Dynamique de la vorticité potentielle

(une lecture attentive du livre de G Vallis " Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics", Cambridge University Press, est recommandée en complément de ce cours).

1 Motivations pour l'utilisation de la VP pour les tourbillons; rappels

1.1 Utilité pour les tourbillons

Les observations ont montré que les tourbillons associaient:
- rotation propre (lignes de courant fermées, durabilité des structures, piégeage des masses d'eau),
- anomalie thermohaline (les masses d'eau piégées sont celles de la région d'origine du tourbillon), donc une anomalie locale de stratification,
- et enfin l'effet de la rotation terrestre (d'une part via le vent thermique qui régit la forme des isopycnes, d'autre part, comme nous le verrons, via des mécanismes d'ajustement (cyclo)-géostrophiques lors de la formation des tourbillons).

Nous cherchons donc une quantité, conservée lors du mouvement, qui associe ces trois facteurs. Cette quantité physique sera la vorticité potentielle.

1.2 Rappels

Si on revient aux fluides dans des repères fixes (inertiels), le théorème de Kelvin s'applique aux fluides homogènes, incompressibles, newtoniens, non visqueux, soumis à des forces conservatives, et ce théorème exprime la conservation de la circulation (relative) sur des contours matériels.

Si on considère maintenant un tube de vorticité, c'est à dire un ensemble de lignes de vorticité s'appuyant sur un contour fermé, ce tube subit un déplacement matériel et dans les conditions du théorème de Kelvin, reste un tube de vorticité. Comme la vorticité relative (le rotationnel de la vitesse) est un champ solénoidal, le flux entrant par la base du tube est égal au flux sortant par le sommet du tube.

Considérons pour simplifier un tube infinitésimal de hauteur h de section dS et de vorticité relative (disons, verticale) ω, alors la conservation du flux (égal en entrée-sortie) ωdS est assurée au cours du mouvement. Comme le fluide est homogène et incompressible, le volume du tube matériel hdS est conservé au cours du mouvement. Donc ω/h est conservé. Nous verrons que ceci se généralise aux fluides en milieux tournants sous la forme de la conservation de $(\omega + f)/h$ qui est la vorticité potentielle pour un fluide en couches minces homogènes.

1.3 Surfaces matérielles dans l'atmosphère et dans l'océan

En fait, nous venons de voir qu'il faut pouvoir définir des contours (ou surfaces) matériel(le)s pour assurer la conservation de la vorticité potentielle pendant le mouvement. Quelles sont ces surfaces matérielles ?

Dans l'atmosphère, la température potentielle est définie par

$$\theta = T(P_R/p)^\kappa$$

avec P_R la pression de référence, et $\kappa = R/C_p$. L'entropie est définie par

$$\eta = C_p Log(\theta)$$

et

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{T}\frac{dQ}{dt}$$

où Q est le flux de chaleur recu par le fluide. Dans une évolution adiabatique, $d\eta/dt = 0$ et donc $d\theta/dt = 0$. Les surfaces iso-température potentielle sont donc des surfaces matérielles (idem dans l'océan).

Dans l'océan, on peut utiliser la quasi-incompressibilité de l'eau $div(\vec{V}) \sim 0$ pour utiliser la densité ρ comme traceur matériel, puisqu'alors $d\rho/dt \sim 0$. Attention, car ρ est reliée à T et S (et aussi à p) via l'équation d'état, et T et S sont gouvernées par des équations d'advection-diffusion. Donc $d\rho/dt$ n'est pas identiquement nul (par exemple dans l'océan, soit en présence de diffusion intense, soit par grande profondeur).
Cependant, en l'absence de diffusion, et dans un fluide incompressible, les surfaces isopycnales sont considérées comme matérielles.

2 Vorticité absolue et vorticité potentielle

Nous allons construire ici la quantité "vorticité potentielle" à partir des équations dynamiques sur la planète tournante.

2.1 Equation de la vorticité absolue

Nous partons des équations de la quantité de mouvement (QDM) 3D sous la forme

$$\partial_t \vec{v} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{\nabla}(\Phi - \frac{1}{2}|\vec{v}|^2) + \vec{F}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse 3D, $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ est la vorticité (relative) 3D, Ω est le taux de rotation angulaire de la Terre autour des pôles, ρ est la densité locale (sans approximation pour l'instant), p est la pression locale, Φ est le potentiel des forces conservatives (la gravité par exemple, avec $\Phi = gz$), et $\vec{F}$ l'ensemble des forces non conservatives (les forces de friction par exemple).

On prend le rotationnel de ces équations et on utilise l'identité vectorielle

$$\vec{\nabla} \wedge ([2\vec{\Omega} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}) = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega})\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) - \vec{v}\vec{\nabla} \cdot (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) - (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \vec{\nabla}\vec{v}$$

Le troisième terme du membre de droite est nul car la vorticité est solénoidale et la rotation de la Terre est constante. On a donc

$$\partial_t(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \vec{\nabla} \wedge (\frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}p) - (2\vec{\Omega} + \vec{\omega})\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Avec

$$\vec{\nabla} \wedge (\frac{-1}{\rho}\vec{\nabla}p) = \frac{\vec{\nabla}\rho \wedge \vec{\nabla}p}{\rho^2}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = -\frac{\partial_t \rho + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\rho}{\rho}$$

et

$$\frac{d}{dt} = \partial_t + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

(attention advection 3D!), on obtient l'équation de la vorticité absolue

$$\frac{d(2\vec{\Omega} + \vec{\omega})}{dt} - \frac{(2\vec{\Omega} + \vec{\omega})}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \vec{\nabla}\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\rho \wedge \vec{\nabla}p}{\rho^2} + \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

ou encore (forme 2)

$$\frac{d}{dt}\ \frac{(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})}{\rho} = \frac{(2\vec{\Omega}+\vec{\omega})}{\rho}\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\rho\wedge\vec{\nabla}p}{\rho^3}\frac{\vec{\nabla}\wedge\vec{F}}{\rho}$$

Nous garderons plutôt la première forme de l'équation de la vorticité absolue.

En conséquence, la vorticité absolue est advectée matériellement et peut être déformée par:
- les changements de masse volumique;
- le tenseur du gradient des vitesses (étirement, cisaillement);
- le terme barocline (inclinaison des isopycnes sur les isobares);
- le rotationnel des forces non conservatives.

On note $\vec{\omega}_a = 2\vec{\Omega}+\vec{\omega}$ et $\tilde{\vec{\omega}}_a = [2\vec{\Omega}+\vec{\omega}]/\rho$.

2.2 Equation de la vorticité potentielle

Considérons maintenant un scalaire χ (qui peut être la température potentielle ou la densité), conservé matériellement. On part d'abord de la forme la plus générale de l'équation de χ avec des puits et des sources

$$\frac{d\chi}{dt} = S_\chi - P_\chi$$

dont on peut prendre le gradient, multiplié par $\tilde{\vec{\omega}}_a$:

$$\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}\frac{d\chi}{dt} = \tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\chi + (\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}\vec{v})\vec{\nabla}\chi$$

soit encore

$$\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\frac{d}{dt}\vec{\nabla}\chi = \tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}(S_\chi - P_\chi) - (\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}\vec{v})\vec{\nabla}\chi$$

Par ailleurs

$$\vec{\nabla}\chi\cdot\frac{d}{dt}\tilde{\vec{\omega}}_a = \vec{\nabla}\chi\cdot[\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}\vec{v} + \frac{\vec{\nabla}\rho\wedge\vec{\nabla}p}{\rho^3} + \frac{\vec{\nabla}\wedge\vec{F}}{\rho}]$$

En sommant, on obtient

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}\chi] = \tilde{\vec{\omega}}_a\cdot\vec{\nabla}(S_\chi - P_\chi) + \vec{\nabla}\chi\cdot\frac{\vec{\nabla}\rho\wedge\vec{\nabla}p}{\rho^3} + \vec{\nabla}\chi\cdot\frac{\vec{\nabla}\wedge\vec{F}}{\rho}$$

qui est la forme la plus générale de l'équation de la vorticité potentielle, incluant forcages mécaniques et thermohalins.
On peut considérablement simplifier cette équation si on suppose par exemple que $\chi = \rho$ et qu'il n'y a pas de forcage (en particulier dans la masse du fluide). On a alors

$$\frac{d}{dt}[\tilde{\vec{\omega}}_a \cdot \vec{\nabla}\rho] = 0$$

Noter que dans l'atmosphère on prend la température potentielle et non la densité, car $\theta(p, \rho)$.

2.3 Cas particuliers

2.3.1 Equations de Boussinesq

Dans ce cas, le modèle est toujours non hydrostatique, mais le fluide est incompressible et on néglige les variations de ρ dans la quantité de mouvement horizontale. Le terme $(1/\rho)\nabla p$ est remplacé par $(1/\rho_0)\nabla p$. On définit alors la flottabilité par

$$b = -g\rho/\rho_0$$

et on définit une vorticité potentielle par

$$Q = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \vec{\nabla} b$$

De plus, souvent on néglige $f^* = 2\Omega cos(\theta)$ par rapport à $f = 2\Omega sin(\theta)$ et on a alors

$$Q = (\partial_x v - \partial_y u)\partial_z b + (\partial_y w - \partial_z v)\partial_x b + (\partial_z u - \partial_x w)\partial_y b + f\partial_z b$$

2.3.2 Equations primitives

Si de plus on fait l'approximation hydrostatique, alors les composantes en w de la vorticité disparaissent car l'accélération verticale est négligée. La vorticité potentielle devient

$$Q = (\partial_x v - \partial_y u)\partial_z b - \partial_z v\partial_x b + \partial_z u\partial_y b + f\partial_z b$$

2.4 Approximation quasi-géostrophique

L'approximation quasi-géostrophique repose sur un certain nombre d'approximations, et en particulier que le mouvement soit presque géostrophique (du plan f) et donc que la vitesse soit presque (mais non exactement) non divergente horizontalement. Ceci impose que les paramètres adimensionnels suivants soient contraints:

$$Ro = \frac{U}{f_0 L} \ll 1, \quad Bu = \frac{N^2 H^2}{f_0^2 L^2} \approx 1, R_\beta = \frac{\beta L^2}{U} \ll 1$$

où L est l'échelle horizontale, U l'échelle de vitesse horizontale, N la fréquence de Brunt Vaisala, et H l'échelle de hauteur du mouvement. On a aussi fait l'approximation du plan beta $f = f_0 + \beta y$. Enfin, l'échelle de la topographie H_b doit être petite par rapport à la profondeur totale du fluide H.
On peut alors montrer que la densité et la pression peuvent se séparer en 2 parties, l'une hydrostatique de l'océan au repos (dépendant seulement de z) et l'autre, hydrostatique aussi, mais associée au mouvement (et donc dépendant de x, y, z, t).

$$p = \bar{p}(z) + (Ro/Bu)\ p'(x, y, z, t), \quad \rho = \bar{\rho}(z) + (Ro/Bu)\ \rho'(x, y, z, t)$$

avec

$$\frac{d\bar{p}}{dz} = -g\bar{\rho}, \quad \partial_z p' = -g\rho'$$

On note alors la fonction de courant $\psi = p'/(\rho_0 f_0)$ et la vitesse a une partie géostrophique (horizontale) et une faible composante agéostrophique (3D):

$$\vec{v} = \vec{k} \wedge \vec{\nabla}\psi \ + \ Ro\ \vec{v}_{ag}$$

(la vorticité relative a également une partie géostrophique qui est le laplacien de la fonction de courant, et une partie agéostrophique). Enfin, on peut montrer que les termes dominants dans la vorticité potentielle sont

$$Q = f\frac{d\bar{b}}{dz} + f\partial_z b' + \nabla^2\psi\frac{d\bar{b}}{dz}$$

le premier terme étant d'ordre 0 et les deux suivants d'ordre Ro.
Si on considère l'advection de la vorticité potentielle, les termes d'ordre Ro sont advectés uniquement par la vitesse horizontale géostrophique; seul le premier terme est advectée par la vitesse géostrophique, et en l'occurence, la

vitesse verticale.
Cette vitesse verticale est extraite de l'équation de la flottabilité, elle-même développée en *Ro*.

$$\frac{d_g b'}{dt} + w\frac{d\bar{b}}{dz} = 0$$

où le premier terme est une advection géostrophique $\partial_t + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla}$.

En écrivant que $d\bar{b}/dz = N^2$ et que $b' = f_0 \partial_z \psi$, on obtient après un peu d'algèbre

$$\frac{d_g Q_{QG}}{dt} = 0, \quad Q_{QG} = \nabla^2\psi + \partial_z(\frac{f_0^2}{N^2}\partial_z\psi) + f$$

On voit que Q_{QG} est un opérateur linéaire appliqué à ψ, qui est inversible si les conditions aux limites sur le volume sont données.
C'est le *principe d'inversibilité* de la vorticité potentielle QG.
Généralement on se donne des conditions aux limites horizontales soit à l'infini (ψ tendant vers zéro), soit à des frontières finies (conditions aux limites ouvertes ou fermées).
Pour la verticale, il est usuel de spécifier des conditions aux limites d'anomalie nulle de flottabilité en surface et au fond: $\partial_z\psi = 0,\ z = 0, -H$. On diagonalise alors l'opérateur de stratification avec ces conditions aux limites

$$\partial_z(\frac{f_0^2}{N^2}\partial_z F_n) = -\lambda_n^2 F_n,\ z \in [-H, 0]$$

$$\partial_z F_n = 0,\ z = 0, -H$$

F_n est alors le n-ième mode vertical et $R_n = 1/\lambda_n$ est le rayon de déformation associé (le mode 0 est barotrope, les suivants sont baroclines).
On peut traiter le cas d'anomalies non nulles de flottabilité de surface ou de fond en ajoutant ces conditions à une vorticité potentielle intérieure nulle (c'est le principe de superposition dû à la linéarité de la relation $Q - \psi$). On appelle ce dernier problème, le modèle SQG (quasi-géostrophie de surface).

3 Modèles isopycnaux et à couches

La dérivation des modèles isopycnaux ou à couches n'est pas refaite ici; elle se trouve en particulier dans le rapport SHOM 03/95 de Remy Baraille et Nicolas Filatoff, dont les pages concernées seront distribuées.

Les équations du modèle isopycnal sont (les dérivées horizontales étant prises sur les isopycnes):

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u - fv = -\partial_x M + F_x$$

$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v + fu = -\partial_y M + F_y$$

où $M = (p/\rho) + gz$ est le potentiel de Montgomery, et F représente les termes de forcage et de dissipation, et avec $h = (-1/g)\partial_\rho p$ la séparation verticale des isopycnes, on a

$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = S$$

où S est la diffusion diapycnale de masse. La relation hydrostatique s'écrit $\partial_\rho M = p\partial_\rho(1/\rho)$.

Dans le modèle shallow-water en couches, la stratification continue est remplacée par des couches discrètes, de densités constantes (croissantes vers le bas), et d'épaisseurs finies. Pour la couche j on a

$$\partial_t u_j + u_j\partial_x u_j + v_j\partial_y u_j - fv_j = -\partial_x p_j + F_{jx}$$

$$\partial_t v_j + u_j\partial_x v_j + v_j\partial_y v_j + fu_j = -\partial_y p_j + F_{jy}$$

$$\partial_t h_j + \partial_x(h_j u_j) + \partial_y(h_j v_j) = S_j$$

Avec la vorticité relative $\omega = \partial_x v - \partial_y u$, la vorticité potentielle s'écrit

$$Q = \frac{\omega + f}{h}$$

(idem avec les indices j en couches).

Notons tout de suite qu'il existe une vorticité potentielle pour le fluide au repos:

$$Q = \frac{f}{H}$$

Elle correspond dans le modèle à stratification continue à $fd\bar{b}/dz$. La partie de la vorticité potentielle liée au mouvement (appelée aussi anomalie dynamique, voir Morel and McWilliams, 2001, J. Phys. Oceanogr., 31) est donc la différence

$$\delta Q = \frac{\omega + f}{h} - \frac{f}{H}$$

Ici, une précaution s'impose: sur le plan f ($f = f_0$), le deuxième terme est une constante et la conservation lagrangienne de Q implique celle de δQ. Sur le plan beta, cela n'est plus vrai et la quantité conservée est

$$\delta Q = \frac{\omega + f}{h} - \frac{f_0}{H}$$

qui conserve le terme βy (vorticité de background) et qui n'est donc pas seulement une anomalie dynamique. Dans ce cas

$$\delta Q = \frac{1}{hH}[H(\omega + \beta y) - f_0(h - H)]$$

ou encore

$$q = H\delta Q = \frac{1}{h}[H(\omega + \beta y) - f_0(h - H)]$$

On écrit $\Delta h = h - H$ ci après. Notons que q, sous les hypothèses supplémentaires d'équilibre géostrophique et de faible déviations verticales des isopycnes, correspond à la vorticité QG. On a alors $h \sim H$ et

$$q = \omega + \beta y - f_0 \Delta h / H$$

avec ω et h s'exprimant en fonction des ψ en couches (voir Pedlosky, 1979, "Geophysical Fluid Dynamics").
De facon plus générale, q contient les 3 parties usuelles de la vorticité potentielle, qui peuvent s'échanger dans toute évolution qui conserve néanmoins la vorticité potentielle de facon lagrangienne: la vorticité relative ω, la variation de vorticité planétaire βy et le vortex stretching $f_0 \Delta h / H$. Pour la circulation générale dûe au vent, le deuxième terme compense le troisième. Pour un tourbillon dérivant sur le plan beta, les premier et troisième termes compensent le second. Pour l'ajustement géostrophique, le premier terme compense le troisième.

4 Les propriétés et théorèmes de la vorticité potentielle

Trois propriétés de la vorticité potentielle ont déjà été vues:
- la conservation lagrangienne en l'absence de forcage et de dissipation,
- l'inversibilité dans le modèle QG,

- et l'échange possible entre les 3 composantes (relative, planétaire et stretching).
Nous allons voir ici dans un cadre simple (le modèle isopycnal), le théorème d'imperméabilité de Haynes et McIntyre (1987, J. Atmos. Sci., 44). Nous suivons ici la démonstration donnée par Morel et McWilliams, 2001, JPO 31.

En prenant le rotationnel des équations de la quantité de mouvement horizontale dans le modèle isopycnal, nous avons

$$\partial_t(hQ) = -\vec{\nabla} \cdot (hQ\vec{v}) + \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{F}$$

Nous notons ce dernier terme $rot(F)$ par simplicité.
En intégrant la relation ci dessus sur un domaine D de frontière dD avec des conditions de flux normal nul ou des conditions périodiques (par exemple avec des murs verticaux), nous avons

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_D QdV = \frac{d}{dt}\int\int\int_D (\frac{f}{H} + \frac{\delta Q}{H})dV = \int\int_{dD} \vec{F}d\vec{l}$$

en gardant la forme la plus générale de δQ.
D'où le résultat

$$\frac{d}{dt}\int\int\int_D \delta QdV = -f\frac{dV}{dt} + H\int\int_{dD} \vec{F}d\vec{l}$$

Donc l'anomalie volumique de vorticité potentielle (dans une couche ou entre 2 isopycnes) ne peut changer que par gain ou perte de masse dans la couche, ou par friction sur les bords. En l'absence de friction/viscosité, et de mélange diapycnal, cette anomalie est conservée et les isopycnes sont considérées comme "imperméables" pour l'anomalie volumique de vorticité potentielle (noter qu'il ne s'agit plus là d'un problème local mais d'une quantité intégrée).
Pour conclure sur ce point, Morel et McWilliams donnent des évaluations de la variation de cette anomalie volumique en cas de mélange diapycnal dans un courant de bord

$$\delta Q \sim fK_\rho \delta t/h^2$$

où K_ρ est le coefficient de mélange diapycnal, ce qui donne une durée de quelques jours pour le développement d'une anomalie de vorticité potentielle de l'ordre de $0.1f$ par mélange diapycnal. Ces auteurs obtiennent un temps similaire dans le cas d'un mélange isopycnal.