RNP - 07/03/2025 - LEZIONE 2

Vogliamo capire il comportamento delle forze oltre quelle che conosciamo. Come possiamo farlo? Studiando tre cose

1. Sistemi legati, ci rivela ~~delle~~ le forze di legame

2. Decadimenti, processo di disintegrazione per cui le particelle è instabile (tempo di vita finito). Si disintegra a causa di quale forza.

3. Le interazioni, due particelle possono collidere / interagire ~~mediata~~ la cui interazione è mediata dalla forza.

Nella fisica nucleare gli stati legati sono i modelli che descrivono i nuclei. Nella fisica delle particelle gli adroni costituiti da quark sono stati legati (modello a quark)

Il decadimento è la disintegrazione naturale che manifesta delle regole di conservazione: energia, quantità di moto, carica e momento angolare. Queste leggi sono universali (non dipende dalle forze). La parità si conserva per l'elettromagnetismo ma non per la forza debole. Esistono leggi di conservazione non universali.
Le leggi di conservazione sono associate a delle simmetrie (Teorema di Noether)

Particella a decade producendo b e c $a \longrightarrow bc$ # almeno due particelle prodotte

Interazione tra a e b che .. altre particelle $ab \rightarrow ab$ (elastico)   # almeno una .. cons
$ab \rightarrow ac$ (anelastico)   n° particelle non cons

Se il processo è $a\ b \rightarrow c\ d$ allora $E_a + E_b = E_c + E_d$ per decadito e interaz.
$\vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d$

In generale $E = m_0c^2 + T$ m_0 massa a riposo. L'energ. è un term di massa più cinetica per una particella libera.

$$E = m_0c^2 + T = \gamma m_0 c^2 = mc^2$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{con } \beta = \frac{v}{c} \quad \text{con } v \text{ velocità particella}$$

Un'altra relazione è $p = \gamma m_0 v$ $\longrightarrow$ $\underbrace{E = \gamma m_0 c^2}_{1)} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ 1) = 2)

$$E^2 = \frac{m_0^2c^4}{1-\beta^2} \rightarrow E^2 - E^2\beta^2 = m_0^2c^4$$

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2c^4$$

$$\underbrace{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}_{2)}$$

Si trova

$$pc = \gamma m_0 v c = \gamma m_0 \beta c^2 = \beta E$$

Lega energia alla quantità di moto e alla massa

L'energ. cinetica è la diff. tra E e la sua massa $\underline{T = E - m_0c^2 = (\gamma - 1) m_0 c^2}$

Cosa è T nel limite non relativistico? $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = (1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

(la massa relativistica non è invariante, la massa a riposo è quella misurata nel R.F. solidale alla particella)

$$\gamma \xrightarrow[\beta \ll 1]{} 1 + \frac{\beta^2}{2} \Rightarrow T \xrightarrow[\beta \ll 1]{} \frac{\beta^2}{2} m_0 c^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

Studiamo il decadimento

La legge del decadimento. Se ho N particelle instabili, il N cambia nel tempo (decrescente). I decadimenti sono tali per cui il tasso di decadimento non dipende dal tempo. Si comporta in modo tale che il tasso di decadimento normalizzato al num. di particelle è costante

$$-\frac{\frac{dN(t)}{dt}}{N(t)} = \lambda \quad - \quad \frac{dN}{dN} = -\lambda\, dt \rightarrow \ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t \rightarrow \underline{N(t) = N_0 e^{-\lambda t}}$$

λ ha le dimens. dell'inverso di un tempo. Il tempo caratteristico τ è aspett. di λ

$$\tau = \frac{\int t\, dN}{\int dN} \qquad dN = -\lambda N_0 e^{-\lambda t} dt \longrightarrow$$

$$f'g + fg' = (fg)'$$

$$f = t \quad g' = e^{-\lambda t} \quad g = -\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}$$

$$-\frac{\int_0^\infty \cancel{-\lambda N_0} e^{-\lambda t} t\, dt}{\int_0^\infty \cancel{-\lambda N_0} e^{-\lambda t} dt} = \frac{\int_0^\infty t e^{-\lambda t} dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt}$$

$$\underbrace{-\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty}_{0} + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \longrightarrow$$

Scanned with ACE Scanner

$$\sim \frac{\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt}{\int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt} = \frac{1}{\lambda} \longrightarrow \tau = \frac{1}{\lambda}$$ Tempo di vita medio $\tau = \frac{1}{\lambda}$

Un nucleo decade verso nuclei con energia di legame più alta. Un nucleo può decadere in più stati fondamentali diversi

$$-\frac{\left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_a}{N(t)} = \lambda_a \qquad -\frac{\left.\frac{dN(t)}{dt}\right|_b}{N(t)} = \lambda_b \qquad -\left.\frac{dN}{dt}\right|_a - \left.\frac{dN}{dt}\right|_b = (\lambda_a+\lambda_b)N(t) = -\frac{dN}{dt}$$

nuclei che decadono nel canale a   " b

$$\downarrow$$

$$N(t) = N_0\, e^{-(\lambda_a+\lambda_b)t}$$

λ però è la somma dei singoli λ dei canali di decadimento

Il rapporto relativo tra λ mi dà la frazione di particelle decadute nel canale (Probabilità) $P_a = \frac{\lambda_a}{\lambda}$ $P_b = \frac{\lambda_b}{\lambda}$

I nuclei decaduti $D(t) = N_0 - N(t) = N_0(1-e^{-\lambda t})$

L'attività di un nucleo è pari al numero di decadimenti al secondo cioè

$$A(t) = \frac{dD(t)}{dt} = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = A_0 e^{-\lambda t} \quad \text{con} \quad A_0 = \lambda N_0$$

Si può scrivere $A(t) = \lambda N(t)$ Si misura in $Bq = 1\ \frac{\text{decaduto}}{s}$. Si è usato anche il Curie $C_i = 3.7 \times 10^{10}$ Bq attività di un grammo di radio ^{226}Ra 1g

Considero due canali $\lambda_T = \lambda_a + \lambda_b$

$$D_A = \frac{\lambda_a}{\lambda_T} N_0\left(1-e^{-\lambda_T t}\right) \; ; \quad D_B = \frac{\lambda_b}{\lambda_T} N_0\left(1-e^{-\lambda_T t}\right)$$

Decadimenti a cascata { Un nucleo 1 che decade in un nucleo 2 che decade in un nucleo 3.

$$N_1 \to N_2 \to N_3$$

$N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$. Se al tempo $t=0$ non c'è il nucleo 2. Ci sono due processi

1. $N_2(t)$ aumenta per effetto del decadimento di 1
2. $N_2(t)$ diminuisce perché decade in 3

$$\longrightarrow \underline{dN_2} = \underset{\text{decade}}{dN_2^d} - \underset{\text{contributo opposto del decadimento di } N_1 \text{ che produce } N_2}{dN_1} = \underline{-\lambda_2 N_2\,dt + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}\,dt} \longrightarrow$$

$$\to dN_2 = -\lambda_2 N_2\,dt + \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}\,dt$$

$$\underbrace{e^{\lambda_2 t}\cdot\left(\frac{dN_2}{dt} + \lambda_2 N_2\right)}_{1} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}\cdot e^{\lambda_2 t} \qquad 1)\; e^{\lambda_2 t}\left(\frac{dN_2}{dt}+\lambda_2 N_2\right) = \frac{d}{dt}\left(N_2 e^{\lambda_2 t}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(N_2 e^{\lambda_2 t}\right) = \lambda_1 N_0\, e^{+(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

$$\int_0^t dt \;\Big\lfloor\!\!\longrightarrow N_2 e^{\lambda_2 t} - \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{N_2(0)} = \lambda_1 N_0 \int_0^t e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}\,dt$$

per le C.I.

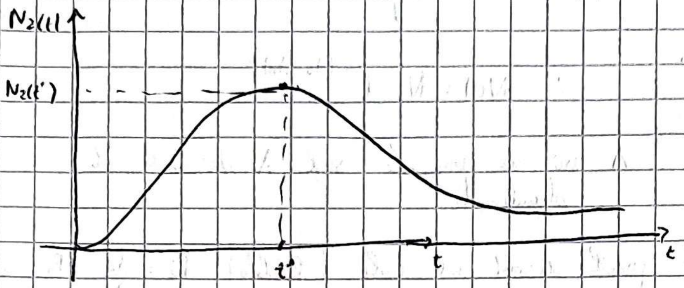
$$N_2 e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} - 1\right] \longrightarrow N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2-\lambda_1}\left[e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right]$$

Per $t=0 \to N_2(0)=0$, visto che $N_2(t)\geq 0 \; \forall t$ ci sarà un massimo
$t=\infty \to N_2(\infty)=0$

$t^* \geq 0 \quad \forall \lambda_2, \lambda_1$

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 t} = 0$$

$$\lambda_1 e^{\lambda_1 t} = \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \longrightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = e^{(\lambda_2-\lambda_1)t^*} \longrightarrow t^* = \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\ln\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$$



Vedo due casi

1. $\lambda_2 \gg \lambda_1$; $\tau_1 \gg \tau_2$
2. $\lambda_1 \gg \lambda_2$; $\tau_2 \gg \tau_1$

1. Se $\tau_2 \gg \tau_1 \rightarrow \lambda_1 \gg \lambda_2$ allora $e^{-\lambda_1 t} \to 0$ velocemente e $N_2 \rightarrow \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$

Quello che detta λ_1 e λ_2 è dove l'altezza del segnale

2. $\tau_1 \gg \tau_2 \rightarrow \lambda_2 \gg \lambda_1$ allora $e^{-\lambda_2 t} \to 0$ velocemente e $N_2 \rightarrow \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_1-\lambda_2} e^{-\lambda_1 t}$ (Equilibrio secolare)

Una catena di decadimenti che ha un progenitore che ha un tempo di emivita molto grande allora:

$$A_2(t) = \lambda_2 N_2(t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1} A_1(t) \longrightarrow \frac{A_2(t)}{A_1(t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}$$

Da un punto di vista quantistico come si tratta il decadimento? La F.O. di una particella $\Psi(\vec r,t)$ rispetta l'eq. di Schrödinger, che mi dà un certo stato. Preso un autostato dell'energia di particella libera

$$\Psi(\vec r,t) = \Psi(\vec r,0)\, e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}}$$

Come si modifica questo se la particella non è stabile? $|\Psi(t)|^2 \propto e^{-\lambda t}$

$$\Psi(\vec r,t) = \Psi(\vec r,0)\, e^{-i\frac{E_0 t}{\hbar}} e^{-\frac{\lambda}{2}t}$$

$$= \Psi(\vec r,0)\, e^{-i\left(E_0 - i\frac{\lambda\hbar}{2}\right)\frac{t}{\hbar}} \qquad \text{con } \lambda\hbar = \Gamma$$

$$\Psi(\vec r,0)\, e^{-i\left(E_0 - i\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{t}{\hbar}}$$

Che succede alle soluzioni stazionarie e all'energia?

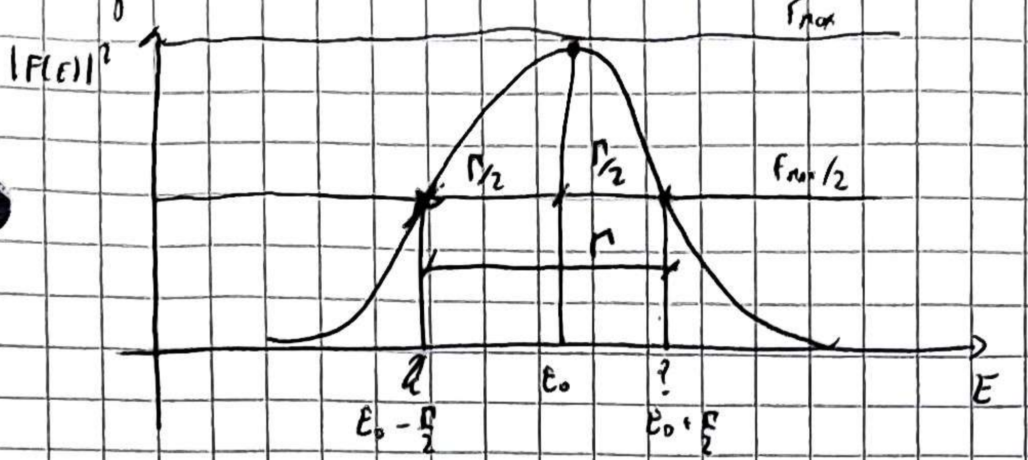
Passiamo dal dominio dei tempi a quello dell'energia con la trasformata di Fourier

$$\rightarrow F(E) = \int e^{-i\left(E_0 - i\frac{\Gamma}{2}\right)\frac{t}{\hbar}} e^{i\frac{Et}{\hbar}} dt = \int e^{-i(E_0-E)\frac{t}{\hbar}} e^{-\frac{\Gamma}{2}\frac{t}{\hbar}} dt$$

$$\propto \frac{1}{-i(E_0-E) - \frac{\Gamma}{2}} \qquad |F(E)|^2 \propto \frac{1}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}$$

Per avere la prob di avere una data energia dobbiamo calcolare $|F(E)|^2$

Disegnamo $|F(E)|^2$



In E_0 un massimo

$$|F(E)|^2 = \frac{1}{2}\frac{4}{\Gamma^2} \rightarrow (E-E_0)^2 = \frac{\Gamma^2}{4}$$

$$E - E_0 = \pm \frac{\Gamma}{2}$$

$$E = E_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$$

Γ è la larghezza a mezza altezza. Scopriamo $\Gamma = \lambda\hbar = \frac{\hbar}{\tau}$

Pari a Γ

Per una particella instabile l'energia non è definita. Cioè è con una certa incertezza / è legata a una distribuzione di probabilità. Tale incertezza è legata al principio di Heisenberg

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \longrightarrow \Gamma \Delta t = \frac{\hbar}{\tau}\tau \sim \hbar$$

L'energia sarà $E_0 \pm \frac{\Gamma}{2}$ legata anche all'incertezza sul tempo. Incertezza su tempo e energia da Heisenberg e instabilità della particella, allora ~~l'energia~~ è

Se la particella è stabile $\rightarrow$ τ molto grande $\rightarrow$ Γ piccola $\rightarrow$ [illegible] sull'es base $\rightarrow$ riduzione di banda