements géophysiques étudiés dans la suite.¹

2.6.2 Interaction résonante de deux ondes

Une instabilité va se développer lorsque deux modes, par ailleurs stables lorsqu'ils sont considérés indépendamment l'un de l'autre, vont avoir des vitesses de phases identiques (ou du moins suffisamment proches) pour un nombre d'onde k donné et des pseudo-énergies (ou pseudo-moments) de signes opposés. Un point important étant que cela ne suppose aucune restriction sur les types d'ondes envisagés. Ces critères permettent ainsi de prédire l'apparition d'instabilité aisément à partir des propriétés de dispersion des différents modes présents dans le système. On raisonnera préférentiellement

¹On peut juste mentionner que certains cas de triades résonantes, c'est-à-dire une instabilité non-linéaire qui peut naître de l'interaction de 3 ondes (dont l'une doit avoir une énergie de signe opposé aux deux autres) sont expliqués de manière similaire, par exemple dans Craik & Adam (1979). Ce type d'instabilité correspond à une instabilité "explosive" en physique des plasmas.

ment dans la suite sur les pseudo-moments plutôt que sur les pseudo-énergies, puisque ces dernières dépendent du référentiel considéré, ce qui n'est pas le cas des pseudo-moments.

Si les courbes de dispersion de deux ondes considérées indépendamment se croisent (il existe un nombre d'onde k pour lequel ces deux ondes ont la même vitesse de phase c), figure 2.21 (a), le diagramme de phase du système se comportera comme sur la figure 2.21 (b) si ces deux ondes ont des pseudo-moments de même signe, ou comme sur la figure 2.21 (c) si les signes de leurs pseudo-moments sont opposés. Dans ce cas les deux courbes de dispersion se rejoignent et ne forment plus qu'une seule courbe, correspondant à la vitesse de phase du mode instable, avec une partie imaginaire non nulle.

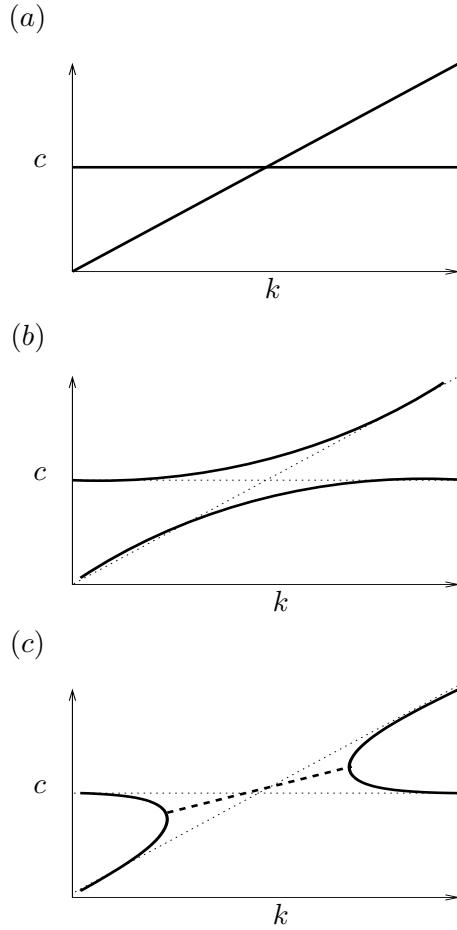


FIG. 2.21 – Courbes de dispersion $c(k)$ pour l'intersection de deux modes stables, (a) considérés indépendamment l'un de l'autre, (b) pour le système complet quand les deux modes ont des pseudo-moments de même signe, (c) pour le système complet lorsque les deux modes ont des pseudo-moments de signes opposés. Les tirets correspondent au mode instable.

On peut d'ailleurs montrer que le signe du pseudo-moment d'un mode est déterminé par le signe de sa vitesse de phase intrinsèque dans le cas d'un écoulement de base uniforme, ou plus généralement par le signe de la dérivée de sa courbe de dispersion dans le diagramme de phase dans le cas d'un écoulement basique quelconque. Dans le cadre du modèle de l'eau peu profonde, le pseudo-moment s'écrit :

$$M = \frac{1}{4} \int (uh^* + hu^* - \frac{H^2|q|^2}{Q'}) dy, \quad (2.57)$$

où

$$q = \frac{\xi - Qh}{H}, \quad \xi = ikv - \frac{du}{dy}, \quad Q = \frac{f - dU/dy}{H} \quad (2.58)$$

sont la vorticité potentielle de la perturbation, la vorticité de la perturbation et la vorticité potentielle de l'écoulement de base, respectivement.

Le signe du pseudo-moment peut donc être déterminé ainsi :

- Dans le cas d'une vitesse de l'écoulement de base U constante, on peut écrire la relation

$$(c - U) \frac{1}{4} \int (uh^* + hu^* - \frac{H^2|q|^2}{Q'}) dy = \int (H|u|^2 + H|v|^2 + g|h|^2) dy \quad (2.59)$$

qui montre que le signe de M doit être le même que celui de $(c - U) = \tilde{c}$ et donc que le pseudo-moment a le même signe que la vitesse de phase intrinsèque.

- Dans le cas plus général d'une vitesse de l'écoulement de base quelconque, Iga (1999) a montré la relation suivante :

$$\frac{dc}{dk} \int (uh^* + hu^* - \frac{H^2|q|^2}{Q'}) dy = -\frac{2}{k} \int (H|v|^2) dy, \quad (2.60)$$

c'est-à-dire que le signe de $\frac{dc}{dk}$ est opposé à celui du pseudo-moment dans le cas général et pour un mode non-singulier.

Il devient donc aisément en pratique de prédire le comportement d'un système à plusieurs couches, en obtenant les valeurs propres des systèmes réduits à une couche correspondants puis en superposant ces courbes. Les modes instables ne pourront alors apparaître que lorsqu'il y aura des intersections entre les courbes de chacune des couches, si leurs pseudo-moments ont des signes opposés.

2.6.3 Instabilité et niveaux critiques

Des singularités dues aux *niveaux critiques* peuvent apparaître dans un écoulement lorsque la partie réelle de la vitesse de phase de la perturbation $c = \omega/k$ est égale à la vitesse en $y = y_c$ de l'état de base : $c = U(y_c)$ (Voir notamment Stewartson (1981) et Martin & Lott (1986) pour une description approfondie de la théorie des niveaux critiques). Ainsi dans un problème de modes normaux, en plus de l'ensemble discret de modes "réguliers" (non-singuliers) précédemment évoqués, il existe pour tout k un spectre continu de modes singuliers, dont la vitesse de phase est comprise dans l'intervalle des vitesses de l'état de base $c = U(y)$ (Vanneste (1998)).

D'autre part, selon Lin (1945), un mode non-singulier dont la vitesse de phase est égale à la vitesse de l'écoulement de base quelque part dans l'écoulement ($y = y_c$) ne peut exister que si $Q'(y_c) = 0$, c'est-à-dire s'il n'y a pas de gradient de vorticité potentielle à cet endroit. La présence de niveaux critiques dans un écoulement ne va donc pas influer sur les modes et leurs éventuelles résonances dans le cas de profil de vorticité potentielle constante.

Il peut pourtant y avoir certaines instabilités directement liées à la présence de niveaux critiques. Lorsqu'un mode non-singulier est déstabilisé par la présence de ces niveaux critiques, il est alors impossible de déterminer un deuxième mode neutre avec

lequel il puisse résonner comme dans le cas standard. Il est néanmoins possible d'interpréter ce mode instable de la même façon que précédemment en considérant qu'un mode neutre non-singulier va résonner, non plus avec un autre mode non-singulier, mais avec une superposition de modes singuliers (Iga (1999)). On peut alors déterminer le signe du pseudo-moment des modes singuliers : ce signe est opposé à celui du gradient de vorticité potentielle du niveau critique Q'_c . On peut donc définir le même critère que dans le cas de la résonance de deux modes non-singuliers. Ainsi un mode non-singulier, en présence de niveaux critiques, deviendra instable si son pseudo-moment M est de même signe que le gradient de vorticité potentielle : $Q'_c/M > 0$.

Par contre, dans le cas où ils sont de signe opposé ($Q'_c/M < 0$), les modes non-singuliers ne peuvent plus exister, les niveaux critiques deviennent alors en quelques sortes absorbants (Perkins & Renardy (1997), Balmforth (1999)).

2.7 Instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde à gravité réduite

Après avoir répertorié les différents types d'ondes présents dans les modèles de l'eau peu profonde (section 2.4) et les conditions de résonance entre deux ondes (section 2.6), nous allons appliquer ces critères à l'étude des instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde à gravité réduite. Dans ce modèle, où seule une couche est active, on peut parler d'interactions barotropes dans le sens où les deux modes en résonance appartiennent à la même couche de fluide. Nous allons donc nous intéresser aux différentes configurations représentées sur la figure 2.22, qui correspondent à des écoulements avec des cisaillements horizontaux, avec ou sans rotation, et des conditions aux bords variées.

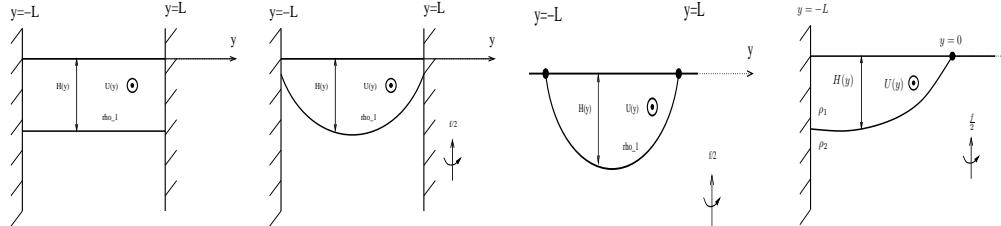


FIG. 2.22 – Configurations dans le modèle gravité réduite pour (a) un écoulement Couette plan, (b) un écoulement cisaiillé en rotation (c) des fronts couplés et (d) un front côtier.

2.7.1 Instabilité d'un écoulement cisaiillé

(a) *Écoulement Couette-plan.* Dans un canal sans rotation (figure 2.22 (a)), étudié notamment par Satomura (1981), Takehiro & Hayashi (1992) et Knessl & Keller (1995), les seuls modes présents sont des modes de gravité (Poincaré, voir figure 2.6) qui vont se propager le long des 2 bords. Comme on a pu le voir précédemment, un écoulement avec une vitesse de base constante est stable étant donné le fossé existant entre les vitesses de phases des modes se propageant le long de chacun des bords. Mais si l'écoulement est cisaiillé ($U(y) = y$), la fréquence intrinsèque va être modifiée et l'on pourra avoir résonance entre ces modes si le cisaillement, et donc le nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{gH}$, est assez grand, ce qui est vérifié par le critère de Ripa qui donne directement la condition de stabilité $Fr \leq 2$, identique à la condition déterminée par Satomura (1981). Les figures

2.23 et 2.24 montrent les diagrammes de dispersion et les modes instables correspondants pour $Fr = 5$. Le mode le plus instable (figure 2.24 (a)) correspond à une résonance entre les deux premiers modes de gravité, comme on peut le vérifier sur le diagramme de phase (pic à $k \approx 4$), les deux modes ayant une vitesse de phase intrinsèque identique en raison du cisaillement horizontal de l'écoulement de base, et des pseudo-moments de signe opposé (voir dc/dk pour les deux courbes). Ainsi les deux courbes se rejoignent pour ne former qu'une seule courbe avec cette fois-ci une partie imaginaire non-nulle. On notera la présence d'une infinité de modes instables lorsque k augmente et que les modes de gravité plus élevés vont résonner, avec des taux de croissance de plus en plus faible. Le deuxième mode le plus instable ($k \approx 6.7$), résonance entre un mode de gravité d'ordre 1 (nombre d'onde méridional) et un mode d'ordre 2, est représenté sur la figure 2.24 (b).

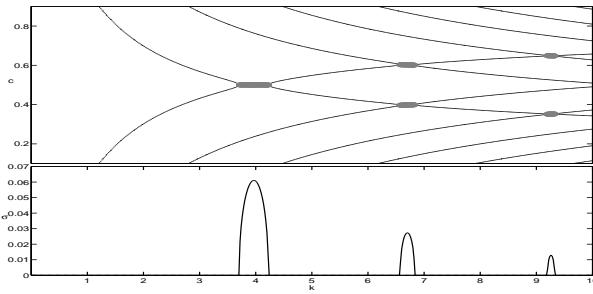


FIG. 2.23 – Vitesses de phase $Re(c)$ (haut) et taux de croissance $\omega_i = kIm(c)$ (bas) correspondant à un écoulement de Couette plan sans rotation pour un nombre de Froude $Fr = U_0/\sqrt{gH} = 5$. Les zones grisées marquent les modes instables correspondant aux résonances horizontales entre les ondes de gravité.

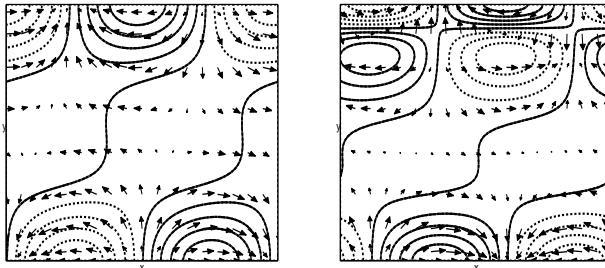


FIG. 2.24 – Champs de pression et vitesses correspondant aux modes instables de la figure 2.23 pour $k = 4$ (gauche) et $k = 6.7$ (droite).

L'analyse linéaire, ainsi que l'évolution faiblement non-linéaire de ce type d'instabilité, sous l'appellation d'instabilité "supersonique", ont aussi été effectuées par Balmforth (1999). Les effets de la viscosité y sont envisagés ainsi que les problèmes liés à la présence de gradients de vorticité potentielle et de niveaux critiques en utilisant un profil de vitesse de la forme $U(y) = \tanh(\alpha y)/\tanh(\alpha)$. Pour $\alpha = 0$ on retrouve les résultats précédents correspondant à un écoulement de Couette plan. Mais lorsque $\alpha \neq 0$, des niveaux critiques apparaissent pour des vitesses de phase dans la bande $[-1, 1]$ ainsi que de gradients de vorticité potentielle. Balmforth (1999) a montré que pour un tel écoulement deux types d'instabilité étaient possibles. Une première instabilité dite "in-

flectionnelle" et une deuxième instabilité dite "supersonique". La première étant liée à l'instabilité Rayleigh classique et la deuxième à une résonance entre modes de gravité, comme évoquée dans le cas de l'écoulement Couette plan. Il est d'ailleurs intéressant de noter la correspondance avec les deux conditions définies par le critère de Ripa (1983) qui vont chacune correspondre à une ces deux zones d'instabilité. Une discussion détaillées de la relation entre le critère de Ripa et les instabilités de niveaux critiques peut d'ailleurs être trouvée dans Takehiro & Hayashi (1992).

Le diagramme de dispersion correspondant à $\alpha = 0.5$ et $Fr = 0.5$ est représentée sur la figure 2.25, les modes singuliers ne sont pas représentés. En dehors de la zone $[-1, 1]$, on retrouve les courbes de dispersion des modes de Poincaré qui ne résonnent pas entre eux puisque $Fr < 2$ (voir écoulement Couette plan) et dont les vitesses de phase n'admettent pas de niveaux critiques pour $Fr < 1$. Un mode instable est néanmoins présent pour $k < k_c$ et $c = 0$, correspondant au point d'inflexion du profil de vitesse de l'écoulement, sans être connecté à un seul mode stable pour $k > k_c$. C'est l'instabilité inflectionnelle liée au classique critère d'inflexion de Rayleigh. Les champs de vitesse et pression de ce mode instable sont représentés sur la figure 2.26.

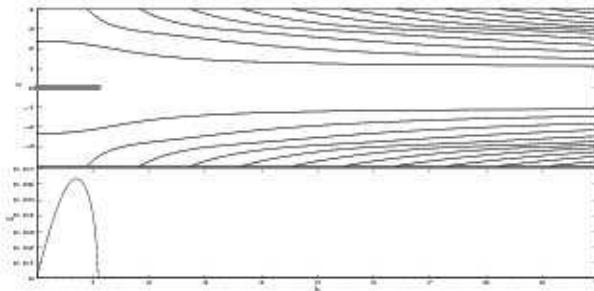


FIG. 2.25 – Courbes de dispersion (haut) et taux de croissance (bas) correspondant à un écoulement cisaillé sans rotation $U(y) = \tanh(2y)/\tanh(2)$ avec $Fr = 0.5$. Les zones grisées marquent les modes instables.

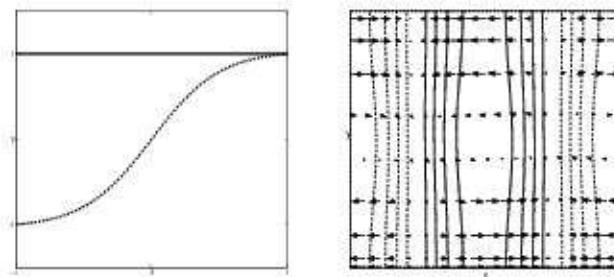


FIG. 2.26 – Hauteur (trait plein) et vitesse (pointillés) de l'état de base (gauche). Champs de pression et vitesses correspondant au mode le plus instable de la figure 2.25 (droite) .

Lorsque le nombre de Froude est assez grand, les modes de gravité vont non seulement pouvoir résonner entre eux, comme dans le cas Couette-plan, mais aussi devenir instables en raison de la présence de niveaux critiques (voir Balmforth (1999)).

(b) *Écoulement cisaillé avec rotation* : Dans un canal avec rotation (figure 2.22 (b)) et pour un profil avec vorticité potentielle nulle, les modes présents sont non seulement les modes de Poincaré (voir figure 2.8) mais aussi les modes de Kelvin (voir figure 2.14) qui vont apparaître à cause de la rotation et des bords sur lesquels ils vont se propager. Cet écoulement deviendra une fois encore instable pour un cisaillement assez important, comme le montre le diagramme de phase de la figure 2.27. En plus des résonances entre deux modes de Poincaré, comme précédemment, il peut dorénavant y avoir des résonances entre les deux modes de Kelvin (figure 2.28, (a)) ou entre un mode de Kelvin et un mode de Poincaré (figure 2.28, (b)).

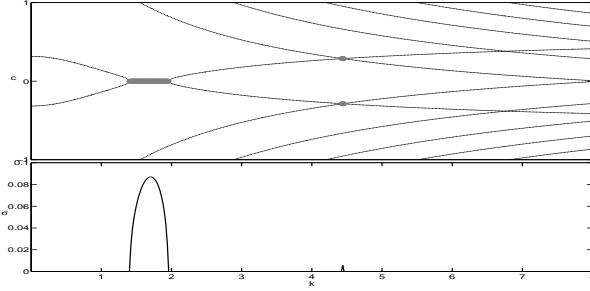


FIG. 2.27 – Courbes de dispersion (haut) et taux de croissance (bas) correspondant à un écoulement cisaillé avec rotation, $U(y) = y$ et $H(y) = H_0 - 1/2y^2$. Les zones grisées marquent les modes instables correspondant aux résonances horizontales entre les ondes de gravité (Kelvin ou Poincaré).

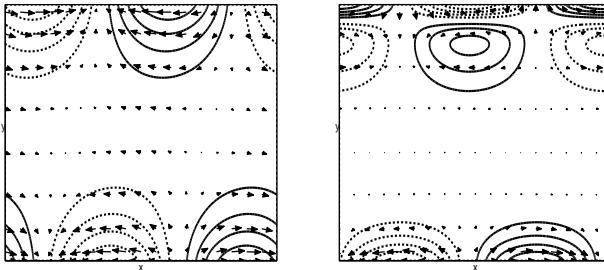


FIG. 2.28 – Champs de pression et vitesses correspondant aux modes instables de la figure 2.23 pour $k = 1.7$, résonance entre deux ondes de Kelvin (gauche) et $k = 4.4$, résonance entre une onde de Kelvin et une onde de Poincaré (droite).

Lorsque le profil de vorticité potentielle n'est plus constant, des instabilités liées à la présence de niveaux critiques peuvent apparaître, comme dans le cas sans rotation. Un exemple d'écoulement cisaillé en rotation avec ces propriétés, correspondant à un jet barotropiquement instable (jet de Bickley), a notamment été étudié par Poulin & Flierl (2003). Le profil utilisé $U(y) = U_0 \operatorname{sech}(y/L)^2$ avec $H(y) = \Delta H \tanh(y/L)$ et le mode instable ainsi trouvé sont représentés sur la figure 2.29. L'évolution non-linéaire de ce mode est d'ailleurs explicitée dans les cas quasi-géostrophique et non-quasi-géostrophique, produisant une succession de cyclones et d'anticyclones symétriques dans le premier cas et asymétriques dans l'autre.

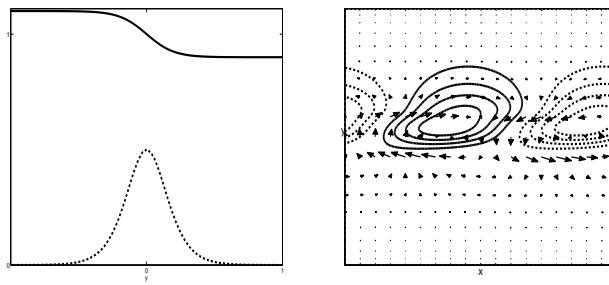


FIG. 2.29 – Hauteur (trait plein) et vitesse (pointillés) de l'état de base (gauche). Champs de pression et vitesses correspondant au mode le plus instable de la figure (droite).

2.7.2 Instabilités frontales

Une situation importante dans les problèmes d'instabilités linéaires concerne les régions frontales. La représentation simplifiée standard des fronts de densité dans la littérature utilise le modèle de l'eau peu profonde en rotation à une ou plusieurs couches avec une configuration de type "incropping/outcropping", c'est-à-dire une interface entre deux couches de densité différentes qui intersecte le fond ou la surface du fluide.

Certaines de ces configurations sont barotropiquement instables, dans le sens où une interaction horizontale entre deux modes génère cette instabilité. Dans le cadre du modèle à une couche à gravité réduite plusieurs types d'instabilités ont ainsi été étudiés :

(a) Dans le cas d'un *front isolé* dans un modèle à gravité réduite, avec un profil de vitesse $U(y) = \alpha e^{\alpha y}$ et un profil de hauteur équilibré $H(y) = 1 - e^{\alpha y}$, comme représenté sur la figure 2.30, Killworth (1983a) a montré que l'écoulement pouvait devenir instable aux grandes longueurs d'ondes sans qu'il y ait d'extremum de vorticité potentielle (c'est-à-dire lorsque l'écoulement est stable selon le critère quasi-géostrophique classique de Rayleigh-Kuo). Cette étude a été complétée ensuite par Kubokawa (1985) qui a montré que la condition pour l'apparition de modes instables était que la vorticité potentielle soit décroissante à l'approche du front, c'est-à-dire dans la zone de vitesses $[0, \alpha]$, présentant des niveaux critiques pour le mode frontal. La condition montrée par Killworth (1983a) et Kubokawa (1985), que l'on retrouve d'ailleurs directement en appliquant le critère de Ripa (1983), était que l'écoulement devienne instable lorsque $\alpha > 1$. Le gradient de vorticité potentielle s'écrit effectivement $Q_y = (1 - \alpha^2)U/H^2$, le cas $\alpha = 1$ correspond donc à un profil de vorticité potentielle nulle, le cas $\alpha < 1$ à un gradient de vorticité potentielle positive et le cas $\alpha > 1$ à un gradient de vorticité potentielle négative. Le pseudo-moment correspondant au mode frontal étant négatif ($dc/dk > 0$), d'après le critère précédent ce mode pourra devenir instable en présence de niveaux critiques si le gradient de vorticité potentielle est de même signe, c'est-à-dire négatif, et donc lorsque $\alpha > 1$. On peut le vérifier sur les deux diagrammes de phases de la figure 2.31 correspondant à un cas stable à gauche ($\alpha = 0.8$) et à un cas instable à droite ($\alpha = 1.2$).

(b) Les configurations représentant des *fronts couplés* (voir figure 2.22 (c)), correspondent à une situation dans laquelle fluide se retrouve confiné à l'intérieur de la surface isopycnale. Griffiths *et al.* (1982) ont montré que dans le cas d'un profil de vorticité potentielle nul ou constant, c'est-à-dire où la condition d'instabilité de Rayleigh ne s'applique pas, ce type d'écoulement était néanmoins très fortement instable. La principale instabilité, ainsi nommée instabilité GKS dans la littérature, correspond

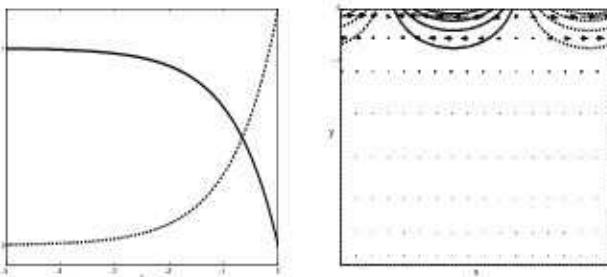


FIG. 2.30 – Hauteur (trait plein) et vitesse (pointillés) de l'état de base (gauche). Champs de pression et vitesses correspondant au mode le plus instable de la figure 2.31 (droite).

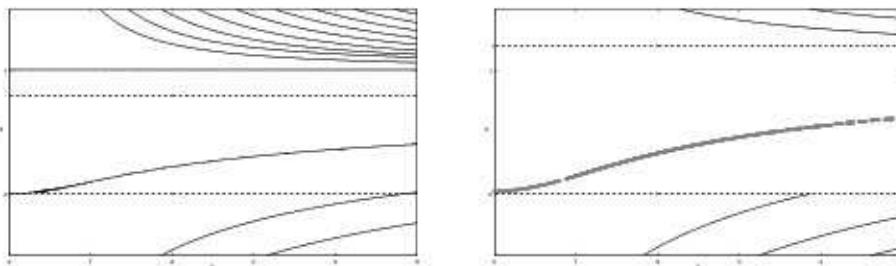


FIG. 2.31 – Courbes de dispersion (haut) et taux de croissance (bas) correspondant à un front isolé stable pour $\alpha = 0.8$ (gauche) et à un front isolé instable $\alpha = 1.2$ (droite). Les zones grisées marquent les modes instables. Les traits pointillés délimitent le spectre continu de modes singuliers.

à la résonance entre deux modes frontaux (figure 2.17) qui se propagent sur chacun des fronts. Dans la même configuration et toujours dans le modèle à gravité réduite, Hayashi & Young (1987) ont montré que d'autres instabilités apparaissaient à grand nombre d'onde, mais avec des taux de croissance bien plus faibles. Ces nouvelles instabilités étant dues à des résonances entre un mode frontal et les modes de Poincaré se propageant sur l'autre front, ou plus directement entre modes de Poincaré. Dans le cas de profils de vorticité potentiellement différents, Scherer & Zeitlin (2008) ont montré que les résultats étaient similaires, alors que les effets d'un fond parabolique ont été étudiés par Stern & Simeonov (2008) avec des résultats semblables. L'étude de l'évolution non-linéaire de ces instabilités dans le modèle de l'eau peu profonde à gravité réduite a été notamment effectuée par Scherer & Zeitlin (2008) et Pratt *et al.* (2008) qui ont montré que la croissance des modes frontaux amenait les fronts de densité à se reconnecter pour former une série de tourbillons quasiment indépendants similaires à des rodons. L'instabilité a ainsi complètement réorganisé l'écoulement et amené une solution équilibrée mais non-stationnaire.

(c) Dans le cas d'un *courant côtier* une zone frontale est couplée à un bord vertical (voir figure 2.22 (d)). L'instabilité décrite pour le cas des fronts couplés (interaction frontal-frontal ou GKS) n'est donc plus possible en raison de la présence de la côte qui interdit la présence d'un deuxième mode frontal. Killworth & Stern (1982) et Paldor (1983) ont néanmoins montré que ce type de courant, toujours dans un modèle avec gra-

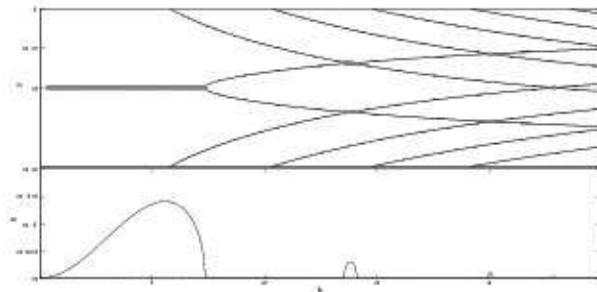


FIG. 2.32 – Courbes de dispersion (haut) et taux de croissance (bas) correspondant à des fronts couplés, $U(y) = y$ et $H(y) = H_0 - 1/2y^2$. Les zones grisées marquent les modes instables correspondant aux résonances horizontales entre modes frontaux (instabilité GKS) pour le pic principal ($k \approx 1$) ou entre un mode frontal et un mode de Poincaré pour les pics secondaires ($k \approx 2.75$, $k \approx 4$, etc...).

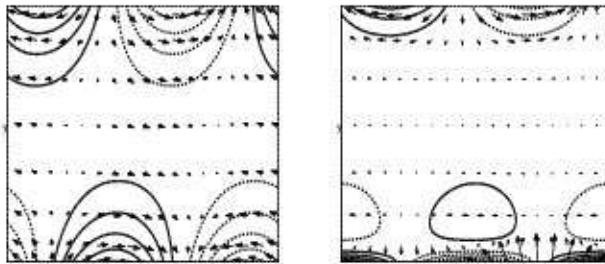


FIG. 2.33 – Champs de pression et vitesses correspondant aux modes instables de la figure 2.32 pour $k = 1$, résonance entre modes frontaux (instabilité GKS) (gauche) et $k = 2.75$, résonance entre un mode frontal et une onde de Poincaré (droite).

vité réduite, pouvait être instable lorsque l'écoulement moyen n'était pas unidirectionnel, même en absence de gradient de vorticité potentielle. Kubokawa & Hanawa (1984) et Kubokawa (1986) ont ainsi montré que l'instabilité correspondant à cette condition était due à la résonance barotropique du mode frontal avec le mode de Kelvin qui se propage le long du bord vertical. Cette instabilité et son développement non-linéaire sont étudiés en détail dans le chapitre 6.

2.8 Instabilités dans un modèle de l'eau peu profonde à deux couches

Dans le modèle à gravité réduite, les effets de la stratification sont simplement considérés par l'introduction d'une gravité modifiée (la gravité réduite), ce qui correspond en pratique, comme nous l'avons vu dans la partie 2.1, à considérer une couche active reposant sur une couche passive. De ce fait aucune interaction barocline entre ces deux couches n'est possible, ce qui ne sera bien sûr plus le cas dans le modèle à deux couches.

On rappelle que le critère de stabilité de Ripa (1991) pour le modèle à deux couches (et plus généralement pour N couches) était donné par l'équation (2.56). On peut d'ailleurs remarquer que la deuxième condition de ce critère est de plus en plus dif-

ficle à remplir lorsque la structure verticale devient plus riche, c'est-à-dire lorsque N augmente. Effectivement, si dans chacune des deux couches les instabilités "barotropes" précédentes sont toujours possibles, le couplage entre les deux couches autorise de nouvelles résonances entre les modes présents dans chacune des deux couches avec des mécanismes d'interaction tout à fait similaires. Nous allons donc maintenant nous attacher avant tout aux cas purement baroclines (c'est-à-dire des cas où chacune des couches est stable individuellement) afin d'illustrer plus particulièrement les nouvelles possibilités offertes par le modèle à deux couches. Mais des situations où l'écoulement est à la fois barocliniquement et barotropiquement instable seront par exemple étudiées dans le chapitre 6.

L'équivalent du modèle barotrope de l'écoulement cisaillé vu précédemment est un modèle à deux couches avec un cisaillement de vitesse vertical. Dans ce contexte le modèle le plus simple pour illustrer les interactions baroclines entre les différents modes est le modèle de Phillips (Phillips (1954)) dans sa version agéostrophique sur le plan f , comme représenté sur la figure 2.34.

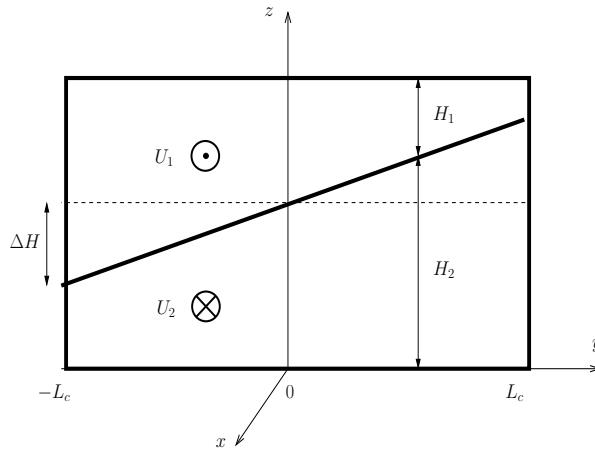


FIG. 2.34 – Modèle de l'eau peu profonde avec deux couches de densités ρ_1 et ρ_2 , dans un canal avec un fond plat, un toit rigide et un cisaillement de vitesse constant $U_1 = U_0$ et $U_2 = -U_0$ comme étudié par Sakai (1989) et Gula *et al.* (2009a).

Ce modèle a longtemps été utilisé pour étudier l'instabilité barocline, et donc essentiellement dans un contexte quasi-géostrophique. L'analyse de stabilité linéaire du modèle dans sa version agéostrophique a ensuite été réalisée par Sakai (1989). Une analyse détaillée de ce problème dans sa version cylindrique est présentée dans le chapitre 4, et les résultats de Sakai (1989) sont largement commentés dans le chapitre 5, la description qui en sera faite ici sera donc assez succincte.

On va commencer par répertorier les différents modes présents dans chacune des deux couches. Comme nous l'avons vu dans la partie 2.4, il y aura des ondes de Poincaré, des modes de Kelvin (en raison de la rotation et des bords verticaux) et des ondes de Rossby (en raison de l'inclinaison de l'interface entre les deux couches et donc de la présence de gradients de vorticité potentielle) dans chacune des couches. Les différents types d'instabilité dépendent alors de la combinaison envisagée entre un mode de la couche du bas et un mode de la couche du haut. On peut dès lors regrouper ces interactions selon trois catégories.

2.8.1 Instabilité barocline

La combinaison de deux ondes de Rossby dans chacune des deux couches correspond à l'instabilité barocline classique. La présence des ondes de Rossby étant liée à celle de gradients de vorticité potentielle, on retrouve ainsi le critère de Charney-Stern présenté précédemment. Le mécanisme est illustré notamment par Hoskins *et al.* (1985) dans le cadre quasi-géostrophique et par Sakai (1989) dans le modèle de l'eau peu profonde à 2 couches. Une étude plus détaillée sera aussi présentée dans le chapitre 4 dans le cadre du modèle de l'eau peu profonde à deux couches dans un anneau.

2.8.2 Instabilité Kelvin-Helmholtz

La combinaison de deux modes de gravité (Kelvin ou Poincaré) est un exemple d'instabilité de Kelvin-Helmholtz. Comme dans le cas d'un écoulement cisaillé horizontalement, les ondes de Kelvin et/ou de Poincaré de l'une des couches vont pouvoir résonner avec les ondes de Kelvin et/ou de Poincaré d'un couche adjacente sous réserve que le cisaillement soit assez important pour que les fréquences intrinsèques des modes puissent s'accorder (Sakai (1989)). Plus généralement l'instabilité de Kelvin-Helmholtz, qui est connue depuis les travaux de Helmholtz (1868) et Kelvin (1871), joue un rôle très important en dynamique des fluides géophysiques. C'est une instabilité qui ne dépend pas de la rotation mais qui apparaît dans les écoulements à fort cisaillement et dont le seuil d'apparition est caractérisé classiquement par la valeur du nombre de Richardson $Ri < 1/4$. Dans le cas d'un fluide continument stratifié, le nombre de Richardson local s'écrit :

$$Ri(z) = -\frac{\frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2} \quad (2.61)$$

et traduit schématiquement le fait que l'énergie cinétique disponible due au cisaillement de vitesse $\frac{\partial U}{\partial z}$ doit être assez importante pour compenser les variations d'énergie potentielle nécessaires pour modifier la structure verticale du fluide déterminée par la variation de densité $\frac{\partial \rho}{\partial z}$. Dans le cas du modèle à deux couches en eau peu profonde, on pourra écrire un nombre de Richardson de manière similaire :

$$Ri = \frac{gH\Delta\rho}{\bar{\rho}\Delta U^2} = \frac{g'H}{\Delta U^2} \quad (2.62)$$

où $g' = g\Delta\rho/\bar{\rho}$ est la gravité réduite et ΔU le cisaillement de vitesse entre les deux couches. Il est d'ailleurs intéressant de noter que le critère $Ri < 1/4$ revient alors à la condition $\Delta U = 2\sqrt{g'H}$, c'est-à-dire que le cisaillement de vitesse doit être supérieur à la somme des vitesses de phases des ondes de gravité dans chacune des couches. Ce qui correspond à la condition d'égalité des vitesses de phase pour que la résonance puisse avoir lieu. Cette instabilité a été beaucoup étudiée, essentiellement dans le cadre d'écoulement sans rotation. C'est une instabilité de petite échelle avec des taux de croissance très importants qui sature rapidement et ainsi contribue au mélange dans les zones de fort cisaillement d'un écoulement. On pourra se référer notamment à Drazin & Reid (1981) pour plus de détails.

2.8.3 Instabilité Rossby-Kelvin

C'est la combinaison d'un mode vortical (Rossby) et d'un mode de gravité (Kelvin ou Poincaré). Les travaux de Sakai (1989) ont conduit à montrer l'existence de cette

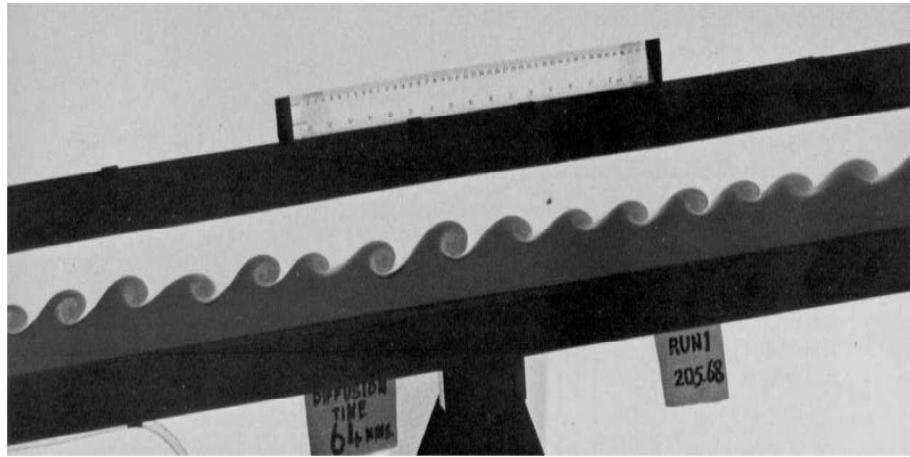


FIG. 2.35 – Instabilité de Kelvin-Helmholtz (Thorpe (2005))

instabilité, directement issue de la résonance entre une onde de Kelvin ou de Poincaré et d'une onde de Rossby, dans le cadre d'un modèle agéostrophique à deux couches. La différence entre les fréquences intrinsèques de ces deux ondes étant modifiée par le cisaillement vertical de vitesse entre les deux couches. Cette instabilité, assez mal connue, a donc l'originalité de coupler des mouvements géostrophiques et des mouvements agéostrophiques avec des taux de croissance supérieurs à ceux de l'instabilité barocline classique.

Mais à notre connaissance aucune étude n'a encore montré quelle était l'évolution non-linéaire de ce mode, et si celui-ci était susceptible de modifier l'écoulement moyen ou de générer des mouvements de petite échelle.

Dans le chapitre 4, nous présentons l'analyse de stabilité complète en géométrie cylindrique pour cette instabilité. Le développement non-linéaire de ce mode est étudié dans le chapitre 5 dans le cadre d'une simulation idéalisée avec le modèle atmosphérique méso-échelle WRF (modèle présenté plus en détail dans la partie 3.3).

2.8.4 Instabilités frontales dans le modèle à deux couches

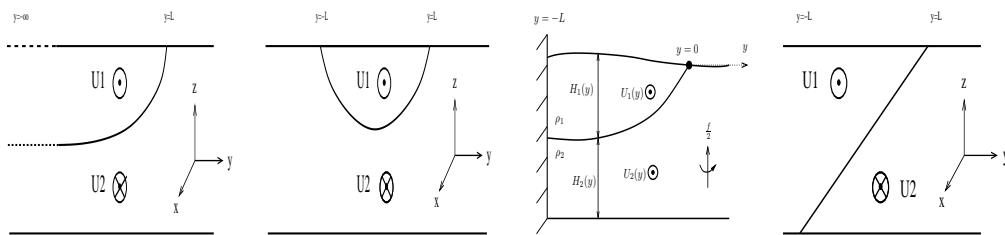


FIG. 2.36 – Configurations dans le modèle à deux couches pour (a) un front isolé, (b) des fronts couplés, (c) un courant côtier et (d) modèle frontal (Orlanski)

Les configurations correspondant à un front isolé, des fronts couplés ou un courant côtier ont été étudiées dans un modèle à gravité réduite dans la section 2.7.2. Nous allons maintenant voir les instabilités susceptibles d'apparaître lorsque la couche inférieure est rendue active par l'utilisation d'un modèle à deux couches puisque les effets baroclines

vont permettre une plus grande variété d'interactions entre les différents modes présents.

Dans le cas d'un front isolé, Killworth *et al.* (1984) ont étudié les instabilités linéaires avec une couche inférieure active et a montré que cette configuration était instable due à l'interaction barocline entre le mode frontal présent dans la couche supérieure et des ondes de Rossby dans la couche inférieure. Cette instabilité est souvent décrite comme une instabilité mixte barotrope/barocline en raison de son comportement énergétique (voir chapitre 6 pour plus de détails). Cette même instabilité est bien sûr aussi présente dans le cas de fronts couplés ou d'un courant côtier dans le modèle à deux couches, étant donné que tous les ingrédients y sont aussi réunis (voir Barth (1989a) et Barth (1989b) pour une étude similaire dans le cas d'un courant de type "upwelling").

Les résultats concernant les fronts couplés sont expliquées de manière exhaustive dans Meacham & Stephens (2001), avec des résultats équivalents dans le cas d'ajout d'une topographie. Les interactions entre modes sont similaires pour un cas avec topographie à condition de remplacer les ondes de Rossby par des ondes de Rossby topographiques

Les modes de Poincaré étant présents dans tous les types de configurations, les possibilités de résonances pour ces modes entre les deux couches (instabilité KH) sont aussi présentes, de même que la résonance entre modes de Poincaré dans la couche inférieure et le mode frontal pour de très grands nombres d'ondes (étant donné que le mode frontal a une structure de type onde de gravité à très grand nombre d'onde). Paldor & Ghil (1990) ont ainsi étudié ces instabilités de petite échelle dans le cas de fronts couplés et ont montré qu'elles avaient, comme dans les cas précédents, des taux de croissances plus importants à mesure que les nombres d'ondes augmentaient et que la hauteur de la couche inférieure devenait faible. Des conclusions similaires ont été trouvées par Paldor & Ghil (1991) dans le cas d'une configuration de type courant côtier. Ces résultats étant une fois de plus largement commentés dans la partie 6.

Un type d'interaction n'ayant pas encore été évoqué concerne la configuration étudiée principalement par Orlanski (1968), qui consiste en deux zones frontales chacune dans une couche différente (voir figure 2.36), à la différence des fronts couplés où les fronts concernent une seule des deux couches. Dans cette configuration où la vorticité potentielle n'est pas constante, chacune des deux couches contient des modes de Rossby, de Poincaré et un mode frontal. Orlanski (1968) a ainsi identifié plusieurs types d'instabilités qui ont par la suite été précisés et interprétés en terme d'interaction d'ondes par Iga (1993). Outre les interactions déjà évoquées entre toutes ces ondes (RF, RR, RG, FG), l'instabilité largement dominante pour des nombres de Rossby petits correspond à la résonance entre les deux modes frontaux présent dans chacune des deux couches (et non plus dans la même couche comme pour l'instabilité GKS). Cette instabilité pouvant être décrite comme un type instabilité barocline étant donné le caractère vortical des modes frontaux. On notera d'ailleurs que dans la limite où le nombre de Richardson $Ri = fL/\Delta U \rightarrow 0$, c'est-à-dire lorsque l'interface entre les deux couches devient verticale, on retrouve une instabilité de type Rayleigh due à un cisaillement horizontal et qui correspond à l'interaction horizontale (barotrope) de deux modes de vorticité. Un modèle identique avec une couche dans laquelle la vorticité potentielle est constante (Iga (1999)), et un autre dans lequel les deux couches ont des vorticités potentielles constantes (Iga & Ikazaki (2000)) ont montré des résultats identiques à l'exception de la disparition attendue des modes de Rossby en l'absence de gradients de vorticité potentielle.

2.9 Contenu et organisation de la thèse

Les instabilités baroclines et barotropes classiques, soit les interactions de modes vorticaux obéissant aux critères de Charney-Stern et Rayleigh-Kuo, ont été étudiées de manière exhaustive dans des modèles quasi-géostrophiques du fait de leur rôle primordial dans la circulation générale de l'océan ou de l'atmosphère. Leurs mécanismes et leurs propriétés sont aujourd'hui globalement bien comprises, notamment en ce qui concerne leur développement non-linéaire. D'autre part, les instabilités de cisaillement, soit les interactions entre les modes de gravité du fait de cisaillements barotropes ou baroclines, comme l'instabilité KH, ont aussi fait l'objet d'importants travaux en dynamique des fluides, principalement d'ailleurs pour des écoulements sans rotation, celle-ci n'étant pas essentielle dans leur mécanisme.

Mais comme nous l'avons vu, il existe aussi d'autres mécanismes d'instabilité. Ceux-ci sont susceptibles de coupler des mouvements vorticaux avec des mouvements non-équilibrés, comme l'instabilité Rossby-Kelvin évoquée dans le cadre du modèle à deux couches dans un canal, ou les différentes interactions du mode frontal avec des modes vorticaux ou de gravité pour des configurations avec outcropping. Or la dynamique de ces instabilités agéostrophiques est encore très mal connue.

Tout d'abord motivés par l'interprétation de récentes expériences relatives à l'observation de couplages entre mouvements rapides et lents (Lovegrove *et al.* (2000), Williams *et al.* (2005), Flor (2008)), et en absence d'analyse de stabilité adaptée à cette configuration expérimentale, nous présentons dans le chapitre 4 une analyse de stabilité linéaire du modèle de l'eau peu profonde en géométrie cylindrique. L'analyse pour le modèle à une couche est effectuée de façon analytique dans la partie 4.2.2 pour permettre d'identifier les différents modes présents. Le modèle à deux couches est ensuite traité dans la partie 4.2.3 pour caractériser les différentes instabilités présentes et les régimes de paramètres correspondant, que nous pourrons comparer avec les résultats expérimentaux. Ces résultats apportent néanmoins de nouvelles questions relatives à la dynamique non-linéaire de ces instabilités, et plus particulièrement de l'instabilité RK.

Dans le chapitre 5 nous nous intéresserons alors principalement à l'évolution non-linéaire de l'instabilité RK. Nous allons d'abord revisiter l'analyse de stabilité effectuée par Sakai (1989) pour un écoulement barocline cisaillé dans un canal dans le modèle de l'eau peu profonde à deux couches dans la partie 5.2.2. Puis nous testerons la persistance de ces modes dans la situation plus réaliste du fluide continument stratifié à l'aide de simulations idéalisées réalisées avec le modèle WRF dans la partie 5.2.3. Et enfin nous étudierons le développement non-linéaire de l'instabilité RK, la saturation et les effets sur l'écoulement moyen dans la partie 5.2.4.

Nous considérerons enfin dans le chapitre 6 les modifications apportées dans des cas d'incropping ou d'outcropping en appliquant les méthodes et les résultats précédents à une configuration de type courant côtier. Les résonances et instabilités barotropes dans le modèle à une couche seront traitées du point de vue de l'analyse linéaire et de la simulation non-linéaire dans la partie 6.2, et les effets conjoints des instabilités barotropes et baroclines seront traités dans le modèle à deux couches toujours du point de vue de l'analyse linéaire et de la simulation non-linéaire dans la partie 6.4.

Les différentes méthodes numériques utilisées pour la résolution numérique des problèmes de stabilité linéaire et pour la simulation non-linéaire dans le modèle de l'eau peu profonde et dans un fluide continument stratifié sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Modélisation numérique

'[...] la mer est sans routes, la mer est sans explications.'

Alessandro Baricco.

Dans la majorité des travaux qui seront présentés dans ce manuscrit, nous avons choisi d'utiliser le modèle de l'eau peu profonde en rotation sur le plan f à une ou plusieurs couches que nous avons présenté dans la partie 2.1 et dont nous rappelons les équations ci-dessous pour une couche de fluide :

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y - fv = -gH_x \\ v_t + uv_x + vv_y + fu = -gH_y \\ H_t + (Hu)_x + (Hv)_y = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

On note en indices les dérivées partielles, x est la coordonnée zonale dirigée vers l'est, y est la coordonnée méridionale dirigée vers le Nord, u est la vitesse zonale, v est la vitesse méridionale, $H(x, y)$ est la profondeur du fluide, g est l'accélération de la gravité et f est le paramètre de Coriolis. Les conditions aux limites dépendront du problème traité : conditions périodiques, conditions de glissement sur une surface solide ou conditions 'éponge' simulant l'eau libre.

Pour l'étude des problèmes de stabilité linéaire nous utilisons une méthode pseudo-spectrale de collocation que nous présentons dans la partie 3.1.2.

Pour étudier l'évolution non-linéaire de ces écoulements dans le modèle de l'eau peu profonde à une ou plusieurs couches, nous utilisons une méthode numérique aux volumes finis que nous présentons dans la partie 3.2.

Et enfin pour des simulations idéalisées dans un fluide continument stratifié nous utiliserons le modèle atmosphérique méso-échelle WRF que nous présentons dans la partie 3.3.

3.1 Méthode de collocation pour les problèmes de stabilité linéaire

La plupart des instabilités sont associées à des mouvements de type propagation d'onde. La méthode la plus commode pour l'étude de telles instabilités consiste donc à introduire une perturbation faible de type mode de Fourier de la forme $\exp[ik(x - ct)]$ dans l'écoulement et à analyser les conditions pour lesquelles on obtiendra une vitesse de phase ayant une partie imaginaire non-nulle, c'est à dire un taux de croissance non-nul.

C'est la méthode des modes normaux, qui sera utilisée dans les analyses de stabilité linéaire effectuées tout au long des différentes études.

3.1.1 Équations aux valeurs propres

Les problèmes de stabilité linéaires sont des problèmes aux valeurs propres de la fréquence des perturbations qu'on peut noter comme

$$A\psi = \lambda\psi \quad (3.2)$$

où A est un opérateur dans un espace de dimension m , ψ est un vecteur dans un espace de dimension m et λ est une valeur propre. La stabilité linéaire est garantie lorsque les valeurs propres λ de la fréquence n'ont pas de partie imaginaire. La résolution des problèmes aux valeurs propres nécessite généralement d'avoir recours à une méthode numérique. Soit ϕ la solution approchée de l'équation 3.2. L'erreur $\|\psi - \phi\|$ ne pouvant être déterminée, en pratique pour minimiser l'erreur il faut chercher à minimiser le résidu

$$R(\phi) = A\phi - \lambda\phi \quad (3.3)$$

qui est l'erreur faite quand la solution approchée ne vérifie pas l'équation résolue (3.2). On peut choisir de contraindre le résidu en minimisant le carré de la norme du résidu, on peut demander que le résidu soit orthogonal à toutes les fonctions dans lesquelles on fait un développement (approximation Galerkin) ou bien on peut demander à ce que le résidu soit exactement nul sur une grille discrète de points (Durran (1998)). Cette dernière approche porte le nom de collocation.

3.1.2 Méthode pseudo-spectrale de collocation

La méthode de collocation est une méthode pseudo-spectrale : une partie des opérations s'effectue dans l'espace physique et l'autre partie s'effectue dans l'espace spectral. Elle requiert que la solution approchée vérifie exactement les équations du système qu'on cherche à résoudre en un nombre fini de points, qui sont appelés les points de collocation.

On s'intéresse aux domaines bornés non-périodiques, on pourra donc toujours se ramener à l'intervalle $[-1, 1]$. Décomposer la solution au problème cherché en fonctions trigonométriques nous expose au phénomène de Gibbs (oscillations parasites de la solution, qui se produisent lorsqu'on périodise un signal non périodique défini sur un intervalle $[a, b]$ et qui ne prend pas les mêmes valeurs en a et en b) étant donné que nous travaillons sur un domaine non périodique. Il est plus approprié de décomposer la solution en polynômes algébriques. Si l'on fait une interpolation avec des polynômes algébriques sur une grille de points espacés uniformément sur l'intervalle $[-1, 1]$, on s'expose alors au phénomène de Runge (oscillations parasites de la solution qui s'intensifient lorsqu'on augmente le degré du polynôme utilisé pour l'interpolation). Pour éviter ce phénomène, nous pouvons faire une interpolation polynomiale sur des points répartis de façon non uniforme. Plusieurs jeux de points permettront d'utiliser cet avantage, et ils ont tous en commun d'avoir leur densité par unité de longueur :

$$\text{densité} \sim \frac{N}{\pi\sqrt{1-x^2}}, \quad (3.4)$$

c'est-à-dire que l'espacement moyen entre les points est en $O(N^{-2})$ pour $y \approx \pm 1$ et $O(N^{-1})$ à l'intérieur. L'exemple le plus simple des points vérifiant la propriété (3.4) est

les points de Chebyshev :

$$y_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 0, 1, \dots, N. \quad (3.5)$$

Ces points correspondent aux projections sur l'intervalle $[-1, 1]$ de $N + 1$ points uniformément répartis sur le demi cercle de rayon unité.

L'opération de différentiation étant linéaire, on peut la représenter par une multiplication par une matrice de taille $(N + 1) \times (N + 1)$ qu'on notera D_N . On peut calculer l'opérateur de différentiation D_N sur les points de collocation de Chebyshev (3.5) en réalisant une interpolation polynomiale de degré N des valeurs de ϕ aux points de collocation et en calculant sa dérivée. Pour tout $N \geq 1$, attribuons aux $(N + 1) \times (N + 1)$ lignes et colonnes de la matrice de différentiation D_N les indices 0 à N . les éléments de cette matrice sont (cf Trefethen (2000)) :

$$(D_N)_{00} = \frac{N^2 + 1}{6}, \quad (D_N)_{NN} = -\frac{N^2 + 1}{6}, \quad (3.6)$$

$$(D_N)_{jj} = \frac{-x_j}{2(1 - x_j^2)}, \quad j = 1, \dots, N - 1, \quad (3.7)$$

$$(D_N)_{ij} = \frac{c_i}{c_j} \frac{(-1)^{i+j}}{x_i - x_j}, \quad i \neq j, j = 1, \dots, N - 1, \quad (3.8)$$

où

$$c_i = \begin{cases} 2 & i = 0, N, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A ce point, nous sommes en mesure de discréteriser une équation différentielle du premier ordre sur les points de collocation de Chebyshev. On pourra utiliser comme opérateur de différentiation seconde, le carré de la matrice D_N diminué de deux lignes et deux colonnes, permettant de discréteriser des équations différentielles du second ordre.

Une fois notre problème aux valeurs propres (3.2) discréterisé, nous pourrons profiter des algorithmes puissants de calculs de valeurs propres proposés par exemple par le logiciel Matlab avec *eig* qui utilise les routines de LAPACK (Linear Algebra PACKage, en fortran 77). Avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène, il est possible de prescrire directement les conditions aux bords lors de la discréterisation du problème pour traiter d'autres conditions aux bords, on pourra prescrire des équations supplémentaires pour qu'elles soient vérifiées.

L'avantage de la méthode pseudo-spectrale de collocation par rapport aux schémas classiques aux différences finies est que si la solution est lisse, la méthode pseudo-spectrale est plus précise. L'inconvénient de la méthode pseudo-spectrale est qu'elle nécessite plus de calculs qu'un schéma classique aux différences finies quand les deux méthodes sont utilisées avec la même résolution. Les calculs supplémentaires peuvent être compensés si la meilleure précision de la méthode pseudo-spectrale permet de faire les calculs sur une grille plus grossière.

L'avantage de la méthode pseudo-spectrale par rapport à la méthode spectrale est que la méthode pseudo-spectrale nécessite moins de calculs. La meilleure efficacité de la méthode pseudo-spectrale est obtenue en permettant des erreurs d'aliasing (lorsqu'un signal est sous échantillonné et mal interprété en terme d'un signal de plus grande longueur d'onde, l'aliasing peut provoquer des instabilités non physiques) dans le calcul de produits de fonction variables dans l'espace. En conséquence de ces erreurs d'aliasing,

le résidu n'a pas besoin d'être orthogonal aux fonctions individuelles du développement et la méthode pseudo-spectrale est sujette aux instabilités nonlinéaires.

Nous utilisons ci-dessous cette méthode, qui a notamment été appliquée par Poulin & Flierl (2003) à l'étude de stabilité linéaire du jet géostrophique de Bickley.

3.2 Méthode aux volumes finis pour les systèmes hyperboliques

La méthode est décrite en détail dans Scherer (2008). Le modèle de l'eau peu profonde s'inscrit dans le cadre des problèmes de propagation, régis par des équations quasilinearaires hyperboliques. Ces équations permettent à un champ initialement lisse de développer des chocs, il est donc nécessaire d'utiliser une méthode numérique spécifique. Nous présentons ici la méthode numérique que nous utilisons dans ce travail de thèse. Nous commençons par présenter la méthode du premier ordre en temps et en espace pour la résolution des équations à une dimension, sans rotation ni topographie. Nous introduirons ensuite brièvement les méthodes utilisées pour résoudre les équations du modèle bidimensionnel, et obtenir un schéma à l'ordre deux en temps et en espace (partie 3.2.1, 3.2.2). Dans la partie 3.2.3 nous introduirons enfin le schéma spécifiquement choisi pour le traitement de la topographie, de la rotation et des situations d'assèchement.

3.2.1 Rappel sur les systèmes hyperboliques

Une équation différentielle du premier ordre est quasilinear si elle est linéaire en la première dérivée des variables dépendantes, ses coefficients pouvant dépendre des variables dépendantes. Par définition, un système quasilinear à une dimension est de la forme :

$$q_t + A(q) q_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

où $q(t, x) \in \mathbf{R}^p$ est un vecteur à p composantes et $A(q)$ est une matrice $p \times p$ dont chaque élément est une fonction lisse de q . Ce système est complété par les conditions initiales

$$q(0, x) = q^0(x). \quad (3.10)$$

Le système (3.9) est dit hyperbolique si pour n'importe quel q , $A(q)$ est diagonalisable, que ses valeurs propres sont toutes réelles et qu'elle possède un ensemble complet de vecteurs propres. Cette propriété est invariante lors d'un changement de variables non-linéaire.

Une loi de conservation à une dimension s'écrit :

$$q_t(x, t) + f(q(x, t))_x = 0 \quad (3.11)$$

q est la quantité conservée, $f(q)$ est la fonction flux. Le système des équations de l'eau peu profonde sans rotation et sans topographie à une dimension s'écrit sous forme conservative ($p = 2$, $q = (h, hu)$) :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x(hu) = 0, \\ \partial_t(hu) + \partial_x(hu^2 + \frac{1}{2}gh^2) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

En présence d'une discontinuité en x de q , l'équation aux dérivées partielles (3.11) n'est plus valable et doit être remplacée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)). \quad (3.13)$$

où l'on a intégré (3.11) de part et d'autre de la discontinuité. Les méthodes classiques dans lesquelles les dérivées sont approchées par des différences finies ne sont pas utilisables près des discontinuités où l'équation différentielle n'est plus valable. Une *méthode aux volumes finis* est basée sur la subdivision du domaine spatial en cellules et le maintien d'une approximation de l'intégrale de q sur chacune de ces cellules. Les valeurs de l'intégrale de q sont modifiées à chaque pas de temps par les flux à travers les bords des cellules selon la relation 3.13 et le problème primaire est de déterminer des fonctions de flux numériques qui approximent les flux corrects.

3.2.2 Description de la méthode générale

Les schémas aux volumes finis sont une classe de schémas numériques développées pour traiter le problème de Cauchy d'un système d'équations aux dérivées partielles hyperboliques, comme celui de la dynamique des gaz compressibles (voir Leveque (2002) pour une introduction et un historique détaillé).

Méthode de Godunov

Considérons une grille régulière de pas Δx . On notera la i -ème cellule : $C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$. On notera Q_i^n la valeur approchée de la valeur moyenne sur la i -ème cellule au temps t_n :

$$Q_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} q(x, t_n) dx \equiv \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx \quad (3.14)$$

où $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$. La loi de conservation sous forme intégrale s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{C_i} q(x, t) dx = f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) - f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)). \quad (3.15)$$

En intégrant (3.15) de t_n à t_{n+1} , on obtient :

$$\int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx - \int_{C_i} q(x, t_n) dx = \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \quad (3.16)$$

qui se réécrit en divisant par Δx :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_{n+1}) dx = \\ & \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} q(x, t_n) dx - \frac{1}{\Delta x} \left[\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i+\frac{1}{2}}, t)) dt \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Cela nous indique comment la moyenne sur une cellule de q devrait évoluer en un pas de temps. Cependant, en général, on ne peut évaluer exactement l'intégrale temporelle du terme de droite, car $q(x_{i\pm\frac{1}{2}})$ varie avec le temps le long de chaque bord de la cellule et on ne dispose pas de la solution exacte. Mais ceci suggère d'étudier le schéma numérique suivant :

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+\frac{1}{2}}^n - F_{i-\frac{1}{2}}^n) \quad (3.17)$$

où $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ est une approximation du flux moyen le long de $x = x_{1-\frac{1}{2}}$:

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(q(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) dt. \quad (3.18)$$

Dans un problème hyperbolique l'information se propage à une vitesse finie, il est par conséquent raisonnable de supposer qu'on peut obtenir $F_{i-\frac{1}{2}}^n$ à partir des valeurs de Q_{i-1}^n et Q_i^n , les moyennes sur les cellules de chaque côté de l'interface. On pourra alors utiliser une expression de la forme

$$F_{i-\frac{1}{2}}^n = \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n) \quad (3.19)$$

où \mathcal{F} est une fonction flux numérique. La méthode (3.17) devient alors

$$Q_i^{n+1} = Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathcal{F}(Q_i^n, Q_{i+1}^n) - \mathcal{F}(Q_{i-1}^n, Q_i^n)]. \quad (3.20)$$

Si on somme $\Delta x Q_i^{n+1}$ dans (3.17), on obtient

$$\Delta x \sum_{i=I}^J Q_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i=I}^J Q_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{J+1/2}^n - F_{I-1/2}^n). \quad (3.21)$$

La somme des flux s'annule partout sauf aux extrémités, où il faudra prescrire les conditions aux bords.

Solveurs de Riemann

Maintenant le problème est de construire la fonction de flux \mathcal{F} . Selon la méthode de Godunov, nous pouvons le faire en calculant exactement l'intégrale dans (3.18) en remplaçant la fonction $q(x, t)$ par une fonction constante par morceau définie à partir de (3.14). Ainsi on réduit le problème initial continu (3.11) à une succession de problèmes locaux indépendants. Un tel problème est appelé problème de Riemann : il s'agit du problème de Cauchy de condition initiale :

$$q(x, 0) = \begin{cases} q_g & \text{si } x < 0 \\ q_d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Soit Q_i et Q_{i+1} les moyennes sur deux cellules voisines sur une grille aux volumes finis. En résolvant le problème de Riemann avec $q_g = Q_i$ et $q_d = Q_{i+1}$, on peut alors calculer le flux numérique (3.18) et mettre à jour les moyennes sur les cellules après un pas de temps. Pour les problèmes hyperboliques, la solution du problème de Riemann est typiquement une solution de similarité, une fonction de $\frac{x}{t}$ seul, et consiste en un jeu fini d'ondes se propageant depuis l'origine avec des vitesses constantes. Numériquement, la solution exacte de Riemann est souvent trop coûteuse à calculer pour les problèmes non-linéaires et des solveurs de Riemann approximatifs sont utilisés. L'intérêt de l'approche de Godunov est de garantir la conservativité du schéma (3.17).

Nous devons choisir un solveur de Riemann qui soit cohérent avec le système d'équations original.

Condition de cohérence

Le flux numérique doit approximer l'intégrale dans (3.18). Si la fonction $q(x, t) \equiv \bar{q}$ est constante en x , alors \bar{q} ne va pas changer au cours du temps et l'intégrale dans (3.18) se

réduit à $f(\bar{q})$. Par conséquent, si $Q_{i-1}^n = Q_i^n = \bar{q}$, on s'attend à ce que la fonction flux numérique \mathcal{F} se réduise à $f(\bar{q})$, donc on demande

$$\mathcal{F}(\bar{q}, \bar{q}) = f(\bar{q}) \quad (3.22)$$

pour toute valeur \bar{q} . Lorsque cette relation est vérifiée on dit que le flux numérique $\mathcal{F}(Q_g, Q_d)$ est cohérent avec (3.11). On demande généralement aussi la continuité des flux quand Q_{i-1} et Q_i varient, de sorte que $\mathcal{F}(Q_{i-1}, Q_i) \rightarrow f(\bar{q})$ quand $Q_{i-1}, Q_i \rightarrow \bar{q}$

Deux autres propriétés du solveur de Riemann seront requises :

- l'existence d'une relation d'entropie discrète, qui garantit la convergence vers les solutions faibles et qui est ici simplement la condition de décroissance de l'énergie totale,
- la positivité de h pour que les situations d'assèchement de h soient bien traitées.

Condition CFL

Une méthode numérique peut converger seulement si son domaine de dépendance numérique contient le domaine de dépendance de l'équation aux dérivées partielles, au moins dans la limite où Δt et Δx tendent vers zéro. Le nombre CFL (pour Courant-Friedrichs-Lowy) est défini comme suit et doit vérifier

$$\nu \equiv \left\| \frac{\bar{u} \Delta t}{\Delta x} \right\| \leq 1 \quad (3.23)$$

(où \bar{u} est une approximation de la vitesse de propagation, calculée en terme de Q_i et Q_{i+1}). Le nombre CFL mesure la fraction d'une cellule dans laquelle l'information se propage pendant un pas de temps. La relation (3.23) impose en pratique une limite supérieure au pas de temps Δt , que l'on fait donc varier au cours de la simulation en fonction de \bar{u} .

Extension au cas multidimensionnel

Les méthodes décrites ci-dessus peuvent aisément être adaptées au traitement du système bidimensionnel :

$$\partial_t Q + \partial_x f(Q) + \partial_y g(Q) = 0 \quad (3.24)$$

où $Q = (h, hu, hv)$ avec $f(Q) = (hu, hu^2 + \frac{1}{2}gh, huv)$ et $g(Q) = (hv, huv, hv^2 + \frac{1}{2}gh)$ à l'aide d'une méthode de séparation dimensionnelle : le problème multidimensionnel est simplement séparé en une séquence de problème unidimensionnels (cf Leveque (2002)).

Corrections d'ordre supérieur

Nous avons présenté le schéma numérique (3.17-3.19) de premier ordre en temps et en espace. On peut utiliser ce schéma comme point de départ pour construire un schéma d'ordre supérieur en temps et en espace.

Ordre supérieur en temps

Nous choisissons la méthode de Heun (cf Bouchut (2004)). Partons d'un schéma d'Euler du type (3.17) :

$$Q^{n+1} = Q^n + \Delta t \phi(Q^n) \quad (3.25)$$

où Q^n désigne le vecteur d'état au temps n et ϕ un opérateur nonlinéaire. Le schéma

d'ordre $(\Delta t)^2$ de Heun s'écrit alors :

$$\tilde{Q}^{n+1} = Q^n + \Delta t \phi(Q^n), \quad (3.26)$$

$$\tilde{Q}^{n+2} = \tilde{Q}^{n+1} + \Delta t \phi(\tilde{Q}^{n+1}), \quad (3.27)$$

$$Q^{n+1} = (Q^n + \tilde{Q}^{n+2})/2. \quad (3.28)$$

Ordre supérieur en espace

Parmi les nombreuses approches proposées pour obtenir des formulations d'ordre supérieur en espace pour les volumes finis (PPM, ENO, WENO... cf Leveque (2002)), nous choisissons de nous restreindre au cadre simple des reconstructions d'ordre 2. Le but est d'obtenir un schéma d'ordre $(\Delta x)^2$ à partir d'un schéma d'ordre Δx . Nous adoptons la méthode des limiteurs de pente. L'idée générale est de construire une approximation linéaire par morceaux de la solution (au lieu d'une approximation constante par morceaux dans le schéma à l'ordre 1). Dans chaque cellule, l'état constant Q_i est remplacé par deux sous-états $Q_{i-1/4}$ et $Q_{i+1/4}$ vérifiant :

$$Q_{i-1/4} = Q_i - \frac{\Delta x}{2} \delta Q_i \quad Q_{i+1/4} = Q_i + \frac{\Delta x}{2} \delta Q_i \quad (3.29)$$

où la pente δQ_i est calculée comme :

$$\delta Q_i = \text{minmod}\left(\frac{Q_i - Q_{i-1}}{\Delta x}, \frac{Q_{i+1} - Q_i}{\Delta x}\right), \quad (3.30)$$

avec la fonction *minmod* comme limiteur de pente :

$$\text{minmod}(x, y) = \begin{cases} \min(x, y) & \text{si } x, y \geq 0 \\ \max(x, y) & \text{si } x, y \leq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A chaque itération on utilise le schéma (3.17) avec le flux d'interface

$$F_{i+1/2} = F(Q_{i+1/4}^n, Q_{i+3/4}^n) \quad (3.31)$$

Cette méthode fournit un schéma d'ordre $(\Delta x)^2$ et garantit la conservativité.

Schéma d'advection

On pourra ajouter un module permettant de calculer l'advection d'un champ supplémentaire, lorsqu'on souhaitera diagnostiquer le transport d'un traceur. Le traceur lagrangien c vérifie :

$$\partial_t c + u \partial_x c = 0. \quad (3.32)$$

La quantité conservée est en fait $C = ch$: elle vérifie la loi de conservation

$$\partial_t C + \partial_x(Cu) = 0. \quad (3.33)$$

qu'on va ajouter au système 3.12 et qui ne modifiera pas la solution des problèmes de Riemann (cf Leveque (2002)).

3.2.3 Schéma pour l'eau peu profonde en rotation avec topographie et assèchement

Nous présentons ici le solveur de Riemann choisi et les méthodes retenues pour traiter la topographie et la rotation.

Schéma de relaxation

Pour calculer les flux numériques \mathcal{F} , nous avons besoin de résoudre les problèmes de Riemann, à l'aide d'un solveur de Riemann approché (moins coûteux numériquement qu'un solveur exact). Le solveur de Riemann est choisi pour assurer la convergence vers les solutions faibles (solution du système conservatif présentant des discontinuités) et la conservation des états équilibrés. Nous utilisons un solveur de relaxation, dont le principe est le suivant (cf Bouchut (2004)) : on remplace le système de loi de conservation nonlinéaire de dimension p par un système quasilinear hyperbolique de dimension $s > p$ avec un terme source de relaxation qui force rapidement l'une des variables vers une valeur d'équilibre. Sous certaines conditions, il est possible d'approcher la solution du problème de Riemann initial par la solution du problème de Riemann de la partie homogène du système relaxé.

Se reporter à Bouchut (2004) pour une description détaillée du schéma de relaxation de Siliciu adapté pour le traitement des situations d'assèchements que nous utilisons, nous évitant de recourir à un solveur de Riemann nonlinéaire.

Traitement des termes sources

Topographie

Le système de l'eau peu profonde en rotation avec topographie est un système quasilinear hyperbolique. Il peut s'écrire sous forme conservative. A une dimension il s'écrit :

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x + hZ_x = 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

où $Z(x)/g$ représente la topographie. Dans ce système, les états stationnaires donnés par $u = 0$, $gh + Z = \text{constante}$, jouent un rôle crucial. Un schéma qui conserve les états stationnaires à un niveau discret est dit "bien équilibré". Depuis quelques années, beaucoup de travaux ont été fait sur le problème de trouver des schémas bien équilibrés pour résoudre le système (3.34). Selon Bouchut (2004) de tels schémas peuvent s'écrire (en considérant une grille régulière de pas Δx et en notant la i -ème cellule : $C_i = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})$) :

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2+}) = 0, \quad (3.35)$$

où Q_i^n est une approximation pour $Q = (h, hu)$ (la moyenne sur C_i au temps t_n de la solution Q que l'on souhaite approcher), et les flux numériques à gauche (resp. droite) sont calculés comme

$$F_{i+1/2-} = F_g(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2}), \quad (3.36)$$

$$F_{i-1/2+} = F_d(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2}), \quad (3.37)$$

avec $\Delta Z_{i+1/2} = Z_{i+1} - Z_i$. Les flux numériques F_g et F_d doivent satisfaire deux propriétés de cohérence. La première est la cohérence avec le terme conservatif,

$$F_g(Q, Q, 0) = F_d(Q, Q, 0) = F(Q) \equiv (hu, hu^2 + gh^2/2), \quad (3.38)$$

et la seconde est la cohérence avec la source,

$$F_d(Q_g, Q_d, \Delta Z) - F_g(Q_g, Q_d, \Delta Z) = (0, -h\Delta Z) + o(\Delta Z), \quad (3.39)$$

quand $Q_g, Q_d \rightarrow Q$ et $\Delta Z \rightarrow 0$. Une propriété générale que nous requérons est la conservation de la masse,

$$F_g^h(Q_g, Q_d, \Delta Z) = F_d^h(Q_g, Q_d, \Delta Z) \equiv F^h(Q_g, Q_d, \Delta Z). \quad (3.40)$$

La propriété pour que ce schéma soit bien équilibré est que

$$F_{i+1/2-} = F(Q_i), \quad F_{i+1/2+} = F(Q_{i+1}) \quad (3.41)$$

lorsque

$$u_i = u_{i+1} = 0, \quad gh_{i+1} - gh_i + \Delta Z_{i+1/2} = 0. \quad (3.42)$$

Un schéma cohérent équilibré peu coûteux, capable de traiter les écoulement transsoniques et les situations d'assèchement $h = 0$, et qui satisfait une inégalité d'entropie discrète a été proposé récemment par Audusse *et al.* (2004) :

$$\begin{cases} F_g(Q_g, Q_d, \Delta z) = \mathcal{F}(Q_g^*, Q_d^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ gh_g^2/2 - gh_{g^*}^2/2 \end{pmatrix}, \\ F_d(Q_g, Q_d, \Delta z) = \mathcal{F}(Q_g^*, Q_d^*) + \begin{pmatrix} 0 \\ gh_d^2/2 - gh_{d^*}^2/2 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

où

$$Q_g^* = (h_{l^*}, h_{l^*}u_l), \quad Q_r^* = (h_{r^*}, h_{r^*}u_r) \quad (3.43)$$

et

$$h_{l^*} = \max(0, h_l - \max(0, \Delta Z/g)), \quad h_{r^*} = \max(0, h_r - \max(0, -\Delta Z/g)). \quad (3.44)$$

Ici, \mathcal{F} est un flux numérique cohérent satisfaisant une inégalité entropique pour le problème homogène (i.e. avec $Z = \text{const}$) qui traite les situations d'assèchement. Notre choix ici est un solveur de relaxation décrit dans Bouchut (2004), mais d'autres choix peuvent donner des résultats similaires.

Rotation

La méthode de la topographie apparente introduite dans Bouchut *et al.* (2004) est générale et peut être utilisée pour traiter des termes sources génériques. Considérons pour notre problème les système des équations de l'eau peu profonde en présence de topographie et de la force de Coriolis :

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0, \\ (hu)_t + (hu^2 + gh^2/2)_x + hZ_x - fhv = 0, \\ (hv)_t + (huv)_x + fhu = 0, \end{cases} \quad (3.45)$$

où $Z = Z(x)$ et $f = f(x)$. Maintenant les solutions stationnaires sont données par $u = 0$, $fv = (gh + Z)_x$. L'idée est d'identifier les deux premières équations dans (3.45) à (3.34) avec une nouvelle topographie $Z + B$, où $B_x = -fv$. Mais v dépend du temps alors

que B devrait être indépendant du temps, donc nous prenons $B_x^n = -fv^n$ et résolvons (3.34) sur l'intervalle de temps (t_n, t_{n+1}) avec la topographie $Z + B^n$.

Au niveau discret, nous procédons comme suit. On définit

$$\Delta B_{i+1/2}^n = -f_{i+1/2} \Delta x \frac{v_i^n + v_{i+1}^n}{2}, \quad (3.46)$$

et on met à jour $Q = (h, hu, hv)$ via

$$Q_i^{n+1} - Q_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1/2-} - F_{i-1/2+}) = 0, \quad (3.47)$$

avec

$$F_{i+1/2-} = (F_g(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n), F_{i+1/2-}^{hv}), \quad (3.48)$$

$$F_{i-1/2+} = (F_d(Q_i, Q_{i+1}, \Delta Z_{i+1/2} + \Delta B_{i+1/2}^n), F_{i-1/2+}^{hv}), \quad (3.49)$$

où les flux numériques F_g , F_d sont ceux associés au problème sans rotation vu précédemment. Le flux de quantité de mouvement transverse a une discrétisation naturelle associée à la loi de conservation équivalente $(h(v+\Omega))_t + (hu(v+\Omega))_x = 0$, avec $\Omega_x = f$, qui est fortement liée à la loi de conservation de la vorticité potentielle. Cela donne la formulation naturelle suivante :

$$(F_{i+1/2-}^{hv}, F_{i-1/2+}^{hv}) = \begin{cases} (F_{i+1/2}^h v_i, F_{i+1/2}^h (v_i - f_{i+1/2} \Delta x)) & \text{si } F_{i+1/2} \geq 0, \\ (F_{i+1/2}^h (v_{i+1} + f_{i+1/2} \Delta x), F_{i+1/2}^h v_{i+1}) & \text{si } F_{i+1/2} \leq 0, \end{cases}$$

Ce schéma est cohérent avec (3.45), et bien équilibré : il préserve les états stationnaires discrets satisfaisants $u_i = u_{i+1} = 0$ et $gh_{i+1} - gh_i + \Delta Z = f_{i+1/2} \Delta x (v_i + v_{i+1})/2$. Le schéma conserve aussi la masse, il est capable de calculer les situations d'assèchement et satisfait une inégalité d'entropie discrète.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites peuvent porter soit sur la solution elle-même, conditions de type *Dirichlet*, soit sur ses dérivées, conditions de type *Neumann*. Il est généralement nécessaire de définir des points de grille fictifs, hors du domaine physique pour être en mesure de prescrire les conditions aux limites. Nous utilisons un point de grille fictif à chaque extrémité de chaque direction. C'est-à-dire que si le domaine physique est de taille $N \times N$ cellules, le domaine numérique devra s'étendre sur $N+1 \times N+1$ cellules. Dans les travaux présentés dans les chapitres suivants, nous utilisons trois types de conditions aux limites :

- les conditions aux bords périodiques,
- les conditions aux bords solides (avec glissement le long de la paroi solide),
- les conditions de type éponge, simulant l'eau libre, qui laissent les ondes s'évacuer du domaine de calcul. On prescrit cette condition en imposant que les valeurs des champs dans les cellules fictives sont les mêmes que sur les cellules physiques adjacentes, sauf pour la vitesse normale à la frontière qui sera l'opposé de la vitesse dans la cellule physique adjacente. Notons cependant qu'avec la formulation simple choisie cette évacuation n'est jamais totale lorsque les ondes ont une incidence oblique sur la frontière, et une partie du mouvement sera réfléchie, créant des interférences avec le mouvement à l'intérieur du domaine de calcul par la suite.

3.3 De l'eau peu profonde à la stratification continue : le modèle WRF

Le modèle WRF (Weather Research and Forecast) est un modèle numérique méso-échelle (Une description complète est disponible dans Skamarock *et al.* (2005)) qui repose sur un code flexible, portable et à la pointe de la recherche. Il est développé de façon conjointe par plusieurs organismes dont le NCAR et le NCEP. Il a été conçu pour permettre non seulement des simulations météorologiques d'écoulements réels ('application opérationnelles) mais aussi des simulations idéalisées (utilisation pour la recherche). Par ailleurs, il peut décrire des écoulements atmosphériques à différentes échelles, allant de la Terre entière à la cellule convective individuelle.

Il est utilisable pour de multiples échelles de longueur et de temps et permet de décrire des écoulements réels en assimilant des données comme de simuler des écoulements idéalisés puisqu'il est conçu à la fois pour de la prévision opérationnelle et de la modélisation plus théorique pour la recherche. Il permet donc de travailler sur des configurations théoriques et simplifiées que l'on peut intégrer dans le code comme nous allons le faire ici.

Le modèle WRF a été développé pour remplacer progressivement le modèle MM5 (Dudhia (1993)), largement utilisé dans le monde, mais WRF n'est pas issu de MM5. Les schémas d'advection d'ordre élevé du modèle sont un de ses atouts et en font un outil de choix pour les études de dynamique telle que la notre. Le modèle intègre les équations primitives compressibles et non-hydrostatiques. Les équations sont utilisées sous forme flux pour les propriétés de conservation. L'écriture modulaire du code, en Fortran90, a été réalisée de manière à permettre facilement de modifier un aspect spécifique du modèle (par ex. une paramétrisation) sans toucher au reste du code. Les caractéristiques techniques principales du modèle sont donc les suivantes :

- modèle non-hydrostatique (avec une option hydrostatique)
- termes prenant en compte la force de Coriolis et les effets de courbure de la terre
- coordonnée σ suivant la topographie
- possibilité de faire varier la résolution verticale avec l'altitude
- 3 types de projection (Mercator, Lambert, polaire)
- différenciation sur une grille d'Arakawa de type C
- intégration temporelle avec un schéma de Runge-Kutta d'ordres 2 et 3
- schéma d'advection d'ordre 2 à 6 (horizontalement et verticalement)
- découpage du temps en petit pas de temps pour les ondes sonores
 - * petit pas horizontalement explicites et verticalement implicites
 - * option d'atténuation de la divergence

A ces caractéristiques concernant la dynamique, il convient d'ajouter pour la description d'écoulements atmosphériques un choix important de paramétrisation pour les options physiques de la surface, la couche limite planétaire, le rayonnement, ou encore la microphysique. Celles-ci ne seront néanmoins pas utilisées pour les simulations idéalisées décrites dans la suite.

Chapitre 4

Instabilités dans un anneau en rotation : Influence de la géométrie et comparaison avec les expériences

'Les verres d'eau ont les mêmes passions que les océans.'

Victor Hugo.

4.1 Introduction

4.1.1 Résultats expérimentaux

Les expériences dans les anneaux tournants sont un des éléments traditionnel de l'étude de la dynamique des fluides géophysiques. L'instabilité barocline, en particulier, a fait l'objet d'une attention particulière par ce moyen, en commençant par les expériences de Hide (1958), Fultz *et al.* (1959) ou Hide & Fowlis (1965). La configuration la plus simple permettant d'étudier l'instabilité barocline, ou plus généralement les interactions des modes vorticaux, correspond à deux couches de fluide immiscibles dans un cylindre ou un anneau en rotation, comme c'est par exemple le cas pour Hart (1972). En dépit des particularités de ce type d'expériences comme la tension de surface, la friction et les couches d'Ekman, sur lesquelles nous reviendrons dans la suite, les résultats de ces expériences confirment en général de manière très satisfaisante les prédictions des études théoriques dans le cadre modèle quasi-géostrophique à 2 couches.

Plus récemment, ce type d'expérience a subi un regain d'intérêt dans le contexte de l'émission spontanée d'ondes d'inertie-gravité par les écoulements équilibrés, suite aux expériences de Lovegrove *et al.* (2000), Williams *et al.* (2005) et Flor (2008).

Des observations correspondant à des oscillations rapides, caractéristiques d'émission d'ondes d'inertie-gravité ont d'abord été observées dans les expériences de Read (1992), qui décrivait l'évolution d'un écoulement contrôlé thermiquement. Mais les méthodes de mesures alors invasives (sondes de température) ne donnaient qu'une série temporelle en un point, insuffisante pour conclure sur le sujet. L'utilisation de nouvelles techniques non-invasives de visualisation optique, comme décrites par Hart & Kittelman (1986), a ensuite permis de mesurer avec moins d'ambiguïté et plus de précisions qu'auparavant les mouvements de petite échelle. Les expériences de Lovegrove *et al.* (2000), pour un

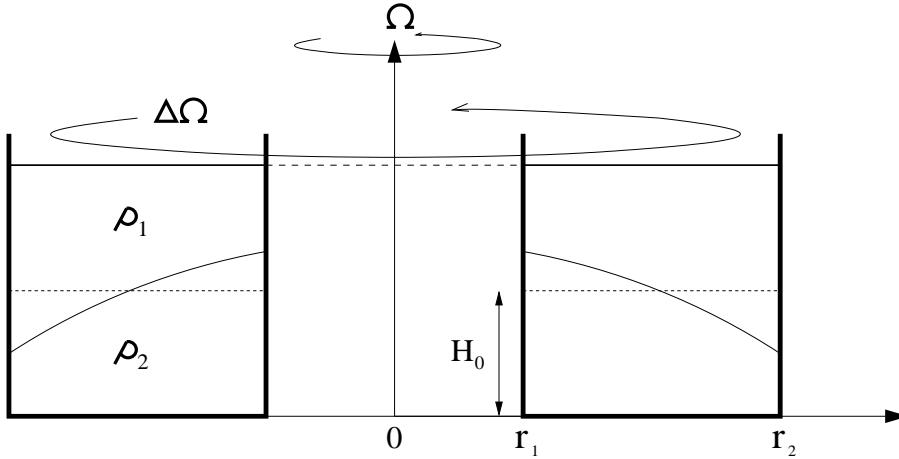


FIG. 4.1 – Schéma d'un anneau en rotation à deux couches avec un toit en super-rotation.

fluide cisaillé à deux couches dans un anneau en rotation, ont ainsi pu remarquer la présence de mouvements rapides de petite échelle lors de l'évolution d'un écoulement équilibré de grande échelle.

Le même dispositif expérimental a été utilisé par Williams *et al.* (2005), qui ont aussi retrouvé des mouvements rapides divergents de petite échelle dans deux situations :

- seuls dans le régime de l'instabilité KH
- couplés à des mouvements de grande échelle dans le régime barocliniquement instable et interprétés comme une émission spontanée d'ondes d'inertie-gravité par un écoulement équilibré.

On rappelle le schéma de la configuration correspondant au dispositif expérimental de Lovegrove *et al.* (2000) et Williams *et al.* (2005) sur la figure 4.1, qui correspond à deux couches de fluide immiscibles dans un anneau en rotation Ω avec un fond plat et un toit rigide tournant à $\Omega + \Delta\Omega$ (super-rotation de $\Delta\Omega$). C'est dans cette même configuration que nous allons procéder à une analyse de stabilité dans la suite de ce chapitre.

Les expériences de Williams *et al.* (2005) sont faites en gardant le cisaillement $\Delta\Omega$ constant et en variant la rotation globale Ω du dispositif. La figure 4.2 montre la hauteur de l'interface entre les deux couches de fluide des différents types d'écoulement obtenus pour des valeurs de $\Delta\Omega$ croissantes entre (a) et (h) :

- Régime axisymétrique (AX) : écoulement stable, figure 4.2 (a) et (c).
- Régime Kelvin-Helmholtz (KH) : Présence de mouvements de petite échelle seulement, figure 4.2 (b).
- Régime mixte régulier (MRW) : Ondes régulières de grand échelle avec présence localisée d'ondes de petite échelle, figure 4.2 (d)-(g).
- Régime mixte irrégulier (MIW) : Ondes irrégulières de grand échelle avec présence localisée d'ondes de petite échelle, figure 4.2 (h).

Les paramètres utilisés pour classifier ces écoulements sont le nombre de Froude F et un paramètre de dissipation d , définis comme suit :

$$F = \frac{4\Omega^2 L^2}{g'H} , \quad d = \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{H\Delta\Omega} \quad (4.1)$$

où $g' = g\Delta\rho/\bar{\rho}$ est la gravité réduite, ν la viscosité cinématique moyenne et H et L les dimensions de l'anneau. Le sens physique de ces paramètres sera expliqué plus en détail

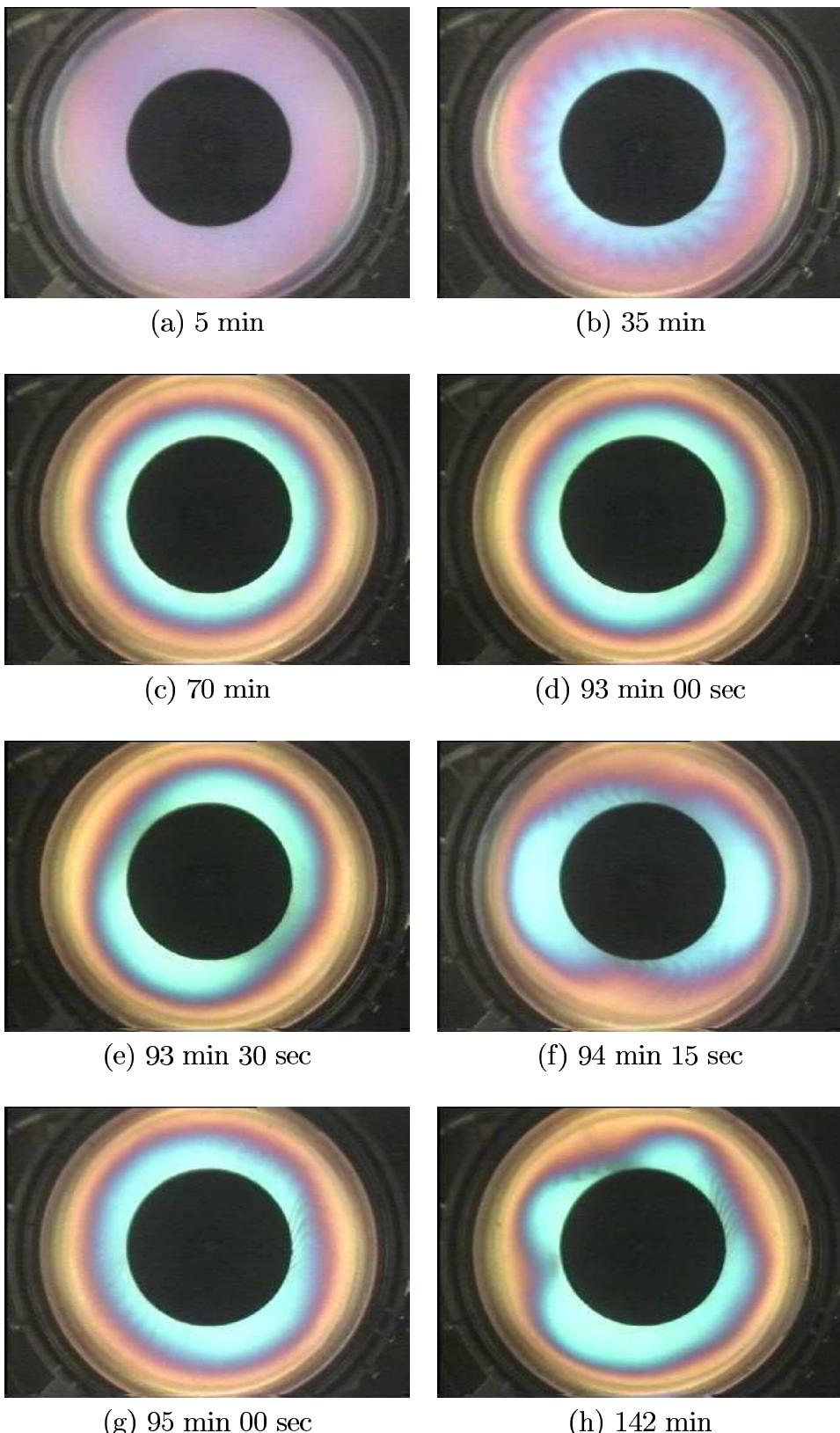


FIG. 4.2 – Hauteur de l'interface enregistrée par caméra vidéo dans les expériences de Williams *et al.* (2005). La rotation différentielle est constante et la rotation globale Ω augmente entre (a) et (h). (a,c) régime AX, (b) régime KH, (d,e,f,g) régime MRW et (h) régime MIW. (Image de Williams (2003))

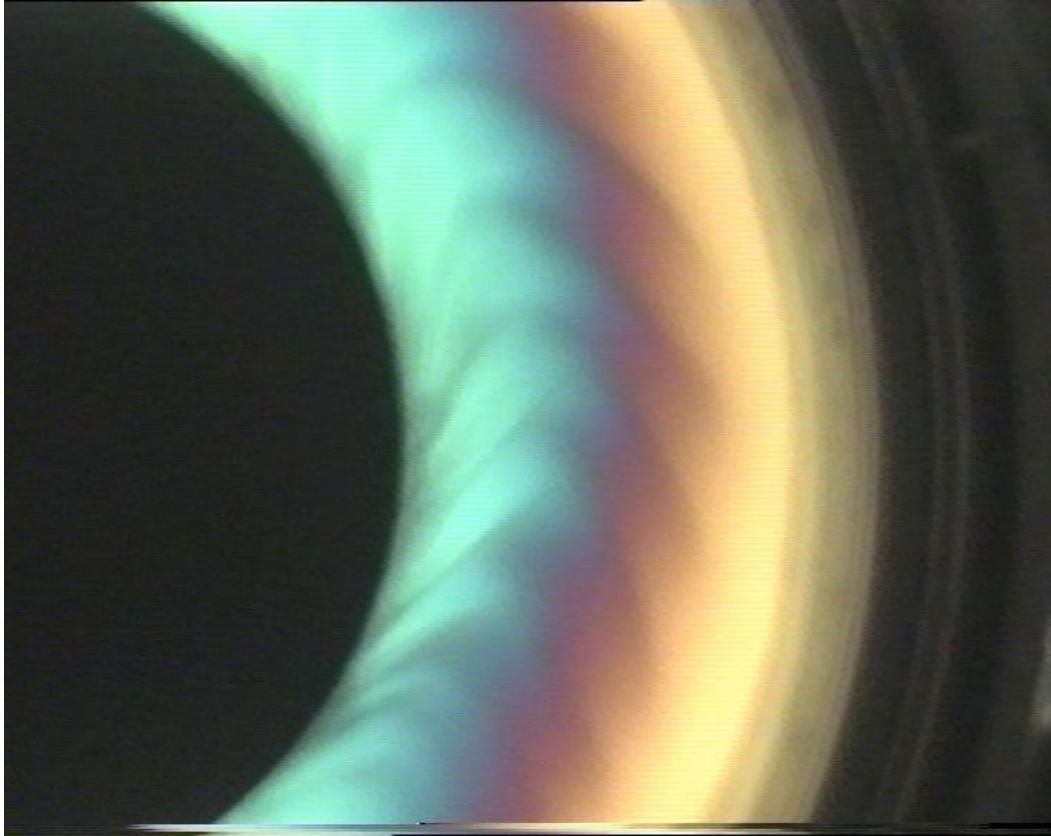


FIG. 4.3 – Ondes de petite échelle, zoom de la figure 4.2 (g). (Image de Williams (2003))

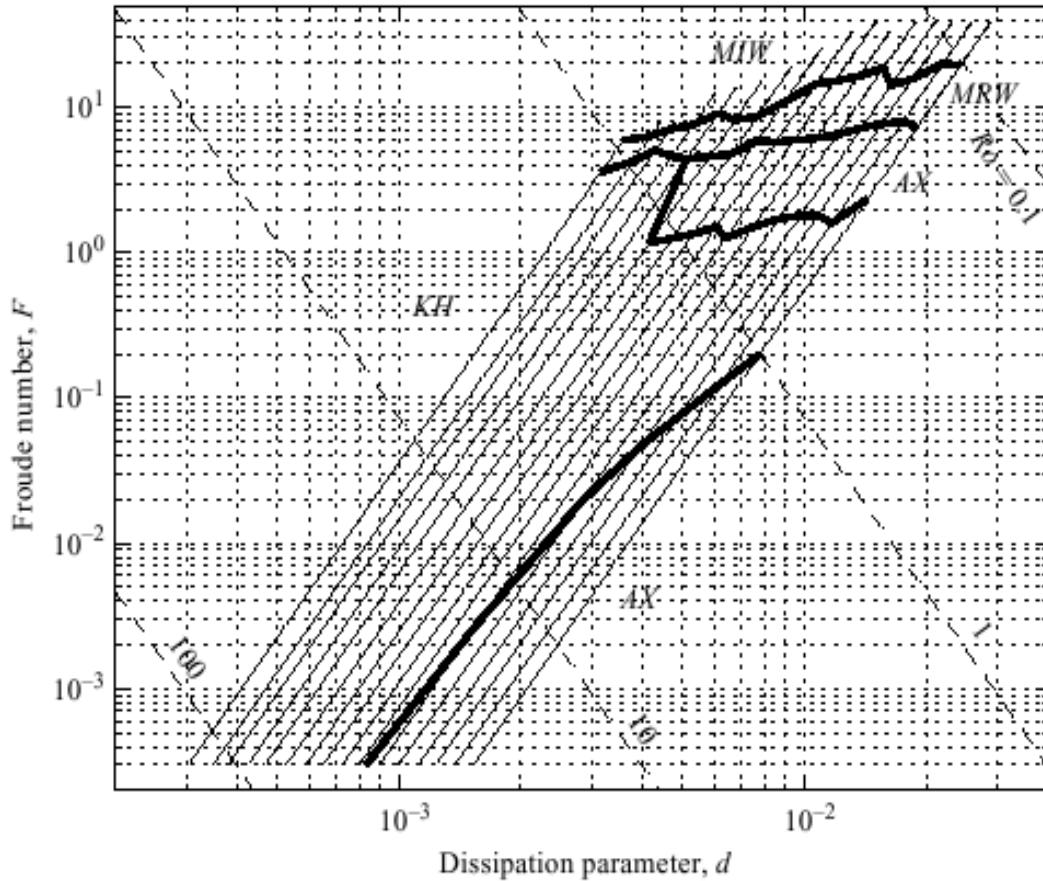


FIG. 4.4 – Diagramme de stabilité pour les différents régimes dans le plan (F, d) . Les traits fins correspondent aux différentes expériences, les traits plus épais marquent les délimitations entre les différents régimes de l'écoulement et les traits pointillés les valeurs du nombre de Rossby Ro . (Image de Williams *et al.* (2005))

dans la section 4.2. Ces différents régimes sont situés dans l'espace des paramètres (F, d) sur la figure 4.4.

L'apparition de l'instabilité barocline (mouvements de grande échelle dans les régimes MIW et MRW) pour un nombre de Froude supercritique est en très bonne adéquation avec les résultats théoriques du modèle quasi-géostrophique de Hart (1972). Le régime KH, soit les mouvements de petite échelle en l'absence de structure de grand échelle (figure 4.2 (b)), a lui été identifié comme de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz en appliquant le critère de Richardson à l'écoulement (voir partie 2.8 pour un rappel de ce critère). Par contre une ambiguïté demeure en ce qui concerne les mouvements de petite échelle présents sur les figures 4.2 (f)-(h), c'est-à-dire dans des régimes de faible Ro correspondant à l'instabilité barocline, pour lesquels le nombre de Richardson n'indique pas la présence d'instabilité KH. L'utilisation d'un modèle numérique quasi-géostrophique adapté à la géométrie de l'expérience a permis de montrer une bonne coïncidence spatiale entre ces zones de mouvements de petite échelle et les valeurs du critère d'émission de Lighthill-Ford tel que défini par Ford (1994). Ce critère caractérise les ondes d'inertie-gravité spontanément émises dans le cadre de l'émission de Lighthill évoquée dans la partie 1.2.

L’interprétation ainsi faite par Williams *et al.* (2005), et complétée ensuite par Williams *et al.* (2008), prévoit que ces mouvements de petite échelle sont des ondes d’inertie-gravité émises par un ajustement spontané de l’écoulement à grande échelle.

4.1.2 Émission spontanée d’ondes d’inertie-gravité ?

Cette interprétation fait néanmoins débat en raison des difficultés d’application du critère de Lighthill-Ford dans le cadre de ces expériences (voir discussion dans Plougonven *et al.* (2009) et Knox *et al.* (2009)).

Il nous faut rappeler ce qu’est l’émission de Lighthill et comment Ford (1994) l’a appliquée aux écoulements géophysiques. L’émission de Lighthill, telle que décrite originellement par Lighthill (1952), décrivait l’émission d’ondes acoustiques se propageant librement par des écoulements vorticaux non stationnaires dans les régimes où le nombre de Mach Ma était faible. Ford (1994) et Ford *et al.* (2000) ont ensuite montré que cette théorie était transposable à l’émission d’ondes d’inertie-gravité par des écoulements équilibrés en remplaçant le nombre de Mach Ma par le nombre de Froude F .

Un des points cruciaux de la théorie de Lighthill-Ford est donc que l’on se place dans un régime où $F \rightarrow 0$ et $Ro \sim 1$. Or dans le cadre des expériences de Williams *et al.* (2005), on se trouve dans des régimes de faible Ro et de grand F , et donc à priori au-delà des limites de validité de la théorie de Lighthill-Ford.

Il existe aussi dans la théorie de Lighthill-Ford une séparation spatiale entre les mouvements équilibrés et les ondes d’inertie-gravité spontanément émises. L’application du critère d’émission correspond au calcul du terme de forçage dont on peut déduire la partie (lointaine) de la réponse qui prend la forme d’ondes d’inertie-gravité. La coïncidence spatiale entre les ondes d’inertie-gravité et les valeurs du critère d’émission de Lighthill-Ford peut donc comporter une certaine ambiguïté à cet égard.

Enfin ce terme de forçage, correspondant au critère d’émission de Lighthill-Ford, ne détermine pas uniquement la source d’ondes d’inertie-gravité, mais contribue également à modifier la dynamique lente équilibré et pourrait alors indiquer un forçage important de la partie équilibré causant l’apparition de cisaillement à l’origine d’instabilités de petite échelle.

Des résultats similaires de mouvements de petite échelle couplés à des mouvements vorticaux de grande échelle ont été observés par Flor (2008) dans un même type d’expérience. Une explication proposée par Flor (2008) est liée à l’apparition de l’instabilité de Holmboe (Holmboe (1962), Ortiz *et al.* (2002) et références incluses), qui apparaît lorsque la couche limite comprenant le gradient de vitesse vertical à l’interface est plus étalée verticalement que le gradient de densité. Cette instabilité peut donc apparaître pour des nombres de Richardson plus grands que ceux correspondant à l’instabilité de Kelvin-Helmholtz et pourrait correspondre aux régimes observés dans ces expériences.

4.1.3 Instabilités dans le modèle de l’eau peu profonde

Ainsi motivés par l’interprétation de ces expériences, et en absence d’analyse de stabilité adaptée à la configuration expérimentale, nous présentons dans ce chapitre une analyse de stabilité linéaire du modèle de l’eau peu profonde à deux couches en géométrie cylindrique.

Si dans les expériences réalisées par Lovegrove *et al.* (2000) et Williams *et al.* (2005) l’écoulement ne correspond pas strictement à des couches minces ($H \sim L$), le modèle de l’eau peu profonde permet néanmoins d’interpréter la dynamique moyennée sur la

verticale, sachant que d'après les résultats expérimentaux, les structures verticales ne semblent pas influencer la dynamique de manière importante. De plus les interprétations des résultats fournies par Williams *et al.* (2005) à partir des travaux de Ford (1994) sont aussi basées sur la dynamique de l'eau peu profonde.

Dans cette configuration, on peut d'abord s'attendre à retrouver l'instabilité barocline classique dans les régimes de faible Ro et l'instabilité Kelvin-Helmholtz pour des cisaillements importants. Les résultats de Sakai (1989), notamment sur l'existence de l'instabilité RK qui est issue de la résonance d'une onde de Rossby et d'une onde de Kelvin ou de Poincaré dans le cas rectiligne, laissent supposer que cette instabilité sera aussi présente dans cette géométrie. Il semble donc important de déterminer les taux de croissance et les régimes dans lesquels celle-ci va apparaître dans le but de pouvoir comparer plus directement ces résultats avec les expériences.

Nous allons donc entreprendre l'analyse de stabilité de la configuration représentée figure 4.1. Les résultats concernant le modèle à une couche sont d'abord présentés dans la partie 4.2.2, ceux-ci vont permettre d'identifier les différents modes stables présents dans le système. De plus pour un état de base avec un profil équilibré parabolique, le système aux valeurs propres peut être résolu analytiquement de manière exacte, ce qui nous permet de valider par la même occasion les méthodes numériques utilisées dans la partie 4.2.3 pour le modèle à deux couches. Les différentes instabilités présentes sont interprétées en terme de résonances baroclines entre les modes présents dans les deux couches de fluide comme cela avait été présenté dans la partie 2.8.

4.2 *Instabilities of two-layer shallow-water flows with vertical shear in the rotating annulus*

Les résultats sur les instabilités dans l'anneau font l'objet d'un article publié dans *Journal of Fluid Mechanics* (Gula *et al.* (2009c)). Ainsi nous les incluons en anglais.

Instabilities of two-layer shallow-water flows with vertical shear in the rotating annulus

J. Gula, V. Zeitlin & R. Plougonven¹

Being motivated by the recent experiments on instabilities of the two-layer flows in the rotating annulus with superrotating top, we perform a full stability analysis for such system in the shallow-water approximation. We use the collocation method which is benchmarked by comparison with analytically solvable one-layer shallow-water equations linearised about a state of cyclogeostrophic equilibrium. We describe different kinds of instabilities of the cyclogeostrophically balanced state of solid-body rotation of each layer (baroclinic, Rossby-Kelvin, and Kelvin-Helmholtz instabilities), and give the corresponding growth rates and the structure of the unstable modes. We obtain the full stability diagram in the space of parameters of the problem and demonstrate the existence of crossover regions where baroclinic and Rossby-Kelvin, and Rossby-Kelvin and Kelvin-Helmholtz instabilities, respectively, compete having similar growth rates.

4.2.1 Introduction

For the study of frontal instabilities, there is a long tradition in geophysical fluid dynamics (GFD) to consider experiments on fronts in differentially rotating annuli (Hide (1958); Fultz *et al.* (1959); Hide & Fowlis (1965); Hart (1972)). Recently the interest to such experiments was revived in the context of the so-called spontaneous emission of inertia-gravity waves by balanced flows (see Ford (1994), O'Sullivan & Dunkerton (1995), and the references in the special collection of Journal of the Atmospheric Sciences on this subject, Dunkerton *et al.* (2008)). Thus, short-wave patterns coupled to the baroclinic Rossby waves were observed in independent experiments (Lovegrove *et al.* (2000), Williams *et al.* (2005), Flor (2008)) on instabilities of the two-layer rotating flows in the annulus at high enough Rossby numbers. Motivated by these experiments we undertake in what follows a thorough stability analysis of a two-layer shallow-water system in the rotating annulus. Classical baroclinic instability is of course recovered, but special attention is paid to unbalanced instabilities, and in particular to the Rossby-Kelvin one which we have also studied recently in the plane-parallel channel (Gula *et al.* (2009a)) in the linear and nonlinear regimes. The experiments mentioned above are not strictly speaking shallow-water ones, although no pronounced vertical structure was observed, as to our knowledge. The results we present below may serve, nevertheless, to understand the vertically averaged behaviour of the full system. Moreover, Williams *et al.* (2005) interpreted their experiments in terms of shallow-water dynamics, referring to Ford (1994). Being standard in GFD, the two-layer shallow-water approximation is a reasonable compromise between the realistic representation of the observed fluid flow and the computational effort (and amount of resources) necessary for a full stability analysis. It is, in addition, self-consistent and universal, as e.g. the fine vertical structure of the flow may vary from one experiment to another, as will be explained below.

The paper is organized as follows. We first benchmark the numerical method in section 4.2.2 by comparing the analytic analysis for the one-layer shallow water model in the rotating annulus with the numerical one (it should be emphasized that the linearised system is completely solvable "by hand" in this case for the parabolic profile of the free surface). This section also serves to identify the normal modes of the system. Then

¹LMD, Ecole Normale Supérieure,
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

in section 4.2.3 we present the results of numerical stability analysis for the two-layer shallow water in the annulus. The instabilities in the two-layer case, as usual, result from the resonances between the lower-layer and the upper-layer normal modes, e.g. Cairns (1979) and Sakai (1989). We quantify different kinds of instabilities and demonstrate the existence of crossover regions where the Rossby-Kelvin and baroclinic instabilities, and Kelvin-Helmholtz and Rossby-Kelvin instabilities, respectively, coexist having close growth rates.

4.2.2 One-layer shallow water in the rotating annulus

We consider the one-layer rotating shallow water model on the f -plane in polar coordinates and study the flow in the cylindrical channel with boundaries situated at r_1 and $r_2 > r_1$. The system of equations is then written, in the rotating frame with the rotation rate $f = 2\Omega$:

$$\begin{aligned} Du - (f + \frac{v}{r})v - r\Omega^2 &= -g\partial_r h, \\ Dv + (f + \frac{v}{r})u &= -g\frac{\partial_\theta h}{r}, \\ Dh + h\nabla \cdot \mathbf{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Here h is the depth of the layer, $\mathbf{v} = (u, v)$ are the radial and azimuthal velocity components, $D = \partial_t + u\partial_r + \frac{v}{r}\partial_\theta$ is the Lagrangian derivative, f is the constant Coriolis parameter and g the gravity acceleration. The boundary conditions are free-slip : $u = 0$ at $r = r_1, r_2$.

We linearise these equations about the steady cyclogeostrophically balanced state with the depth profile $H(r)$, and corresponding velocity profile $V(r)$:

$$fV + \frac{V^2}{r} + r\Omega^2 = g\partial_r H. \quad (2)$$

As usual, the centrifugal acceleration $r\Omega^2$ may be hidden by redefinition of H . The linearised equations, with the same notation for the perturbations as for the full fields in (1), are :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \frac{V}{r}\partial_\theta u - fv - 2\frac{Vv}{r} &= -g\partial_r h, \\ \partial_t v + u\partial_r V + \frac{V}{r}\partial_\theta v + fu + \frac{Vu}{r} &= -g\frac{\partial_\theta h}{r}, \\ \partial_t h + \frac{1}{r}(rHu)_r + \frac{1}{r}H\partial_\theta v + \frac{V}{r}\partial_\theta h &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

By introducing the time scale $f^{-1} = (2\Omega)^{-1}$, the horizontal scale $r_0 = r_2 - r_1$, the vertical scale $H_0 = H(r_1)$ and the velocity scale $V_0 = r_0\Omega$, we use non-dimensional variables from now on without changing notation. We thus obtain the following non-dimensional equations :

$$\begin{aligned} \partial_t u + \frac{V}{r}\partial_\theta u - v - 2\frac{Vv}{r} &= -Bu\partial_r h, \\ \partial_t v + u\partial_r V + \frac{V}{r}\partial_\theta v + u + \frac{Vu}{r} &= -Bu\frac{\partial_\theta h}{r}, \\ \partial_t h + \frac{1}{r}(rHu)_r + \frac{1}{r}H\partial_\theta v + \frac{V}{r}\partial_\theta h &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

where $Bu = (R_d/r_0)^2$ is the Burger number, $R_d = (gH_0)^{1/2}/(2\Omega)$ is the Rossby deformation radius.

The normal-modes are introduced in the standard way :

$$(u(r, \theta), v(r, \theta), h(r, \theta)) = (\tilde{u}(r), \tilde{v}(r), \tilde{h}(r)) \exp [ik(\theta - ct)] + c.c., \quad (5)$$

where k is the azimuthal wavenumber ($k \in \mathbb{N}$), and c the azimuthal phase velocity. Omitting tildes we thus get the following problem for eigenvalues c and eigenfunctions u, v, h :

$$\begin{aligned} k\left(\frac{V}{r} - c\right)u - (1 + 2\frac{V}{r})v &= -Bu h_r, \\ -(1 + \frac{V}{r} + V_r)u + k\left(\frac{V}{r} - c\right)v &= -kB u \frac{h}{r}, \\ -\frac{(rHu)_r}{r} + k\frac{H}{r}v + k\left(\frac{V}{r} - c\right)h &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

where here and below we denote the r - derivative by the corresponding subscript, if it does not lead to confusion. It is known that for parabolic profile of H the eigenvalue problem (6) may be solved analytically (see Killworth (1983b), where this problem was considered for the parabolic lens). Indeed by eliminating u and v

$$\begin{aligned} u &= \frac{Bu h_r k\left(\frac{V}{r} - c\right) + \frac{B u}{r} k h (1 + 2\frac{V}{r})}{(1 + 2\frac{V}{r})(1 + \frac{V}{r} + V_r) - k^2(\frac{V}{r} - c)^2}, \\ v &= \frac{k\left(\frac{V}{r} - c\right) \frac{B u}{r} k h + (1 + \frac{V}{r} + V_r) B u h_r}{(1 + 2\frac{V}{r})(1 + \frac{V}{r} + V_r) - k^2(\frac{V}{r} - c)^2}, \end{aligned} \quad (7)$$

where we suppose that $(1 + 2\frac{V}{r})(1 + \frac{V}{r} + V_r) - k^2(\frac{V}{r} - c)^2 \neq 0$, we obtain the following ordinary differential equation for h :

$$(rH(\frac{V}{r} - c)h_r)_r - (V_r - \frac{V}{r})Hh_r + F(r)h = 0, \quad (8)$$

(9)

with :

$$F(r) = [H(1 + 2\frac{V}{r})]_r - k^2 \frac{H}{r} (\frac{V}{r} - c) - \frac{r}{Bu} (\frac{V}{r} - c)((1 + 2\frac{V}{r})(1 + \frac{V}{r} + V_r)) - k^2 (\frac{V}{r} - c)^2 \quad (10)$$

$$(11)$$

Assuming a solid-body rotation of the fluid :

$$V(r) = \alpha r, \quad H(r) = \beta r^2, \quad \beta = \frac{(1 + \alpha)^2}{8Bu}, \quad (12)$$

consistently with the cyclogeostrophic balance (2), we get :

$$(r^3 h_r)_r + \left[2\frac{1 + 2\alpha}{\alpha - c} - k^2 - \frac{((1 + 2\alpha)^2) - k^2(\alpha - c)^2}{2\beta Bu} \right] rh = 0. \quad (13)$$

$V(r)$ is the velocity relative to the rotating frame, the basic solid-body rotation of the fluid should then be given by $\alpha = 0$, but we keep the parameter α for generality.

By defining for compactness

$$A = \left[2\frac{1 + 2\alpha}{\alpha - c} - k^2 - \frac{((1 + 2\alpha)^2) - k^2(\alpha - c)^2}{2\beta Bu} \right], \quad (14)$$

we easily get the general solution of (13) :

$$h(r) = C_1 r^{\alpha+} + C_2 r^{\alpha-}, \quad (15)$$

$$\alpha_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1 - A}.$$

Solutions of the eigenproblem (6) must satisfy the boundary conditions $u(r_1) = u(r_2) = 0$ which gives, using (7) :

$$(\alpha - c)h_r + \frac{(1 + 2\alpha)h(r)}{r} \Big|_{r=r_1, r_2} = 0. \quad (16)$$

With the help of the equation (15), we get the following algebraic system for $C_{1,2}$:

$$\begin{aligned} [\alpha_+(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] C_1 r_1^{\alpha_+ - 1} + [\alpha_-(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] C_2 r_1^{\alpha_- - 1} &= 0, \\ [\alpha_+(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] C_1 r_2^{\alpha_+ - 1} + [\alpha_-(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] C_2 r_2^{\alpha_- - 1} &= 0, \end{aligned} \quad (17)$$

and the solvability condition :

$$[\alpha_+(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] [\alpha_-(\alpha - c) + (1 + 2\alpha)] \left[r_1^{\alpha_+ - 1} r_2^{\alpha_- - 1} - r_1^{\alpha_- - 1} r_2^{\alpha_+ - 1} \right] = 0. \quad (18)$$

Two different solutions for A , cf (15), thus arise :

$$A = 2 \frac{1 + 2\alpha}{\alpha - c} - \left(\frac{1 + 2\alpha}{\alpha - c} \right)^2, \quad (19)$$

(20)

or

$$A = 1 + \left(\frac{n\pi}{\log(r_1/r_2)} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Kelvin modes

The first solution (19) combined with (14) gives an 4th-order equation for the phase speed c :

$$(\alpha - c)^4 - \left(\beta Bu + \left(\frac{1 + 2\alpha}{k} \right)^2 (\alpha - c)^2 + \beta Bu \left(\frac{1 + 2\alpha}{k} \right)^2 \right) = 0 \quad (22)$$

with the roots :

$$c = \alpha \pm \sqrt{\beta Bu}, \quad (23)$$

$$c = \alpha \pm \frac{1 + 2\alpha}{k}. \quad (24)$$

The first pair of roots (23) are non-dispersive and correspond to the eigenfunction $u \equiv 0$. They, thus, describe the two Kelvin modes concentrated at the inner and outer walls respectively. We present the elevation profile

$$h(r) = C_1 r^3 \text{ or } h(r) = C_2 r^{-3} \quad (25)$$

and the corresponding velocity field obtained from (7) and (12) for Kelvin modes, with $k = 2$, in figure 5. The structure of the Kelvin waves with the wind parallel to the boundaries and pressure extrema near the lateral boundaries is clearly seen, as well as the geostrophic character of the waves. The second pair of roots (24) correspond to the degenerate case $(1 + 2\frac{V}{r})(1 + \frac{V}{r} + V_r) - k^2(\frac{V}{r} - c)^2 = 0$ (see the previous section). As is easy to see from (6), or directly from (16) they do not correspond to any nontrivial eigenfunction and will be discarded in what follows.

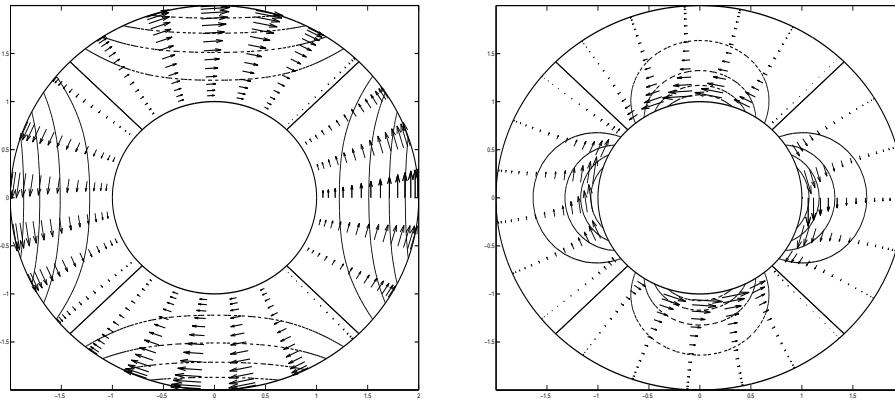


FIG. 5 – Pressure and velocity fields for Kelvin modes propagating along the outer (left) and the inner (right) wall with wavenumber $k = 2$. These modes correspond to (b) and (d), respectively, in figure 7 below.

Rossby and Poincaré modes

The second solution (21) combined with (14) gives a third-order equation for the phase speed c for each value of $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{k^2}{\beta Bu}(\alpha - c)^3 - \left[k^2 + 1 + \left(\frac{n\pi}{\log(\frac{r_1}{r_2})} \right) + \frac{1+2\alpha}{\beta Bu} \right] (\alpha - c) + 2(1+2\alpha) = 0. \quad (26)$$

For each $n \in \mathbb{N}$ a set of solutions consists of one Rossby mode and two Poincaré (inertia-gravity) modes of order n .

The solutions are given, cf (15), by :

$$h(r) = C_1 r^{\frac{i-n\pi}{\log(\frac{r_1}{r_2})}-1} + C_2 r^{-\frac{i-n\pi}{\log(\frac{r_1}{r_2})}-1} \quad (27)$$

with the constraint :

$$\frac{C_1}{C_2} = -\frac{(\alpha - c)\alpha_- + (1+2\alpha)}{(\alpha - c)\alpha_- + (1+2\alpha)} \frac{r_1^{\alpha_-}}{r_1^{\alpha_+}}. \quad (28)$$

It should be noted that the case $n = 0 \Rightarrow A = 1$ is degenerate : the corresponding field may be obtained, as usual, by taking the limit and leads to the logarithmic in r solution.

The structure of the corresponding modes for $k = 2$ is represented in figure 6, the Rossby wave on the left and the gravity wave on the right. The characteristic velocities and pressure fields of the Rossby wave are easily recognizable with wind turning around pressure extrema according to the geostrophic balance.

In figure 7 we present the dispersion diagram for thus obtained eigensolutions of the problem (6). It is instructive to compare this diagram with the corresponding diagrams for one-layer shallow water flow with linear shear (Couette flow) in the rectilinear channel in the absence of rotation, as obtained in Knessl & Keller (1995) and Balmforth (1999). In the latter case Rossby and Kelvin modes are absent, there is no spectral gap and the dispersion curves for left-moving and right-moving Poincaré modes can intersect leading to instability, according to the standard rules (Cairns (1979), Sakai (1989)). In our case

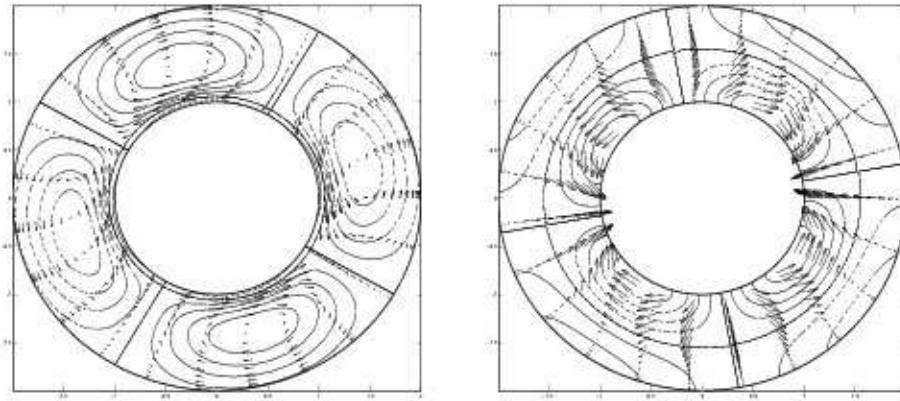


FIG. 6 – Pressure and velocity fields for $n = 1$ mode of the Rossby wave (left) and the Poincaré wave (right) for wavenumber $k = 2$. These modes correspond to (c) and (a), respectively, in figure 7 below.

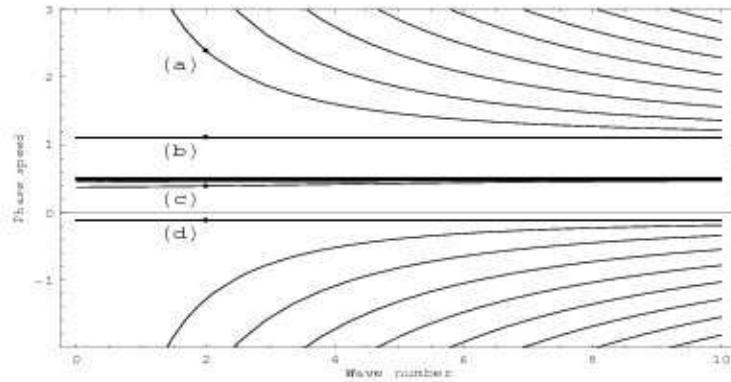


FIG. 7 – Dispersion diagram $c = c(k)$ for the solutions of equations (26) and (22) with $\alpha = 1/2$. (a) Poincaré modes (see figure 6 right), (b) and (d) Kelvin modes (see figure 5), (c) Rossby modes (see a zoom of this part in fig. 8). Note the spectral gap, i.e. the fact that fast Poincaré and Kelvin modes are separated from slow Rossby modes. Although the spectrum of k is discrete, for the sake of visualisation we present continuous curves $c(k)$; it is to be kept in mind that only the values $k \in \mathbb{N}$ correspond to realizable solutions.

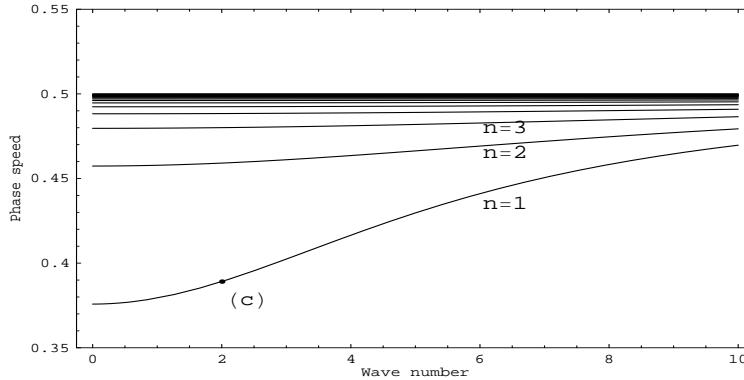


FIG. 8 – Zoom of the figure 7 on slow Rossby modes with varying n .

such intersections are not possible due to the spectral gap introduced by rotation, and the flow is stable.

We used the above-described analytic results in order to benchmark the numerical method which we are using. The eigenvalue problem of order 3 corresponding to the system of equations (6) can be solved numerically by applying the spectral collocation method as described in Trefethen (2000) and Poulin & Flierl (2003). A complete basis of Chebyshev polynomials is used to obtain a discrete equivalent of the system which is achieved by evaluating (6) on a discrete set of N collocation points (typically a rather low resolution $N = 50$ to 100 is sufficient, see below) and using the Chebyshev differentiation matrix to discretize the spatial derivatives. The eigenvalues and eigenvectors of the resulting operator are computed with the help of Matlab routine "eig". The occurrence of spurious eigenvalues is common in such discretization procedure. We therefore checked the persistence of the obtained eigenvalues by recomputing the spectrum with increasing N . The comparison of numerical and analytic results shows excellent agreement. We do not display it because of absence of any differences. This means that the collocation method works remarkably well even at rather low resolution.

4.2.3 Two-layer shallow water in the rotating annulus

A typical configuration used in laboratory experiments by Williams *et al.* (2005) and Flor (2008) is presented in figure 9. The annulus has an inner vertical sidewall of radius

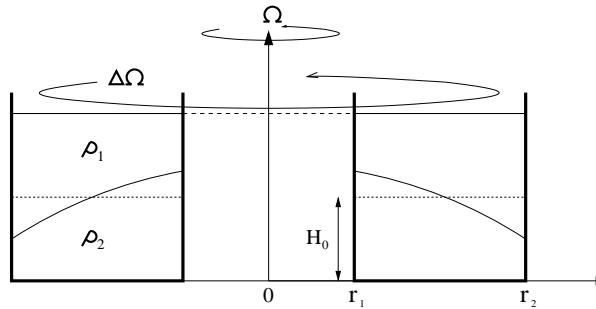


FIG. 9 – Schematic representation of a two-layer flow in the annulus with a superrotating lid.

r_1 , an outer vertical sidewall of radius r_2 and a total depth $2H_0$. The radial width of the annulus is therefore $r_2 - r_1$, and the two layers have equal depths H_0 at rest. The base and the lid are both horizontal and flat. The angular velocity about the axis of symmetry is Ω , and the upper lid is superrotating at $\Omega + \Delta\Omega$. This differential rotation provides a vertical velocity shear of the balanced basic state which is close to solid body rotation of each fluid layer, with different angular velocities. In the stability analysis which follows such state will be represented by a state of cyclogeostrophic equilibrium in each layer with linear radial profile of the azimuthal velocity in the rotating two-layer shallow water model in the f -plane approximation.

In order to fulfil a complete linear stability analysis we use below the collocation method, benchmarked in the one-layer case. We present the model, its linearised version, and introduce the key parameters in subsection 4.2.3. We then display the instabilities, their growth rates and the structure of the unstable modes in subsection 4.2.3.

Overview of the model and the method

Consider the two-layer rotating shallow water model on the f -plane. The momentum and continuity equations are written in polar coordinates as follows :

$$\begin{aligned} D_j u_j - (f + \frac{v_j}{r}) v_j - r\Omega^2 &= \partial_r \Pi_j, \\ D_j v_j + (f + \frac{v_j}{r}) u_j &= \frac{\partial_\theta \Pi_j}{r}, \\ D_j h_j + h_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j &= 0, \end{aligned} \quad (29)$$

where $\mathbf{v}_j = (u_j, v_j)$, h_j and Π_j are the (radial, azimuthal) velocity, thickness and pressure normalised by density (geopotential), in the j th layer (counted from the top), $j = 1, 2$. $f = 2\Omega$ is the dimensional background rotation and D_j denote Lagrangian derivatives in respective layers. The boundary conditions are $u = 0$ at $r = r_1, r_2$.

By introducing the time scale $1/f$, the horizontal scale $r_0 = r_2 - r_1$, the vertical scale H_0 and the velocity scale $V_0 = r_0\Omega$, we use non-dimensional variables from now on without changing notation. By linearising about a steady state with constant azimuthal velocities $V_1 \neq V_2$, we obtain the following non-dimensional equations (the ageostrophic version of the Phillips model in cylindrical geometry) :

$$\begin{aligned} \partial_t u_j + \frac{V_j}{r} \partial_\theta u_j - v_j - 2 \frac{V_j v_j}{r} &= -Bu \partial_r \pi_j, \\ \partial_t v_j + u_j \partial_r V_j + \frac{V_j}{r} \partial_\theta v_j + u_j + \frac{V_j u_j}{r} &= -Bu \frac{\partial_\theta \pi_j}{r}, \\ \partial_t h_j + \frac{1}{r} (r H_j u_j)_r + \frac{1}{r} H_j \partial_\theta v_j + \frac{V_j}{r} \partial_\theta h_j &= 0, \end{aligned} \quad (30)$$

where the pressure perturbations in the layers π_j are related through the interface perturbation η , as usual :

$$\pi_2 - \pi_1 + s(\pi_2 + \pi_1) = Bu \eta, \quad (31)$$

and $Bu = (R_d/r_0)^2$ is the Burger number, $Ro = \Delta\Omega/(2\Omega)$ is the Rossby number, $R_d = (g'H_0)^{\frac{1}{2}}/(2\Omega)$ is the Rossby deformation radius. $g' = 2\Delta\rho g/(\rho_1 + \rho_2)$ the reduced gravity and $s = (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ the stratification parameter.

Although the dissipative effects are totally neglected in our analysis we will also use the following nondimensional parameter :

$$d = \frac{\sqrt{\nu\Omega}}{H\Delta\Omega} \quad (32)$$

for the sake of comparison with the experimental results, where for kinematic viscosity we choose the value $\nu = 1.18 \cdot 10^{-6} m^2 s^{-1}$ which corresponds to the experiments of

Williams *et al.* (2005). We will also use a parameter $F = 1/Bu$ used as the Froude number in Williams *et al.* (2005) for the same reason.

The depth profiles $H_j(r)$ and respective velocities $V_j(r)$ in (30) correspond to steady cyclogeostrophically balanced state in each layer :

$$2V_j + \frac{V_j^2}{r} + r = \partial_r \Pi_j. \quad (33)$$

In spite of the introduction of the parameter d , which serves uniquely for scaling purposes, our analysis is purely inviscid. In the experiment, however, the mean axisymmetric flow is controlled by friction. Indeed, there is a positive torque due to the shear across the upper Ekman layer, and there are negative torques due to the shears across the lower Ekman layer and the Stewartson layers at the outer and inner vertical sidewalls (Stewartson (1957)) acting on the quasi-inviscid interiors of both the upper and lower layers. Because the Stewartson layers are very thin, it seems plausible to neglect them and to study solutions where each layer rotates as a solid body. The rotation rates of the layers lie in the interval between the rotation rate of the base (0 in the rotating frame) and that of the upper lid (Ro in the rotating frame). Therefore, in general

$$V_2 = \alpha_2 r, \quad V_1 = \alpha_1 r \quad (34)$$

and we get the following expressions for the heights in the state of cyclogeostrophic equilibrium for such mean flow :

$$H_j = H_j(0) + (-1)^j [2\alpha_2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1 - \alpha_1^2 + s(2\alpha_2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1 + \alpha_1^2 + 2)] \frac{r^2}{2Bu} \quad (35)$$

Hart (1972) considered the top, bottom and interfacial friction layers and found that the rotations rates are $\alpha_1 = (2 + \chi)Ro/2(1 + \chi)$ and $\alpha_2 = Ro/2(1 + \chi)$ where $\chi = (\nu_2/\nu_1)^{1/2}$ is the viscosity ratio between the two layers. If the two layers have close viscosities $\chi = 1$ it leads to $(\alpha_1, \alpha_2) = (0.75 Ro, 0.25 Ro)$

A calculation based on a layerwise balance of the torques in Williams *et al.* (2004) gives values for (α_1, α_2) about the same order but depending on the turntable angular velocity. The direct measurements of the radial velocity profiles by Flor (2008) are closer to $(\alpha_1, \alpha_2) \approx (0.9 Ro, 0.1 Ro)$. We will therefore keep these last values throughout the paper, but this particular choice does not mean a generality loss, as changing the relative rotation rate just means rescaling of the Rossby number.

Supposing a harmonic form of the solution in the azimuthal direction,

$$(u_j(r, \theta), v_j(r, \theta), \pi_j(r, \theta)) = (\tilde{u}_j(r), \tilde{v}_j(r), \tilde{\pi}_j(r)) \exp[ik(\theta - ct)] + c.c., \quad (36)$$

where k is the azimuthal wavenumber ($k \in \mathbb{N}$), and omitting tildes we get from (30) :

$$\begin{aligned} k(V_j - rc)iu_j - (r + 2V_j)v_j + r\partial_r \pi_j &= 0, \\ -(r + V_j + r\partial_r(V_j))iu_j + k(V_j - rc)v_j + k\pi_j &= 0, \\ -\partial_r(rH_j iu) + kH_j v + k(V_j - rc)(-1)^j \eta &= 0, \\ \pi_2 - \pi_1 + s(\pi_2 + \pi_1) &= Bu\eta. \end{aligned} \quad (37)$$

The system (37) is an eigenvalue problem of order 6 which can be solved by applying the spectral collocation method similarly to the one-layer flow. In comparison to the latter case, the dispersion diagrams we obtain show that the branches of dispersion relation corresponding to different modes can intersect, thus creating instabilities of

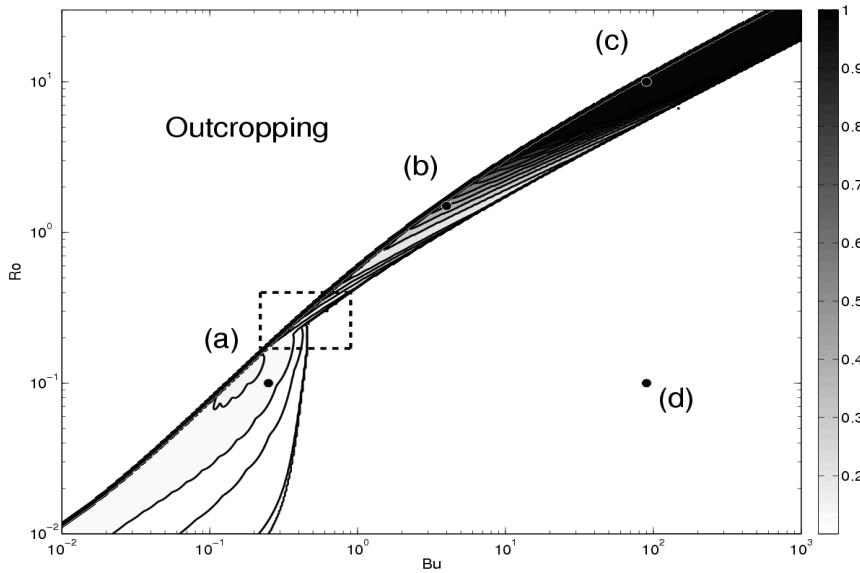


FIG. 10 – Growth rate of most unstable modes in (Ro, Bu) -space. Darker zones correspond to higher growth rates. Contours displayed are 0.001, 0.01, 0.02 and further interval at 0.02. The thick upper frontier line marks the outcropping limit when the interface between the two layers intersects the bottom or the top. The results for the outcropping configuration will be not discussed in this paper.

various nature. Namely, we will display below the instabilities resulting from the interaction between Rossby waves in upper and lower layer (the baroclinic instability), the interaction between Rossby and Kelvin or Poincaré waves in respective layers (Rossby - Kelvin instability) and the interaction between two Poincaré, or Kelvin and Poincaré, or two Kelvin modes (Kelvin - Helmholtz instability). Although each instability occupies its proper domain in the parameter space, we will see that there exist crossover regions where two different instabilities coexist and may compete.

Instabilities and growth rates

We first present the overall stability diagram in the space of parameters of the model, and then illustrate different parts of this diagram by displaying the corresponding unstable modes and dispersion curves. The stability diagram was obtained by calculating the eigenmodes and the eigenvalues of the problem (34), (37) for about 50000 points in the space of parameters (there are typically 200 to 300 points along each axis in the figures below) and then interpolating. As before, only discrete azimuthal wavenumbers correspond to realisable modes. We nevertheless present the results as if the spectrum of wavenumbers were continuous, for better visualisation.

The results are synthesised in figures 10 and 11, and 12 and 13 displaying, respectively, the growth rates and the wavenumbers of most unstable modes. The results are plotted both in the plane of parameters $Ro - Bu$ (figures 10 and 11) and in the plane F and d , for convenience of comparison with laboratory experiments by Williams *et al.* (2005) (figures 12 and 13).

The parameter space is clearly divided in three different regions. The upper-left parts in all figures correspond to the outcropping (incropping) region where the interface

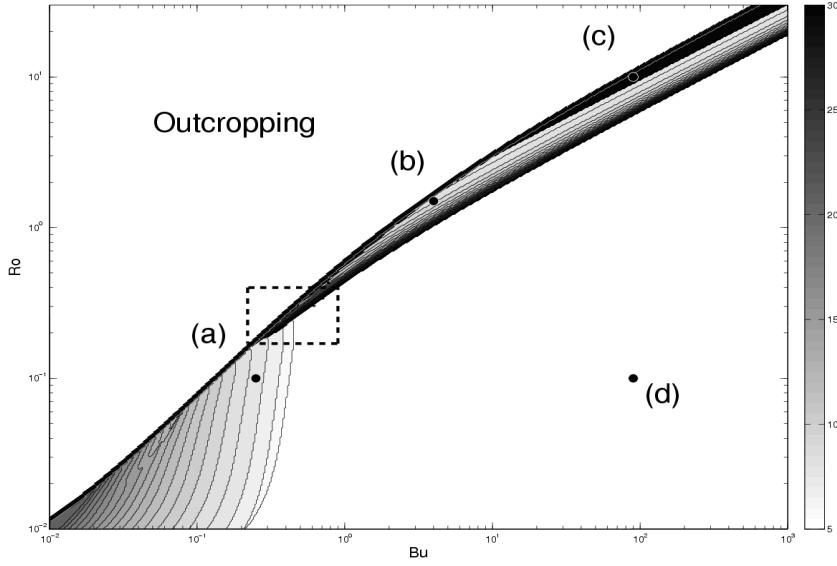


FIG. 11 – wavenumber of most unstable modes in (Ro, Bu) -space corresponding to figure 10. Darker zones correspond to higher wavenumbers. The interval between subsequent contours is 1.

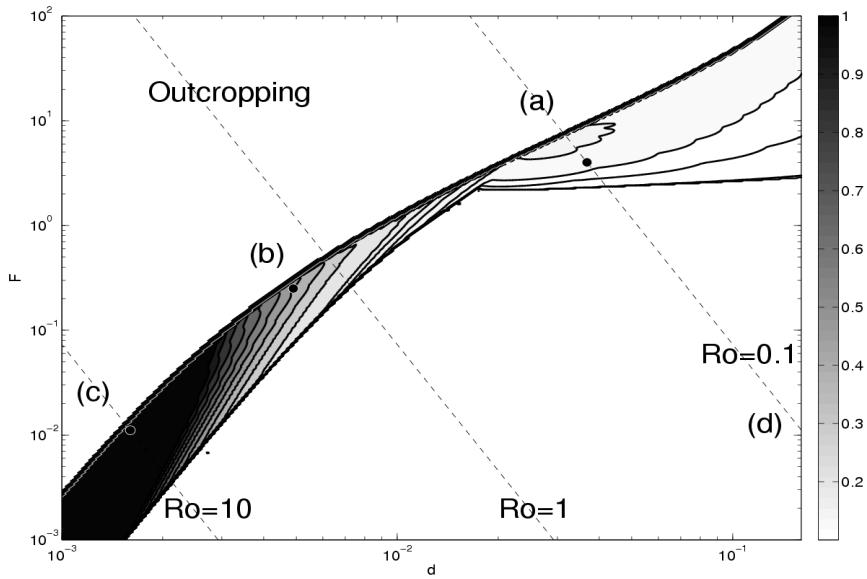


FIG. 12 – Growth rate of most unstable modes in (F, d) -space. Lines of constant Ro are plotted using numerical values of Williams *et al.* (2005) for g' and H_0 . Darker zones correspond to higher growth rates. Contours displayed are 0.001, 0.01, 0.02 and further at interval 0.02. The thick upper frontier line marks the outcropping limit when the interface between the two layers intersects the bottom or the top.

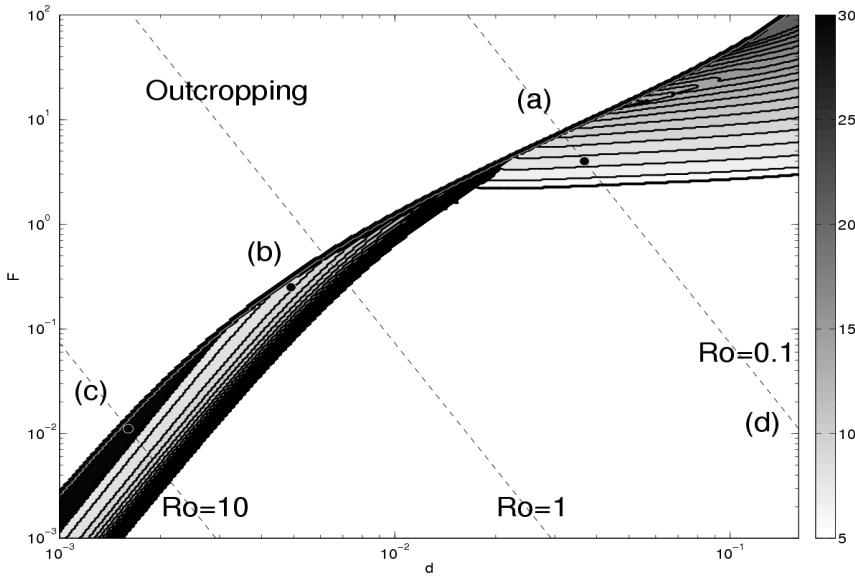


FIG. 13 – wavenumber of most unstable modes in (F, d) -space corresponding to figure 12. Darker zones correspond to higher wavenumbers. The interval between subsequent contours is 1.

between the layers intersects with the top (bottom) plane. The onset of out(in)cropping corresponds to the thick upper border line in the figures. The out(in)cropping situations were out of the scope of the experiments of Williams *et al* and will be not considered in what follows. Such configurations have been studied experimentally in the classical paper by Griffiths & Linden (1982) and constitute a separate subject under current analytical and numerical investigation, which will be presented elsewhere.

The lower-right parts of all figures correspond to stable flows. An example of the dispersion diagram of such flow denoted by (d) in figure 12 is given in figure 14.

We also show in this figure how the dispersion diagrams evolve while changing parameters and approaching the instability band spreading from low-left to upper-right in figures 10, 11, 12, 13. One clearly sees how the initially stable flow without imaginary eigenvalues of c , which is similar to the one-layer case with the same physical meaning of different branches, cf. figure 7, develops instabilities of various nature as parameters change. Thus, as shown in the left column of figure 14, decreasing the Burger number leads to distortion of the dispersion curves of Rossby modes and their reconnection leading to Rossby - Rossby (RR)-resonance, i.e. the baroclinic instability. Different distortion of dispersion curves of Rossby modes takes place if Ro increases at constant Bu , leading to reconnection a) with Kelvin-mode curve and Rossby-Kelvin (RK) resonance with corresponding instability, and b) with Poincaré-mode curve and Rossby-Poincaré (RP) resonance and corresponding instability. Further increasing Ro leads to reconnection of Kelvin-mode curves and Kelvin-Kelvin (KK) resonance, and related Kelvin-Helmholtz instability. Note that although KK, KP, and PP resonances are physically different, they are frequently confused in the literature and appear under the general name of Kelvin-Helmholtz (KH) instability. Similarly RK and RP instabilities are often called both RK, cf Sakai (1989). We will also follow this shorthand description in what follows, which hopefully would not lead to confusion.

In the context of wave resonance, there are three essential parameters in the problem :

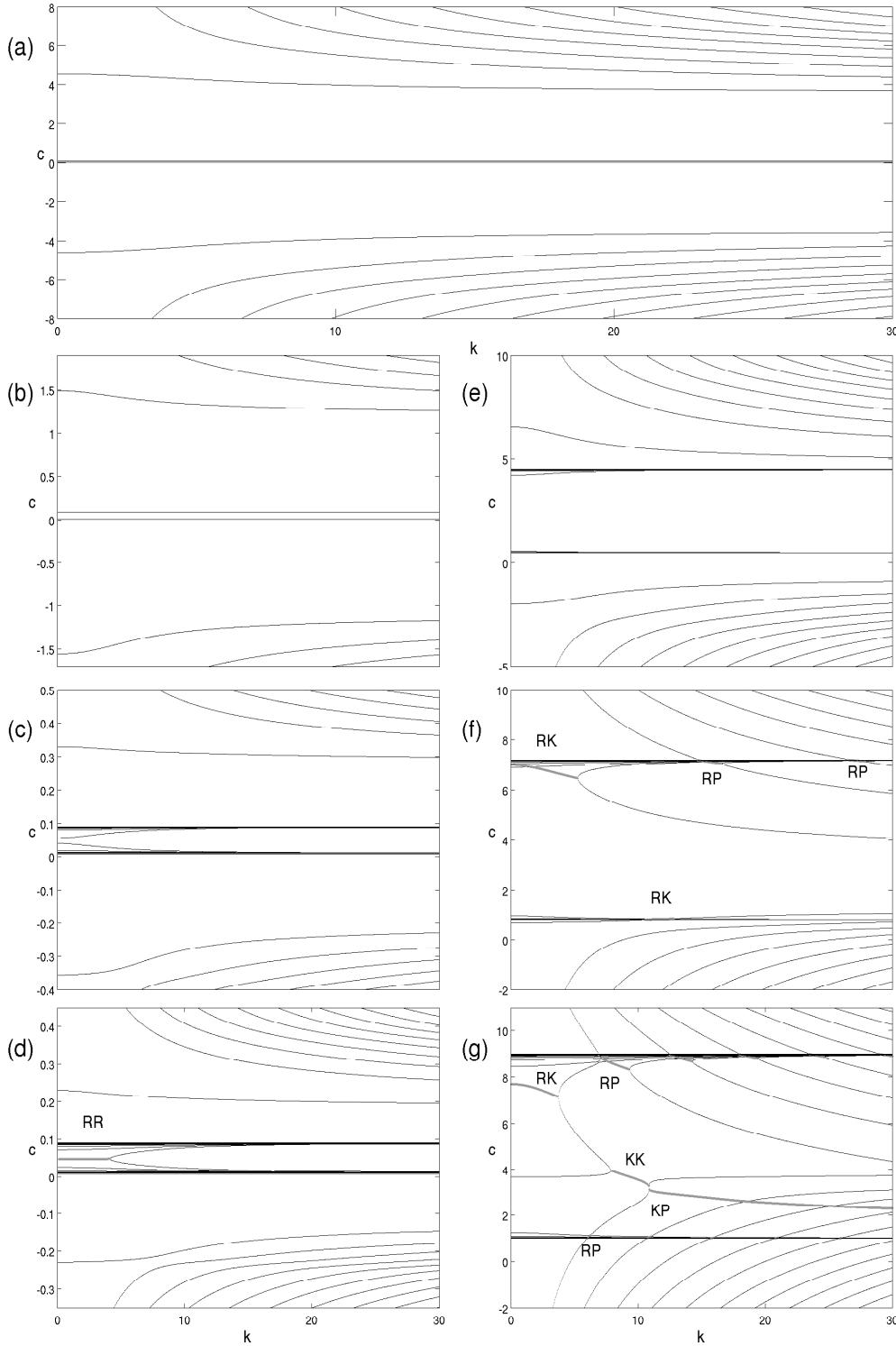


FIG. 14 – Dispersion diagram $c - k$ (upper panel) for the stable configuration corresponding to point (d) in fig. 10 and its evolution with the change of parameters : $Ro = 0.1$, Bu decreasing from top to bottom (left panel : (a) $Bu = 90$, (b) $Bu = 10$, (c) $Bu = 0.5$ and (d) $Bu = 0.25$) ; $Bu = 90$, Ro increasing from top to bottom (right panel : (a) $Ro = 0.1$, (e) $Ro = 5$, (f) $Ro = 8$ and (g) $Ro = 10$). Thick grey lines correspond to unstable regions ($\text{nonzero } \text{Im}(c)$).

$V = \Delta\Omega r_0$, the velocity (or velocity shear) of the basic flow, $C_R = \Omega\Delta H/H_0 r_0$, the phase velocity of the Rossby waves, and $C_G = \sqrt{g'H_0}$, the phase velocity of the gravity waves. The interpretation of the results may be done on the basis of the alternative set of nondimensional parameters which are defined as follows :

$F^* = \frac{V}{C_G} = \frac{\Delta\Omega r_0}{\sqrt{g'H_0}}$, a new Froude number and $R^* = \frac{V}{C_R} = \frac{g'H_0}{2\Omega^2 r_0^2}$, a new Rossby number. With these definitions one finds the baroclinic instability at small R^* and KH instabilities at large F^* , which matches the traditional view of these instabilities. However, to keep a closer link with experimental results of Williams *et al.* the discussion below is based on Bu , Ro , F and d .

Thus, as for the ageostrophic Phillips model in a straight channel, cf Gula *et al.* (2009a), several types of instabilities are present, namely, (a) the baroclinic instability for small values of Bu and Ro (RR resonance), (b) the Rossby-Kelvin instability (RK or RP resonance) for intermediate values of Bu and Ro and (c) the Kelvin-Helmholtz instability (KK or KP resonance), for high values of Bu and Ro . As usual, the KH instability is characterized by highest growth rates and shortest wavelengths, the baroclinic instability is long-wave and low growth-rate, and RK instability is intermediate, although spanning a wide range of wavenumbers. Note that the main difference with the plane-parallel flow of Gula *et al.* (2009a) is the discrete selection of wavenumbers due to the annular geometry and the loss of the symmetry due to different heights and velocities at the inner and the outer wall.

In the figures 15, 16, 17 we give the dispersion diagrams (both real and imaginary parts of the phase speed as a function of the azimuthal wavenumber) corresponding to different values of (Ro, Bu) referring to typical cases (a), (b), (c), respectively, in figures 10 - 13. We present also the structure of unstable modes in both layers and the corresponding maps of the interface deviation, because this is often the measured quantity in experiments.

Figure 15 shows a dispersion diagram in the zone of baroclinic instability. Two Rossby waves, one propagating in each layer, are in resonance having the same Doppler shifted phase speed and give rise to a baroclinic instability, see Hoskins *et al.* (1985). The structure of the unstable mode is shown in figure 18.

Figure 16 shows a dispersion diagram in a pure Rossby-Kelvin instability area. A Rossby wave propagating in the upper layer resonates with a Kelvin wave propagating in the lower layer and give rise to a RK instability, see Sakai (1989) and Gula *et al.* (2009a). The structure of the unstable mode is shown in figure 18.

Figure 17 shows a dispersion diagram in a KH instability area. A Kelvin wave propagating in the upper layer resonates with another Kelvin wave propagating in the lower layer and gives rise to a KH instability. For these values of parameters we can see that RP and RK instabilities are also present but with lower growth rates. The structure of the unstable mode is shown in figure 18.

Thus RK and KH instabilities coexist for large Bu and Ro (small F and d) having comparable growth rates, although different characteristic wavenumbers. As follows from the last figure, and from the comparison of figures 12 and 13, or 10 and 11, in general, close values of the growth rates may correspond to essentially different wavelengths of the most unstable modes. This means that different instabilities may coexist and compete. A clear-cut crossover region is indicated by a box in figures 12 and 13, and corresponds to coexisting baroclinic and RK instabilities. A zoom of the box is shown in figure 20.

Figure 21 shows the dispersion diagram corresponding to the (e) point in the crossover region of figure 20. We see that in this area both baroclinic and Rossby-Kelvin

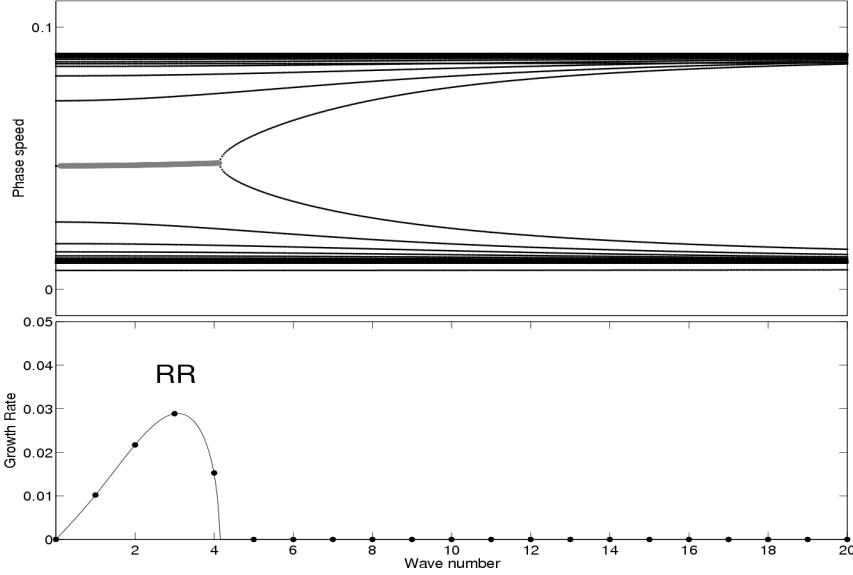


FIG. 15 – Dispersion diagram (upper panel) and growth rate (lower panel) of the modes for $Ro = 0.1$ and $Bu = 0.25$ (see (a) in figure 12). Grey line on the upper panel correspond to the RR resonance and respective unstable modes

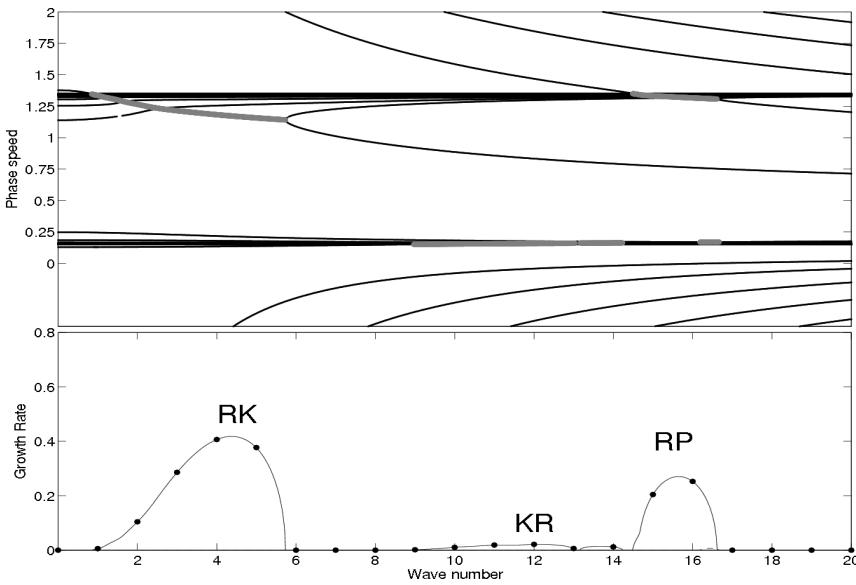


FIG. 16 – Dispersion diagram (upper panel) and growth rate (lower panel) of the modes for $Ro = 1.5$ and $Bu = 4$ (see (b) in figure 12). Thick grey lines on the upper panel correspond to the RK and RP resonances and respective unstable modes

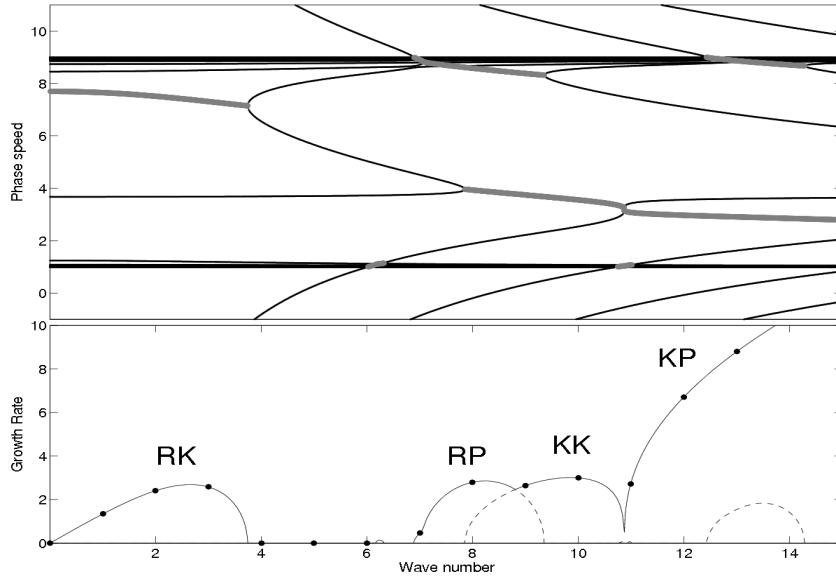


FIG. 17 – Dispersion diagram (upper panel) and growth rate (lower panel) of the modes for $Ro = 10$ and $Bu = 90$ (see (c) in figure 12). Thick grey lines on the upper panel correspond to the RK, KK, RP and KP resonances and respective unstable modes

instability are present, having close growth rates. This means that the two instabilities are competing and that relatively high wavenumbers may be excited due to the RK instability in this range of parameters. The interface deviations corresponding to competing RR and RK instabilities are presented in figure 22.

4.2.4 Summary and discussion

Thus, after having analytically resolved the problem of small perturbations around cyclogeostrophically balanced one-layer shallow-water Couette flow in the rotating annulus, which allowed us a) to identify the normal modes of the problem and b) to benchmark the numerical collocation scheme, we established a full stability diagram of the two-layer vertically sheared flow in the rotating annulus and identified the main instability modes. We established the origin of various instabilities resulting from phase-locking and resonance between the normal modes of the upper and the lower layer and showed different scenarios of stability loss in the space of parameters of the system. Perhaps the most interesting result is that in certain regions of the parameter space two different instabilities can exist and compete. The standard baroclinic instability, thus, may be "contaminated" by the Rossby-Kelvin one. Remarkably, the corresponding crossover zone is situated in the domain of the parameter space where emergence of short-wave perturbations was observed in the experiments together with the developing baroclinic instability, cf Williams *et al.* (2005). Although the Rossby-Kelvin instability has typical wavenumbers not sufficiently different from the baroclinic one, cf figure 21 and, thus, cannot directly explain the experimental observations of small-scale waves on top of the developing baroclinic instability, the interaction of two different unstable modes is worth studying in this context. Note that as shown in Gula *et al.* (2009a), the nonlinear saturation of the RK instability is totally different from that of baroclinic instability, with an important role being played by the mean flow reorganisation. Thus, although on

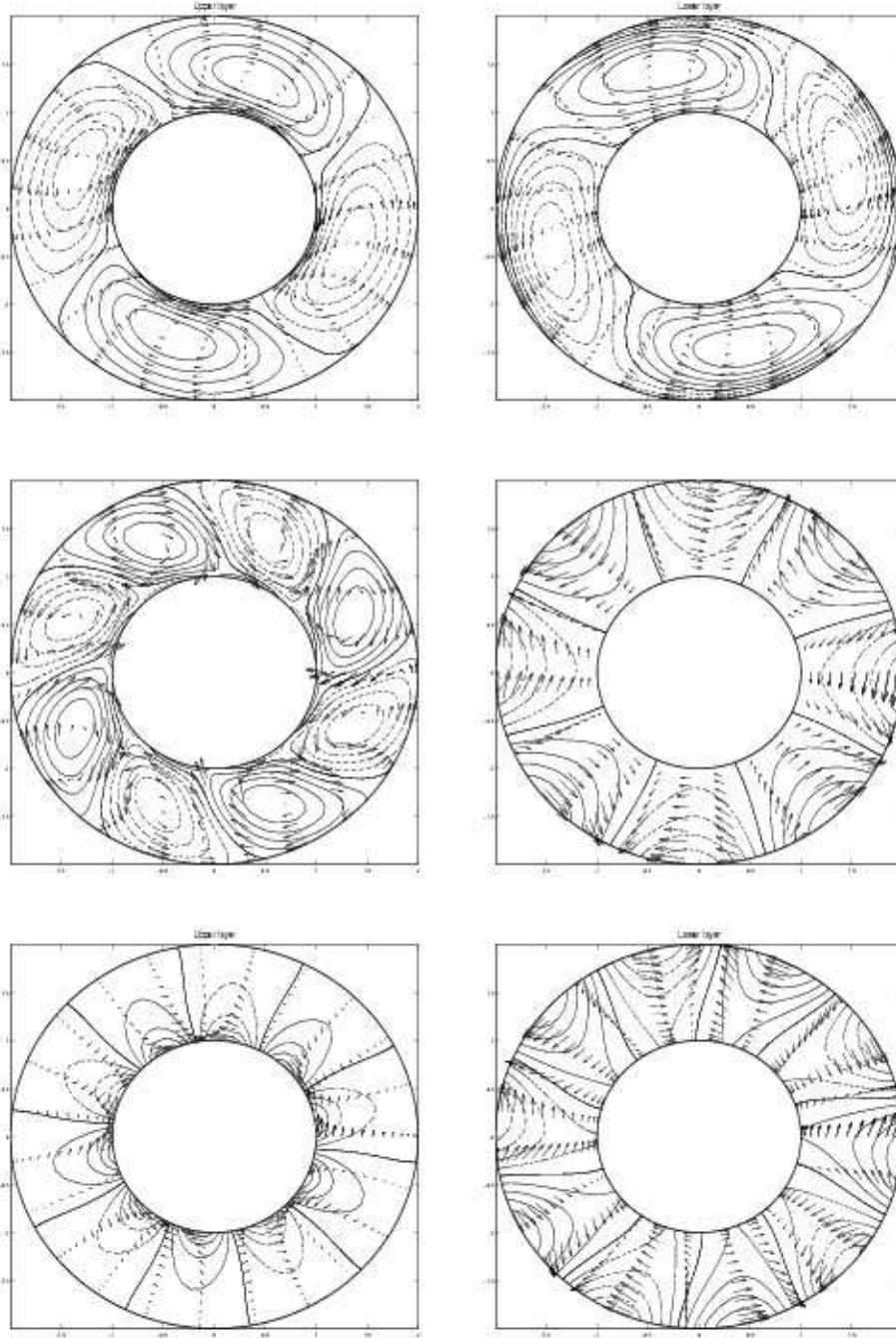


FIG. 18 – The structure, pressure and velocity fields of the upper (left) and lower layer (right), of (a) the baroclinically unstable mode at $k = 2$ (see figure 15), (b) the Rossby-Kelvin mode at $k = 4$ (see figure 16) and (c) the Kelvin-Helmholtz instability at $k = 5$ (see figure 17). The full lines correspond to positive and the dotted lines to negative values. (a) Both fields are typical of a Rossby mode. (b) The field in the upper layer is typical of a Rossby mode while the field in the lower layer is typical of a Kelvin mode. (c) Both fields are typical of a Kelvin mode.

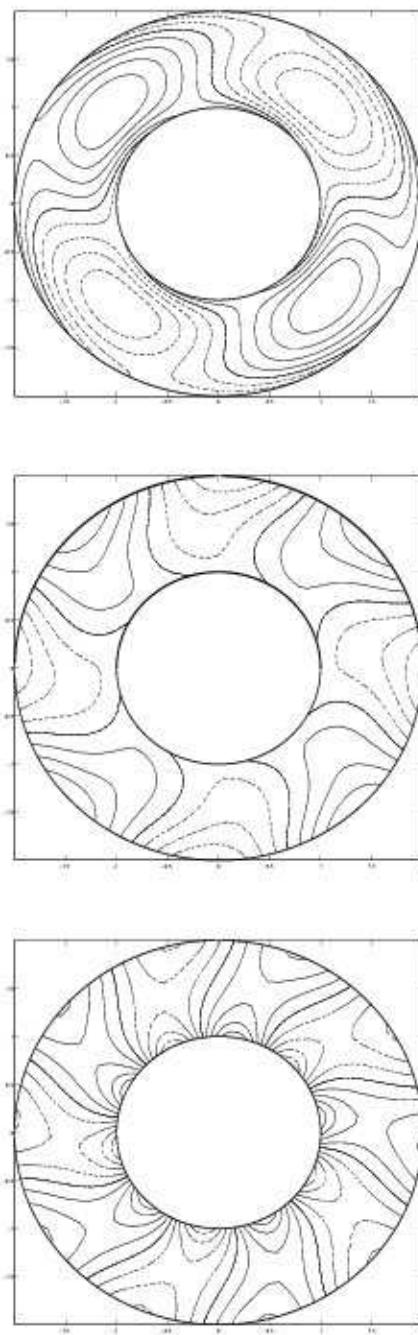


FIG. 19 – Interface height for (a) baroclinic instability at $k = 2$ (see figure 15), (b) Rossby-Kelvin instability at $k = 4$ (see figure 16) and (c) Kelvin-Helmholtz instability at $k = 5$ (see figure 17). The full lines correspond to positive and the dotted lines to negative values. Contours are plotted at the interval (a) 0.0137, (b) 0.015 and (c) 0.017.

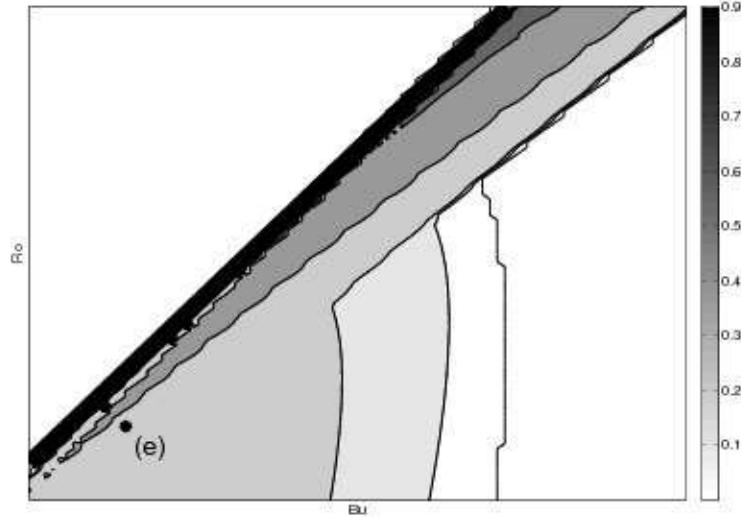


FIG. 20 – Growth rate of most unstable modes in (Ro, Bu) -space. Zoom of the box in figure 10. Contours displayed are 0.001, 0.01, 0.02 and further interval at 0.02.

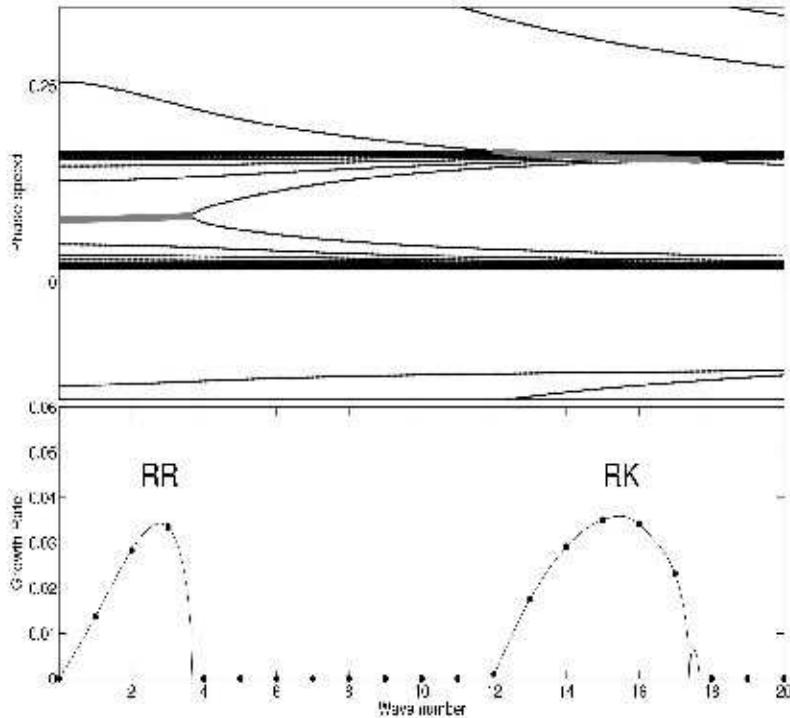


FIG. 21 – Dispersion diagram (upper panel) and growth rate (lower panel) of the modes for $Ro = 0.18$ and $Bu = 0.28$ (see (d) in figure 20). Thick grey lines on the upper panel correspond to the RR and RK resonances and respective unstable modes

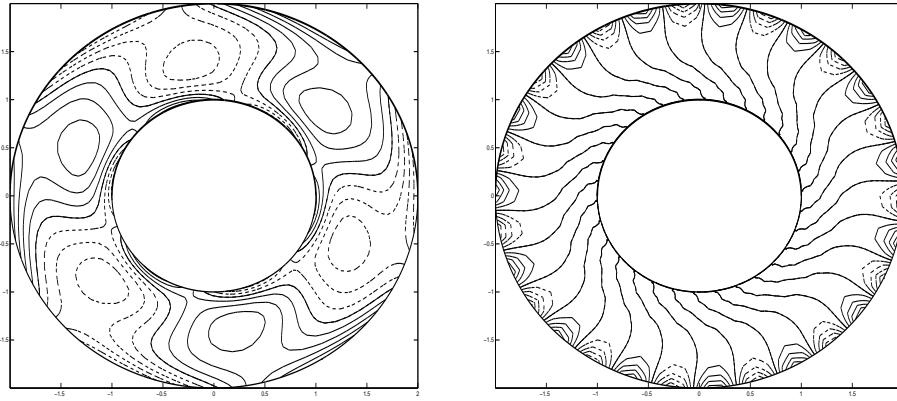


FIG. 22 – Interface height for baroclinic instability at $k = 4$ (left) and for RK instability at $k = 15$ (right). Both instabilities have the same growth rate for this set of (Ro, Bu) as can be seen on figure 21. The full lines correspond to positive and the dotted lines to negative values.

general grounds one could expect manifestations of the standard behaviour of the pair of nonlinear modes, like e.g. synchronisation, it is difficult to make predictions without detailed studies of the nonlinear regime. The finite amplitude disturbances and the effects of non-linearity as the nonlinear interactions between the various waves will be investigated in future work, both theoretically and by using a high-resolution finite-volume numerical scheme and a mesoscale atmospheric model (WRF).

Coming back to the main motivation of our study, the comparison between our results and laboratory experiments shows good agreement in some parameter regions, and discrepancies in some other. Let us look at the figure 12 and at the corresponding figure in Williams *et al.* (2005). While there is a very good agreement in the baroclinic instability region, the region of the KH instability in figure 12 is relatively narrow compared to Williams *et al.* (2005). As to the RK instability region, it is not clearly identifiable in the experiment.

An obvious explanation of the first discrepancy is that, in spite of the same physical mechanism, the KH instabilities in shallow-water and in full primitive equations are not quantitatively the same, especially in the large wavenumber domain. Another factor is surface tension. According to Hart (1972) and James (1977), the interfacial surface tension between the two layers is negligible for the long-wave instabilities, while it is stabilizing for short-wave ones. Indeed, the effect of interfacial surface tension is inversely proportional to the wavelength square. The short-wave RK and KH instabilities are then likely to be stabilized, while the long-wave baroclinic instability is unaffected.

Another possible explanation of non-manifestation of the RK instability is its rapid nonlinear saturation due to reorganisation of the mean flow and energy dissipation through small scale secondary KH instabilities, cf. Gula *et al.* (2009a), which makes it more difficult to identify in a laboratory experiment such as Williams *et al.* (2005), especially in view of the small dimensions of the apparatus.

As was already stressed in the Introduction, the two-layer rotating shallow water model should be considered as a conceptual one, allowing to grasp the universal features of destabilisation of large-scale shear flows in GFD. In principle, a linear stability analysis of a full (three-dimensional, non-hydrostatic, viscous, surface-tension included) experi-

mental flow is possible along the same lines. However, such task requires incommensurate (with respect to its "coarse-grained" shallow-water counterpart) computational efforts, and the results will depend on the fine structure of the mean flow (e.g. the parameters of the mixing layer between the layers) which may vary from one experiment to another.

4.3 Conclusion

L'analyse de stabilité linéaire dans le modèle de l'eau peu profonde à deux couches en géométrie cylindrique a mis en évidence trois types d'instabilité, comme dans le cas rectiligne étudié par Sakai (1989). Ces différentes instabilités sont interprétées par des résonances baroclines entre les différents modes présents dans le système (Rossby, Kelvin et Poincaré).

Il est alors intéressant de comparer la figure 12 avec les résultats des différentes expériences, notamment les résultats de Williams *et al.* (2005) qui étaient montré figure 4.4. On retrouve bien les mouvements de grande échelle dues à l'instabilité barocline dans des régions identiques à celles obtenues dans les expériences de Lovegrove *et al.* (2000), Williams *et al.* (2005) et Flor (2008). La zone d'instabilité de Kelvin-Helmholtz est quand à elle retrouvée dans des régimes comparables, mais est néanmoins plus étroite en raison principalement de la différence entre les instabilités KH dans le modèle de l'eau peu profonde et dans le modèle des équations primitives (voir Pedlosky (1987)), notamment pour des grands nombres d'onde. L'analyse de stabilité montre aussi la présence de l'instabilité RK dans une région intermédiaire avec des taux de croissance conséquents, or les résultats de Lovegrove *et al.* (2000) et Williams *et al.* (2005) ne trouvent pas trace de cette instabilité. Pourtant les résultats plus récents de Flor (2008) semblent identifier ces modes dans des expériences similaires avec néanmoins quelques différences notables qui sont les dimensions beaucoup plus importantes de l'anneau d'une part, et l'absence de tension de surface d'autre part. On peut donc imaginer un effet stabilisateur due à la tension de surface, comme cela a été montré notamment par Hart (1972) et James (1977) pour les structures de petite échelle, ou une difficulté d'observation dans les cas de Lovegrove *et al.* (2000) et Williams *et al.* (2005) due aux faibles dimensions de l'expérience et à l'évolution non-linéaire encore inconnue de ce mode.

Un deuxième aspect de cette étude est que l'analyse de stabilité montre que certaines régions de l'espace des paramètres sont un lieu de compétition entre ces différentes instabilités. D'une part entre l'instabilité RK et l'instabilité KH, mais dans ce cas les taux de croissance de l'instabilité KH sont en général beaucoup plus élevés et laissent penser que celle-ci va dominer l'évolution de l'écoulement, au moins au stade initial. D'autre part, une région particulièrement intéressante montre une compétition entre l'instabilité barocline classique et l'instabilité RK. Si l'instabilité RK ne semble pas correspondre directement aux mouvements de petite échelle observés dans les expériences en raison de différences d'échelle et de structure, cela pose néanmoins certaines questions concernant son influence sur une éventuelle modification du développement non-linéaire de l'instabilité barocline, et sur les interactions non-linéaires lors du développement simultané de ces instabilités. Il est impossible de répondre à cette question sans une étude non-linéaire plus approfondie de ces régimes.

Une fois de plus, il apparaît primordial de comprendre les aspects non-linéaires du développement de l'instabilité RK. C'est ce à quoi nous allons nous intéresser maintenant dans le chapitre 5. Cette instabilité n'ayant pour l'instant été étudiée que dans le cadre d'études linéaires, il est important d'entreprendre une étude de ses stades ultérieurs d'évolution. Cette instabilité va-t'elle s'équilibrer à faible amplitude ou va-t'elle croître jusqu'à amplitude finie ? Va-t-elle être dissipée rapidement ou peut-elle modifier significativement l'écoulement ? Peut-elle donner lieu à des instabilités secondaires de petite échelle ? Il est crucial de répondre à ces questions afin de déterminer la pertinence de cette instabilité.

Chapitre 5

Instabilités agéostrophiques dans un canal : évolution non-linéaire de l'instabilité RK

*'Et qu'est-ce que c'est qu'une révolution ?
Un souffle d'air qui ride l'océan, s'en va et laisse la mer agitée.'*
Gustave Flaubert.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'existence et à la pertinence de l'instabilité RK dans un fluide continument stratifié et à son évolution non-linéaire dans cette configuration plus réaliste. Nous revenons pour cela au cadre dans lequel l'instabilité a été discutée par Sakai (1989), à savoir un canal rectiligne. Nous allons d'abord établir l'analyse de stabilité linéaire pour ce cas, qui sera utile pour interpréter les résultats des simulations numériques que nous allons ensuite réaliser avec le modèle méso-échelle WRF présenté dans la section 3.3.

Le modèle d'un fluide à deux couches dans un canal sur le plan- f , représenté figure 5.1, est traité numériquement par la méthode de collocation pour l'analyse linéaire de ces instabilités dans la partie 5.2.2. La démarche est identique à celle du chapitre précédent mais cette fois-ci dans un canal rectiligne en rotation pour une comparaison plus directe avec la géométrie utilisée dans les simulations non-linéaires qui vont suivre. On pourra d'ailleurs retrouver dans l'appendice A, les résultats équivalents concernant une configuration similaire avec surface libre en lieu et place du toit rigide.

Ensuite, dans la partie 5.2.3, la pertinence de ces modes d'instabilité pour des écoulements continument stratifiés est étudiée à l'aide de simulations idéalisées avec le modèle atmosphérique méso-échelle WRF (Weather Research and Forecast, Skamarock *et al.* (2005)). L'utilisation de ce modèle va donc nous permettre d'analyser les instabilités d'une région frontale dans des configurations plus现实 (stratification continue), puis d'étudier le stade non-linéaire du développement de ces instabilités.

On travaille dans un domaine parallélépipédique $L_x \cdot L_y \cdot L_z$ avec un fond plat et sans considérer de couche limite, comme dans le cas du modèle à 2 couches vu précédemment.

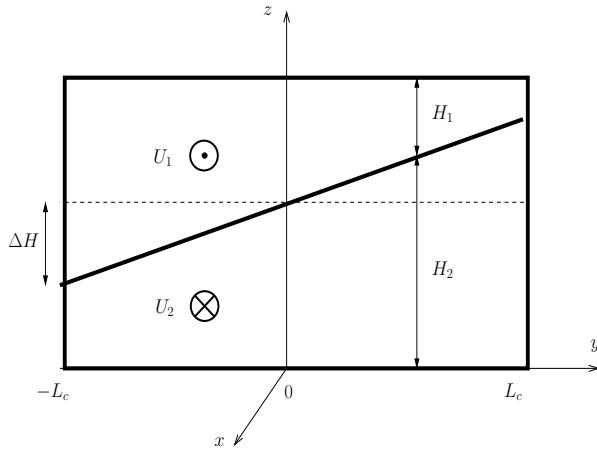


FIG. 5.1 – Modèle de l'eau peu profonde avec deux couches de densités ρ_1 et ρ_2 , dans un canal avec un fond plat, un toit rigide et un cisaillement de vitesse constant $U_1 = U_0$ et $U_2 = -U_0$ comme étudié par Sakai (1989) et Gula *et al.* (2009a).

Le domaine est périodique en x et borné par des murs latéraux en y . Deux différences importantes par rapport au modèle à deux couches sont la présence d'une stratification de base (en plus du front), et la condition aux limites supérieure (surface libre et non toit rigide). On définit donc un état de base qui comprend une stratification standard ainsi qu'un saut de température potentielle qui formera la zone frontale selon les équations suivantes.

$$z_{fr}(y) = z_0 + S y \quad \theta = \theta_0 + \Theta_z z + \frac{\theta_{ju}}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{z-z_{fr}}{z_{ju}}\right) \right) \quad (5.0)$$

où z_0 fixe la hauteur moyenne du front, S est la pente, θ_{ju} le saut de température potentielle, z_{ju} l'épaisseur de la zone frontale, et Θ_z décrit la stratification de base.

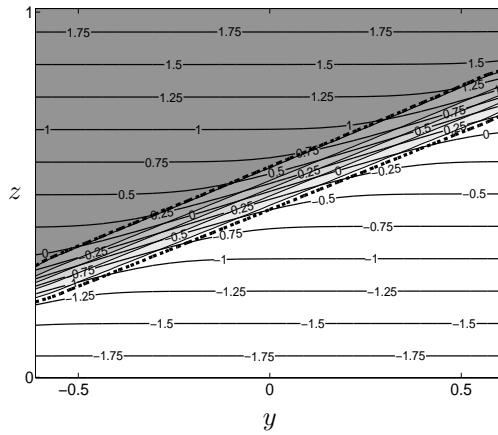


FIG. 5.2 – Distribution initiale de température potentielle dans le plan (y, z).

La distribution de température potentielle obtenue sur la figure 5.2. Les simulations sont initialisées en imposant une perturbation à l'état de base équilibré. On analyse ensuite l'évolution de cet écoulement, et donc la croissance du mode le plus instable.