

Chapitre 2

Diffusivité et transport turbulents. Approche lagrangienne

2.1 Corrélations et spectres

La fonction d'autocorrélation d'une variable $u(t)$ entre 2 instants t_1 et t_2 est définie par

$$R(t_1, t_2) \equiv \overline{u(t_1)u(t_2)}$$

où l'opérateur de moyenne pour un processus instationnaire doit être pris comme une moyenne d'ensemble.

Dans le cas d'un **processus stationnaire** les statistiques sont indépendantes du temps origine et sont invariantes par translation en temps :

$$\overline{u(t_1)u(t_2)} = \overline{u(0)u(t_2 - t_1)} = \overline{u(0)u(\tau)} = \overline{u(t)u(t + \tau)}$$

où l'incrément en temps $\tau = t_2 - t_1$. La fonction d'autocorrélation n'est fonction que de l'incrément temporel τ et pour un processus stationnaire :

$$R(\tau) = \overline{u(t)u(t + \tau)} \quad (2.1)$$

Dans ce cas, l'opérateur de moyenne est celui de la moyenne temporelle.

Echelle intégrale temporelle \Longleftrightarrow temps de mémoire du processus :

$$\boxed{\mathcal{T} \equiv \frac{1}{u^2} \int_0^\infty R(\tau) d\tau} \quad (2.2)$$

Si $S(\omega)$ est la transformée de Fourier de $R(\tau)$:

$$S(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau \quad (2.3)$$

inversement :

$$R(\tau) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\omega\tau} S(\omega) d\omega \quad (2.4)$$

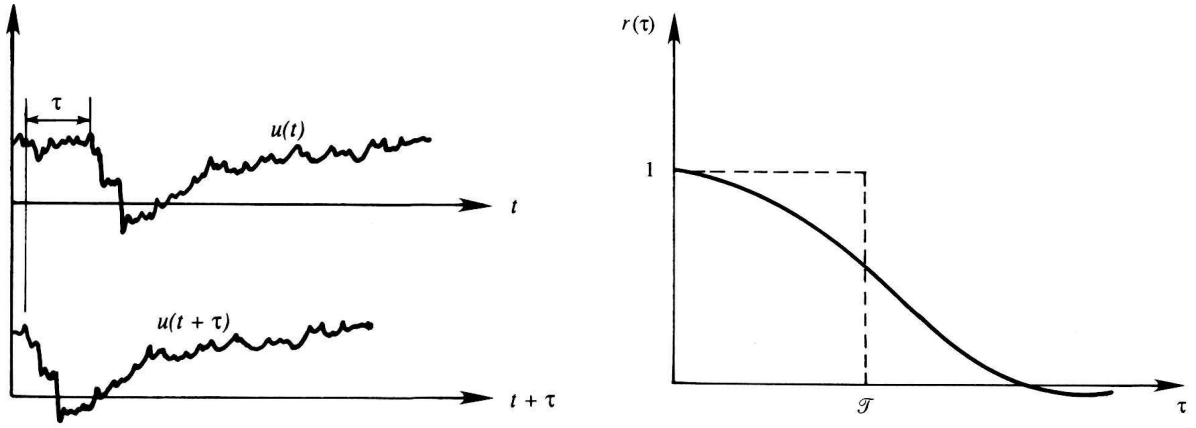


FIG. 2.1 – (a) Méthode de calcul de la fonction d'autocorrélation; (b) fonction d'autocorrélation et échelle de temps intégrale

Le spectre en fréquence est une fonction réelle et symétrique si $R(\tau)$ est réel et symétrique et

$$\overline{u^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.5)$$

$S(\omega) d\omega$ est la densité spectrale d'énergie dans la bande de fréquence $d\omega$ centrée à ω .

$$S(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau = \frac{\overline{u^2} \mathcal{T}}{\pi} \quad (2.6)$$

le spectre d'énergie à la fréquence 0 est proportionnelle à l'échelle de temps intégrale.

2.2 Dispersion absolue (d'une seule particule)

Le fort mélange inhérent aux écoulements turbulents est dû au fait que toutes les particules fluides doivent s'éloigner inexorablement de leur position initiale pour un tel écoulement. Ce résultat est dû à G.I. Taylor (1921) qui a étudié ce problème et a calculé le taux de "dispersion", c'est-à-dire le taux d'éloignement d'une particule de sa position initiale. Les particules sont supposées être dispersées par un écoulement turbulent stationnaire et homogène. Nous allons utiliser des coordonnées dites Lagrangiennes $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t) = (X_x, X_y, X_z)$, qui représentent la position de la particule à un instant t , et qui est partie à l'instant initial de la position $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Nous allons considérer le cas où la position initiale de toutes les particules qui sont lâchées proviennent d'un seul point qu'on choisira comme étant l'origine des coordonnées (cas du panache d'une cheminée, par exemple). $\mathbf{X}(0, t) \equiv \mathbf{X}(t)$ et on va de plus considérer qu'une seule coordonnée d'espace X_α ($\alpha = x, y$ ou z). Le taux moyen auquel la valeur absolue de X_α (on veut mesurer une distance) augmente, est relié au calcul de $\frac{d\overline{X_\alpha^2}}{dt}$, où la moyenne correspond à une moyenne d'ensemble et pas à une moyenne temporelle. On peut écrire :

$$\frac{d\overline{X_\alpha^2}}{dt} = 2\overline{X_\alpha \frac{dX_\alpha}{dt}} \quad (2.7)$$

où nous avons utilisé la propriété de commutativité de l'opérateur de moyenne et de l'opérateur de dérivation. Si on définit

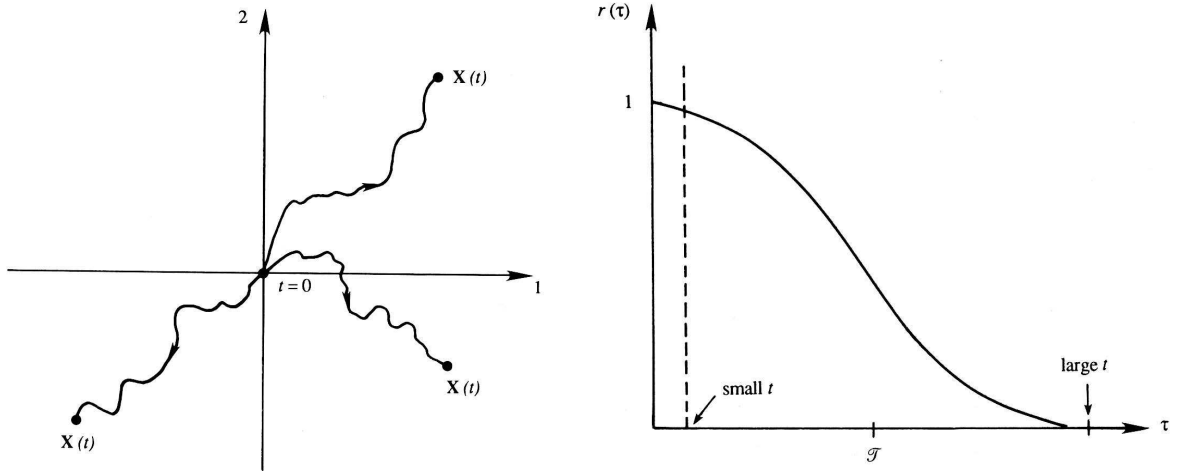


FIG. 2.2 – (a) 3 réalisations de $X(t)$, positions au temps t de particules situées initialement à $t = 0$ à l'origine ;(b) Limite pour les petits et grands temps de la fonction de corrélation.

$$u_\alpha = \frac{dX_\alpha}{dt}$$

comme étant la vitesse Lagrangienne de la particule fluide au temps t , (2.7) devient

$$\begin{aligned} \frac{d(\overline{X_\alpha^2})}{dt} &= 2\overline{X_\alpha u_\alpha} = 2\overline{\left[\int_0^t u_\alpha(t')dt'\right] u_\alpha} \\ &= 2\overline{\int_0^t u_\alpha(t')u_\alpha(t)dt'} \end{aligned}$$

où on a utilisé la commutativité de la moyenne et de l'opérateur intégration. De plus

$$X_\alpha = \int_0^t u_\alpha(t')dt'$$

car X_α et u_α sont associés à la même particule fluide. Comme on suppose l'écoulement turbulent stationnaire, l'énergie cinétique moyenne $\overline{u_\alpha^2}$ est indépendante du temps et la fonction d'autocorrélation des variables $u_\alpha(t)$ et $u_\alpha(t')$ ne dépend que de l'incrément en temps $t - t'$. En notant

$$r_\alpha(\tau) \equiv \frac{\overline{u_\alpha(t)u_\alpha(t+\tau)}}{\overline{u_\alpha^2}} \quad (2.8)$$

la fonction d'autocorrélation des composantes de vitesses Lagrangiennes d'une particule, (2.2) devient

$$\begin{aligned} \frac{d(\overline{X_\alpha^2})}{dt} &= 2\overline{u_\alpha^2} \int_0^t r_\alpha(t' - t)dt' \\ &= 2\overline{u_\alpha^2} \int_0^t r_\alpha(\tau)d\tau \end{aligned}$$

où on a fait le changement de variable $t' \longrightarrow \tau = t - t'$. On trouve en intégrant

$$\overline{X_\alpha^2}(t) = 2\overline{u_\alpha^2} \int_0^t dt' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

qui montre comment la variance de la distance d'éloignement de la particule varie avec le temps.

Une autre forme utile de (2.9) est obtenue par intégration par partie. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t dt' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau &= \left[t' \int_0^{t'} r_\alpha(\tau) d\tau \right]_{t'=0}^t - \int_0^t t' r_\alpha(t') dt' \\ &= t \int_0^t r_\alpha(\tau) d\tau - \int_0^t t' r_\alpha(t') dt' \\ &= t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) r_\alpha(\tau) d\tau \end{aligned}$$

L'équation (2.9) devient

$$\overline{X_\alpha^2}(t) = 2\overline{u_\alpha^2} t \int_0^t \left(1 - \frac{\tau}{t}\right) r_\alpha(\tau) d\tau \quad (2.10)$$

On a alors les deux limites

Cas des temps courts $t \ll \mathcal{T}$, alors $r_\alpha \approx 1$ et on obtient pour (2.9)

$$\overline{X_\alpha^2}(t) \approx \overline{u_\alpha^2} t^2$$

en prenant la racine carrée, on obtient

$$\boxed{X_\alpha^{rms} = u_\alpha^{rms} t \quad t \ll \mathcal{T}} \quad (2.11)$$

c'est-à-dire que l'éloignement moyen augmente linéairement avec le temps et est directement proportionnel à l'intensité des fluctuations turbulentes du milieu (c'est le régime "ballistique").

Cas des temps longs $t \gg \mathcal{T}$: dans ce cas τ/t est négligeable dans (2.10), ce qui donne

$$\overline{X_\alpha^2}(t) \approx \overline{u_\alpha^2} \mathcal{T} t \quad (2.12)$$

$$\mathcal{T} \equiv \int_0^\infty r_\alpha(\tau) d\tau$$

où \mathcal{T} est l'échelle intégrale déterminée à partir de la fonction d'autocorrélation Lagrangienne $r_\alpha(\tau)$. En prenant la racine carrée, on obtient

$$\boxed{X_\alpha^{rms} = u_\alpha^{rms} \sqrt{\mathcal{T} t} \quad t \gg \mathcal{T}} \quad (2.13)$$

Ce comportement en $t^{1/2}$ aux temps longs est similaire au comportement observé dans le cas d'une marche aléatoire, pour lequel la distance parcourue au bout d'un nombre de pas

aléatoires (c'est-à-dire non corrélés entre eux) augmente aussi en $t^{1/2}$. Cette similarité est due au fait que pour les temps longs les particules fluides ont "oublié" leur position initiale à $t = 0$.

Par opposition, le comportement aux temps courts où $X_\alpha^{rms} = u_\alpha^{rms} t$ est du à une parfaite corrélation pour chaque réalisation, ce qui donne $X_\alpha \approx u_\alpha t$.

2.2.1 Rappel sur la marche aléatoire

La meilleure présentation de ce concept se trouve dans le Feynman(1963). L'analogie peut être faite avec la marche effectuée par un ensemble d'ivrognes qui sortent d'un même bar et dont les pas sont aléatoires, avec une corrélation nulle en moyenne entre deux pas successifs. On note R_n la distance parcourue depuis l'origine après n pas, et le vecteur \mathbf{L} représente le $n^{ième}$ pas. On fait l'hypothèse que chaque pas est de même longueur L . On a

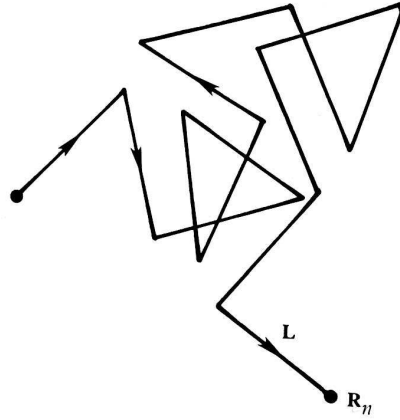


FIG. 2.3 – Marche aléatoire

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{L}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} R_n^2 &= \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{R}_n = (\mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{R}_{n-1} + \mathbf{L}) \\ &= R_{n-1}^2 + L^2 + 2 \mathbf{R}_{n-1} \cdot \mathbf{L} \end{aligned}$$

En prenant la moyenne, on obtient

$$\overline{R_n^2} = \overline{R_{n-1}^2} + L^2 + 2 \overline{\mathbf{R}_{n-1} \cdot \mathbf{L}} \quad (2.14)$$

Le dernier terme est nul car il n'y a pas de corrélation entre le $n^{ième}$ pas et la position atteinte après $n - 1$ pas. (2.14) donne de manière récursive,

$$\begin{aligned} \overline{R_n^2} &= \overline{R_{n-1}^2} + L^2 = \overline{R_{n-2}^2} + 2L^2 \\ &= \overline{R_1^2} + (n-1)L^2 = nL^2 \end{aligned}$$

La moyenne du module de la distance parcourue après n pas non corrélés, de longueur L chacun, est donc

$$R_n^{rms} = L\sqrt{n}$$

On a la même dépendance en racine carrée que pour l'expression 2.13

Comportement d'un panache en présence de vent

L'analyse de Taylor peut être adaptée pour prendre en compte l'existence d'une vitesse moyenne. Considérons la dispersion de la fumée en présence d'un vent soufflant dans la direction x (2.4). Une photo du panache prise pour un temps d'exposition long, montrerait la forme moyenne du panache de largeur moyenne est Y^{rms} . Dans ce problème la coordonnée x joue un rôle similaire à la coordonnée temps t dans le problème de Taylor. Les limites pour les temps courts et longs (2.11) et (2.13) montrent que le panache loin de la cheminée doit avoir une forme parabolique et que près de l'origine, il présente une extrémité pointue.

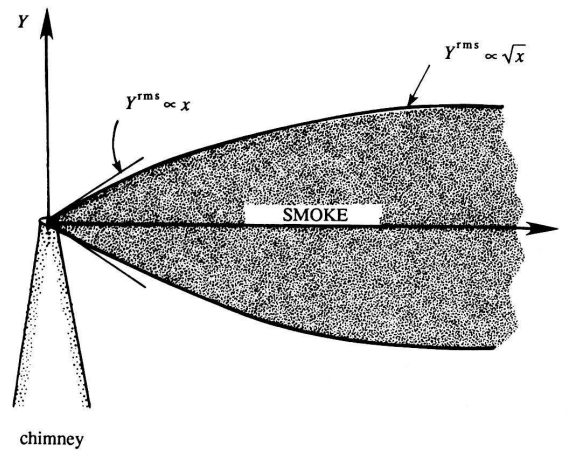


FIG. 2.4 – Forme moyenne d'un panache en présence d'un vent soufflant dans la direction x

2.2.2 Diffusivité effective

L'équivalent d'une diffusivité turbulente peut être estimée à partir de l'analyse de Taylor. L'analogie est la suivante : considérons la façon dont on peut déterminer le taux d'étalement d'un champ scalaire (comme la chaleur ou la vorticité), à partir d'une source ponctuelle, pour un fluide de diffusivité moléculaire constante κ . Quelle devrait être la valeur de cette diffusivité pour que l'étalement de la source ponctuelle donne le même résultat que l'équation (2.13)? On peut montrer que la solution de l'équation de diffusion $\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \phi$, pour des conditions initiales schématisées par une source ponctuelle en Dirac $\phi(x, t = 0) = \delta(x)$, correspond à

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\kappa t}\right).$$

La valeur moyenne de la distance au carré sur laquelle la particule se déplace depuis l'origine est donné par :

$$\overline{x^2}(t) = 2\kappa t$$

La diffusivité correspond pour un tel fluide à :

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{d\overline{x^2}}{dt} \quad (2.15)$$

En généralisant ce résultat, on peut définir la diffusivité effective d'un écoulement turbulent comme étant

$$\begin{aligned} \kappa_e &\equiv \frac{1}{2} \frac{d(\overline{X_\alpha^2})}{dt} = \overline{u_\alpha^2} \int_0^t r_\alpha(\tau) d\tau \\ \kappa_e &\approx \overline{u_\alpha^2} t \quad t \ll \mathcal{T} \\ \kappa_e &\approx \overline{u_\alpha^2} \mathcal{T} \quad t \gg \mathcal{T} \end{aligned} \quad (2.16)$$

(2.16) montre que la diffusivité effective change au cours du temps, un résultat qui diffère de celui de la diffusivité moléculaire qui est une constante pour un fluide donné. La diffusivité turbulente effective ne devient constante que pour les temps longs et n'a donc de comportement analogue à celui de la diffusivité moléculaire que dans cette limite. On voit là les restrictions d'utilisation de ce concept de diffusivité turbulente, couramment utilisée dans les modèles numériques de maille grossière.

Moyennant les caveat énoncés ci-dessus, on peut tout de même calculer une diffusivité turbulente définie comme

$$\kappa_e = \overline{u_\alpha^2} \mathcal{T} \quad (2.17)$$

Longueur de mélange

On peut introduire une échelle spatiale de corrélation via des considérations dimensionnelles

$$l_e \equiv v_{rms} \mathcal{T} \quad (2.18)$$

avec $v_{rms} = \overline{v^2}^{1/2}$ et on a donc

$$\kappa_e = v_{rms} l_e \quad (2.19)$$

La diffusivité turbulente est donc aussi le produit de la vitesse moyenne (en module) par une "longueur de mélange" effective l_e . Ce concept de longueur de mélange souvent utilisée dans le cas des couches limites turbulentes au voisinage d'une paroi provient surtout de considérations dimensionnelles et peut être utile dans certains types d'écoulements.

2.2.3 Mesures de dispersion absolue dans l'Atlantique Nord-Est

Une manière de mesurer la diffusivité turbulente dans l'océan est de mesurer la dispersion absolue de flotteurs Lagrangiens, à partir des observations de trajectoires. L'exemple

ci-dessous montre que généralement le régime diffusif de marche aléatoire de Taylor est rarement clairement marqué, à moins d'avoir un échantillonnage suffisant. Le régime initial ballistique en t^2 est observé pour une gamme de temps de 5 à 7 jours. Le temps intégral Lagrangien varie entre 2 à 10 jours selon la profondeur et l'ordre de grandeur des coefficients de diffusion turbulente varie entre 500 à 2000 $\text{m}^2.\text{s}^{-1}$.

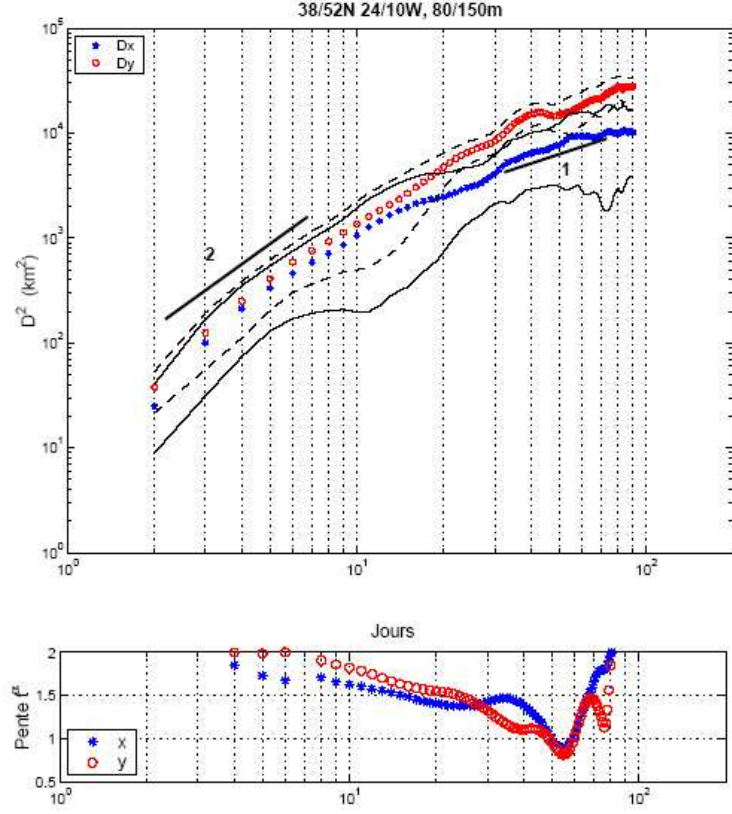


FIG. 2.5 – Dispersion absolue (zonale et méridienne) calculée à partir de 42 trajectoires de flotteurs à 80-150m dans l'Atlantique Nord-Est. Les pentes des régimes de dispersion sont indiquées sur les courbes (figure du haut). La figure du bas montre la pente calculée le long des courbes de dispersion. Thèse F. Colas (2003)

2.2.4 Généralisation à 2 dimensions

Si on considère la dispersion de particules dans un milieu anisotrope mais homogène, on peut tenter de généraliser à deux dimensions les résultats précédents en introduisant le tenseur de covariance des déplacements

$$D_{ij}(t) = \overline{X_i(t)X_j(t)} = \int_0^t \int_0^t \overline{u_i(t_1)u_j(t_2)} dt_1 dt_2 \quad (2.20)$$

Pour les petits temps, $X_i(t) \approx u_i(0)t$, où $u_i(0)$ est la vitesse de la particule fluide au temps initial, ce qui donne

$$D_{ij}(t) = A_{ij}t^2; \quad A_{ij} = \overline{u_i u_j}.$$

Plus généralement, on peut introduire le tenseur normalisé de covariance des vitesses entre les temps t_1 et t_2

$$\overline{u_i(t_1)u_j(t_2)} = (\overline{u_i^2} \overline{u_j^2})^{1/2} r_{ij}(t_2 - t_1)$$

Si l'incrément en temps est noté $\tau = t_2 - t_1$, on aura

$$r_{ij}(\tau) = r_{ji}(-\tau)$$

mais à moins que la turbulence ne soit isotrope, on aura $r_{ij}(\tau) \neq r_{ij}(-\tau)$.

Par un développement des calculs analogue à celui du cas unidimensionnel, on montre que

$$D_{ij}(t) = 2(\overline{u_i^2} \overline{u_j^2})^{1/2} t \int_0^t (1 - \frac{\tau}{t}) r_{ij}(\tau) d\tau$$

Pour les temps longs devant les échelles de corrélations Lagrangiennes dans chaque direction, on trouve

$$D_{ij}(t) = 2(\overline{u_i^2} \overline{u_j^2})^{1/2} t \int_0^\infty r_{ij}(\tau) d\tau \quad (2.21)$$

En notant,

$$\mathcal{T}_{ij} = \int_0^\infty r_{ij}(\tau) d\tau$$

on peut introduire un tenseur de diffusivité turbulente dans le cas bidimensionnel

$$\mathcal{K}_{ij} = \frac{1}{2} \frac{dD_{ij}}{dt} = (\overline{u_i^2} \overline{u_j^2})^{1/2} \mathcal{T}_{ij} \quad (2.22)$$

2.3 Dispersion de paires de particules

Considérons le problème de la détermination de la séparation de deux particules fluides. Le problème diffère du cas de la dispersion absolue (éloignement d'une seule particule de l'origine), car la distance de séparation des particules va affecter le taux de croissance de leur séparation. Dans le cas d'une seule particule, la position de la particule n'affecte pas la statistique de son taux d'éloignement de l'origine, à cause de l'homogénéité de la turbulence. Mais dans le cas d'une paire de particules, si elles sont rapprochées, elles pourront être transportées ensemble par un gros tourbillon, sans que leur distance de séparation soit modifiée, alors que si elles sont suffisamment éloignées l'une de l'autre, leurs mouvements respectifs peuvent être décorrélés. On peut distinguer deux régimes

- (i) Un régime pour lequel la séparation des particules est plus grande que l'échelle des plus gros tourbillons. Dans ce cas, chaque particule effectue une marche aléatoire qui est effectivement décorrélée de celle de l'autre particule.
- (ii) Un régime pour lequel la séparation des particules est plus petite que les tourbillons les plus énergétiques de l'écoulement. Dans ce cas, les tourbillons qui contribueront le plus à la séparation des deux particules sont ceux qui ont une taille comparable à la séparation de la paire de particules.

En répétant l'analyse de Taylor(1921), on trouve en repérant chaque particule par l'indice 1,2

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_1(0) - \mathbf{X}_2(0) + \int_0^t [\mathbf{u}_1(t') - \mathbf{u}_2(t')] dt' \quad (2.23)$$

et leur écart quadratique moyen est

$$\overline{\mathbf{Y}^2(t)} = \overline{(\mathbf{X}_1(0) - \mathbf{X}_2(0))^2} + \int_0^t dt' \int_0^{t'} [\mathbf{v}_1(t') \cdot \mathbf{v}_2(t'')] dt'' \quad (2.24)$$

où $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t)$ est la différence de vitesse entre les deux particules. Cependant on a

$$\overline{\mathbf{v}_1(t') \cdot \mathbf{v}_2(t'')} \neq \overline{\mathbf{v}^2} r(t'' - t') \quad (2.25)$$

car la corrélation dépend à la fois de la séparation initiale des particules et du temps écoulé depuis ! La diffusivité relative va dépendre à la fois du temps et de la séparation initiale des particules et on ne peut pas faire les mêmes développements que dans le cas de la dispersion absolue. Cependant on peut tout de même considérer les cas limites des temps courts et longs.

2.3.1 Cas des grandes distances de séparation de paire

Ce cas est analogue au cas de la dispersion absolue. La séparation est donnée par

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{X}_1(t) - \mathbf{X}_2(t)$$

leur séparation moyenne est

$$\overline{\mathbf{Y}^2(t)} = \overline{\mathbf{X}_1^2(t)} + \overline{\mathbf{X}_2^2(t)} - 2 \overline{\mathbf{X}_1(t) \cdot \mathbf{X}_2(t)}$$

Pour les grands temps, le dernier terme a une corrélation nulle car les mouvements des deux particules sont décorrélés. On trouve alors deux fois la limite du cas de la dispersion absolue

$$\overline{\mathbf{Y}^2(t)} = 2 \overline{\mathbf{u}^2} \mathcal{T} t \quad (2.26)$$

et le taux de séparation pour les grands t est donné par

$$\frac{d \overline{\mathbf{Y}^2(t)}}{dt} = 4 \overline{\mathbf{u}^2} \mathcal{T} = 2\kappa_e \quad (2.27)$$

La diffusivité relative est donc égale à deux fois la diffusivité absolue dans la limite des grands temps pour les particules éloignées l'une de l'autre d'une distance plus grande que celles des plus gros tourbillons.

2.3.2 Séparation de paire dans la zone inertielle de cascade d'énergie

Le problème concerne la séparation de particules aux échelles spatiales de la zone inertielle, pour deux particules dont la séparation est plus grande que les échelles de dissipation mais plus petite que les échelles des gros tourbillons. Dans le cas où on a une zone inertielle de la turbulence, le taux de séparation de la paire va dépendre de deux quantités, (i)

la séparation des deux particules et (ii) des propriétés de la zone inertielle (taux de cascade d'énergie).

Dans le cas d'une cascade d'énergie, on a

$$\frac{d\bar{L}^2}{dt} = g(\bar{L}, \epsilon) \quad (2.28)$$

où $\bar{L} \equiv \overline{Y(t)^2}^{1/2}$. Une analyse dimensionnelle donne

$$\boxed{\frac{d\bar{L}^2}{dt} = A\epsilon^{1/3}\bar{L}^{4/3}} \quad (2.29)$$

où A est une constante sans dimension. Cette relation est connue comme "la loi en 4/3 de Richardson". On peut intégrer cette équation :

$$\bar{L}^2 \approx \epsilon t^3 \quad (2.30)$$

Cette relation peut également être interprétée comme une *diffusivité relative qui est fonction de l'échelle de séparation* :

$$\mathcal{K}_{rel} = \epsilon^{1/3}\bar{L}^{4/3} \quad (2.31)$$

et ne sera valable que tant que \bar{L} reste plus petite que la taille des plus gros tourbillons de la zone inertielle. Les résultats ci-dessus sont valides en turbulence bidimensionnelle comme tridimensionnelle.

2.3.3 Séparation de paire dans la zone inertielle de cascade d'entrophie

Dans le cas bidimensionnel, l'expression de la diffusivité relative turbulente va différer selon que l'on est dans une zone inertielle de cascade d'énergie ou d'entrophie. L'expression obtenue par analyse dimensionnelle donne

$$\frac{d\bar{L}^2}{dt} = B\eta^{1/3}\bar{L}^2 \quad (2.32)$$

où B est une constante sans dimension. On trouve en intégrant :

$$\bar{L}^2 = \bar{L}^2(0) \exp(B\eta^{1/3}t); \quad \overline{Y^2(t)} = \overline{Y^2(0)} \exp(B\eta^{1/3}t) \quad (2.33)$$

Le taux de séparation est exponentiel dans la cascade d'entrophie, un résultat qui est spécifique à la turbulence bidimensionnelle. Dans ce cas on peut introduire une diffusivité relative turbulente en

$$\mathcal{K}_{rel} = \eta^{1/3}\bar{L}^2 \quad (2.34)$$

2.3.4 Mesures expérimentales in situ

Un exemple de dispersion relative de données de flotteurs de subsurface en Atlantique Nord-Est est donné dans les figures ci-dessous (thèse de F.Colas), révélant cette fois deux

régimes très nets. (i) Un premier régime de séparation exponentielle pour des durées inférieures à 12 jours et des distances inférieures à 30km (rayon de déformation local) et (ii) un deuxième régime de Richardson en t^3 relativement clair et interprété comme un régime de cascade inverse d'énergie pour des intervalles de temps de 30 à 50 jours et des distances de 40 à 100 km. On n'observe pas dans ces deux cas océaniques particuliers de régime aux très grands

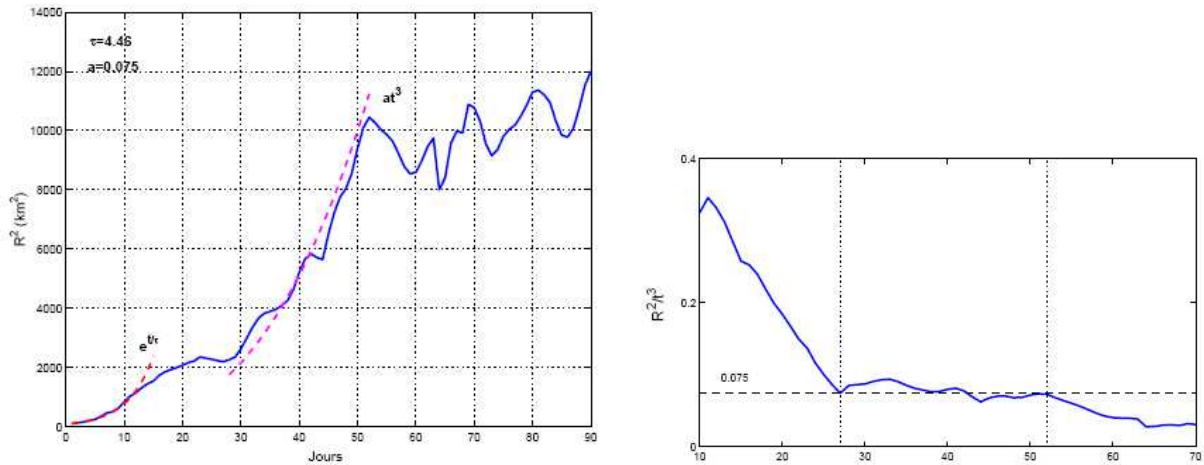


FIG. 2.6 – Dispersion relative $\overline{Y^2(t)}$ de flotteurs dérivants à 1000dbars pour des séparations initiales inférieures à 15km (haut). Courbe compensée de $\overline{Y^2(t)}.t^3$ en fonction du temps. (Thèse de F.Colas, 2003)

temps en t comme pour la dispersion absolue. D'autres études dans l'Atlantique Nord central (Ollitrault et al. 2005) observent également la loi en t^3 pour des distances de séparation plus grandes que le rayon de déformation et aux distances de séparation supérieures à 300km une loi en t conforme au régime de Taylor est retrouvée.

Il existe également des mesures similaires de séparation exponentielle de ballons lâchés dans la stratosphère à des échelles de 1000km et consistentes avec une zone inertielle de cascade d'enstrophie. On n'a pas d'évidence expérimentale probante de loi en t^3 dans l'atmosphère.

2.4 Phénomènes de transport turbulent

2.4.1 Critique du concept de viscosité turbulente

Nous avons vu que le modèle le plus répandu de paramétrisation du mélange petite échelle : la paramétrisation "down-gradient" de viscosité turbulente. Celle-ci a pour hypothèse fondamentale que le flux turbulent de traceur a une intensité proportionnelle au gradient de traceur grande échelle :

$$\overline{u'c'} = -[\kappa]\nabla\bar{c} ,$$

avec $[\kappa]$ la matrice de diffusivité. Cette hypothèse se dérive par analogie avec la diffusion moléculaire (Batchelor, 1953) car on réduit les contrastes locaux de traceur en redistribuant le traceur des régions de forte concentration vers les régions de faible concentration, (c'est-à-dire dans le sens opposé au gradient). Cette paramétrisation est adéquate si on pense que le mélange se fait localement comme pour la diffusion moléculaire. Mais correspond-elle à ce qui se passe réellement dans les fluides géophysiques ?

*Les simulations à haute résolution montrent que le transport turbulent n'est pas directement proportionnel au gradient grande échelle de vortacité local. Un fort gradient peut signifier **aussi bien une barrière au transport qu'un point d'éjection de matériel**. Cela est dû au fait que la cascade a un aspect *non-local* dans l'espace physique qui est relié à la nature grande échelle de l'advection.*

La paramétrisation classique élimine les gradients de traceur proportionnellement à ceux-ci. Si on considère le cas de la vortacité, on voit que cette paramétrisation va réduire les gradients au bord du tourbillon, ce qui va entraîner la destruction prématurée du tourbillon. Ce problème se manifeste de façon toute particulière dans les modèles de circulation générale : dans ces modèles, les vortex sont représentés par une dizaine de points de grille. Ce n'est pas suffisant pour représenter les forts gradients locaux souvent associés aux bords des tourbillons et le résultat est une dissipation artificielle des tourbillons dans ces modèles.

Il faut donc une meilleure paramétrisation des flux turbulents afin d'améliorer la représentation de la dynamique dans ces modèles de circulation générale. Une telle paramétrisation implique de pouvoir discriminer entre les régions imperméables au mélange (là où le mélange aux petites échelles sera fortement inhibé) et les régions de fort mélange reliées à la cascade.

2.4.2 Propriétés de la cascade dans l'espace physique

La turbulence bidimensionnelle se traduit dans l'espace physique par l'apparition de structures cohérentes (les vortex) qui sont fortement énergétiques et concentrent de fortes valeurs de vortacité, comme la figure 2.4.2(a) le montre. De plus, on observe aussi la formation de fins filaments avec de fortes valeurs de gradients de vortacité (figure 2.4.2(b)) qui concentrent de fortes valeurs de dissipation d'énstrophie puisque la dissipation d'énstrophie se fait proportionnellement à la palinstrophie (intégrale du carré des gradients de vortacité) pour un opérateur de diffusion classique en laplacien :

$$\frac{d}{dt} \iint \omega^2 dx dy = -\nu \iint |\vec{\nabla} \omega|^2 dx dy .$$

En turbulence bidimensionnelle, on observe donc une concentration de l'énergie et de l'énstrophie dans les vortex et une concentration de la palinstrophie dans les filaments.

La formation de filaments et d'intenses gradients s'explique en termes de transfert entre les différentes composantes de Fourier de la distribution de scalaire passif puisque l'on peut montrer que l'équation d'évolution de ces nombres d'onde est similaire à l'équation pour les gradients.

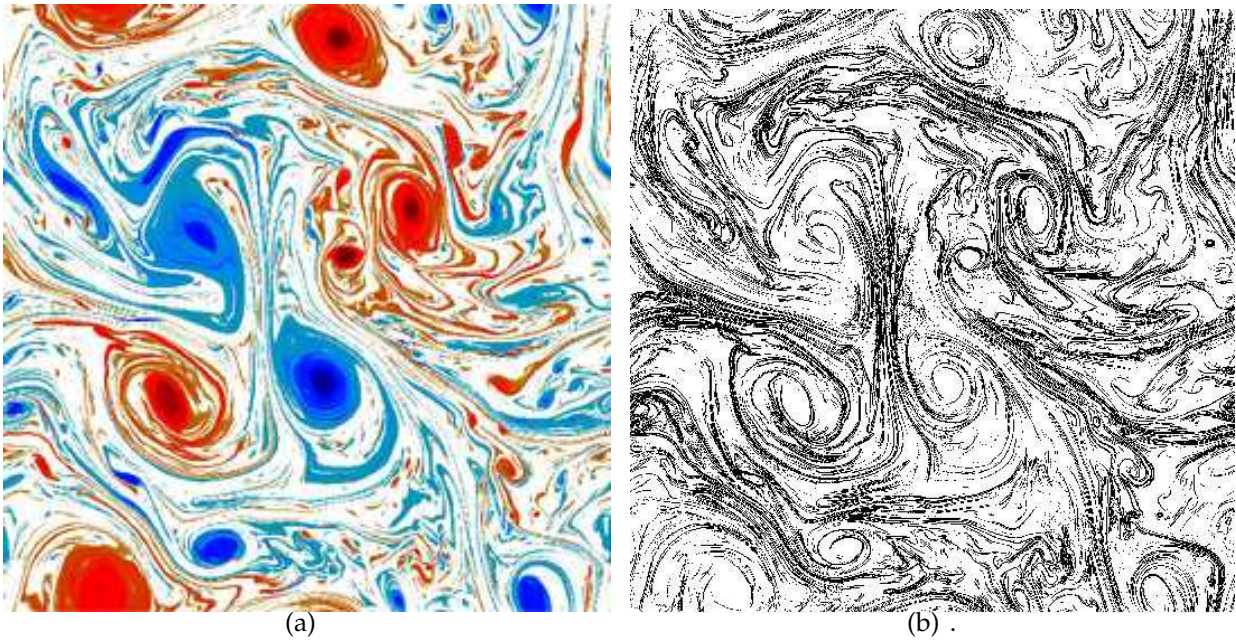


FIG. 2.7 – Champs de vorticité (a) et de gradients intenses de vorticité (b) pour la simulation turbulente décrite dans Hua et Klein (1998). Pour la figure (b), on a dessiné les gradients dépassant une certaine valeur.

Ce processus de formation de petites échelles dans le champ de traceur s'explique par l'effet de la déformation. Cet effet de déformation provient de l'advection différentielle (décrite par le tenseur de gradient de vitesse $[\vec{\nabla} \mathbf{u}]$) qui peut cisailer, étirer ou enrouler une tache de traceur. Ces différents effets auront pour conséquence d'accroître ou de réduire les gradients de traceur. Statistiquement, dans le cas non-diffusif, on observe un accroissement des gradients ce qui correspond à la manifestation physique de la cascade vers les petites échelles. Quand la diffusion entre en jeu, on observe une réduction des gradients et le traceur a tendance à s'homogénéiser en l'absence d'injection (par conservation de la moyenne de traceur et dissipation de la variance).

2.4.3 Dynamique de gradients de traceurs

Critère d'Okubo-Weiss

Ce critère a été souvent utilisé pour diagnostiquer des simulations turbulentes mais il est connu que ce critère n'est pas valable pour des cas pathologiques comme les vortex axisymétriques.

Considérons un traceur q advecté le long des trajectoires lagrangiennes :

$$\frac{Dq}{Dt} = 0 .$$

Si nous prenons le gradient de cette équation, nous obtenons

$$\frac{D\vec{\nabla}q}{Dt} = -[\nabla\vec{u}]^* \vec{\nabla}q, \quad (2.35)$$

où $[\nabla\vec{u}]^*$ est le transposé du tenseur de gradient de vitesse. Dans un premier temps, et afin de faciliter les calculs, on définit les quantités σ_n (l'étirement), σ_s (le cisaillement), ω (la vorticité) et σ (le taux de déformation) par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \partial_x u - \partial_y v, & \omega &= \partial_x v - \partial_y u. \\ \sigma_s &= \partial_x v + \partial_y u, & \sigma &= \sqrt{\sigma_n^2 + \sigma_s^2}. \end{aligned}$$

Weiss(1981) a dérivé un critère à partir de l'équation (2.35) afin de caractériser la dynamique du gradient de traceur, critère également établi par Okubo(1970) pour le problème de la dispersion de particules. Deux hypothèses sont faites pour obtenir leur critère :

- implicitement, le gradient de traceur s'aligne avec un des vecteurs propres de $[\nabla\vec{u}]^*$,
- et le tenseur $[\nabla\vec{u}]^*$ évolue **lentement** le long des trajectoires lagrangiennes.

La première hypothèse permet de remplacer le tenseur par une quantité scalaire dans l'équation (2.35). Cette quantité scalaire n'est autre qu'une des valeurs propres du tenseur qui vaut $\pm\lambda^{1/2}$ où λ désigne la quantité d'Okubo-Weiss :

$$\lambda = \sigma^2 - \omega^2. \quad (2.36)$$

La deuxième hypothèse indique que λ est constant, ce qui permet d'intégrer l'équation (2.35) :

$$\vec{\nabla}q \approx \vec{\nabla}q(t=0) \exp(\pm\lambda^{1/2}t).$$

On distingue les deux cas :

- λ est positif, c'est-à-dire que les effets de déformation sont dominants. Les valeurs propres sont réelles et on aura une croissance exponentielle des gradients. Weiss qualifie ces régions d'hyperboliques car les points selles de la fonction de courant (points de stagnation avec existence de directions stable et instable) possèdent une telle propriété ($\lambda > 0$) et sont communément appelés hyperboliques.
- λ est négatif, c'est-à-dire que la vorticité domine. Les valeurs propres sont imaginaires pures et on aura une rotation des gradients (sans croissance nette). Weiss qualifie ces régions d'elliptiques en référence aux points elliptiques de la fonction de courant. Cela correspond par exemple au cœur des vortex.

Le critère d'Okubo-Weiss évalue l'intensité relative de la déformation par rapport à la vorticité. La déformation fait croître les gradients de traceur de façon exponentielle et la vorticité tend à les faire tourner.

Lien avec la dispersion de particules et la dynamique de gradients de traceurs

On peut relier la cascade de traceur vers les petites échelles avec le problème de la dispersion de particules initialement très proches (Hua et Klein, 1998) et aux exposants de Liapounov. En effet, l'évolution des trajectoires de particules \vec{X} est donnée par l'équation

$$\frac{D\vec{X}}{Dt} = \vec{u}(\vec{X}).$$

Si $\delta\vec{X}$ désigne le vecteur séparant deux particules, initialement proches, on a au premier ordre

$$\frac{D\delta\vec{X}}{Dt} \approx [\nabla\vec{u}] \delta\vec{X} .$$

Le problème de dispersion de particules initialement très proches est équivalent au problème du gradient de traceur pour un écoulement non-divergent et au premier ordre en dérivée spatiale. Ce résultat est obtenu en considérant un traceur passif pour lequel $Dq/Dt = 0$. Pour deux particules séparées par $\delta\vec{X}$, on obtient $q \approx q_0 + \vec{\nabla}q \cdot \delta\vec{X}$ au premier ordre. Donc

$$(D\vec{\nabla}q/Dt) \cdot \delta\vec{X} + \vec{\nabla}q \cdot D\delta\vec{X}/Dt = 0 .$$

$$\vec{\nabla}q \cdot (D\delta\vec{X}/Dt - [\vec{\nabla}\vec{u}]\delta\vec{X}) = 0 ,$$

ce qui donne

$$D\delta\vec{X}/Dt = [\vec{\nabla}\vec{u}]\delta\vec{X}$$

Lapeyre et al. (1999) mettent en évidence l'importance de la rotation des axes de déformation pour la dynamique des gradients et l'utilité de se placer dans un repère lagrangien. Le mécanisme majeur de cette dynamique réside dans la compétition entre les effets de déformation et les effets de **rotation effective (vorticité et rotation des axes de déformation)**. Un deuxième mécanisme correspond à l'évolution de l'échelle de temps de la dynamique le long de la trajectoire lagrangienne.

Références

- Colas, F. 2003 Circulation et dispersion Lagrangiennes en Atlantique Nord-Est. Thèse de 3ème cycle de l'Université de Bretagne Occidentale.
- Hua B.L. and P. Klein, An exact criterion for the stirring properties of nearly two-dimensional turbulence. *Physica D* 113 (1998), pp. 98–110
- Lapeyre G., P. Klein and B.L. Hua, Does the tracer gradient vector align with the strain eigenvectors in 2-D turbulence ?. *Phys. Fluids* 11 (1999), pp. 3729–3737
- Ollitrault et al., 2005 M. Ollitrault, C. Gabillet and A. Colin de Verdière, Open ocean regimes of relative dispersion, *Journal of Fluid Mechanics* 533 (2005), pp. 381–407.
- Okubo A., Horizontal dispersion of floatable particles in the vicinity of velocity singularities such as convergences, *Deep-Sea Res.* 17 (1970) 445–454.
- Taylor GI (1921). *Proc. London Math. Soc.* 20 : 196.
- Weiss J., The dynamics of enstrophy transfer in two- dimensional hydrodynamics, *Physica D* 48 (1991) 273–294 ; [see also J. Weiss, 1981 Report LJI-TN-81-121, LaJolla Inst., San Diego, CA].