II.B Zase ty světla!

Netrpělivý řidič se přibližuje k semaforu, na kterém z dálky vidí svítit červenou. Nechce zastavovat, a jelikož je fyzikálně vzdělaný, napadne ho zrychlit na takovou rychlost, že místo červené uvidí zelenou. Vypočítejte rychlost, jakou by se musel pohybovat. $\lambda_{\mathrm{R}} = 700\,\mathrm{nm}$ $\lambda_{\mathrm{G}} = 550\,\mathrm{nm}$.

Jindra se rozhodl řešit slavné dilema; řešit two B or not to be.

Od semaforu se šíří světlo směrem k autu. Jelikož se auto pohybuje, vlnová délka světla se důsledkem *Dopplerova jevu* zmenšuje. Pro frekvenci f_e emitovaného světla a frekvenci f_p přijatého světla platí rovnice

$$f_p = f_e\left(1 + \frac{v_p}{v}\right),$$

kde v_p je rychlost přijímače, tedy auta, a v je rychlost vlnění, v našem případě světla. Proto za v dosadíme rychlost světla c.

Chceme vypočítat, jakou rychlostí by se řidič musel pohybovat, tedy chceme zjistit v_p. Úpravou se dostaneme k vztahu:

$$\frac{f_p}{f_e} - 1 = \frac{v_p}{c}.$$

Dále využijeme obecného vztahu pro frekvenci světelného záření

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

a vyměníme frekvence za vlnové délky v převráceném tvaru.

$$\frac{\lambda_e}{\lambda_p} - 1 = \frac{v_p}{c}$$

$$\frac{\lambda_e - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{v_p}{c}$$

Malá odbočka: dostali jsme se k vztahu, který se používá (zjednodušeně) v astrofyzice. Levá strana rovnice se nazývá rudý/červený posuv.

Zpět však k naší úloze. Za vlnovou délku λ_e emitovaného světla dosadíme vlnovou délku λ_R červené barvy, a za vlnovou délku λ_p přijatého světla vlnovou délku λ_G zelené barvy. Rovnici už jen upravíme tak, abychom vyjádřili rychlost v_p auta.

$$v_p = \frac{\lambda_R - \lambda_G}{\lambda_G} c$$

Číselně výsledek vychází

$$v_p \approx 0,27c \approx 8,2 \cdot 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Výsledek vám možná nebude vycházet na číslo stejně… to ale vůbec nevadí. Při takhle velkém čísle nás výsledek zajímá pouze řádově.

Klasický Dopplerův jev platí pro vlnění, které se šíří jen v určitém prostředí (třeba vzduch nebo voda). Avšak víme, že elektromagnetické vlny, a tedy i světlo, pro šíření žádné prostředí nepotřebují (mohou se šířit ve vakuu). Proto bychom správně měli používat *relativistický Dopplerův jev.* U elektromagentických vln tento jev závisí pouze na relativním pohybu mezi přijímačem a vysílačem.

Platí pro něj vztah:

$$f_p = f_e\sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

kde f_p je přijímaná frekvence, f_e frekvence emitovaná a v relativní rychlost. Frekvence opět obdobně nahradíme za vlnové délky a rovnici postupně upravíme.

$$\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 = \frac{c+v}{c-v}$$

$$\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 (c-v) = c+v$$

$$\left[\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 - 1\right] c = \left[\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 + 1\right] v$$

$$v = \frac{\frac{\lambda_e^2}{\lambda_p^2} - 1}{\frac{\lambda_e^2}{\lambda_p^2} + 1} c$$

$$v = \frac{\lambda_e^2 - \lambda_p^2}{\lambda_e^2 + \lambda_p^2} c$$

Číselně je rychlost v

$$v \approx 0,24c \approx 7,1 \cdot 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Vidíme, že oba výsledky jsou pro tak velká čísla řádově stejná, proto v tomto případě je akceptovatelné použít i klasický Dopplerův efekt. Pro větší čísla by to však mohl být problém, proto pro světlo vždy počítejte s relativistickým Dopplerovým jevem.