Esercizi di fisica 2 con risoluzione

Lancillotto dal lago

December 15, 2022

Chapter 1

Forza elettrostatica e campo elettrostatico

1. Due protoni in un nucleo di elio (He$_2$) distano $d = 10^-15m$. Calcolare la forza f con cui interagiscono.
Risoluzione: data la carica del protone $e = 1,602 \cdot 10^-19C$ e la distanza d usando la legge di Coulomb si ottiene

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

2. Due sferette cariche q_1 e q_2 si respingono con una forza $F_1 = 5.4 \cdot 10^{-2}N$ quando distano $r = 10cm$. Sapendo che la loro somma è $q_1 + q_2 = 5 \cdot 10^{-7}C$, calcolare q_1 e q_2.
Risoluzione: Con i dati del problema si può facilmente ottenere il prodotto $q_1 \cdot q_2$.

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} \Rightarrow q_1 q_2 = F \cdot d^2 \cdot 4\pi\epsilon_0 = 6 \cdot 10^{-14}$$

quindi metteremo a sistema il prodotto fra le due cariche e la loro somma ottenendo così

$$\begin{cases} q_1 \cdot q_2 = 6 \cdot 10^{-14} \\ q_1 + q_2 = 5 \cdot 10^{-7} \end{cases} \quad \begin{cases} q_1 = \frac{6 \cdot 10^{-14}}{q_2} \\ q_2 = 5 \cdot 10^{-7} - \frac{6 \cdot 10^{-14}}{q_2} \end{cases}$$

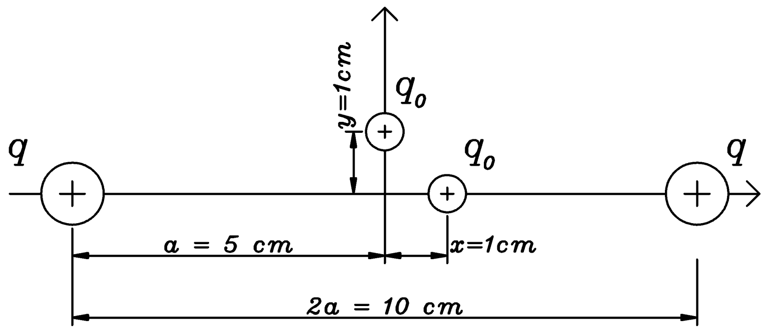
Ottengo così un polinomio di secondo grado da risolvere

$$\begin{cases} q_1 \cdot q_2 = 6 \cdot 10^{-14} \\ q_2^2 - 5 \cdot 10^{-7} q_2 + 6 \cdot 10^{-14} = 0 \end{cases} \qquad q_2 = \frac{5 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{(5 \cdot 10^{-7})^2 - 4 \cdot 6 \cdot 10^{-14}}}{2 \cdot 1}$$

Dunque risolvendo il sistema ottengo

$$\begin{cases} q_1 = 3 \cdot 10^{-7} \\ q_2 = 2 \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

3. Le due cariche q_s e q_d di ugual carica $q = 2 \cdot 10^{-8}C$ sono poste a distanza $2a = 5cm$ come in figura.



Calcolare:

(a) la forza F_x su una carica $q_0 = 10^{-10}C$ posta a distanza $x = 1cm$ dal centro O
Risoluzione: Si calcolano le forze usando la legge di Coulomb, sapendo che la carica q_0 si trova ad $a+1cm$ da q_s ed a $a-1cm$ da q_d, la risultante della forza su q_0 sarà la somma vettoriale delle forze F_s tra q_s e q_0 (orientata lungo il vettore $\vec{u_x}$), e F_d, tra q_d e q_0 (orientata lungo il vettore $-\vec{u}_x$). Quindi

$$F_s = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{(a+x)^2}\cdot\vec{u_x}$$
$$F_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_0}{(a-x)^2}\cdot -\vec{u}_x$$
$$F_x = F_s + F_d = \frac{qq_d}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{(a+x)^2}\frac{1}{(a-x)^2}\right) = -6.53\cdot 10^{-5}\vec{u_x}N$$

(b) la forza F_y sulla stessa carica posta a distanza $y = 1cm$ dal centro lungo l'asse delle due cariche.
Risoluzione: Si calcolano le componenti delle forze lungo l'asse x e l'asse y.
Lungo l'asse delle x q_1 è equidistante da q_d e q_s, Dunque F_dx ed F_sx saranno uguali in modulo ed opposte in verso, da qui ho

$$d_s = d_d \Rightarrow F_s = -F_d \Rightarrow F_s + F_d = 0$$

Lungo l'asse delle y q_1 è equidistante da q_d e q_s, Dunque F_dy ed F_sy saranno uguali in verso ed in modulo. Inoltre la distanza d sarà ottenuta tramite il teorema di Pitagora. Da qui

$$d = \sqrt{a^2+y^2}$$
$$d_s = d_d \Rightarrow F_s = F_d \Rightarrow F_s + F_d = 2F = 2\cdot\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qq_1}{d^2} = 1.84\cdot 10^{-5}N$$

4. Tre cariche $q_1 = 4\cdot 10^{-8}C$, $q_2 = -2\cdot 10^{-8}C$ e $q_3 = 6\cdot 10^{-8}C$ sono allineate lungo l'asse x in quest'ordine: la distanza tra q_1 e q_2 è uguale a quella tra q_2 e q_3 e vale $d = 50cm$. Calcolare la forza F_i esercitata su ciascuna carica dalle altre due.

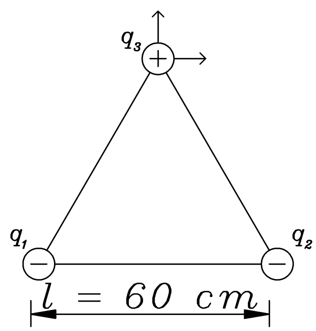
Risoluzione: Calcolo il modulo delle interazioni fra le tre cariche e poi le sommo opportunamente (se la forza è F)

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2} = -2.876 \cdot 10^{-5} N$$
$$F_{23} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2 q_3}{(2d)^2} = -4.314 \cdot 10^{-5} N$$
$$F_{13} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_3}{d^2} = 8.628 \cdot 10^{-5} N$$

Dunque le forze che agiranno sulle cariche saranno

$$F_{q_1} = F_{12}(\vec{u_x}) + F_{13}(-\vec{u}_x) = -F_{12} - F_{13} = -5.752 \cdot 10^{-5} N\vec{u_x}$$
$$F_{q_2} = F_{12}(-\vec{u}_x) + F_{23}(\vec{u_x}) = F_{12} - F_{23} = 1.438 \cdot 10^{-5} N\vec{u_x}$$
$$F_{q_3} = F_{13}(\vec{u_x}) + F_{23}(-\vec{u}_x) = F_{13} - F_{23} = 4.314 \cdot 10^{-5} N\vec{u_x}$$

5. Tre cariche $q_1 = -4 \cdot 10^{-8} C$, $q_2 = -3 \cdot 10^{-8} C$ e $q_3 = 2 \cdot 10^{-8} C$ sono poste sui vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 60 cm$. Calcolare la forza F esercitata da q_1 e q_2 su q_3.

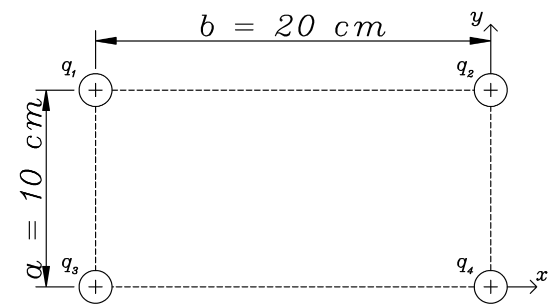


Risoluzione: Dati i segni ed i valori delle cariche possiamo intuire che il verso lungo x ed y sarà negativo. Iniziamo calcolando i modulo delle forze F_{13} ed F_{23}. Quindi otterremo le proiezioni lungo x usando il coseno e lungo y usando il seno. Raggruppando si ottiene

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{d^2}\cos(60) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{d^2}\cos(60) \\ &= \frac{q_3 \cdot \cos(60)}{4\pi\epsilon_0 d^2}(q_1 - q_2) = -0.25 \cdot 10^{-5} N \\ F_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_3}{d^2}\sin(60) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_2 q_3}{d^2}\sin(60) \\ &= \frac{q_3 \cdot \sin(60)}{4\pi\epsilon_0 d^2}(q_1 + q_2) = -3.03 \cdot 10^{-5} N \end{aligned}$$

6. Quattro cariche uguali $q_i = q = 2 \cdot 10^{-8} C$ sono poste sui vertici di un rettangolo di lati $a = 10 cm$ e $b = 20 cm$.

Calcolare la forza F esercitata dalle altre tre cariche su q_4.



Risoluzione: Date le distanze delle cariche dall'origine (centrata nella carica q_4), con la legge di Coulomb si possono ricavare i moduli delle forze, ricordando che sono orientate:

(a) La forza tra q_2 e q_4 è orientata in direzione dell'asse y ed in verso negativo (cioè lungo il vettore $-\vec{u}_y$).

(b) La forza tra q_3 e q_4 è orientata in direzione dell'asse x ed in verso positivo (cioè lungo il vettore $\vec{u_x}$).

(c) La forza tra q_1 e q_4 è orientata in diagonale lungo il vettore $(\alpha\vec{u_x}, \beta{-}\vec{u}_y)$ con α, β proiezioni della forza F_{14} sugli assi cartesiani.

Quindi procedendo al calcolo delle forze abbiamo che:

$$\begin{aligned}
d_{14} &= \sqrt{a^2+b^2} = 0.22m \\
F_{14} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_4}{a^2+b^2} = valore \\
d_{24} &= a = 0.1m \\
F_{24} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2q_4}{a^2} = valore{-}\vec{u}_y \\
d_{34} &= b = 0.2m \\
F_{34} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_3q_4}{b^2} = valore\vec{u_x}
\end{aligned}$$

Le proiezioni di F_{14} sugli assi si potrebbero ottenere calcolando l'angolo $\gamma = \arctan\left(\frac{-a}{b}\right)$ e poi proiettarlo usando le funzioni trigonometriche. Tuttavia ricordandosi che:

$$\begin{aligned}
\sin(\gamma) &= \frac{a}{d_{14}} \\
\cos(\gamma) &= \frac{b}{d_{14}}
\end{aligned}$$

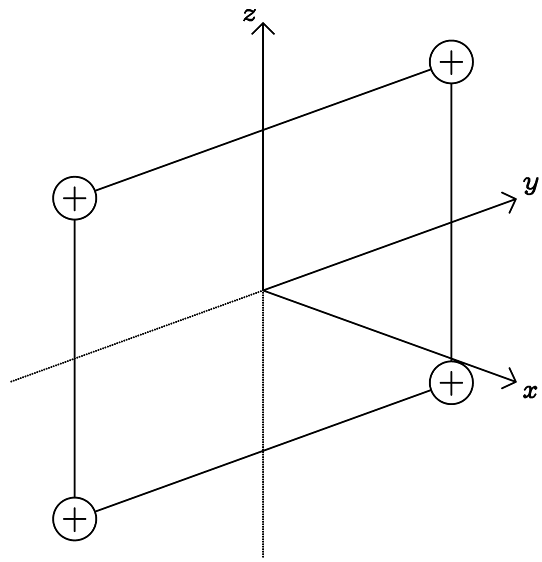
otteniamo che le componenti di F_{14} sono

$$\begin{aligned}
F_{14}\vec{u_x} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_4}{a^2+b^2}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{q_1q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{b}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = valore \\
F_{14}{-}\vec{u}_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_4}{a^2+b^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{q_1q_4}{4\pi\epsilon_0}\frac{a}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}} = valore
\end{aligned}$$

Si sommano quindi le componenti per verso (sono concordi quando lungo gli stessi assi, quindi non bisognerà cambiare segno a nessun modulo).

$$F_{14}\vec{u_x} + F_{24} = valore$$
$$F_{14}{-}\vec{u}_y + F_{34} = valore$$

7. lorem ipsum dolor sit amat consecetur eit



Risoluzione:

8.

Chapter 2

Lavoro elettrico e potenziale elettrostatico

Chapter 3

Legge di Gauss

1. Calcolare il flusso $\Phi(E)$ del campo elettrostatico $E = 2 \cdot 10^4 V/m$:

   (a) attraverso un quadrato di lato $l = 10cm$, posto nel piano yz
   Risoluzione: Usando le formule abbiamo che il flusso $\Phi(E)$:

   $$\begin{aligned}\Phi(E) &= \int E u_x d\Sigma \\ &= E \int d\Sigma \\ &= E \cdot \Sigma\end{aligned}$$

   Con Σ superficie del quadrato con area pari a l^2. Da qui

   $$\Phi(E) = E \cdot l^2 = 2 \cdot 10^4 V/m \cdot 1 \cdot 10^{-2} m^2 = 2 \cdot 10^2 Vm$$

   (b) attraverso lo stesso quadrato se la normale al quadrato forma un angolo $\alpha = 30^o$ con il campo E.
   Risoluzione: Si prende il campo precedentemente calcolato e si calcola la sua proiezione sulla retta ortogonale al piano (quella su cui giace il flusso attraversante la superficie)

   $$\Phi(E) = E \cdot \Sigma \cdot \cos(30^o) = 173.20 Vm$$

2. Un campo elettrostatico uniforme $E = au_x + bu_y$ interseca una superficie piana di area Σ. Calcolare il flusso $\Phi(E)$ del campo E attraverso la superficie Σ nel caso in cui giacesse:

   (a) nel piano xy
   Risoluzione: Essendo il piano lungo versori giacenti sugli assi x ed y ed essendo il flusso ortogonale alla superficie, e quindi lungo un versore sull'asse z, il flusso $\Phi(E)$ su questa superficie sarà nullo.

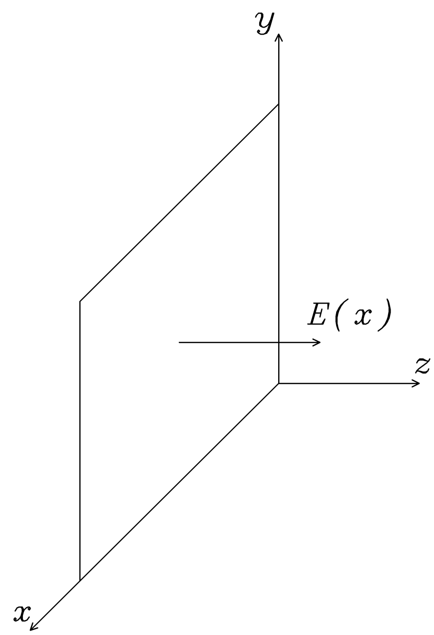
   (b) nel piano xz
   Risoluzione: In questo caso il flusso sarà orientato sull'asse y, dundue si azzererà la componente su x lasciando il flusso pari a

   $$\Phi(E) = b \cdot \Sigma$$

(c) nel piano yz
Risoluzione: Analogamente al caso precedente il flusso sarà orientato sull'asse x, quindi si azzererà la componente lungo y: da qui

$$\Phi(E) = a \cdot \Sigma$$

3. Calcolare il flusso $\Phi(E)$ del campo elettrostatico $E = 5 \cdot 10^5 x u_z V/m$ attraverso il quadrato di lato $a = 5cm$, orientato con la normale concorde con uz.



Risoluzione: Analogamente al primo caso calcoliamo $\Phi(E)$, ma il campo E non è costante, quindi con un integrale ottengo

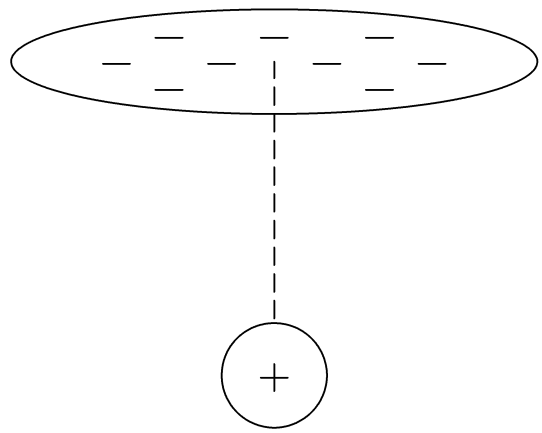
$$\begin{aligned}
\Phi(E) &= E \cdot \Sigma \\
&= \Sigma \int_0^a E dx \\
&= \int_0^a 5 \cdot 10^5 a x dx \\
&= \left[5 \cdot 10^5 \frac{a \cdot x^2}{2} \right]_0^a \\
&= 5 \cdot 10^5 \cdot \frac{a^3}{2} = 31.25 V m
\end{aligned}$$

Domanda: che fine ha fatto Σ?
Invece che portarla fuori e rischiare di trovare esponenti di troppo, considero la superficie come una retta ad altezza a dall'asse x (quindi $y = a$) ed integro. Essendo l'integrale di una retta parallela all'asse x uguale all'area del rettangolo sotteso tra la retta e l'asse, ottengo la superficie che cercavo.
Domanda: come posso separare le due cose senza trovarmi un a^4 indesiderato nella formula finale?
Non essendo il campo costante non posso integrare area e campo in due volte diverse, in quanto sono legati l'uno all'altro. Per intenderci, prendendo un infinitesiomo del campo molto vicino all'origine, questi avrà effetto su una piccola superficie del rettangolo, e lo stesso vale per un infinitesimo molto lontano: sarebbe quindi sbagliato pensare che il campo agisce uniformemente sulla superficie.

4. Con riferimento alla figura, il campo elettrostatico E varia con la legge $E = (5 + 4x^2) \cdot 10^5 u_x V/m$ con x espresso in metri. Calcolare, dato il parallelepipedo di lati $a = 10cm$, $b = 15cm$, $c = 20cm$:
   (a) il flusso $\Phi(E)$ attraverso il parallelepipedo
   Risoluzione: Il flusso è diretto lungo l'asse x dunque tutte le facce non parallele al piano yz avranno di conseguenza flusso $\Phi(E) = 0$. Si procede dunque al calcolo:
   $$\begin{cases} x = 0 \\ \Phi(E) = ab \cdot 5 \cdot 10^5 V/m = 7.5 \cdot 10^3 Vm \end{cases} \quad \begin{cases} x = c \\ \Phi(E) = ab \cdot (5 + 4c^2) \cdot 10^5 V/m = 7.74 \cdot 10^3 Vm \end{cases}$$
   $$\Phi(E) = ab[E(c) - E(0)] = 4 \cdot 10^5 abc^2 Vm = 240 Vm$$
   (b) la carica q contenuta all'interno di tale parallelepipedo
   Risoluzione: Conoscendo la formula $\Phi(E) = \frac{q}{\epsilon_0}$ ricaviamo q
   $$q = \epsilon_0 \Phi(E) = 2.13 \cdot 10^{-9} C$$

5. Il campo elettrostatico in una certa regione dello spazio è dato da $E = (5xu_x - 4yu_y + 3zu_z) \cdot 10^5 V/m$. Calcolare, data la superficie mostrata in figura di lati $a = 10cm$, $b = 15cm$ e $c = 20cm$:
   (a) il flusso $\Phi(E)$ attraverso la superficie chiusa
   Risoluzione: Usiamo la formula
   $$\begin{aligned} \Phi(E) &= \int \nabla \cdot E dt \\ &= \nabla E \cdot abc \\ &= 1.2 \cdot 10^3 Vm \end{aligned}$$
   (b) la carica q presente all'interno della superficie
   Risoluzione: Come nel punto 4.b si usa la formula
   $$q = \epsilon_0 \Phi(E) = 1.06 \cdot 10^{-8} C$$
   (c) la sua densità di carica ρ nell'ipotesi che essa sia costante all'interno della superficie stessa
   Risoluzione: Con le formule inverse abbiamo che:
   $$\begin{aligned} &\Phi(E) = \nabla E \cdot abc \Rightarrow \\ &\begin{cases} \nabla E = \frac{\Phi(E)}{abc} \nabla E = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \rho \end{cases} \\ &\Rightarrow \rho = \epsilon_0 \frac{\Phi(E)}{abc} = 3.54 \cdot 10^{-6} C/m^3 \end{aligned}$$

6. Una carica q_0 è posta sull'asse di un disco uniformemente carico con densità superficiale $\sigma = -5 \cdot 10^{-8} C/m^2$. Il flusso del campo della carica q_0 attraverso la superficie del disco vale $\Phi(E) = 4 \cdot 10^3 Vm$. Calcolare la forza F esercitata dal disco su q_0.



Risoluzione: Si ricava da due formule e passando per l'angolo solido:

$$\begin{cases} \Omega = 2\pi(1 - cos(\theta)) \\ \Phi(E) = \int_\Sigma E u_n d\Sigma = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_\Omega d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\Omega \end{cases}$$
$$\Rightarrow \Phi(E) = \frac{q}{2\epsilon_0}(1 - cos(\theta))$$

7. Con riferimento alla figura, per il flusso del campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche sono dati i seguenti valori: $\Phi_{\Sigma 1}(E) = -1.13 \cdot 10^3 Vm$, $\Phi\Sigma 2(E) = \Phi\Sigma 3(E) = 0$ e $\Phi\Sigma 4(E) = 4.514 \cdot 10^3 Vm$. Calcolare q_1, q_2, q_3 e q_4.
Risoluzione: Sapendo che

$$\Phi(E) = \frac{1}{\epsilon_0}\Sigma_{i=1}^n q_i$$

ricavo che:

$$\begin{aligned} &q_1 = \epsilon_0 \Phi_{\Sigma 1}(E) \\ &q_1 + q_4 = \epsilon_0 \Phi_{\Sigma 2}(E) = 0 \Rightarrow q_4 = -q_1 \\ &q_3 + q_4 = \epsilon_0 \Phi_{\Sigma 3}(E) = 0 \Rightarrow q_3 = -q_4 = q_1 \\ &q_2 + q_3 = \epsilon_0 \Phi_{\Sigma 4}(E) \Rightarrow q_2 = \epsilon_0 \Phi_{\Sigma 4}(E) - q_3 \end{aligned}$$

Calcolando ottengo che

$$\begin{aligned} &q_1 = -1 \cdot 10^{-8} C \\ &q_2 = -3 \cdot 10^{-8} C \\ &q_3 = -1 \cdot 10^{-8} C \\ &q_4 = 1 \cdot 10^{-8} C \end{aligned}$$

8. Con riferimento alla figura, $q1 = q = -10\text{–}8C$ e il flusso del campo elettrostatico E attraverso le superfici tratteggiate risulta: $\Phi_{\Sigma 1}(E) = \Phi_{\Sigma 2}(E) = 0$, $\Phi_{\Sigma 3}(E) = 2.26 \cdot 10^3 Vm$. Calcolare q_2, q_3 e q_4.
   Risoluzione: Identica all'esercizio precedente.

Chapter 4

Conduttori ed energia elettrostatica

1. Una sfera di rame di raggio $R = 10cm$ possiede una carica $q = 10^-8C$. Determinare ogni quanti atomi della sfera manca un elettrone. Per il rame: $mmol = 63.55g/mol, \rho = 8.96 \cdot 10^3 kg/m^3$
   Risoluzione: si calcola prima il numero di elettroni che serve per avere la carica q ($N^o e^-$), si calcolano quindi gli atomi in una sfera di rame di raggio $r = 10cm$ ($n^o Cu$), quindi si fa il rapporto $n^o Cu/n^o e^-$.

$$
\begin{aligned}
&n^o e^- = \frac{q}{e} = \frac{10^-8C}{1.602 \cdot 10^-19C} = 6.242 \cdot 10^{10} \\
&vol\Sigma = \frac{4}{3} r^3 \pi = \frac{4}{3} \cdot 0.1m^3 \pi = 4.19 \cdot 10^{-3} m^3 = 4.19 \cdot 10^6 cm^3 \\
&molCu = \frac{vol\Sigma \cdot \rho}{mmolCu} = \frac{4.19 \cdot 10^6 cm^3 \cdot 8.96 g/cm^3}{63.55 g/mol} = 5.9 \cdot 10^5 mol \\
&n^o Cu = molCu * n^o Avogadro = 5.9 \cdot 10^5 mol \cdot 6.022 \cdot 10^{23} 1/mol = 3.5 \cdot 10^{26} \\
&Cu/e^- = \frac{n^o Cu}{n^o e^-} = \frac{3.5 \cdot 10^{29}}{6.242 \cdot 10^{10}} = 5.6 \cdot 10^{18} \\
&RICONTROLLA - I - CONTI
\end{aligned}
$$

2. La rigidità dielettrica dell'aria secca è $E_s = 3 \cdot 10^6 V/m$. Calcolare:
   (a) La massima carica q_{max} che può essere depositata su una sfera conduttrice di raggio $r = 10cm$
   Risoluzione: Il campo elettrostatico sulla superficie della sfera è uguale alla rigidità dielettrica dell'aria e si calcola come il rapporto fra la carica sulla superdicie della sfera e la superficie della sfera (DA RICONTROLLARE), quindi

$$E_s = \frac{q_{max}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

   Da qui posso ricavare q_{max} come

$$q_{max} = \frac{4\pi\epsilon_0 r^2}{E_s} = 3.33 \cdot 10^{-6} C$$

   (b) Il potenziale massimo V_{max} assunto.
   Risoluzione: Dato che la rigidità dielettrica è definita come il valore limite del campo elettrico, V_{max} ed E_s

sono uguali, ergo

$$V_{max} = E_s = 3 \cdot 10^6 V/m$$

3. In un giorno secco il campo elettrostatico vicino alla superficie terrestre è $E = 100V/m$ ed è diretto verso la Terra. Nell'ipotesi che E sia costante su tutta la superficie terrestre ($R_T = 6360km$) calcolare quale sarebbe la carica q presente sulla superficie terrestre, se non ci fossero altri effetti che in pratica tendono a farla diminuire apprezzabilmente.
   Risoluzione: data una sfera conduttrice isolata, uniformemente carica, il campo elettrostatico prodotto all'esterno vale

   $$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

   mentre il potenziale vale

   $$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

   valore assunto anche all'interno. Quindi la carica q sarà uguale a

   $$q = E \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2 = 4.49 \cdot 10^5 C$$

4. Due sfere conduttrici S_1 ed S_2 di raggi rispettivamente r_1 ed r_2 sono poste nel vuoto ad una distanza x tra i centri, molto grande rispetto ad r_1 ed r_2. La sfera S_1, isolata, ha una carica q_1, mentre S_2 è mantenuta ad un potenziale V_2 rispetto all'infinito. Calcolare:

   (a) Il potenziale $V_1(x)$ della sfera S_1
   Risoluzione:

   (b) La carica $q_2(x)$ della sfera S_2
   Risoluzione:

   (c) La forza $F(x)$ tra le sfere in funzione della distanza x
   Risoluzione:

5. Una piccola sfera conduttrice di raggio $r_s = 1mm$ è posta sull'asse di un disco di raggio $r_d = 10cm$, uniformemente carico con densità $\sigma = 10^{-11} C/m^2$; il centro della sferetta dista d=30cm dal centro del disco. La sferetta è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale sia nullo. Calcolare la carica q sulla sferetta.
   Risoluzione: Si comincia calcolando il potenziale nel punto a distanza d dal centro del disco sull'asse. Iniziamo la discesa nella follia considerando il disco come un'insieme di cirdonferenze, e che sommandole tutte otteniamo l'area del disco. Moltiplicando l'area del disco per la densità di carica otterremo la carica del disco, dunque:

   $$q = \int_0^{r_d} \sigma \cdot 2\pi r dr$$

   Consideriamo la distanza tra il pundo e la circonferenza in cui abbiamo suddiviso il disco (che chiamerò distanza integrale d_i) come

   $$d_i = \sqrt{r^2 + d^2}$$

Mentre l'insieme delle distanze sarà il suo integrale per r che va da 0 a r_d.
Quindi calcoliamo il potenziale V come:

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{d} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{r_d} \frac{\sigma \cdot 2\pi r}{\sqrt{r^2+d^2}} dr \\
&= \frac{2\pi \cdot \sigma}{2 \cdot 2\pi \cdot \epsilon_0} \int_0^{r_d} \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}} dr \\
&= k \cdot \int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)} \\
&= \left[\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{r^2+d^2} + \frac{1}{2} r^2 \sqrt{r^2+d^2}}{r^2+d^2} \right]_0^{r_d} \\
&= \left[\frac{\left(1 + \frac{r^2}{2}\right)}{\sqrt{r^2+d^2}} \right]_0^{r_d} \\
&= 8.9 \cdot 10^{-3} V
\end{aligned}$$

Esiste inoltre un V_i sulla sferetta tale che sono soddisfatte le equazioni

$$\begin{aligned}
V_d + V_i &= 0 \\
V_i &= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}
\end{aligned}$$

Da qui ricaviamo facilmente che $q_i = -1 \cdot 10^{-15} C$

Contents