

# Chapitre 3

## Turbulence géostrophique

La turbulence géostrophique est définie comme la turbulence se produisant dans un fluide tournant et stablement stratifié, en quasi-équilibre géostrophique. L'objet de ce chapitre est d'établir que ce genre d'écoulement possède de nombreuses propriétés de la turbulence bidimensionnelle. Le lecteur pourra aussi se référer à la revue plus détaillée de Danilov et Gurarie(2000).

### 3.1 Jets zonaux

Dans tout ce chapitre,  $x, y, z$  désignent respectivement les coordonnées zonale, méridienne et verticale.

#### 3.1.1 Jets zonaux dans les écoulements géophysiques

L'ubiquité de jets zonaux multiples dans les écoulements des atmosphères des planètes géantes ou dans l'océan terrestre est actuellement relativement bien documentée. Leur propriété commune est l'alternance de signe des vitesses zonales, successivement vers l'Est puis l'Ouest, que ce soit dans la direction méridienne (e.g. figures 3.1 et 3.2 (gauche) ) ou dans la direction verticale (e.g. jets profonds équatoriaux de la figure 3.2 (droite)). La dynamique de la turbulence géostrophique permet de rationaliser certains traits communs à toutes ces observations

#### 3.1.2 Effet de la rotation différentielle ("effet- $\beta$ ") sur la turbulence bidimensionnelle

##### Echelle de Rhines

Dans le cas d'un fluide en rotation rapide, pour les mouvements de plus petite échelle que le rayon de déformation, en l'absence de topographie, la conservation de la vorticité

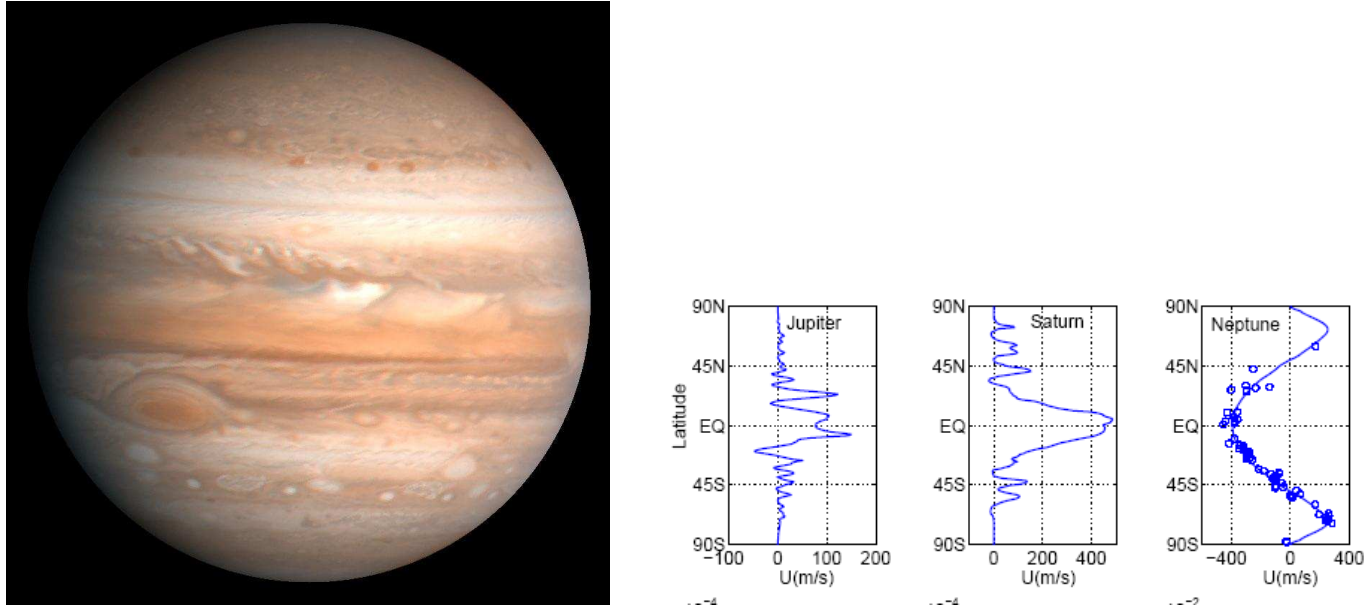


FIG. 3.1 – (gauche) Les bandes observées sur Jupiter depuis plus de 350 ans et sont visibles grâce aux nuages piégés par les jets zonaux. (droite) De telles alternances de vitesses zonales en fonction de la latitude sont également observées sur Saturne mais pas sur Neptune de plus petite taille.

1-year Mean Zonal Velocity at 400-m Depth

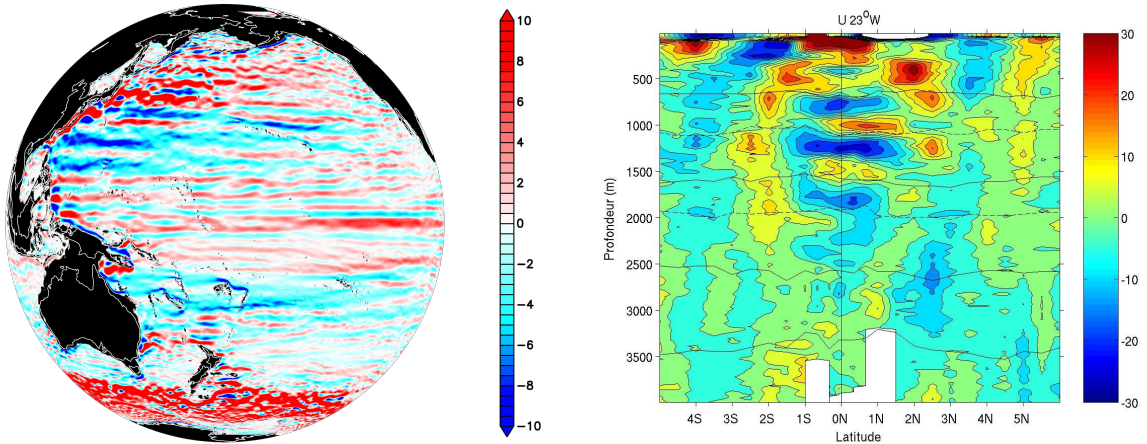


FIG. 3.2 – (gauche) Les analogues terrestres des jets multiples de Jupiter ne se trouvent pas dans l'atmosphère terrestre, mais plutôt dans l'océan, où la taille des bassins est suffisamment grande comparée au rayon interne de déformation. La figure montre une moyenne annuelle de la vitesse zonale de la simulation OFES (OGCM for the Earth Simulator) sur le Earth Simulator 1 ( $1/12^\circ$  ; 54 niveaux ; Sasaki(priv. comm., 2006). Ces jets zonaux sont de même signe sur toute la colonne d'eau et sont intensifiés en surface. Leur existence semble corroborée par les mesures d'altimétrie. (droite) Les jets zonaux de signes alternés sont aussi observés dans l'océan équatorial, leur alternance de signe se produisant sur la verticale (Gouriou et al. 2001 pour le cas Atlantique). Les jets sont confinés sur une largeur de  $\pm 1^\circ$  de latitude et existent dans tous les océans équatoriaux.

potentielle quasi-géostrophique peut s'écrire

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

où la vorticité potentielle est donnée par

$$q = \zeta + f$$

où  $\zeta$  est la vorticité relative et  $f$  est le paramètre de Coriolis. En première approximation, la variation du paramètre de Coriolis avec la latitude peut être prise en compte par l'approximation du plan- $\beta$  :  $f = f_0 + \beta y$ , où  $y$  est la distance méridienne au milieu de la bande de latitude considérée et  $\beta = \frac{df}{dy} = 2\Omega \cos \phi$ ,  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation de la Terre et  $\phi$  est la latitude du milieu du domaine.

Ceci peut se réécrire sous la forme

$$\frac{d(\zeta + \beta y)}{dt} = 0$$

ou encore

$$\frac{d\zeta}{dt} + \beta v = 0$$

En développant

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + \beta v = 0$$

L'échelle de temps caractéristique d'une onde de Rossby de vecteur d'onde  $(k, 0)$  est donnée par l'inverse de sa fréquence  $\beta/k$ , l'échelle de temps caractéristique des termes nonlinéaires d'advection est  $Uk$ , où  $U$  est l'échelle de vitesse. L'échelle spatiale pour laquelle l'échelle de temps des ondes est comparable à l'échelle de temps nonlinéaire est obtenue pour  $Uk \approx \beta/k$  ce qui donne pour *l'échelle de transition entre ondes et turbulence*

$$k_\beta = \sqrt{\frac{\beta}{U}} \quad (3.1)$$

Cette échelle, obtenue par des considérations dimensionnelles, intervient pour "arrêter" la cascade inverse d'énergie vers les grandes échelles et a été introduite par Rhines(1975). Cette prédiction correspond qualitativement à la phénoménologie observée lors de l'évolution spontanée d'une turbulence sur le plan- $\beta$  (figure 3.3).

### Prise en compte de l'anisotropie de l'arrêt de la cascade

Vallis et Maltrud(1993) ont affiné le mécanisme de transition entre ondes et turbulence en prenant en compte la relation de dispersion plus générale des ondes de Rossby barotropes,

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}$$

en égalisant l'échelle caractéristiques de temps des ondes avec le temps de retournement des tourbillons de nombre d'onde  $k$  tel que  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  dans une cascade inverse d'énergie en turbulence bidimensionnelle, correspondant à un taux constant de transfert  $\epsilon$

$$\tau = \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$$

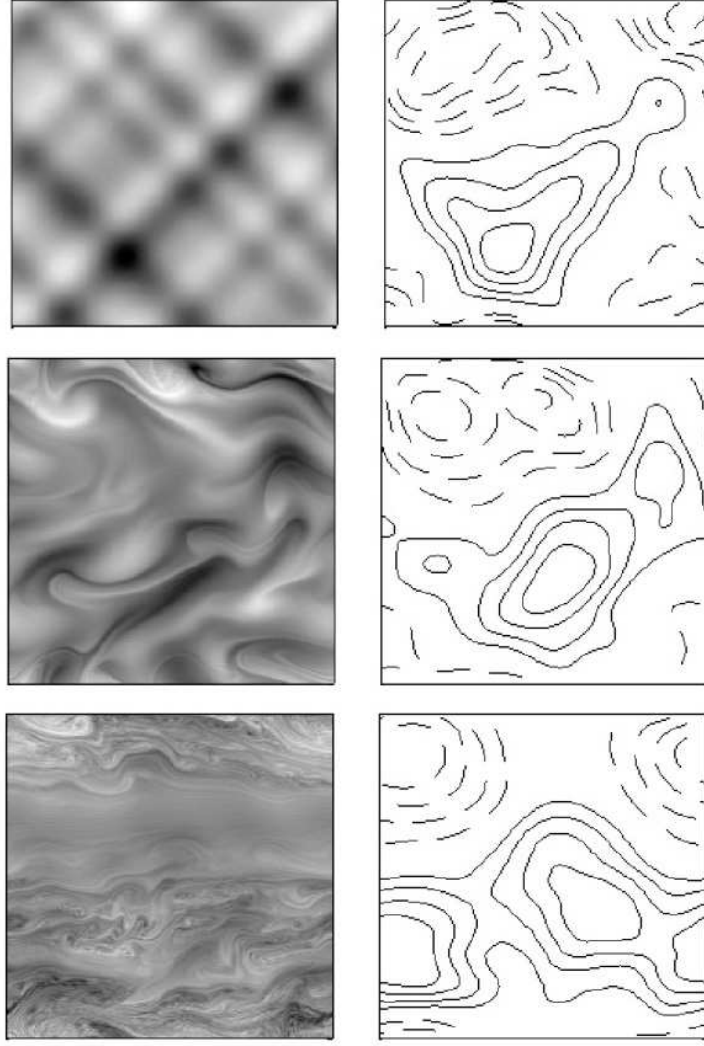


FIG. 3.3 – Evolution de la turbulence en décroissance libre du champ de vorticité (à gauche) et de fonction de courant (à droite) dans un domaine doublement périodique (de longueur  $2\pi$  à  $t = 0$ ,  $t = 50$  et  $t = 260$  unités de temps (inverse de vorticité rms), avec  $\beta = 3$  (adimensionnel). A la différence du cas avec  $\beta = 0$ , on n’observe pas d’apparition spontanée de vortex et une tendance à la zonalisation de l’écoulement se met en place.

$$\epsilon^{1/3} k^{2/3} = \frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2}$$

on trouve les échelles d’arrêt de la cascade dans les directions zonales et méridiennes, qui sont dessinées sur la figure 3.4(a). Ce raffinement de l’anisotropie de la cascade inverse sur le plan- $\beta$  semble vérifié dans l’évolution de la turbulence en décroissance libre (figure 3.4).

### Turbulence forcée à petite échelle

En présence de forçage et de dissipation dans une couche d’Ekman de fond, l’équation de vorticité potentielle s’écrit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta + \beta v = F - r\zeta$$

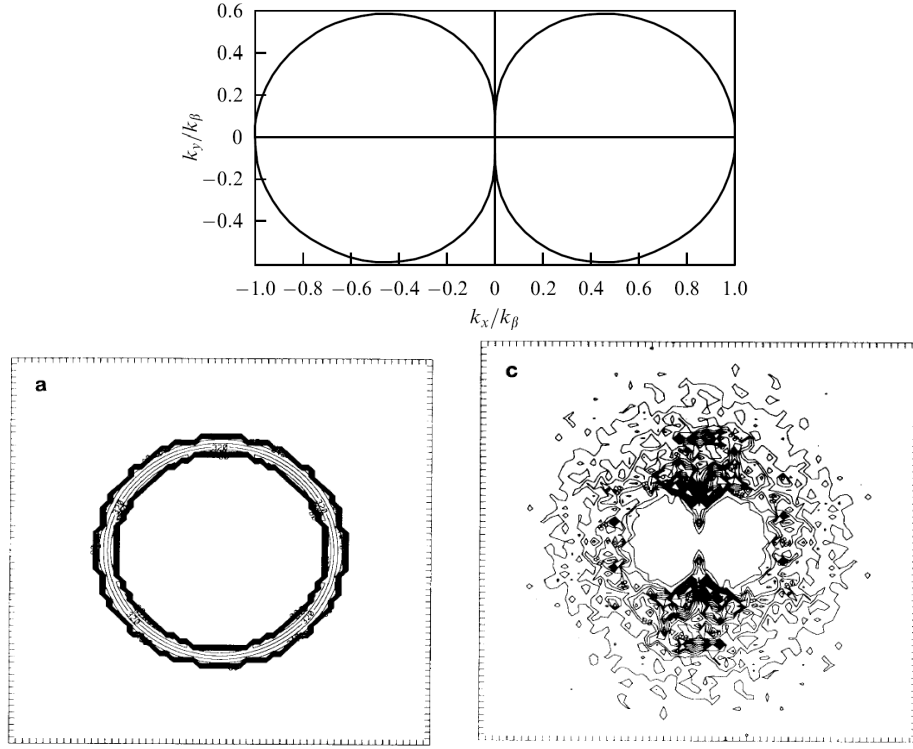


FIG. 3.4 – (haut) Echelles d'arrêt de la cascade sur le plan- $\beta$ , avec  $k_x = \pm k_\beta \cos^{8/5}\theta$ ,  $k_y = k_\beta \sin\theta \cos^{3/5}\theta$ , où  $\theta$  est l'angle entre le vecteur d'onde  $(k_x, k_y)$  et la direction zonale. (bas) Evolution dans l'espace des nombres d'onde de la simulation de la figure 3.3 au temps initial (gauche), où l'énergie est répartie dans une couronne de nombre d'onde élevé et au temps final (droite), où la cascade inverse très anisotrope atteint plus facilement les petits nombres d'onde méridiens, excitant des jets zonaux ( $\bar{u} = \partial_y \bar{\psi}$ )

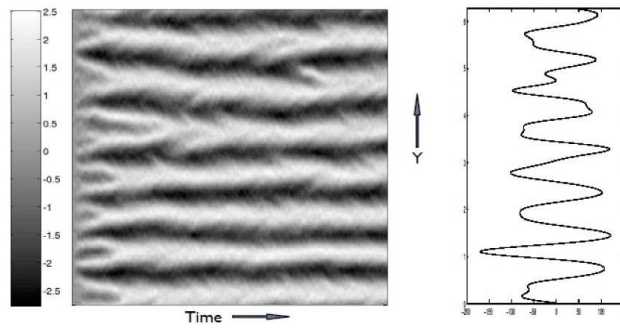


FIG. 3.5 – Champ de vitesse zonale moyenne, en fonction du temps et de la latitude, dans une simulation forcée autour de  $k = 80$  et telle que  $k_\beta = \sqrt{\beta/U} = 10$  dans un domaine de taille  $2\pi$  (gauche). La figure de droite montre le profil de  $\partial^2 \bar{u} / \partial y^2$  en fonction de la latitude. Les jets se forment très rapidement à partir de conditions initiales aléatoires et restent ensuite relativement stationnaires.

où  $F$  désigne le forçage et  $r$  l'échelle de temps frictionnelle. Il est important de réaliser que l'effet- $\beta$  ne peut pas dissiper l'énergie (il ne donne naissance qu'à une physique de propagation d'ondes), et que l'échelle de temps caractéristique  $U$  qui apparait dans la définition de  $k_\beta$  résulte de considérations énergétiques, obtenues en multipliant l'équation ci-dessus par  $\psi$  la fonction de courant ( $\zeta = \nabla^2 \psi$ ). L'équilibre statistique correspond à l'annulation du terme de gauche :

$$\epsilon = -\frac{1}{A} \int_A \psi F dA = \frac{r}{A} \int_A (\nabla \psi)^2 dA = 2r\bar{E}$$

où  $U = \sqrt{\bar{E}}$ . On obtient ainsi une échelle de Rhines plus précise

$$L_R = \left(\frac{\epsilon}{r\beta^2}\right)^{1/4}$$

Cette expression traduit que l'échelle d'arrêt de la cascade inverse dépend du taux de transfert d'énergie turbulente vers les grandes échelles, de l'effet  $\beta$  et de l'échelle de temps frictionnelle. Elle est relativement représentative des simulations purement barotropes de turbulence forcée sur le plan- $\beta$  comme celle de la figure 3.5, à la condition que la dissipation  $r$  ne soit pas trop forte, auquel cas, on n'observerait pas de jets zonaux mais des tourbillons plus isotropes.

### 3.1.3 Déstabilisation d'écoulements périodiques ("Kolmogorov flow")

En dehors d'arguments invoquant une cascade inverse qui se produirait de manière progressive dans l'espace spectral, la formation spontanée de jets peut également s'expliquer par l'instabilité intrinsèque d'un écoulement cisailé, spatialement périodique, du type

$$V = \sin x, \quad (3.2)$$

à une perturbation secondaire de plus grande échelle spatiale et telle que le champ de vitesse de l'onde secondaire soit orthogonal à l'onde primaire. Ainsi pour l'exemple présent, un écoulement sinusoidal de vitesse méridienne de petite échelle zonale se déstabiliserait au profit de jets zonaux de direction alternée dans la direction méridienne. Un phénomène d'instabilité conduit à une sélection d'échelle spatiale prédéfinie, à la différence d'arguments d'arrêt de cascade à la Rhines, qui correspond à une évolution progressive et continue des échelles.

Ce genre d'écoulement cisailé, spatialement périodique, avait été originellement suggéré par Kolmogorov, d'où son appellation dans la littérature par "Kolmogorov flow", comme étant l'archétype d'écoulement exhibant la propriété de "*viscosité négative*", c'est-à-dire qu'il peut *injecter de l'énergie à grande échelle*, à la différence d'une viscosité positive qui tend à l'opposé à *dissiper l'énergie à petite échelle*.

Ce type d'écoulement été étudié par de nombreux auteurs, dont Lorenz (1972) et Gill (1974), pour la déstabilisation des ondes de Rossby courtes. Plus récemment, dans un contexte d'écoulements à haut nombre de Reynolds, Frisch et al. (1994) puis Manfroi et Young (1999) ont étudié l'apparition de jets zonaux, très cohérents et de longue durée de vie, via une équation de type Cahn-Hilliard, connue en physique théorique pour bien représenter l'émergence spontanée de structures cohérentes de longue durée de vie.

La justification que l'onde primaire dans l'équation (3.2) corresponde à des vitesses méridiennes sinusoidales se base sur la propriété intrinsèque aux ondes de Rossby de nécessiter des vitesses méridiennes pour se propager sur le plan- $\beta$  (mouvements traversant les isolignes de vorticité planétaire).

L'animation ci-dessous (Thomson & Young, 2007) montre la même phénoménologie de formation de jets, par déstabilisation de vitesses méridiennes de petite échelle, initialement produites par l'instabilité barocline d'un écoulement dans un modèle à 2 couches et qui par "*viscosité négative*" conduise à la formation de jets zonaux.

Ces arguments de déstabilisation d'ondes de Rossby courtes ont pu également être appliquées au cas des ondes courtes de Yanai équatoriales, de périodes intra-saisonnières (ondes courtes) pour expliquer l'apparition des jets équatoriaux profonds (Hua et al., 2008).



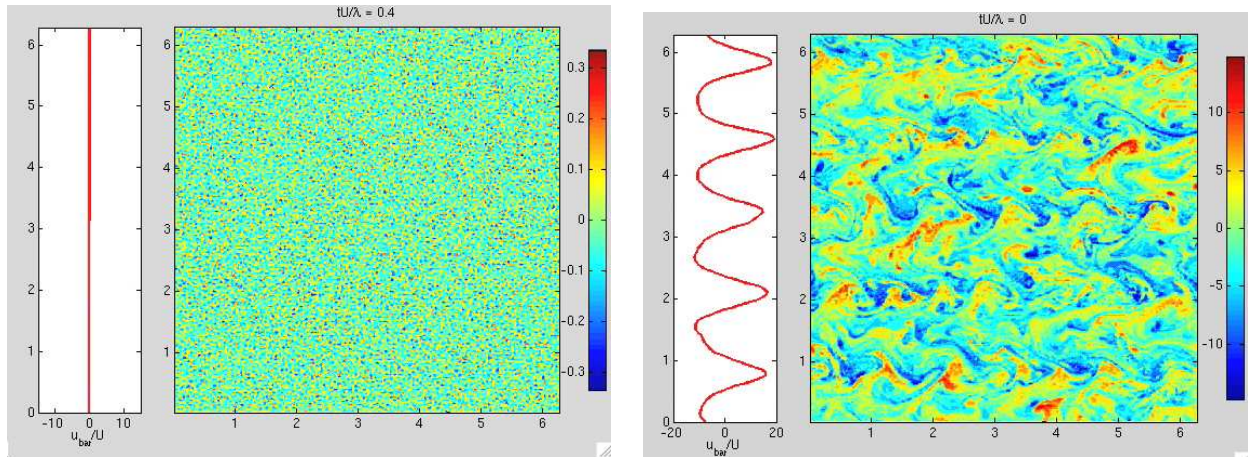


FIG. 3.6 – état initial et final de la vitesse zonale moyenne et de la vorticité potentielle de la première couche (Thomson & Young, 2006). Initialement de petites perturbations aléatoires sont introduites pour enclencher l’instabilité barocline.

### Références

- Danilov, S. D., and D. Gurarie, 2000 : Quasi-two-dimensional turbulence. *Phys.-Uspekhi*, 43, 863–900.
- Frisch, U., Legras, B. & Villone, B. 1994 Large-scale Kolmogorov flow on the beta-plane and resonant wave interactions. *Physica D* 94, 36–56.
- Gill, A. E. 1974 The stability of planetary waves on an infinite beta-plane. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* 6, 29–47.
- Gouriou, Y., Andrié, C., Boulès, B., Freudenthal, S., Arnault, S., Aman, A., Eldin, G., du Penhoat, Y., Baurand, F., Gallois, F. & Chuchla, R. 2001 Deep circulation in the equatorial Atlantic ocean. *Geophys. Res. Lett.* 28, 819–822.
- Hua B.L., M. d’Orgeville, C. Menesguen, M. Fruman, R. Schopp, P. Klein and H. Sasaki. 2008. Destabilization of Mixed Rossby Gravity waves and equatorial zonal jets formation, *J. Fluid Mech.*, 610, 311-341
- Lorenz, E. N. 1972 Barotropic instability of Rossby wave motion. *J. Atmos. Sci.* 29, 258-269.
- Manfroi, A. J. & Young, W. R. 1999 Slow evolution of zonal jets on the beta-plane. *J. Atmos. Sci.*, 56, 784–800.
- Rhines, P.B. 1975. Waves and turbulence on a  $\beta$  plane, *J. Fluid Mech.*, 69, 417-443.
- Vallis, G. & Maltrud, M. 1993 Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.* 23, 1346–1362.
- Vallis G. K. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, 745 pp.



## 3.2 Turbulence géostrophique stratifiée

### 3.2.1 Turbulence géostrophique dans un modèle à deux couches (Salmon, 1980)

On considère un modèle à 2 couches d'épaisseurs égales dans le cas où l'effet  $\beta$  n'est pas pris en compte ( $\beta = 0$ )

$$\frac{\partial q_i}{\partial t} + J(\psi_i, q_i) = 0, \quad [i = 1, 2],$$

avec les définitions :

$$q_1 = \nabla^2 \psi_1 + K_R^2 (\psi_2 - \psi_1), \quad q_2 = \nabla^2 \psi_2 + K_R^2 (\psi_1 - \psi_2),$$

$$J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x}, \quad K_R^2 = 2 \frac{f_0^2}{g'H}$$

où  $K_R$  est l'inverse du rayon de déformation.

On a conservation de l'énergie totale (énergie cinétique de chaque couche plus énergie potentielle)

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = 0, \quad \hat{E} = \frac{1}{2} \int [(\nabla \psi_1)^2 + (\nabla \psi_2)^2 + K_R^2 (\psi_1 - \psi_2)^2] dA \quad (3.3)$$

et de l'énstrophie de chaque couche

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{Z}_1}{dt} &= 0, \quad \hat{Z}_1 = \int_A q_1^2 dA, \\ \frac{d\hat{Z}_2}{dt} &= 0, \quad \hat{Z}_2 = \int_A q_2^2 dA, \end{aligned} \quad (3.4)$$

#### Décomposition barotrope et barocline

Les fonctions de courant barotrope et barocline sont données par

$$\psi \equiv \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2), \quad \tau \equiv \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2). \quad (3.5)$$

La vorticité potentielle de chaque couche peut être réécrite :

$$\begin{aligned} q_1 &= \nabla^2 \psi + (\nabla^2 - K_R^2) \tau \\ q_2 &= \nabla^2 \psi - (\nabla^2 - K_R^2) \tau \end{aligned} \quad (3.6)$$

Les équations d'évolution en fonction des composantes barotrope et barocline sont

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + J(\tau, (\nabla^2 - K_R^2) \tau) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 - K_R^2) \tau + J(\tau, \nabla^2 \psi) + J(\psi, (\nabla^2 - K_R^2) \tau) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

–  $\psi$  et  $\tau$  sont des modes verticaux de mode vertical respectif de 0 et de 1.

- Les divers types de triades qui peuvent interagir sont :

$$(\psi, \psi) \longrightarrow \psi, \quad (\tau, \tau) \longrightarrow \psi, \quad (\psi, \tau) \longrightarrow \tau. \quad (3.8)$$

c'est-à-dire d'une part les triades barotropes ne faisant intervenir que des composantes barotropes et d'autre part, les deux derniers types de triades sont des triades baroclines. Il n'existe pas de triade faisant intervenir uniquement le mode barocline.

- chaque fois que l'opérateur Laplacien  $\nabla^2$  apparait dans les équations de la composante barocline  $\tau$ , il est accompagné de  $-K_R^2$ . Tout se passe comme si le nombre d'onde effectif du mode barocline est tel que

$$k^2 \longrightarrow k^2 + K_R^2$$

### Propriétés de conservation

On peut introduire les spectres d'énergie barotrope et barocline :

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \int_A (\nabla \psi)^2 dA, & \hat{T} &= \int T(k) dk \\ \hat{C} &= \int_A [(\nabla \tau)^2 + K_R^2 \tau^2] dA, & \hat{C} &= \int C(k) dk \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie totale s'écrit :

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = \frac{d}{dt}(\hat{T} + \hat{C}) = 0.$$

La conservation de l'enstrophie est donnée par

$$\frac{d\hat{Z}}{dt} = 0, \quad \hat{Z} = \int_A (\nabla^2 \psi)^2 + [(\nabla^2 - K_R^2) \tau]^2 dA$$

et elle peut s'écrire en fonction des spectres d'énergie de chaque composante

$$\hat{Z} = \int_A Z(k) dk = \int [k^2 T(k) + (k^2 + K_R^2) C(k)] dk.$$

de manière analogue au cas de la turbulence strictement bidimensionnelle.

### Analyse phénoménologique

#### Triades barotropes

Dans ce cas l'énergie cinétique barotrope et l'enstrophie barotrope sont conservées comme dans le cas d'un écoulement strictement bidimensionnel/

$$\text{Energie : } \frac{d}{dt}(T(k) + T(p) + T(q)) = 0$$

$$\text{Enstrophie : } \frac{d}{dt}(k^2 T(k) + p^2 T(p) + q^2 T(q)) = 0$$

#### Triades baroclines

On suppose que deux nombres d'ondes baroclines  $(p, q)$  interagissent avec un nombre d'onde barotrope  $(k)$ . On aura

$$\text{Energie : } \frac{d}{dt}(T(k) + C(p) + C(q)) = 0$$

$$\text{Enstrophie : } \frac{d}{dt}(k^2 T(k) + (p^2 + K_R^2) C(p) + (q^2 + K_R^2) C(q)) = 0$$

On peut alors distinguer les limites suivantes :

- $(p, q) \gg K_R$  : on peut négliger  $K_R^2$  dans l'expression des triades baroclines et toutes se comportent comme des triades barotropes car  $q_i = \nabla^2 \psi_i + K_R^2(\psi_j - \psi_i) \approx \nabla^2 \psi_i$  où  $i = 1, 2$  et  $j = 3 - i$ . Dans ce cas chaque couche du modèle est découplée de l'autre. L'ensrophie cascade vers les petites échelles et l'énergie va vers les grandes échelles.
- $(p, q, k) \ll K_R$  : les conservations d'énergie et d'ensrophie reviennent à

$$\frac{d}{dt}(C(p) + C(q)) = 0 \quad (3.9)$$

L'énergie est conservée dans le mode barocline seul. Il n'y a pas de contrainte sur les transferts d'énergie vers les petites échelles et pas de production d'énergie barotrope.

- $(p, q, k) \approx K_R$  on introduit le pseudo-nombre d'onde  $k', q' \dots$  via  $k'^2 = k^2 + K_R^2$  pour chaque mode barocline :

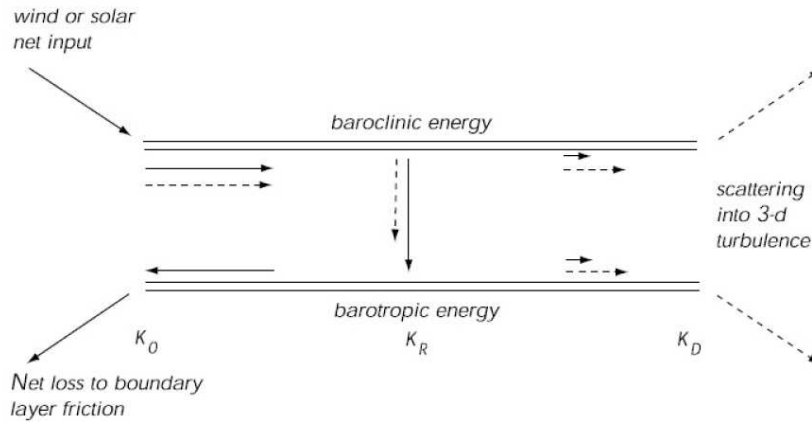
$$\frac{d}{dt}(E(k) + E(p) + E(q)) = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}(k'^2 E(k) + p'^2 E(p) + q'^2 E(q)) = 0$$

où  $E(k)$  est l'énergie totale de chaque mode (barotrope ou barocline). On a une analogie formelle des lois de conservation avec le cas bidimensionnel et on s'attend à ce que l'énergie cascade vers les plus petits "pseudo-nombres d'onde" c'est-à-dire les petits  $k'$ . Puisque le plus petit "pseudo-nombre d'ondes" correspond au mode barotrope pour lequel ( $K_R = 0$ ), ceci implique **une barotropisation de l'écoulement**

- Aux petites échelles  $k^2 \gg K_R^2$ , on a vu qu'il y a découplage des 2 couches et l'ensrophie va vers les petites échelles dans chaque couche.

Ces diverses considérations conduisent au schéma suivant pour la turbulence dans un milieu à 2 couches.



La source d'énergie barocline à grande échelle est due au gradient méridien de température entre le pôle et l'équateur pour l'atmosphère, ou pour le cas océanique pourrait être due à un forçage de chaleur différentiel en latitude. L'instabilité barocline cause une injection d'énergie au voisinage du rayon de déformation où à la fois le mode barotrope et le mode barocline sont excités. Il s'en suit une cascade d'énstrophie vers les petites échelles spatiales dans chaque couche, jusqu'à ce que les effets tridimensionnels deviennent importants. Aux échelles plus grandes que le rayon de déformation, il y a une cascade inverse d'énergie vers les échelles spatiales les plus grandes. L'énergie du mode barotrope aux échelles spatiales les plus grandes sont dissipées par les effets de couche limite dans la couche d'Ekman de fond.

Dans le cas atmosphérique, le rayon de déformation est très grand et est voisin de l'échelle de Rhines et il y a peu de place pour une cascade inverse. On observe un spectre en  $k^{-3}$  aux échelles voisines et plus petites que le rayon de déformation et il semblerait que cette pente soit compatible avec une cascade directe d'énstrophie, quoiqu'il y ait actuellement un débat sur la robustesse de cette interprétation.

On note également sur la figure 3.7, aux échelles de l'ordre de la centaine de kms, un spectre voisin de  $k^{-5/3}$ . Actuellement, l'interprétation qui prévaut est que ce spectre en  $-5/3$  est probablement dû à des effets non-géostrophiques, telle qu'une cascade directe d'énergie due au déferlement des ondes de gravité ou à des instabilités de type Kelvin-Helmholtz se produisant en turbulence en milieu fortement stratifié (cours suivant). Auparavant, la vision erronée était celle d'une cascade inverse d'énergie bidimensionnelle liée à une source d'énergie localisée à de très petites échelles spatiales (comme les phénomènes de convection), mais cette vision n'a pas survécu aux analyses de données d'avion par Cho & Lindborg(2001).

Dans le cas océanique, les mesures de spectres d'énergie ont pu être obtenus à partir de données d'altimétrie, mais à ce jour il reste encore quelques incertitudes sur l'étendue des zones inertiels et de leur pente à partir des données satellitales existantes, avec une distance intertrace de l'ordre de la centaine de kms. Il semble cependant que les données altimétriques indiqueraient une cascade inverse d'énergie nourrissant les plus grandes échelles horizontales (Scott & Wang, 2007).

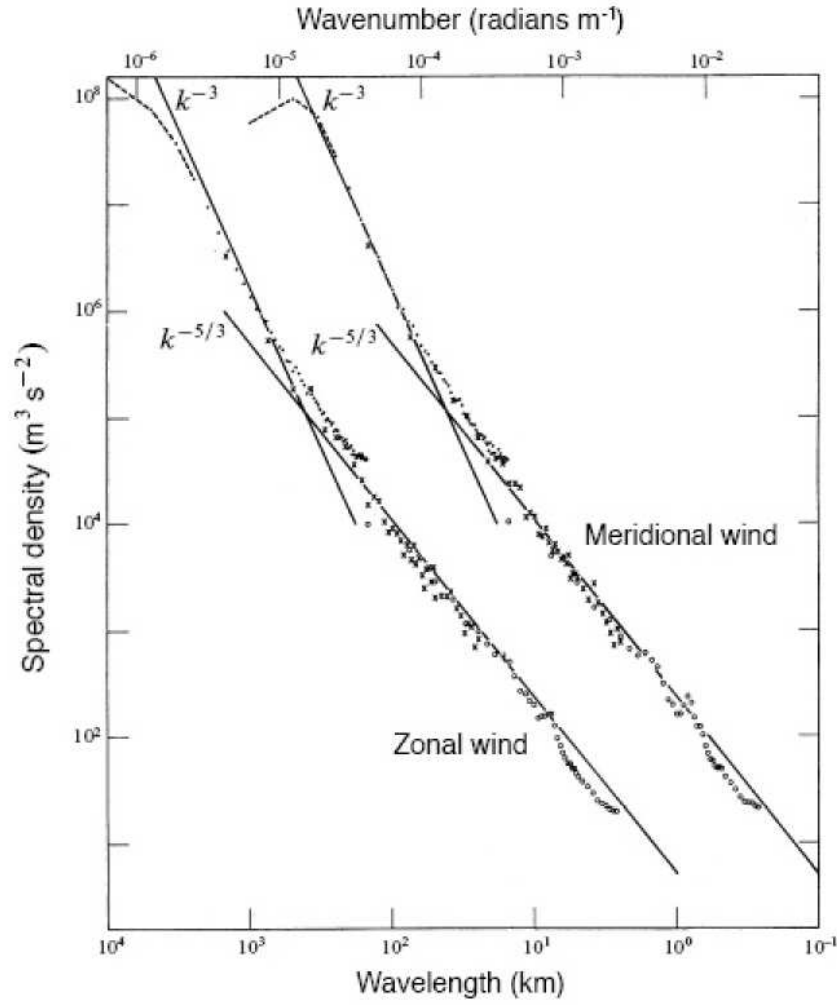


FIG. 3.7 – Spectre d'énergie de la composante du vent méridienne et zonale au voisinage de la tropopause, provenant de mesures par avions de lignes commerciales entre 1975 et 1979. Le spectre méridien a été décalé vers la droite sur la figure.

### 3.2.2 Isotropie de la turbulence géostrophique en milieu continu stratifié. Théorie de Charney (1971)

L'équation centrale est la conservation de la vorticité potentielle quasi-géostrophique

$$\nabla_2^2 \psi + \partial_z \left( \frac{f^2}{N^2} \partial_z \psi \right)$$

où  $\nabla_2 = (\partial_x, \partial_y)$ , et la fonction de courant  $\psi(x, y, z, t)$  dépend des 3 coordonnées d'espace  $(x, y, z)$  et du temps  $t$ . Charney (1971) fait la conjecture, qu'à cause de l'isomorphisme mathématique entre l'opérateur  $\nabla_h^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  et le laplacien tridimensionnel  $\partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_z \left( \frac{f^2}{N^2} \partial_z \right)$  qui apparaît dans la définition de la vorticité potentielle, la double cascade, – inverse d'énergie et directe d'ensrophie, – qui prévaut en turbulence bidimensionnelle, doit également se vérifier en turbulence géostrophique en milieu continu stratifié, à condition de renormaliser la

coordonnée verticale par

$$z \implies \frac{N}{f} z$$

Charney invoque l'existence de *deux invariants*, l'énergie totale et l'ensrophie potentielle (variance de la vorticité potentielle), pour prédire une profonde analogie entre turbulence bidimensionnelle et turbulence quasigéostrophique.

Explicitement, Charney (1971) prédit que les lois d'échelles en  $-5/3$  et en  $-3$ , établies pour la turbulence bidimensionnelle, devraient également être observées en turbulence géostrophique, si on transforme le nombre d'onde bidimensionnel horizontal en un nombre d'onde tridimensionnel

$$k_2 = (k_x, k_y) \implies k_3 = (k_x, k_y, k_z),$$

et qu'il y aura de plus équiartition entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en turbulence géostrophique.

Il faut noter que cette conjecture d'isotropisation 3D de Charney est uniquement basée sur la forme de l'opérateur de vorticité potentielle et ignore le fait que l'opérateur d'advection pour les équations quasi-géostrophiques,

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$$

correspond à un opérateur d'advection strictement bidimensionnel et non tridimensionnel.

### Turbulence forcée

L'isotropisation 3D de Charney, uniquement basée sur la forme de l'opérateur de vorticité potentielle, ne discutait pas d'effets d'inhomogénéité sur la verticale, alors que l'atmosphère ou l'océan ont tous deux une extension verticale finie. Hua & Haidvogel(1986) ont investigué cette question d'isotropisation 3D, notamment pour le cas  $N = \text{const.}$  dans un domaine d'extension verticale finie, avec toit rigide ( $w = 0$ ) à la surface et au fond, en décomposant la fonction de courant en modes verticaux, solutions du problème de Sturm-Liouville :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{f^2}{N^2} \frac{\partial}{\partial z} F_m(z) \right] = -\lambda_m^2 F_m(z).$$

L'allure des modes verticaux est donnée dans la figure 3.8. *La signification physique de  $\lambda_m$  est simplement l'inverse du rayon de déformation du mode vertical  $m$ .* Les simulations sont forcées par l'instabilité d'un courant moyen et *la prédiction de Charney de l'isotropisation 3D a pu être vérifiée pour les échelles plus petites que le pic de chaque mode.* On voit en effet que lorsque le spectre est tracé en fonction du nombre d'onde tridimensionnel, tous les spectres collapent sur une courbe unique (figure 3.9(bas, droite)).

La signification physique de cette isotropisation 3D peut être comprise en examinant la figure 3.10 qui montre la fonction de courant pour chaque mode vertical, révélant que plus le mode vertical est élevé, plus son échelle horizontale devient petite.

Ces résultats concernant l'isotropisation 3D de Charney en turbulence forcée ont été confirmés à beaucoup plus haute résolution très récemment par Vallgren & Lindborg (2010), avec une résolution de  $1024^3$  points de grille.

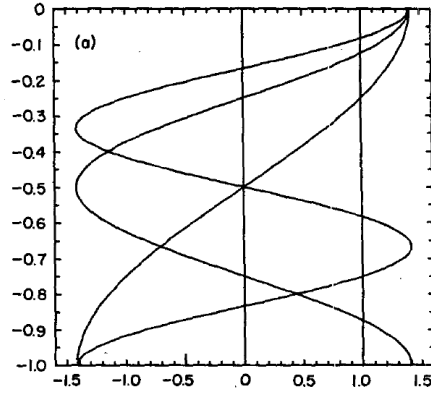
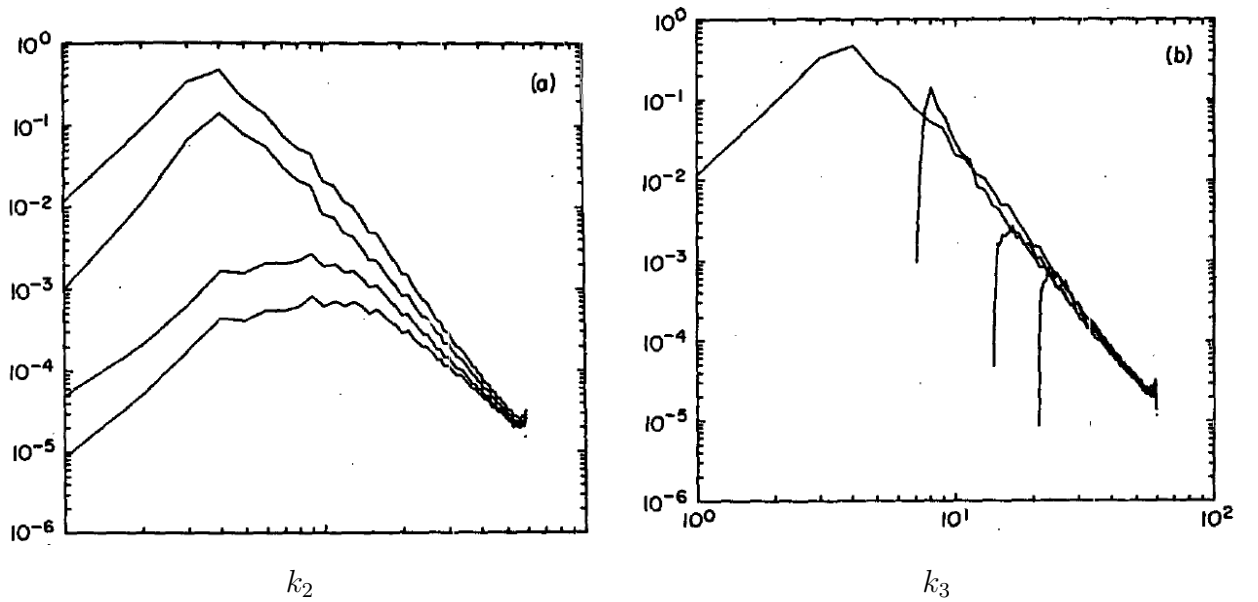


FIG. 3.8 – (haut) Modes verticaux pour le cas d'une fréquence de Brunt-Vaissala constante ;

FIG. 3.9 – (gauche) Spectre d'énergie des différents modes verticaux en fonction du nombre d'onde horizontal  $k_h$ , tel que  $k_h^2 = k_x^2 + k_y^2$ ; (droite) Spectre d'énergie des différents modes verticaux en fonction du nombre d'onde tridimensionnel  $k_3$ , tel que  $k_3^2 = k_x^2 + k_y^2 + \lambda_n^2$ , Hua & Haidvogel (1986)

### Turbulence en décroissance libre

McWilliams et al. (1989) et McWilliams et al. (1994) ont étudié la conjecture de Charney à des résolutions tridimensionnelles croissantes pour un domaine triplement périodique, s'affranchissant des effets de toutes frontières. Le premier article doit être présenté lors du prochain cours. L'évolution temporelle du champ de vorticité est illustré sur la figure 3.11 pour le deuxième article. Les mesures de l'isotropisation 3D de Charney concernent à la fois le spectre d'énergie, mais aussi d'entrophie, pour lequel une légère anisotropie apparaît pour l'entrophie (McWilliams et al. 1994).



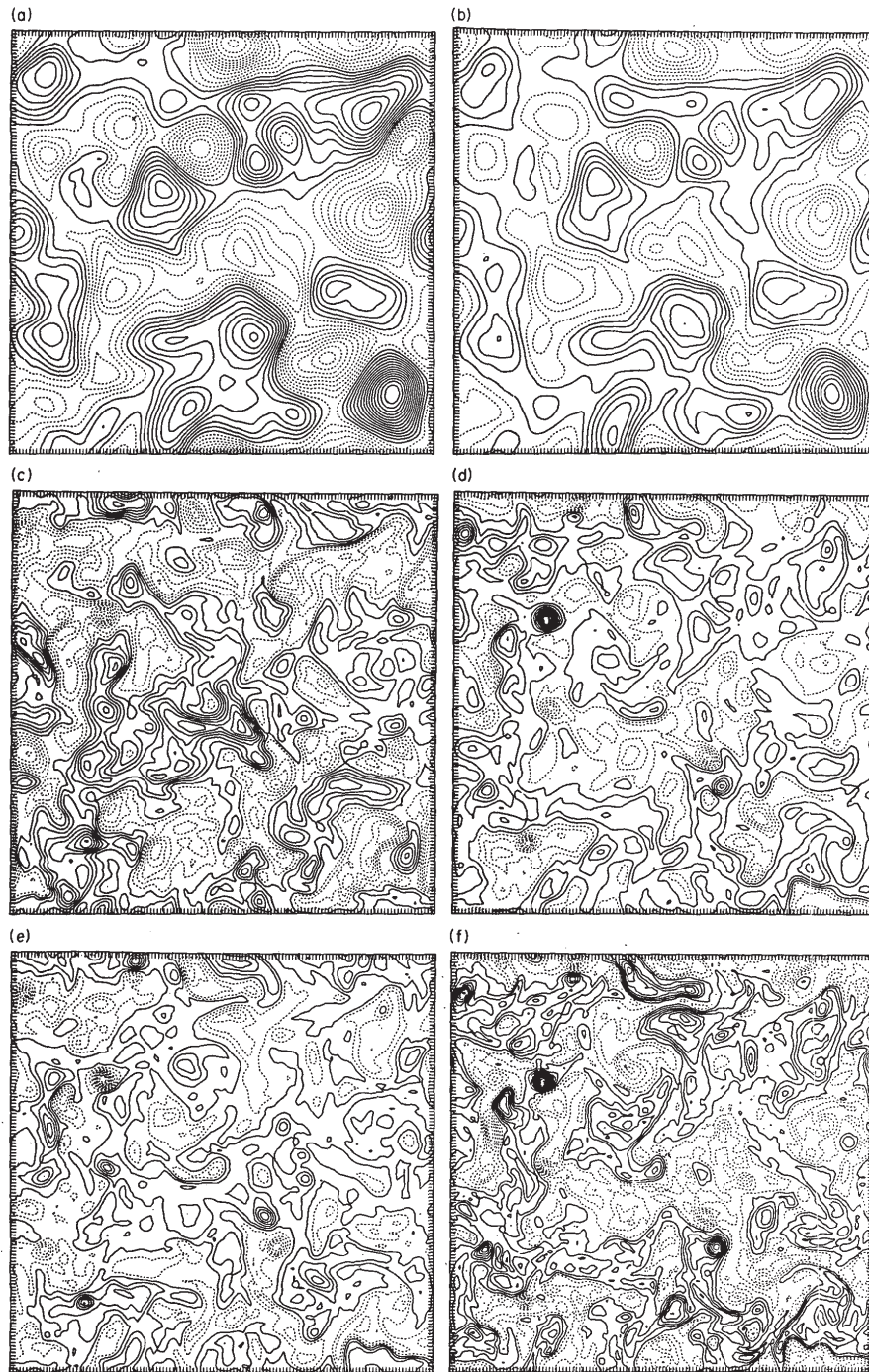


FIG. 6. Horizontal contours plots of the various modal components ( $m = 0$  to 5) of the streamfunction field for a case with a vertical resolution of  $N_v = 5$  (run 4, Table 1). The contour intervals are respectively 0.1, 0.08, 0.008, 0.01, 0.008 and 0.003.

FIG. 3.10 – Champ de fonction de courant du mode barotrope et des 5 premiers modes baroclines (Hua & Haidvogel, 1986)

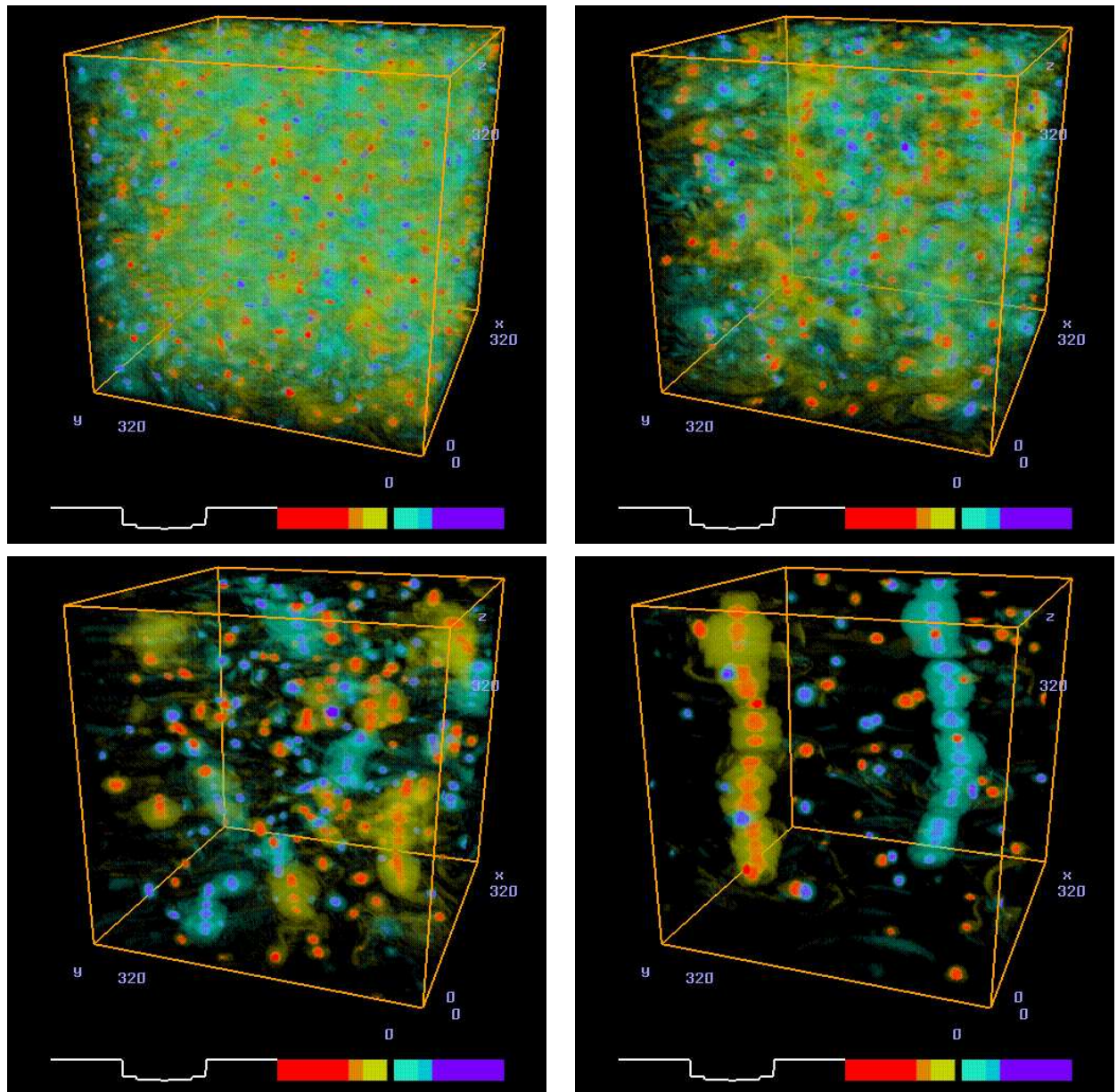


FIG. 3.11 – Evolution temporelle du champ de vorticité potentielle dans une simulation de turbulence géostrophique en décroissance libre ( $320^3$  points de grille). Noter la rapide concentration initiale de la vorticité potentielle en structures isolées tridimensionnelles. L volution ultérieure est telle que les vortex de même signe ont tendance   s aggr ger et   s aligner sur la verticale, pour former dans l  tat final deux vortex de signe opposés et presque barotropes (McWilliams et al., 1994)

### 3.2.3 Surface quasi-géostrophie

Voir cours de X.Capet (classe 4).

L  quation de conservation qui prévaut pour ce cas est la conservation le long d une trajectoire lagrangienne de la température

$$\frac{D}{Dt}\theta = 0$$



où la température  $\theta(x, y, t) = (\alpha g/f)T = \partial_z \psi(y, y, 0, t)$  est la température de surface ( $z = 0$ ) où  $w = 0$ . La fonction de courant est déterminée par l'inversion de la vorticité potentielle qui est nulle par hypothèse ( $q = 0$ )

$$\left( \nabla_h^2 + \frac{f^2}{N^2} \partial_{zz} \right) \psi = 0$$

Ce système possède deux invariants, l'énergie totale,  $E$  (cinétique et potentielle), l'autre est la variance de la température de surface (renormalisée pour pouvoir l'interpréter comme une énergie potentielle)

$$P_s = \frac{f^2}{2N^2} \int \int dx dy \theta^2$$

Dans le cas présent, la conservation de l'ensrophie est triviale puisqu'elle est nulle. Les lois inertielles ont été déterminées par Blumen(1978) : elles diffèrent du cas quasi-géostrophique intérieur de Charney mais correspondent aussi à une double cascade : cascade directe de l'énergie potentielle  $P_s$  avec un spectre en température en  $k^{-5/3}$ , et une cascade inverse d'énergie totale  $E$  pour laquelle le spectre en température est en  $k^{-1}$ .

La figure 3.12 de Capet et al. (2008) correspond au régime avec un spectre en température en  $k^{-5/3}$  et montre que le spectre d'énergie cinétique en surface présente également une loi d'échelle en  $k^{-5/3}$  et que même si la température cascade vers les petites échelles, on observe une *cascade inverse d'énergie de l'énergie cinétique de surface*.

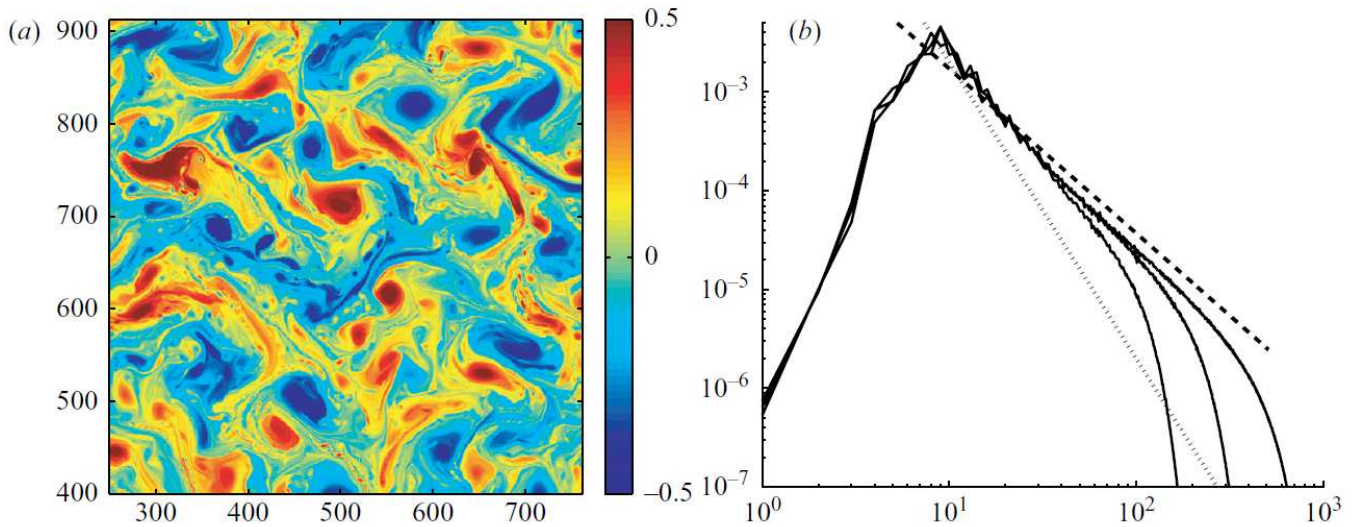


FIG. 3.12 –

### Références

Capet, X., P. Klein, B.L. Hua, G. Lapeyre, and J.C. McWilliams, 2008a : Surface kinetic energy transfer in SQG flows. J. Fluid Mech. 604, 165-175.

Charney, J. 1971. Geostrophic turbulence, J. Atmos. Sci., 28, 1087-1095.

Cho JYN, Lindborg E, 2001. Horizontal velocity structure functions in the upper troposphere and lower stratosphere 1. Observations Hua B.L. and D.B. Haidvogel, 1986. Numerical

simulations of the vertical structure of quasi-geostrophic turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 43, 2923-2936.

McWilliams, J.C. 1989. Statistical properties of decaying geostrophic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 198, 199-230

McWilliams, J.C., J.B. Weiss, and I. Yavneh, 1994 : Anisotropy and coherent structures in planetary turbulence. *Science* 264, 410-413.

Salmon, R., 1980 : Baroclinic instability and geostrophic turbulence. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, 10, 25-52.

Thompson, A. F., W. R. Young, 2007 : Two-Layer Baroclinic Eddy Heat Fluxes : Zonal Flows and Energy Balance. *J. Atmos. Sci.*, 64, 3214–3231.

Vallgren & E. Lindborg, 2010. Charney isotropy and equipartition in quasi-geostrophic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 656, 448–457.

coming up soon : From cigars& balls to pancakes !