Présentation des schémas d'advection (moment et traceurs) et opérateurs de viscosité/diffusion présents dans CROCO

Equations primitives *Reynolds averaged* $X = \langle X \rangle + X'$

$$
\begin{aligned}
\frac{D\langle \mathbf{u}_h \rangle}{Dt} + f\mathbf{k} \times \langle \mathbf{u}_h \rangle &= \frac{\boldsymbol{\nabla}_h p}{\rho_0} - \boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h \mathbf{u}'_h \rangle - \partial_z \langle w' \mathbf{u}'_h \rangle \\
\partial_z p &= -g\rho' \\
\boldsymbol{\nabla} \cdot \langle \mathbf{u} \rangle &= 0 \\
\frac{D\langle T \rangle}{Dt} &= -\frac{\partial_z Q_s}{\rho_0 C_{p,o}} - \boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h T' \rangle - \partial_z \langle w' T' \rangle \\
\frac{D\langle S \rangle}{Dt} &= -\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h S' \rangle - \partial_z \langle w' S' \rangle \\
\rho &= \rho_{\mathrm{eos}}(\langle T \rangle, \langle S \rangle, z)
\end{aligned}
$$

avec

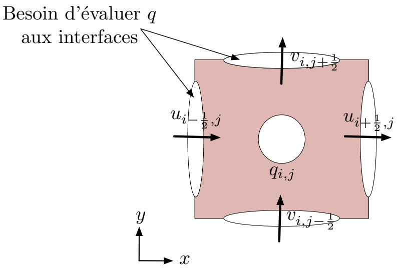
$$
\frac{D\langle X \rangle}{Dt} = \partial_t \langle X \rangle + \boldsymbol{\nabla} \cdot \langle X \rangle \langle \mathbf{u} \rangle
$$

Schémas d'advection disponibles

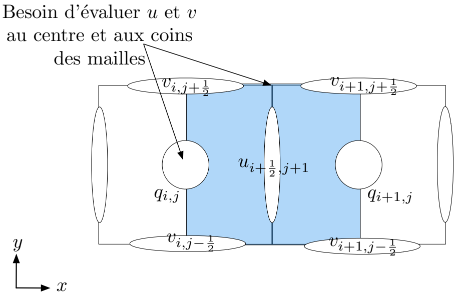
Equation	horizontal	vertical
Moment 3D	UV_HADV_UP3 UV_HADV_C4 UV_HADV_C2	UV_VADV_SPLINES UV_VADV_C2
Traceurs	TS_HADV_C4 TS_HADV_UP5 TS_HADV_WENO5 TS_HADV_C6 TS_HADV_RSUP3 TS_HADV_RSUP5	TS_VADV_SPLINES TS_VADV_AKIMA TS_VADV_C2 TS_VADV_WENO5
Moment 2D	M2_HADV_UP3 M2_HADV_C2	- -

Le problème d'advection = problème d'interpolation

Traceurs

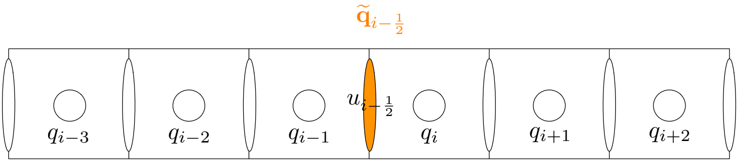


Moment



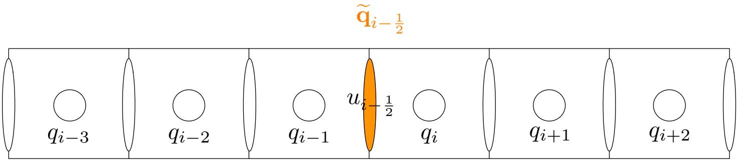
Schémas d’advection horizontale

Advection horizontale
[HADV_C2, HADV_UP3, HADV_C4, HADV_UP5, HADV_C6]



$$\partial_x(uq)|_{x=x_i} = \frac{1}{\Delta x_i}\left\{u_{i+1/2}\widetilde{q}_{i+1/2} - u_{i-1/2}\widetilde{q}_{i-1/2}\right\}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}^{\,\mathrm{C2}}_{i-1/2} &= \frac{q_i + q_{i-1}}{2} \\
\widetilde{q}^{\,\mathrm{C4}}_{i-1/2} &= (7/6)\widetilde{q}^{\,\mathrm{C2}}_{i-1/2} - (1/12)(q_{i+1} + q_{i-2}) \\
\widetilde{q}^{\,\mathrm{UP3}}_{i-1/2} &= \widetilde{q}^{\,\mathrm{C4}}_{i-1/2} + \mathrm{sign}(1/12, u_{i-1/2})(q_{i+1} - 3q_i + 3q_{i-1} - q_{i-2}) \\
\widetilde{q}^{\,\mathrm{C6}}_{i-1/2} &= (8/5)\widetilde{q}^{\,\mathrm{C4}}_{i-1/2} - (19/60)\widetilde{q}^{\,\mathrm{C2}}_{i-1/2} + (1/60)(q_{i+2} + q_{i-3}) \\
\widetilde{q}^{\,\mathrm{UP5}}_{i-1/2} &= \widetilde{q}^{\,\mathrm{C6}}_{i-1/2} - \mathrm{sign}(1/60, u_{i-1/2})(q_{i+2} - 5q_{i+1} + 10q_i - 10q_{i-1} + 5q_{i-2} - q_{i-3})
\end{aligned}$$



$$\partial_x(uq)|_{x=x_i} = \frac{1}{\Delta x_i}\left\{u_{i+1/2}\widetilde{q}_{i+1/2} - u_{i-1/2}\widetilde{q}_{i-1/2}\right\}$$

$$\widetilde{q}^{\,\text{UP3}}_{i-1/2} = \widetilde{q}^{\,\text{C4}}_{i-1/2} + \text{sign}(1/12, u_{i-1/2})(q_{i+1} - 3q_i + 3q_{i-1} - q_{i-2})$$

$$\widetilde{q}^{\,\text{UP5}}_{i-1/2} = \widetilde{q}^{\,\text{C6}}_{i-1/2} - \text{sign}(1/60, u_{i-1/2})(q_{i+2} - 5q_{i+1} + 10q_i - 10q_{i-1} + 5q_{i-2} - q_{i-3})$$

$\Rightarrow$ Schémas Split-UP3 et Split-UP5

Propriétés des schémas linéaires

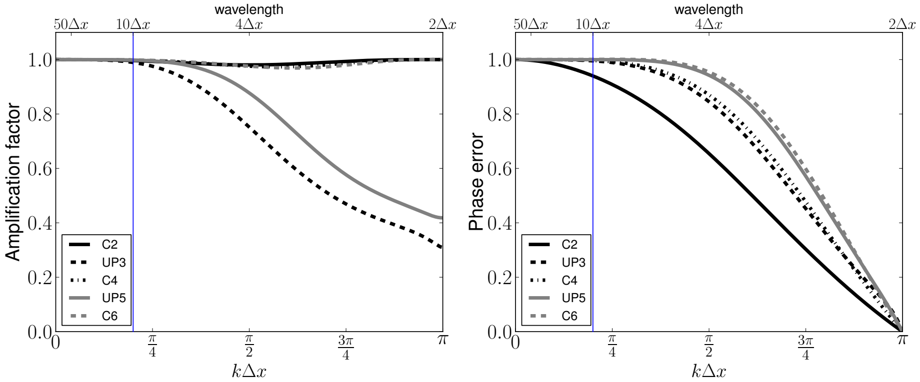


Figure: Erreurs sur l'amplitude (à gauche) et la phase (à droite) pour les schémas linéaires d'ordre 2 à 6.

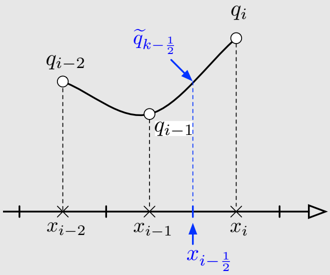
Interprétation différences finies vs volumes finis

Schéma UP3 classique

$$\frac{q(x_i+\Delta x)-q(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} = \partial_x q(x_i) + \frac{1}{6}\Delta x^2 \partial_x^3 q(x_i) + \mathcal{O}(\Delta x^4)$$

Pour annuler l'erreur d'ordre 2 $\rightarrow \widetilde{q}^{\mathrm{UP3}}_{i-1/2} = \frac{q_i+q_{i-1}}{2} - \frac{1}{6}(q_i - 2q_{i-1} + q_{i-2})$

Schéma d'ordre 3 au sens des volumes finis (e.g. Leonard, 1995)

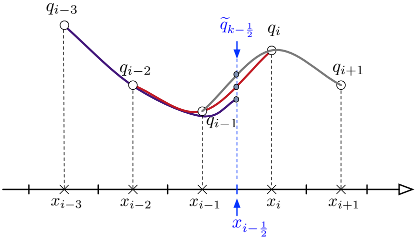


$$\widetilde{q}_{i-1/2} = \frac{q_i+q_{i-1}}{2} - \frac{1}{8}(q_i - 2q_{i-1} + q_{i-2})$$

Schéma WENO5 (e.g. Acker et al., 2016)

[TS_HADV_WENO5]

Pondération non linéaire entre 3 évaluations de la valeur d'interface



$$\widetilde{q}_{k-1/2} = w_0 \widetilde{q}^{(0)}_{k-1/2} + w_1 \widetilde{q}^{(1)}_{k-1/2} + w_2 \widetilde{q}^{(2)}_{k-1/2}$$

1. Convexité ($\sum_{j=0}^{2} w_j = 1$)
2. Propriété ENO (essentially non-scillatory)
3. 5ème ordre si q(x) est lisse

- Ce schéma a la propriété ENO (il satisfait une contrainte *Total Variation Bounded*)
- **Attention:** pas de propriété de préservation de la monotonie !!!

$\Rightarrow$ Choix tout de même à privilégier pour les traceurs biogéochimiques

Termes non-linéaires (rhs3d.F)

Formulation *à la* Lilly (1965)

$$
\begin{aligned}
\partial_t(\mathrm{Hz}u) &+ \partial_x\left((\mathrm{Hz}\ u)u\right) + \partial_y\left((\mathrm{Hz}\ v)\ u\right) + \dots \\
\partial_t(\mathrm{Hz}v) &+ \partial_x\left((\mathrm{Hz}\ u)v\right) + \partial_y\left((\mathrm{Hz}\ v)\ v\right) + \dots
\end{aligned}
$$

[UV_HADV_UP3]

$$\left(\widetilde{(\mathrm{Hz}\ u)u}\right)_{i,j} = (\widetilde{\mathrm{Hz}\ u})^{\mathrm{C4}}_{i,j}\ \widetilde{u}^{\mathrm{UP3}}_{i,j}$$

$$\left(\widetilde{(\mathrm{Hz}\ v)}u\right)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\widetilde{\mathrm{Hz}\ v})^{\mathrm{C4}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\ \widetilde{u}^{\mathrm{UP3}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$$

où le choix pour la direction de l'upwind est fait en fonction de

$$u^{\mathrm{upw}}_{i,j} = u_{i+1/2,j} + u_{i-1/2,j}, \qquad v^{\mathrm{upw}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = (\mathrm{Hz}\ v)_{i,j+\frac{1}{2}} + (\mathrm{Hz}\ v)_{i+1,j+\frac{1}{2}}$$

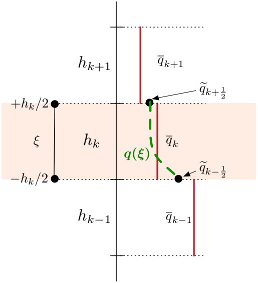
Schémas d'advection verticale

Reconstruction spline (rhs3d.F, compute_vert_tracer_fluxes.h)

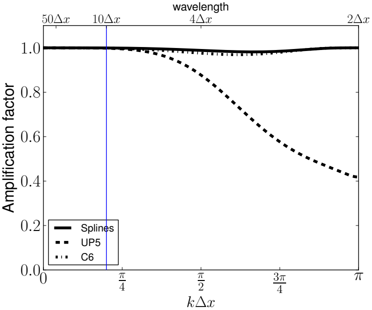
[TS_VADV_SPLINES, UV_VADV_SPLINES]

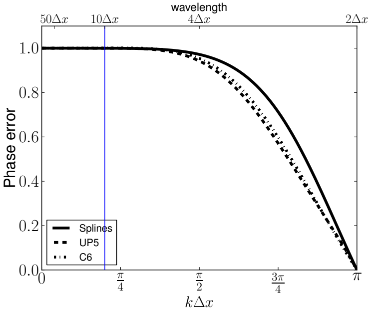
Les flux sont obtenus comme solution du problème tridiagonal

$$\mathrm{Hz}_{k+1}\widetilde{q}_{k-1/2} + 2(\mathrm{Hz}_k + \mathrm{Hz}_{k+1})\widetilde{q}_{k+1/2} + \mathrm{Hz}_k\widetilde{q}_{k+3/2} = 3(\mathrm{Hz}_k\overline{q}_{k+1} + \mathrm{Hz}_{k+1}\overline{q}_k)$$



$$q(\xi) = \overline{q}_k + \frac{\widetilde{q}_{k+\frac{1}{2}} - \widetilde{q}_{k-\frac{1}{2}}}{h_k}\xi + 6\left(\frac{\widetilde{q}_{k+\frac{1}{2}} + \widetilde{q}_{k-\frac{1}{2}}}{2} - \overline{q}_k\right)\left(\frac{\xi^2}{h_k^2} - \frac{1}{12}\right)$$





[VADV_ADAPT_IMP]

Idée : séparer la vitesse verticale Ω en une contribution explicite et une contribution implicite [Shchepetkin, 2015]

$$\Omega = \mathbf{\Omega^{(e)}} + \mathbf{\Omega^{(i)}}, \qquad \mathbf{\Omega^{(e)}} = \frac{\Omega}{f(\alpha^z_{\mathrm{adv}}, \alpha_{\max})}, \quad f(\alpha^z_{\mathrm{adv}}, \alpha_{\max}) = \begin{cases} 1, & \alpha^z_{\mathrm{adv}} \leq \alpha_{\max} \\ \alpha/\alpha_{\max}, & \alpha^z_{\mathrm{adv}} > \alpha_{\max} \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\mathbf{\Omega^{(e)}}$ intégré avec un schéma explicite (avec CFL $\alpha_{\max}$)

$\rightarrow$ $\mathbf{\Omega^{(i)}}$ intégré avec une schéma d'Euler upwind implicite

Configuration	Résolution	ancien Δt	nouveau Δt
BENGUELA [Penven et al.]	25 km	6300 s	7140 s
OMAN [Vic et al.]	2 km	160 s	470 s

- Pragmatique mais aucun contrôle sur les erreurs
- Impose l'utilisation d'un schéma linéaire pour la partie explicite

Schéma "akima" (e.g. Van Leer 1977, (67))

[TS_VADV_AKIMA] (compute_vert_tracer_fluxes.h)

$$\begin{aligned}
\widetilde{q}^{\,\color{blue}{\mathrm{C4}}}_{k-1/2} &= (7/6)\widetilde{q}^{\,\color{blue}{\mathrm{C2}}}_{k-1/2} - (1/12)(q_{k+1} + q_{k-2}) \\
&= \widetilde{q}^{\,\color{blue}{\mathrm{C2}}}_{k-1/2} - \frac{1}{6}\left(d_k - d_{k-1}\right), \qquad d_k = \frac{\Delta q_{k+1/2} + \Delta q_{k-1/2}}{2}
\end{aligned}$$

pour le schéma AKIMA on remplace la moyenne algébrique des pentes par la moyenne harmonique

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\frac{1}{\Delta q_{k+1/2}} + \frac{1}{\Delta q_{k-1/2}}} & \text{si } \Delta q_{k+1/2}\Delta q_{k-1/2} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Opérateur visqueux et (hyper-) diffusion

Forme de l'opérateur visqueux (Wajsowicz, 1993)

[UV_VIS2] Tenseur visqueux (uv3dmix.F)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) = \begin{pmatrix} \partial_x u - \partial_y v & \partial_y u + \partial_x v \\ \partial_x v + \partial_y u & -(\partial_x u - \partial_y v) \end{pmatrix}$$

l'opérateur de viscosité est donc donné par

$$-\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h \mathbf{u}'_h \rangle = \frac{1}{\mathrm{Hz}} \boldsymbol{\nabla}_h \cdot (A_M \, \mathrm{Hz} \, \boldsymbol{\sigma}), \qquad A_M \leftrightarrow \mathrm{visc2}$$

<u>Cette formulation assure</u>

1. La conservation de la quantité de mouvement
2. La conservation du moment angulaire
3. Le terme visqueux est strictement dissipatif

[UV_VIS4] Même logique appliquée 2 fois ($B_M \leftrightarrow \mathrm{visc4}$)

$$-\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}'_h \mathbf{u}'_h \rangle = -\frac{1}{\mathrm{Hz}} \boldsymbol{\nabla}_h \cdot \left(B_M \, \mathrm{Hz} \, \boldsymbol{\sigma'}\right), \qquad \boldsymbol{\sigma'} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h))$$

Fermeture de type Smagorinsky

[UV_VIS_SMAGO, UV_VIS2]

Coefficient de viscosité turbulente

$$A_M = C_M\,(\Delta x \Delta y)\,\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 + 2(\partial_y u + \partial_x v)^2}$$

Par défaut $C_M = {}^1\!/_{10}$ (paramétre *horcon* dans la routine hvisc_coef)

[TS_DIF_SMAGO, TS_DIF2]

Coefficient de diffusion turbulente

$$A_S = C_S\,(\Delta x \Delta y)\,\sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_y v)^2 + 2(\partial_y u + \partial_x v)^2}$$

Par défaut $C_S = {}^1\!/_{12}$ (paramétre *horcon* dans la routine hdiff_coef)

(Hyper)-diffusion tournée [TS_MIX_ISO, TS_MIX_GEO]

[TS_DIF2]

Sous l'approximation faible pente (i.e. $\|\boldsymbol{\nabla}_h \rho\| / \partial_z \rho \ll 1$) on a

$$-\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}_h' X' \rangle = \boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{R} \boldsymbol{\nabla} X \right), \qquad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} A_x & 0 & A_x \alpha_x \\ 0 & A_y & A_y \alpha_y \\ A_x \alpha_x & A_y \alpha_y & A_x \alpha_x^2 + A_y \alpha_y^2 \end{pmatrix}$$

où $\alpha_m = -\left(\partial_m \rho / \partial_z \rho \right)$, $A_x \leftrightarrow \mathrm{diff3u}$, $A_y \leftrightarrow \mathrm{diff3v}$.

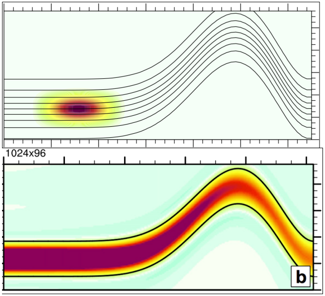
[TS_DIF4]

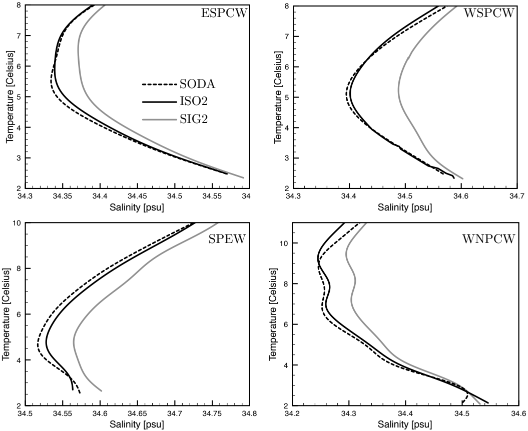
$$-\boldsymbol{\nabla}_h \cdot \langle \mathbf{u}_h' X' \rangle = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{R}' \boldsymbol{\nabla} \left(\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\mathbf{R}' \boldsymbol{\nabla} X \right) \right) \right), \quad \mathbf{R}' = \begin{pmatrix} \sqrt{B_x} & 0 & \sqrt{B_x} \alpha_x \\ 0 & \sqrt{B_y} & \sqrt{B_y} \alpha_y \\ \sqrt{B_x} \alpha_x & \sqrt{B_y} \alpha_y & \sqrt{B_x} \alpha_x^2 + \sqrt{B_y} \alpha_y^2 \end{pmatrix}$$

[TS_MIX_IMP] *Method of stabilizing corrections*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X^\star & = & X^n + \Delta t \, \mathcal{D}(X^n) \\ X^{n+1} & = & X^\star + \Delta t \, \partial_z \left\{ \mathrm{Akz}(z) \left(\partial_z X^{n+1} - \partial_z X^n \right) \right\} \end{array} \right.$$

Illustration de l'effet de la diffusion tournée et limitations





<u>Limitations</u>

- Basé sur l'hypothèse *faible pente*
- Diffusion non monotone à cause des termes croisés
- Suppose une évolution basse fréquence des isopycnes