Coordonnées isopycnes et Modèles en couches

1 Changement de coordonnées

Les coordonnées isopycnes en océanographie sont équivalentes aux coordonnées isentropes en météorologie. Le code en équations primitives de circulation générale MICOM permet de n'avoir que peu de degrés de liberté sur la verticale bien que l'excursion verticale des surfaces isopycnes peut atteindre plusieurs centaines de mètres dans les zones frontales, e.g. Gulf Stream.

Pour une variable $a \equiv a(x,y,z,t)$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & \longrightarrow & \frac{\partial a}{\partial x}\big|_z & = & \frac{\partial a}{\partial x}\big|_\rho & + & \frac{\partial a}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\big|_z \\ \frac{\partial}{\partial y} & \longrightarrow & \frac{\partial a}{\partial y}\big|_z & = & \frac{\partial a}{\partial y}\big|_\rho & + & \frac{\partial a}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y}\big|_z \\ \frac{\partial}{\partial t} & \longrightarrow & \frac{\partial a}{\partial t}\big|_z & = & \frac{\partial a}{\partial t}\big|_\rho & + & \frac{\partial a}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}\big|_z \\ \frac{\partial}{\partial z} & \longrightarrow & \frac{\partial a}{\partial z}\big|_z & = & \frac{\partial a}{\partial z}\big|_\rho & & \end{cases}$$

si on choisit $a \equiv z$ pour estimer $\frac{\partial \rho}{\partial x}\big|_z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\big|_z = \frac{\partial z}{\partial x}\big|_\rho + \frac{\partial z}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\big|_z = 0 \qquad\qquad \frac{\partial \rho}{\partial x}\big|_z = -\frac{z_x}{z_\rho}$$

$$\begin{aligned} z_x &\equiv \frac{\partial z}{\partial x}\big|_\rho = \textit{ pente en x de l'isopycne} \\ z_\rho &\equiv \frac{\partial z}{\partial \rho} \end{aligned}$$

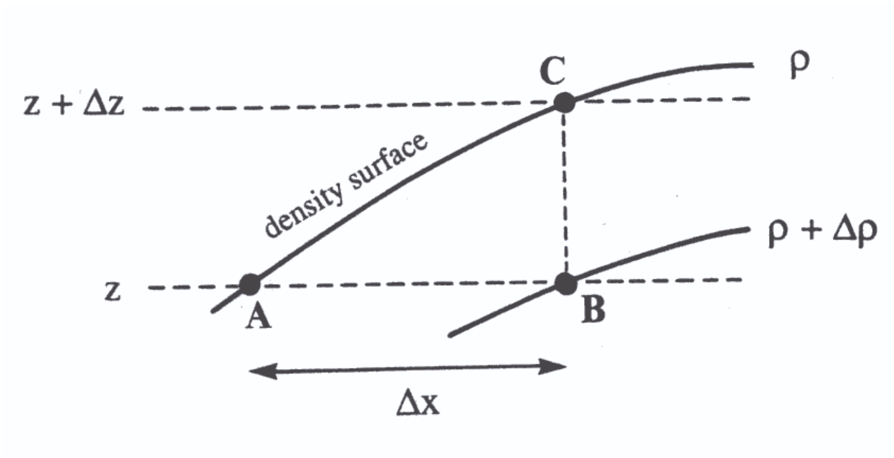
ce qui conduit à

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x}\big|_z &= \frac{\partial a}{\partial x}\big|_\rho - \frac{z_x}{z_\rho}\frac{\partial a}{\partial \rho} \qquad\qquad \frac{\partial a}{\partial y}\big|_z, \quad \frac{\partial a}{\partial t}\big|_z \cdots \\ \frac{\partial a}{\partial z} &= \frac{1}{z_\rho}\frac{\partial a}{\partial \rho} \end{aligned}$$

Interprétation graphique

$$\begin{cases} a_B - a_A = (a_C - a_A) - (a_C - a_B) \\ \frac{a_B - a_A}{\Delta x} = \frac{a_C - a_A}{\Delta x} - \frac{a_C - a_B}{\Delta \rho}\frac{\Delta z/\Delta x}{\Delta z/\Delta \rho} \end{cases} \iff \boxed{\frac{\partial a}{\partial x}\big|_z = \frac{\partial a}{\partial x}\big|_\rho - \frac{z_x}{z_\rho}\frac{\partial a}{\partial \rho}}$$

Les relations sont valides pour des valeurs algébriques de Δx, Δz et $\Delta\rho$.



2 Potentiel de Montgomery

Dans tous les changements de coordonnées (coord. pression, isopycnes, isentropes) tout revient à exprimer le terme de gradient de pression horizontale en fonction des nouvelles coordonnées. On utilise l'hydrostatique

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \rho}\,\frac{1}{z_\rho} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial \rho} = -\rho g z_\rho$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}\Big|_z \;=\; \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_\rho - \frac{z_x}{z_\rho}\frac{\partial p}{\partial \rho} \;=\; \frac{\partial p}{\partial x}\Big|_\rho + \rho g \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\rho \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(p+\rho g z)\Big|_\rho \;\equiv\; \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{P}\Big|_\rho$$

$$\boxed{\mathcal{P} \equiv p + \rho g z \equiv potentiel\ de\ Montgomery} \qquad \frac{1}{\rho}\,\nabla p\big|_z \;=\; \frac{1}{\rho}\,\nabla \mathcal{P}\big|_\rho$$

Hydrostatique

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial z} \;=\; \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{z_\rho} g z + \rho g \;=\; \frac{1}{z_\rho} g z \;=\; \frac{1}{z_\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}$$

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} \;=\; g z}$$

3 Vitesse verticale

en milieu non diffusif

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z} = 0$$

d'où

$$-\frac{1}{z_\rho} w = \frac{\partial \rho}{\partial t}\Big|_z + u\frac{\partial \rho}{\partial x}\Big|_z + v\frac{\partial \rho}{\partial y}\Big|_z$$

en utilisant les expressions de la section 1, on démontre que

$$\boxed{w = \frac{\partial z}{\partial t}\Big|_\rho + u\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\rho + v\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_\rho}$$

ceci exprime que la vitesse verticale est telle que la particule reste à chaque instant sur la surface isopycnale afin que ρ soit conservé ($\frac{d\rho}{dt} = 0$) en suivant la particule.

4 Dérivée particulaire en coordonnées isopycnes

On a

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t}\Big|_z + u\frac{\partial a}{\partial x}\Big|_z + v\frac{\partial a}{\partial y}\Big|_z + w\frac{\partial a}{\partial z}$$

en utilisant l'expression de w en coordonnées isopycnes on montre que

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t}\Big|_\rho + u\frac{\partial a}{\partial x}\Big|_\rho + v\frac{\partial a}{\partial y}\Big|_\rho + \varpi\frac{\partial a}{\partial z}\Big|_\rho \qquad \varpi \equiv \frac{d\rho}{dt}$$

en l'absence d'effets diffusifs on a $\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \varpi = 0$, il n'y a pas d'advection à travers les isopycnes et on obtient

$$\boxed{\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t}\Big|_\rho + u\frac{\partial a}{\partial x}\Big|_\rho + v\frac{\partial a}{\partial y}\Big|_\rho}$$

Les équations du mouvement en coordonnées isopycnes sont

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} \frac{du}{dt} & - & fv & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \\ \\ \frac{dv}{dt} & + & fu & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \end{array}\right.}$$

on a les mêmes expressions que pour un écoulement bidimensionnel car $\frac{d}{dt} = (\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y})\Big|_\rho$, et $w \longrightarrow \varpi \equiv \frac{d\rho}{dt} = 0$. Il suffit de remplacer la pression p par le potentiel de Montgomery et u et v sont les valeurs de la vitesse horizontale le long de la surface isopycne.

5 Equations de continuité

On considère une couche de densité comprise entre ρ et $\rho + \Delta\rho$ d'épaisseur $h = -\Delta\rho\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = \Delta\rho\ z_\rho$. Par convention, $h > 0$ et $\Delta\rho = cste$.
L'équation de continuité pour un fluide incompressible est

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_z + \frac{\partial v}{\partial y}\Big|_z + \frac{\partial w}{\partial z}\Big|_z = 0$$

en utilisant

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial a}{\partial x}\Big|_z = \frac{\partial a}{\partial x}\Big|_\rho - \frac{1}{z_\rho}\frac{\partial a}{\partial \rho}\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_\rho, \qquad \frac{\partial a}{\partial \rho} = z_\rho \frac{\partial a}{\partial z} \\ w = (\frac{\partial z}{\partial t} + u\frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y})\Big|_\rho \end{array}\right.$$

on aboutit après un calcul fastidieux à

$$\boxed{\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y}\right)\Big|_\rho = 0}$$

6 Vorticité potentielle

En manipulant les équations du mouvement en coordonnées isopycnes

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \\ \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \nabla\cdot(h\vec{u}) = 0 \qquad\qquad \vec{u} = (u, v) \end{array}\right.$$

on aboutit à

$$
\begin{cases}
\left(\frac{\partial}{\partial t}\big|_\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\big|_\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\big|_\rho\right) \quad q = 0 \\
\\
q = \frac{f+\partial v/\partial x - \partial u/\partial y}{h}
\end{cases}
$$

en coordonnées isopycnes, alors que l'expression de la vorticité potentielle en coordonnées cartésiennes est donnée par

$$
q = (f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial \rho}{\partial z} + (\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial \rho}{\partial x}).
$$

$\boxed{\text{Résumé}}$

$$
\frac{\partial a}{\partial x}\big|_z = \frac{\partial a}{\partial x}\big|_\rho - \frac{z_x}{z_\rho}\frac{\partial a}{\partial \rho}; \qquad z_x \equiv \frac{\partial z}{\partial x}\big|_\rho; \qquad z_\rho \equiv \frac{\partial z}{\partial \rho} = \frac{1}{\frac{\partial \rho}{\partial z}}
$$

$$
\mathcal{P} = p + \rho g z
$$

$$
\frac{1}{\rho}\ \nabla p\big|_z = \frac{1}{\rho}\nabla \mathcal{P}\big|_\rho
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} = gz \qquad (\textit{hydrostatique})
$$

$$
\frac{d\rho}{dt} = 0
$$

$$
w = \frac{\partial z}{\partial t}\big|_\rho + u\frac{\partial z}{\partial x}\big|_\rho + v\frac{\partial z}{\partial y}\big|_\rho
$$

$$
\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\big|_\rho + u\frac{\partial}{\partial x}\big|_\rho + v\frac{\partial}{\partial y}\big|_\rho
$$

$$
\varpi \equiv \frac{d\rho}{dt} = 0
$$

$$
\begin{cases}
\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} \\
\\
\frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial y}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
2D & \longrightarrow & coord.\ \rho \\
w & \longrightarrow & \frac{d\rho}{dt} = 0 \\
p & \longrightarrow & \mathcal{P} \\
u, v & \longrightarrow & u, v\ le\ long\ de\ surfaces\ isopycnes
\end{cases}
$$

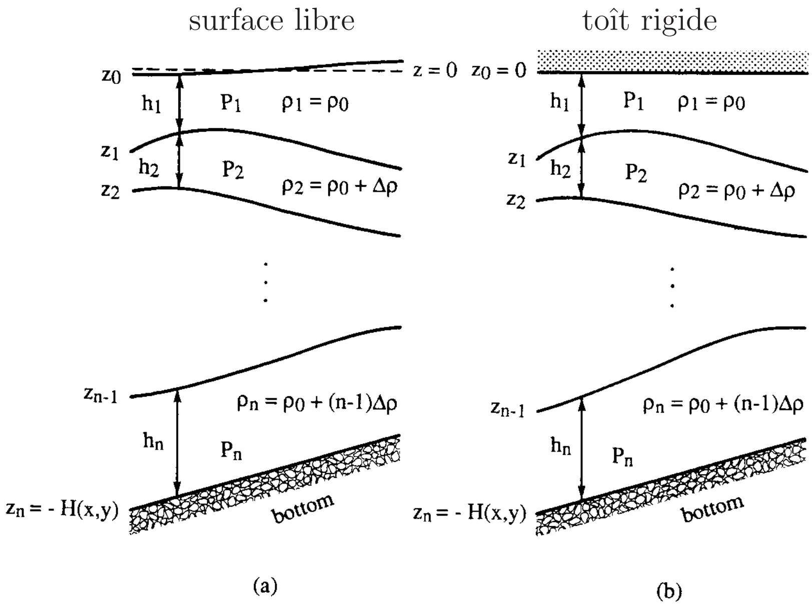
$$
\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y}\big|_\rho = 0
$$

$$
q = \frac{f+\partial v/\partial x - \partial u/\partial y}{h} \ \textit{conservé}
$$

---

7 Modèle à couches

Nombre fini de couches superposées, chacune étant de densité uniforme ($i = 1, ...n$).
Couche i : ρ_i, épaisseur h_i, potentiel de Montgomery $\mathcal{P}_i$ et vitesses u_i, v_i. L'interface entre 2 couches adjacentes i et $i+1$ est identifiée par son élévation (cote z_i).
La surface libre est z_0 , le fond est à $z_n = -H$ et on a $z_{i-1} = z_i + h_i$



7.1 Surface libre

– relation de récurrence pour $\mathcal{P}_i$

$$
i = 1, n-1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 = p_a + \rho_0 g z_0 \quad (surface) \\ \\ \mathcal{P}_{i+1} = \mathcal{P}_i + \Delta\rho \; g \; z_{i+1} \quad \Longleftarrow \quad \dfrac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho} = gz \end{array} \right.
$$

par convention $\rho_1 = \rho_0$= densité de référence.

– gravité réduite

$$
g' = \frac{\Delta\rho}{\rho_0} g
$$

– 1 couche

$$
\left\{ \begin{array}{ll} z_0 = h_1 - H & \qquad \mathcal{P}_1 = \rho_0 g (h_1 - H) \quad \textit{variations de } p_a \textit{ négligées} \\ z_1 = -H & \end{array} \right.
$$

– 2 couches

$$
\left\{ \begin{array}{ll} z_0 = h_1 + h_2 - H & \qquad \mathcal{P}_1 = \rho_0 g (h_1 + h_2 - H) \\ z_1 = h_2 - H & \qquad \mathcal{P}_2 = \rho_0 g h_1 + \rho_0 (g + g')(h_2 - H) \\ z_2 = -H & \end{array} \right.
$$

7.2 Toît rigide

Si on néglige les effets des ondes d'inertie-gravité de surface qui se propagent beaucoup plus rapidement que les ondes internes et les perturbations quasi-géostrophiques, on peut faire l'hypothèse du toît rigide : $z_0 = 0$ et on a $(n-1)$ couches indépendantes.
On a dans ce cas

- <u>1 couche</u>

$$\begin{cases} z_1 = -h_1 & \mathcal{P}_1 \ variable \\ h_1 = H \ fix\acute{e} & \end{cases}$$

- <u>2 couches</u>

$$\begin{cases} z_1 = -h_1 & \mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 + \rho_0 g' h_1 \\ z_1 = -h_1 - h_2 & \mathcal{P}_2 \ variable \\ h_1 + h_2 = H \ fix\acute{e} & \end{cases}$$

7.3 Modèles à gravité réduite

La couche la plus profonde est supposée immobile et pour n couches en mouvement la couches $n+1$ sera au repos ($\mathcal{P}_{n+1} = 0$)
On a dans ce cas

- <u>1 couche en mouvement</u>

$$\begin{cases} z_1 = -h_1 & \mathcal{P}_1 = \rho_0 g' h_1 \end{cases}$$

- <u>2 couches en mouvement</u>

$$\begin{cases} z_1 = -h_1 & \mathcal{P}_1 = \rho_0 g'(2h_1 + h_2) \\ z_2 = -h_1 - h_2 & \mathcal{P}_2 = \rho_0 g'(h_1 + h_2) \end{cases}$$

7.4 Equations du mouvement

Les équations du mouvement, de continuité et conservation de la vorticité potentielle pour chaque couche sont données par leur expression en coordonnées isopycnes.

- <u>modèle à gravité réduite à 1 couche</u>

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g'\frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g'\frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hu)}{\partial x} + \frac{\partial (hv)}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

  on obtient dans le cas d'un modèle à gravité réduite exactement la même expression que le modèle Shallow Water à 1 couche.