

## 1.2 Turbulence bidimensionnelle

La turbulence bidimensionnelle se comporte de manière radicalement différente du cas tridimensionnel et ceci est dû à l'existence d'un autre invariant, l'ensrophie (définie ci-dessous), en plus de l'énergie. En 2D, l'équation de vorticité s'écrit

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \zeta = \nu \nabla^2 \zeta \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{u} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j}$  et  $\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{u}$ . La fonction de courant est  $\psi$ ,  $u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$  et  $\zeta = \nabla^2 \psi$ .

Les deux invariants du système non-visqueux sont :

$$\begin{cases} \hat{E} = \frac{1}{2} \int (u^2 + v^2) dA, & \frac{d\hat{E}}{dt} = 0 \\ \hat{Z} = \frac{1}{2} \int \zeta^2 dA, & \frac{d\hat{Z}}{dt} = 0 \end{cases}$$

où l'intégrale est prise sur un domaine de surface finie soit pour des conditions de vitesse normale à la paroi nulle, soit pour des conditions aux limites périodiques. La quantité  $\hat{Z}$  est appelée ensrophie. Cette loi de conservation supplémentaire est due au fait que l'étirement des tourbillons (vortex stretching) qui joue un rôle fondamental en 3 dimensions est identiquement nul en bidimensionnel. En fait, comme, en 2D non visqueux, la vorticité est conservée pour chaque particule fluide, l'intégrale de n'importe quelle fonction de la vorticité est conservée intégralement :

$$\frac{d}{dt} g(\zeta) = 0$$

et

$$\frac{d}{dt} \int_A g(\zeta) dA = 0$$

où  $g(\zeta)$  est une fonction arbitraire de  $\zeta$ . De cette infinité d'invariants, la conservation de l'ensrophie a des conséquences très importantes sur le flux d'énergie entre échelles.

### 1.2.1 Transfert d'énergie et d'ensrophie en turbulence bidimensionnelle

La turbulence bidimensionnelle diffère profondément de la turbulence tridimensionnelle car l'énergie est transférée vers les grandes échelles à cause de l'existence des deux contraintes intégrales de conservation d'énergie et d'ensrophie.

#### Arguments de conservation d'énergie et d'ensrophie

L'énergie et l'ensrophie sont définies dans l'espace spectral comme

$$\begin{aligned} \hat{E} &= \int \mathcal{E}(k) dk \\ \hat{Z} &= \int Z(k) dk = \int k^2 \mathcal{E}(k) dk, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}(k)$  et  $Z(k)$  sont les spectres d'énergie et d'ensrophie. Le barycentre du spectre d'énergie permet de caractériser l'échelle dominante

$$k_e = \frac{\int k \mathcal{E}(k) dk}{\int \mathcal{E}(k) dk}$$

Par définition on va normaliser par l'énergie de l'écoulement et le dénominateur sera pris égal à 1. L'étalement de la distribution d'énergie est évalué via :

$$I \equiv \int (k - k_e)^2 \mathcal{E}(k) dk, \quad \frac{dI}{dt} > 0 \quad (1.2)$$

On obtient en développant :

$$\begin{aligned} I &= \int k^2 \mathcal{E}(k) dk - 2k_e \int k \mathcal{E}(k) dk + k_e^2 \int \mathcal{E}(k) dk \\ &= \int k^2 \mathcal{E}(k) dk - k_e^2 \int \mathcal{E}(k) dk \end{aligned} \quad (1.3)$$

car  $k_e = \int k \mathcal{E}(k) dk$  est le barycentre du spectre d'énergie. Comme à la fois l'énergie et l'ensrophie sont conservées (1.3) implique que :

$$\frac{dk_e^2}{dt} = -\frac{1}{\hat{E}} \frac{dI}{dt} < 0$$

Le barycentre du spectre d'énergie se déplace vers les petits nombres d'onde, c'est-à-dire les grandes échelles spatiales, ainsi que l'illustre la figure ci-dessous.

### Cascade directe d'ensrophie

Une mesure appropriée du barycentre de l'ensrophie doit montrer une cascade vers les grands nombres d'onde. La démonstration est analogue à celle de l'énergie à ceci près que l'on travaille avec l'inverse d'un nombre d'ondes, c'est-à-dire une échelle de distance, notée  $q = 1/k$ . On va supposer que la distribution d'ensrophie s'étale par interactions non-linéaires :

$$\frac{dJ}{dt} > 0$$

où :

$$J \equiv \int (q - q_e)^2 Z(q) dq, \quad (1.4)$$

avec :

$$q_e = \frac{\int k Z(k) dk}{\int Z(k) dk}$$

En développant l'intégrande dans l'équation (1.4), on obtient

$$J = \int q^2 Z(q) dq - q_e^2 \int Z(q) dq$$

Le terme  $\int q^2 Z(q) dq$  est conservé car il correspond à l'énergie. Donc

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{d}{dt} q_e^2 \int Z(q) dq$$

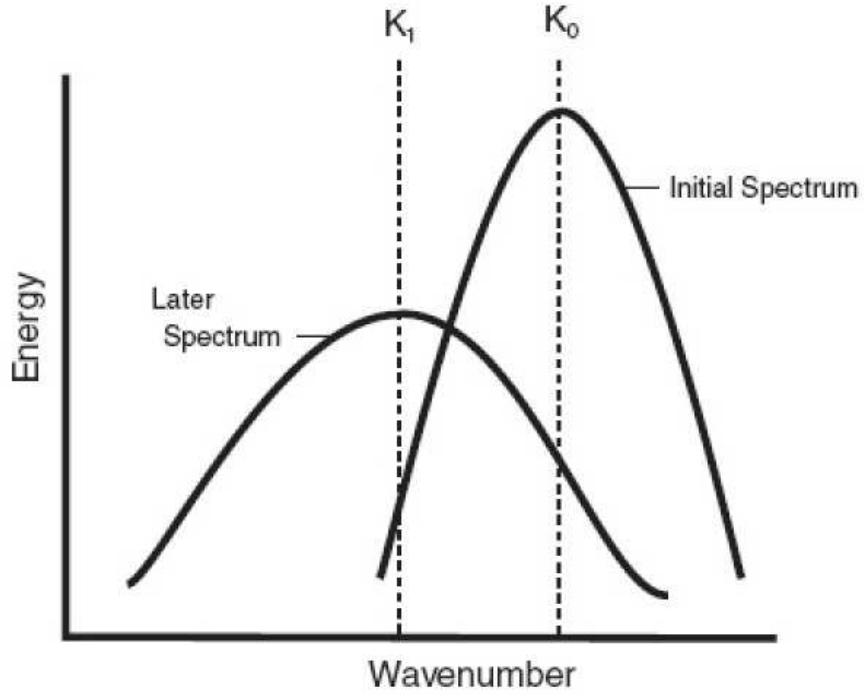


FIG. 1.1 – Dans un écoulement 2D, le barycentre du spectre d'énergie se déplacera inéluctablement vers les grandes échelles (petits nombres d'onde) si la largeur du spectre augmente, ce à quoi on s'attend pour un écoulement fortement tourbillonnaire non-linéaire ;

et

$$\frac{d q_e^2}{dt} = -\frac{1}{\hat{Z}} \frac{dJ}{dt} < 0$$

L'échelle de longueur caractérisant l'enstrophie devient de plus en plus petite et le nombre d'onde correspondant devient de plus en plus grand.

### Argument de similarité

Cet argument a été introduit par Batchelor(1969), qui suppose qu'il n'y a pas d'échelle externe imposée dans le problème. La conservation de l'énergie

$$\hat{E} = U^2 = \int \mathcal{E}(k, t) dk$$

ainsi que des considérations dimensionnelles conduisent à écrire

$$\mathcal{E}(k, t) = U^2 L \hat{\mathcal{E}}(\hat{k}, \hat{t})$$

où toutes les quantités avec un  $\hat{\phantom{x}}$  sont adimensionnelles et  $L$  est une échelle de longueur. Les seuls paramètres physiques disponibles pour déterminer le spectre d'énergie sont  $U, t$  et  $k$  le nombre d'onde. La forme la plus générale du spectre d'énergie sans dépendance de

$L$  est de la forme

$$\mathcal{E}(k, t) = U^3 t \hat{\mathcal{E}} = U^3 t g(Ukt).$$

où  $g$  est une fonction arbitraire de son argument. L'argument de  $g$  est le seul groupement non-dimensionnel possible de  $U, t$  et  $k$  et le facteur  $U^3 t$  donne la dimension du spectre d'énergie  $\mathcal{E}$ .

La conservation de l'énergie implique que l'intégrale

$$I = \int_0^\infty t g(Ukt) dk$$

ne doit pas dépendre du temps  $t$ . (Ceci est la traduction de l'hypothèse 2D.) En posant  $\vartheta = Ukt$  cette condition requiert que

$$\int_0^\infty g(\vartheta) d\vartheta = \text{constant}$$

Comme le spectre n'est fonction de  $k$  qu'à travers la combinaison  $\vartheta = Ukt$ , quand  $t$  augmente, le spectre doit se déplacer vers les petits  $k$ . Si initialement le pic d'énergie est à  $k_p$  donné, le produit  $tk_p$  est préservé, donc  $k_p$  doit diminuer avec le temps et l'énergie doit être transférée vers les grandes échelles d'espace. De manière explicite, on a

$$k_e = \frac{\int k \mathcal{E}(k) dk}{\int \mathcal{E}(k) dk} = \frac{\int k \mathcal{E}(k) dk}{U^2} = \int k U t g(Ukt) dk = \int \frac{\theta g(\theta)}{U T} d\theta = \frac{C}{U t}$$

où toutes les intégrales sont prises sur l'intervalle  $(0, \infty)$  et  $C = \int \theta g(\theta) d\theta$  est une constante. Donc le barycentre de la distribution d'énergie diminue avec le temps et l'échelle de longueur  $1/k_e$  caractéristique de l'écoulement augmente avec le temps. On remarque que l'enstrophie n'intervient pas dans cet argument de similarité qui repose entièrement sur la conservation de l'énergie et est valide en bidimensionnel alors qu'en tridimensionnel l'énergie cascade rapidement vers les petites échelles où elle est dissipée.

### "Théorème" de Fjortoft(1953)

Supposons que l'énergie du spectre soit initialement entièrement contenue dans un seul nombre d'onde  $K_0$ . Les interactions non-linéaires vont transférer cette énergie vers d'autres nombres d'onde, si bien que le pic spectral initial va s'étaler. A titre d'illustration, supposons que toute l'énergie initiale aille vers deux nombres d'onde voisins  $K_1$  et  $K_2$ . La conservation de l'énergie et de l'enstrophie requièrent que

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \\ K_0^2 \mathcal{E}_0 &= K_1^2 \mathcal{E}_1 + K_2^2 \mathcal{E}_2 \end{aligned}$$

On peut en déduire les rapports de l'énergie et de l'enstrophie pour les deux nombres d'onde après que le transfert non-linéaire se soit produit :

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{K_2 - K_0}{K_0 - K_1} \frac{K_2 + K_0}{K_1 + K_0}$$

$$\frac{K_1^2 \mathcal{E}_1}{K_2^2 \mathcal{E}_2} = \frac{K_1^2}{K_2^2} \frac{K_2^2 - K_0^2}{K_0^2 - K_1^2}$$

Si on suppose que les transferts se soient effectués de  $K_0$  vers les nombres d'onde  $K_1 = K_0/2$  et  $K_2 = 2K_0$ , les équations ci-dessus montrent que  $\mathcal{E}_1/\mathcal{E}_2 = 4$  et que  $K_1^2 \mathcal{E}_1/K_2^2 \mathcal{E}_2 = 1/4$ , c'est-à-dire que davantage d'énergie est transférée vers les petits nombres d'onde (grandes échelles spatiales), alors que davantage d'ensrophie est transféré vers les grands nombres d'onde (petites échelles). Cet exemple illustre bien la cascade inverse d'énergie et la cascade directe d'ensrophie.

### 1.2.2 Zones inertielles en turbulence bidimensionnelle, Kraichnan (1967)

A la différence du cas tridimensionnel, lorsque la viscosité décroît (ou que le nombre de Reynolds augmente) la dissipation d'énergie tend vers zéro. En l'absence de termes de forçage, on a

$$\frac{d\hat{E}}{dt} = -\nu \int \zeta^2 dA$$

La dissipation d'énergie ne peut rester finie que si l'ensrophie tend vers l'infini. Ceci ne peut se produire car la vorticité des particules fluides est conservée

$$\frac{d\zeta}{dt} = \nu \nabla^2 \zeta$$

mis à part les effets visqueux qui ne peuvent que réduire la vorticité de l'écoulement et cette dernière ne peut tendre vers l'infini. A contrario, en tridimensionnel sous l'effet de l'étirement des vortex la vorticité peut se concentrer dans des tubes hyperfins qui ont pu être observés expérimentalement. La conservation de l'énergie pour les écoulements bidimensionnels à haut nombres de Reynolds est reliée au fait que l'énergie demeure piégée dans les grandes échelles spatiales. Par ailleurs, l'ensrophie est transférée vers les petites échelles spatiales et est donc dissipée même pour les écoulement à haut nombre de Reynolds. Ceci conduit au scénario de la figure 1.2.

Si le fluide est forcé à une échelle d'injection d'énergie et d'ensrophie,  $L_f$ . L'énergie est transférée vers les grandes échelles alors que l'ensrophie est transférée vers les petites échelles où elle est dissipée. Si on fait l'hypothèse que les échelles de forçage et de dissipation sont suffisamment espacées, on peut s'attendre à l'apparition de zones inertielles comme en turbulence tridimensionnelle.

#### Zone inertielle de la cascade d'ensrophie

Pour cette gamme d'échelle, la cascade d'ensrophie se produit à un taux constant  $\eta$  égal au taux d'injection d'ensrophie par le forçage. Des considérations dimensionnelles montrent que

$$\eta \approx \frac{k^3 \mathcal{E}(k)}{\tau(k)} \quad (1.5)$$

où  $\tau(k) = (k^3 \mathcal{E}(k))^{-1/2}$  comme pour le cas tridimensionnel, conduisant au spectre d'énergie

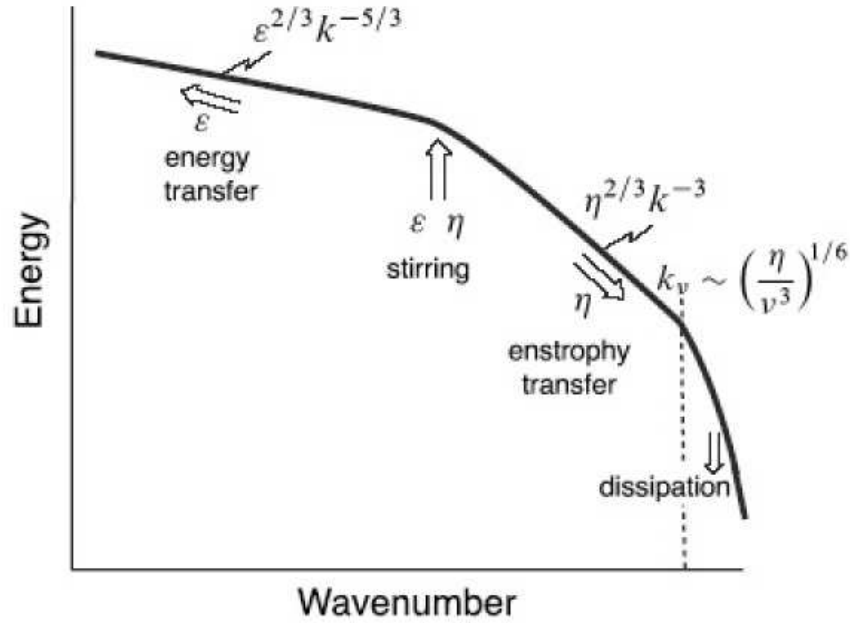


FIG. 1.2 – Spectre d'énergie en turbulence 2D. L'énergie qui est injectée au taux  $\epsilon$  est transférée vers les échelles les plus grandes. L'enstrophie qui est injectée au taux  $\eta$  est transférée vers les petites échelles où elle est dissipée par la viscosité. Si l'injection est localisée à l'échelle  $k_f^{-1}$ , alors  $\eta \approx k_f^2 \epsilon$ .

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}' \eta^{2/3} k^{-3}$$

où  $\mathcal{K}'$  est supposée être une constante universelle. La vitesse à l'échelle  $k$  est donnée par

$$v_k \approx \eta^{1/3} k^{-1}$$

et l'échelle de temps

$$t_k \approx l/v \approx \eta^{-1/3} \quad (1.6)$$

Le temps de retournement (1.6) des structures tourbillonnaires dans la cascade d'enstrophie est indépendante de l'échelle spatiale du tourbillon. L'échelle visqueuse est obtenue de manière analogue au cas tridimensionnel

$$k_\nu \approx \left( \frac{\eta^{1/3}}{\nu} \right)^{1/2}.$$

De même on peut montrer que la dissipation d'enstrophie est finie quand la dissipation visqueuse tend vers zéro et est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{Z} = \nu \int \zeta \nabla^2 \zeta dA \approx \nu k_\nu^4 v_{k_\nu}^2 \approx \eta$$

et tend à devenir indépendante de la viscosité.

### Zone inertielle de la cascade inverse d'énergie

Les échelles inertielles de la turbulence bidimensionnelle sont semblables à celles de la turbulence tridimensionnelle, mis à part la différence fondamentale que l'énergie va des petites aux grandes échelles spatiales. Comme l'atmosphère et l'océan se comportent aux grandes échelles comme des fluides bidimensionnels, ceci a des profondes répercussions sur leur comportement. On a une cascade inverse d'énergie et son spectre est identique à celui de la turbulence tridimensionnelle

$$\mathcal{E}(k) = C\epsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

La principale différence avec le cas tridimensionnel concerne la façon dont l'énergie est dissipée pour un écoulement turbulent bidimensionnel. Comme les effets visqueux n'agissent qu'à petite échelle, un autre mécanisme dissipatif doit être invoqué à grande échelle. C'est le cas par exemple d'une couche d'Ekman de fond, pour laquelle l'équation de vorticité s'écrit

$$\frac{d\zeta}{dt} = F[\zeta] - r\zeta$$

où  $F[\zeta]$  représente le forçage. Le second terme du membre de droite de l'équation paramétrise les effets frictionnels de la couche d'Ekman. L'échelle de temps frictionnelle correspondante est obtenue en égalisant les termes inertiels au terme frictionnel

$$r^{-1} \approx \epsilon^{-1/3}k_r^{-2/3} \longrightarrow k_r = \left(\frac{r^3}{\epsilon}\right)^{1/2}.$$

Aux échelles spatiales plus grandes que  $1/k_r$ , les effets frictionnels de la couche d'Ekman prédomineront. En l'absence d'effets frictionnels à grande échelle, l'énergie s'accumulera à l'échelle du domaine de l'écoulement.

### Validité de l'hypothèse de localité en turbulence bidimensionnelle

On a vu plus haut que le temps de retournement (1.6) des structures tourbillonnaires dans la cascade d'enstrophie est indépendante de l'échelle spatiale du tourbillon. On pourra vérifier que si le spectre de la cascade d'enstrophie était plus pentu, que le temps de retournement des structures augmenterait avec le nombre d'onde (c'est-à-dire pour les petites structures!). Par ailleurs le champ de déformation à une échelle donnée résulte des déformations exercées par toutes les échelles spatiales plus grandes et l'échelle de temps associée au champ de déformation peut être estimé par

$$\tau = \left[ \int_{k_0}^k p^2 \mathcal{E}(p) dp \right]^{-1/2}, \quad (1.7)$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde de coupure le plus bas ( $1/k_0$  est la plus grande échelle spatiale présente dans l'écoulement). En remplaçant cette expression dans (1.5) on obtient une

correction logarithmique au spectre d'énergie pour la cascade d'énstrophie :

$$\mathcal{E}(k) = \mathcal{K}' \eta^{2/3} [\log(k/k_0)]^{1/3} k^{-3}.$$

Cette correction logarithmique est cependant difficile à observer expérimentalement. Cette correction ne permet pas de corriger un problème conceptuel majeur de la théorie de Kolmogorov appliquée au cas bidimensionnel. L'hypothèse sous-jacente à la théorie est l'hypothèse de localité dans l'espace spectral des transferts d'énergie et d'énstrophie. Une mesure permettant de tester cette hypothèse est le champ de déformation  $S(k)$  à un nombre d'onde donné,  $k$  est obtenue en prenant l'inverse de (1.7) :

$$S(k) = \left[ \int_{k_0}^k \mathcal{E}(p) p^3 d \log p \right]^{1/2},$$

Les contributions de chaque octave sont données par

$$\mathcal{E}(p) p^3 \Delta \log p$$

Pour le cas tridimensionnel, le spectre en  $-5/3$  est tel que la contribution de chaque octave inférieure à  $k$  est une fonction croissante du nombre d'onde de l'octave considérée et que cette contribution atteint son maximum juste au voisinage de  $k$ , ce qui constitue a posteriori une justification de l'hypothèse de localité. Dans le cas bidimensionnel de la cascade d'énstrophie cependant, la contribution de chaque octave est la même. Le champ de déformation n'est pas du tout local dans l'espace spectral dans le cas bidimensionnel à la différence de ce qui se passe en tridimensionnel.

Dans le cas où le spectre devient plus pentu que  $-3$  les effets de déformation sont même entièrement non-locaux, ce qui remet en question une application trop littérale de la théorie de Kolmogorov. Cependant l'existence d'une cascade inverse d'énergie et d'une cascade directe d'énstrophie semblent robustes et ont pu être vérifiées dans de nombreuses simulations numériques.

## Simulations numériques

La figure 1.3 correspond au champ de vorticité d'une turbulence bidimensionnelle forcée. On observe la cascade directe d'énstrophie vers les petites échelles mais aussi l'apparition spontanée de vortex circulaires qui sont des structures cohérentes de très grande durée de vie. En effet pour un écoulement bidimensionnel, un vortex circulaire est une solution stationnaire des équations non-linéaires du mouvement. Les structures cohérentes en turbulence 2D ont été découvertes par Basdevant et al. (1981), puis étudiées de manière systématique par McWilliams(1984), et par de nombreux autres auteurs par la suite. Pendant les années 80, les simulations numériques à faible résolution ont mis en évidence des spectres plus pentus que  $-3$  liés à l'émergence de ces structures cohérentes. Cependant



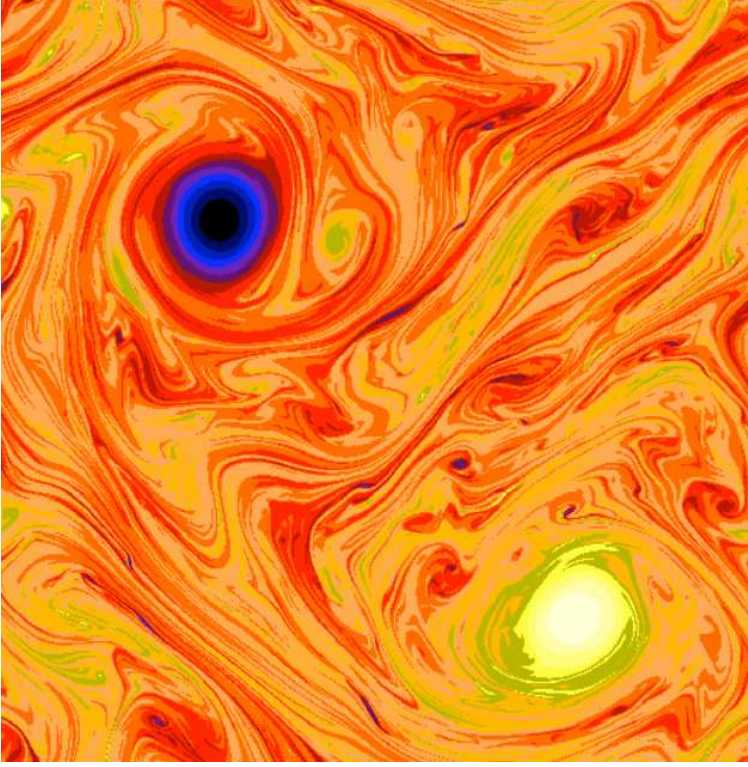


FIG. 1.3 – Champ instantané de vorticité obtenu pour une turbulence bidimensionnelle forcée

il semble désormais établi que pour une gamme suffisamment large de nombre d'ondes, l'apparition de structures cohérentes reste confinée au voisinage immédiat de l'échelle de forçage et qu'à plus grand nombre d'onde, le spectre est en  $-3$  alors qu'à plus petit nombre d'onde un spectre est en  $-5/3$ . Cette **double cascade** inhérente à la turbulence bidimensionnelle (figure 1.4) est bien mise en évidence dans la simulation à la plus haute résolution disponible actuellement ( $N=32768$  points de grille dans chaque direction d'espace). Ces simulations ont permis de vérifier que les taux de cascade d'énergie et d'ensrophie sont constants sur à peu près une décade d'échelles horizontales (figure 1.4), où les flux sont définis comme

$$\Pi_E(k) = -\partial_t \int_0^k E(k') dk', \quad \Pi_Z(k) = -\partial_t \int_0^k k'^2 E(k') dk',$$

$E(k)$  est le spectre d'énergie cinétique et la dérivée temporelle ne prend en compte que l'évolution liée aux termes d'advection.

### 1.2.3 Prédicibilité de la turbulence

"De très légères différences dans les conditions initiales peuvent produire de très grandes différences dans le phénomène final... Un dixième de degré de plus ou de moins à un endroit, et le cyclone va éclater ici et pas là, et étendre ses ravages sur des régions qu'il aurait

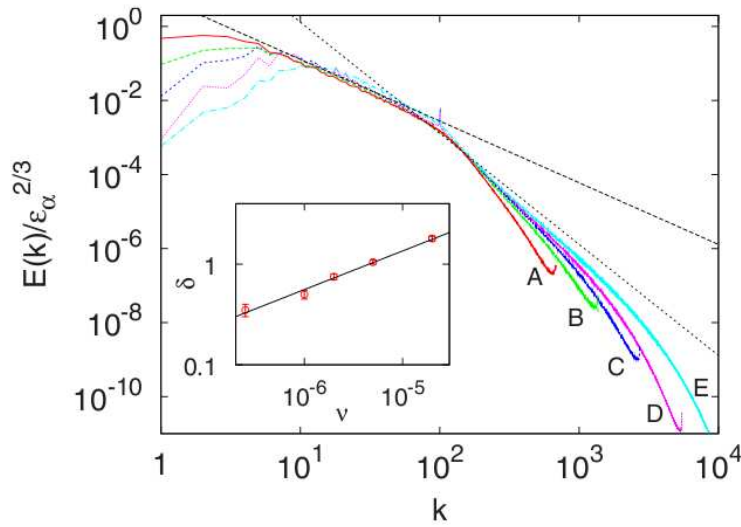


FIG. 1.4 – Spectres d'énergie pour  $N=2048, 4096, 8192, 16384$  et  $32768$ . Les lignes pointillées représentent les courbes théoriques prévues par Kraichnan, en  $Ck^{-5/3}$  avec  $C = 6$ , et  $k^{-3}$ . L'écart  $\delta$  à la pente en  $-3$  diminue avec la viscosité (insert). Boffetta & Musacchio (Phys.Rev.E, 2010)

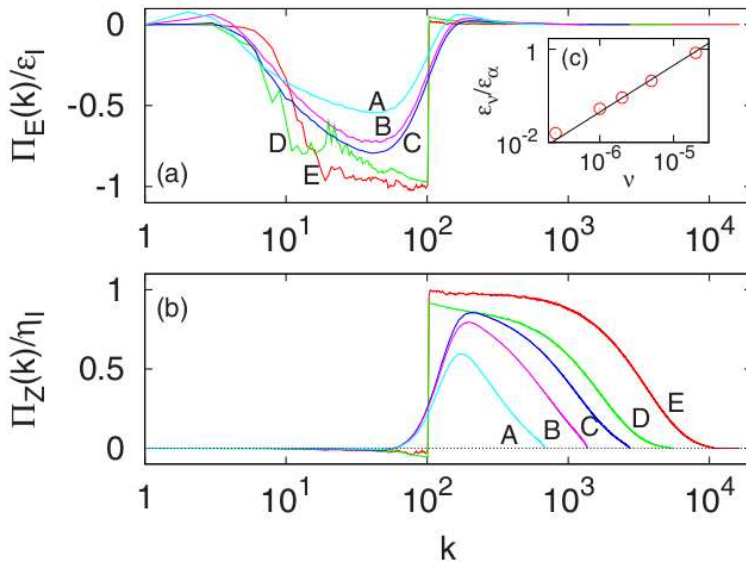


FIG. 1.5 – Taux de cascade d'énergie et d'ensrophie pour  $N=2048, 4096, 8192, 16384$  et  $32768$ . . Boffetta & Musacchio (Phys.Rev.E, 2010)

pu épargnées." Cette citation d'Henri Poincaré (1908) permet d'introduire le problème de l'imprédictibilité du temps (météorologique), caractéristique commune à tous les systèmes chaotiques dont le comportement temporel est par définition extrêmement sensible aux conditions initiales du système. Ce concept a connu un fort développement théorique dans les années 80 dans le cadre de systèmes chaotiques de faibles dimensions comme le système de Lorenz (3 degrés de liberté). La croissance des perturbations est mesurée via

le calcul des exposants de Lyapunov du système et permet d'évaluer la divergence des trajectoires du système en liaison avec l'amplitude des différences de conditions initiales.

Le temps (météorologique) comme la circulation océanique à mésoéchelle correspondent cependant à des systèmes turbulents (c'est-à-dire avec un très grand nombre de degré de liberté (en turbulence bidimensionnelle  $N = (L/L_\nu)^2$  croît en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement).

Un temps de prédictibilité peut être évalué comme le temps cumulé pour propager une erreur du champ de déformation d'une échelle  $1/k_1$  à l'échelle de coupure  $1/k_0$  via l'intégrale

$$T = \int_{k_0}^{k_1} \tau_k d(\log k) = \int_{k_0}^{k_1} [k^3 \mathcal{E}(k)]^{-1/2} d(\log(k)),$$

Pour un spectre d'énergie en  $\mathcal{E} = Ak^{-n}$  on obtient

$$T = \frac{2}{A^{1/2}(n-3)} [k^{(n-3)/2}]_{k_0}^{k_1}, \quad (1.8)$$

pour  $n \neq 3$  et  $T = A^{-1/2} \log(k_1/k_0)$  pour  $n = 3$ . Lorsque  $k_1 \rightarrow \infty$ , l'intégrale diverge pour  $n \geq 3$  mais converge pour  $n < 3$ . L'implication est que pour une turbulence bidimensionnelle présentant un spectre en  $k^{-3}$ , le système est indéfiniment prévisible. Si l'erreur est confinée aux échelles du mouvement de plus en plus petites, le temps de prévisibilité n'aura pas de limite ! Ceci correspond au fait que les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, avec ou sans viscosité exhibent des propriétés de régularité globales, restent analytiques et possèdent une solution unique pour tous les temps pourvu que les conditions initiales possèdent les propriétés de régularité suffisantes.

Pour le cas tridimensionnel où  $n = 5/3 < 3$ , l'intégrale (1.8) converge lorsque  $k_1 \rightarrow \infty$ , si bien que même si l'erreur reste confinée à de toutes petites échelles, le temps de prédictibilité du système sera fini. Le temps nécessaire à la propagation de l'erreur des petites échelles aux plus grandes correspond seulement à quelques temps de retournement des grandes échelles (simplement car le temps de retournement des petites échelles est très court). Ceci suggère que les équations d'Euler ne sont pas bien posées en tridimensionnel et n'ont pas de solution unique. En présence de viscosité, il se peut cependant que le problème devienne bien posé, mais pour l'instant ce résultat n'est pas encore prouvé.

### Prédictibilité du temps

La troposphère à grande échelle est fortement contrainte par les effets de stratification et la rotation de la Terre et tend à se comporter comme un fluide bidimensionnel avec un spectre en  $k^{-3}$  mais cette observation n'est pas nécessairement reliée à une cascade d'entrophie. Pour une telle loi spectrale, on peut utiliser (1.8) pour évaluer l'échelle temporelle de prévisibilité qui serait infinie. Cependant aux échelles spatiales inférieures à 100 km, la troposphère cesse de se comporter comme un fluide bidimensionnel et devient plutôt tridimensionnelle. A cette échelle, le temps de retournement des structures décroît fortement

avec l'échelle spatiale et le temps de prédictibilité du système est de l'ordre du temps de retournement des échelles de 100 km. Ainsi *la limite de prédictibilité du système serait limitée à celle de l'échelle spatiale à laquelle les mouvements deviennent tridimensionnels*. Une évaluation grossière donnerait une limite de prévisibilité de 12 jours pour le temps.

### 1.3 Spectre d'un traceur passif

Par définition, un traceur passif obéit à :

$$\frac{d\Phi}{dt} = F[\Phi] + \kappa \nabla^2 \Phi \quad (1.9)$$

où  $F[\Phi]$  correspond au forçage du traceur,  $\kappa$  est la diffusivité qui diffère en général de la viscosité moléculaire du fluide. Si  $\Phi$  correspond à la température le rapport des deux est appelé le nombre de Prandtl  $\sigma$  et est donné par  $\sigma \equiv \nu/\kappa$ . Nous supposons que le traceur est injecté à l'échelle  $k_0$  et sa variance est dissipée aux très petites échelles si  $\kappa$  est suffisamment faible.

Si on introduit le taux de cascade de traceur  $\chi$  par analogie avec le taux de cascade d'énergie ou d'ensrophie, on obtient

$$\chi \propto \frac{P(k)k}{\tau(k)} \quad (1.10)$$

où  $P(k)$  est le spectre du traceur,  $k$  est le nombre d'onde et  $\tau(k)$  est l'échelle de temps de l'écoulement turbulent.

\* Si le spectre d'énergie est de -3 ou moins pentu, l'échelle de temps est

$$\tau(k) = [k^3 \mathcal{E}(k)]^{-1/2} \quad (1.11)$$

Si

$$\mathcal{E}(k) = Ak^{-n}$$

alors

$$\chi \propto \frac{P(k)k}{[Ak^{3-n}]^{-1/2}} \quad (1.12)$$

et

$$\boxed{P(k) = BA^{-1/2} \chi k^{(n-5)/2}} \quad (1.13)$$

où  $B$  est une constante. Notez que plus le spectre d'énergie est pentu et plus le spectre de traceur est plat !

\* Pour le cas d'un spectre d'énergie plus pentu que  $-3$ , l'estimation de l'échelle de temps doit être remplacée par

$$\tau(k) = \left[ \int_{k_0}^k p^2 \mathcal{E}(p) dp \right]^{-1/2}$$

où  $k_0$  est le nombre d'onde de coupure le plus petit. Si le spectre est moins pentu que  $-3$  l'échelle de temps revient à 1.11, et est dominée par les nombres d'onde les plus grands, si le spectre est plus pentu que  $-3$ , l'intégrale est dominée par les nombres d'onde les plus petits. Dans ce cas l'échelle de temps revient à  $[k_0^3 \mathcal{E}(k_0)]^{-1/2}$  qui est égal au temps de retournement des structures les plus grandes  $\tau(k_0)$ . Le spectre de traceur devient

$$\boxed{P(k) = C \chi \tau(k_0)^{-1} k^{-1}} \quad (1.14)$$

où  $C$  est une constante. Dans tous les cas, la cascade de traceur est vers les petites échelles même si la cascade d'énergie peut être vers les grandes échelles pour le cas bidimensionnel par exemple.

### Cas tridimensionnel

Dans ce cas,  $A = C\epsilon^{2/3}$  où  $\epsilon$  est le taux de cascade d'énergie et  $C$  est la constante de Kolmogorov et  $n = 5/3$ . On obtient pour le spectre de traceur

$$P(k) = D\epsilon^{-1/3}\chi k^{-5/3}. \quad (1.15)$$

Dans ce cas l'exposant en  $-5/3$  est obtenu à la fois pour l'énergie et le traceur passif. Les expériences montrent que dans ce cas  $D \approx 0.5$ .

### Cascade d'ensrophie bidimensionnelle

Dans ce cas, l'échelle de temps est

$$\tau(k_\nu) = \eta^{-1/3}$$

On obtient dans ce cas pour le spectre de traceur

$$P(k) = B\eta^{-1/3}\chi k^{-1}. \quad (1.16)$$

Le spectre de traceur a la même loi de puissance que le spectre de variance de vortacité, ce qui est naturel puisque la vortacité est conservée par chaque particule fluide et se comporte comme un traceur. Ce résultat n'est pas vérifié pour toutes les quantités obéissant aux mêmes équations.

### Cascade inverse d'énergie bidimensionnelle

Dans ce cas, le spectre de traceur devient

$$P(k) = D'\epsilon^{-1/3}\chi k^{-5/3} \quad (1.17)$$

c'est-à-dire la même loi de puissance qu'en tridimensionnel, cependant  $D' \neq D$ .

Références

Babiano A and A. Provenzale, 2007 Coherent vortices and tracer cascades in two-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 574, 429-448.

Basdevant C., B. Legras, R. Sadourny and M. Béland, 1981 A study of barotropic model flows : intermittency, waves and predictability, *J. Atmos. Sci.*, 38, 2305-2326.

Boffetta G. and S. Musacchio. 2010. Evidence for the double cascade scenario in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. E*, 82, 016307.

Kraichnan, R.H. 1967 Inertial ranges in two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, 10, 1417-1423.

Kraichnan, R.H. 1971 Inertial range transfer in two- and three-dimensional turbulence. *J. Fluid Mech.*, 47, 525-535.

McWilliams, J. C. 1984 The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 146, 21-43.