# Měsíční kvantum informací

řešení 3. série, duben 2023

../../../../propagace/qrcodes/MKI/trollbatch3solel

Elektronická verze řešení

# III.U1 Tenkrát v Irsku, 1843

Nalezněnte taková čísla (popř. jiné matematické objekty) $a$ a $b$, pro která platí:

$$ab = -ba$$

$$|a^2| = |b^2| = 1.$$

Ačkoliv jich existuje mnoho, stačí uvést pouze jednu libovolnou dvojici.

---

# III.U2 Znásilněná matematika

Jaký je součet všech přirozených čísel? Svou odpověď zdůvodněte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

a) $\infty$

b) $42$

c) $-\frac{1}{12}$

d) $\pi\sqrt{3}$

*Michal a Vojta*

---

Pojďme si postupně projít všechny možnosti a zamyslet se nad správným řešením. Jak vám už asi došlo tato úloha má 3 správná řešení a), b) a c).

První možnost je podle klasické matematiky „nejkorektnější“. S každým číslem se součet zvětšuje, takže intuitivně dává smysl, že součet nekonečného počtu čísel bude právě nekonečno. Tato velice intuitivní myšlenka naštěsí pro tento konkrétní případ platí (složitější matematikou lze dokázat, že daná číselná řada *diverguje* tj. součet všech jejích členů je $\infty$). Avšak je dobré pamatovat si, že ne všchny sumace jsou takto intuitivní. Například sumace převrácených hodnot mocnin čísla 2 *konverguje*[1] k výsledku 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots = 2$$

Zdůvodnění správnosti druhé možnosti je celkem jasné. 42. Odpověď na všechno.

[1] Pokud se chcete dozvědět více o konvergentních a divergentních řadách:
`https://en.wikipedia.org/wiki/Convergent_series#Examples_of_convergent_and_divergent_series`

Někteří z vás se určitě nedočkavě ptají jak je to s možností c). I přes veškerou intuici je i tato možnost správná. Existuje několik způsobů jak sumaci (součtu) všech přirozených čísel přiřadit[2] hodnotu $-\frac{1}{12}$, nejznámějšími jsou tzv. *regularizace zeta funkce* a *Ramanujanova sumace.*

*Upozornění pro nematematiky: Obě metody vyžadují využití složité matematiky (calculus, komplexní čísla). Níže se vám pokusíme metody vysvětlit ve zjednodušené formě.*

## Regularizace zeta funkce

Náš příběh začíná u slavného matematika *Leonharda Eulera* a jiné nekonečné řady, a to u sumace všech mocnin daného čísla $x$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

Nyní si stějně jako Euler dokážeme výše uvedenou hodnotu, ke které daná řada konverguje. Označme tuto řadu $S$.

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Po vynásobení obou stran rovnice $x$ dostáváme

$$xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots.$$

Když od sebe tyto dvě řady odečteme všechny jejich členy se až na 1 z první řady vykrátí.

$$S - xS = 1$$

Několika jednoduchými úpravami z této rovnice vyjádříme $S$.

$$S(1-x) = 1$$

$$S = \frac{1}{1-x}$$

Nyní, když už známe hodnotu této sumace, se pojdmě vrátit zpět k úpravám. K dalšímu postupu budeme řadu potřebovat *zderivovat.* K derivování této řady naštěstí potřebujeme znát jen jedno jednoduché pravidlo, a tím je pravidlo pro derivaci mocniny.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$$

Teď zderivujeme obě strany rovnice. Derivace 1 je 0. Pravou stranu rovnice můžeme zapsat jako $(1-x)^{-1}$ a uplatnit pravidlo zmíněné výše.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

[2]Záměrně jsme použili slovo přiřadit, protože následující hodnota není výsledkem sumace ve klasickém smyslu

V dalším kroku Euler položil $x = -1$. Po dosazení této hodnoty dostaneme následující rovnici.

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots = \frac{1}{4}$$

Teď už přichází do hry funkce zmíněná v názvu této metody, *Riemannova zeta funkce* [3]. Značí se $\zeta(s)$, kde $s = \sigma + ti \in \mathbb{C}$ je její argument náležící *komplexním číslům* s *reálnou* částí $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ a *imaginární* částí $\mathrm{Im}(s) = t$, a je definování následovně:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \ldots$$

Když $\zeta(s)$ vynásobíme $2^{-s}$ dostaneme

$$2^{-s}\zeta(s) = 2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s} + 10^{-s} + \ldots$$

Teď dvojnásobek tohoto výsledku odečteme od zeta funkce $\zeta(s)$.

$$\zeta(s) - 2 \cdot 2^{-s}\zeta(s) = (1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \ldots$$

Dále Euler položil $s = -1$, takže naštěstí nebudeme muset počítat s komplexními čísly. Po dosazení do obou stran rovnice dostaneme:

$$(1 - 2 \cdot 2^1)\zeta(-1) 1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + 5^1 - 6^1 + \ldots$$

Po dosazení $-1$ do argumentu $\zeta(s)$ se nám celá funkce redukuje na součet všech přirozených čísel. To zní povědomě, ne?

$$-3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots$$

Už dříve jsme dokázali, že pravá strana rovnice je rovna $\frac{1}{4}$, takže už nás čeká jen pár úprav.

$$-3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots) = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

A máme výsledek!

## Ramanujanova sumace

Tato metoda je o něco kratší než předchozí, ale neméně zajímavá. V hodně zkrácené a zjednodušené verzi zní takto: Označme si sumaci všech přirozených čísel $c$.

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots$$

Teď zapišme čtřnásobek této řady $4c$.

$$4c = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + \ldots$$

[3] Můžete se setkat i s označením *Eulerova-Riemannova zeta funkce*, Euler jí formuloval a Riemann jí rozšířil pro obor komplexních čísel.

Když teď od sebe tyto dvě řady odečteme dostaneme posloupnost přirozených čísel s „prohozeným“ každým druhým znaménkem.

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

*Srinivasa Ramanujan* dále ve svém postupu dokázal stejně jako my při řešení přes zeta funkci, že tato posloupnost je rovna $\frac{1}{4}$.

$$-3c = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; c = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

Sice jsme se podobným (a jednodušším!) způsobeb dostali ke stejnému výsledku jako Euler při odvození přes zeta funkci, ale tento postup není úplně matematicky korektní. Určitě jste si všimli, že když jsme od původní řady odečítali její čtyřnásobek, aby se nám „otočilo“ znaménko každého druhého členu. To s sebou ale nese menší problém.

A to sice že trochu zapomínáme, že manipulujeme s nekonečnými řadami, a že s nimi nemůžeme zacházet stejně jako s konečnými. Ve skutečnosti jsme totiž odčítali řadu

$$0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + \dots,$$

což by se na první pohled mohlo zdát jen jako nevinná úprava pro přehlednost, ale při práci s nekonečmi řadami si musíme dávat pozor i na takové věci. Přidáním jedné nuly např. na začátek bychom mohli změnit celý výsledek. A nejen to! Řada by pak dokonce ani nemusela konvergovat!

# III.U3 Fyzici jsou úplně cáklí!

Ke každému fyzikovi a matematikovi přiřaďte jednu poruchu či zvláštnost, která u něj pravděpodobně převažovala.

**Jména**
Nikola Tesla, Paul Dirac, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Bernhard Riemann, William Rowan Hamilton, Isaac Newton, Alan Turing, Emmy Noether

**Zvláštnosti**
pedofilie, zoofilie, homosexualita, Aspergerův syndrom, ženská identita, extrémní stydlivost, vegetariánství, celoživotní panictví, alkoholismus

---

# III.A Houstone, máme problém!

Kdo je autorem *Problému tří těles*?

*Vojta a Michal si hráli s ChatGPT.*

---

# III.K Diracovo moře

Jaký jev je popisován v páté sloce?

---

# III.B Weyl vs. Majorana: boj o neutrino

Během dvacátých a třicátých let 20. století vznikla spousta kvantově mechanických rovnic na popis různých typů fermionů. Mezi ně patří i tzv.Weylova a Majoranova rovnice, které dříve byly kandidáty na popis částice jménem *neutrino*. Pojďme se podívat, jak vypadají!

**Pozn.:** ve vzorcích níže je použita Einsteinova sumační konvence, Feynmanova „slash" notace $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$a standardní volba jednotek $\hbar = c = 1$.

1. Odvoďte Weylovu rovnici (rovnice), popisující nehmotné (Weylovy) fermiony, ve slavném tvaru

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0$$
$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0.$$

   $\psi_L$ značí levoruký a $\psi_R$ pravoruký Weylův spinor a vektory $\sigma^\mu$ a $\bar{\sigma}^\mu$ jsou definované jako

$$\sigma^\mu = \left(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right) = (I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$
$$\bar{\sigma}^\mu = \left(\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3\right),$$

   Kde první komponent $\sigma^0 = I_2$ je jednotková matice typu $2 \times 2$ azbylé složky obsahují Pauliho spinové matice ($\sigma^i$, $i \in \{1, 2, 3\}$).

2. Matematicky dokažte, že rovnice

$$i\not{\partial}\psi^c - m\psi = 0$$

   je ekvivalentní s Majoranovu rovnicí, která bývá psána jako

$$i\not{\partial}\psi - m\psi^c = 0,$$

   kde $m$ označuje hmotnost popisovaného fermionu a $\psi$ jeho vlnovou funkci. Horní index $c$ značí nábojové sdružení.

---

Seznámení a podrobné informace

Jak sepisovat řešení, pravidla

Budeme rádi, když vyplníte dotazník

*Jindřich Anderle, Vojtěch Kubrycht, Michal Stroff*

kvantuminformaci@gmail.com