

### Лабораторная работа № 3

#### ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

**Постановка задачи №1.** С целью исследования формул численного интегрирования вычислите определенный интеграл от функции  $f(x)$  на отрезке  $x \in [a, b]$ , а также для «осциллирующих» функций  $f(x) + \cos 10x$  и  $f(x) + \cos 100x$  на том же отрезке  $x \in [a, b]$  на равномерной сетке. Конкретный вид функций приведен в приложении.

В своей работе используйте формулы: прямоугольников, трапеций, Симпсона.

**Вывод результатов.** Программа должна строить график интегрируемой функции, а полученное значение интеграла должно быть выведено на экран. Также должно быть выведено истинное значение интеграла, и погрешность интегрирования.

**Анализ порядка погрешности.** Исследуйте порядок погрешности формул численного интегрирования. С этой целью для каждой из указанных функций вычислите приближенное значение интеграла  $I$  при разных значениях  $n$ . Закономерность выбора  $n$  должна быть такой, чтобы оценка порядка была достаточно убедительной. Результаты расчетов запишите в таблицу 1 и на ее основе определите порядок погрешности формулы.

Таблица 1

$n$	$\left  \int_a^b f(x)dx - I \right $
$n_1$	
$n_2$	
$n_3$	
$n_4$	
Порядок	

**Постановка задачи №2.** Реализовать и исследовать метод адаптивной квадратуры, который заключается в следующем.

Пусть нужно вычислить  $I(a, b, \varepsilon) = \int_a^b f(t)dt$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность, и применяется одна из квадратурных формул  $G(a, b)$  (прямоугольников, трапеций, Симпсона, ...). Тогда следует:

1. Вычислить приближение на всем отрезке  $G(a, b)$ ;
2. Вычислить приближения на половинах отрезков  $G\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$  и  $G\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ ;
3. Если  $\left| G\left(a, \frac{a+b}{2}\right) + G\left(\frac{a+b}{2}, b\right) - G(a, b) \right| < \varepsilon$  то  $I(a, b, \varepsilon) = G(a, b)$   
иначе  $I(a, b, \varepsilon) = I\left(a, \frac{a+b}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right) + I\left(\frac{a+b}{2}, b, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ .

С целью исследования метода адаптивной квадратуры **нужно**:

1. построить график функции  $g(x)$

$$g(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ \sum_{i=1}^{14} (A_i \sin(2\pi i(\alpha - x)t) + B_i \cos(2\pi i(\alpha - x)t)) \right] dt, \quad x \in [0,1], \quad (*)$$

где значения  $A_i, B_i, 1 \leq i \leq 14$ , независимо и равномерно распределены в интервале  $[-1,1]$ , а параметра  $\alpha$  – в интервале  $[0,1]$ . Интеграл (\*) составлен таким образом, что в окрестности точки  $\alpha$  подынтегральная функция будет пологой, а вне этой окрестности – осциллирующей, следовательно, трудоемкость вычисления интеграла методом адаптивной квадратуры будет зависеть от  $x$ .

2. Предусмотреть возможность последовательной генерации различных подынтегральных функций с целью последующего интегрирования. Фактически для этого нужно последовательно генерировать значения параметров  $A_i, B_i, 1 \leq i \leq 14$ , и  $\alpha$  в соответствующих интервалах.

3. Построить график функции  $T(x)$ , отражающий зависимость трудоемкости вычисления значения функции от точки  $x$ . Время вычисления можно оценить как время вычисления значения, а также как число рекурсивных вызовов функции интегрирования.

**Отчет** должен включать в себя

1. Постановку задачи №1.
2. Краткие сведения по численному интегрированию (оценка погрешности).
3. точное значение интеграла.
4. Таблицу 1 для разных формул.
5. Постановку одной из решенных вами задач №2 (конкретные значения случайных параметров),
6. построенные графики функций  $g(x)$  и  $T(x)$  для нескольких различных значений  $\varepsilon$ ,
7. ваши выводы и комментарии,
8. текст подпрограммы, реализующей метод адаптивной квадратуры.

Пункты 1 – 5 должны быть написаны от руки, 6 – 8 – можно приложить распечатки из вашей программы.

*Приложение. Варианты заданий*

$N_{\text{о}}$	$a$	$b$	$f(x)$
1	0	1	$\frac{1}{1+x^2}$
2	0	1	$\frac{1}{1+x}$
3	1	4	$\frac{x+1}{x}$
4	1	2	$\sin(x) \cos(2x)$
5	0	2	$\frac{x}{x+1}$
6	1	3	$\frac{1}{1+2x}$
7	1	2	$\frac{1+2x}{4x}$
8	1	$\pi/2$	$\frac{1}{x} + \sin(x)$
9	1	2	$\frac{1}{x} + x^2$
10	1	3	$\frac{1}{x^2} + \sin(2x)$
11	1	$\pi$	$\sin(2x) \cos(x)$
12	0	$\pi/4$	$x \cos x$
13	1	$\pi$	$\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$
14	0	1	$x \cdot \sin(x)$