Měsíční kvantum informací

1. ročník – 2023

Řešení 1. série

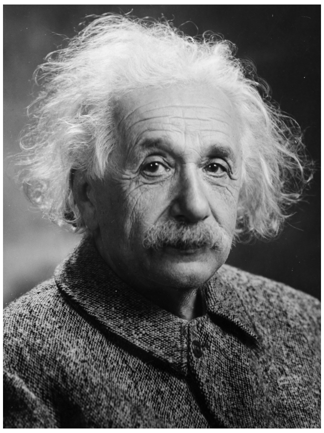
I.U1 Slavné osobnosti fyziky

K obrázkům níže přiřaďte jména vyobrazených fyziků a jejich přínos vědě (využijte pojmy z následujích rámečků).

Jména
Albert Einstein, Isaac Newton, Michael Faraday, Stephen Hawking, Erwin Schrödinger, Marie Curie-Skłodowska

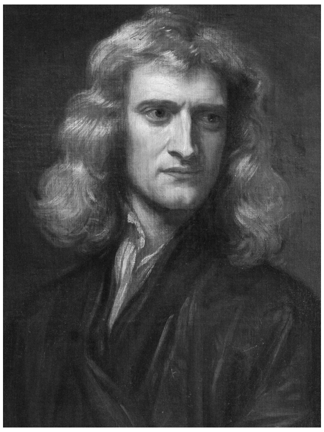
Díla
speciální princip relativity, gravitační zákon, elektromagnetická indukce, stanovení teploty černé díry, myšlenkový experiment s kočkou v krabici, teorie radioaktivity

Vojta hledá inspiraci na SOČ.



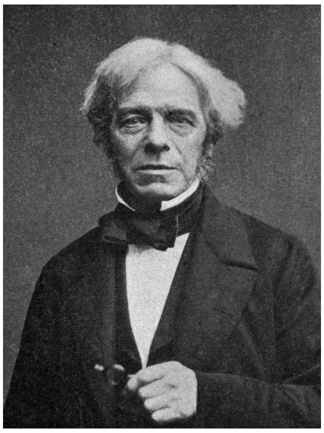
Albert Einstein, speciální princip relativity

Erwin Schrödinger, myšlenkový experiment s kočkou v krabici

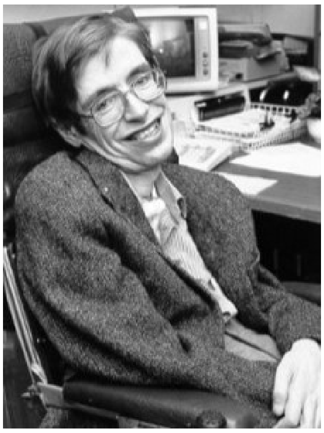


Isaac Newton, gravitační zákon

Marie Curie-Skłodowska, teorie radioaktivity



Michael Faraday, elektromagnetická indukce



Stephen Hawking, stanovení teploty černé díry

I.U2 ISS

Vysvětlete, proč se astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici „vznáší“.

Jindra se zase díval na Rande s Fyzikou.

Zvolme soustavu s počátkem ve středu Země. První osa prochází ISS, druhá je na ní kolmá. Jelikož se ISS pohybuje po kružnici (doopravdy po elipse, ale aproximujeme…), otáčí se i osa. Jedná se tedy o neinerciální soustavu. Působí na ní síla dostředivá – gravitační a síla setrvačná – odstředivá. ISS se v této soustavě nepohybuje, a proto se tyto síly rovnají, tedy výslednice těchto sil je nulová, a astronauti se vznáší.

I.U3 Zrcadlo, zrcadlo, kdo je na světě nejžhavější?

Které z následujících zrcadel dokáže soustřeďovat všechny rovnoběžné paprsky do jednoho bodu?

a) konvexní kulové
b) konkávní kulové
c) konvexní parabolické
d) konkávní parabolické

Michal chtěl zapálit svůj test z dějepisu a předstírat, že to byla nehoda.

Schopnost směrovat paprsky do jednoho ohniska, pokud jdou rovnoběžně s optickou osou, má pouze *konkávní parabolické zrcadlo*. Slovo „konkávní“ jednoduše odkazuje na stranu, na kterou paprsky dopadají, hlavní však je určit přesný tvar zrcadla. Přesně se tento tvar musí počítat buďto geometricky podle zákona odrazu, nebo pomocí tzv. *Fermatova principu nejkratšího času*, ze kterého pak v našem případě vyplývá jeden důležitý fakt. Pokud bychom pustili libovolné množství světelných paprsků z roviny kolmé na optickou osu směrem do zrcadla tak, aby letěly rovnoběžně s touto osou, pak platí, že se všechny tyto paprsky střetnou v ohnisku ve stejnou chvíli. Matematicky to pak znamená, že urazí stejnou vzdálenost. Jediný objekt, který tento požadavek splňuje, je *rotační paraboloid*.

Často se můžete doslechnout, že stejnou schopnost má i kulové zrcadlo. Není tomu úplně tak, platí to pouze přibližně, pokud se paprsky pohybují blízko optické osy (zdatní matematici si tento fakt mohou dokázat třeba tzv. *limitou* či *Taylorovým polynomem*). Oblast v blízkosti optické osy, kde má kulové zrcadlo téměř stejné zobrazovací účinky jako parabolické, se nazývá *paraxiální prostor*.

Výše popisovaného efektu se dá využít dobře i v praxi. Příkladem mohou být sluneční ohřívače vody, které všechnu světelnou energii dopadající na zrcadlo koncentrují do malé konvice, rovněž také běžné satelity nebo třeba legendární Archimédova soustava zrcadel, která měla údajně sloužit k zapalování nepřátelských lodí…

I.A Základní orientace na obloze

V seriálu jsem psal o souhvězdích severní oblohy a jižní oblohy. Vysvětlete, co to je jižní a severní obloha, a proč nějaké souhvězdí přiřazujeme severní obloze a jiné jižní.

Jelikož nad hlavami právě máme zimní oblohu, pozorujte v noci Zimní šestiúhelník. Která planeta se momentálně nachází „uvnitř“ tohoto obrazce?

Jindra se při nočním běhání ztratil v lese.

Severní obloha je ta část oblohy, kterou můžeme vidět ze severní polokoule Země. Stejně tak, jižní oblohu lze vidět z jižní polokoule Země. Celou severní oblohu z jižní polokoule (a samozřejmě i naopak) vidět nemůžeme, jelikož je doslova zakrytá Zemí. To ale neznamená, že ji nevidíme vůbec. Například, pokud bychom byli na rovníku, viděli bychom polovinu severní, a polovinu jižní oblohy. Podle výrazného rudého zbarvení lze lehce poznat, že planetou v zimním šestiúhelníku byl Mars.

I.K Jak je to asi pravděpodobné?

Jak se nazývá princip, který pojednává o nemožnosti přesného měření hybnosti (rychlosti) a polohy?

a) Robertsonův vztah
b) Pauliho vylučovací princip
c) Heisenbergova relace neurčitosti
d) Hundovo pravidlo

Michal přemýšlel nad pravděpodobností, že dostane jedničku z dějepisu.

Pojem *Heisenbergův princip (relace) neurčitosti* je velmi dobře znám i laické veřejnosti. Pojednává o nepřímé úměrnosti nepřesnosti měření polohy a hybnosti, jinými slovy čím přesněji určíme polohu částice, tím méně přesně už můžeme určit její hybnost (samozřejmě i naopak). V jednodimenzionálním případě vypadá jeho matematická formulace následovně:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2},$$

kde Δp a Δx jsou nejistoty hybnosti a polohy a $\hbar$ značí tzv. *redukovanou Planckovu konstantu.*

Identitou, která tuto neurčitost popisuje, může být i tzv. *Robertsonův vztah*, který ale slouží v podstatě univerzálně a lze jím popsat relace neurčitosti mezi libovolnými veličinami popisujícími danou částici či celý systém. Jedná se o takové zobecnění Heisenbergova principu na všechny možné veličiny.

I.B Uhlo-vodík

Jakou rychlostí by se musel pohybovat atom vodíku, aby měl z pohledu nehybného pozorovatele stejnou hmotnost jako atom uhlíku v klidu? Výsledek vyjádřete v násobcích c (rychlosti světla).

Vojta se zasnil během hodiny chemie.

Jelikož se atom vodíku bude pohybovat rychlostí blízkou rychlosti světla, musíme přestat uvažovat o jeho hmotnosti jako o konstantě. Vztah mezi *relativistickou hmotností* m a *klidovou hmotností* m_0 je dán následujícím vzorcem.

$$m = m_0\gamma,$$

kde $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ je Lorentzův faktor.

Klidovou hmotnost atomu vodíku označíme m_{H} a jeho relativistickou hmotnost, která bude rovna hmotnosti atomu uhlíku, označíme m_{C}.

$$m_{\mathrm{C}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Několika úpravami vyjádříme rychlost v.

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{C}}}$$

$$\frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{C}}}\right)^2$$

$$v^2 = \left(1 - \left(\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{C}}}\right)^2\right) c^2$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{m_{\mathrm{H}}}{m_{\mathrm{C}}}\right)^2}$$

Za m_{H} a m_{C} můžeme dosadit relativní atomové hmotnosti.

$$m_{\mathrm{H}} = \mathrm{A_r}(\mathrm{H}) = 1,008$$

$$m_{\mathrm{C}} = \mathrm{A_r}(\mathrm{C}) = 12,011$$

$$v = c\sqrt{1 - \left(\frac{1,008}{12,011}\right)^2} \approx 0,996\ c$$

Aby atom vodíku měl stejnou hmotnost jako atom uhlíku v klidu, musel by se pohybovat rychlostí cca $0,996\ c$.

Řešení 2. série

II.U1 Když hvězdy mizí

V jaké úhlové výšce nad obzorem je extinkce světla hvězd největší?

a) 0°(obzor)

b) 45°

c) 90°(zenit)

Pokuste se svou odpověd odůvodnit.

Jindra si přál zmizet, když ho prohlásili za hvězdu tanečního večera.

V čím nižší úhlové výšce (výšce nad obzorem) světlo vzhledem k pozorovateli přichází, tím delší dráhu v atmosféře musí urazit. Jelikož tedy urazí delší dráhu, světlo se více rozptýlí. Je tedy jasné, že správná odpověd je a).

II.U2 Jedna konstanta vládne všem...

Kdo z uvedených fyziků jako první teoreticky předpověděl svými rovnicemi koncept neměnnosti rychlosti světla?

a) Hendrik Lorentz

b) Albert Einstein

c) James Clerk Maxwell

d) Henri Poincaré

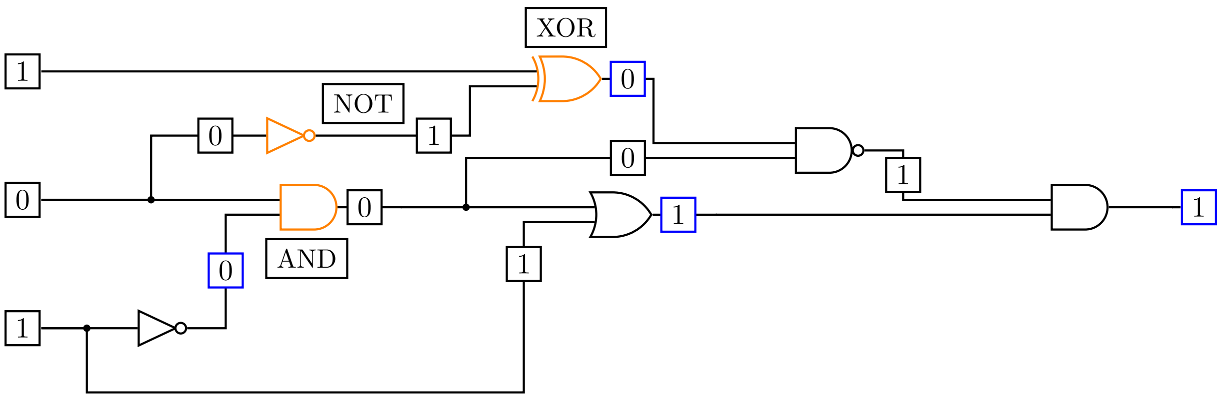
Michal přemýšlel, jak funguje záhadná moc Jednoho prstenu.

V roce 1865 slavný skotský fyzik *James Clerk Maxwell* zformuloval své čtyři rovnice elektromagnetismu, podle kterých se může elektrické a magnetické pole šířit ve formě vlny. Zjistilo se rovněž, že tato vlna nápadně odpovídá světlu. To, co je ale na Maxwellových rovnvicích zajímavé a podivné, je tvrzení, že světlo jakožto nosič elektromagnetického pole se šíří konstantní rychlostí nezávisle na tom, z jaké soustavy se na něj díváme. Na základech této Maxwellovy teorie byla vystavěna tzv. *Lorentzova transformace* a následně i věhlasná Einsteinova speciální teorie relativity.

II.U3 Logická hradla

Pojmenujte oranžově zvýrazněná logická hradla a určete pravdivostní hodnotu signálu v místech a, b, c a d.

Vojta chtěl flexit se svými TEXanými obvody.

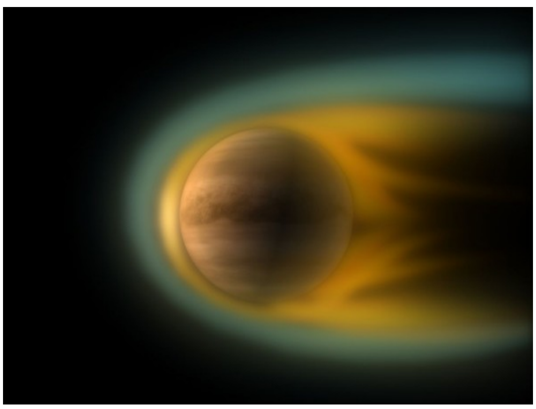


II.A Polární záře

V seriálu jste se dozvěděli o polární záři na Zemi, nyní se zkuste zamyslet, jak je to s polární září na naší sousední planetě Venuši. Rozhodněte jestli lze v atmosféře Venuše pozorovat jev podobný polární záři na Zemi, pokud ano popište, jak vzniká.

Vojta chtěl teraformovat Venuši.

Venuše nemá vlastní magnetické pole, takže na první pohled by se mohlo zdát, že odpověď je jasná - Ne, žádný jev podobný zemské polární záři v atmosféře Venuše pozorovat nelze, protože nabité částice slunečního větru nemají s čím interagovat. Tato úvaha je zcela správná, ale i přes to astronomové pozorují *auroru* na Venuši.



Aurora na Venuši[1]

Jak je to možné? V atmoféře Venuše se vyskytuje hodně iontů, převážně ionty kyslíku O^{2-}. Plazmoid blížící se k Venuši indukuje v ionosféře Venuše slabé magnetické pole. Nabité částice slunečního větru pak s tímto indukovaným polem interagují a předávájí svojí energii kyslíkovým iontům, které jí následně vyzáří a vytvoří tak v celé atmosféře jev podobný polární záři na Zemi.

II.K Není všechno teplé, co se třpytí!

Dle Planckova vyzařovacího zákona má závislost spektrální intenzity na vlnové délce jedno maximum. V praxi to znamená, že tělesa vyzařují na všech vlnových délkách, ovšem na některých vyzařují méně a na některých více. Existuje však jedna vlnová délka, na které dané těleso vyzařuje nejvíce, říkejme jí λ_{max}. A právě tuto vlnovou délku λ_{max} také nejlépe vidíme.

1. Jaký je vztah mezi λ_{max} a teplotou příslušného tělesa?
   a) λ_{max} je přímo úměrná teplotě tělesa
   b) λ_{max} je nepřímo úměrná teplotě tělesa
2. Svou předchozí odpověd se pokuste zdůvodnit úvahou nebo prokázat na nějakém jevu v přírodě.

   Nápověda: Zamyslete se například nad tím, co dává hvězdám jejich barvu.
3. Jak se nazývá zákon, který dává do vztahu λ_{max} a teplotu vyzařujícího tělesa?
   a) Stefan–Boltzmannův zákon
   b) De Broglieho vlna
   c) Einsteinova rovnice fotoefektu
   d) Wienův posunovací zákon

Michal hledá všechny možné způsoby, jak by mohl zazářit.

Vlnová délka, na které těleso (z původní teorie absolutně černé) vyzařuje nejvíce, je **nepřímo úměrná** jeho teplotě. Tento fakt se dá dokázat matematicky hledáním maxima funkce spektrální intenzity (pomocí matematické operace zvané *derivování*). Protože se jedná o docela signifikantní poznatek, vysloužil si vlastní název, *Wienův posunovací zákon.*

V přírodě ho lze pozorovat zejména ve vesmíru, například barva hvězd je bezprostředně určena jejich teplotou. Modré hvězdy jsou teplejší než oranžové a to právě proto, že modré barvě odpovídá kratší vlnová délka než oranžové. V astronomii proto lze pozorováním barvy hvězd relativně snadno určit jejich povrchovou teplotu.

Zákon vyzařování se projevuje i v jedné v současné době probírané problematice, kterou je skleníkový efekt. Nepochybně jste už někdy slyšeli, jak tento jev funguje. V jednoduchém podání sluneční světlo projde atmosférou Země, ale jeho energie se už poté nevrátí zpátky do vesmírného prostoru. Jak je to možné? Energii ze Slunce pohltí zemský povrch, který se tak ohřívá. Podle Planckova zákona musí i samotná Země vyzařovat. Ovšem na mnohem delší vlnové délce, než je

[1] Illustration by C. Carreau/ESA

viditelné světlo ze Slunce, protože Země má porvchovou teplotu mnohokrát nižší než Slunce. Naše planeta ve výsledku vrací přijatou enrgii v infračervené oblasti, jenže právě na takových vlnových délkách absorbují záření ony skleníkové plyny (původ toho děje tkví v kvantové chemii a tzv. *Ramanově spektroskopii*) a udržují tím energii v atmosféře, čímž se planeta rychle otepluje. . .

V poslední řadě by bylo hezké uvést něco, co všichni nepochybně znáte. Infračervená kamera, přístroj umožňující vidění ve tmě, též zvaný jako termovizní kamera. Funguje přesně na principu sledování infračeveného záření, tedy záření, které člověk emituje. Jeho vlnovou délku přepočítá na teplotu tělesa a vykreslí nám hezký obraz rozložení teploty v okolním prostoru.

II.B Zase ty světla!

Netrpělivý řidič se přibližuje k semaforu, na kterém z dálky vidí svítit červenou. Nechce zastavovat, a jelikož je fyzikálně vzdělaný, napadne ho zrychlit na takovou rychlost, že místo červené uvidí zelenou. Vypočítejte rychlost, jakou by se musel pohybovat. $\lambda_\mathrm{R} = 700\,\mathrm{nm}$ $\lambda_\mathrm{G} = 550\,\mathrm{nm}$.

Jindra se rozhodl řešit slavné dilema; řešit two B or not to be.

Od semaforu se šíří světlo směrem k autu. Jelikož se auto pohybuje, vlnová délka světla se důsledkem *Dopplerova jevu* zmenšuje. Pro frekvenci f_e emitovaného světla a frekvenci f_p přijatého světla platí rovnice

$$f_p = f_e\left(1 + \frac{v_p}{v}\right),$$

kde v_p je rychlost přijímače, tedy auta, a v je rychlost vlnění, v našem případě světla. Proto za v dosadíme rychlost světla c.

Chceme vypočítat, jakou rychlostí by se řidič musel pohybovat, tedy chceme zjistit v_p. Roznásobením závorky a úpravou se dostaneme k vztahu:

$$\frac{f_p - f_e}{f_e} = \frac{v_p}{c}.$$

frekvence můžeme obměnit za vlnové délky.

$$\frac{\lambda_e - \lambda_p}{\lambda_p} = \frac{v_p}{c}$$

Malá odbočka: dostali jsme se k vztahu, který se používá (zjednodušeně) v astrofyzice. Levá strana rovnice se nazývá rudý/červený posuv.

Zpět však k naší úloze. Za vlnovou délku λ_e emitovaného světla dosadíme vlnovou délku λ_R červené barvy, a za vlnovou délku λ_p přijatého světla vlnovou délku λ_G zeléné barvy. Rovnici už jen upravíme tak, abychom vyjádřili rychlost v_p auta.

$$v_p = c\frac{\lambda_R - \lambda_G}{\lambda_G}$$

Číselně výsledek vychází

$$v_p \approx 0,27c \approx 8,2 \cdot 10^7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Výsledek vám možná nebude vycházet na číslo stejně. . . to ale vůbec nevadí. Při takhle velkém čísle nás výsledek zajímá pouze řádově.

Klasický Dopplerův jev platí pro vlnění, které se šíří jen v určitém prostředí (třeba vzduch nebo voda). Avšak víme, že elektromagnetické vlny, a tedy i světlo, pro šíření žádné prostředí nepotřebují (mohou se šířit ve vakuu). Proto bychom správně měli používat *relativistický Dopplerův jev*. U elektromagentických vln tento jev závisí pouze na relativním pohybu mezi přijímačem a vysílačem.
Platí pro něj vztah:

$$f_p = f_e \sqrt{\frac{c+v}{c-v}},$$

kde f_p je přijímaná frekvence, f_e frekvence emitovaná a v relativní rychlost. Frekvence opět obdobně nahradíme za vlnové délky a rovnici postupně upravíme.

$$\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 = \frac{c+v}{c-v}$$

$$\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 c - v = c + v$$

$$\left(\frac{\lambda_e}{\lambda_p}\right)^2 c - c = 2v$$

$$v = \frac{c}{2}\left(\frac{\lambda_p^2}{\lambda_e^2} - 1\right)$$

Číselně je rychlost v

$$v \approx 9,3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Vidíme, že oba výsledky jsou pro tak velká čísla řádově stejná, proto v tomto případě je akceptovatelné použít i klasický Dopplerův efekt. Pro menší čísla by to však mohl být problém, proto pro světlo vždy počítejte s relativistickým Dopplerovým jevem.

Řešení 3. série

III.U1 Tenkrát v Irsku, 1843

Nalezněnte taková čísla (popř. jiné matematické objekty) a a b, pro která platí:

$$ab = -ba$$

$$|a^2| = |b^2| = 1.$$

Ačkoliv jich existuje mnoho, stačí uvést pouze jednu libovolnou dvojici.

III.U2 Znásilněná matematika

Jaký je součet všech přirozených čísel? Svou odpověď zdůvodněte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots$$

a) ∞

b) 42

c) $-\frac{1}{12}$

d) $\pi\sqrt{3}$

Michal a Vojta

Pojďme si postupně projít všechny možnosti a zamyslet se nad správným řešením. Jak vám už asi došlo tato úloha má 3 správná řešení a), b) a c).

První možnost je podle klasické matematiky „nejkorektnější“. S každým číslem se součet zvětšuje, takže intuitivně dává smysl, že součet nekonečného počtu čísel bude právě nekonečno. Tato velice intuitivní myšlenka naštěsí pro tento konkrétní případ platí (složitější matematikou lze dokázat, že daná číselná řada *diverguje* tj. součet všech jejích členů je ∞). Avšak je dobré pamatovat si, že ne všchny sumace jsou takto intuitivní. Například sumace převrácených hodnot mocnin čísla 2 *konverguje*[2] k výsledku 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 2$$

[2]Pokud se chcete dozvědět více o konvergentních a divergentních řadách: `https://en.wikipedia.org/wiki/Convergent_series#Examples_of_convergent_and_divergent_series`

Zdůvodnění správnosti druhé možnosti je celkem jasné. 42. Odpověď na všechno.

Někteří z vás se určitě nedočkavě ptají jak je to s možností c). I přes veškerou intuici je i tato možnost správná. Existuje několik způsobů jak sumaci (součtu) všech přirozených čísel přiřadit[3] hodnotu $-\frac{1}{12}$, nejznámějšími jsou tzv. *regularizace zeta funkce* a *Ramanujanova sumace.*

Upozornění pro nematematiky: Obě metody vyžadují využití složité matematiky (calculus, komplexní čísla). Níže se vám pokusíme metody vysvětlit ve zjednodušené formě.

Regularizace zeta funkce

Náš příběh začíná u slavného matematika *Leonharda Eulera* a jiné nekonečné řady, a to u sumace všech mocnin daného čísla x.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Nyní si stejně jako Euler dokážeme výše uvedenou hodnotu, ke které daná řada konverguje. Označme tuto řadu S.

$$S = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots$$

Po vynásobení obou stran rovnice x dostáváme

$$xS = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots.$$

Když od sebe tyto dvě řady odečteme všechny jejich členy se až na 1 z první řady vykrátí.

$$S - xS = 1$$

Několika jednoduchými úpravami z této rovnice vyjádříme S.

$$S(1-x) = 1$$

$$S = \frac{1}{1-x}$$

Nyní, když už známe hodnotu této sumace, se pojdmě vrátit zpět k úpravám. K dalšímu postupu budeme řadu potřebovat *zderivovat.* K derivování této řady naštěstí potřebujeme znát jen jedno jednoduché pravidlo, a tím je pravidlo pro derivaci mocniny.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$$

Teď zderivujeme obě strany rovnice. Derivace 1 je 0. Pravou stranu rovnice můžeme zapsat jako $(1-x)^{-1}$ a uplatnit pravidlo zmíněné výše.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + \dots\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$0 + 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + \dots = \frac{1}{(1-x)^2}$$

[3] Záměrně jsme použili slovo přiřadit, protože následující hodnota není výsledkem sumace ve klasickém smyslu

V dalším kroku Euler položil $x = -1$. Po dosazení této hodnoty dostaneme následující rovnici.

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots = \frac{1}{4}$$

Teď už přichází do hry funkce zmíněná v názvu této metody, *Riemannova zeta funkce* [4]. Značí se $\zeta(s)$, kde $s = \sigma + ti \in \mathbb{C}$ je její argument náležící *komplexním číslům* s *reálnou* částí $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ a *imaginární* částí $\mathrm{Im}(s) = t$, a je definování následovně:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \dots = 1^{-s} + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + \dots$$

Když $\zeta(s)$ vynásobíme 2^{-s} dostaneme

$$2^{-s}\zeta(s) = 2^{-s} + 4^{-s} + 6^{-s} + 8^{-s} + 10^{-s} + \dots$$

Teď dvojnásobek tohoto výsledku odečteme od zeta funkce $\zeta(s)$.

$$\zeta(s) - 2 \cdot 2^{-s}\zeta(s) = (1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s) = 1 - 2^{-s} + 3^{-s} - 4^{-s} + 5^{-s} - 6^{-s} + \dots$$

Dále Euler položil $s = -1$, takže naštěstí nebudeme muset počítat s komplexními čísly. Po dosazení do obou stran rovnice dostaneme:

$$(1 - 2 \cdot 2^1)\zeta(-1) 1 - 2^1 + 3^1 - 4^1 + 5^1 - 6^1 + \dots$$

Po dosazení -1 do argumentu $\zeta(s)$ se nám celá funkce redukuje na součet všech přirozených čísel. To zní povědomě, ne?

$$-3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Už dříve jsme dokázali, že pravá strana rovnice je rovna $\frac{1}{4}$, takže už nás čeká jen pár úprav.

$$-3(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots) = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots = -\frac{1}{12}$$

A máme výsledek!

Ramanujanova sumace

Tato metoda je o něco kratší než předchozí, ale neméně zajímavá. V hodně zkrácené a zjednodušené verzi zní takto: Ozančme si sumaci všech přirozených čísel c.

$$c = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

Teď zapišme čtřnásobek této řady $4c$.

$$4c = 4 + 8 + 12 + 16 + 20 + 24 + \dots$$

[4] Můžete se setkat i s označením *Eulerova-Riemannova zeta funkce*, Euler jí formuloval a Riemann jí rozšířil pro obor komplexních čísel.

Když teď od sebe tyto dvě řady odečteme dostaneme posloupnost přirozených čísel s „prohozeným“ každým druhým znaménkem.

$$-3c = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

Srinivasa Ramanujan dále ve svém postupu dokázal stejně jako my při řešení přes zeta funkci, že tato posloupnost je rovna $\frac{1}{4}$.

$$-3c = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; c = -\frac{1}{12}$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = -\frac{1}{12}$$

Sice jsme se podobným (a jednodušším!) způsobeb dostali ke stejnému výsledku jako Euler při odvození přes zeta funkci, ale tento postup není úplně matematicky korektní. Určitě jste si všimli, že když jsme od původní řady odečítali její čtyřnásobek, aby se nám „otočilo“ znaménko každého druhého členu. To s sebou ale nese menší problém.

A to sice že trochu zapomínáme, že manipulujeme s nekonečnými řadami, a že s nimi nemůžeme zacházet stejně jako s konečnými. Ve skutečnosti jsme totiž odčítali řadu

$$0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + \dots,$$

což by se na první pohled mohlo zdát jen jako nevinná úprava pro přehlednost, ale při práci s nekonečmi řadami si musíme dávat pozor i na takové věci. Přidáním jedné nuly např. na začátek bychom mohli změnit celý výsledek. A nejen to! Řada by pak dokonce ani nemusela konvergovat!

III.U3 Fyzici jsou úplně cáklí!

Ke každému fyzikovi a matematikovi přiřaďte jednu poruchu či zvláštnost, která u něj pravděpodobně převažovala.

Jména
Nikola Tesla, Paul Dirac, Albert Einstein, Erwin Schrödinger, Bernhard Riemann, William Rowan Hamilton, Isaac Newton, Alan Turing, Emmy Noether

Zvláštnosti
pedofilie, zoofilie, homosexualita, Aspergerův syndrom, ženská identita, extrémní stydlivost, vegetariánství, celoživotní panictví, alkoholismus

---

III.A Houstone, máme problém!

Kdo je autorem *Problému tří těles*?

Michal a Vojta si hráli s ChatGPT.

Autorem *Problému tří těles* je čínský spisovatel Liou Cch'-sin. Děj knihy vypadá přibližně takto:

„V Říši středu zuří Velká kulturní revoluce a Číňané, kteří nechtějí zůstat pozadu za Sověty a Američany, se v rámci tajného vojenského projektu pokoušejí navázat kontakt s mimozemskými civilizacemi. Třicet let poté začnou na Zemi umírat významní vědci a vznikají sekty, které vybízejí k návratu k přírodě. Objeví se nová počítačová hra pro virtuální realitu, zvláštní, čarovná a znepokojivá, která jako by ani nepocházela z tohoto světa. A pomalu se začíná vyjevovat pravda o tajném projektu z éry Kulturní revoluce.“

III.K Diracovo moře

Jaký jev je popisován v páté sloce?

III.B Weyl vs. Majorana: boj o neutrino

Během dvacátých a třicátých let 20. století vznikla spousta kvantově mechanických rovnic na popis různých typů fermionů. Mezi ně patří i tzv. Weylova a Majoranova rovnice, které dříve byly kandidáty na popis částice jménem *neutrino*. Pojďme se podívat, jak vypadají!

Pozn.: ve vzorcích níže je použita Einsteinova sumační konvence, Feynmanova „slash“ notace $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ a standardní volba jednotek $\hbar = c = 1$.

1. Odvoďte Weylovu rovnici (rovnice), popisující nehmotné (Weylovy) fermiony, ve slavném tvaru
$$\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0$$
$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0.$$
ψ_L značí levoruký a ψ_R pravoruký Weylův spinor a vektory σ^μ a $\bar{\sigma}^\mu$ jsou definované jako
$$\sigma^\mu = \left(\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3\right) = (I_2, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$
$$\bar{\sigma}^\mu = \left(\sigma^0, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3\right),$$
Kde první komponent $\sigma^0 = I_2$ je jednotková matice typu 2×2 a zbylé složky obsahují Pauliho spinové matice (σ^i, $i \in \{1, 2, 3\}$).

2. Matematicky dokažte, že rovnice
$$i\not{\partial}\psi^c - m\psi = 0$$
je ekvivalentní s Majoranovu rovnicí, která bývá psána jako
$$i\not{\partial}\psi - m\psi^c = 0,$$
kde m označuje hmotnost popisovaného fermionu a ψ jeho vlnovou funkci. Horní index c značí nábojové sdružení.

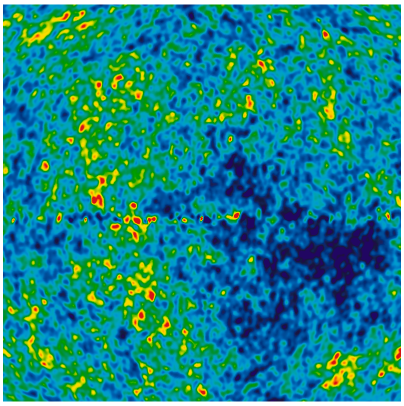
Řešení 4. série

IV.U1 To na tabuli neuvidíte!

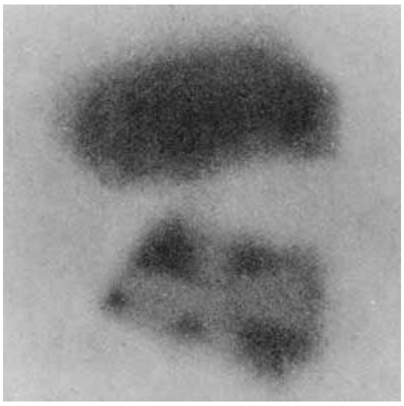
K následujícím obrázkům přiřaďte jev, nebo objekt, který zachycuje.

Jevy/objekty
interakce radioaktivního záření s fotografickou deskou, simulace brownova pohybu částice, Sgr A*, mapa teplotního rozložení raného vesmíru, čerenkovovo záření, elektron letící zpátky v čase mlžnou komorou

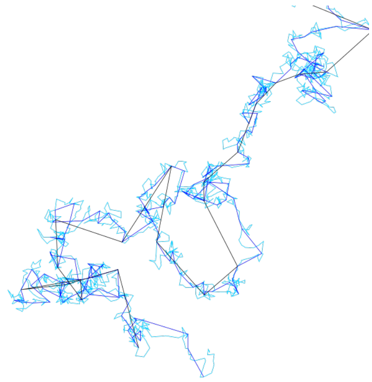
Michal dostal za úkol připravit si experiment na hodinu fyziky.



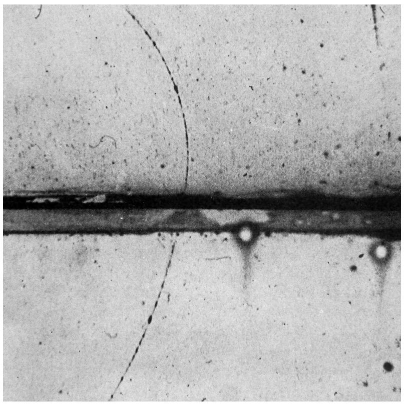
mapa teplotního rozložení raného vesmíru



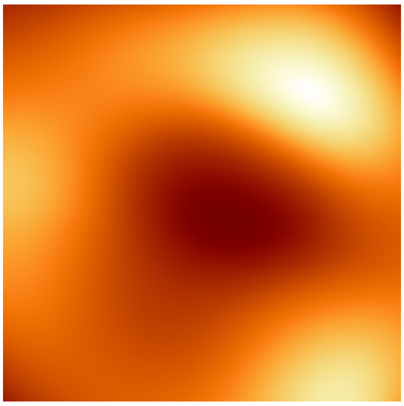
interakce radioaktivního záření s fotografickou deskou



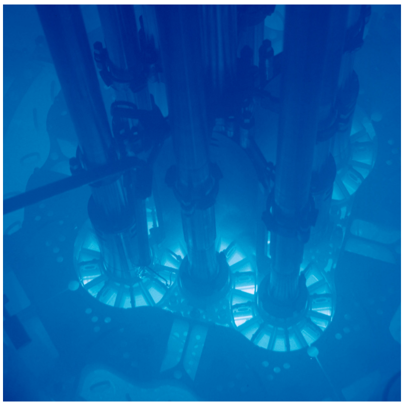
simulace brownova pohybu částice



elektron letící zpátky v čase mlžnou komorou



Sgr A*



čerenkovovo záření

Bonus: Jak jinak byste mohli pojmenovat 4. obrázek?

IV.U2 Světla, kamera, Stockholm!

Za rok 2022 byla udělena Nobelova cena za fyziku Alainu Aspectovi, Johnu Clauserovi a Antonu Zeilingerovi konkrétně za experimenty s provázanými fotony. Jejich výsledky potvrdili neplatnost tzv. *Bellových nerovností* u provázaných částic, což vede k faktu, že se tyto částice ovlivňují na dálku a to nadsvětelnou rychlostí. Je takto ale možné posílat informace rychleji než světelnou rychlostí? Pokuste se nastínit zdůvodnění své odpovědi.

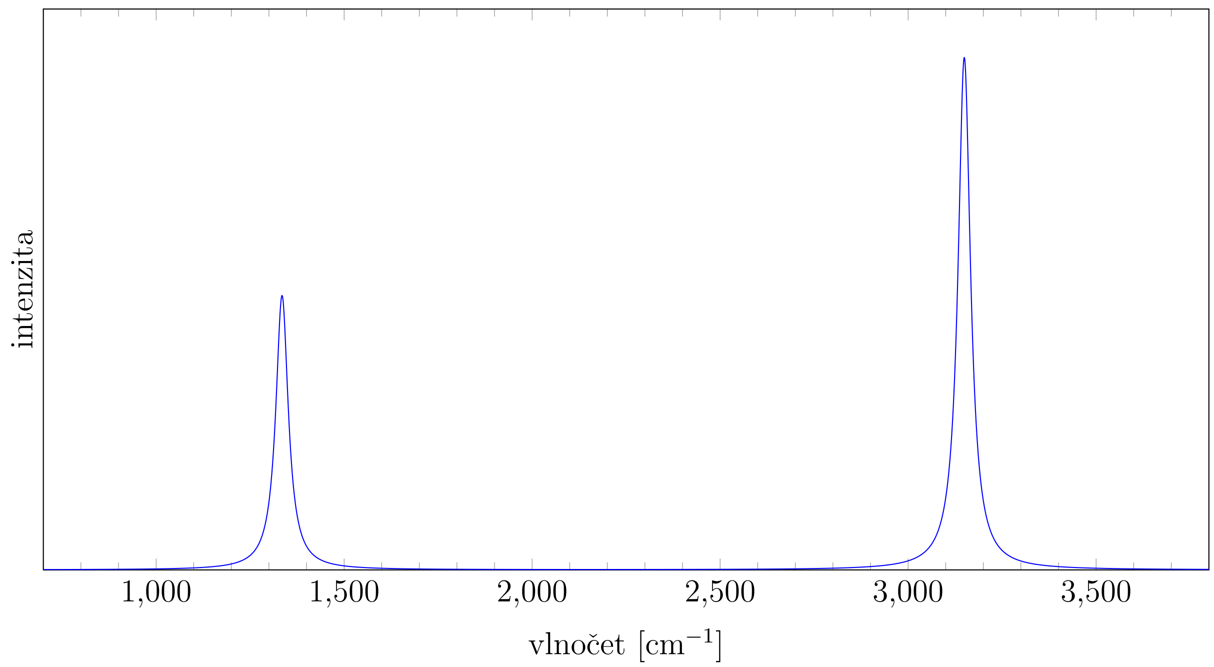
---

[1] Autor: NASA/WMAP Science Team
[2] Autor: Henri Becquerel
[3] Autor: Di Gama
[4] Autor: Carl D. Anderson
[5] Autor: EHT Collaboration
[6] Autor: Argonne National Laboratory

IV.U3 Molekuly, molekuly, hýbejte se!

1. Které molekule pravděpodobně patří níže zobrazené Ramanovo spektrum?
   a) H_2O
   b) CO_2
   c) CH_4
   d) F_2

Ramanovo spektrum molekuly (teorie)



2. Co v molekule určuje toto (čistě Ramanovo) spektrum?
   a) Energetické hladiny přeskakujících elektronů
   b) Energetické hladiny kmitajících jader

IV.A Pozdní večer, první máj, večerní máj, byl hvězd čas.

1. Proč nevidíme zelené nebo třeba fialové hvězdy?
2. Při pohledu na HR diagram vás možná zaskočilo, že hodnota jednoho dílku stupnice zářivého výkonu (luminosity) neodpovídá hodnotě jednoho dílku stupnice absolutní magnitudy. Co to vypovídá o lidském vnímání zářivosti?

IV.K Částice, či vlna, to je oč tu běží.

Zkuste najít a stručně popsat využiží de Broglieho teorie.

IV.B Uf, to je tíha!

Změřte svou hmotnost bez pomoci váhy. Přístroj *váha* definujeme jako měřidlo, které měří hmotnost přímým měřením (rovnou ukazuje vaši hmotnost).

Zaměřte se především na metodu, kterou při měření postupujete, své měření co nejdůkladněji popište a pečlivě zdokumentujte. Rovněž pamatujte, že neexistuje pouze jeden způsob měření. Buďte zkrátka kreativní!

Seriály – Astronomie

I.A Základní orientace na obloze

Lidé vzhlíží k hvězdné obloze a obdivují její krásu již od nepaměti. Avšak nejen to. Díky obloze se orientují na svých cestách či třeba vytváří kalendáře.

Začněmě tím, proč se vlastně obloha (nebeská sféra) během roku mění. Asi všem je jasné, že Země obíhá kolem Slunce a otáčí se kolem své osy. Dráha, po které se Slunce pohybuje na obloze se nazývá *ekliptika*. Je to průmět pohybu Země kolem Slunce na nebeskou sféru. Jelikož všechny planety mají podobný sklon roviny oběhu kolem Slunce, najdeme kolem ekliptiky i planety.

Sklon rotační osy Země je zhruba 23,5°. To znamená, že úhel který osa svírá s *nebeským rovníkem* (průmět zemského rovníku na oblohu) je 66,5°. Kvůli oběhu Země kolem slunce se ekliptika a nebeský rovník spolu po obloze hýbají. Proto je v zimě Slunce nízko, a v létě vysoko.

Dalším pojmem, který budem potřebovat je *nebeský severní a jižní pól*. Opomenu-li málo výrazné pohyby Země, které mají vliv na sklon rotační osy, míří severní pól stále k stejné hvězdě, *Polárce* (Severka, Polaris, α Ursae Minoris). To znamená, že Polárka bude na obloze vždy na „stejném místě“. Kde přesně? Víme, že severní pól a rovník svírají úhel 90°. Proto budeme Polárku hledat 90° severně od nebeského rovníku. Odborně bychom řekli, že *deklinace* Polárky je zhruba 90°. Důležitá je Polárka hlavně v tom, že se kolem ní „otáčí“ obloha.

Po pochopení proč a jak se obloha mění, se můžeme zabývat tím, co se na obloze nachází. Nejvýraznějšími útvary na obloze jsou *souhvězdí*. Často si lidé milně domnívají, že se jedná pouze o obrazce tvořené jasnými hvězdami. V moderní astronomii je však souhvězdí oblast na obloze s přesně vymezenými hranicemi. Na nebi jich bylo přesně vymezeno 88. Většina souhvězdí viditelných ze severní polokoule převzalo název z dob antických. Souhvězdí na jižní obloze mají názvy většinou od mořeplavců, kteří se vydávali na daleké výpravy.

Po celý rok na obloze najdete *cirkumpolární souhvězdí*. Vídime je v jakémkoliv ročním období jelikož se pro pozorovatele na Zemi nacházejí na obloze blízko Polárky, tedy hvězdy kolem které se celá obloha otáčí. Polárka je součástí souhvězdí Malý Medvěd. Poblíž se nachází Velká medvědice, jejíž částí je všem známý Velký vůz.

Cirkumpolárních souhvězdí není mnoho, pouze 8. Všechna ostatní rozdělujeme podle toho, kdy jsou v noci vidět. Tedy jarní, letní, podzimní a zimní souhvězdí. Každá z obloh má svůj hlavní orientační obrazec, skládající se z nejjasnějších hvězd různých souhvězdí. Na jarní obloze se budem orientovat pomocí Jarního trojúhelníku a v létě nám pomůže trojúhelník letní. Na podzim si nelze nevšimnout výrazného Pegasova čtverce. A konečně na zimní obloze, v pozadí s Mléčnou dráhou, je obrazec tvořený šesti velmi jasnými hvězdami, Zimní šestiuhelník. Tyto obrazce nám pomáhají rychle se orientovat na obloze. Pozorujete-li oblohu, nejprvě si najděte tento obrazec. Odtud lehce naleznete požadované souhvězdí. Věřím, že není nutné vyjménovávat všechna souhvězdí. . . jednoduše si na internetu či v knihách najděte seznam sami. Pro pozorování je vemi dobrou pomůckou otočná mapa, či dnes více popularní, mobilní aplikace.

Na obloze nenajdeme jen hvězdy, planety, Měsíc a Slunce. Avšak záleží kde pozorujete, v městech nemusíte najít ani to. Doopravdy je celá obloha poseta galaxiemi, mlhovinami, hvězdokupami a mnoho dalším. To si ale necháme na seriál o hlubokém vesmíru, ať se máte na co těšit.

II.A Polární záře

Záře viditelná v okolí zemských pólů pojmenovaná podle řecké bohyně úsvitu - *Aurora.* Snad každý o polární záři již někdy slyšel a někteří šťastlivci dokonce měli možnost tuto překrásnou podívanou vidět na vlastní oči, avšak málokdo ví jak doopravdy vzniká. V tomto seriálu se vám pokusíme objasnit fascinující pouť, která stojí za vznikem jednoho z nejkouzelnějších přírodních jevů na Zemi.

Náš příběh začíná u nám nejbližší hvězdy, tedy u Slunce. Ve vnější vrstvě sluneční atmosféry vznikají *koronální smyčky.* Obrovské „trubice“ proudící z jedné sluneční skvrny do druhé jsou tvořené nepředstavitelně horkým a hustým *plazmatem*, které je v tomto tvaru drženo magnetickým polem. Plazma, tedy ionizovaný plyn natahuje a deformuje toto magnetické pole směrem od Slunce a dvakrát až třikrát za den se plazmatu podaří oddělit část magnetického pole od Slunce. Při *výronu koronální hmoty* (*CME*) se od Slunce oddělí obrovský oblak [1] plazmatu obklopený silným magnetickým polem složený převážně z protonů, elektronů a alfa částic (jader helia), neboli *plazmoid.* Ten se pak vydá meziplanetární cestu dlouhou stovky miliónů kilometrů.

Po zhruba 18hodinovém letu dorazí *sluneční vítr* k Zemi. Země má díky pohybu tekuté vrstvy vnějšího jádra složeného převážně z niklu a železa vlastní magnetické pole *dipólového charakteru.* To neznamená nic jiného, než že se magnetické pole Země chová podobně jako magnetické pole obyčejného tyčového magnetu, který si všichni nepochybně pamatujeme z hodin fyziky. Magnetické pole Země se ale od tyčového magnetu liší tím, že je deformované neustálým působením slunečního větru. Sluneční vítr splošťuje stranu magnetosféry přivrácenou ke Slunci na cca 5 zemských průměrů a naopak tvaruje odvrácenou stranu do tzv. *magnetického ohonu*, který sahá až do vzdálenosti cca 100 zemských průměrů.

Magnetické pole plazmoidu, jehož siločáry mají opačný směr než zemské magnetické pole, začne interagovat s magnetickým polem Země. Siločáry magnetického pole Země se spojí se siločarami plazmoidu a u zemských pólů vytvoří „trychtýře“, zvané *kaspy* [2]. Jelikož je plazma vázáno na magnetické pole, budou všechny nabité částice „sledovat“ tyto spojené siločáry až k zemským pólům. Elektrony a protony slunečního větru budou v magnetosféře Země konat hned několik periodických pohybů. Jednak *gyraci*, tedy oběh okolo magnetických siločar po šroubovici, jednak tzv. *drift*, což je oběh okolo Země, nabité částice tedy postupně střídají siločáry, okolo kterých gyrují a poslední pohyb, který částice konají je pohyb po siločáře mezi zemskými póly. Elektronu trvá pouhé 4 sekundy dostat se od jednoho pólu k druhému. Důsledkem tohoto pohybu je jakási propojenost polárních září Severního a Jižního pólu, tedy *aurory borealis* a *aurory australis.*

Jistě jste si již někdy všimli, že polární záře může mít mnoho různých barev od zelené až po červenou. Barva polární záře záleží na molekule, které nabité částice slunečního větru na pólu předají svou energii. V nejvyšších výškách atmosféry je největší koncentrace atomárního kyslíku O, který nejvíce vyzařuje energii na vlnové délce 630 nm (červená). V nižších vrstvách atmosféry je vysoká koncentrace dusíku N_2 a dochází k nesčetně mnoho srážkám mezi molekulami dusíku a kyslíku. Pokud dusík absorbuje energii jako první a pak jí srážkou předá kyslíku část energie se ztratí a kyslík ji tedy vyzáří na vlnové délce 557,7 nm (zelená). Většina atomárního kyslíku se nachází v atmosféře 100 km nad povrchem Země a výše. Pod touto hladinou tedy převládá dusík N_2, který sám vyzařuje na vlnové délce 428 nm (modrá).

[1] Jak by řekl prof. Kulhánek - chrchel

[2] Ano, opravdu *kaspy*, nikoliv kapsy (jak je občas psáno), vychází z anglického *cusp*

III.A Houstone, máme problém!

Problém tří těles je klasický problém v oblasti fyziky a astronomie, který se zabývá pohybem tří nebeských těles, které interagují gravitačními silami mezi sebou. Tento problém vzniká, když se snažíme vypočítat pohyb tří těles, jako jsou hvězdy, planety nebo měsíce, v přítomnosti gravitačních sil.

Problém tří těles je proslulý svou obtížností při analytickém řešení a neexistuje obecné řešení, které by se dalo použít na všechny případy. To je způsobeno složitostí interakcí mezi třemi tělesy, které mohou vést k chaotickému a nepředvídatelnému chování. Nicméně existují některé speciální případy, kdy lze řešení najít, jako například v případě, kdy je jedno těleso mnohem menší než ostatní, nebo když jsou tělesa uspořádána v konkrétním způsobu.

Problém tří těles je tématem mnoha výzkumů a studií po mnoho let, přičemž mnoho významných vědců a matematiků na něm pracovalo. Jedním z nejznámějších příkladů je práce Pierra-Simona Laplace, který vyvinul metodu pro hledání přibližných řešení problému. Laplaceova práce položila základy pro další výzkumy v této oblasti a jeho metody se dodnes používají v mnoha oblastech fyziky a astronomie.

Problém tří těles měl také významný vliv na naše porozumění vesmíru. Například byl použit k vysvětlení chování binárních hvězd, kde se dvě hvězdy pohybují kolem společného těžiště. Byl také použit k studiu stability planetárních systémů, jako je náš sluneční systém, a k prozkoumání dynamiky galaxií a dalších velkých struktur ve vesmíru.

V posledních letech se problém tří těles opět dostal do popředí zájmu díky pokrokům v počítačových simulacích a numerických metodách. Tyto nástroje umožňují výzkumníkům podrobněji prozkoumat chování komplexních systémů a zkoumat věci, jako jsou stabilní a nestabilní oběžné dráhy, kolize těles, tvorba planet a další důležité procesy, které se vyskytují v kosmu.

Problém tří těles je také relevantní v kontextu meziplanetárních cestování a vesmírných misí, kdy je třeba přesně znát pohyb těles, abychom mohli plánovat trasy a manévry kosmických sond a vozidel.

I když problém tří těles je stále velmi složitý a významný, existují určité zjednodušení a aproximace, které se používají v různých oblastech. Například v oblasti astrofyziky se často používá koncept "dvou těles", což znamená, že se předpokládá, že všechny ostatní tělesa jsou zanedbatelná v porovnání s dvěma nejvýznamnějšími tělesy v systému.

Celkově lze říci, že problém tří těles je stále otevřeným problémem v oblasti fyziky a astronomie a přináší s sebou mnoho výzev a otázek. Nicméně naše stále se rozvíjející znalosti a technologie umožňují postupně lépe porozumět tomuto složitému problému a jeho vlivu na vesmírné procesy a fenomény.

Závěrem lze říci, že problém tří těles je jedním z nejsložitějších a nejzajímavějších problémů v oblasti fyziky a astronomie. Jeho řešení a porozumění jsou klíčové pro mnoho oblastí, jako jsou astrofyzika, kosmologie a meziplanetární cestování.

I když se jedná o stále nevyřešený problém, vývoj technologií a stále se rozvíjející vědecké poznání nám umožňují postupně lépe porozumět těmto složitým kosmickým procesům. Věříme, že další výzkum a objevy v této oblasti nám umožní rozšířit naše znalosti o vesmíru a jeho fungování a přinesou s sebou mnoho nových možností a přínosů pro lidskou společnost.

IV.A Pozdní večer, první máj, večerní máj, byl hvězd čas.

Hned na začátek zapátrejme v paměti, a vzpomeňme si na seriál II.K. V tomto seriálu jste se dozvěděli o *Planckově vyzařovacím zákonu.* Víte tedy, že každé těleso vyzařuje na všech vlnových délkách, avšak na jedné nejvíce. A převážně tuto vlnovou délku vidíme. Podle *Wienova posunovacího zákona* je tato vlnová délka nepřímo úměrná teplotě tělesa. To znamená, že čím vyšší teplota hvězdy je, tím více se maximání vlnová délka posouvá k modré části spektra. Modré hvězdy jsou tedy teplejší než hvězdy červené. Při pohledu na hvězdnou oblohu si lze velmi snadno všimnout toho, že hvězdy jsou různě jasné.[7] Jak jasně hvězdu vidíme závisí na veličině, kterou nazýváme *hustota zářivého toku*[8] a na vzdálenosti. Prozatím vzdálenost odložíme, a budeme počítat s tím, že pozorujeme hvězdy ve stejné vzdálenosti.

Hustota zářivého toku (dále jen HZT) je veličina popisující tok záření, které projde $1\,\mathrm{m}^2$ za $1\,\mathrm{s}$. HZT dává do vztahu společne s teplotou tělesa *Stefan-Boltzmannův zákon.*[9] Ten říka, že HZT je přímo úměrná čtvrté mocnině teploty tělesa. Proto, čím teplejší hvězda je, tím více energie vyzařuje – je jasnější.

Jako míru jasnosti používáme hvězdnou velkost, neboli *magnitudu.* Tato míra odpovídá historickému dělení hvězd do šesti skupin, kde 0 byla nejjasnější a 5 nejméně jasná. Dnes však magnitudu používáme pro všechny objekty na obloze, proto může jít i do záporu. Například, nejjasnější objekt na obloze – Slunce – má magnitudu $-26,6$. Chceme-li však porovnávat magnitudu nezávisle na vzdálenosti objektu, používáme tzv. *absolutní magnitudu.* Jedná se magnitudu, jakou by mělo pozorované těleso kdybychom ho pozorovali ze vzdálenosti $10\,\mathrm{pc}$ od nás.

Různě veliké hvězdy mohou být stejně jasné (mít stejnou HZT), avšak budou různě zářivé. Proto zavádíme další veličinu, která nám popisuje, jak hvězdu vidíme, a to *zářivý výkon* (mohli bychom říct zářivost či svítivost). Jak je ale možné, že dvě stejně jasné hvezdy uvidíme jinak zářivé? Odpověd spočívá v odlišných rozměrech. Hvězdy vyzařují energii svým povrchem. Je-li jedna hvězda o stejné jasnosti vetší než druhá, tedy má větší povrch, bude zářit více. Zkrátka, má vetší plochu, ze které září. Není tedy težké domyslet, že zářivý výkon vypočítáme tak, že HZT vynásobíme povrchem hvězdy.

Jak jsme již na samém začátku avizovali, hvězdy mají různé barvy. Neboli, světlo, které k nám od nich příchází, má různe spektrum. Na základě toho byly vytvořeny tzv. *spektrální třídy.* Původně byly hvězdy rozděleny do sedmi skupin[10], kde každá skupina má deset podskupin. S rozvojem techniky rozsah nestačil, a tak se třídy postupně rozrostly do dnešních třinácti. Často se ale uvádí pouze sedm základních, jelikož další skupiny jsou zastoupeny jen zřídka.

Na začátku 20. století nezávisle na sobě dva astronomové zkonstruovali diagram, na kterém zaznamenávali absolutní magnitudu na svislou osu a spektrální třídu na vodorovnou osu. Tento diagram se po nich nazývá *Hertzsprung-Russelův diagram.* Od svého vzniku však diagram prošel malými změnami. Dnes již víme (a vy od minulého seriálu také!), že spektrální třída závisí na teplotě. Proto se spíše častěji setkáte s diagramem, kde na vodorovné ose bude teplota. Také víme, že absolutní magnituda závisí pouze na zářivém výkonu, proto je dnes na jedné svislé ose stupnice zářivého výkonu, a na druhé absolutní magnituda. Co se však nezměnilo jest, že teplota se historicky zaznamenávala tak, že roste zprava doleva.

[7]Pro další čtení; je potřeba vnímat dvě odlišné veličiny: jasnost a zářivost/svítivost.

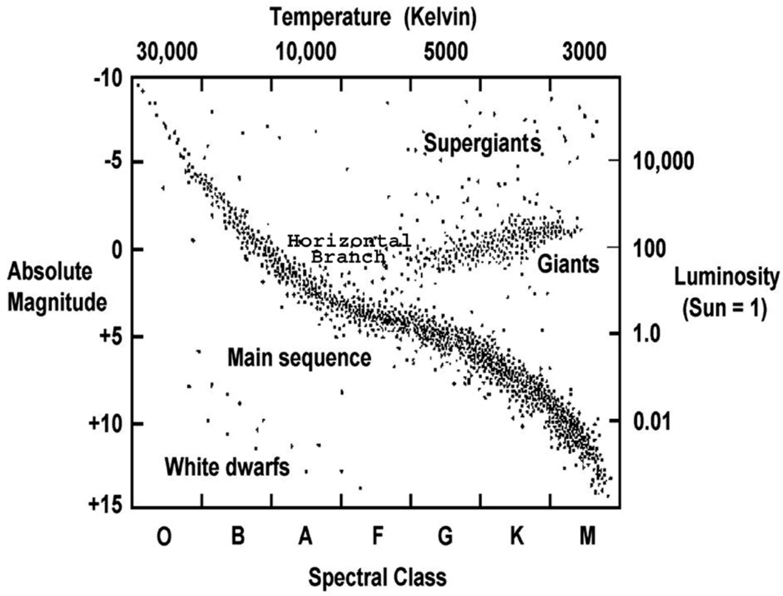
[8]V češtině se poměrně zmatečně může nazývat (bolometrická) jasnost.

[9]V češtině by se správně mělo psát: Stefan<u>ův</u>-Boltzmannův zákon – to nám však přijde opravdu uširvoucí.

[10]Existuje mnoho vtipných pořekadel na zapamatování si všech tříd. Doporučujeme vám si je najít.

Při zanášení dat do diagramu si astronomové všimli, že diagram není vyplněn rovnoměrně, ale vzniklo v něm několik výrazně zaplněných oblastí. Nejvýraznější je tzv. *hlavní posloupnost*. Na ní se nacházejí hvězdy, které v jádře spalují vodík na hélium. Tato linie je tak výrazná, protože zářivý výkon i teplota závisí na hmotnosti hvězdy dokud spaluje vodík. Čím je hvězda hmotnější, tím vyšší teplotu a zářivý výkon bude mít, a na hlavní posloupnosti bude více vlevo.

Když hvězdě dojde vodík, začne spalovat hélium na těžší prvky. V té době se dostává do druhé nejvýraznější skupiny – obři. Již podle názvu lze poznat, že se jedná o hvězdy obrovských rozměrů. V tomto stádiu hvězdy postupně stlačují těžké prvky, až se dostanou k stabilnímu železu. Poté nastává závěrečné stádium chladnutí a smršťování jádra. Z málo hmotných hvězd se stanou bílí trpaslíci – třetí nejvýraznější skupina. Avšak, má-li hvězda dostatečnou hmotnost, exploduje jako supernova, a v nitru vznikne neutronová hvězda či černá díra. O nich ale zase někdy příště…



Hertzsprung-Russelův diagram[11]

Seriály – Kvantová fyzika

I.K Jak je to asi pravděpodobné?

Co je to *kvantový svět*? Tento pojem můžete slyšet v médiích v souvislosti s moderní fyzikou zcela běžně. Víte ale, co přesně tento pojem znamená? Místo toho, abychom si ukazovali nějakou nicneříkající školní definici, se pokusme zamyslet nad tím, jak se vlastně takový svět projevuje...

V našem každodenním životě jsme zvyklí na klasickou fyziku, kde můžeme přesně určit a naměřit všechny možné fyzikální veličiny. Běžně říkáme, že si například dáme sraz u KFC, že aktuálně jedeme autem rychlostí $60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, a podobně. Žijeme ve světě, ve kterém jsou čas, poloha, rychlost a podobné veličiny naprosto konkrétní a určité. Napadlo vás ale někdy, že my lidé jsme jakožto měřící přístroje zcela nepřesní? Dvě události dokážeme rozlišovat jenom tehdy, když proběhnou alespoň $0{,}02$ s po sobě, nerozeznáme věci menší než pár mikrometrů, naše pozorování jsou tedy velmi omezená. Je tedy samozřejmé, že nám lidem se může zdát, že vidíme ku příkladu umístění objektů zcela přesně, jenže zároveň pro nás jsou délky jako velikost mitochondrie či vlnová délka viditelného světla naprosto zanedbatelné, přitom právě na této škále se dějí ty největší zázraky přírody.

Veličiny jako rychlost nebo poloha nejsou ve skutečnosti vůbec konkrétní a nedá se přesně říct, jakých hodnot nabývají. Dá se ovšem spočítat, s jakou pravděpodobností bude částice takovou hybnost nebo polohu mít. A právě zde začínají nejzákladnější principy kvantového světa. Kvantový svět není určitý, je to svět pravděpodobností. Naprosto cokoliv se zde může stát, i když se to příčí klasické newtonovsvké mechanice, nicméně všechno je omezeno určitou pravděpodobností.

Je kupříkladu možné, že během čtení tohoto textu od vás odletí jeden elektron, vystartuje ze Země k Proximě Centauri, oběhne ji a vrátí se zpátky do vašeho těla až odmaturujete. Takový proces je zcela validní (i když dle klasické fyziky by na to elektron neměl ani zdaleka dost energie), ale vysoce nepravděpodobný, že je až šílenost věřit, že se to komukoliv v historii lidstva povedlo.

Možné je rovněž to, že se nějaký učitel biologie během svého výkladu o ornitologii promění ve volavku popelavou a vytvoří tak nejlepší praktickou ukázku v historii učitelství. Pokud by se každý atom v těle a v okolí přeskupil na správné místo, může tato situace nastat.

V tomto seriálu jsme zjistili, že možné je opravdu cokoliv. Část vašeho těla může být vyslána na první interstelární misi aniž byste o tom věděli, mezi učiteli se může skrývat potenciální zvěromág...

Možností je vskutku nekonečně mnoho. Závěrem by nám mohlo být poznání toho rozdílu, že v klasickém světě se ptáme, zda se může něco stát, ovšem ve světě kvantovém je ta správná otázka: *jak je to asi pravděpodobné?*

II.K Není všechno teplé, co se třpytí!

V minulém díle jsme si představili základní principy kvantového světa. Vědní obor zabývající se popisem tohoto světa elementárních částic se nejčastěji nazývá *kvantová mechanika*. Nyní se však vydáme na cestu napříč časem i prostorem a podíváme se na historický vývoj tohoto odvětví fyziky. Vysvětlíme si, proč byl vznik kvantové teorie potřeba a na základě čeho dostala své jméno.

Naše putování můžeme začít v polovině 19. století, kdy světoznámý fyzik *James Clerk Maxwell* formuloval své čtyři základní rovnice elektromagnetismu. Tyto rovnice se dodnes používají k popisu všech možných jevů a modelů jako je elektromagnetická indukce, pole permanentního magnetu nebo třeba šíření světla. A právě o světle bude v tomto seriálu řeč.

Z řešení Maxwellových rovnic vyplývá, že světlo se chová jako nositel elektromagnetického pole s vlnovým charakterem. Pomocí Maxwellových rovnic se dokázalo to, co bylo téměř 200 let pozorováno. Světlo se šíří ve vlnách.

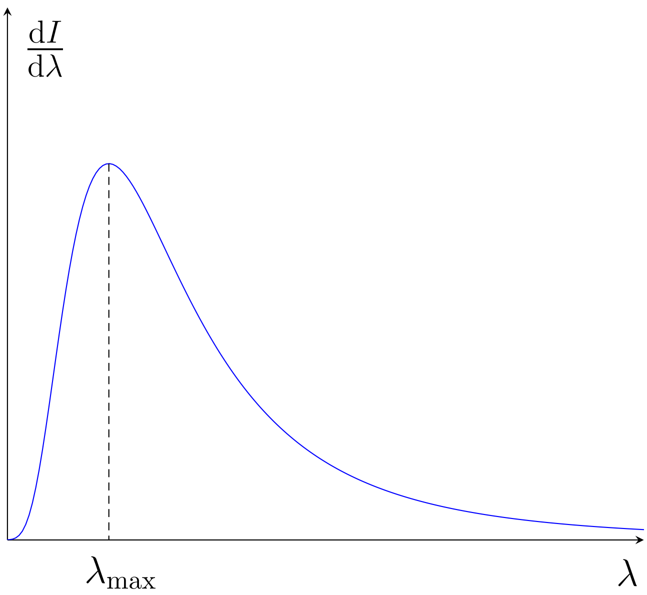
Vlnový popis světla se zdál být dostatečný, a proto se na jeho základu snažili fyzici na přelomu 19. a 20. století postavit kompletní teorii vyzařování těles. Lidé si v té době kladli otázky typu: proč hvězdy svítí? Jakým mechanismem mohou ztrácet energii? Jak může těleso předávat teplo i bez kontaktu? Načež se dopracovalo k tomu, že každé těleso, ať se nachází ve vakuu či atmosféře, musí odevzdávat teplo okolí. Tento proces zprostředkovává právě ono elektromagnetické záření. Každé těleso tedy dle teorie z konce 19. století jakýmsi způsobem „svítí". Ale vzhledem k tomu, že ku příkladu lidi vidíme zářit maximálně tak v televizních výstupech, může se tato teorie zdát jako trochu přitažená za vlasy. Bylo proto potřeba spočítat, jak tomu doopravdy je.

Způsob, jak dosáhnout zpracovatelných dat, je sestavit závislost tzv. *spektrální intenzity záření* (míra vyzařování) na vlnové délce (vzdálenost mezi dvěma vrcholy světelné vlny). Dle klasické fyziky bylo spočítáno, že spektrální intenzita by enormně rostla se zmenšující se vlnovou délkou. Rostla by pořád a do nekonečna, což by nám říkalo, že tělesa by na ultrafialovém spektru vydávala nekonečně mnoho energie, a to je samozřejmě nesmysl. Tento problém nese věhlasné jméno *ultrafialová katastrofa*.

Jak se s tímto problémem vypořádat? S touto otázkou zápasily koncem 19. století největší vědecké kapacity. Ovšem teprve roku 1900 byla tato hádanka vyřešena a samozřejmě tento průlom neměl na svědomí nikdo jiný než sám německý fyzik *Max Planck*. Formuloval prvně z části odhadnutý, *semiempirický* (z poloviny experimentálně zjištěný) vztah mezi spektrální intenzitou a vlnovou délkou. O pár měsíců později se mu podařilo tento zákon plně odvodit díky jistému matematickému obratu. Ten spočívá v předpokladu, že světlo jakožto forma energie nemůže být vyzařováno spojitě či kontinuálně, nýbrž po určitých částech, tzv. *kvantech*. Takové „balíčky" světelné energie dostaly název *fotony*. U takového modelu světla se může zdát, že je v nesouladu s vlnovým charakterem, jenže pouze tímto trikem lze dosáhnout správných výsledků. Ukazuje nám to, že oba pohledy na povahu světla jsou správné, chová se jako částice a zároveň jako vlna. O tomto paradoxu kvantové mechaniky se budeme podrobněji bavit příště. Na závěr zmiňuji, že vyzařovací zákon formulovaný Planckem se dnes nazývá *Planckův vyzařovací zákon* a jeho hlavní poselství je, že každé těleso o libovolné teplotě vyzařuje na všech možných vlnových délkách, ovšem na některých více a na některých méně. Jak moc na jakých vlnových délkách je už otázka teploty. Takže v podstatě i my sami záříme podobně jako Slunce viditelným světlem, jenže tak nepatrně, že tento děj nelze postřehnout.

Jistě jste si všimli, že jsme během vysvětlování podstaty světla použili slovo *kvantum*. A právě výše zmíněné použití tohoto slova vedlo ke vzniku názvu *kvantová fyzika*. Hledání nejmenší možné části jisté veličiny (nejen energie, ale i další) se stalo podstatným principem tohoto revolučního oboru, a fyzici proto pro něj vytvořili speciální název: *kvantování*. Jak následně ukázal všem známý Albert Einstein, kvantování není pouze matematický konstrukt, ale reálný jev přírody.

Planckův vyzařovací zákon



III.K Diracovo moře

Prostorem se vlnový balík řítí,
občas zrychluje a s tím trochu svítí.
Okolní fotony ho poznají,
Však on svůj náboj vůbec netají.
Jejich vlnová délka hlásá: „je to on!“
Všem gaugovým částicím známý elektron…

Po rovnici fermionů se Dirac pídí,
snaží se zjistit, čím se elektrony řídí.
Gama matice použije,
spoustu slávy si pak užije.
Je tu však jeden zádrhel,
elektron je fakt vyvrhel…

Diracova rovnice má dvě řešení,
avšak na našem světě se nic nemění.
Jedno odpovídá elektronům,
druhé naopak jiným démonům,
„elektronům“ se zápornou energií.
Celou dobu si v tomto vesmíru žijí!

Společně tak tvoří pole
s energií hodně dole.
Sem tam mají nějakou díru,
až překopávám svoji víru.
Tato díra, to jen on,
již všem známý pozitron!

Jednou však takhle Diraca napadne,
co když elektron do díry zapadne?
Dvě částice se přitom uvolní,
svým charakterem částice polní.
Ano, jsou to opravdu ony.
Ty známé Planckovy fotony.

To byl příběh o tom, jak
Paul Dirac všem vytřel zrak.
Nové částice tak předpověděl,
záhady vesmíru tím zodpověděl.
Dnes ho známe jak své boty,
první model antihmoty.

IV.K Částice, či vlna, to je oč tu běží.

V minulém seriálu jsme si odpověděli na otázku vyzařování a představili jsme si *Planckův vyzařovací zákon.* Také jsme otevřeli téma tzv. *vlnově-částicový dualismu* (světlo se může chovat jako částice a zároveň jako vlna). Právě zkoumání tohoto jevu se budeme věnovat v tomto seriálu.

Náš příběh začíná na začátku 20. století u 26letého Alberta Einsteina, který se v té době mimo jiné pokoušel vysvětlit tzv. *fotoelektrický jev.*

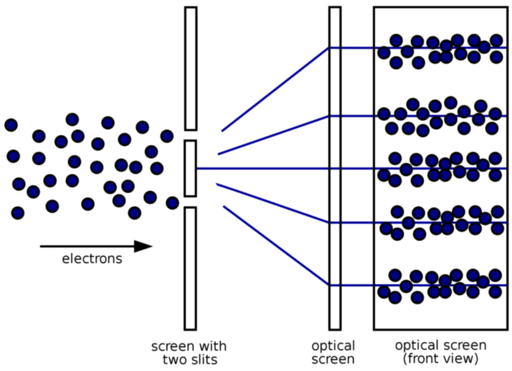
Fotoelektrický jev (*fotoefekt*) spočívá v uvolnění (a následné emitaci) elektronů z obalu atomů po absorpci *elektromagnetického záření* (světla) danou látkou. Podle klasické fyziky by měla energie odlétajících elektronů záviset na *intenzitě* záření, ale experimentálně se dokázalo, že jejich energie záleží hlavně na frekvenci zdroje. K vysvětlení této závislosti použil Einstein roku 1905 Planckovu myšlenku *kvantování* a přisoudil tak elektronům energii kvanta elektromagnetického záření, tedy fotonu, $E = h\nu$, kde h je *Planckova konstanta* a ν je *frekvence elektromagnetického záření.* Toto vysvětlení spolu s Planckovým vyzařovacím zákonem stálo u zrodu kvantové fyziky a změnilo doposud čistě vlnový pohled klasické fyziky na světlo.

O několik let později se na začátku 20. let 19. století mladý *Louis de Broglie* zamýšlel nad tím, jestli by nešlo tuto úvahu zobecnit. Snažil se tedy přiřadit částicím jako např. eletronům a protonům *vlnový charakter.* Ve své doktorské práci roku 1924 přišel s následujím vztahem mezi vlnovou délkou a rychlostí částice.

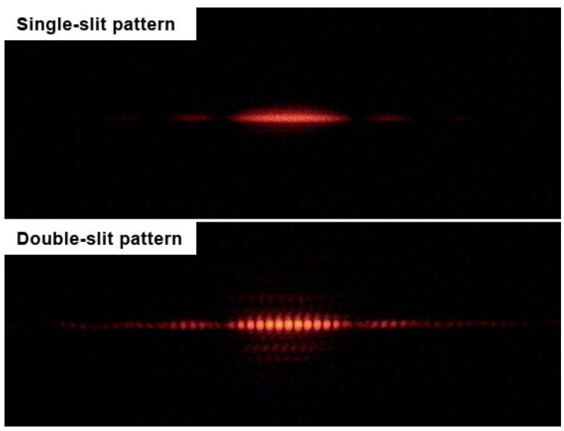
$$\lambda = \frac{h}{p},$$

kde λ je tzv. *de Broglieho vlnová délka*[12], p je hybnost částice, h je již několikrát zmiňovaná Planckova konstanta.

Tyto myšlenky byly následně ověřeny tzv. *dvojštěrbinovým experimentem.* Při provedení experimentu se zdrojem elektronů (viz obr.1) byl na detektoru pozorován interferenční obrazec podobný tomu, který vznikl při měření se zdrojem světla (viz obr.2). Tato skutečnost dokazuje, že i elektrony se mohou chovat jako vlny.



Obr.1: Schéma dvojštěrbinového experimentu s elektronovým paprskem



Obr.2: Pozorovaný interferenční obrazec

Výsledková listina 1. série

	Jméno	**Třída**	**U1**	**U2**	**U3**	**A**	**K**	**B**	%	#	Σ
	Student Pilný	MKi	3	4	3	6	3	5	100	100	24
1.	Lucie Závodná	5.A	3	4	2	7	3	5	100	100	24
2.	Nikol Leyman	5.A	3	3	2	7	3	4	92	92	22
3.	Anna Petrusková	5.B	3	4	3	6	3	-	100	79	19
4.	Anna Trnková	6.A	3	4	3	4	3	-	89	71	17
5. – 6.	Emma Hrdličková	5.B	3	2	1	6	3	1	67	67	16
5. – 6.	Jonáš Mládek	5.B	3	1	3	4	3	2	67	67	16
7. – 8.	Adéla Novotná	6.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0
7. – 8.	Jolana Štraitová	8.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Výsledková listina 2. série

	Jméno	**Třída**	**U1**	**U2**	**U3**	**A**	**K**	**B**	%	#	Σ
	Student Pilný	MKi	3	2	5	4	5	5	100	100	24
1. – 2.	Emma Hrdličková	5.B	3	2	5	4	5	5	100	100	24
1. – 2.	Lucie Závodná	5.A	3	2	5	3	6	5	100	100	24
3.	Anna Trnková	6.A	1	2	5	4	5	5	92	92	22
4.	Adéla Novotná	6.A	3	2	5	3	4	4	88	88	21
5.	Nikol Leyman	5.A	3	2	5	3	4	3	83	83	20
6.	Jolana Štraitová	8.A	1	2	0	-	2	-	33	21	5
7. – 8.	Anna Petrusková	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0
7. – 8.	Jonáš Mládek	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Výsledková listina 3. série

	Jméno	**Třída**	**U1**	**U2**	**U3**	**A**	**K**	**B**	%	#	Σ
	Student Pilný	MKi	3	5	5	3	3	5	100	100	24
1. – 2.	Adéla Novotná	6.A	3	5	5	3	3	2	88	88	21
1. – 2.	Anna Trnková	6.A	3	5	5	3	3	2	88	88	21
3.	Nikol Leyman	5.A	3	5	5	2	3	-	95	75	18
4.	Lucie Závodná	5.A	1	5	5	2	3	1	71	71	17
5.	Emma Hrdličková	5.B	3	2	4	3	1	-	68	54	13
6. – 8.	Anna Petrusková	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0
6. – 8.	Jolana Štraitová	8.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0
6. – 8.	Jonáš Mládek	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Výsledková listina 4. série

	Jméno	Třída	U1	U2	U3	A	K	B	%	#	Σ
	Student Pilný	MKi	3	4	3	5	4	5	100	100	24
1.	Lucie Závodná	5.A	4	2	1	4	2	2	63	63	15
2. – 8.	Adéla Novotná	6.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Anna Petrusková	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Anna Trnková	6.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Emma Hrdličková	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Jolana Štraitová	8.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Jonáš Mládek	5.B	-	-	-	-	-	-	-	0	0
2. – 8.	Nikol Leyman	5.A	-	-	-	-	-	-	-	0	0

Celková výsledková listina

	Jméno	Třída	1. série	2. série	3. série	4. série	%	#	Σ
	Student Pilný	MKi	24	24	24	24	100	100	96
1.	Lucie Závodná	5.A	24	24	17	15	83	83	80
2. – 3.	Anna Trnková	6.A	17	22	21	-	90	63	60
2. – 3.	Nikol Leyman	5.A	22	20	18	-	90	63	60
4.	Emma Hrdličková	5.B	16	24	13	-	79	55	53
5.	Adéla Novotná	6.A	-	21	21	-	88	44	42
6.	Anna Petrusková	5.B	19	-	-	-	100	20	19
7.	Jonáš Mládek	5.B	16	-	-	-	67	17	16
8.	Jolana Štraitová	8.A	-	5	-	-	33	5	5

% … úspěšnost v řešených úlohách
\# … úspěšnost ve všech úlohách
Σ … celkový počet bodů