



Měsíční kvantum informací

řešení 3. série, duben 2023

III.U1 Tenkrát v Irsku, 1843

Nalezněte taková čísla (popř. jiné matematické objekty) a a b , pro která platí:

$$ab = -ba$$

$$|a^2| = |b^2| = 1.$$

Ačkoliv jich existuje mnoho, stačí uvést pouze jednu libovolnou dvojici.

III.U2 Znásilněná matematika

Jaký je součet všech přirozených čísel? Svou odpověď zdůvodněte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

- a) ∞
- b) 42
- c) $-\frac{1}{12}$
- d) $\pi\sqrt{3}$

Michal a Vojta

Pojďme si postupně projít všechny možnosti a zamyslet se nad správným řešením. Jak vám už asi došlo tato úloha má 3 správná řešení a), b) a c).

První možnost je podle klasické matematiky „nejkorektnější“. S každým číslem se součet zvětšuje, takže intuitivně dává smysl, že součet nekonečného počtu čísel bude právě nekonečno. Tato velice intuitivní myšlenka našťásí pro tento konkrétní případ platí (složitější matematikou lze dokázat, že daná číselná řada *diverguje* tj. součet všech jejích členů je ∞). Avšak je dobré pamatovat si, že ne všechny sumace jsou takto intuitivní. Například sumace převrácených hodnot mocnin čísla 2 *konverguje*¹ k výsledku 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

Ted' se podíváme na možnost c).

¹Pokud se chcete dozvědět více o konvergentních a divergentních řadách:

https://en.wikipedia.org/wiki/Convergent_series#Examples_of_convergent_and_divergent_series

III.U3 Fyzici jsou úplně cáklí!

Ke každému fyzikovi a matematikovi přiřaďte jednu poruchu či zvláštnost, která u něj pravděpodobně převažovala.

Jména

Nikola Tesla, Paul Dirac, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Bernhard Riemann, William Rowan Hamilton, Isaac Newton, Alan Turing, Emmy Noether

Zvláštnosti

pedofilie, zoofilie, homosexualita, Aspergerův syndrom, ženská identita, extrémní stydlivost, vegetariánství, celoživotní panictví, alkoholismus

III.A Houstone, máme problém!

Kdo je autorem *Problému tří těles*?

Vojta a Michal si hráli s ChatGPT.

III.K Diracovo moře

Jaký jev je popisován v páté sloce?

III.B Weyl vs. Majorana: boj o neutrino

Během dvacátých a třicátých let 20. století vznikla spousta kvantově mechanických rovnic na popis různých typů fermionů. Mezi ně patří i tzv. Weylova a Majoranova rovnice, které dříve byly kandidáty na popis částice jménem *neutrino*. Pojďme se podívat, jak vypadají!

Pozn.: ve vzorcích níže je použita Einsteinova sumační konvence, Feynmanova „slash“ notace $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ a standardní volba jednotek $\hbar = c = 1$.

1. Odvoďte Weylovu rovnici (rovnice), popisující nehmotné (Weylovy) fermiony, ve slavném tvaru

$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0$$

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0.$$

ψ_L značí levoruký a ψ_R pravoruký Weylův spinor a vektory σ^μ a $\bar{\sigma}^\mu$ jsou definované jako

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) = (I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3),$$

Kde první komponent $\sigma^0 = I_2$ je jednotková matice typu 2×2 azbylé složky obsahují Pauliho spinové matice ($\sigma^i, i \in \{1, 2, 3\}$).

2. Matematicky dokažte, že rovnice

$$i\partial\!\!\!/ \psi^c - m\psi = 0$$

je ekvivalentní s Majoranovu rovnicí, která bývá psána jako

$$i\partial\!\!\!/ \psi - m\psi^c = 0,$$

kde m označuje hmotnost popisovaného fermionu a ψ jeho vlnovou funkci. Horní index c značí nábojové sdružení.



Seznámení a
podrobné
informace



Jak sepisovat
řešení, pravidla



Budeme rádi, když
vyplníte dotazník

Jindřich Anderle, Vojtěch Kubrycht, Michal Stroff

kvantuminformaci@gmail.com