

Chapitre 4

Turbulence stratifiée

4.1 Stabilité d'un écoulement stratifié cisaillé

4.1.1 Instabilité de Kelvin-Helmholtz

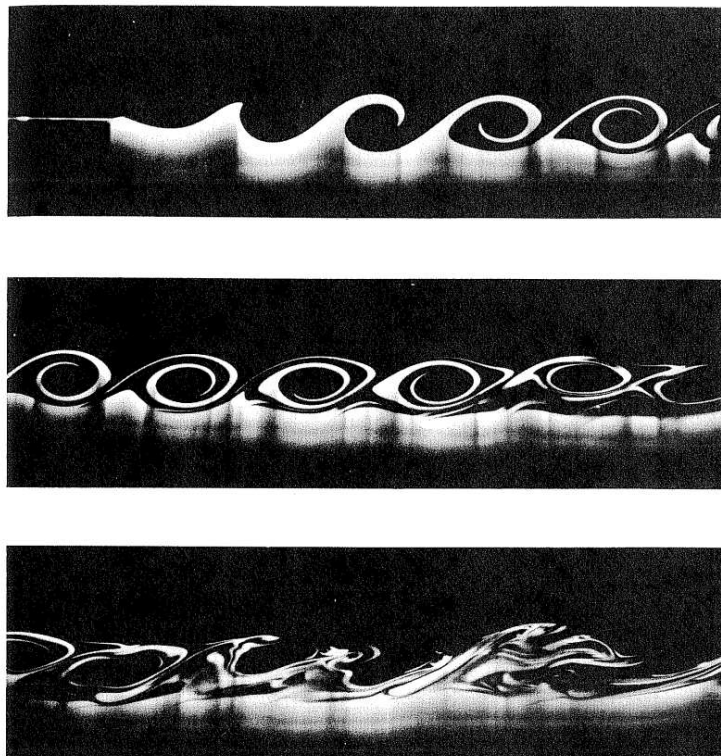


FIG. 4.1 – Développement d'une instabilité de Kelvin-Helmholtz en laboratoire dans un milieu à deux couches de densité et vitesse différentes.

4.1.2 Instabilité dans un milieu stratifié continu

On considère un écoulement non visqueux, bidimensionnel dans le plan vertical (x, z) , dont l'état de base est $[u = \bar{u}(z), w = 0]$ dans un milieu stablement stratifié $[\rho = \bar{\rho}(z)]$, on perturbe l'écoulement $(u = \bar{u} + u', w = w', p = \bar{p} + p', \rho = \bar{\rho} + \rho')$. Une linéarisation des équations du mouvement conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{u}}{dz} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\rho' g}{\rho_0} \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w' \frac{d\bar{\rho}}{dz} &= 0 \end{aligned}$$

L'écoulement étant 2D, les perturbations dérivent d'une fonction de courant $u' = +\partial\psi/\partial z$, $w' = -\partial\psi/\partial x$, la fréquence de Brunt-Vaisala $N^2 = -(g/\rho_0)(d\bar{\rho}/dz)$ est supposée constante. On recherche des perturbations de forme sinusoïdale dans l'horizontale en $\exp[i l(x - ct)]$, on peut ramener le problème à une équation en ψ ,

$$(\bar{u} - c) \left(\frac{d^2\psi}{dz^2} - l^2\psi \right) + \left(\frac{N^2}{\bar{u} - c} - \frac{d^2\bar{u}}{dz^2} \right) \psi = 0$$

C'est l'équation de Taylor-Goldstein qui régit la structure verticale de la perturbation. Cette équation présente une analogie formelle avec l'équation de Rayleigh pour l'instabilité de cisaillement barotrope, si $N = 0$. La même démarche pour rechercher la condition d'instabilité peut être appliquée. Les conditions aux limites sont

$$\psi(0) = \psi(H) = 0$$

ceci définit un problème aux valeurs propres, et on peut ainsi trouver la condition d'instabilité qui fait intervenir le nombre de Richardson

$$Ri = \frac{N^2}{(d\bar{u}/dz)^2}$$

et la condition suffisante de stabilité est que

$$Ri > \frac{1}{4}$$

partout dans l'écoulement. A l'inverse, la condition $Ri < 1/4$ quelque part dans l'écoulement est une condition nécessaire d'instabilité. La signification physique est que Ri est le rapport entre les énergies potentielle et cinétique : le numérateur est associé à la barrière d'énergie potentielle que le mélange doit vaincre, et le dénominateur est l'énergie cinétique dont dispose l'écoulement cisaillé pour le mélange.

Note : par la suite ; les notations pour le champ de vitesse distinguent $\mathbf{u}_h = (u, v)$ la composante horizontale de la vitesse de $u_z = w$ la composante verticale.

4.2 Diffusion turbulente de Cox-Osborn

Cette problématique a été initiée par un papier de Munk(1966), établissant une estimation grossière de la diffusivité turbulente dans l'océan profond à partir de l'équilibre

$$\bar{w} \frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = \kappa_e \frac{\partial^2 \bar{b}}{\partial z^2}$$

où la flottabilité est définie par $b \equiv -(g/\rho_0)\rho$ et où il a supposé \bar{w} constant. La solution \bar{b} est de la forme $\propto \exp(z/H)$ avec $H = \kappa_e/\bar{w}$. En fait, la distribution de la densité moyenne a effectivement une forme exponentielle en fonction de la profondeur, avec $H \approx 800$ m dans l'océan mondial. Munk a estimé \bar{w} en supposant un transport de 25-30 Sverdrups pour la circulation thermohaline globale et en a déduit $\bar{w} \approx 1\text{cm/jour}$, donnant $\kappa_e \approx 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, ce qui est trois ordres de grandeur plus grand que la valeur moléculaire de la diffusivité. Ce résultat a suscité pendant plusieurs décades des mesures de vitesses turbulentes et de fluctuations de température à très petite échelle (appelée "microstructure"), juste plus grandes que l'échelle de Kolmogorov $\eta = \nu^{3/4}/\epsilon_K^{1/4}$ (supérieure au cm), afin d'établir des estimations des taux de dissipation d'énergie cinétique ϵ_K et de dissipation de variance de température ϵ_P .

$$\epsilon_K = \nu \overline{(\nabla \mathbf{u})^2}, \quad \text{et} \quad \epsilon_P = 2\kappa \overline{(\nabla b)^2}$$

où les moyennes ont été prises aux échelles de longueur plus grandes que η .

On suppose que l'écoulement de grande échelle est cisailé uniquement dans la direction verticale. En considérant l'équilibre local des équations de l'énergie cinétique turbulente $E_K = \frac{1}{2} \overline{(\mathbf{u}')^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_K}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla E_K &= -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{F} - \overline{\mathbf{u}'_h w'} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_h}{\partial z} + \bar{b}' w' - \epsilon_K \\ \mathbf{F} &= \overline{\mathbf{u}' p'} + \overline{\mathbf{u}' E_K} - \nu \nabla E_K \end{aligned}$$

et de la variance des fluctuations de flottabilité $E_P = \frac{1}{2} \overline{(b')^2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_P}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla E_P &= -\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{G} - \bar{b}' w' N^2 - \frac{1}{2} \epsilon_P \\ \mathbf{G} &= \overline{\mathbf{u}' E_P} - \nu \nabla E_P \end{aligned}$$

et en négligeant tous les termes de tendance temporelle, d'advection et de flux, et en ne prenant en compte que les termes de production par le travail des termes du tenseur de Reynolds associées au cisaillement vertical de courant et des termes analogues de génération de variance de fluctuations comme équilibrés par les puits des taux de dissipation, Osborne et Cox (1972) ont montré que

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{u}'_h w'} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_h}{\partial z} &= \bar{b}' w' - \epsilon_K \\ \bar{b}' w' N^2 &= -\frac{1}{2} \epsilon_P. \end{aligned}$$

En introduisant dans ces équations, les définitions de la viscosité turbulente et de la diffusivité turbulente

$$\nu_e \equiv \overline{\mathbf{u}'_h \mathbf{w}'} / \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_h}{\partial z} \quad \text{et} \quad \kappa_e \equiv -\overline{b' \mathbf{w}'} / N^2,$$

on obtient une paire d'équations couplées pour les viscosité et diffusivité turbulentes en fonction des gradients de plus grande échelle et des taux de dissipation

$$\begin{aligned} \nu_e \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_h}{\partial z} \right)^2 &= \frac{\epsilon_P}{2N^2} + \epsilon_K \\ \kappa_e N^4 &= \frac{1}{2} \epsilon_P. \end{aligned}$$

Ainsi, dans un fluide stablement stratifié, la génération de la turbulence est entièrement due à la production par le cisaillement, et elle est équilibrée par la somme des taux de dissipation de l'énergie cinétique et de la variance de la flottabilité. Habituellement $\epsilon_K < \epsilon_P / N^2$. Une hypothèse fréquente qui est confirmée par un grand nombre de mesures in situ, est que le nombre de Richardson de flux,

$$\begin{aligned} Ri_f &\equiv \frac{\overline{b' \mathbf{w}'} / \overline{\mathbf{u}'_h \mathbf{w}'}}{\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_h}{\partial z}} \cdot \frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_h}{\partial z} \\ &= \kappa_e N^2 / \nu_e \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}}_h}{\partial z} \right)^2 \\ &= \epsilon_P / 2N^2 / (\epsilon_P / 2N^2 + \epsilon_K), \end{aligned}$$

a une valeur d'environ 0.15.

En introduisant **l'efficacité du mélange**

$$\Gamma = Ri_f / (1 - Ri_f) \approx 0.2$$

il s'en suit que

$$\frac{\epsilon_P}{2} \approx \Gamma \epsilon_K \quad \text{et} \quad \kappa_e \approx \Gamma \epsilon_K / N^2$$

Si on fait l'hypothèse supplémentaire qu'à ces échelles, l'écoulement est statistiquement isotrope au voisinage de l'échelle de Kolmogorov η , les taux de dissipation d'énergie cinétique et de variance de flottabilité peuvent être estimés par

$$\epsilon_K = \frac{15}{4} \nu \left(\frac{\partial \overline{\mathbf{u}'_h}}{\partial z} \right)^2 \quad \text{et} \quad \epsilon_P = 6\kappa \left(\frac{\partial \overline{T'}}{\partial z} \right)^2$$

On obtient ainsi une procédure pour estimer les taux de dissipation ϵ_K et ϵ_P à partir des profils de température (ou flottabilité b) et de vitesse horizontale \mathbf{u}_h . Il faut faire attention que ces formules se basent sur des hypothèse de production/dissipation locales, qui semblent bien vérifiées pour la turbulence d'écoulements cisailés, mais qui demeurent incertaines pour les milieux fortement anisotropes ou de petit nombre de Froude horizontal. Les valeurs mesurées expérimentalement dans l'océan profond donne pour $\epsilon_K = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}^{-3}$ et $\kappa_e = 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$, c'est-à-dire inférieure d'un ordre de grandeur à la valeur calculée par Munk. En fait le mélange diapycnal est très loin d'être uniforme dans l'océan et tendrait plutôt à se concentrer dans des "hot spots", tels que le voisinage de topographie rugueuse de fond, ou autre alternative, au voisinage immédiat de structures de méso-échelle énergétiques.

4.3 Turbulence stablement stratifiée

4.3.1 Observations géophysiques du "layering"

Les écoulements fortement et stablement stratifiés sont communs dans l'océan et l'atmosphère et une de leurs propriétés caractéristiques est l'ubiquité de la présence de couches quasi-horizontales, phénomène souvent appelé "layering" dans la littérature.

Il est observé dans la troposphère libre à l'altitude correspondant aux vols d'avions commerciaux dont les données ont servi au spectre de Gage & Nastrom et 15% de l'atmosphère serait occupé par des couches quasi-horizontales, qui seraient dues à des intrusions d'air stratosphériques (Newell et al., 1999).

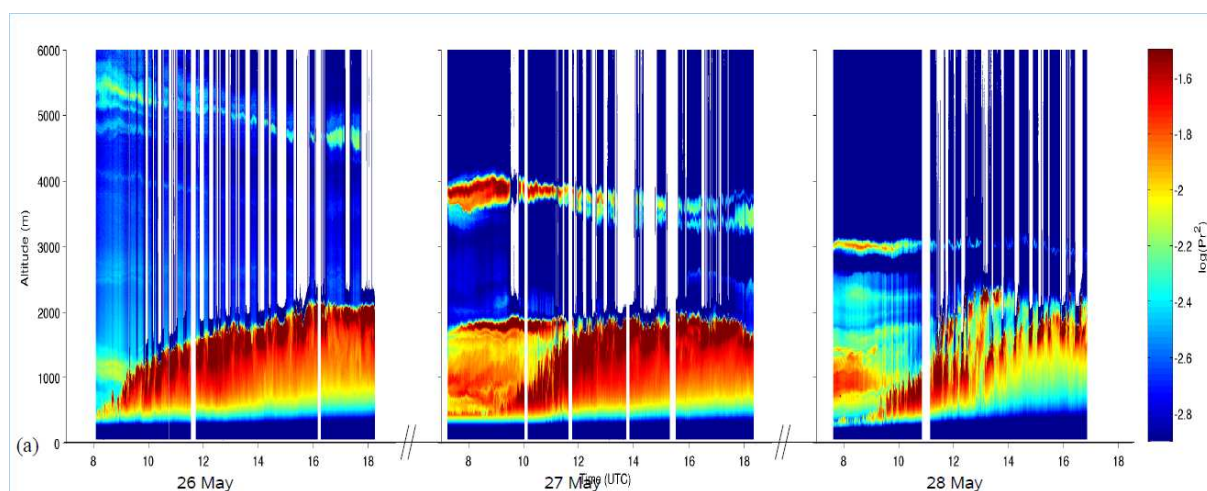


FIG. 4.2 – Section verticale de distribution d'aérosol obtenue par lidar dans la troposphère libre (26-28 Mai 2003 SIRTa Ecole Polytechnique/LMD) montrant l'existence de "layering"

Dans l'océan, ce phénomène est également observé à toutes les latitudes et sur toute la colonne d'eau. Ce phénomène est aussi appelé "interleaving" ou "intrusion", est facilement repérable par les contrastes de sel (Figure 4.3) ou de température (Figure 4.4).

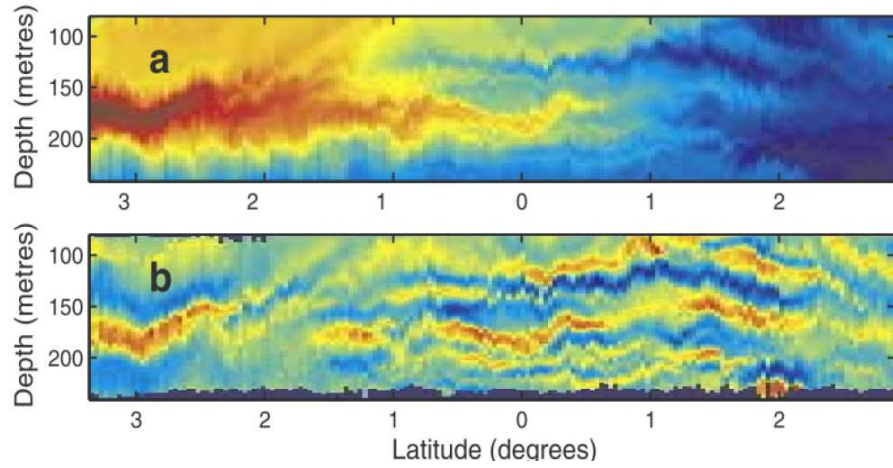


FIG. 4.3 – Interleaving équatorial dans le Pacifique à 160° E. (a) champ de salinité ; (b) anomalies de salinité

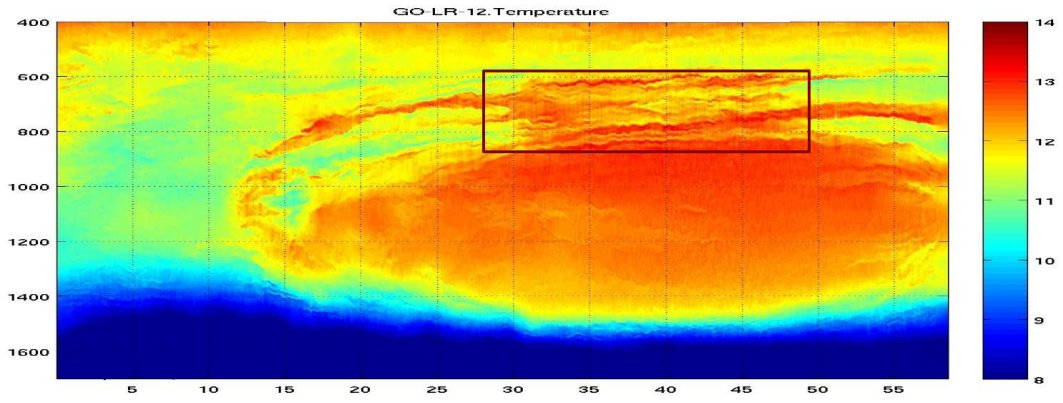


FIG. 4.4 – Section verticale du champ de température à travers un tourbillon piégeant de l’eau Méditerranéenne dans le golfe de Cadiz (Papenberg et al., 2010). Les profondeurs sont données en mètres, la distance horizontale est en km. Noter le fort “layering” à la périphérie supérieure du tourbillon

4.3.2 Analyse d’échelles de la turbulence stablement stratifiée

Dans ce qui suit, on considère un fluide stratifié stablement et supposons a priori que les effets de la rotation sont négligeables.

Les échelles caractéristiques sont, pour la vitesse horizontale U et pour l’échelle de longueur horizontale l_h , pour la longueur verticale, l_v . Le rapport d’aspect entre échelles horizontale et verticale est noté

$$\alpha = l_v/l_h$$

Le nombre adimensionnel de Froude est basé sur l’échelle de vitesse horizontale U

$$F_h = U/(l_h N)$$

L'échelle caractéristique de vitesse verticale est UF_h^2/α ; l'échelle de temps est l_h/U , celle de la fluctuation de densité ρ' est $U^2\rho_0/(gl_v)$; l'échelle de pression est $\rho_0 U^2$.

Ceci permet d'adimensionaliser les équations du mouvement dans l'approximation de Boussinesq :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} &= -\nabla_h p + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2} + \nabla_h^2 \mathbf{u}_h \right] \\ F_h^2 \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_z \cdot \nabla_h u_z + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] &= \frac{\partial p}{\partial z} - \rho + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \nabla_h^2 u_z \right] \\ \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{F_h^2}{\alpha^2} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \rho + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} &= u_z + \frac{1}{ReSc} \left[\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} + \nabla_h^2 \rho \right]\end{aligned}$$

où les primes ont été omises pour les quantités adimensionnelles. Le nombre de Reynolds est $Re = Ul_h/\nu$, le nombre de Prandtl (ou Schmidt) est $Sc = \nu/\kappa$. Dans la limite d'une forte stratification, $F_h = U/(l_h N) \rightarrow 0$ et $Re \gg 1$, le système devient

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \mathbf{u}_h + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} &= -\nabla_h p + \frac{1}{Re\alpha^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_h}{\partial z^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial z} - \rho \\ \nabla_h \cdot \mathbf{u}_h + \frac{F_h^2}{\alpha^2} \frac{\partial \mathbf{u}_h}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u}_h \cdot \nabla_h \rho + \frac{F_h^2}{\alpha^2} u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} &= u_z + \frac{1}{ReSc\alpha^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\end{aligned}$$

où les termes en $\mathcal{O}(F_h^2/\alpha^2)$ ont été gardés car la valeur du rapport d'aspect et de l'anisotropie du mouvement n'est pas connue pour l'instant. Noter que *dans cette limite, les mouvements sont hydrostatiques*, c'est-à-dire que les mouvements sont suffisamment lents pour que le champ de pression ait le temps de s'ajuster à chaque instant au champ de densité. [Cela implique notamment que les ondes internes de fréquence proches de la fréquence de Brunt-Vaissala ne peuvent pas être prises en compte dans cette limite].

Dans ce qui suit, on s'intéresse principalement à la limite de grand nombre de Reynolds stratifié, défini par $\mathcal{R} = Re F_h^2 \gg 1$. Billant et Chomaz(2001) ont montré que les équations deviennent autosimilaires par rapport à la variable $z'N/U$, c'est-à-dire que $l_v \approx U/N$ et $\alpha \approx F_h$. Ceci implique que le terme d'advection verticale est du même ordre que le terme d'advection horizontale : c'est la principale différence avec l'advection quasi-géostrophique qui est horizontale, alors qu'en milieu fortement stratifié, les mouvements sont fortement anisotropes, tout en restant totalement tridimensionnels. Une autre conséquence est que les énergies cinétique et potentielle sont du même ordre de grandeur.

Lindborg (2006) montre que si on introduit l'échelle d'Ozmidov

$$l_O = \epsilon^{1/2}/N^{3/2}$$

qui est l'échelle de transition entre la turbulence anisotrope stratifiée et la turbulence 3D isotrope (qui néglige tout effet de stratification) alors on peut vérifier que

$$\mathcal{R} = \left(\frac{l_O}{\eta} \right)^{4/3} \gg 1$$

où $\eta = \nu^{3/4}/\epsilon^{1/4}$ est l'échelle de Kolmogorov. On rappelle que dans l'océan, l'échelle visqueuse de Kolmogorov est inférieure au cm, alors que l'échelle d'Ozmidov est plutôt de l'ordre du m. Cette condition implique donc que la turbulence stratifiée concerne les échelles anisotropes beaucoup plus grandes que l_O dans l'horizontale et plus grandes ou de l'ordre de l_O sur la verticale. Dans le cas de la turbulence tridimensionnelle classique, les échelles horizontale et verticale sont égales et sont de plus nettement plus petites que l_O .

Par des considérations analogues à celles du chapitre de turbulence 3D, les spectres d'énergie cinétique et potentielle en fonction du nombre d'onde horizontal sont de la forme

$$E_K(k_h) = C_1 \epsilon_K^{2/3} k_h^{-5/3} \quad E_P(k_h) = C_2 \epsilon_P k_h^{-5/3} / \epsilon^{1/3}$$

où ϵ_K et ϵ_P sont les taux de dissipation de l'énergie cinétique et potentielle. Billant & Chomaz(2001) montrent également qu'en fonction du nombre d'onde vertical, les spectres d'énergie cinétique et potentielle sont de la forme

$$E_K(k_v) \approx E_P(k_v) \approx N^2 k_v^{-3}$$

dont les pentes concordent bien avec les valeurs observées in situ dans l'atmosphère et l'océan (Gargett, 1981), Fritts et al. (1987). Noter cependant que ces derniers auteurs privilégiaient plutôt une interprétation en termes de spectres saturés liés au déferlement d'ondes de gravité libres.

L'influence du nombre de Reynolds de flottabilité pour atteindre un régime de layering turbulent est montrée sur la figure 4.5

Les simulations montrent un pic du nombre de Richardson pour des valeurs plus faibles que 0.25 (figure 4.6)

Les lois d'échelle en fonction des nombres d'onde horizontaux et verticaux sont bien vérifiés par les simulations numériques pour l'énergie cinétique comme potentielle (Figure 4.7 et 4.8).

Par ailleurs, les simulations numériques permettent de vérifier le sens des cascades d'énergie vers les petites échelles horizontales (Figure 4.9. Ces résultats numériques ainsi que l'analyse de données du champ de vitesses des vols commerciaux par Cho & Lindborg (2000) tendent à supporter l'interprétation actuelle que le spectre en $-5/3$ pour les échelles horizontales inférieures à 100km dans la troposphère libre correspond à une cascade d'énergie directe vers les petites échelles spatiales (Figure 4.10).

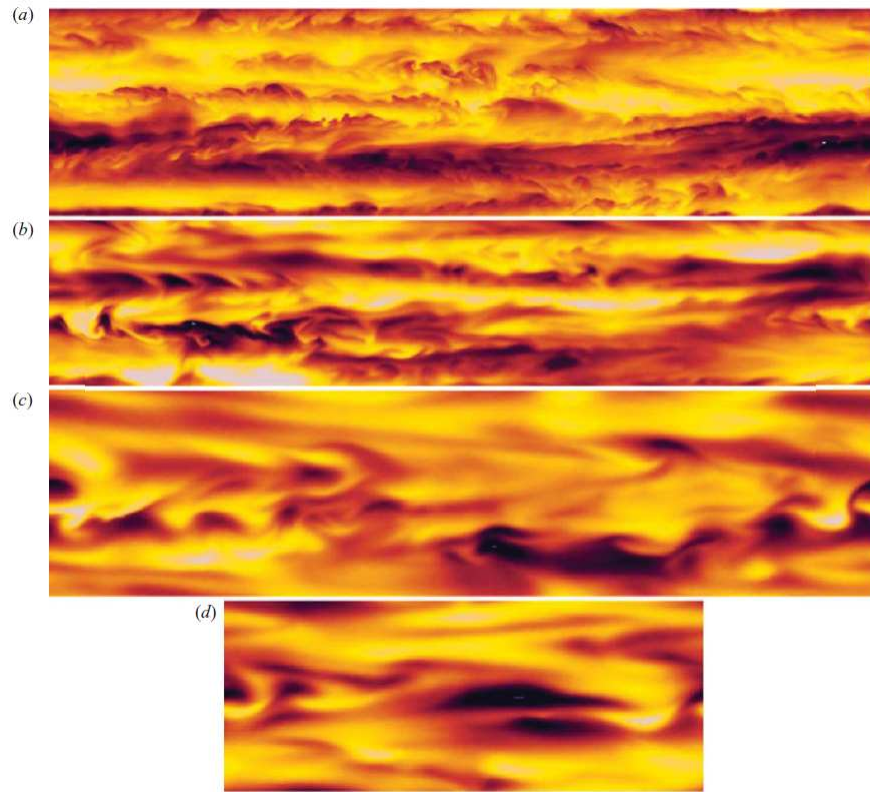


FIG. 4.5 – Sections verticales du champ d’anomalies de densité pour des valeurs décroissante du nombre de Reynolds de flottabilité \mathcal{R} . Du haut vers le bas $\mathcal{R}=9.6$; $\mathcal{R}=1.6$; $\mathcal{R}=0.5$; $\mathcal{R}=0.1$

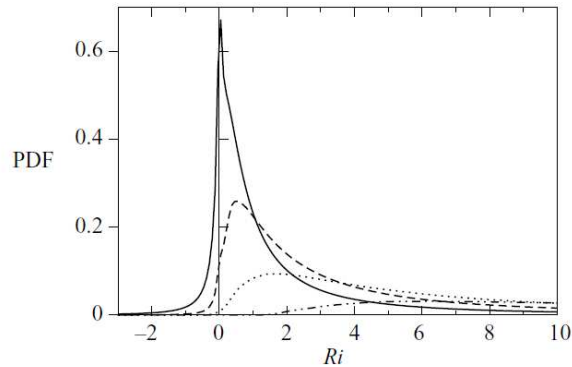


FIG. 4.6 – Distribution de probabilité (pdf) du nombre de Richardson Ri . $\mathcal{R}=9.6$; $\mathcal{R}=1.6$; $\mathcal{R}=0.5$; $\mathcal{R}=0.1$ (respectivement, lignes continue, tiretée, pointillée et tiretée-pointillée)

Références

- Billant, P. & Chomaz, J.-M. 2001 Self-similarity of strongly stratified inviscid flows. *Phys. Fluids* 13, 1645–1651.
- Brethouwer, G., Billant, P., Lindborg, E., Chomaz, J.-M. 2007 Scaling analysis and simulation of strongly stratified turbulent flows. *J. Fluid Mech* 585, 343–368.
- Gargett, A. E., Osborn, T. R. & Nasmyth, P. W. 1984 Local isotropy and the decay of turbu-

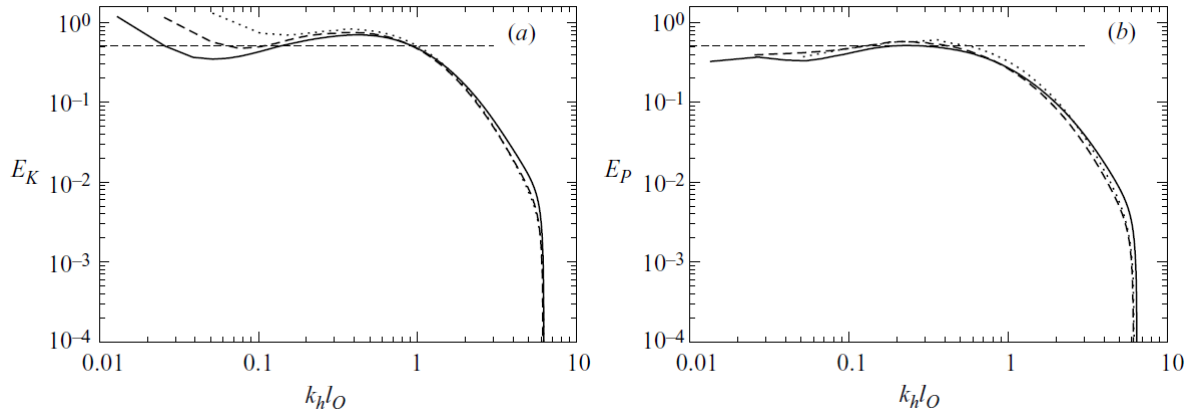


FIG. 4.7 – Spectres *compensés par $k^{+5/3}$* d'énergie cinétique et d'énergie potentielle en fonction du nombre d'onde horizontal, où l_O est l'échelle d'Ozmidov

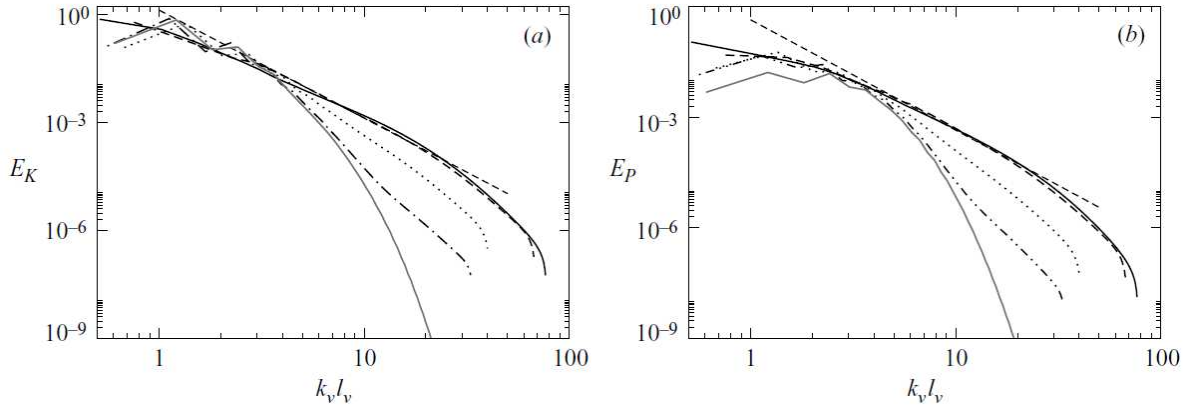


FIG. 4.8 – Spectres d'énergie cinétique et d'énergie potentielle en fonction du nombre d'onde vertical, où l_v est l'échelle verticale. La ligne tiretée correspond à une pente en k_v^{-3}

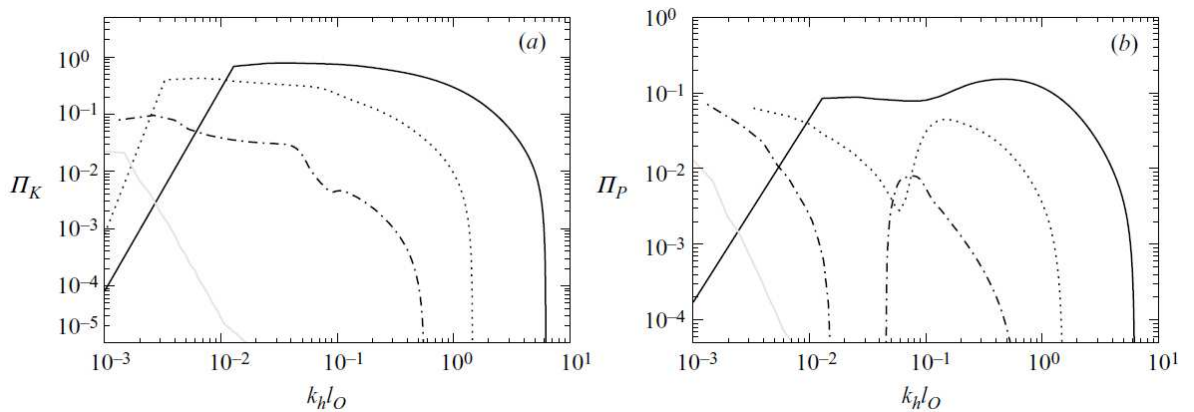


FIG. 4.9 – Evidence de **cascades directes d'énergie cinétique et potentielle** pour les différents cas $\mathcal{R}=9.6$; $\mathcal{R}=1.6$; $\mathcal{R}=0.5$; $\mathcal{R}=0.1$ (respectivement, lignes continue, tiretée, pointillée et tiretée-pointillée)

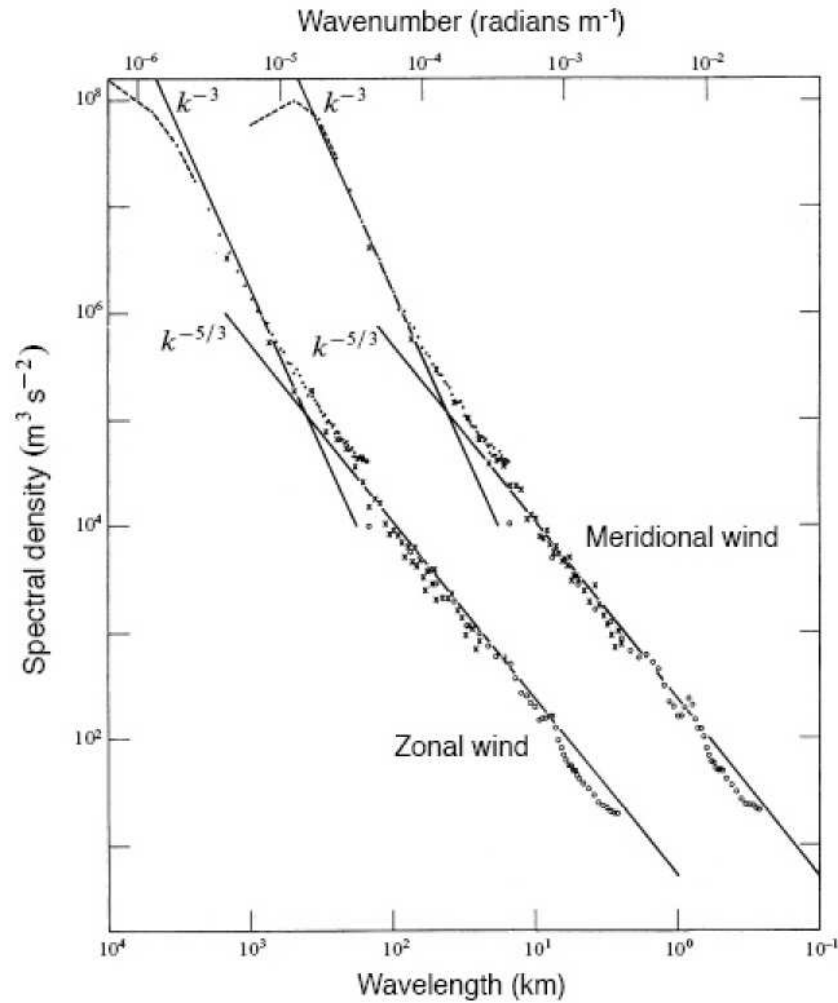


FIG. 4.10 – Spectre d'énergie de la composante du vent méridienne et zonale au voisinage de la tropopause, provenant de mesures par avions de lignes commerciales entre 1975 et 1979. Le spectre méridien a été décalé vers la droite sur la figure (Gage & Nastrom, 1985)

lence in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.* 144, 231–280.

Howard, L. 1961. Note on a paper of John W. Miles, *J. Fluid Mech.* 10 : 509–512

Newell R.E., Thouret V., Cho J., Stoller P., Marenco A. & Smit H.G. 1999. Ubiquity of quasi-horizontal layers in the troposphere, *Nature*, 398, 316–319 (25 March 1999) — doi:10.1038/18642

Osborn, T. R. & Cox, C. S. 1972 Oceanic fine structure. *Geophys. Fluid Dyn.* 3, 321–345.