

III.U2 Znásilněná matematika

Jaký je součet všech přirozených čísel? Svou odpověď zdůvodněte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

- a) ∞
- b) 42
- c) $-\frac{1}{12}$
- d) $\pi\sqrt{3}$

Michal a Vojta se moc dívali na matematická videa na YouTube.

Pojďme si postupně projít všechny možnosti a zamyslet se nad správným řešením. Jak vám už asi došlo tato úloha má 3 správná řešení a), b) a c).

První možnost je podle klasické matematiky „nejkorektnější“. S každým číslem se součet zvětšuje, takže intuitivně dává smysl, že součet nekonečného počtu čísel bude právě nekonečno. Tato velice intuitivní myšlenka našťesí pro tento konkrétní případ platí (složitější matematikou lze dokázat, že daná číselná řada *diverguje* tj. součet všech jejích členů je ∞). Avšak je dobré pamatovat si, že ne všechny sumace jsou takto intuitivní. Například sumace převrácených hodnot mocnin čísla 2 *konverguje*¹ k výsledku 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

Zdůvodnění správnosti druhé možnosti je celkem jasné. 42. Odpověď na všechno.

Někteří z vás se určitě nedočkavě ptají jak je to s možností c). I přes veškerou intuici je i tato možnost správná. Existuje několik způsobů jak sumaci (součtu) všech přirozených čísel přiřadit² hodnotu $-\frac{1}{12}$, nejznámějšími jsou tzv. *regularizace zeta funkce* a *Ramanujanova sumace*.

Upozornění pro nematematiky: Obě metody vyžadují využití složité matematiky (calculus, komplexní čísla). Níže se vám pokusíme metody vysvětlit ve zjednodušené formě.

Regularizace zeta funkce

Náš příběh začíná u slavného matematika *Leonharda Eulera* a jiné nekonečné řady, a to u sumace všech mocnin daného čísla x .

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

¹Pokud se chcete dozvědět více o konvergentních a divergentních řadách:

https://en.wikipedia.org/wiki/Convergent_series#Examples_of_convergent_and_divergent_series

²Záměrně jsme použili slovo přiřadit, protože následující hodnota není výsledkem sumace ve klasickém smyslu

Nyní si stejně jako Euler dokážeme výše uvedenou hodnotu, ke které daná řada konverguje. Označme tuto řadu S .

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Po vynásobení obou stran rovnice x dostáváme

$$xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots$$

Když od sebe tyto dvě řady odečteme všechny jejich členy se až na 1 z první řady vykrátí.

$$S - xS = 1$$

Několika jednoduchými úpravami z této rovnice vyjádříme S .

$$S(1 - x) = 1$$

$$S = \frac{1}{1 - x}$$

Nyní, když už známe hodnotu této sumace, se pojďme vrátit zpět k úpravám. K dalšímu postupu budeme řadu potřebovat *zderivovat*. K derivování této řady naštěstí potřebujeme znát jen jedno jednoduché pravidlo, a tím je pravidlo pro derivaci mocniny.

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Tedy zderivujeme obě strany rovnice. Derivace 1 je 0. Pravou stranu rovnice můžeme zapsat jako $(1 - x)^{-1}$ a uplatnit pravidlo zmíněné výše.

$$\frac{d}{dx}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1 - x}\right)$$

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \dots = \frac{1}{(1 - x)^2}$$

V dalším kroku Euler položil $x = -1$. Po dosazení této hodnoty dostaneme následující rovnici.

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}$$

Tedy už přichází do hry funkce zmíněná v názvu této metody, *Riemannova zeta funkce*³. Značí se $\zeta(s)$, kde $s = \sigma + ti \in \mathbb{C}$ je její argument náležící *komplexnímu číslu* s *reálnou* částí $\text{Re}(s) = \sigma$ a *imaginární* částí $\text{Im}(s) = t$, a je definován následovně:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \dots$$

Když $\zeta(s)$ vynásobíme 2^{-s} dostaneme

$$2^{-s}\zeta(s) = 2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s} + 10^{-s} + \dots$$

³Můžete se setkat i s označením *Eulerova-Riemannova zeta funkce*, Euler jí formuloval a Riemann jí rozšířil pro obor komplexních čísel.

Ted' dvojnásobek tohoto výsledku odečteme od zeta funkce $\zeta(s)$.

$$\zeta(s) - 2 \cdot 2^{-s} \zeta(s) = (1 - 2 \cdot 2^{-s}) \zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \dots$$

Dále Euler položil $s = -1$, takže naštěstí nebudeme muset počítat s komplexními čísly. Po dosazení do obou stran rovnice dostaneme:

$$(1 - 2 \cdot 2^1) \zeta(-1) = 1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + 5^1 - 6^1 + \dots$$

Po dosazení -1 do argumentu $\zeta(s)$ se nám celá funkce redukuje na součet všech přirozených čísel. To zní povědomě, ne?

$$-3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Už dříve jsme dokázali, že pravá strana rovnice je rovna $\frac{1}{4}$, takže už nás čeká jen pár úprav.

$$\begin{aligned} -3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) &= \frac{1}{4} \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

A máme výsledek!

Ramanujanova sumace

Tato metoda je o něco kratší než předchozí, ale neméně zajímavá. V hodně zkrácené a zjednodušené verzi zní takto: Označme si sumaci všech přirozených čísel c .

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Ted' zapišme čtřnásobek této řady $4c$.

$$4c = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + \dots$$

Když ted' od sebe tyto dvě řady odečteme dostaneme posloupnost přirozených čísel s „prohozeným“ každým druhým znaménkem.

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Srinivasa Ramanujan dále ve svém postupu dokázal stejně jako my při řešení přes zeta funkci, že tato posloupnost je rovna $\frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} -3c &= \frac{1}{4} \rightarrow c = -\frac{1}{12} \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots &= -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

Sice jsme se podobným (a jednodušším!) způsobem dostali ke stejnému výsledku jako Euler při odvození přes zeta funkci, ale tento postup není úplně matematicky korektní. Určitě jste si všimli, že když jsme od původní řady odečítali její čtyřnásobek, aby se nám „otočilo“ znaménko každého druhého členu. To s sebou ale nese menší problém.

A to sice že trochu zapomínáme, že manipulujeme s nekonečnými řadami, a že s nimi nemůžeme zacházet stejně jako s konečnými. Ve skutečnosti jsme totiž odčítali řadu

$$0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + \dots,$$

což by se na první pohled mohlo zdát jen jako nevinná úprava pro přehlednost, ale při práci s nekonečnými řadami si musíme dávat pozor i na takové věci. Přidáním jedné nuly např. na začátek bychom mohli změnit celý výsledek. A nejen to! Řada by pak dokonce ani nemusela konvergovat!