讲义

1．设函数 $f(x)$ 的定义域为 R，若存在与 x 无关正常数 $M \le 2$，使 $|f(x)| \le M|x|$ 对一切实数 x 均成立，则称 $f(x)$ 为 F-函数，则下列函数中是 F-函数的有______（填序号）.

(1) $f(x)=e^x$

(2) $f(x)=\ x^2$

(3) $f(x)=\sqrt{2}x(\sin x+\cos x)$

(4) $f(x)=\dfrac{x}{x+\frac{1}{x}+1}$

(5) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

(6) $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且满足对一切实数 x_1， x_2，均有 $|f(x_1)-f(x_2)| \le 2|x_1-x_2|$.

2.（2016 浙江理数 18）设 $a \ge 3$，函数 $F(x)=\min\{2|x-1|, x^2-2ax+4a-2\}$，其中 $\min\{p，q\}=\begin{cases} p，p \le q \\ q，p > q \end{cases}$

（Ⅰ）求使得等式 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围

（Ⅱ）（i）求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$

（ii）求 $F(x)$ 在 $[0,6]$ 上的最大值 $M(a)$

3. 已知 $x,y,z \in R^+$， $x-2y+3z=0$，则 $\dfrac{y^2}{xz}$ 的最小值是 ________________ .

4．设 $a,b,c>0, a(a+b+c)+bc=4+2\sqrt{3}$，求 $2a+b+c$ 的最小值.

5．设 $a,b>0, a+b=1$, 求 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})$ 的最小值.

6．设 $a>b>0$，求 $a^2+\dfrac{16}{b(a-b)}$ 的最小值.

7．设 $a,b>0, a+2b=1$, 求 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}$ 的最小值.

8．设 $a,b>0,a+b+ab=3,$ 求

（1）$a+b$ 的最小值；

（2）$a+2b$ 的最小值.

9．设 $x,y,z>0$，求证：$(\frac{y}{x}+\frac{z}{x})(\frac{x}{y}+\frac{z}{y})(\frac{x}{z}+\frac{y}{z})\geq 8$.

10.若 x,y,z 均为正实数，且 $x^2+y^2+z^2=1$，则 $S=\frac{(z+1)^2}{2xyz}$ 的最小值为________

11.（2017 清华）设正实数 x, y, z, w 满足 $\begin{cases} x-2y-z+2w=0, \\ 2yz-wx=0, \\ z\geqslant y, \end{cases}$ 则 $\frac{z}{y}$ 的最小值________.

A. $6+\sqrt{2}$　　B. $6+2\sqrt{2}$　　C. $6+3\sqrt{2}$　　D. $6+4\sqrt{2}$

12.（浙大）已知 $x>0, y>0, a=x+y, b=\sqrt{x^2+xy+y^2}, c=m\sqrt{xy}$.问是否存在正数 m 使得对于任意正数 x,y 可使 a,b,c 为一个三角形的三条边？如果存在，求出 m 的取值范围；如果不存在，请说明理由.

13．已知 $\boldsymbol{A>a>0}$，且 $|\boldsymbol{ax^2+bx+c}|\leq|\boldsymbol{Ax^2+Bx+C}|$ 对任意的 $\boldsymbol{x\in R}$ 成立，求证：

$|\boldsymbol{b^2-4ac}|\leq|\boldsymbol{B^2-4AC}|$.

1. 已知$a>1$，设函数$f(x)=a^x+x-2$的零点为 m，$g(x)=\log_a x+x-2$的零点为 n，则$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$的取值范围是(　　)

A. $(2,+\infty)$　　B. $(\frac{7}{2},+\infty)$　　C. $(4,+\infty)$　　D. $(\frac{9}{2},+\infty)$

2. 已知函数$f(x)=|\log_3(x-1)|-\left(\frac{1}{3}\right)^x-1$，有 2 个不同的零点$x_1$、$x_2$，则(　　)

A. $x_1\cdot x_2<1$　　B. $x_1\cdot x_2=x_1+x_2$

C. $x_1\cdot x_2>x_1+x_2$　　D. $x_1\cdot x_2<x_1+x_2$

3. 已知函数$f(x)=\log_a(4-ax)(a>0$，且$a\neq 1)$在$[0,1]$上是减函数，则 a 取值范围是_________.

4. 若函数$f(x)$在其定义域内存在实数x_0，使得$f(-x_0)=-f(x_0)$成立，则函数$f(x)$具有“类奇性”.已知函数$f(x)=2^x-3a(\sqrt{2})^x-2$在 R 上具有“类奇性”，则 a 的取值范围是(　　)

A. $[-\frac{1}{3},+\infty)$　　B. $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　C. $(-\infty,\frac{\sqrt{2}}{3})$　　D. $[-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{3}}{6})$

5. 设函数$f(x)$是定义在 R 上的偶函数，对任意$x\in R$，都有$f(x)=f(x+4)$，且当$x\in[-2,0]$时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$，若在区间$(-2,6)$内关于 x 的方程$f(x)-\log_{a}(x+2)=0(a>1)$恰有三个不同的实数根，则 a 的取值范围是(　　)

A. $(\sqrt{3},0)$　　B. $(\sqrt[3]{4},2)$　　C. $[\sqrt[3]{4},2)$　　D. $((\sqrt[3]{4},2]$

6. 已知定义在 R 上的函数$f(x)$满足$f(2-x)=f(x)$，且当$x\geq1$时，$f(x)=\lg(x+\frac{1}{x})$

(1)求$f(-1)$的值；

(2)解不等式$f(2-2x)<f(x+3)$；

(3)若关于 x 的方程$f(x)=\lg(\frac{a}{x}+2a)$在$(1,+\infty)$上有解，求实数 a 的取值范围.

7. 已知函数$f(x)=\log_{9}(9^{x}+1)+kx(k\in\mathbf{R})$是偶函数.

(1)求 k 的值；

(2)若函数$y=f(x)$的图象与直线$y=\frac{1}{2}x+b$没有交点，求 b 的取值范围；

(3)设$h(x)=\log_{9}\left(a\cdot3^{x}-\frac{4}{3}a\right)$，若函数$f(x)$与$h(x)$的图象有且只有一个公共点，求实数 a 的取值范围.

8. 已知函数$f(x)=\begin{cases}x^{2}+(4a-3)x+3a, x<0\\ \log_{a}(x+1)+1, x\geq0\end{cases}(a>0且a\neq1)$在$\mathbf{R}$ 上单调递减.

(1)求参数 a 的取值范围；

(2)请画出$y=|f(x)|$的示意图，若关于 x 的方程$|f(x)|=2-\frac{x}{3}$恰有两个不相等的实数解，请根据图象说明 a 的取值范围.

1．设点O在ΔABC内部，且有$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\Delta ABC$的面积与$\Delta AOC$的面积的比为____________.

2. ΔABC的外接圆的圆心为 O，两条边上的高的交点为 H，$\overrightarrow{OH}=m(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，则实数 m =_______.

3.已知向量$\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(-2,0)$.

（1）若$\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0})$，当$t\in\left[-\sqrt{3},2\right]$时，求$\left|\boldsymbol{a}-t\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\right|$的取值范围；

（2）若$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}|$，求$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{c}$的最大值及$<\boldsymbol{c}-\dfrac{\boldsymbol{b}}{2},\boldsymbol{c}>$的最大值.

4.已知向量$\vec{a}\neq\vec{e}$，$|\vec{e}|=1$，对任意 $t\in\mathrm{R}$，恒有$|\vec{a}-t\vec{e}|\geqslant|\vec{a}-\vec{e}|$，则（　　）

(A) $\vec{a}\perp\vec{e}$　(B) $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　(C) $\vec{e}\perp(\vec{a}-\vec{e})$　(D) $(\vec{a}+\vec{e})\perp(\vec{a}-\vec{e})$

5. 设O为ΔABC内一点，$|\overrightarrow{OA}|=5,|\overrightarrow{OB}|=4,|\overrightarrow{OC}|=3$，且$\angle AOB=150^\circ$，$\angle AOC=120^\circ$，$\overrightarrow{OA}=m\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{OC}$，试求实数$m,n$的值.

6. C 为圆心角为120°半径为 1 的扇形 AOB 的弧上的动点，$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}\ (x,y\in\mathrm{R})$，求$x+y$的最大值.

7.已知函数$f(x)=\dfrac{\sin x}{2+\cos x}$．则（　　）

（1）函数$f(x)$的图像关于$(\pi,0)$成对称中心

（2）$f(x)\geq\dfrac{\sin x}{3}$

（3）$|f(x)|\leq|x|$

（4）$|f(x)|\leq\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

8.已知函数$f(x)=\sin x\sin 5x-a$在$[0,\pi)$上有唯一的零点．求a的值.

9.已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})+\cos(\omega x-\dfrac{\pi}{6})(\omega>0)$的最小正周期为$\pi$

（1）求其单调减区间，对称轴和对称中心；

（2）作出该函数在一个周期内的简图；

（3）关于 x 的方程 $f(x)-2|f(x)|+k=0$ 在 $[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$ 内有三个不同的实数解，求实数 k 的取值范围；

（4）若不等式 $|f(x)+Ax+B|\le 3$ 对 $\forall x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$ 恒成立，求常数 A,B 的值.

10. 已知函数 $f(x)=\sin x\sin 2x$，则（　　）

（A）方程 $f(x)=\frac{7}{9}$ 有解　　（B）方程 $f(x)=a$ 在 $[0,2\pi)$ 内解的个数是偶数

（C）$f(x)$ 的图象有对称轴　　（D）$f(x)$ 的图象有对称中心

11. 在△ABC 中，若 $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin B\sin C$，则（　　）

（A）$A=2B$　　（B）$A=3B$

（C）$A<\frac{\pi}{3}$　　（D）$B<\frac{\pi}{3}$

12. 设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c．若 $\begin{cases} a+c=\sqrt{3}, \\ b\cos C+(a+c)(b\sin C-1)=0, \end{cases}$ 则

（A）$B=\frac{\pi}{3}$　　（B）$B=\frac{\pi}{4}$

（C）△ABC 面积的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{16}$　　（D）△ABC 周长的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$