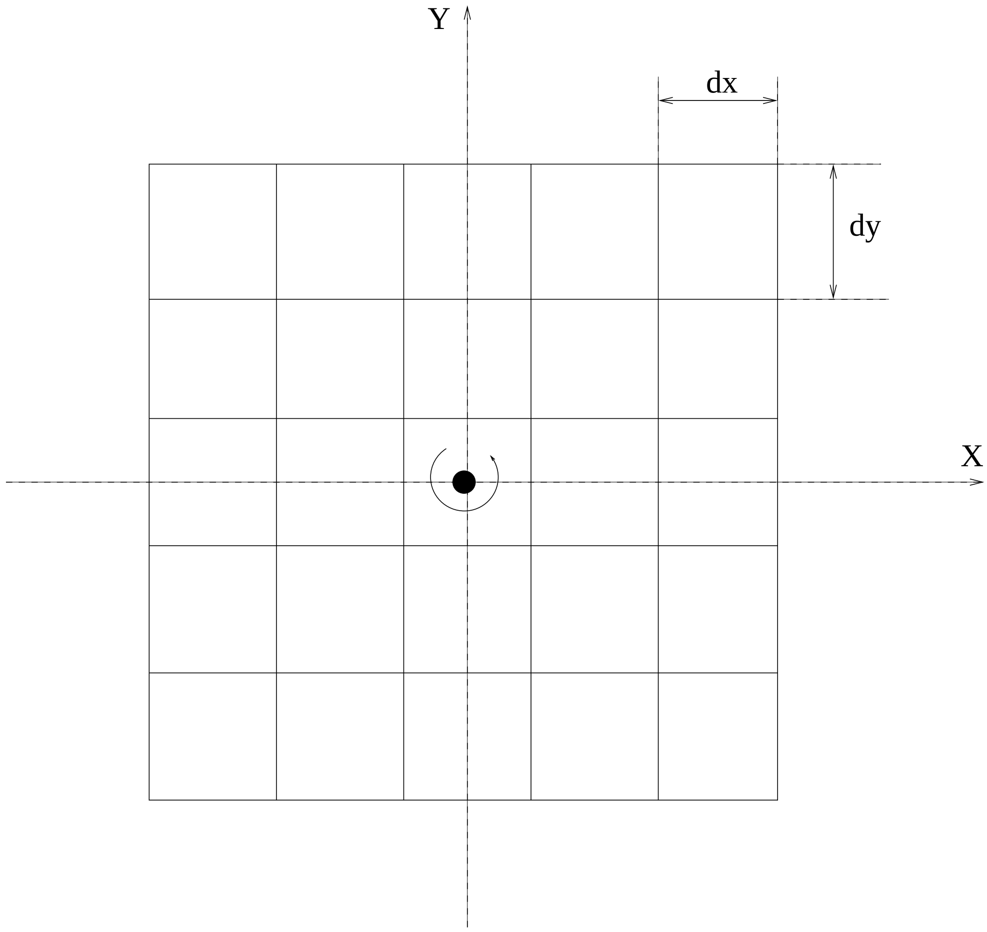
Projet Hydrodynamique numérique – ANO 2020
YM Scolan – Bur. D229bis
Email: yves-marie.scolan@ensta-bretagne.fr

Projet N^o **:** Calcul du champ de vitesse engendré par des tourbillons ponctuels dans un écoulement bidimensionnel.

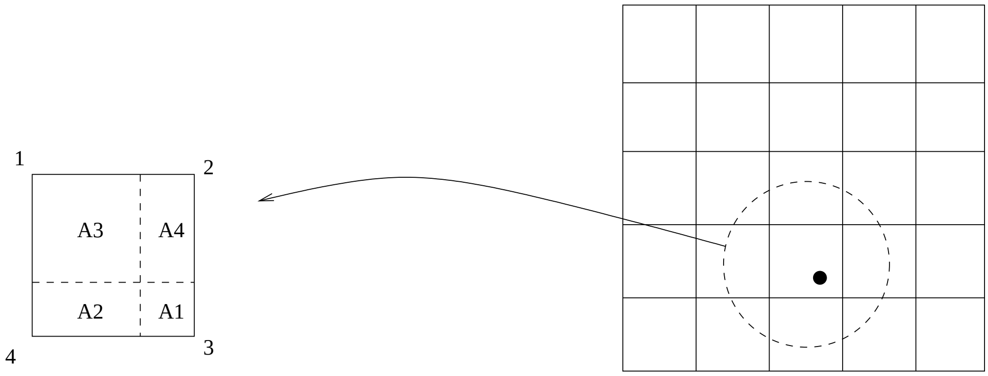
1. proposer une résolution de l'équation de Poisson par une méthode de différences finies dans les deux directions (x, y) du plan:
$$\Delta\psi = -\omega$$
où ψ et ω désignent la fonction de courant et la vorticité respectivement (ce sont des scalaires) et Δ désigne l'opérateur Laplacien.

2. résoudre l'équation sur un carré (10×10) avec des conditions de Dirichlet indiquant que le contour du carré est une ligne de courant ($\psi = Cte = 0$ sur le contour et ω est fixé à zéro); prendre un nombre pair de nœuds suivants les deux directions (environ 10×10):



3. mettre un tourbillon ponctuel au centre du carré; il sera repéré par la cellule du maillage à laquelle il appartient (par commodité le mettre au centre de la cellule du milieu); sa représentation idéale est une fonction Dirac:
$$\omega(\vec{x}) = \Gamma\delta(\vec{x} - \vec{X})$$
où $\vec{X}$ désigne le vecteur position du tourbillon et $\vec{x}$ est la position où l'on calcule ω; la quantité Γ est l'intensité du tourbillon; en pratique le support du tourbillon est la surface de la cellule

toute entière et on répartit bilinéairement la quantité Γ aux nœuds de la cellule selon le schéma ci dessous:



$$\omega_i = \frac{A_i \Gamma}{(\sum_{i=1}^{4} A_i)^2} \quad \text{pour } i = 1 \text{ à } 4$$

4. résoudre l'équation de Poisson (calculer ψ) avec un second membre ω qui tient compte de la présence du tourbillon; prendre $\Gamma = 1$.

5. calculer aux nœuds du maillage le champ de vitesse $\vec{u}$ induit par la présence du tourbillon:

$$\vec{u} = \vec{\text{rot}}(\psi \vec{k})$$

   où $\vec{k}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de l'écoulement.

6. selon le même schéma bilinéaire, calculer la vitesse au point où se trouve le tourbillon,

7. si le tourbillon est libre de tout mouvement, montrer que de toute façon sa position reste inchangée dans le temps (on rappelle que la position initiale du toubillon est le centre du domaine),

8. s'il devait bouger, proposer une méthode de repérage de sa position au cours du temps,

9. mettre un deuxième tourbillon de même intensité Γ dans le plan; les placer en $x = \pm 1$ et $y = 0$ avec $\Gamma = 10$; calculer le champ de vitesse induit par leur interaction; en déduire leur mouvement s'ils étaient libres de bouger sous l'effet de leur champ de vitesse mutuellement induit,

10. leur mouvement résulte de l'équation d'Euler pour la vorticité:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0$$

   c'est une dérivée particulaire donc les tourbillons qui représentent ω, se déplacent sous l'effet de leur champ de vitesse ambiant sans changement de leur intensité; l'équation différentielle de leur mouvement s'écrit:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{u}$$

   résoudre cette équation pour les deux tourbillons par un schéma d'ordre 1 en temps,

11. proposer l'algorithme pour un schéma d'ordre 2,

12. calculer la trajectoire des tourbillons.