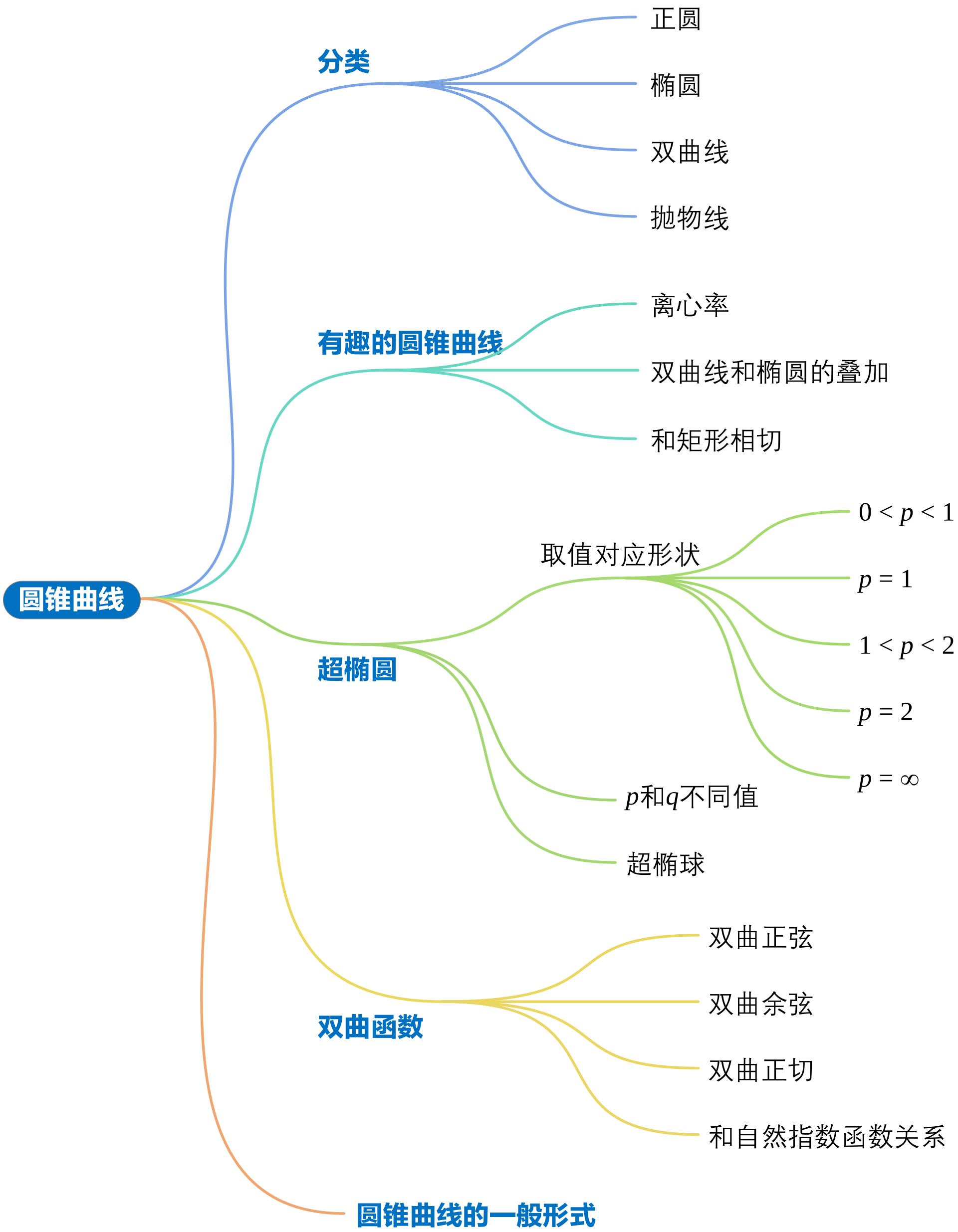
9 Dive into Conic Sections 深入圆锥曲线

探寻和数据科学、机器学习之间联系

> 地球是人类的摇篮，但我们不能永远生活在摇篮里。
>
> ***Earth is the cradle of humanity, but one cannot live in a cradle forever.***
>
> —— 康斯坦丁·齐奥尔科夫斯基 (Konstantin Tsiolkovsky) | 俄罗斯火箭专家 | 1857 ~ 1935

- `matplotlib.patches.Rectangle()` 绘制通过定位点，以及设定宽度和高度的矩形
- `matplotlib.pyplot.contour()` 绘制等高线图
- `matplotlib.pyplot.contourf()` 绘制填充等高线图
- `numpy.cosh()` 双曲余弦函数
- `numpy.isinf()` 判断是否存在无穷
- `numpy.maximum()` 计算最大值
- `numpy.sinh()` 双曲正弦函数
- `numpy.tanh()` 双曲正切函数
- `sympy.Eq()` 定义符号等式
- `sympy.evalf()` 将符号解析式中未知量替换为具体数值
- `sympy.plot_implicit()` 绘制隐函数方程
- `sympy.symbols()` 定义符号变量


圆锥曲线
分类
正圆
椭圆
双曲线
抛物线
有趣的圆锥曲线
离心率
双曲线和椭圆的叠加
和矩形相切
超椭圆
取值对应形状
$0 < p < 1$
$p = 1$
$1 < p < 2$
$p = 2$
$p = \infty$
p和q不同值
超椭球
双曲函数
双曲正弦
双曲余弦
双曲正切
和自然指数函数关系
圆锥曲线的一般形式

9.1 圆锥曲线：探索星辰大海

虽然正圆、椭圆、抛物线、双曲线这样的数学概念现在见诸于中学课本，但是它们现如今依旧展现着巨大能量。比如，在星辰大海的征途中，圆锥曲线扮演重要角色。

图 1 所示为四种航天器轨道。当航天器以**第一宇宙速度** (first cosmic velocity) 绕地运行时，运行的轨道为**正圆轨道** (circular orbit)，第一宇宙速度因此被称作**环绕速度** (orbit speed)。提高航天器绕行速度，轨道变为**椭圆轨道** (elliptical orbit)。

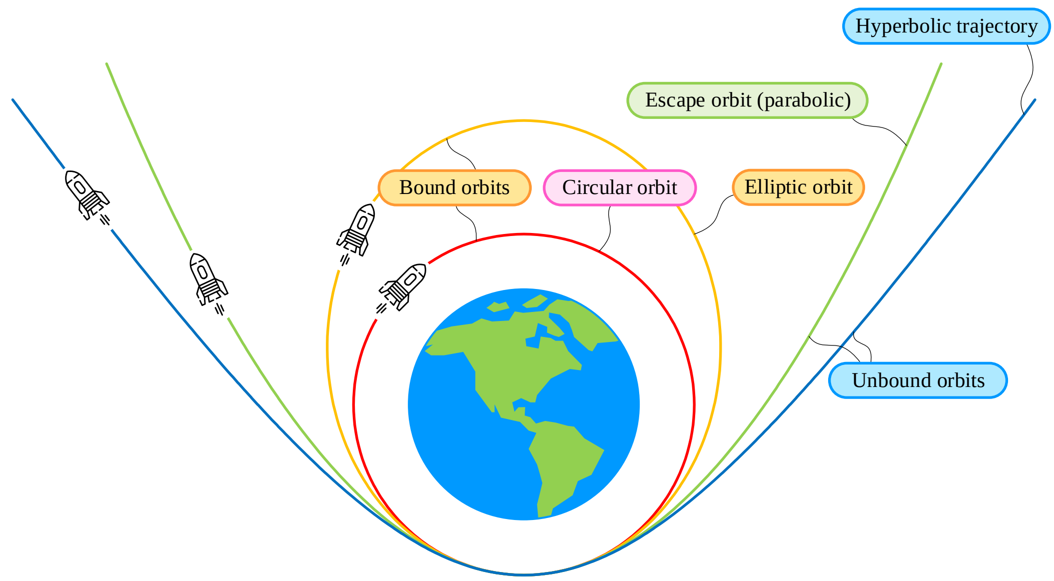


图 1. 航天器的几种轨道

继续提高绕行速度，当航天器速度达到**第二宇宙速度** (second cosmic velocity) 时，航天器便达到逃离地球所需速度，这一速度也叫**逃逸速度** (escape velocity)。这时，航天器运行轨道变为**抛物线轨道** (parabolic trajectory) 或**双曲线轨道** (hyperbolic trajectory)。这种条件下，航天器可以脱离地球的引力场而成为围绕太阳运行的人造行星。

探索火星约每 26 个月有一个发射窗口，这是因为地球在低轨道绕太阳运行，而火星在高轨道绕行。地球和火星的公转周期不同，两个行星大约每 26 个月“相遇”一次，也就是说地球与火星之间的距离最近。

如图 2 所示，探索火星需要利用**霍曼转移轨道** (Hohmann transfer orbit)。简单来说，霍曼轨道是一条椭圆形的轨道，通过两次加速将航天器从地球所在的低轨道送入火星运动的高轨道。

航天器首先进入绕太阳圆周运动的低轨道。

太空船在低轨道 A 点处上瞬间加速后，进入一个椭圆形的转移轨道。注意，加速瞬间火星位于 B。太空船由此椭圆轨道的近拱点开始，抵达远拱点后再瞬间加速，进入火星所在的目标轨道。反过来，霍曼转移轨道亦可将太空船送往较低的轨道，不过是两次减速而非加速。

拱点 (apsis) 在天文学中是指椭圆轨道上运行天体 (比如地球) 最接近或最远离它的引力中心 (比如太阳) 的点。最靠近引力中心的点称为**近拱点** (periapsis)；而距离引力中心最远的点就称为**远拱点** (apoapsis)。

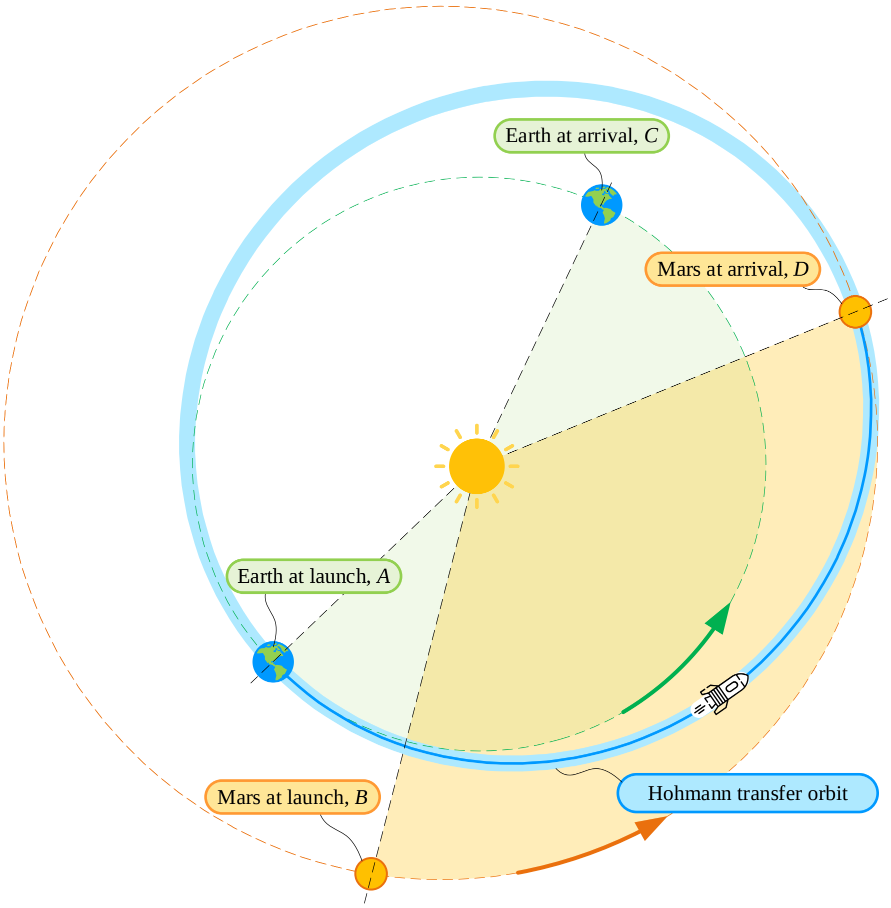


图 2. 探索火星的霍曼轨道

9.2 离心率：联系不同类型圆锥曲线

不同类型圆锥曲线可以通过同**离心率** (eccentricity) e 联系起来：

$$x_2^2 = 2px_1 + \left(e^2 - 1\right)x_1^2, \quad e \ge 0 \tag{1}$$

正圆的离心率 $e = 0$，椭圆的离心率 $0 < e < 1$，抛物线离心率 $e = 1$，双曲线离心率 $e > 1$。(1) 对应的这一组曲线共用 (0, 0) 这个顶点。

当 $p = 1$ 时，离心率 e 取不同数值，可以得到如图 3 所示一组圆锥曲线。

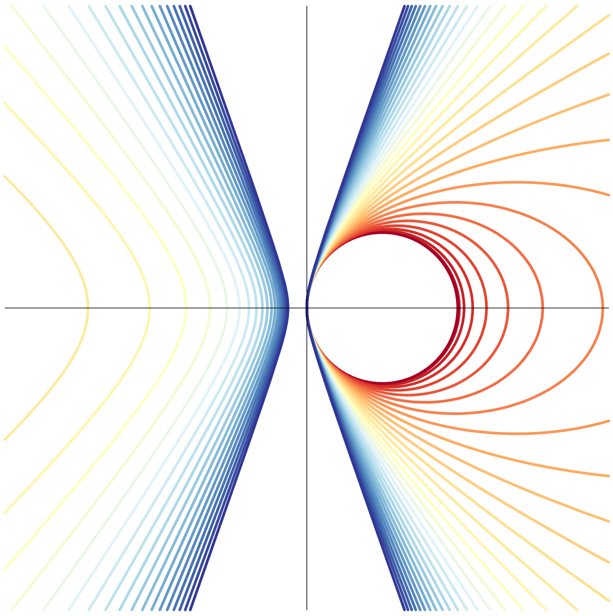


图 3. 离心率连续变化条件下一组圆锥曲线

Bk3_Ch9_01.py 绘制图 3。代码采用等高线方式可视化圆锥曲线。本书之后的圆锥曲线都会再用这种可视化方案。

9.3 一组有趣的圆锥曲线

本节介绍一组有趣的圆锥曲线，解析式如下：

$$\underbrace{\frac{x_1^2}{m^2}+\frac{x_2^2}{n^2}}_{\text{Ellipse}}-\underbrace{2\rho\frac{x_1x_2}{mn}}_{\text{Hyperbola}}=1 \tag{2}$$

其中，$m > 0$，$n > 0$。

上式可以看做是椭圆和双曲线的“叠加”。$x_1x_2 = 1$ 实际上是一个旋转双曲线。参数 ρ 可以视作调节双曲线“影响力”的参数，ρ 越大双曲线的影响越强。

点 $(\pm m, 0)$、$(0, \pm n)$ 都满足 (2)，也就是说这四个点都在圆锥曲线上。

图 4 所示为当 $m = n = 1$ 时，且 $\rho \geqslant 0$，圆锥曲线随 ρ 变化。而图 5 所示为当 $m = n = 1$ 时，且 $\rho \leqslant 0$，圆锥曲线随 ρ 变化。不难发现，$-1< \rho < 1$ 时，椭圆的影响力占上风。而 $|\rho| > 1$，双曲线影响力更大。当 $\rho = \pm1$ 时，椭圆和双曲线势均力敌。

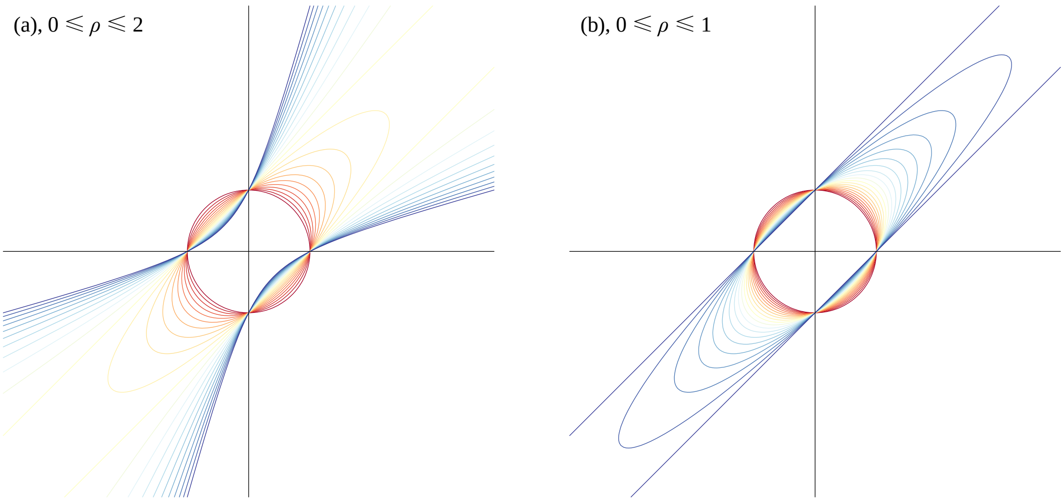


图 4. $m = n = 1$，圆锥曲线随 ρ 变化，ρ 非负

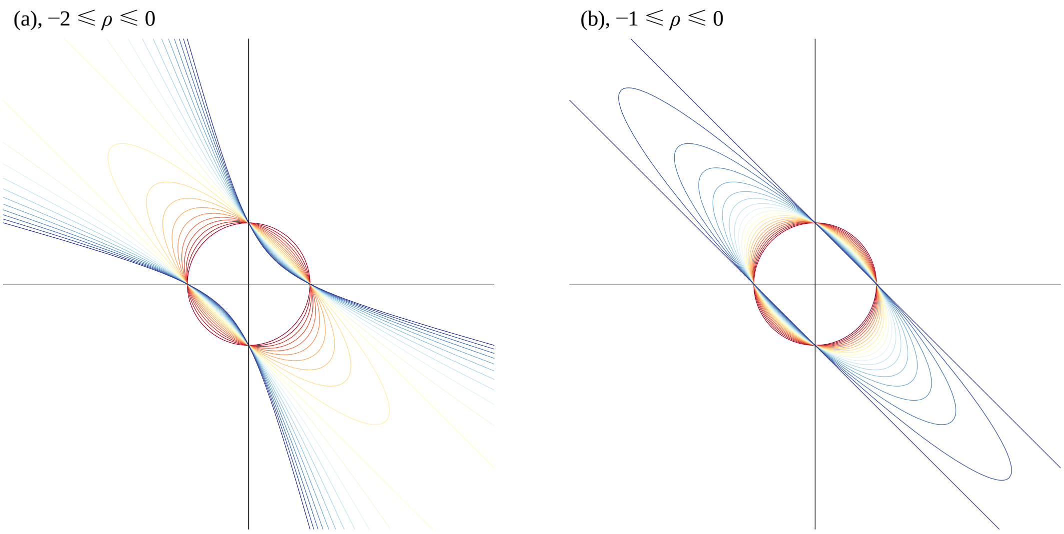


图 5. $m = n = 1$，圆锥曲线随 ρ 变化，ρ 非正

当 $m = n = 1$ 时，且 $\rho = 1$ 时，(2) 为：

$$(x-y)^2 = 1 \tag{3}$$

以上解析式对应两条直线：

$$x - y = 1, \quad x - y = -1 \tag{4}$$

当 $m = n = 1$ 时，且 $\rho = -1$ 时，(2) 也对应两条直线。

图 6 所示为 $m = 2$，$n = 1$，圆锥曲线随 ρ 变化，ρ 的变化范围为 $[-2, 2]$。

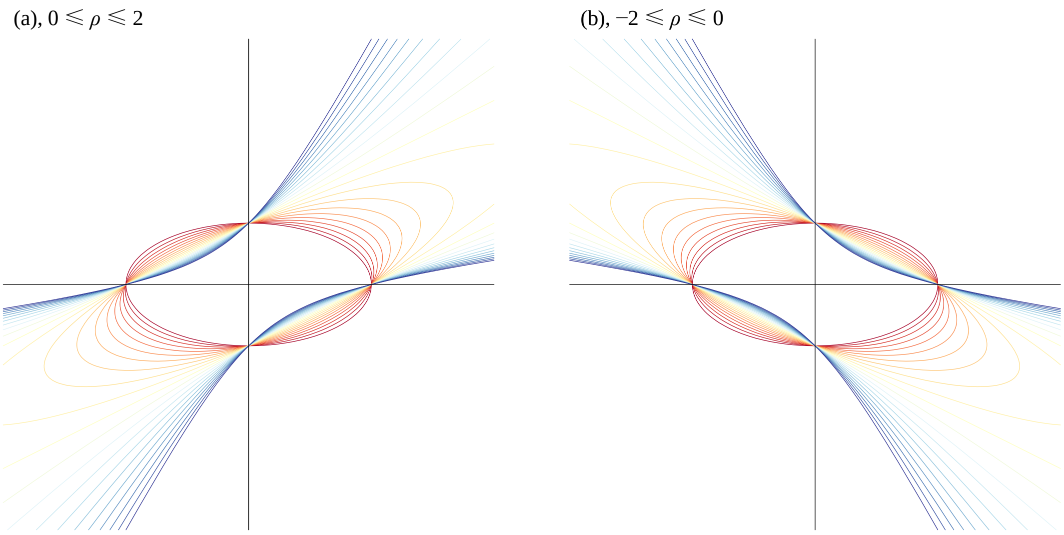


图 6. $m = 2$，$n = 1$，圆锥曲线随 ρ 变化，ρ 的变化范围为 $[-2, 2]$

Bk3_Ch9_02.py 绘制图 4、图 5 和图 6 几幅图像。

9.4 特殊椭圆：和给定矩形相切

这一节，我们要在特殊条件约束下绘制椭圆。

给定如图 7 所示的三类矩形，假定它们的中心都位于原点。本节绘制和矩形四个边相切的椭圆。椭圆可以是正椭圆，也可以是旋转椭圆。

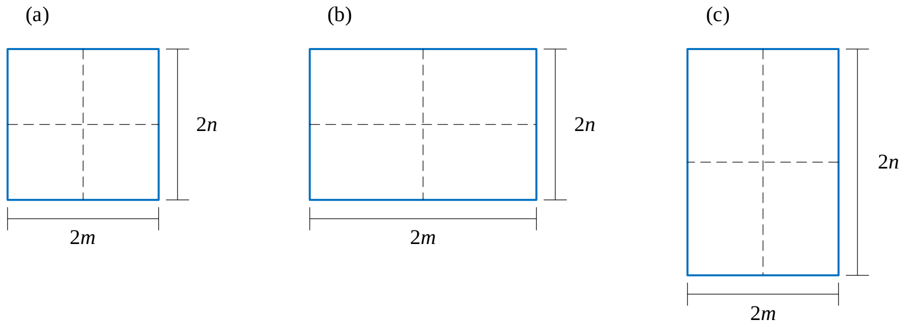


图 7. m、n 大小关系不同的矩形

对上一节 (2) 稍作修改，得到如下解析式：

$$\frac{x_1^2}{m^2}+\frac{x_2^2}{n^2}-\frac{2\rho x_1 x_2}{mn}=1-\rho^2 \tag{5}$$

ρ 取值范围在−1 和 1 之间。大家很快就会发现参数 ρ 影响椭圆的倾斜程度。

(5) 可以进一步写成：

$$\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{x_1^2}{m^2}+\frac{x_2^2}{n^2}-\frac{2\rho x_1 x_2}{mn}\right)=1 \tag{6}$$

如图 8 所示，以矩形的中心为原点构造平面直角坐标系，容易计算得到矩形和椭圆相切的切点 A、B、C、D 的坐标为：

$$A(m,\rho n),\quad B(\rho m,n),\quad C(-m,-\rho n),\quad D(-\rho m,-n) \tag{7}$$

⚠ 请大家格外注意 AC 连线，我们将在本系列丛书的条件概率和线性回归话题中谈到这条直线。

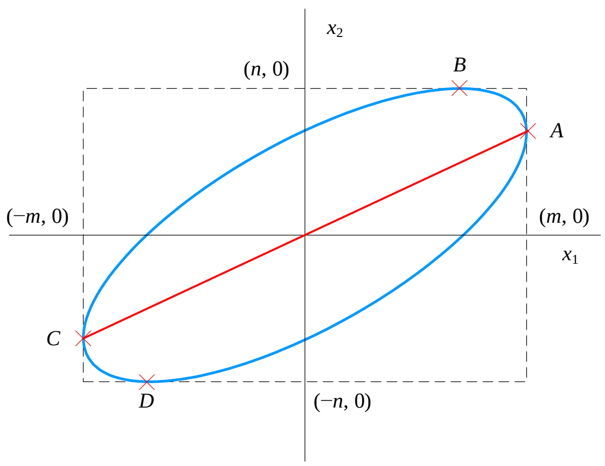


图 8. 四个切点的位置

正椭圆

当 $\rho = 0$ 时，椭圆为正椭圆，即，

$$\frac{x_1^2}{m^2} + \frac{x_2^2}{n^2} = 1 \tag{8}$$

如图 9 所示，椭圆和矩形相切的四个切点 A、B、C、D 的坐标为：

$$A(m,0), \quad B(0,n), \quad C(-m,0), \quad D(0,-n) \tag{9}$$

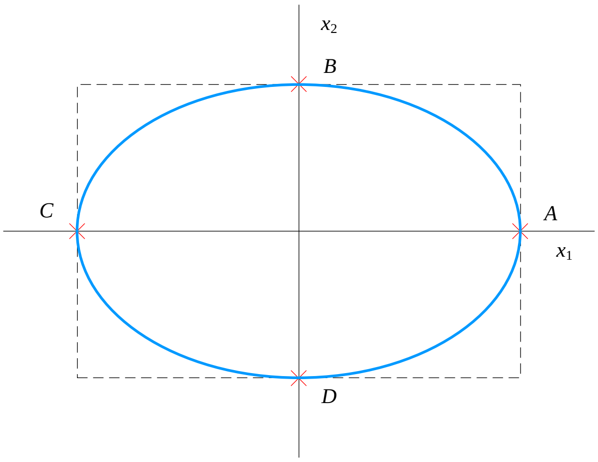


图 9. 当 $\rho = 0$ 时，四个切点的位置

线段

当 $\rho = 1$ 时，椭圆退化为一条线段，对应解析式为：

$$\frac{x_1}{m} - \frac{x_2}{n} = 0 \tag{10}$$

当 $\rho = -1$ 时，椭圆也是一条线段：

$$\frac{x_1}{m} + \frac{x_2}{n} = 0 \tag{11}$$

两种情况对应的图像为图 10。

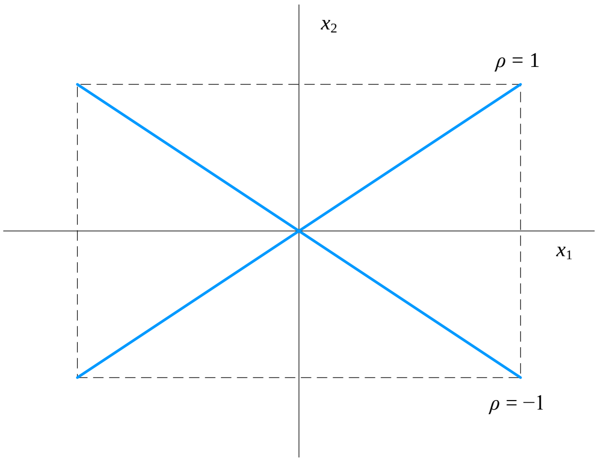


图 10. 当 $\rho = \pm 1$ 时，椭圆退化成线段

旋转椭圆

图 11 所示为，当 $m = n$，椭圆形状随参数 ρ 变化。当 ρ 靠近 0 时，椭圆形状越接近正圆；ρ 的绝对值越靠近 1，椭圆越扁，形状越接近线段。此外，请大家格外关注切点位置随 ρ 如何移动。

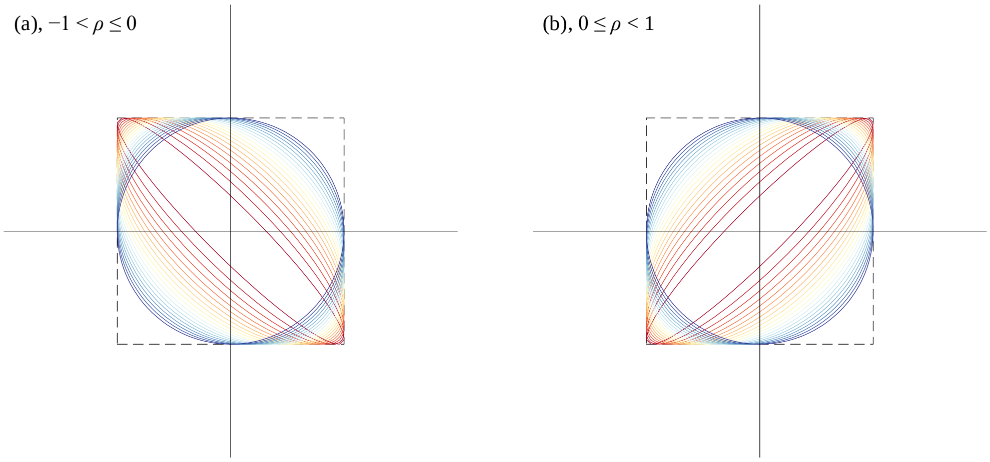


图 11. $m = n$ 时，和给定正方形相切椭圆

图 12 和图 13 分别展示 $m > n$ 和 $m < n$ 两种情况条件下，椭圆形状随 ρ 变化。

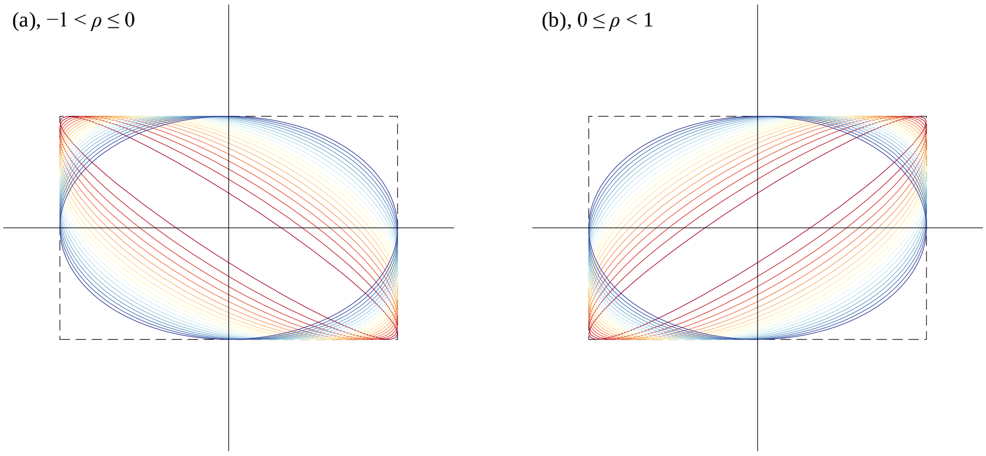


图 12. $m > n$ 时，和给定矩形相切椭圆

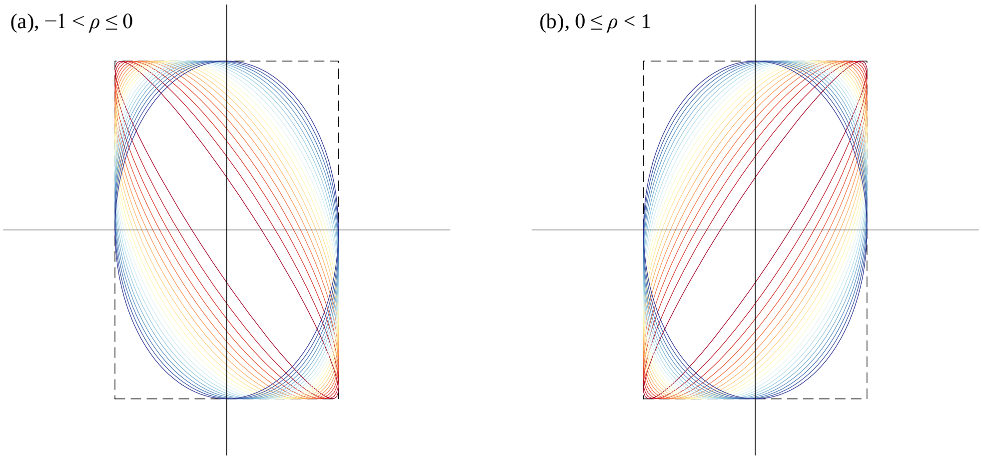


图 13. $m < n$ 时，和给定矩形相切椭圆

二元高斯分布

我们之所以讨论这种特殊形态的椭圆，是因为它和二元高斯分布的概率密度函数直接相关。**二元高斯分布** (bivariate Gaussian distribution) 的概率密度函数 $f_{X,Y}(x,y)$ 解析式如下：

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho_{X,Y}^2}}\times\exp\left(\frac{-1}{2}\underbrace{\frac{1}{\left(1-\rho_{X,Y}^2\right)}\left(\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2-2\rho_{X,Y}\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)+\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right)}_{\text{Ellipse}}\right) \tag{12}$$

其中，μ_X 和 μ_Y 分别为随机变量 X、Y 的期望值。σ_X 和 σ_Y 分别为随机变量 X、Y 的均方差；$\rho_{X,Y}$ 为 X 和 Y 线性相关系数，取值区间为 $(-1, 1)$。

相信大家已经在 (12) 看到了 (6)。

Bk3_Ch9_03.py 绘制图 11、图 12、图 13。

我们把 Bk3_Ch9_03.py 转化成了一个 App，大家可以调节不同参数观察椭圆形状变化，以及切点位置。请大家参考代码文件 Streamlit_Bk3_Ch9_03.py。

9.5 超椭圆：和范数有关

超椭圆 (superellipse) 是对椭圆的拓展，最常见的超椭圆的解析式为：

$$\left|\frac{x_1}{a}\right|^p + \left|\frac{x_2}{b}\right|^p = 1 \tag{13}$$

一般情况，p 为大于 0 的数值。

特别地，当 $p = 2$，(13) 所示为椭圆解析式。

还有两个特殊的情况，当 $p = 1$ 时，超椭圆图形为菱形：

$$\left|\frac{x_1}{a}\right| + \left|\frac{x_2}{b}\right| = 1 \tag{14}$$

当 $p = +\infty$时，超椭圆图形为长方形，对应的解析式为：

$$\max\left(\left|\frac{x_1}{a}\right|, \left|\frac{x_2}{b}\right|\right) = 1 \tag{15}$$

第一个例子

当 $a = 2$，$b = 1$ 时，超椭圆的解析式为：

$$\left|\frac{x_1}{2}\right|^p + \left|\frac{x_2}{1}\right|^p = 1 \tag{16}$$

图 14 所示为 p 取不同值时，超椭圆的形状。

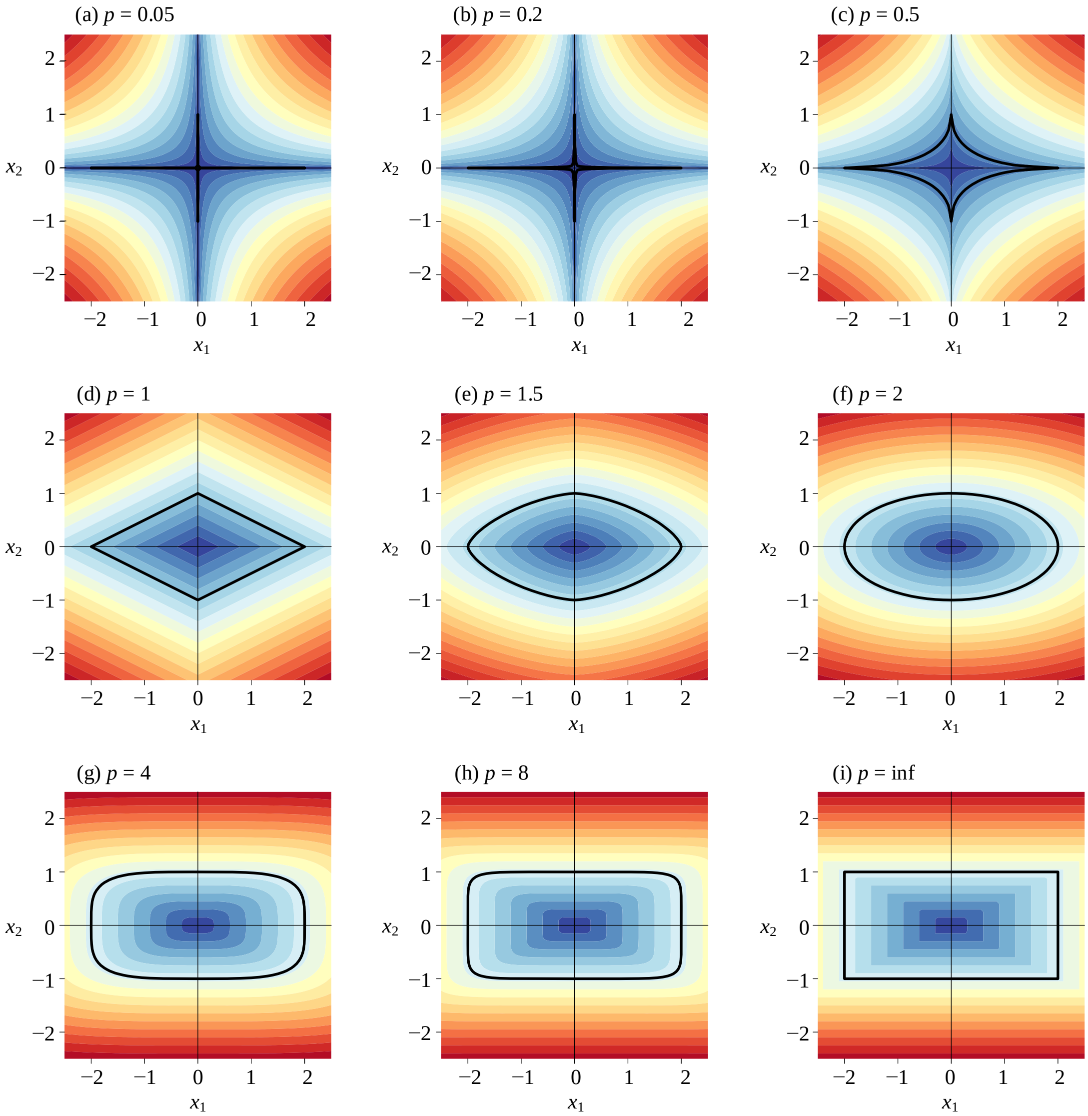


图 14. 超椭圆 p 取不同值时，超椭圆的形状，$a = 2$，$b = 1$

第二个例子

当 $a = 1$，$b = 1$ 时，超椭圆的解析式为：

$$|x_1|^p + |x_2|^p = 1 \tag{17}$$

图 15 所示为 p 取不同值时，超椭圆的形状。

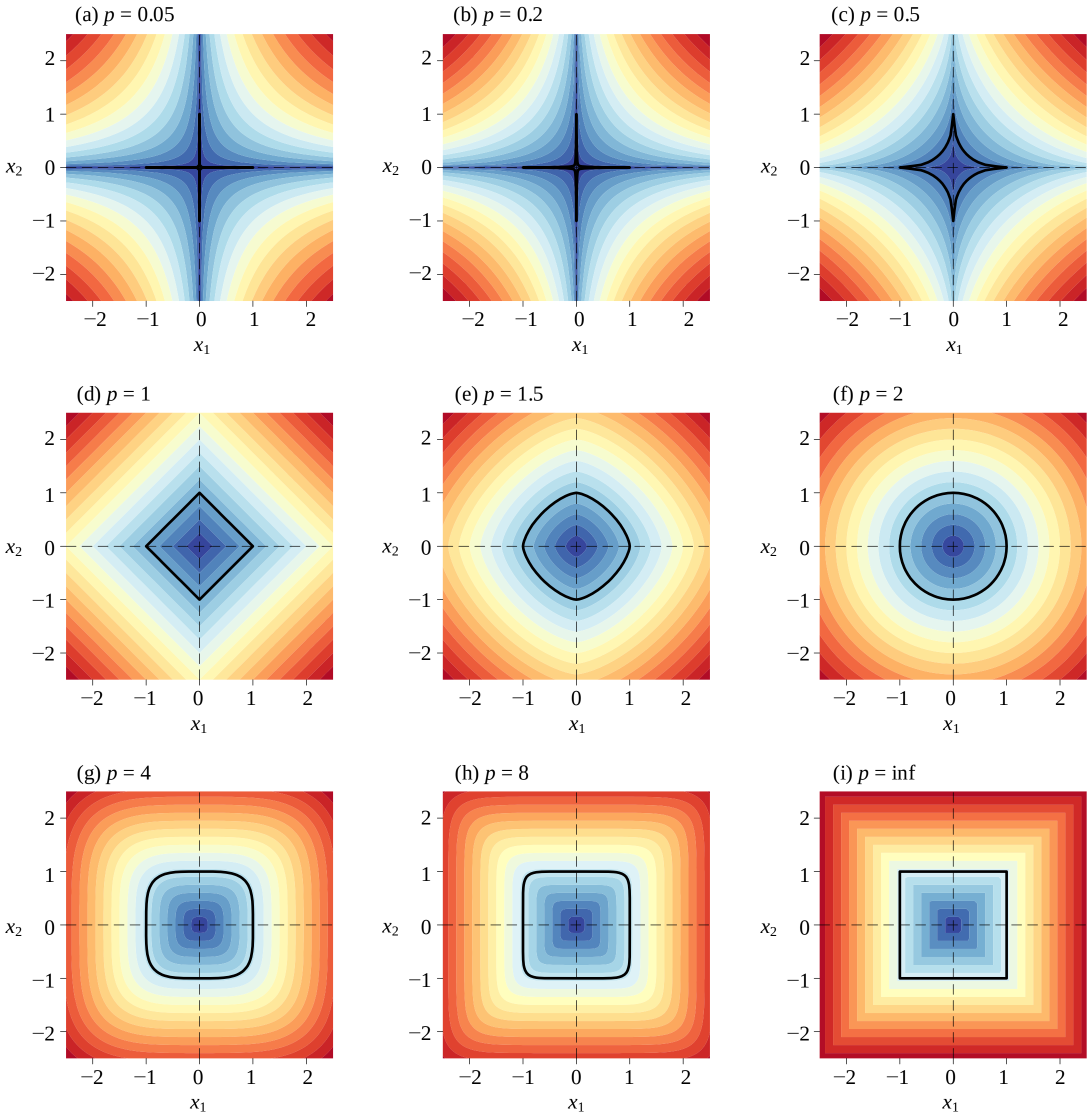


图 15. 超椭圆 p 取不同值时，超椭圆的形状，$a = 1$，$b = 1$

p 和 q 两个参数

将 (13) 解析式进一步推广，得到如下二维平面的超椭圆解析式：

$$\left|\frac{x_1}{a}\right|^p+\left|\frac{x_2}{b}\right|^q=1 \tag{18}$$

其中，p 和 q 为正数。

举个例子，当 $a = 1$，$b = 1$ 时，(18) 对应的超椭圆的解析式为：

$$\left|x_1\right|^p+\left|x_2\right|^q=1 \tag{19}$$

图 16 所示为 p 和 q 取不同值时，(19) 对应超椭圆的形状。

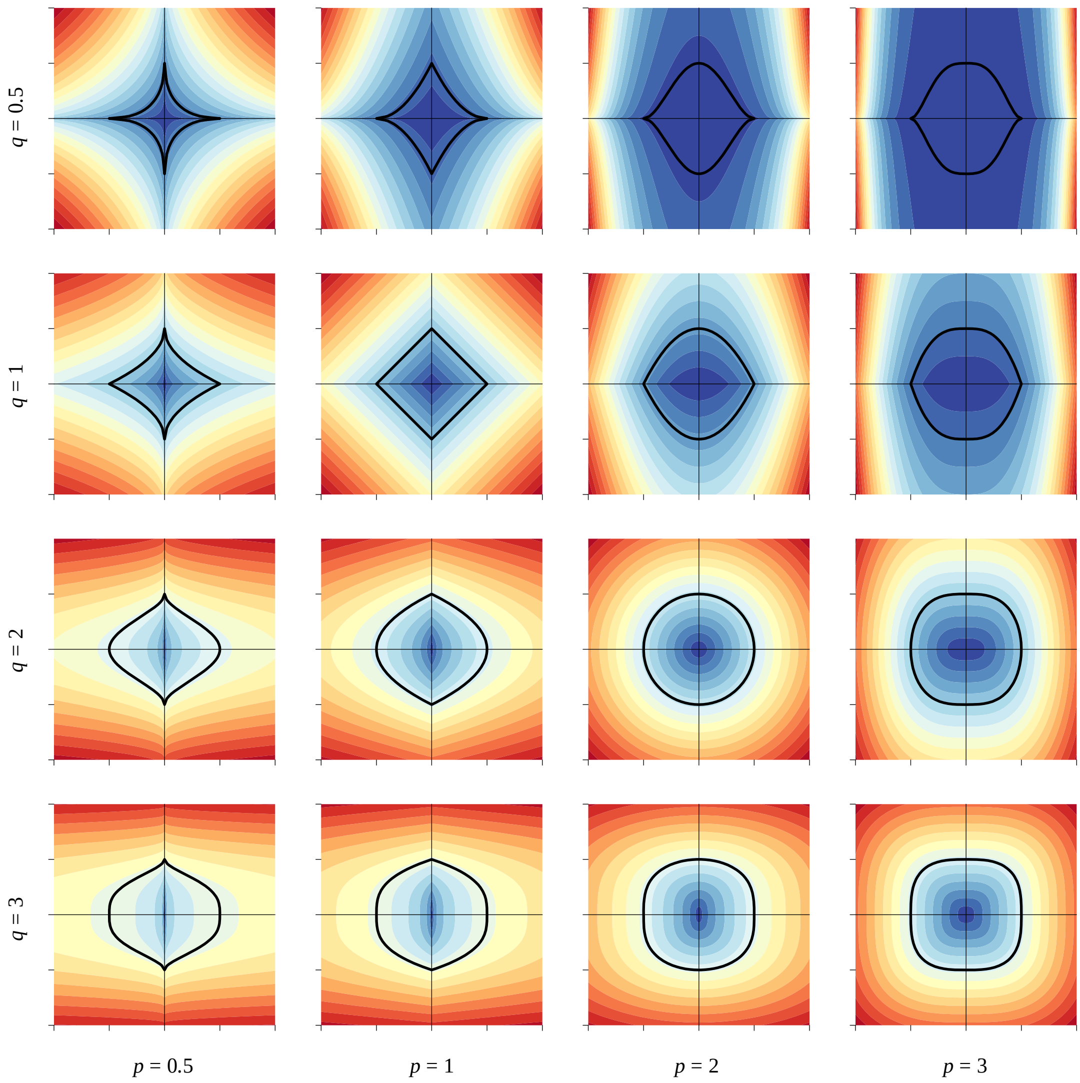


图 16. p 和 q 取不同值时，超椭圆的形状，$a = 1$，$b = 1$

超椭球

从二维到三维，可以得到**超椭球** (superellipsoid) 的解析式：

$$\left(\left|\frac{x_1}{a}\right|^r + \left|\frac{x_2}{b}\right|^r\right)^{\frac{t}{r}} + \left|\frac{x_3}{c}\right|^t = 1 \tag{20}$$

图 17 所示为 $a = 1$ 和 $b = 1$，t 和 r 取不同值时，超椭球的形状。

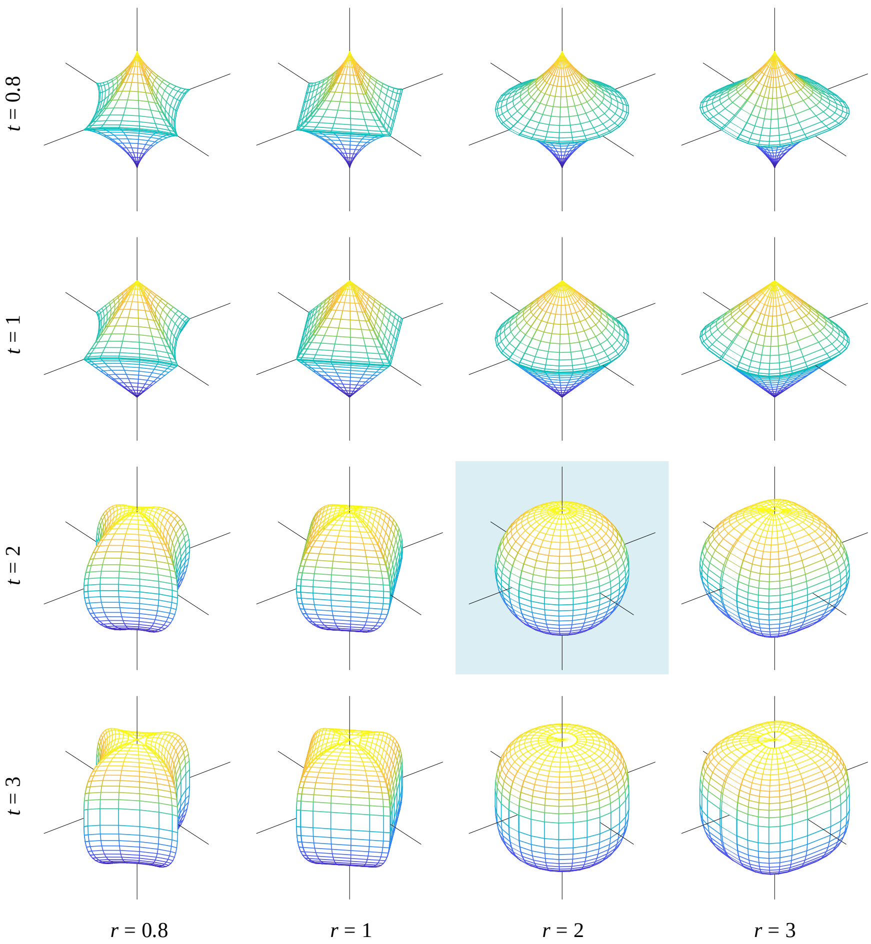


图 17. t 和 r 取不同值时，超椭球的形状，a = 1，b = 1

本节介绍的超椭圆和 L^p 范数紧密联系。L^p 范数的定义如下：

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_D|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{D} |x_i|^p\right)^{1/p} \tag{21}$$

其中，

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_D \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

图 18 所示为随着 p 增大，L^p 范数等距线一层层包裹。在数据科学和机器学习中，L^p 范数常用来度量距离。当 $p = 2$，(21) 就是 L^2 范数，这便是前文介绍的欧氏距离。

本系列丛书将在《矩阵力量》一册系统讲解范数。

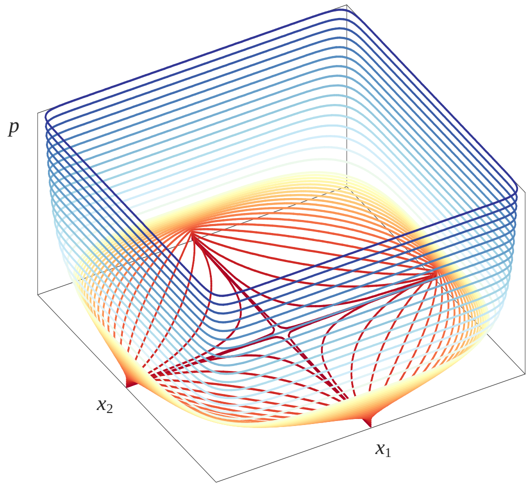


图 18. 随着 p 增大，L^p 范数等距线一层层包裹

Bk3_Ch9_04.py 绘制图 14、图 15、图 16。

在 Bk3_Ch9_04.py 基础上，我们做了一个 App，大家可以调节参数观察超椭圆形状变化。请大家参考代码文件 Streamlit_Bk3_Ch9_04.py。

9.6 双曲函数：基于单位双曲线

当 $a = 1$ 和 $b = 1$ 时，双曲线为**单位双曲线** (unit hyperbola)：

$$x_1^2 - x_2^2 = 1 \qquad a, b > 0 \tag{23}$$

类似前文提到过的三角函数和单位圆之间关系，单位双曲线可以用来定义**双曲函数** (hyperbolic function)。

如图 19 所示，最基本的双曲函数是双曲正弦函数 sinh() 和双曲余弦函数 cosh()。

双曲正切 tanh()，可以通过如下比例计算得到：

$$\tanh \theta = \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta} \tag{24}$$

双曲正切函数 tanh() 是 S 型函数中重要的一种，本书第 12 章将深入介绍。

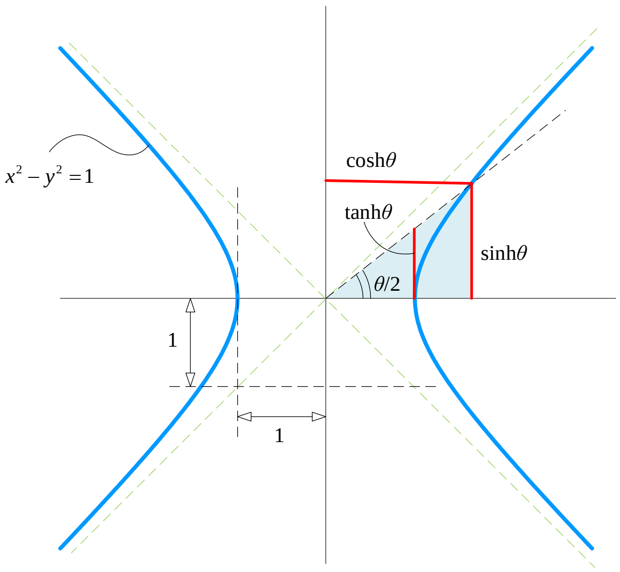


图 19. 单位双曲线和双曲函数的关系

图 20 所示为 sinhθ、coshθ 和 tanhθ 三个函数之间的图像关系。

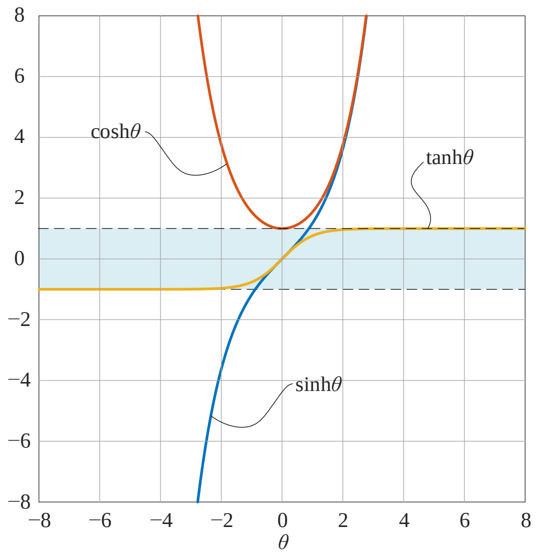


图 20. sinhθ、coshθ 和 tanhθ 三者关系

表 1. 用英文表达双曲函数

数学表达	英文表达	中文表达
$\sinh\theta$	hyperbolic sine theta sinh /sɪntʃ/ theta	双曲正弦
$\cosh\theta$	hyperbolic co sine theta cosh /kɒʃ/ theta	双曲余弦
$\tanh\theta$	hyperbolic tangent theta tanh /tæntʃ/ theta	双曲正切

和指数函数关系

此外，$\sinh\theta$、$\cosh\theta$ 和 $\tanh\theta$ 三个函数和指数函数 $\exp(\theta)$ 存在以下关系：

$$
\begin{aligned}
\sinh\theta &= \frac{\exp(\theta)-\exp(-\theta)}{2} \\
\cosh\theta &= \frac{\exp(\theta)+\exp(-\theta)}{2} \\
\tanh\theta &= \frac{\sinh\theta}{\cosh\theta} = \frac{\exp(\theta)-\exp(-\theta)}{\exp(\theta)+\exp(-\theta)}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

图 21 所示为 $\sinh\theta$ 和 $\cosh\theta$ 与指数函数关系。

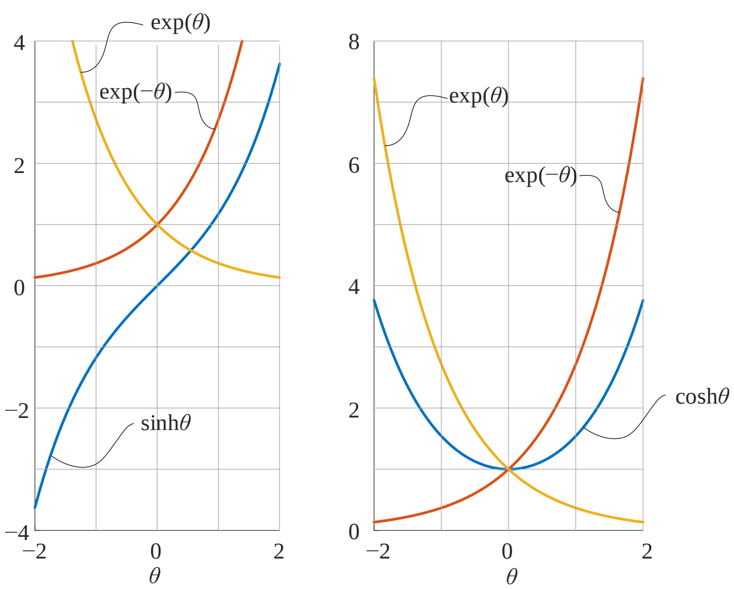


图 21. $\sinh\theta$ 和 $\cosh\theta$ 与指数函数关系

9.7 圆锥曲线一般式

圆锥曲线的一般形如下：

$$
Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \tag{26}
$$

满足下列条件，圆锥曲线为正圆：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad A = C \tag{27}$$

满足下列条件，圆锥曲线为正椭圆，即没有旋转：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad A \neq C, \quad AC > 0 \tag{28}$$

满足下列条件，圆锥曲线为正双曲线：

$$Ax_1^2 + Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0, \quad AC < 0 \tag{29}$$

满足下列任一等式，圆锥曲线为正抛物线：

$$\begin{cases} Ax_1^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \\ Cx_2^2 + Dx_1 + Ex_2 + F = 0 \end{cases} \tag{30}$$

注意当 $B \neq 0$ 时，圆锥曲线存在旋转，需要通过 $B^2 - 4AC$ 来判断圆锥曲线类型。

$B^2 - 4AC < 0$ 时，圆锥曲线为椭圆；$B^2 - 4AC = 0$，圆锥曲线为抛物线；$B^2 - 4AC > 0$ 时，圆锥曲线为双曲线。

大家可能会问，为何要采用 $B^2 - 4AC$ 来判断圆锥曲线类型？我们将在《矩阵力量》回答这个问题。

矩阵运算

把 (26) 写成如下矩阵运算式：

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + F = 0 \tag{31}$$

进一步写成：

$$\boxed{\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + F = 0} \tag{32}$$

其中，

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \tag{33}$$

目前不需要大家掌握 (31) 这个矩阵运算式。我们也将在《矩阵力量》一册深入分析这个等式。

正如牛顿所言，“我不知道世人看我的眼光。依我看来，我不过是一个在海边玩耍的孩子，不时找到几个光滑卵石、漂亮贝壳，而惊喜万分。而展现在我面前的是，真理的浩瀚海洋，静候探索。”

人类何尝不是在宇宙某个角落玩耍的一群孩子，手握的知识不过沧海一粟，却雄心万丈一心要去探索星辰大海。

但也正是这群孩子将无数的不可能变成了可能，现在他们已经在地月系、甚至太阳系的边缘跃跃欲试。

今人不见古时月，今月曾经照古人。宇宙的星辰大海一直都在人类眼前，它从未走远。路漫漫其修远兮，吾将上下而求索。

地球不过是人类的摇篮，我们的征途是星辰大海。这句话含蓄而浪漫。刘慈欣《三体》中则说的更为露骨而冷酷——“我们都是阴沟里的虫子，但总还是得有人仰望星空。”