

# Chapitre 1

## Zones inertielles de la turbulence en milieu incompressible

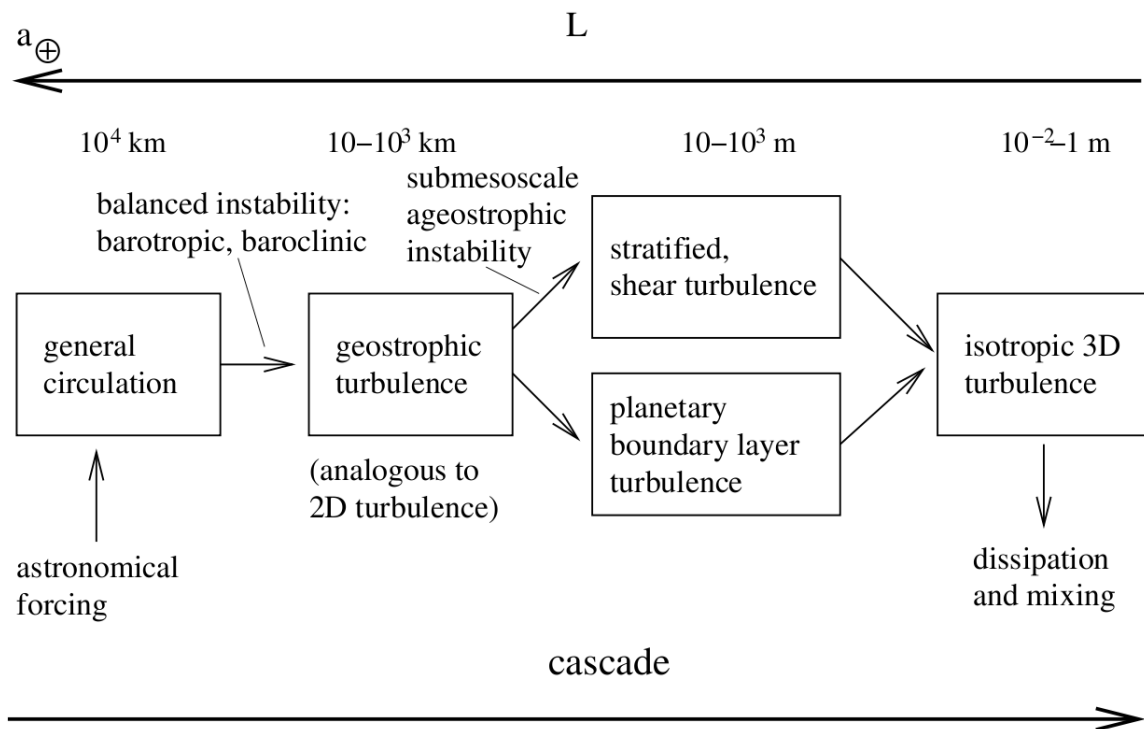
### 1.1 Introduction

Les écoulements turbulents, caractérisés par un grand nombre de Reynolds et dominés par de fortes non-linéarités, présentent un désordre à la fois spatial et temporel. Il incluent une vaste gamme de structures tourbillonnaires (mouvements rotationnels) qui se comportent intrinséquement de manière imprédictible et sont associés à de forts mélanges. Un bref historique de l'évolution des concepts est fourni par le tableau ci-dessous.

16 <sup>eme</sup> - 17 <sup>eme</sup> Léonard de Vinci, Galilée observations	1883-94 Reynolds expérience-quantification	1897 Boussinesq viscosité turbulente
1915-25 Taylor, Prandtl, von Karman longueur de mélange, couche limite	1922 Richardson hiérarchie des tourbillons, cascade	1935 Taylor théorie statistique
1940-48 Kolmogorov, Obukhov, Batchelor Théorie statistique, turbulence homogène&isotrope	1940-1950 von Neuman introduction des premiers ordinateurs	1947 Schubauer, Skramstad transition vers la turb. via instabilités
1970- structures cohérentes	1980- Théorie du chaos	2005 Earth Simulator (4096 <sup>3</sup> )

La turbulence est souvent considérée comme un des grands problèmes ouverts de la physique "classique" contemporaine.<sup>1</sup>

La circulation de l'atmosphère et de l'océan est celle d'un fluide forcé et dissipé, soumis aux contraintes de rotation et stratification, avec une vaste gamme d'échelles de mouvement, qui sont presque toutes très non-linéaires et imprédictibles. Dans ce cours, nous nous intéresserons surtout à la macro-turbulence des échelles spatio-temporelles produites par instabilité barocline dans ces deux fluides et qui sont fortement influencées par la rotation et la stratification.



Ce premier chapitre expose de manière élémentaire et phénoménologique la théorie des zones inertielles ("inertial ranges") de la turbulence tridimensionnelle et bidimensionnelle.

### 1.1.1 Tenseur de Reynolds

Même si l'on ne peut pas prédire les détails des mouvements de chaque structure tourbillonnaire, les propriétés statistiques – comme la moyenne temporelle – d'un écoulement turbulent pourraient être prévisibles et impliquent la décomposition du champ de vitesse en une partie moyenne et fluctuante telle que

$$v = \bar{v} + v'. \quad (1.1)$$

<sup>1</sup>La résolution des équations de Navier-Stokes fait partie de l'un des sept Problèmes du Millénaire proposés par la Fondation Clay. Il s'agit soit de démontrer que les équations de Navier-Stokes sont bien posées, pour toute donnée initiale « suffisamment régulière » (mais arbitrairement loin du repos), soit de démontrer qu'il existe un état initial du fluide tel qu'à un certain instant ultérieur, il « explose en un temps fini ».

Par convention  $\bar{v}$  est la vitesse moyenne et  $v'$  est la fluctuation de vitesse. L'opérateur de moyenne peut être une moyenne temporelle,

$$\bar{v}^T \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau$$

auquel cas  $\bar{v}$  est une fonction des coordonnées d'espace et pas du temps, ou bien peut correspondre à une moyenne temporelle sur une période donnée prédéfinie (par exemple pour distinguer les échelles de temps météorologiques) ou encore à une moyenne d'ensemble :

$$\bar{v}^\alpha \equiv \frac{1}{N} \sum_{N \rightarrow \infty} v^{(\alpha)}(\mathbf{r}, t) \quad \alpha - \text{réalisation}$$

La propriété d'ergodicité correspond à l'identité des moyennes temporelle et d'ensemble pour un processus stationnaire.

$$(\overline{\dots})^T = (\overline{\dots})^\alpha$$

*Propriétés de la moyenne*

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{(\overline{\dots})} = \overline{(\dots)} \\ \text{const } \overline{(\dots)} = \overline{\text{const} \dots} \\ \overline{a \bar{b}} = \bar{a} \bar{b} \\ \overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b} \end{array} \right.$$

La moyenne de la fluctuation est par définition nulle,  $\overline{v'} = 0$ .

$$\bar{v}^T \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(\mathbf{r}, t + \tau) d\tau$$

En remplaçant l'expression (1.1) dans les équations de Navier-Stokes pour la direction en  $x$  par exemple on obtient

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{u} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \nabla \cdot \overline{u' \mathbf{v}'} + \nu \Delta \bar{u} \quad (1.2)$$

où  $\nu$  est la viscosité moléculaire. L'avant-dernier terme du membre de droite peut être réécrit :

$$\nabla \cdot \overline{u' \mathbf{v}'} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{u' u'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{u' v'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{u' w'}.$$

Ces termes, ainsi que ceux obtenus pour les composantes selon  $y$  et  $z$  des équations du mouvement représentent les effets des tourbillons (ou fluctuations turbulentes) sur l'écoulement moyen et sont connus sous le nom de **tensions de Reynolds**. Ils forment un tenseur symétrique

$$\begin{bmatrix} \overline{u^2} & \overline{uv} & \overline{uw} \\ \overline{uv} & \overline{v^2} & \overline{vw} \\ \overline{uw} & \overline{vw} & \overline{w^2} \end{bmatrix}$$

Le problème majeur sous-jacent de la turbulence est de pouvoir représenter l'effet de ce

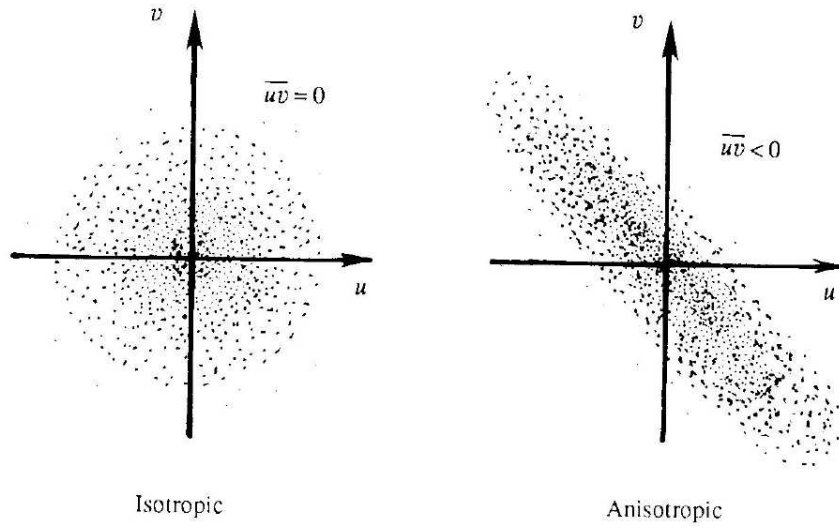


FIG. 1.1 – Notations  $u \longrightarrow u'$ ;  $v \longrightarrow v'$ ;  $U \longrightarrow \bar{u}$

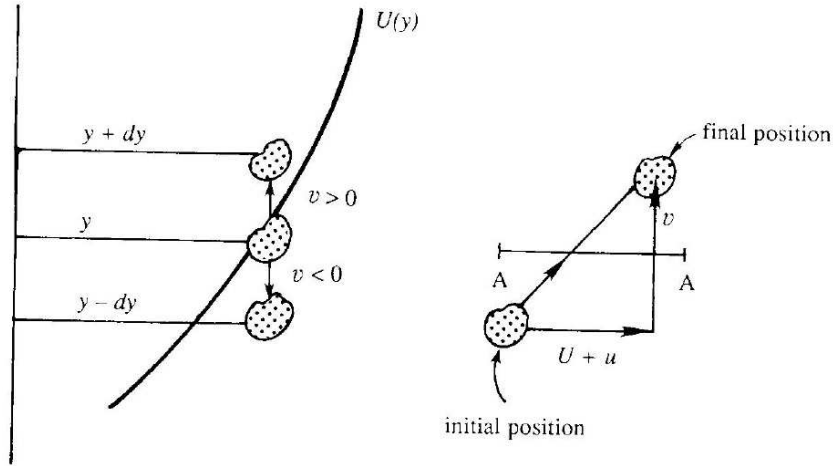


FIG. 1.2 – Notations  $u \longrightarrow u'$ ;  $v \longrightarrow v'$ ;  $U \longrightarrow \bar{u}$

tenseur de Reynolds sur les quantités moyennes de l'écoulement au moyen de "fermetures" ou paramétrisations judicieuses. D'une manière générale les termes du tenseur de Reynolds sont des corrélations d'ordre 2 de quantités fluctuantes du champ de vitesse. On remarque que par exemple

$$\overline{uv} = \bar{u} \bar{v} + \overline{u'v'} \neq \bar{u} \bar{v}.$$

On pourra vérifier qu'en multipliant les équations du mouvement par une des composantes de vitesse, que l'on peut obtenir une équation prédictive pour les corrélations d'ordre 2 du champ de vitesse telles que  $\frac{\partial \overline{uv}}{\partial t}$ , mais que nécessairement ceci fera apparaître dans le membre de droite des corrélations triples des composantes du champ de vitesse et que le problème n'est pas "fermé", c'est-à-dire q'une équation prédictive pour une corrélation des vitesses d'ordre  $n$  va impliquer des corrélations d'ordre  $n+1$  du champ de vitesses. La

plupart des méthodes de fermetures font une hypothèse permettant de relier la corrélation d'ordre  $n + 1$  à celles d'ordre  $n$ . Par exemple on pourra supposer que la corrélation d'ordre 4 est reliée à celles d'ordre 3 et 2 par la relation

$$\overline{uuuu} = \alpha \overline{uu} \overline{uu} + \beta \overline{uuu} \overline{u}$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres explicites, qui dépendent de la loi de probabilité vérifiée par les composantes du champ de vitesse. Par exemple dans le cas d'une distribution gaussienne (ou normale), les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus. Malheureusement, les fluctuations de vitesse des champs turbulents suivent des distributions de probabilité très différentes des lois classiques et les méthodes de fermeture qui ont été inventées dans la littérature ont un domaine d'application limité, que ce soit les méthodes de fermeture dans l'espace physique ou spectral (cf Lesieur).

### 1.1.2 La théorie de Kolmogorov (1941) de la zone inertielle

Le fondement de beaucoup de théories de la turbulence repose sur la théorie spectrale de Kolmogorov. Cette dernière ne constitue pas une fermeture des équations mais donne une prédiction du spectre d'énergie des écoulements turbulents en postulant une relation entre le spectre d'énergie (une corrélation d'ordre 2 des composantes de vitesse) et le flux spectral d'énergie (une corrélation d'ordre 3).

On part d'un écoulement à haut nombre de Reynolds incompressible soumis à un forçage externe  $\mathbf{F}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F} + \nu \nabla^2 \mathbf{v} \quad (1.3)$$

avec

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

Une analyse d'échelle indique que le rapport des termes inertiels et des termes visqueux est donné par le nombre de Reynolds  $Re = VL/\nu$ .

Par exemple, dans le cas océanique,  $U = 0,1 m s^{-1}$ ,  $L = 1000 km$  et  $\nu = 10^{-6} m^2 s^{-1}$ , ce qui donne  $Re = 10^{11}$ . En multipliant (1.3) par  $\mathbf{v}$  et par intégration sur le domaine, on obtient l'équation d'énergie totale  $\hat{E}$  :

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 dV = \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v}) dV = \int (\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \nu \omega^2) dv \quad (1.5)$$

le vecteur vorticité étant défini par  $\omega \equiv \nabla \times \mathbf{v}$ . En 3 dimensions, l'équation de vorticité vérifie

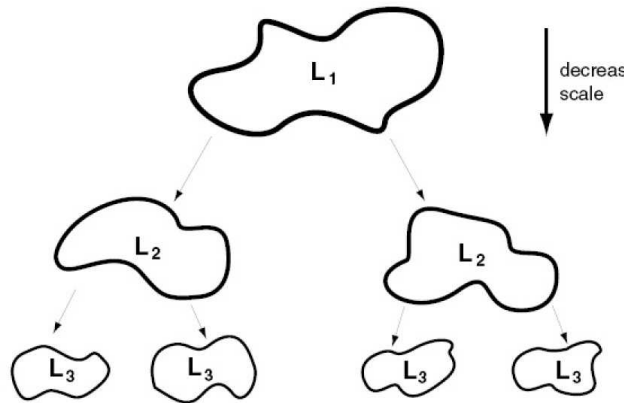
$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega = \omega \cdot [\nabla \mathbf{v}] + \nu \nabla^2 \omega$$

On voit que même pour des écoulements à grand nombre de Reynolds, si l'on néglige les termes visqueux, l'énergie fournie par le forçage ( $\overline{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}} > 0$ ) ne peut pas être dissipée

et qu'elle s'accumulera inexorablement au cours du temps. Une estimation de l'échelle spatiale à laquelle les forces visqueuses deviennent dominantes donne

$$L_\nu \approx \frac{\nu}{U}$$

est de l'ordre du dixième de millimètre pour le cas océanique et ces effets de dissipation visqueuse deviennent prépondérants dans les couches limites visqueuses au voisinage d'une paroi solide comme la couche limite atmosphérique juste au-dessus du sol et dans la couche limite océanique au-dessus du fond. Ces petites échelles spatiales peuvent aussi être générées au sein du fluide par des instabilités de cisaillement. L'image du transfert d'énergie entre les différentes échelles est décrite par la figure ci-dessous qui schématise comment sous l'action d'instabilités hydrodynamiques, les tourbillons les plus gros peuvent se casser en structures moyennes, qui elles-mêmes vont donner naissance à des structures plus petites, qui sont aussi instables, etc.. jusqu' à ce que, de manière ultime, les structures engendrées soient de tailles comparables à  $L_\nu$  et sentent les effets visqueux et que l'énergie injectée par le forçage  $F$  puisse être dissipée. Le postulat principal pour ces écoulements turbulents est donc l'existence d'un flux d'énergie allant des grandes échelles vers les échelles dissipatives.



Dans ce cadre d'hypothèses, il est possible de prédire le spectre d'énergie, c'est-à-dire la quantité d'énergie contenue à une échelle donnée de l'écoulement.

$$u(x, y, z, t) = \sum_{k_x, k_y, k_z} \tilde{u}(k_x, k_y, k_z, t) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)}$$

$$\begin{aligned} \hat{E} = \int E dV &= \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) dV \\ &= \frac{1}{2} \sum (|\tilde{u}|^2 + |\tilde{v}|^2 + |\tilde{w}|^2) d\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$\hat{E} = \int \mathcal{E}(k) dk$$

La densité d'énergie n'est fonction que du nombre d'onde scalaire  $k$ , où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ .

Nous allons supposer que le fluide est forcé à grande échelle et via les interactions non-linéaires des équations du mouvement, l'énergie est transférée vers les petites échelles spatiales où elle est dissipée. L'hypothèse-clé est que si l'échelle du forçage est suffisamment grande devant celle de l'échelle dissipative, il existe une gamme d'échelles intermédiaires entre la grande échelle et l'échelle dissipative où ni le forçage ni la dissipation n'interviennent de manière explicite. Cette hypothèse qui est une hypothèse de localité dans l'espace spectral (de Fourier) suppose que les transferts non-linéaires d'énergie sont suffisamment locaux dans l'espace spectral. Cette gamme d'échelles intermédiaires est connue sous le nom de **zone inertielle**, car les termes inertiels jouent un rôle prépondérant dans les équations du mouvement, alors que ni le forçage ni la dissipation n'interviennent. Si le taux d'injection d'énergie par unité de volume est noté  $\epsilon$ , alors dans un état stationnaire, le flux d'énergie des grandes vers les petites échelles est aussi donné par  $\epsilon$  et le taux de dissipation d'énergie est aussi égal à  $\epsilon$ . *L'hypothèse de localité revient à supposer que le spectre d'énergie n'est fonction que de l'échelle  $k$  et du flux d'énergie  $\epsilon$*

$$\mathcal{E}(k) = f(\epsilon, k, k_0, k_\nu)$$

où  $k_0$  correspond à l'échelle de forçage et  $k_\nu$  à l'échelle de dissipation. On peut introduire un temps de retournement des tourbillons à l'échelle  $k$ , que l'on notera  $\tau(k)$ , comme étant le temps nécessaire à une particule fluide dont la vitesse est  $v_k$  pour parcourir une distance de  $1/k$  :

$$\tau(k) = (k^3 \mathcal{E}(k))^{-1/2} \quad (1.6)$$

L'hypothèse de Kolmogorov est équivalente à dire que le flux d'énergie  $\epsilon$  qui est donné par

$$\epsilon \approx \frac{k \mathcal{E}(k)}{\tau(k)} \quad (1.7)$$

est indépendant de l'échelle et ceci implique que dimensionnellement

$$\boxed{\mathcal{E}(k) = \mathcal{K} \epsilon^{2/3} k^{-5/3}}$$

où  $\mathcal{K}$  est une constante universelle sans dimension : les expériences en soufflerie ainsi que les dernières simulations à 4096<sup>3</sup> sur le Earth Simulator donnent  $\mathcal{K} \approx 1, 6 - 1, 7$ .

### Dimensions et spectre de Kolmogorov

Quantité	Dimension
Nombre d'onde $k$	$1/L$
Energie par unité de masse, $E$	$U^2 = L^2/T^2$
Spectre d'énergie, $\mathcal{E}(k)$	$EL = L^3/T^2$
Flux d'énergie, $\epsilon$	$E/T = L^2/T^3$

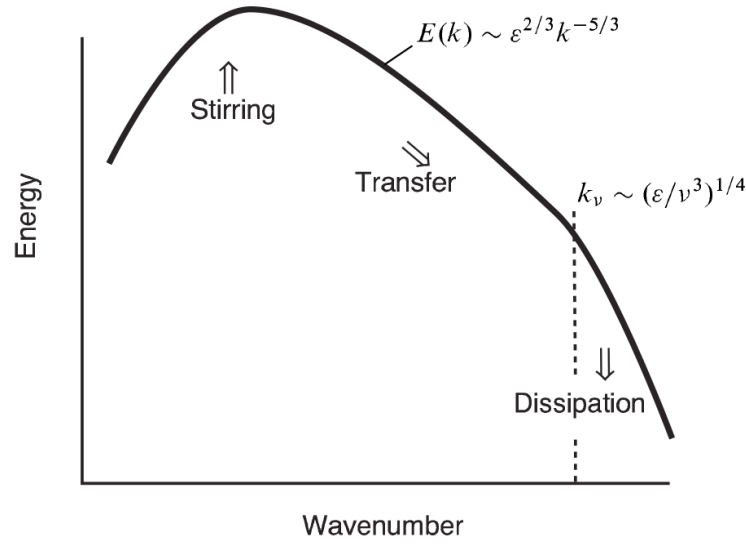


FIG. 1.3 – Schéma du spectre d'énergie en turbulence 3D dans la théorie de Kolmogorov. L'énergie est injectée à un taux  $\epsilon$  ; elle est ensuite transférée vers les petites échelles où elle est dissipée par la viscosité. Il n'y a pas de transfert systématique de l'énergie vers les échelles plus grandes que l'échelle de forçage, c'est pourquoi le spectre décroît aux échelles les plus grandes

### 1.1.3 Echelle visqueuse

L'échelle temporelle dissipative associée au terme de dissipation  $\nu \nabla^2 u$  est donnée par

$$\tau_\nu(k) \approx \frac{1}{k^2 \nu}$$

et décroît avec l'échelle spatiale. Le temps de retournement inertiel pour le spectre de Kolmogorov est donné par

$$\tau_i(k) = \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$$

L'échelle à laquelle la dissipation devient importante est obtenue pour l'égalité des deux échelles pour l'échelle visqueuse

$$k_\nu \approx \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4}$$

et l'échelle de longueur associée est

$$L_\nu \approx \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}$$

$L_\nu$  est parfois appelée l'échelle de Kolmogorov. C'est l'unique quantité qui peut être définie à partir de  $\nu$  et  $\epsilon$  et qui ait les dimensions d'une longueur. Pour les échelles de longueur telles que  $L \gg L_\nu$ , on a  $\tau_i(k) \ll \tau_\nu(k)$  et les effets inertiels prédominent. A l'inverse pour  $L \ll L_\nu$ , on a  $\tau_i(k) \gg \tau_\nu(k)$  et les effets frictionnels prédominent.



Une remarque importante est que pour la limite où  $\nu$  tend vers zéro,  $L_\nu$  tend vers zéro mais la dissipation d'énergie ne s'annule pas ! Elle est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E} = \int \nu \mathbf{v} \cdot \nabla^2 \mathbf{v} dV \quad (1.8)$$

L'échelle à laquelle la dissipation se produit est  $k_\nu$  et la vitesse à cette échelle est  $v_k^2 = \epsilon^{2/3} k^{-2/3}$  et (1.8) est donnée pour un volume unité par

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{E} \approx \nu k_\nu^2 v_{k_\nu}^2 \approx \nu k_\nu^2 \frac{\epsilon^{2/3}}{k_\nu^{2/3}} \approx \epsilon$$

qui est donc indépendante de la viscosité. Ce résultat signifie que lorsque la viscosité tend vers zéro, les échelles dissipatives deviennent de plus en plus petites de manière à préserver la constance du flux d'énergie et du flux dissipatif. La limite de Reynolds infini est donc une limite bien posée. Les équations d'Euler (obtenues en mettant  $\nu = 0$  dans les équations de Navier-Stokes) sont donc une limite singulière des équations de Navier-Stokes.

Un ordre de grandeur pour la couche limite atmosphérique donne  $\epsilon \approx U^3/L \approx 10^{-8} m^2 s^{-3}$  pour  $U \approx 1 cm/s$  et  $L \approx 100m$  à 1 ou 2 ordres de grandeur près. En utilisant (1.1.3), l'échelle de Kolmogorov est de l'ordre du millimètre. On trouve le même ordre de grandeur dans l'océan.

Les mesures expérimentales du spectre d'énergie de turbulence tridimensionnelle tendent à confirmer globalement le bien-fondé de l'hypothèse de Kolmogorov (cf figure ci-dessous).

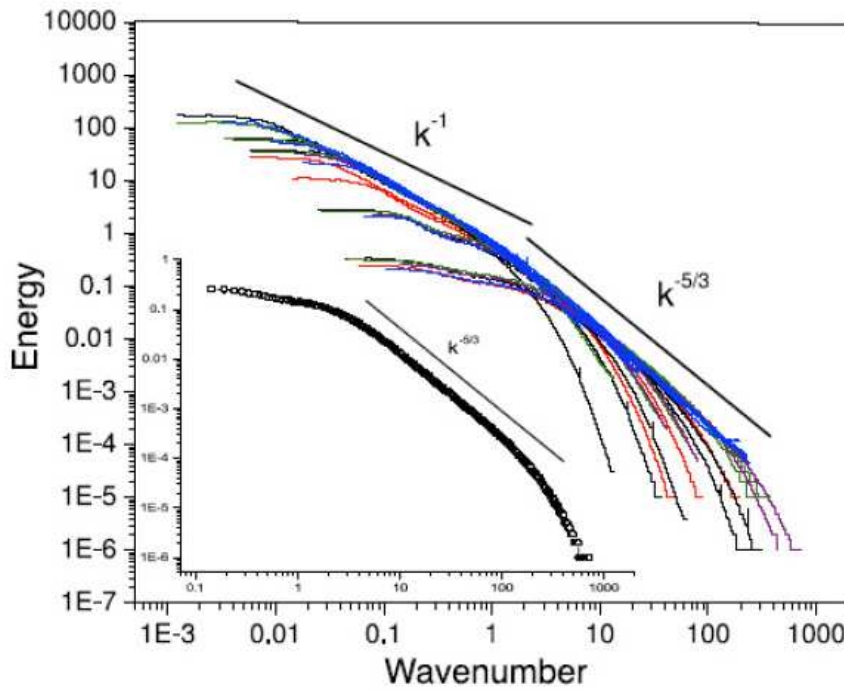


FIG. 1.4 – Spectres d'énergie en turbulence 3D mesurés dans la soufflerie de Princeton Superpipe Facility. Le graphe du haut montre l'ensemble des spectres obtenus pour des expériences couvrant une large gamme de valeurs de  $Re$  (après renormalisation appropriée à chaque cas). Les petites échelles suivent une loi d'échelles en  $-5/3$  alors que les échelles les plus grandes sentent l'influence des parois de la soufflerie et sont moins pentues. Le graphe du bas correspond au spectre obtenu pour une expérience unique à  $Re = 10^6$ .

#### 1.1.4 Intermittence et tubes de vorticité

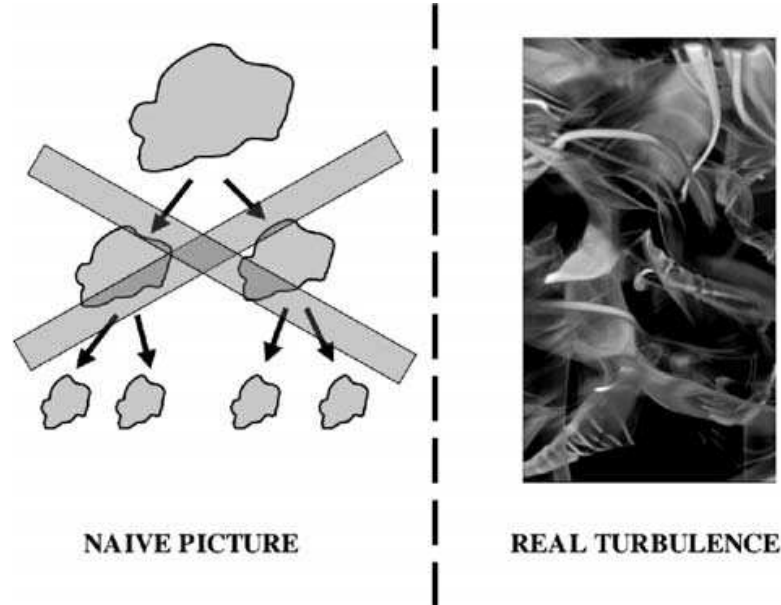
Même si les lois d'échelle sont confirmées pour le spectre d'énergie, les estimations des fonctions de structure d'ordre élevé (supérieur à 2) s'éloignent des prédictions de la théorie de Kolmogorov et il faut prendre en compte les détails de la loi de probabilité des vitesses turbulentes en présence de forte intermittence de l'écoulement turbulent : les tendances de la recherche actuelle en turbulence tridimensionnelle portent sur le traitement de cette **intermittence spatio-temporelle**. Il existe actuellement un grand nombre d'évidences, soit expérimentales, soit dans des simulations numériques à très haute résolution, de cette intermittence qui se manifeste par l'apparition spontanée de tubes de vorticité.

Cette intermittence spatiale découle des propriétés de symétrie des équations de Navier-Stokes (Frisch, 1995) : (invariances par translation en temps, espace, changement de repère Galiléen, réflexion, réversibilité temporelle, groupe des rotations, invariance d'échelle). En particulier cette dernière invariance implique que dans la limite de viscosité nulle, on a

$$(\underline{u}, x, t) \implies (\lambda^h \underline{u}, \lambda^h x, \lambda^{1-h} t), \lambda, h$$

c'est-à-dire que l'écoulement ne possède pas d'échelle intrinsèque, en temps comme en espace, mais qu'à contrario tout est relatif. L'intermittence est reliée à l'invariance d'échelle pour différentes valeurs de l'exposant  $h$  : la vision multi-fractale d'un écoulement turbulent correspond au fait qu'il peut avoir une structure spatio-temporelle donnée à un endroit donné et une structure différente à un autre point de l'écoulement. La théorie de Kolmogorov correspond à un écoulement hypothétique monofractal avec  $h = 1/3$ .

Ceci a conduit à un changement de paradigme dans l'interprétation des cascades turbulentes schématisé par la figure ci-dessous du récent livre de Sagaut et Cambon (2008), insistant sur la formation de gradients intenses de vorticité dans l'espace physique et bien isolés, plutôt que sur une hypothétique cascade hiérarchique entre structures de tailles différente, remplissant tout l'espace.



#### Tube vortex de Burger

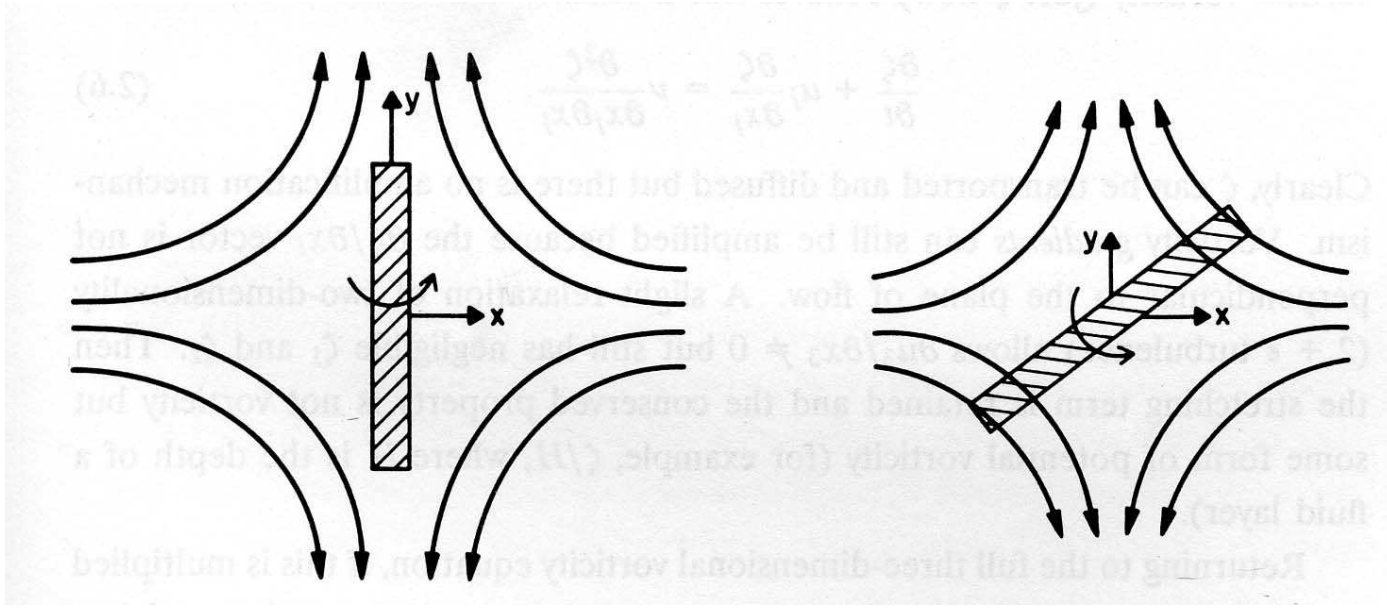
Certains auteurs, au vu de la forte intermittence observée en turbulence 3D, considèrent que les structures cohérentes que sont les tubes de vorticité sont les véritables "atomes" de la turbulence. Une propriété-clé des écoulements 3D est en effet la propriété d'étirement des tubes vortex. L'équation de vorticité tridimensionnelle peut s'écrire

$$\frac{D\zeta_i}{Dt} = \zeta_j S_{ij} + \nu \nabla^2 \zeta_i,$$

où  $S_{ij}$  est le tenseur de déformation de l'écoulement, et correspond à la partie symétrique du tenseur de gradient des vitesses tridimensionnelles.

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Sous l'action de ce tenseur de déformation, les tubes vortex vont subir un étirement et une rotation.



Une solution analytique permet de décrire de telles structures, en présence d'un écoulement de base correspondant à un champ de déformation

$$\underline{U} = (-sr, 0, 2sz)$$

L'équation de la vorticité verticale  $\zeta^z$  pour les perturbations vérifie

$$\frac{D\zeta^z}{Dt} = 2s\zeta^z + \nu\nabla^2\zeta^z$$

Cette équation possède une solution auto-similaire pour le champ de vorticité et de vitesse azimuthale de la forme

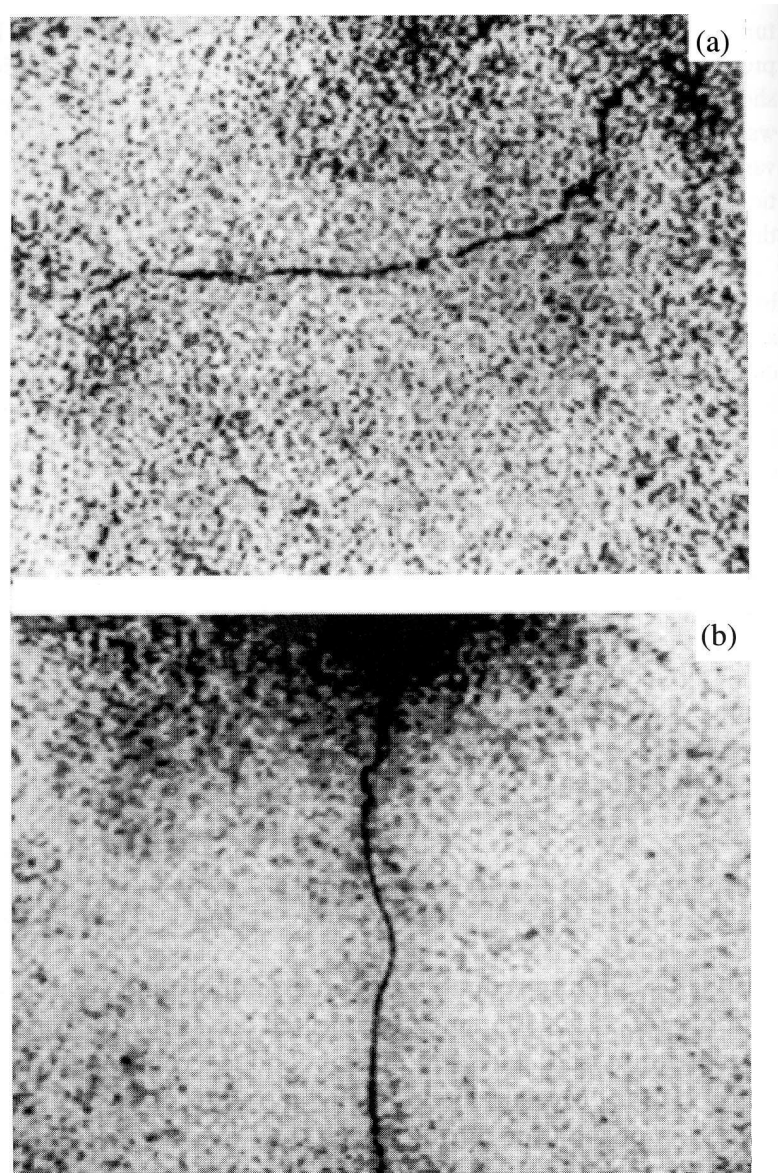
$$\zeta^z(r, t) = \frac{\Gamma}{4\delta^2} e^{-r^2/4\delta^2}$$

$$u^\Phi(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[ 1 - e^{-r^2/4\delta^2} \right]$$

où le rayon du tube vortex  $\delta$  est donné par

$$\delta^2 = \frac{\nu}{s} + \left[ \delta_0^2 - \frac{\nu}{s} \right] e^{-st}$$

On a un tube qui sous l'action d'un étirement exponentiel, va devenir de plus en plus fin et intense jusqu'à ce qu'un équilibre entre la l'étirement et la diffusion visqueuse.



### Références

Bonn, D. Y. Couder, P.H.J. van Dam, and S. Douady, 1993 : From small scales to large scales in 3D turbulence : the effect of diluted polymers. Phys. Rev. E 47, R28-R31.

Davidson, P. A. (2004). Turbulence : An Introduction for Scientists and Engineers. Oxford University Press.

Frisch U., Turbulence : the legacy of A .N. Kolmogorov, Cambridge University Press, 1995, 296 p.

Kolmogorov, AN (1941a). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds number Dokl. Akad. Nauk. SSSR 30 : 9-13.

Lesieur, M., 1997 : Turbulence in Fluids, Kluwer.

Sagaut P., Cambon.C., Homogeneous Turbulence Dynamics, Cambridge University Press, 2008, 481 p.

Vallis G. K. Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, Cambridge University Press, 745 pp.





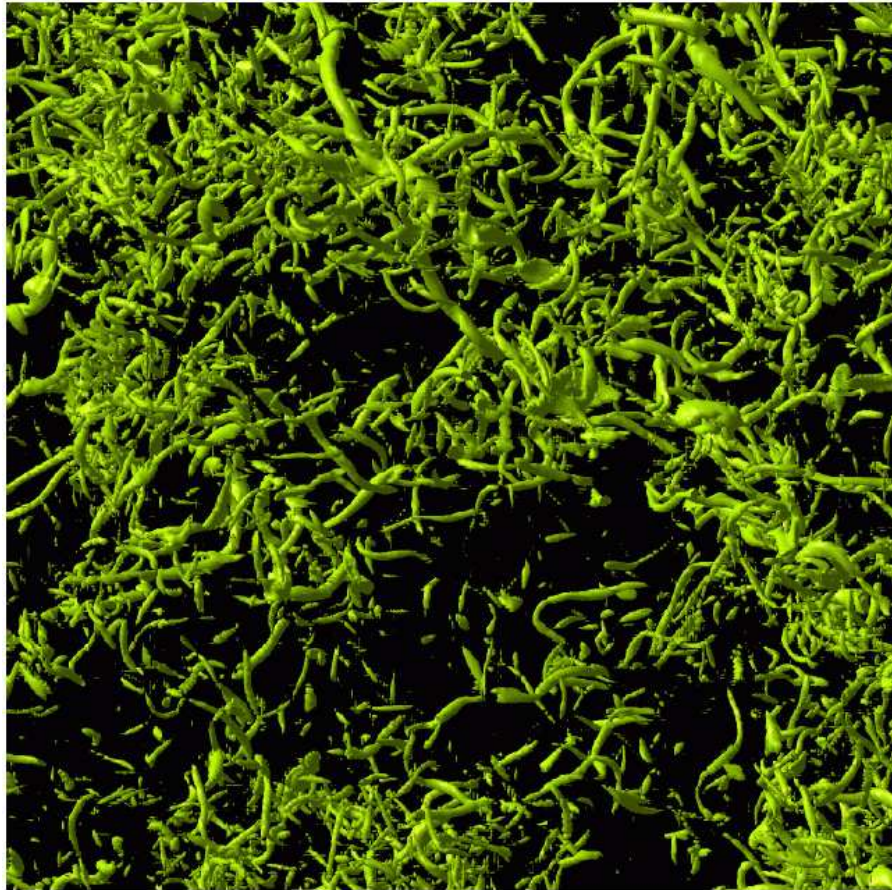


Figure 7: The same isosurfaces as in Fig. 4; a closer view of the inner-square region of Fig. 6. The size of the display domain is  $(748^2 \times 1496)\eta$ .

FIG. 1.7 – Isosurface de vorticité dans un sous-domaine de la simulation sur le Earth Simulator mettant en évidence les tubes de vorticité à petite échelle ; Kaneda (2005)