



Universität Hamburg  
DER FORSCHUNG | DER LEHRE | DER BILDUNG



# Interferometrische Messung der thermischen Bewegung einer Membran auf Pikometer-Skala

ILP 8 - Praktikum für Fortgeschrittene - Universität Hamburg

Jan Petermann

15. Juni 2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Versuchsziel und Durchführung . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Mechanischer Oszillator</b>	<b>2</b>
2.1	Elastische Wellengleichung . . . . .	2
2.2	Gedämpfter harmonischer Oszillator . . . . .	2
2.3	Spektrale Leistungsdichte . . . . .	5
2.4	Ring-Down-Messung . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Michelson-Interferometer</b>	<b>9</b>
3.1	Michelson-Interferometer mit polarisierendem Strahlteiler . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Mess- und Regelelektronik</b>	<b>14</b>
4.1	DC-Regelung des Spiegelpiezos . . . . .	14
4.2	Spektrumanalysator . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>16</b>
5.1	Aufbau . . . . .	16
5.2	Messung . . . . .	17
5.3	Protokoll . . . . .	17
	<b>Bibliography</b>	<b>19</b>

# 1 Einleitung

Mit Hilfe von Laser-Interferometern lassen sich Bewegungen auf kleinster Ebene präzise vermessen. Eine verbesserte Version eines Michelson-Interferometers wird in den Gravitationswellendetektoren GEO600 und LIGO verwendet, womit am 14. September 2015 erstmals eine Gravitationswelle direkt detektiert werden konnte.

Ziel dieses Praktikums ist die Messung der Bewegung einer 50 nm dicken, quadratischen Silizium-Nitrid-Membran mit einer Fläche von  $1 \text{ mm}^2$  unter Vakuum-Bedingungen. Hierfür soll ein Michelson-Interferometer aufgebaut werden, bei dem ein Endspiegel durch die Membran ersetzt wird. Die thermische Schwingung der Membran ändert die Phase des reflektierten Lichts und wird über das Interferometer in eine Leistungsänderung überführt, welche mit einer Photodiode ausgelesen werden kann. Dabei soll der Gütefaktor einer Membran-Mode bei unterschiedlichem Druck sowie das Frequenzspektrum der verschiedenen Membran-Moden gemessen werden.

Die Studenten lernen in diesem Versuch den Umgang mit einem Vakuumsystem sowie den Aufbau eines optomechanischen Systems. Außerdem soll der Umgang mit einem Spektrumanalysator und einem elektronischen Feedback-Regelkreis vermittelt werden.

## 1.1 Versuchsziel und Durchführung

Ziel des Versuchs ist die Bestimmung des Q-Faktors verschiedener Moden einer quadratischen Membran bei variierendem Umgebungsdruck. Dazu soll zunächst ein Michelson-Interferometer aufgebaut und am Punkt maximaler Steigung mittels eines Regelkreises gehalten werden. Um die einzelnen Moden zu identifizieren, wird ein breites Spektrum (vgl. Abbildung 2.2) aufgenommen und mit den theoretisch zu erwartenden Frequenzen verglichen. Anschließend soll mittels Ring-Down-Messungen der Q-Faktor einzelner Moden bestimmt werden (vgl. Abbildung 2.4). Das Verhalten des Resonanzpeaks bei unterschiedlicher Dämpfung soll untersucht und die Temperatur der Membran bestimmt werden. Dazu muss das Interferometer mittels einer bekannten Längenänderung von einer Wellenlänge kalibriert werden.

# 2 Mechanischer Oszillator

## 2.1 Elastische Wellengleichung

Wellen in einem homogenen elastischem Medium werden über die elastische Wellengleichung beschrieben:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla T = \vec{f}(\vec{r}, t) . \quad (2.1)$$

Hierbei bezeichnet  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  das Verschiebungsfeld als Antwort auf die angewandte Kraft  $\vec{f}(\vec{r}, t)$ ,  $\rho$  ist die Dichte des Materials und  $T$  der elastische Spannungs-Tensor. Für komplexe Geometrien ist die Gleichung meist nur numerisch lösbar. Für den Fall einer quadratischen Membran mit Kantenlänge  $L$  existiert allerdings eine analytische Lösung:

$$u_{ij}(x, y, t) = x_{ij}(t) \sin \left[ i \frac{\pi}{L} x \right] \sin \left[ j \frac{\pi}{L} y \right] \quad (2.2)$$

$$x_{ij}(t) = x_0 \sin (\Omega_{ij} t + \phi) . \quad (2.3)$$

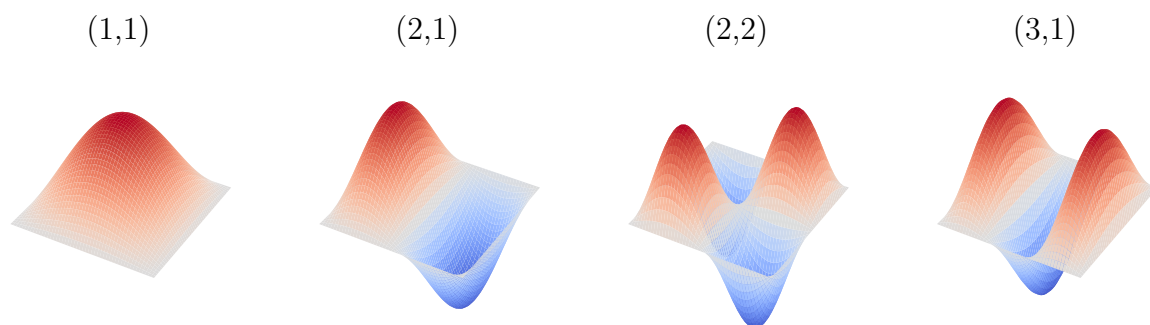
Die Eigenmoden der Membran sind sowohl zeitlich als auch räumlich harmonisch. Die Eigenfrequenz  $\Omega_{ij}$  hängt von der Ordnung der Mode ab und ist gegeben durch

$$\Omega_{ij} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho} (i^2 + j^2)} \quad , \quad (i, j) \in \mathbb{N} . \quad (2.4)$$

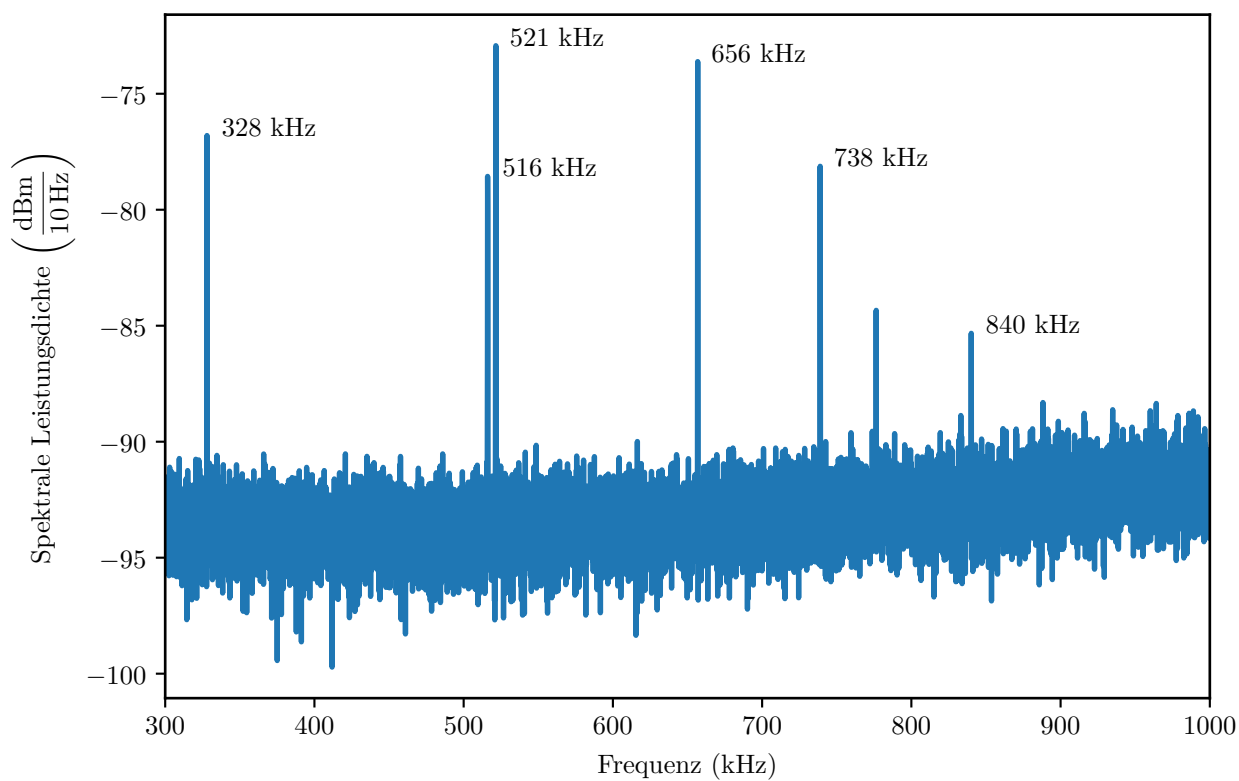
In Abbildung 2.1 sind die räumlichen Moden niedrigster Ordnung dargestellt. Der Index  $(i, j)$  gibt jeweils die Anzahl der Schwingungsbäuche in x- bzw. y-Richtung an. Abbildung 2.2 zeigt das Modenspektrum der Membran mit ausgeprägten Resonanzpeaks.

## 2.2 Gedämpfter harmonischer Oszillator

Eine Membranmode allein kann als gedämpfter harmonischer Oszillator mit der Eigenfrequenz  $\Omega_m$  beschrieben werden. Damit die kinetische Energie  $T$  der Membranmode der eines harmonischen Oszillators entspricht, wird der Mode eine effektive Masse  $m_{\text{eff}}$  zugeordnet.



**Abbildung 2.1:** Beispiele für die räumlichen Moden einer quadratischen Membran. Der Index  $(i, j)$  gibt jeweils die Anzahl der Schwingungsbäuche in x- bzw. y-Richtung an.



**Abbildung 2.2:** Modenspektrum einer stochiometrischen Membran von Norcada. Angegeben sind die Frequenzen der einzelnen Membranmoden.

Die kinetische Energie der Mode ist das Integral über alle Massenelemente:

$$T = \frac{1}{2} \int_m v_m^2 dm = \frac{1}{2} m_{\text{eff}} v^2. \quad (2.5)$$

Für eine quadratische Membran mit Dicke  $d$ , Kantenlänge  $L$ , Dichte  $\rho$  und Masse  $m_m$  ergibt sich

$$T = \frac{1}{2} d \rho v^2 \int_0^L \int_0^L \sin \left[ i \frac{\pi}{L} x \right] \sin \left[ j \frac{\pi}{L} y \right] dx dy = \frac{1}{2} d \rho v^2 \frac{L^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{m_m}{4} v^2, \quad (2.6)$$

und somit  $m_{\text{eff}} = \frac{1}{4} m_m$ .

Ein gedämpfter harmonischer Oszillator wird über die Differentialgleichung

$$m [\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \Omega^2 x(t)] = 0 \quad (2.7)$$

beschrieben. Dabei ist  $m$  die Masse,  $\Gamma$  die Dämpfungsrate und  $\Omega_0$  die Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Oszillators. Die Lösung ist eine exponentiell abfallende Schwingung

$$x(t) = A \exp \left( -\frac{\Gamma}{2} t \right) \sin (\Omega_d t + \phi) \quad (2.8)$$

mit der Frequenz  $\Omega_d = \sqrt{\Omega^2 - \Gamma^2/4}$ .

Wird die Mode von einer externen zeitabhängigen Kraft  $F_{\text{ext}}(t)$  getrieben, ergibt sich eine inhomogene Differentialgleichung:

$$m [\ddot{x}(t) + \Gamma \dot{x}(t) + \Omega^2 x(t)] = F_{\text{ext}}(t). \quad (2.9)$$

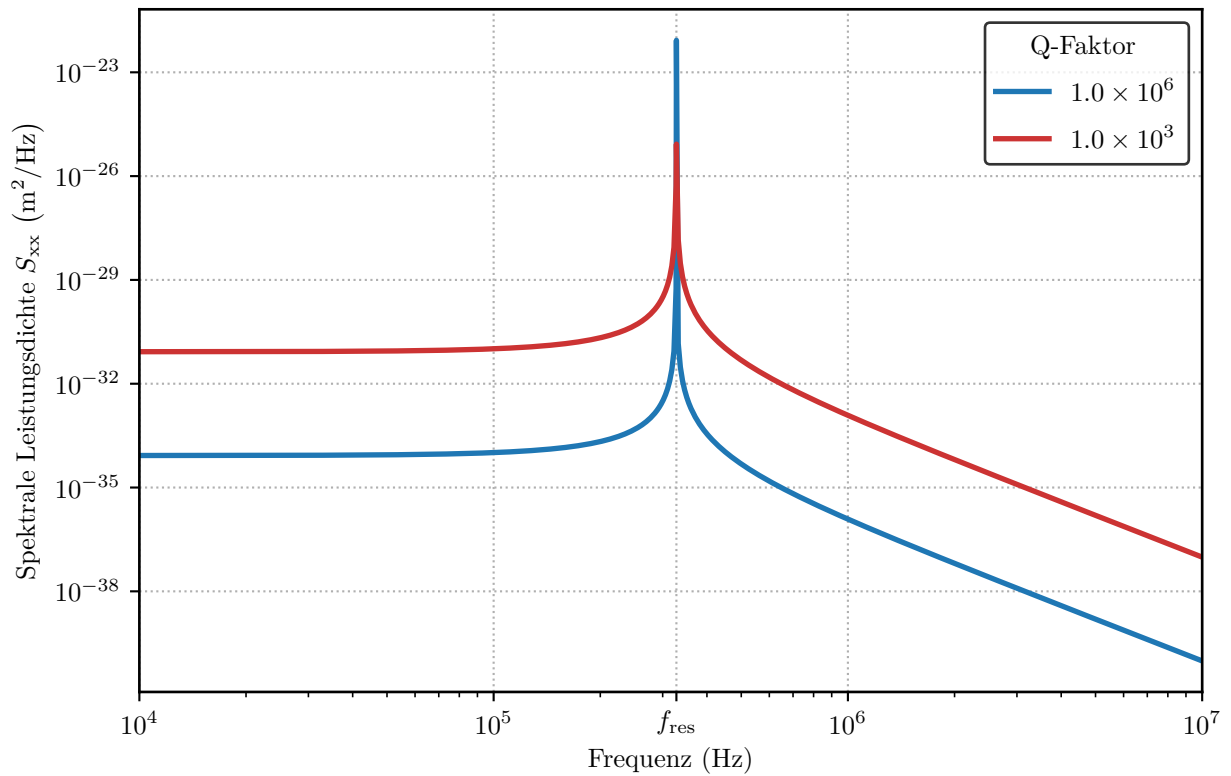
Diese lässt sich leicht über eine Fouriertransformation lösen. Im Frequenzraum ergibt sich damit die algebraische Gleichung

$$m [-\omega^2 x(\omega) - i\omega\Gamma x(\omega) + \Omega^2 x(\omega)] = F(\omega). \quad (2.10)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist durch

$$x(\omega) = \frac{F(\omega)}{m(\Omega^2 - \omega^2) - im\omega\Gamma} \equiv \chi(\omega) F(\omega) \quad (2.11)$$

gegeben. Hierbei gibt die mechanische Suszeptibilität  $\chi(\omega) \equiv [m(\Omega^2 - \omega^2) - im\omega\Gamma]^{-1}$  die



**Abbildung 2.3:** Spektrale Leistungsdichte zweier harmonischer Oszillatoren mit unterschiedlichem Gütefaktor  $Q$  bei Raumtemperatur. Je größer der Gütefaktor, desto höher reicht der Resonanzpeak. Insgesamt liegt die Kurve aber tiefer, da das Integral unter den zwei Kurven bei gleicher Temperatur identisch ist.

Antwort des Oszillators auf eine treibende Kraft mit der Kreisfrequenz  $\omega$  an.

## 2.3 Spektrale Leistungsdichte

Die mittlere Leistung  $P$  oder allgemeiner die Varianz  $\langle |x(t)|^2 \rangle$  eines stationären Prozesses  $x(t)$  ist durch

$$P = \langle |x(t)|^2 \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (2.12)$$

gegeben. Da die Fouriertransformierte für  $x(t)$  im Allgemeinen nicht existiert, betrachtet man zeitlich begrenzte Anteile

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & |t| \leq T \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Mit dem Satz von Plancherel

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.14)$$

lässt sich dies im Frequenzraum ausdrücken. Dabei definiert man die spektrale Leistungsdichte

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |x_T(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (2.15)$$

welche über das Wiener-Chintschin-Theorem mit der Autokorrelationsfunktion

$$r_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t + \tau) dt \quad (2.16)$$

verknüpft ist.

Das Fluktuations-Dissipations-Theorem verbindet die spektrale Leistungsdichte mit dem Imaginärteil der Suszeptibilität  $\chi(\omega)$  über

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2k_B T}{\omega} \text{Im}(\chi(\omega)), \quad (2.17)$$

wobei  $T$  die Temperatur und  $k_B$  die Boltzmann-Konstante ist.

Für einen harmonischen Oszillator ist

$$S_{xx}(\omega) = \frac{2k_B T}{m} \frac{\Gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \quad (2.18)$$

mit einem Maximum bei der Resonanzfrequenz

$$\Omega_r = \sqrt{\Omega^2 - \frac{\Gamma^2}{2}}. \quad (2.19)$$



Der Quotient aus der Resonanzfrequenz und der Halbwertsbreite  $\Delta\omega$

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\omega} \approx \frac{\Omega_r}{\Gamma} \quad , \quad \text{für } \Omega_r \gg \Gamma \quad (2.20)$$

bezeichnet man als Güte- oder Q-Faktor. Wenn die Dämpfung  $\Gamma$  deutlich geringer als die Resonanzfrequenz  $\Omega_r$  ist, lässt sich der Q-Faktor auch einfach als Verhältnis der beiden bestimmen.

In Abbildung 2.3 ist das Leistungsdichtespektrum zweier harmonischer Oszillatoren mit unterschiedlichen Q-Faktoren dargestellt. Mit größerem Q-Faktor wird der Peak schmaler und höher. Die Fläche unter der Kurve bleibt allerdings konstant, da sie nur von der Temperatur des Oszillators abhängt.

Mit

$$\frac{\pi}{2\Omega^2} = \int_0^\infty \frac{\Gamma}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} d\omega \quad (2.21)$$

lässt sich die Temperatur des Oszillators über das Integral der (einseitigen) spektralen Leistungsdichte

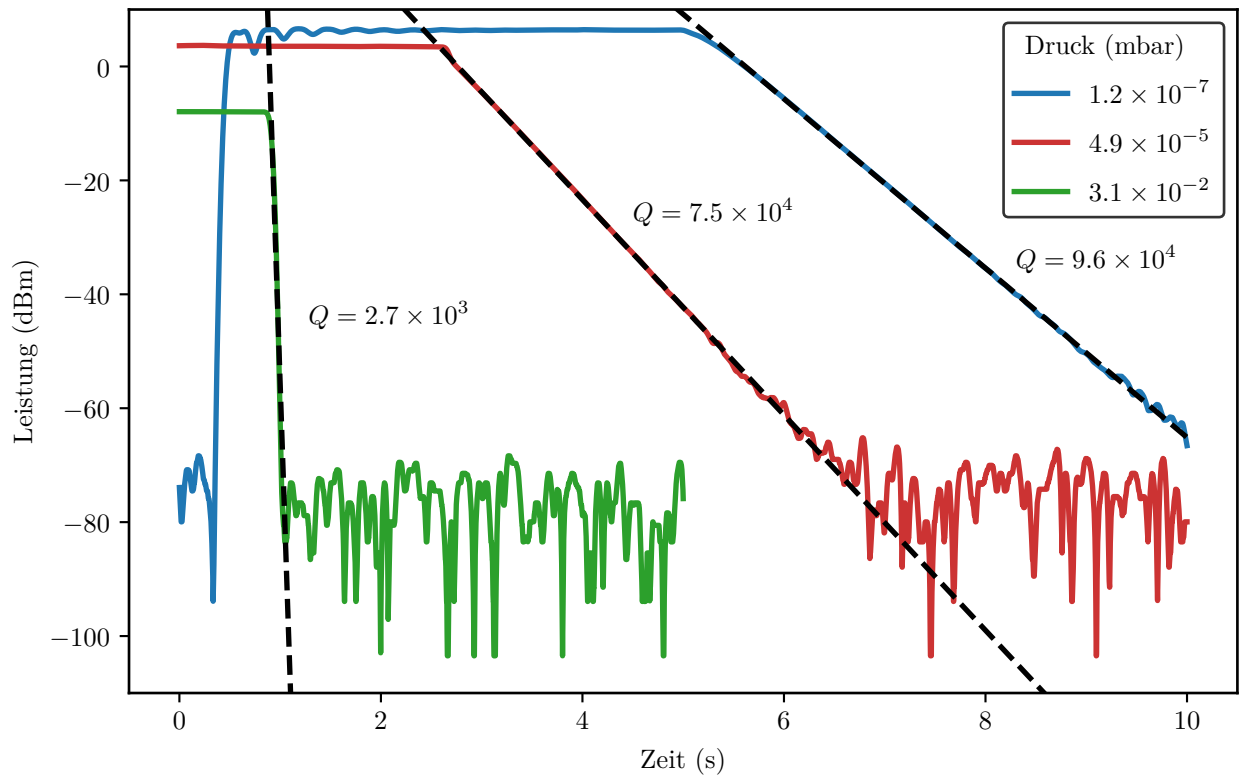
$$T = \frac{m\Omega^2}{\pi k_B} \int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega \quad (2.22)$$

ermitteln [1].

## 2.4 Ring-Down-Messung

Da bei hohem Q-Faktor der Resonanzpeak sehr schmal ist, wird es schwer den Q-Faktor über einen Fit an die gemessene spektrale Leistungsdichte zu bestimmen. Eine andere Möglichkeit hierfür ist allerdings die sogenannte Ring-Down- bzw. Abklingmessung. Hierbei wird der Oszillator zunächst angeregt und der Abfall der Amplitude oder der Leistung der gedämpften Schwingung über die Zeit gemessen. Die Zerfallszeit ist dabei proportional zum Q-Faktor, weshalb sich diese Technik für hohe Q-Faktoren gut eignet.

In Abbildung 2.4 sind Ring-Down-Messungen einer Membran bei unterschiedlichem Druck dargestellt. Hierbei wurde das zeitliche Abklingen der Leistung in dBm gemessen. In der logarithmischen Dezibel-Skala lässt sich die Dämpfungskonstante über einen linearen Fit bestimmen. Höherer Druck verursacht eine größere Dämpfung, weshalb der Q-Faktor mit kleinerem Druck ansteigt.



**Abbildung 2.4:** Ring-Down-Messung bei unterschiedlichem Druck des Restgases. Die Leistung der Membran ist logarithmisch aufgetragen. Mit sinkendem Druck steigt die Zeitkonstante des exponentiellen Zerfalls an, was einem höheren Q-Faktor entspricht. Die Resonanzfrequenz verschiebt sich zu höheren Frequenzen, da die Dämpfung durch das Restgas abnimmt.

### 3 Michelson-Interferometer

Um die Membranbewegung zu messen, wird ein Michelson-Interferometer verwendet. Der prinzipielle Aufbau solch eines Interferometers ist links in Abbildung 3.1 dargestellt.

Das Laserlicht mit Wellenlänge  $\lambda$  wird mittels eines Strahlteilers (ST) in zwei Interferometerarme aufgeteilt. Das Licht wird in den Armen an den Endspiegeln  $S_x$  und  $S_y$  reflektiert und die zwei rücklaufenden Strahlen werden am Strahlteiler wieder überlagert. Diese interferieren miteinander und das Interferenzsignal kann mit einer Photodiode detektiert werden.

Der Strahlteiler lässt sich mathematisch über eine Strahlteilermatrix beschreiben, die zwei einlaufende Lichtfelder  $a_1$  und  $a_2$  in zwei auslaufende Felder  $a_3$  und  $a_4$  überführt:

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{r}e^{i\phi_{13}} & \sqrt{t}e^{i\phi_{23}} \\ \sqrt{t}e^{i\phi_{14}} & \sqrt{r}e^{i\phi_{24}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Die Parameter  $r$  und  $t$  bezeichnen dabei die Reflektivität bzw. Transmittivität für die Leistung des einfallenden Lichts, mit  $t + r = 1$ . Aus der Energieerhaltung folgt, dass die Matrix unitär sein muss. Dies lässt sich durch die Bedingung ausdrücken, dass die der Phasenunterschied am Strahlteiler genau  $\pi$  ist:

$$(\phi_{13} + \phi_{24}) - (\phi_{14} + \phi_{23}) = \pi. \quad (3.2)$$

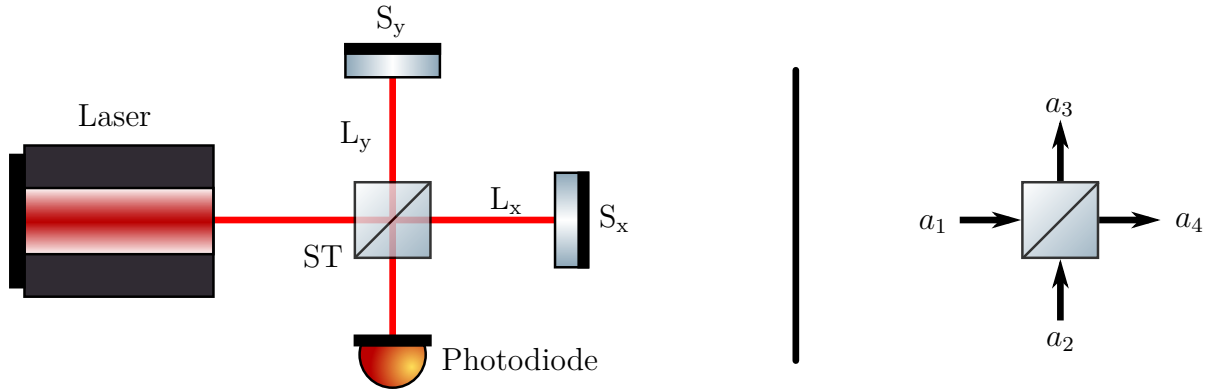
Dies ist mit der Wahl  $\phi_{13} = \phi_{24} = \pi/2$  und  $\phi_{14} = \phi_{23} = 0$  erfüllt. Die dazugehörige Matrix

$$\begin{pmatrix} i\sqrt{r} & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & i\sqrt{r} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ändert bei der Reflektion die Phase um  $\pi/2$ .

Für das Michelson-Interferometer mit einer einlaufenden Intensität  $|a_1|^2 = I_{\text{in}}$  und  $|a_2|^2 = 0$  ergeben sich die auslaufenden Felder  $a_3 = i\sqrt{r} \cdot a_1$  und  $a_4 = \sqrt{t} \cdot a_1$ . Diese akkumulieren beim Hin- und Rücklauf abhängig von der Armlänge  $L_{x/y}$  eine Phase  $e^{2ikL_{x/y}}$ , mit der Wellenzahl  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  und der Wellenlänge  $\lambda$  des Lasers und werden wieder am Strahlteiler überlagert:

$$\begin{pmatrix} a_{\text{back}} \\ a_{\text{out}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sqrt{r} & \sqrt{t} \\ \sqrt{t} & i\sqrt{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\sqrt{r}e^{2ikL_y} \cdot a_1 \\ \sqrt{t}e^{2ikL_x} \cdot a_1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$



**Abbildung 3.1: Links:** Aufbau eines Michelson-Interferometers. Der Strahlteiler teilt den ankommenden Laserstrahl in zwei Teilstrahlen, welche von den beiden Endspiegeln reflektiert und am Strahlteiler erneut überlagert werden. Eine Photodiode misst die Intensität im Ausgangsport des Interferometers. **Rechts:** Mathematische Beschreibung eines Strahlteilers mit den einlaufenden Felder  $a_1$  und  $a_2$  und den auslaufenden Felder  $a_3$  und  $a_4$

Hierbei ist  $a_{\text{back}}$  das Feld, welches zum Laser zurück läuft und  $a_{\text{out}}$  das Feld, dessen Intensität mit der Photodiode gemessen wird. Die Intensitäten der beiden Felder sind

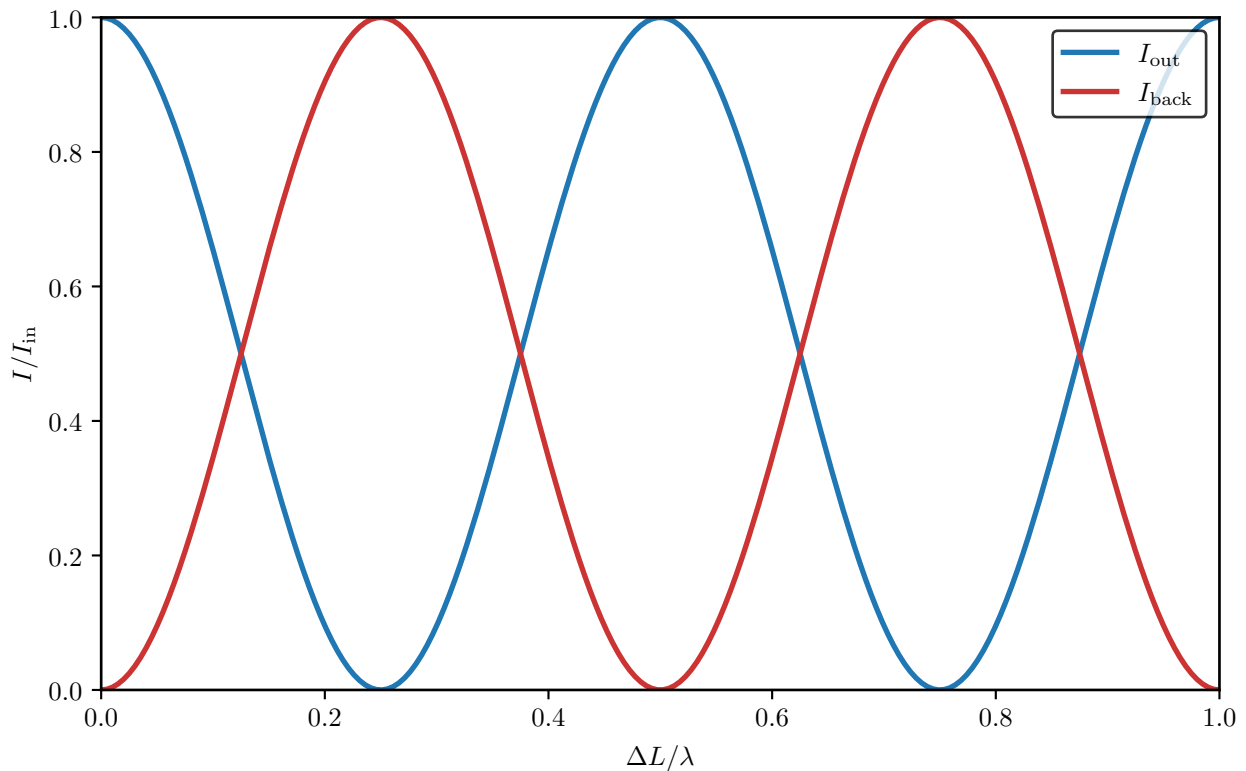
$$I_{\text{out}} = 2rt \cdot I_{\text{in}} \left[ 1 + \cos \left( 2\pi \frac{2\Delta L}{\lambda} \right) \right] = 4rt \cdot I_{\text{in}} \cos^2 \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \quad (3.5)$$

$$I_{\text{back}} = I_{\text{in}} \left[ r^2 + t^2 - 2rt \cos \left( 2\pi \frac{2\Delta L}{\lambda} \right) \right], \quad (3.6)$$

wobei  $\Delta L = L_x - L_y$  der Armlängenunterschied ist. Der Cosinus-Term der beiden Ausdrücke hat einen Phasenunterschied von  $\pi$ , was Energieerhaltung gewährleistet, da die Summe der beiden Intensitäten der einlaufenden Intensität  $I_{\text{in}}$  entspricht. Um auf der Photodiode ein gutes Signal messen zu können, sollte die maximale Intensität möglichst hoch sein, also der Faktor  $2rt$  so groß wie möglich. Dies ist für  $r = t = 1/2$  der Fall und es ergibt sich:

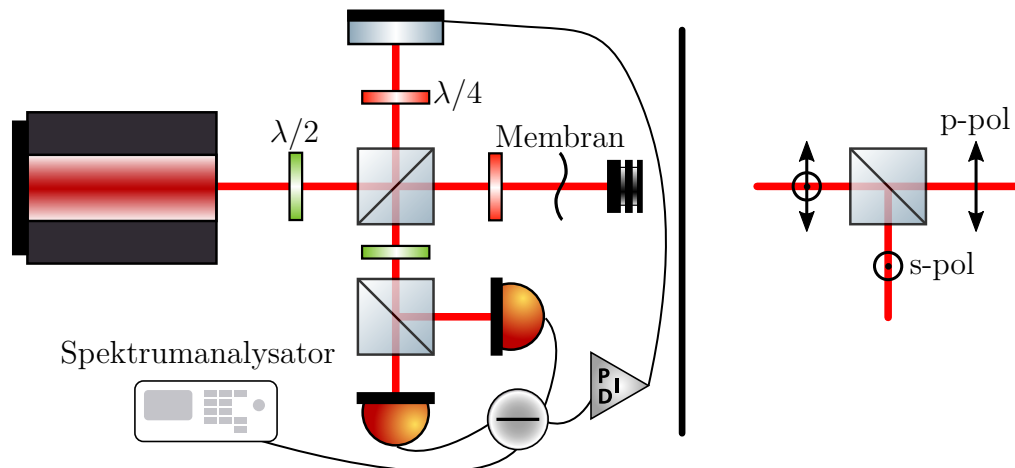
$$\begin{aligned} 2rt &= \frac{1}{2} \\ I_{\text{out}} &= I_{\text{in}} \cos^2 \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right) \\ I_{\text{back}} &= I_{\text{in}} \sin^2 \left( 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

In [Abbildung 3.2](#) ist der Intensitätsverlauf für diesen Fall dargestellt. Für  $\frac{\Delta L}{\lambda} = 0.25$  tritt



**Abbildung 3.2:** Intensität in beiden Ausgängen des Michelson-Interferometers in Abhängigkeit des Armlängenunterschieds  $\Delta L$ . Aus Energieerhaltungsgründen sind die beiden Kurven gerade um eine Viertelwellenlänge phasenverschoben und addieren sich genau zu eins.

destruktive Interferenz am Ausgang auf. Dies wird auch Dark-Fringe genannt. Für  $\frac{\Delta L}{\lambda} = 0.5$  tritt hingegen konstruktive Interferenz auf. Dies wird auch Bright-Fringe genannt. In der Mitte bei  $\frac{\Delta L}{\lambda} = 0.375$  ist die Intensität gerade die Hälfte der maximalen Intensität. Dies nennt man auch Mid-Fringe. An dieser Stelle ist die Steigung am größten, weshalb schon kleine Änderungen des Weglängenunterschieds und damit der relativen Phase in eine große Intensitätsänderung übersetzt werden. Deshalb ist es für die Messung kleiner Weglängenänderungen notwendig, das Interferometer mit einem Regelkreis auf diese Bedingung zu stabilisieren. Um die Bewegung einer Membran zu messen, wird der Endspiegel  $S_x$  des Interferometers durch die Membran ersetzt. Kleine Weglängenänderungen durch die Schwingung der Membran werden dann durch das Interferometer in eine Intensitätsmodulation übersetzt.



**Abbildung 3.3: Links:** Aufbau des Michelson-Interferometers mit polarisierenden Strahlteilers für diesen Versuch. Mit einem polarisierenden Strahlteiler in Kombination mit einer Halbwellenplatte ( $\lambda/2$ ) lässt sich das Aufteilungsverhältnis beliebig variieren und somit der Lichtverlust an der Membran kompensieren. Um die zwei senkrecht polarisierten Ausgangsstrahlen am ersten Strahlteiler zur Interferenz zu bringen, wird ein zweiter Strahlteiler und eine Halbwellenplatte benötigt, welche die Polarisation um  $45^\circ$  dreht. **Rechts:** Funktionsweise eines polarisierenden Strahlteilers: Der p-polarisierte Anteil des Lichts wird transmittiert, der s-polarisierte reflektiert.

### 3.1 Michelson-Interferometer mit polarisierendem Strahlteiler

Da die zu messende Membran kein optimaler Spiegel ist und nur eine Reflektivität von  $R < 10\%$  aufweist, wird in diesem Versuchsaufbau ein Interferometer mit polarisierenden Strahlteilern verwendet. Mit einem polarisierenden Strahlteiler in Kombination mit einer Halbwellenplatte ( $\lambda/2$ ) lässt sich das Aufteilungsverhältnis beliebig variieren. Wie in 3.3 rechts dargestellt, ist die einlaufende Polarisation eine Linearkombination aus s- und p-polarisiertem Licht. Der p-polarisierte Anteil wird vom Strahlteiler transmittiert, der s-polarisierte reflektiert. Mit einer Halbwellenplatte kann nun die einlaufende Polarisation so gedreht werden, bis das richtige Teilungsverhältnis erreicht ist. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 3.3 links dargestellt. Mit dem ersten Strahlteiler wird der einlaufende Strahl so in die zwei Interferometerarme aufgeteilt, dass die reflektierten Strahlen die gleiche Intensität haben. Damit diese Strahlen nicht wieder in den Eingangsport zurück laufen wird in jedem Arm jeweils eine Viertelwellenplatte ( $\lambda/4$ ) verwendet. Mit dieser kann lineare

Polarisation in zirkulare umgewandelt werden. Bei zweimaligem Durchgang wird deshalb die lineare Polarisation gerade um  $90^\circ$  gedreht und die reflektierten Strahlen verlassen den Strahlteiler am Ausgang. Allerdings können diese Strahlen nicht interferieren, wenn ihre Polarisationen senkrecht zueinander sind. Deshalb wird mit einer zweiten Halbwellenplatte die Polarisation um  $45^\circ$  gedreht und mit einem zweiten polarisierenden Strahlteiler gleichmäßig in zwei Arme aufgeteilt. In jedem Arm haben die beiden Teilstrahlen jetzt die gleiche Polarisation und können interferieren. Als Messsignal wird dann die Differenz der beiden Photodiodenströme verwendet, da hiermit gut ein Regelkreis, wie in Abschnitt [4.1](#) beschrieben, genutzt werden kann

## 4 Mess- und Regelelektronik

In diesem Kapitel soll die für den Versuch benötigte DC-Regelung der Spiegelposition erläutert und eine Einführung in den Umgang mit einem Spektrumanalysator gegeben werden.

### 4.1 DC-Regelung des Spiegelpiezos

Um die maximale Sensitivität des Interferometers zu erhalten, muss dieses auf die Mid-Fringe-Bedingung geregelt werden. Hierzu wird die Spiegelposition des Endspiegels im Referenzarm mit einem Piezoaktuator gesteuert. Die Regelung geschieht dabei mit Hilfe eines Proportional-Integral-Reglers (PI). Dieser benötigt ein Fehlersignal, welches auf null geregelt wird. Hierfür wird das Differenzsignal der Photodioden verwendet, welches bei der Mid-Fringe Bedingung schon bei 0 V liegt. Der Proportionalterm des Reglers gibt dabei ein Regelsignal aus, welches proportional zum Fehlersignal ist. Die Proportionalitätskonstante kann dabei über den sogenannten Gain eingestellt werden. Der Integralterm des Reglers integriert das Fehlersignal mit einer bestimmten Frequenz und gibt dann ein Regelsignal, welches proportional zum Integral ist. Deshalb ist der I-Regler sehr genau, aber dafür langsamer als der P-Regler. Das Regelsignal des PI-Reglers wird dann über einen HV-Verstärker verstärkt und an den Piezo gegeben. Mit dem PI-Regler werden Störungen durch Vibrationen und thermische Drifts bis ca. 1.2 kHz ausgeglichen, wodurch die Membranbewegung bei höheren Frequenzen von einigen 100 kHz mit maximaler Sensitivität gemessen werden kann. Das hochpassgefilterte AC-Signal der Photodioden enthält die Information über die Membranbewegung und wird mittels eines Spektrumanalysators ausgelesen.

### 4.2 Spektrumanalysator

Ein Spektrumanalysator dient der Messung und Darstellung eines Signals im Frequenzraum, das heißt die Stärke des Signals wird gegenüber der Frequenz auf der x-Achse aufgetragen. Er ist das Analogon eines Oszilloskops, welches das Signal im Zeitbereich darstellt. Um einen möglichst großen Signalbereich zu umfassen, wird das Signal meistens in Bel(B), also logarithmisch angegeben. Die Bel-Skala gibt dabei das Verhältnis  $Q$  der Messgröße  $P$



zu einem Referenzwert  $P_0$  an und ist definiert durch:

$$Q = \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ B} = 10 \log_{10} \left( \frac{P}{P_0} \right) \text{ dB.} \quad (4.1)$$

Geläufiger ist allerdings die Verwendung des Dezibel (dB) welches  $\frac{1}{10}$  Bel entspricht. Bei der Verwendung des Bels muss der Referenzwert  $P_0$  mit angegeben werden. Deshalb verwendet man häufig genormte Bezugswerte, die als Anhängsel an die Einheit geschrieben werden. Für Leistungen wird meist als Referenz  $P_0 = 1 \text{ mW}$  benutzt, was dann durch die Angabe dBm klar gemacht wird. Für Spannungen wird oft  $P_0 = 1 \text{ V}$  benutzt, was dann als dBV verdeutlicht wird.

Ein Spektrumanalysator kann die Frequenz nicht unendlich gut auflösen und nur bei genau einer Frequenz messen, sondern hat einen Frequenzfilter mit veränderlicher Bandbreite. Dies ist die Auflösungsbandbreite oder Resolution Bandwidth (RBW). Innerhalb der RBW wird die Leistung aufintegriert. Je kleiner die RBW, desto feiner können Frequenzen aufgelöst werden, was allerdings zu einer erhöhten Messzeit führt. Wählt man eine höhere RBW, kann diese Zeit verringert werden. Allerdings steigt dann auch das Rauschlevel an, da für einen Datenpunkt dann die Rauschleistung in einem größeren Frequenzband aufsummiert wird.

# 5 Versuchsdurchführung

Für die Versuchsdurchführung ist ein USB-Stick zur Datenaufnahme mitzubringen.

## 5.1 Aufbau

Zunächst soll ein Michelson-Interferometer wie in Abbildung 3.3 aufgebaut werden. Die Membran befindet sich dabei in einer Vakuumkammer.

Als erstes wird der Laserstrahl nach dem ersten polarisierenden Strahlteiler mit einer Linse ( $f=75\text{ mm}$ ) fokussiert und über zwei Spiegel so auf die Membran justiert, dass der reflektierte Strahl nahezu in sich zurückläuft und am Strahlteiler reflektiert werden kann. Die Membran steht dabei im Fokus der Linse. Da das Glasfenster der Kammer keine Antireflexbeschichtung hat, wird hier ebenfalls ein Teil des Lichtes reflektiert. Deshalb sollte der Laser unter einem kleinen Winkel auf die Scheibe treffen, damit der Glasreflex und der von der Membran reflektierte Strahl räumlich getrennt werden. So kann der Glasreflex durch eine Blende blockiert werden und stört das Messsignal nicht. Um die Membran optimal im Zentrum zu treffen, kann die Leistung des transmittierten Strahls mithilfe eines Leistungsmessers maximiert werden.

Als nächstes wird der zweite Arm des Interferometers aufgebaut. Der Endspiegel kann hier über einen Piezokristall in Laserstrahlrichtung über einige Mikrometer verfahren werden. Zur Justage wird ebenfalls wieder ein Spiegelpaar verwendet. Hiermit wird der Laserstrahl so justiert, dass er nahezu in sich zurückläuft um dann am Strahlteiler transmittiert zu werden. Am Ausgang des Strahlteilers werden jetzt die beiden Strahlen genau überlagert. Dazu verwendet man nur das Spiegelpaar des Referenzarmes, da ansonsten die Justage auf die Membran wieder zunichte gemacht wird. Zur Überlagerung betrachtet man die Strahlen an zwei Punkten, die weit auseinander liegen und passt den Winkel und die Position des Referenzstrahls so an, dass die Strahlen an beiden Punkten aufeinander liegen.

Danach platziert man den zweiten polarisierenden Strahlteiler zusammen mit der Halbwellenplatte. Anschließend werden die Strahlen mit Linsen ( $f=25\text{ mm}$ ) auf zwei Photodioden fokussiert.

Jetzt sollten noch einmal die Einstellungen der Wellenplatten überprüft werden. Die Viertelwellenplatten müssen so eingestellt werden, dass das Licht der beiden reflektierten Strahlen am Ausgang des ersten polarisierenden Strahlteilers maximiert wird. Danach wird mit

der Halbwellenplatte vor dem ersten Strahlteiler die Aufteilung auf die Interferometerarme so eingestellt, dass am Ausgang des Strahlteilers die Leistung beider Arme gleich ist. Anschließend wird über die Halbwellenplatte vor dem zweiten Strahlteiler die Polarisierung so eingestellt, dass ein reflektierter Strahl gleich auf beide Photodioden aufgeteilt wird. Dazu blockiert man am besten den Referenzstrahl.

Nun fährt man den Referenzspiegel mit einem Dreieckssignal vor und zurück. Am Differenz-Ausgang der Photodioden sollte jetzt ein Interferenzsignal wie in Abbildung 3.2 zu sehen sein, dass symmetrisch um den Nullpunkt liegt. Hierauf wird dann der Referenzspiegel geregelt.

Die Kammer wird über eine Turbopumpe abgepumpt. Mit einem Schieberventil zwischen Pumpe und Kammer kann später der Druck in der Kammer variiert werden. Schließt man das Ventil etwas, wird die effektive Pumprate verringert und es stellt sich mit der Ausgasrate der Kammer ein größerer Gleichgewichtsdruck ein.

## 5.2 Messung

Mithilfe des Spektrumanalysators am AC-Ausgang der Photodioden werden jetzt mehrere Messungen an mindestens zwei Membranmoden durchgeführt:

1. Übersichtsmessung mit allen sichtbaren Membranmoden
2. Detailmessungen der Mode bei verschiedenen Drücken mit kleinster RBW
3. Ring-Down-Messungen zur Q-Faktorbestimmung bei ca. 10-15 verschiedenen Drücken (ca. 2 pro Decade)
4. Messung der Mode mit großer RBW zur Temperaturbestimmung mit Kalibrationsmessung des Interferometers

Zur Kalibration nutzt man die bekannte Wellenlänge des Lasers (660 nm) als Referenz.

## 5.3 Protokoll

In der Auswertung des Protokolls soll folgendes enthalten sein:

1. Übersichtsmessung der Moden mit Beschriftung der Mode und Frequenz

2. Bestimmung der Kalibrationskonstante in  $\text{m/V}$
3. Bestimmung der Membrantemperatur mit Gleichung (2.22)
4. Vergleichsbild einer Mode bei verschiedenen Drücken
5. Beispiel einiger Ring-Down-Messungen
6. Bestimmung der Q-Faktoren der Moden bei verschiedenen Drücken

# Literatur

- [1] Philipp Christoph. „Feedback-assisted sympathetic cooling in a hybrid atomic-mechanical system“. Diss. 2018.