И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ ВУЗОВ

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника и практикума для студентов высших учебных заведений, обучающихся по гуманитарным направлениям и специальностям

Книга доступна на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Москва • Юрайт • 2022

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С28

Авторы:

Седых Ирина Юрьевна, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, заместитель заведующего кафедрой по учебно-методической работе;

Гребенщиков Юрий Борисович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации;

Шевелев Александр Юрьевич, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики-2 Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, заместитель заведующего кафедрой по научной работе.

Рецензент:

Чечкин А. В. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Департамента математики и информатики Финансового университета при Правительстве Российской Федерации.

Седых, И. Ю.

С28 Высшая математика для гуманитарных направлений : учебник и практикум для вузов / И. Ю. Седых, Ю. Б. Гребенщиков, А. Ю. Шевелев. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 443 с. — (Высшее образование). — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-534-04161-3

Учебник написан на основе курсов лекций, читаемых авторами на различных факультетах Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Книга охватывает основные разделы высшей математики, которые изучаются студентами, специализирующимися в области гуманитарных наук. Кроме систематизированного элементарного изложения теоретического материала по каждой теме приведено большое число примеров разного уровня сложности и задач для самостоятельного решения.

Учебник поможет всем желающим приобрести основы математических знаний, необходимые для решения задач в профессиональной области, научиться применять математические методы для решения профессиональных задач.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-534-04161-3

Оглавление

Раздел II
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Раздел III
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Предисловие

Данный учебник разработан для учебного и методического обеспечения организации и проведения учебного процесса по направлениям подготовки «Государственное и муниципальное управление», «Политология», «Социология», «Туризм» по программе подготовки бакалавра в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО).

Дисциплина «Математика» под тем или иным названием («Высшая математика» и т.п.) входит в базовую часть основной образовательной программы подготовки бакалавров (математический и естественнонаучный цикл).

Преподавание дисциплины «Математика» студентам, обучающимся по вышеперечисленным направлениям, имеет ряд особенностей, на которые стоит обратить внимание. Прежде всего это широта круга охватываемых вопросов в течение ограниченного промежутка времени. Ситуация осложняется еще и тем, что дисциплина преподается в первом семестре первого курса, т.е. студентам — вчерашним школьникам.

Все это требует от преподавателя больших усилий по организации и проведению учебного процесса. И надо помнить, что цель изучения дисциплины «Математика» (как и других дисциплин математического цикла) — научить студентов учиться, т.е. находить, воспринимать и использовать в своей будущей профессиональной деятельности необходимую информацию. А источников этой информации в современной ситуации достаточно много (как традиционных, так и новейших и инновационных).

Учебник содержит материалы, необходимые как для преподавателей, так и для студентов. Он включает в себя четыре раздела: «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Основы дискретной математики», «Математический анализ», «Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы». Каждый раздел начинается с перечисления компетенций (знаний, умений и навыков), которые должны приобрести обучаемые в результате его изучения. Затем излагается теоретический материал, снабженный большим количеством решенных примеров разного уровня сложности. Авторы сознательно постарались минимизировать (без ущерба для логики изложения) число доказательств утверждений, приводимых в пособии. Кроме того, авторы учли важное значение самостоятельного изучения учебного материала, поэтому после теоретической части приведены контрольные вопросы, позволяющие студентам в порядке самоконтроля оценить уровень усвоения теоретического материала. Потом предлагается некоторое «руководство к решению задач» — практикум, включающий разнообразные разобранные задачи, названные упражнениями (для отличия от примеров, разобранных по тексту главы). В конце каждой главы находятся задачи для самостоятельного решения, ответы к которым приведены в конце пособия.

В основе издания лежат курсы лекций, читаемых авторами по дисциплинам математического цикла по соответствующим направлениям подготовки в Финансовом университете при Правительстве Российской Федерации. Раздел «Элементы аналитической алгебры и аналитической геометрии» разработан Ю. Б. Гребенщиковым, разделы «Основы дискретной математики» и «Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы» написаны И. Ю. Седых, раздел «Математический анализ» — А. Ю. Шевелевым.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов, обучающихся по программам академического бакалавриата, но может быть использовано и для программ прикладного бакалавриата, при обучении слушателей бизнес-школ, колледжей, также для программ повышения квалификации. Данное пособие поможет всем желающим приобрести основы математических знаний.

В совокупности с дисциплинами базовой части математического и естественнонаучного цикла дисциплин ФГОС ВО освоение данного курса способствует формированию следующих компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- знание основных положений, законов и методов естественных наук и математики, умение на их основе представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира;
- способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат;
- способность использовать основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

После освоения курса студент должен:

знать

- основы математики, необходимые для решения задач в профессиональной области;
- определения, теоремы, подходы к решению задач из основных разделов высшей математики; теории вероятностей и математической статистики;

уметь

- применять методы математического анализа и моделирования социальных процессов;
- применять математические методы для решения профессиональных задач;

владеть

- навыками научного анализа социальных проблем и процессов;
- навыками практического использования базовых знаний и методов математики и естественных наук;
- навыками применения современного математического инструментария для решения профессиональных задач;
- методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.

Раздел I
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Линейная алгебра — это часть алгебры, которая изучает в том числе такие математические объекты, как векторы, линейные пространства, матрицы, системы линейных уравнений. Методы и понятия линейной алгебры входят в число фундаментальных инструментов количественного анализа практически в любой сфере человеческой деятельности.

Теоретическое исследование любого процесса или объекта начинается с построения и изучения упрощенных моделей, которые описываются линейными зависимостями величин, линейными уравнениями, связывающими эти величины, лишь иногда выходя за рамки линейных соотношений. На последующих стадиях анализа исследователь получает все более сложную и подробную картину изучаемой системы, и для наглядной интерпретации полученных результатов ему часто приходится опять же упрощать какие-то детали процесса, сводя его описание к линейным (и простым нелинейным) формулам, а выводы — к четким рецептам. Можно сказать, что с использования методов линейной алгебры начинается изучение любого объекта и им же заканчивается. Умение составить правильный общий взгляд на исследуемый социально-экономический процесс особенно важно при выработке управленческих решений.

Учитывая вышесказанное, очевидно, что усвоение материала данного раздела способствует формированию следующих компетенций:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- способность выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

После освоения раздела I студент должен:

знать

- основные понятия и методы линейной алгебры и аналитической геометрии, необходимые как для решения конкретных профессиональных задач, так и для успешного изучения других математических дисциплин;

уметь

- применять методы линейной алгебры для решения профессиональных задач;

владеть

- навыками решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии.

Глава 1
ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

1.1. Векторы и векторные пространства

Одним из основных и начальных понятий линейной алгебры является понятие вектора. Напомним «школьное» понятие вектора как направленного отрезка. В отличие от числа (скаляра) вектор характеризуется не только величиной (длиной), но и направлением. Подчеркнем, что вектор не зависит от своего положения в пространстве: параллельный перенос вектора не меняет его. В соответствии с этим представлением вводятся следующие три операции над векторами.

Умножение вектора на число есть изменение длины вектора в указанное число раз (без изменения направления), если число положительное, и его дополнительный поворот в противоположную сторону, если это число отрицательное.

Сложение векторов происходит по следующему правилу. Векторы-слагаемые распологаются таким образом, чтобы начало каждого последующего вектора совпадало с концом предыдущего. Суммой векторов называется вектор, начало которого совпадает с началом первого, а конец — с концом последнего. Это правило часто называют *правилом треугольника*. Название имеет наглядный геометрический смысл, если слагаемых всего два: слагаемые векторы и вектор суммы образуют треугольник. Легко заметить, что сумма векторов не зависит от перестановки слагаемых, т.е. сложение векторов коммутативно:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Скалярным произведением двух векторов называют число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов не меняется при перестановке сомножителей. Векторы ненулевой длины, скалярное произведение которых равно нулю, называются ортогональными (угол между ними равен 90°). Нулевой вектор считается ортогональным к любому ненулевому.

Теперь напомним знакомое со школы алгебраическое описание векторов. Выберем в пространстве декартову систему координат, т.е. построим три пересекающиеся попарно ортогональные оси, точку пересечения которых назовем началом координат. Далее выберем отрезок, длину которого примем за единицу измерения, общую для всех трех осей. Теперь каждую точку пространства мы можем однозначно определить тремя числами — проекциями точки на каждую из координатных осей: $M = M(x, y, z)$. Эти числа назовем координатами точки. Любой вектор как направленный отрезок можно идентифицировать его начальной и конечной точками (с указанием, какая из них начальная). Координатами вектора называют разности соответствующих координат конечной и начальной точек. Так, если вектор $\vec{a}$ начинается в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и заканчивается в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ имеет координаты соответственно $a_x = x_2 - x_1$, $a_y = y_2 - y_1$ и $a_z = z_2 - z_1$. Очевидно, что при таком определении параллельный перенос вектора не меняет его координат. Длина вектора (его модуль) $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Теперь любой вектор в пространстве мы можем характеризовать тоже тремя числами, записанными в виде строки (или столбца): $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Операции над векторами, описанные выше, в координатном представлении имеют вид $\lambda\vec{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$; $\vec{a} + \vec{b} = (a_x,\ a_y,\ a_z) + (b_x, b_y, b_z) = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ и скалярное произведение двух векторов $\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Мы рассматривали векторы в нашем трехмерном пространстве. Если мы ограничимся векторами, лежащими в плоскости, то каждый из них можно определить уже только двумя координатами: $\vec{a} = (a_x, a_y)$. При описании же векторов, лежащих только на заданной прямой, можно обойтись только одной координатой (правда, в последнем случае можно обойтись вообще без понятия вектора и работать только со скалярами). Замечаем, что теперь при проведении любых операций с векторами мы можем отвлечься от их геометрической интерпретации. Мы будем работать с табличками (вектор-строками или вектор-столбцами) по правилам, определенным выше. Вот эти абстрактные таблички мы в дальнейшем и будем называть векторами.

При таком взгляде на вещи мы вправе рассматривать векторы с любым числом координат — векторы любой размерности. При этом мы сохраним, когда это потребуется, понятие ортогональности векторов: $\vec{a} \perp \vec{b}$, если $\vec{a}\vec{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i = 0$. Здесь i — номер координаты вектора (выше мы обозначали их буквами), а n — число координат векторов (их размерность). Складывать и перемножать можно только векторы одной размерности. А можно ли прийти к понятию абстрактного вектора, не опираясь на ортогональную систему координат? Для ответа на этот вопрос введем несколько новых понятий.

Набор векторов называется линейно зависимым, если один из них можно представить как сумму остальных, умноженных на подходящие коэффициенты, которые не равны нулю одновременно (такую сумму называют *линейной комбинацией*). Максимальное число линейно независимых векторов данного векторного пространства называется размерностью этого пространства n. Любые n линейно независимых векторов пространства $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ образуют его *базис*. Любой вектор этого пространства можно выразить как линейную комбинацию базисных (иначе базисных векторов было бы больше): $\vec{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i$.

Выразим, например, вектор $\vec{d} = (1, 2, 3)$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a} = (1, 0, 1)$, $\vec{b} = (0, 1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 1, -1)$. Нам нужно найти такие числа α, β и γ, которые обеспечат выполнение равенства $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Записывая это равенство в координатах, приходим к системе уравнений и ее решению:

$$\begin{cases}\alpha+\gamma=1;\\ \beta+\gamma=2;\\ \alpha-2\beta-\gamma=3\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=1/2;\\ \beta=3/2;\\ \gamma=1/2\end{cases}\to\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

В случае же, если вектор $\vec{d}=(1,1,1)$, а векторы $\vec{a}=(1,0,2)$, $\vec{b}=(3,1,1)$ и $\vec{c}=(0,1,-5)$, то аналогично предыдущему имеем

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=1;\\ \beta+\gamma=1;\\ 2\alpha+\beta-5\gamma=1\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=1-3\beta;\\ \gamma=1-\beta;\\ 4=0\,?!!\end{cases}$$

Решения нет, следовательно, не всякий трехмерный вектор можно разложить по векторам $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Это может быть только в случае, если указанные три вектора линейно зависимы. Действительно, попробуем образовать нулевую линейную комбинацию этих векторов: $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=0$. Расписывая векторное равенство по компонентам, получаем

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=0;\\ \beta+1=0;\\ 2\alpha+\beta-5\gamma=0\end{cases}\to\begin{cases}\alpha=3;\\ \beta=-1;\\ \gamma=1\end{cases}\to 3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0.$$

Заметим, что пока мы не опирались на понятие ортогональности. Теперь координатами вектора можно считать коэффициенты a_i в разложении вектора по любому выбранному базису. Декартовой же системе координат соответствует базис единичных, попарно ортогональных векторов, называемый *ортонормированным базисом*. В случае рассматриваемых в школе векторов-отрезков единичные базисные векторы направлены по осям координат.

Таким образом, мы назовем *арифметическим вектором* набор чисел, а операции над векторами определим как указанные выше операции над их компонентами. Далее, как уже упоминалось выше, мы будем работать как раз с такими абстрактными векторами. Более того, можно и операции над компонентами определить разными способами. Важно только удовлетворить некоторым условиям (см. ниже), и тогда можно перенести результаты, полученные для направленных отрезков, на векторные величины, описывающие объекты любой природы.

В качестве примера применения векторных величин рассмотрим следующую ситуацию.

Пример 1.1

В некотором городе проживает 150 тыс. детей и подростков, 400 тыс. работающих взрослых и 120 тыс. пенсионеров. При анализе многих социальных и экономических вопросов по организации жизни людей в данном городе структуру его населения можно представить «демографическим» вектором $\vec{a}=(150,400,120)$. Пусть население соседнего города описывается своим демографическим вектором $\vec{b}=(50,300,20)$. Обращаем внимание на разное соотношение работников и иждивенцев в этих городах. Скорее всего, второй город бурно развивается, и туда съезжается молодежь из других областей. Пригороды обоих городов занимают примерно одну и ту же площадь, на которой ведется однотипная хозяйственная деятельность, и их население описывается одинаковыми демографическими векторами $\vec{c}=(180,200,50)$. Принято решение объединить перечисленные пункты в один регион и всемерно усилить производственные связи между ними. Тогда это, более крупное, образование будет уже характеризоваться своим демографическим вектором $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}=(560,1100,240)$. Изменившееся соотношение между возрастными группами обязательно вызовет изменение планов развития инфраструктуры во всем регионе. Естественно, что для прояснения многих вопросов потребуется более подробное описание структуры населения путем разбиения его на большее количество возрастных групп и перехода к векторам большей размерности.

В данном примере затруднительно придать смысл введенному выше скалярному произведению векторов или их модулям.

Естественно, что в курсе математики мы главное внимание уделим описанию аппарата работы с абстрактными векторными объектами, рассматривая конкретные ситуации только в качестве примеров. Ниже приведем некоторые формальные определения.

Определение 1.1. *Арифметическим вектором* называется упорядоченный набор чисел, называемых компонентами вектора. Число компонент вектора называется его размерностью.

Определение 1.2. Множество всех арифметических векторов данной размерности с действительными компонентами, в котором определены действия сложения и умножения вектора на число, удовлетворяющие указанным ниже свойствам (рассматриваемым как аксиомы), называется *векторным пространством*. Векторное n-мерное пространство обычно обозначается R^n.

Свойства операций:

1) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$;
2) $(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}=\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})$;
3) $a(b\vec{x})=(ab)\vec{x}$;
4) $a(\vec{x}+\vec{y})=a\vec{x}+a\vec{y}$;
5) $(a+b)\vec{x}=a\vec{x}+b\vec{x}$;
6) существует нулевой вектор $\vec{0}=(0,0,...,0)$ такой, что $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$;
7) для любого вектора $\vec{x}$ существует противоположный вектор $-\vec{x}$ такой, что $\vec{x}+(-\vec{x})=\vec{0}$;
8) $1\cdot\vec{x}=\vec{x}$ для любого $\vec{x}$.

Если в векторном пространстве определено скалярное произведение (это можно сделать по-разному), то такое пространство называется *евклидовым*. В евклидовом пространстве всегда можно определить длину вектора как $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$, где $\vec{a}\cdot\vec{a}$ — скалярное произведение вектора на самого себя. Мы будем пользоваться привычным для нас определением: $\vec{a}\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y$.

1.2. Матрицы и действия с ними

Определение 1.3. *Матрицей* A называют прямоугольную таблицу чисел a_{ij}, которые имеют два индекса: первый — номер строки и второй — номер столбца таблицы-матрицы. Числа эти называют *матричными элементами*.

При равенстве количества строк и столбцов матрица называется *квадратной*. Если в квадратной матрице на главной диагонали (из левого верхнего угла в нижний правый) стоят единицы, а все остальные элементы — нули, то такую матрицу называют *единичной* и обозначают E. В треугольной матрице все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

Рассмотрим действия над матрицами:

1) умножение матрицы на число равносильно умножению всех матричных элементов на это число;

2) суммой матриц называют новую матрицу, все элементы которой есть суммы соответствующих элементов матриц-слагаемых;

3) произведение двух матриц A и B равно третьей матрице C, элементы которой выражаются через элементы матриц-сомножителей по формуле $c_{ij} = \sum\limits_k a_{ik} b_{kj}$. Очевидно, что указанное суммирование возможно, если только количество столбцов первой матрицы совпадает с количеством строк второй;

4) транспонирование матрицы A есть переход к новой матрице A^T, в которой строки заменены столбцами ($a_{ij}^T = a_{ji}$).

Вектор — частный случай матрицы. Умножение вектора-строки на вектор-столбец по правилу умножения матриц эквивалентно скалярному произведению данных векторов. Интересно, что, как правило, $AB \neq BA$ (некоммутативность умножения матриц).

Произведение матриц ассоциативно: $ABC = (AB)C = A(BC)$, т.е. очередность перемножения соседних матриц может быть произвольной, если не нарушается порядок следования матриц.

Для доказательства равенства необходимо доказать равенство одинаковых матричных элементов матриц по обе стороны равенства. Если обозначить $AB = V$, то матричный элемент $v_{is} = \sum\limits_k a_{ik} b_{ks}$. Далее, $P = (AB)C = VC$ и матричный элемент

$$p_{ij} = \sum_s v_{is} c_{sj} = \sum_s \left(\sum_k a_{ik} b_{ks} \right) = \sum_{s,k} a_{ik} b_{ks} c_{sj}.$$

Если теперь обозначим $BC = W$, то матричный элемент $w_{kj} = \sum\limits_s b_{ks} a_{sj}$. Полагая $Q = A(BC) = AW$, находим для матричного элемента

$$q_{ij} = \sum_k a_{ik} w_{kj} = \sum_k a_{ik} \left(\sum_s b_{ks} c_{sj} \right) = \sum_{k,s} a_{ik} b_{ks} c_{sj}.$$

Так как порядок суммирования можно менять, то $p_{ij} = q_{ij}$ и $P = Q$.

Докажем правило транспонирования произведения матриц: $(AB)^T = B^TA^T$. Вводя новые матрицы по формулам $(AB)^T = V$ и $B^TA^T = W$, получим выражения для их матричных элементов

$$v_{ij} = \left(\sum_k a_{ik} b_{kj} \right)^T = \sum_k a_{jk} b_{ki} = \sum_k b_{kj} a_{ik} = \sum_k (b^T)_{ik} (a^T)_{kj}$$

и $w_{ij} = \sum_k (b^T)_{ik}(a^T)_{kj}$. Их равенство доказывает указанное выше правило.

1.3. Определитель квадратной матрицы

В данном параграфе будет рассмотрена очень важная числовая характеристика квадратных матриц — определитель матрицы. К сожалению, определение этой величины носит формальный, абстрактный характер. Однако трудность при освоении указанной величины с лихвой окупается выгодой ее использования при определении зависимости групп векторов, анализе матричных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Для скорейшего овладения навыками использования свойств определителей матриц настоятельно рекомендуется разобраться в доказательствах этих свойств, сформулированных ниже.

Если в последовательности чисел есть пара, в которой большее число предшествует меньшему, то такое явление называется *инверсией*. Например, в элементе $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$ в последовательности номеров столбцов есть четыре инверсии: (2, 1), (4, 3), (4, 1) и (3, 1).

Определение 1.4. *Определителем квадратной матрицы n-го порядка* называется число, равное сумме $n!$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$) различных членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждого столбца и из каждой строки. Причем знак каждого члена определяется как $(-1)^J$, где J — число инверсий в последовательности номеров столбцов для данного слагаемого, если сомножители в нем расположены в порядке возрастания их номеров строк.

Определителем $|A|$ матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 2-го порядка называют число, равное $|A| = \Delta = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$. Существует простой рецепт и для вычисления определителя матриц 3-го порядка. Ниже будет показано, как определители высокого порядка выражаются через определители более низкого порядка.

Определение 1.5. *Минором M_{ij} элемента a_{ij}* квадратной матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы $(n - 1)$-го порядка, полученной из A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минор M_{13} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

равен $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. В указанном миноре отсутствуют элементы первой строки и третьего столбца.

Определение 1.6. *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число, равное $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

Рассмотрим свойства определителей.

1. Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен нулю (см. определение).

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число, то ее определитель умножится на то же число (см. определение).

3. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $|A| = |A^T|$.

Действительно, в каждом слагаемом в выражении для определителя каждая строка и каждый столбец представлены один раз, поэтому и в $|A|$, и в $|A^T|$ мы имеем слагаемые, образованные одними и теми же матричными элементами. В этом смысле строки и столбцы равноправны. Остается убедиться, что при замене строк столбцами знак перед каждым слагаемым не изменится. Для этого рассмотрим какое-нибудь слагаемое и упорядочим его сначала по номерам строк (определитель начальной матрицы), а потом по номерам столбцов (определитель транспонированной матрицы).

Легко увидеть, что число инверсий в первом варианте равно числу рациональных перестановок соседних элементов, выполненных для упорядочения номеров столбцов. Рациональными мы называем такие перестановки, которые восстанавливают расположение чисел в порядке возрастания. При произвольном способе упорядочения все рациональные перестановки происходят нечетное число раз, а все нерациональные — четное, они не меняют знак перед слагаемым. Поэтому можно при определении знака перед слагаемым в определителе считать все перестановки соседних элементов, при котором придем к заданному расположению. При этом мы переходим ко второму варианту записи, соответствующему определителю транспонированной матрицы. Естественно, что обратный процесс потребует то же самое число рациональных перестановок, а значит, в записи для $|A|$ данный член будет иметь тот же знак, что и в записи для $|A^T|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) ее определитель меняет знак.

При упорядочении элементов по строкам в определителях, у которых переставлены i-я строка с $(i+k)$-й, два соответствующих слагаемых будут переходить друг в друга с помощью $2k-1$ перестановок соседних элементов. Поэтому они должны отличаться знаком (см. свойство 3).

Следствие 1: Определитель матрицы с одинаковыми строками равен 0.

Следствие 2: Определитель матрицы с пропорциональными строками равен 0.

5. **Теорема 1.1 (Лапласа,** частный случай). *Определитель квадратной матрицы размера* $m \times m$ *равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения*:

$$\left|A\right| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{im}A_{im} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}A_{ij}.$$

Рассмотрим все слагаемые в определителе $\left|A\right|$, содержащие заданный элемент a_{ij}. Очевидно, что их сумма будет равна по модулю $a_{ij}M_{ij}$. А каков будет правильный знак? Переставим i строк и j столбцов в матрице так, чтобы наш элемент оказался в первом столбце и первой строке, при этом ее определитель умножится на $(-1)^{i+j}$. В этом новом определителе сумма членов, пропорциональных заданному элементу a_{ij}, равна $a_{ij}M_{ij}$. Действительно, все инверсии внутри минора уже учтены, а наш элемент, поскольку он теперь должен стоять на первом месте, не дает новых инверсий. Следовательно, в исходном определителе перед данным слагаемым должен появиться множитель $(-1)^{i+j}$, и мы можем заменить M_{ij} на A_{ij}. Проводя аналогичные рассуждения для всех остальных элементов i-й строки (j-го столбца), приходим к требуемой формуле.

6. Сумма произведений элементов строки (столбца) i матрицы на соответствующие алгебраические дополнения строки j равна определителю матрицы, если $i = j$, и равна 0, если $i \neq j$, т.е. $\sum\limits_{s} a_{is}A_{js} = \delta_{ij}\left|A\right|$, где δ_{ij} — символ Кронекера: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$ (см. свойства определителей 4 и 5).

7. Определитель матрицы не изменится, если к какой-либо строке (столбцу) прибавить линейную комбинацию других строк (столбцов) той же матрицы.

8. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной путем замены элементов этой строки (столбца) на указанные числа (см. теорему Лапласа).

9. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $\left|AB\right| = \left|A\right| \cdot \left|B\right|$.

Рассмотрим четыре квадратные матрицы A, B, $C = AB$ и G:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}; \; C = \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}; \; G = \begin{pmatrix} A & Q \\ -E & B \end{pmatrix}.$$

Три первые матрицы имеют размер $n \times n$, а вспомогательная квадратная матрица удвоенного размера $2n \times 2n$ состоит из четырех квадратных матриц A, Q, $-E$, B. Матрицы-сомножители A, B входят в G непересекающимися блоками вдоль главной диагонали. В левой нижней четверти матрицы G расположена диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны -1. Все элементы матрицы Q равны 0. Легко видеть, что определитель матрицы G равен произведению определителей ее диагональных блоков. Действительно, все произведения в определителе, содержащие элементы из левого нижнего блока, неизбежно содержат хотя бы один элемент из правого верхнего и равны нулю. Все инверсии внутри комбинаций элементов диагональных блоков учтены при подсчете определителей этих блоков, а «межблочные» инверсии, очевидно, отсутствуют. Таким образом, $|G| = |A| \cdot |B|$.

Рассмотрим теперь еще одну вспомогательную матрицу G_1, которая получается из матрицы G, если мы прибавим к каждому $(n+j)$-му столбцу, где $j = 1, 2, ..., n$, сумму первых n столбцов, взятых с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}$. При этом определитель новой матрицы совпадает со старой, $|G_1| = |G|$ (см. свойство определителей 7). Замечаем, что в получившейся матрице нижний правый блок состоит из одних нулей, верхний правый совпадает с матрицей C, а блоки в левой половине остались без изменения: $G_1 = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & Q \end{pmatrix}$.

Переставив n последних столбцов на n первых мест, мы придем к матрице такого же типа, что и матрица G. Ее определитель будет равен $(-1)^n |C|$. Следовательно, определитель матрицы G_1 будет равен $(-1)^{n(n+1)} |C| = |C|$, так как перестановка n строк на n мест привела к дополнительному множителю (-1) в степени n^2 и произведение $n(n+1)$ всегда четно. А так как $|G_1| = |G|$ в силу свойств определителей, то $|G| = |A| \cdot |B| = |C|$.

Используя эти свойства, вычисление определителя n-го (сколь угодно большого) порядка сводится к произведению $(n - 2)$ чисел на определитель 2-го порядка. Действительно, добавляя к каждой i-й строке матрицы $(i > 1)$ первую строку, умноженную на отношение первых коэффициентов $(-a_{11}/a_{i1})$, приходим к матрице, в одном из столбцов которой все элементы, кроме первого, равны нулю. Раскладывая определитель по элементам указанного столбца, приходим к необходимости вычисления определителя $(n - 1)$-го порядка. Проделав же подобную процедуру $n - 2$ раза, придем к единственному определителю второго порядка.

Пример 1.2

Вычислим определитель $|A|$, следуя описанной выше процедуре:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение

Символом C_i будем обозначать i-ю строку:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 - 2C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \\ C_4 \to C_4 + C_1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 \to C_3 + C_2 \\ C_4 \to C_4 + 3C_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 \to C_3 \\ C_4 \to C_4 - 2C_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = -6.$$

1.4. Обратная матрица

Определение 1.7. Матрица A^{-1} называется *обратной* к квадратной матрице A с ненулевым определителем, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

Отметим, что матрица с нулевым определителем (*вырожденная матрица*) не может иметь обратной в силу свойства 9 определителей. Матрица E в матричной алгебре играет роль единицы в арифметике: для любой матрицы A справедливо равенство $AE = A$ и $EA = A$. Подчеркнем, что в каждом из последних равенств размер единичной матрицы подбирается таким, чтобы было возможно умножение.

Используя определение квадратной матрицы, можно в символическом виде записать решения матричных уравнений $AX = B$ и $XA = B$: в первом случае $X = A^{-1}B$, во втором — $X = BA^{-1}$.

Единственность: обратная матрица, если она существует, единственна.

Пусть существует еще одна матрица Z, такая, что $AZ = E$. Умножим последнее равенство на A^{-1} слева и получим $A^{-1}AZ = A^{-1}E = A^{-1} \Rightarrow Z = A^{-1}$.

Вычисление обратной матрицы. Мы познакомимся с двумя способами вычисления обратной матрицы:

1) метод присоединенной матрицы;

2) метод элементарных преобразований.

Определение 1.8. Матрица A' называется *присоединенной* к матрице A, если она составлена из алгебраических дополнений к элементам матрицы A, а затем транспонирована. Таким образом, каждому элементу a_{ij} в A соответствует a_{ji} в A'.

Теорема 1.2. *Для любой невырожденной матрицы A справедливо равенство* $A^{-1} = \dfrac{A'}{|A|}$.

Действительно, умножая A' на A, мы в силу свойства 6 определителей получим диагональную матрицу с одинаковыми диагональными элементами, равными $|A|$. Разделив же A' на определитель $|A|$, придем к матрице E.

Данная теорема дает один из способов вычисления обратной матрицы — *метод присоединенной матрицы*. Его недостатком является громоздкость, связанная с необходимостью вычисления большого числа определителей (алгебраических дополнений).

Найдем в качестве примера методом присоединенной матрицы обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 - 2 = -1$. Алгебраические дополнения равны:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1;\ A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1;\ A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Присоединенная матрица $A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, а обратная матрица $A^{-1} = \frac{A'}{|A|} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

На практике часто используют другой метод — *метод элементарных преобразований*. К числу последних относятся:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на отличное от нуля число;

3) прибавление ко всем элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Суть метода состоит в следующем. Для невырожденной квадратной матрицы A n-го порядка строится прямоугольная матрица $(A|E)$ размера $n\times 2n$ путем приписывания к матрице A справа единичной матрицы. Далее с помощью элементарных преобразований мы приводим прямоугольную матрицу к виду $(E|B)$. При этом оказывается, что полученная матрица $B = A^{-1}$. Попробуем обосновать этот метод.

Сформулируем сначала несколько вспомогательных утверждений («маленьких» теорем). В математике их часто называют леммами.

Лемма 1.1. Каждому из перечисленных выше элементарных преобразований соответствует матрица, умножение которой на данную матрицу эквивалентно указанному преобразованию.

Говорят, что каждому преобразованию (оператору) соответствует своя матрица. Укажем их. Так, если мы хотим переставить первую строку нашей матрицы со второй, мы можем умножить матрицу O_1 на нашу матрицу. O_1 получается из матрицы E переменой первой и второй строки. Умножению на число λ строки нашей матрицы (например, второй) соответствует матрица $O_2(\lambda)$, которая получается опять-таки из матричной единицы E умножением указанной строки (второй в данном примере) на указанное число. Наконец, прибавление к i-й строке матрицы j-й строки (например, к первой прибавим последнюю строку, умноженную на λ) эквивалентно умножению матрицы $O_3(\lambda)$ на исходную матрицу. Матрица $O_3(\lambda)$ получается из матрицы E путем замены нуля на пересечении i-й строки и j-го столбца числом λ. Ниже приведены матрицы O_1, O_2, O_3 в указанных случаях:

$$O_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};\ O_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};\ O_3(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \lambda \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что указанные преобразования применимы к любым прямоугольным матрицам, число строк которых совпадает с числом столбцов квадратных матриц O_1, O_2, O_3.

Лемма 1.2. Если мы умножаем любую квадратную матрицу D порядка n на матрицу K размером $n \times 2n$ (столбцов вдвое больше, чем строк), то мы получим прямоугольную матрицу размером $n \times 2n$. Причем в ее первой (левой) половине будет стоять произведение матрицы D на левую половину матрицы K, а в правой — произведение D на правую половину K, т.е. если $K = (B \mid C)$, то справедливо равенство $DK = (DB \mid DC)$.

Доказательство обеих лемм следует из правила перемножения матриц.

Таким образом, если мы сумели путем элементарных преобразований привести матрицу $K = (A \mid E)$ к виду $(E \mid B)$, то существует такая матрица O (какое-то произведение конечного числа матриц O_1, O_2, O_3), что $OA = E$ и $OE = B$. Но тогда, по определению, $O = A^{-1}$ и $O = B$, т.е. в правой половине получившейся матрицы $(E \mid B)$ будет стоять искомая обратная матрица A^{-1}.

Возвратимся теперь к решению матричных уравнений, начатому в начале данного параграфа. После вычисления и подстановки обратной матрицы в формулу $X = A^{-1}B$ для уравнения $AX = B$ и формулу $X = BA^{-1}$ для уравнения $XA = B$ получаем решения указанных матричных уравнений.

Найдем методом элементарных преобразований обратную матрицу A^{-1} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформируемм матрицу

$$(A \mid E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Комбинируя строки, добиваемся появлению в левой половине матрицы $(A \mid E)$ единичной матрицы E (в выкладках ниже i-ю строку будем обозначать как C_i):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} C_1 \to C_1, \\ C_2 - C_1 \to C_2, \\ C_3 \to C_3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} C_1 - C_2 + C_3 \to C_1, \\ C_2 - C_3 \to C_2, \\ C_3 \to C_3 \end{cases} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В правой половине стоит искомая матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.5. Ранг матрицы

Если мы в прямоугольной матрице A возьмем произвольные k строк и k столбцов, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется *минором k-го порядка матрицы A*.

Определение 1.9. *Рангом r* матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы. Любой ненулевой минор порядка r называется *базисным минором*. Ранг матрицы обозначим $\operatorname{rang} A$.

Мы познакомимся с двумя методами вычисления ранга матрицы:

1) методом окаймляющих миноров;

2) методом элементарных преобразований.

Суть первого метода в следующем. Пусть в матрице A найден ненулевой минор k-го порядка M. Рассмотрим все миноры $(k + 1)$-го порядка, включающие в себя (окаймляющие) минор M; если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой и вся процедура повторяется. Что касается второго метода, то мы дополним список элементарных преобразований, указанных выше, еще двумя:

1) отбрасывание нулевой строки (столбца);

2) транспонирование матрицы.

Теорема 1.3. *Ранг матрицы при элементарных преобразованиях не меняется.*

Это утверждение непосредственно следует из свойств определителей.

С помощью элементарных преобразований матрица приводится к ступенчатому[1] (треугольному, если она квадратная) виду, тогда вычисление ее ранга не составляет труда (см. доказательство следующей теоремы).

Теорема 1.4 (о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк*[2] (*столбцов*), *через которые линейно выражаются все остальные строки* (*столбцы*).

Действительно, если у нас только r строк линейно независимы, то любая новая, $(r + 1)$-я, строка будет линейной комбинацией независимых. Любой минор на этих строках (в силу свойств определителей) равен нулю. Следовательно, ранг матрицы не может быть больше r. С другой стороны, элементарными преобразованиями мы всегда можем свести матрицу, образованную указанными r строками, к ступенчатому виду. Причем если в какой-нибудь строке на главной диагонали окажется 0, мы переставим данный столбец с одним из тех, который стоит правее и не содержит 0 в данной строке. Такой столбец обязательно найдется (иначе данная строка будет состоять из одних нулей, а это невозможно в силу линейной независимости первых r строк). Минор, стоящий слева в полученной матрице, не равен нулю и имеет порядок r. Следовательно, начальная матрица имеет точно такой же минор и ее ранг равен r.

Можно привести и другое доказательство этой теоремы.

[1] Ступенчатой мы будем называть прямоугольную матрицу, вторая строка которой начинается с одного нуля, третья строка — с двух нулей и т.д.

[2] Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна из ее строк является линейной комбинацией остальных.

Пусть матрица размера $n \times m$ имеет ненулевой минор M r-го порядка (для определенности пусть он соответствует верхнему левому углу матрицы), а все миноры порядка $(r+1)$ равны нулю. Покажем, что любую k-ю строку $(k > r)$ матрицы можно выразить через r первых строк. Для этого рассмотрим минор

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{k1} & \dots & a_{kr} & a_{kj} \end{vmatrix},$$

окаймляющий наш исходный минор $M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$.

Этот минор равен 0 (по условию, если $j > r$, и по свойству определителей с равными столбцами, если $j \le r$). Разложив его по последнему столбцу, мы получим равенство $\sum_s a_{sj} A_{sj} = 0$, где алгебраические дополнения A_{sj} зависят только от номера строки k, но не зависят от номера столбца j, который пробегает все значения от 1 до m. Поскольку при этом по крайней мере одна из величин A_{sj} (при $s = k + 1$ это наш ненулевой минор) отлична от нуля (по условию), указанное равенство означает линейную зависимость любой строки матрицы от ее первых r строк. Первые же r строк линейно независимы, так как $M \ne 0$.

Метод окаймляющих миноров также легко обосновывается с помощью теоремы о ранге матрицы (перебирая окаймляющие миноры, мы убеждаемся в линейной зависимости или независимости выбранных строк).

Контрольные вопросы и задания

1. Каков базис в линейном пространстве?
2. Какие матрицы можно перемножать?
3. В каких случаях определитель матрицы равен нулю?
4. Для каких матриц существует обратная матрица?
5. Опишите, как определить ранг матрицы.

Практикум по решению задач

Упражнение 1.1. Определим, являются ли трехмерные векторы $\vec{a} = (1, 3, -1)$, $\vec{b} = (4, -1, 2)$ и $\vec{c} = (-2, 7, -4)$ линейно зависимыми.

Решение

Для наличия линейной зависимости векторов должны существовать три не равных одновременно нулю числа α, β и γ, которые обеспечат справедливость векторного равенства $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$, или (что то же самое) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0, \\ 3\alpha - \beta + 7\gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta - 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения первое число $\alpha = 2\beta - 4\gamma$ и подставляя это выражение в первые два уравнения системы, приходим к уравнениям $6\beta - 6\gamma = 0$ и тождеству $0 = 0$. Следовательно, для любого γ и $\beta = \gamma$, $\alpha = -2\gamma$ выполняется указанное выше векторное равенство, например оно выполняется при $\beta = \gamma = 1$; $\alpha = -2$. Таким образом, векторы линейно зависимы.

Упражнение 1.2. Определим, являются ли трехмерные векторы $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$ и $\vec{c} = (1, 3, 1)$ линейно зависимыми.

Решение

Рассуждая так же, как в предыдущем упражнении, приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0, \\ \alpha - \beta + 3\gamma = 0, \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0. \end{cases}$$

Выразив из последнего уравнения первое число $\alpha = 2\beta + \gamma$ и подставляя это выражение в первые два уравнения системы, приходим к уравнениям $4\beta + 2\gamma = 0$ и $\beta + 4\gamma = 0$. Подставляя теперь выражение для β из второго уравнения в первое, получим $-14\gamma = 0 \to \ \alpha = \beta = \gamma = 0$. Мы получили единственное решение, и оно оказалось нулевым. Следовательно, наши векторы линейно независимы.

Примечание к упражнениям 1.1 и 1.2. Если данная задача дается после того, как студенты познакомились со свойствами определителя, то возможно более простое решение. Действительно, если три трехмерных вектора линейно зависимы, то определитель, строками которого являются координаты соответствующего вектора, равен нулю. В противном случае, векторы линейно независимы. В упражнении 1.1 указанный определитель $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 7 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 28 - 12 + 2 - 14 + 48 = 0$, и указанные векторы линейно зависимы. В упражнении 1.2 соответствующий определитель не равен нулю: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 6 - 1 - 6 - 2 = -14$. Следовательно, указанные в задаче векторы являются линейно независимыми.

Упражнение 1.3. Пусть даны три матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем линейную комбинацию матриц $2A - B + 3C^T$.

Решение

Сначала, записывая строки как столбцы, получим $C^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Видим, что все матрицы-слагаемые имеют одинаковый размер (только такие матрицы и можно складывать). Умножая каждый элемент матрицы на указанный для этой матрицы множитель и складывая элементы, стоящие на одинаковых местах в матрицах-слагаемых, получаем:

$$2A-B+3C^T=2\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\4&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\\-2&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}3&-2\\2&1\\1&4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2-2+9&6+1-6\\4-1+6&2-4+3\\8+2+3&-6-3+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&1\\9&1\\13&3\end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.4. Вычислим произведения матриц, заданных в задаче 1.3: AC, AB^T и CB.

Решение

Умножение матриц происходит по правилу «строка на столбец». Перед началом выполнения умножения следует убедиться, что число столбцов в первом сомножителе совпадает с числом строк во втором сомножителе.

$$AC=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\4&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot3-3\cdot2&1\cdot2+3\cdot1&1\cdot1+3\cdot4\\2\cdot3-1\cdot2&2\cdot2+1\cdot1&2\cdot1+1\cdot4\\4\cdot3+(-3)\cdot(-2)&4\cdot2-3\cdot1&4\cdot1-3\cdot4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&5&13\\4&5&6\\18&5&-8\end{pmatrix};$$

$$AB^T=\begin{pmatrix}1&3\\2&1\\4&-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&-2\\-1&4&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot2-3\cdot1&1\cdot1+3\cdot4&-1\cdot2+3\cdot3\\2\cdot2-1\cdot1&2\cdot1+1\cdot4&-2\cdot2+1\cdot3\\4\cdot2-3\cdot(-1)&4\cdot1-3\cdot4&-4\cdot2-3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&13&7\\3&6&-1\\11&-8&-17\end{pmatrix};$$

$$CB=\begin{pmatrix}3&2&1\\-2&1&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+2\cdot1-1\cdot2&-3\cdot1+2\cdot4+1\cdot3\\-2\cdot2+1\cdot1-4\cdot2&-2\cdot(-1)+1\cdot4+4\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&8\\-11&18\end{pmatrix}.$$

Упражнение 1.5. Вычислим определитель матрицы $|A|=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\2&3&1&1\\-1&2&-2&-1\\2&3&1&2\end{vmatrix}$.

Решение

Для вычисления определителя мы будем использовать два способа: а) метод Гаусса (сведение матрицы к треугольному виду) и б) разложение по столбцу или строке с предварительным упрощением матрицы методом элементарных преобразований.

а) Если мы от 2-й и 4-й строк отнимем удвоенную 1-ю строку, а к 3-й строке прибавим 1-ю, то придем к матрице, у которой тот же самый определитель, а в 1-м столбце во всех строках, кроме 1-й, стоят нули. Затем, аналогичным образом комбинируя 3-ю и 4-ю строки со 2-й, мы придем к матрице, под главной диагональю которой стоят только нулевые элементы:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\2&3&1&1\\-1&2&-2&-1\\2&3&1&2\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2-2C_1\to C_2\\C_3+C_1\to C_3\\C_4-2C_1\to C_4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\0&-1&-3&-1\\0&4&0&0\\0&-1&-3&0\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3+4C_2\to C_3\\C_4-C_2\to C_4\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&2&1\\0&-1&-3&-1\\0&0&-12&-4\\0&0&0&1\end{vmatrix}.$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов, так как все остальные слагаемые в определителе содержат хотя бы один нулевой сомножитель. Таким образом, для нашей матрицы определитель

$$|A| = 1\cdot(-1)\cdot(-12)\cdot 1 = 12.$$

б) Вторым общим методом вычисления определителя является метод разложения по строке (или столбцу). При этом процедура вычисления значительно упрощается, если в какой-либо строке или столбце есть только один ненулевой элемент. Такое у нас получалось в 3-й строке определителя в предыдущем пункте, но мы тогда шли другим путем. Теперь мы посмотрим на исходную матрицу и обратим внимание на то, что 2-я и 4-я строки почти совпадают. Вычтем из 4-й строки 2-ю, а к 3-й прибавим 1-ю. Определитель полученной матрицы затем разложим по 3-й строке по формуле $|A| = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}A_{3j}$, где алгебраические дополнения связаны с минорами общим соотношением $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Второй метод приводит к следующей цепочке равенств:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - C_2 \to C_4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Получившийся определитель тоже можно разложить по 3-й строке, и мы получим окончательно

$$|A| = 4\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\cdot(-1)^{3+2}\cdot 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 12.$$

Упражнение 1.6. Найдем матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

Присоединенная матрица A' получается из исходной транспонированием и заменой всех элементов их алгебраическими дополнениями: $a'_{ij} = A_{ji}$. Обратная же матрица получается из присоединенной матрицы делением ее на определитель исходной матрицы: $A^{-1} = A'/|A|$. Алгебраические дополнения нашей матрицы размером равны

$$A_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = 3;\ \ A_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -4;\ \ A_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = 2.$$

Тогда присоединенная матрица оказывается равной $A' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$. Легко видеть, что присоединенная матрица получается из исходной матрицы следующим образом: элементы на главной диагонали меняются местами, а перед обоими недиагональными элементами просто меняется знак. Определитель нашей матрицы равен $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$, а обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если наши вычисления верны, то произведение полученной матрицы на исходную должно давать единичную матрицу. Проверим это:

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1{,}5 & -0{,}5\\ -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2 & 1{,}5-1{,}5\\ -4+4 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Наш результат верен.

Упражнение 1.7. Найдем матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, двумя способами: а) методом присоединенной матрицы и б) методом элементарных преобразований.

Решение

а) Как было указано в предыдущей задаче, обратная матрица определяется формулой $A^{-1}=A'/|A|$, где элементы присоединенной матрицы A' связаны с алгебраическими дополнениями исходной матрицы равенством $a'_{ij}=A_{ji}$. Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0;\ A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0;\ A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;\ A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1.$$

Так как определитель исходной матрицы

$$|A|=1\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot2+2\cdot1\cdot1-(2\cdot1\cdot1+2\cdot1\cdot1+1\cdot2\cdot1)=1,$$

то $A^{-1}=A'=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Полученная нами матрица действительно является обратной к исходной матрице:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2 & -1+1 & 1-1\\ -2+2 & -1+2 & 2-2\\ -2+2 & -1+1 & 2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

б) Теперь вычислим ту же матрицу методом элементарных преобразований. Припишем единичную матрицу к исходной и получим большую прямоугольную матрицу. Умножая строки на подходящие числа и затем складывая их, приведем левую половину большой матрицы к единичному виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\ C_2-2C_1\to C_2\\ C_3-2C_1\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\ -C_2\to C_2\\ C_2-C_3\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1-C_2-C_3\to C_1\\ C_2\to C_2\\ C_3\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

В результате выполнения указанной цепочки преобразований строк мы в левой половине большой матрицы получили единичную матрицу 3-го порядка. При этом в правой половине большой матрицы автоматически получается матрица, обратная к первоначальной, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 1.8. Решим матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$, где матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, а матрица $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Умножая обратную матрицу A^{-1} на первое уравнение слева, получим равенство $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$, то $A^{-1}AX = EX = X = A^{-1}B$. Обратная матрица связана с присоединенной матрицей равенством $A^{-1} = A' / |A|$. Пользуясь рецептом получения присоединенной матрицы из исходной, изложенным в задаче 1.6, находим $A' = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Определитель $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 6 = -1$ и $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Неизвестная матрица равна

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+6 & -5+4 \\ 6-3 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть первого матричного уравнения и получим

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+6 & -1+2 \\ -12+15 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Решение верно.

2. Аналогично, умножая A^{-1} на первое уравнение справа, получим равенство $XAA^{-1} = BA^{-1}$, следовательно,

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10+3 & 4-1 \\ -15+6 & 6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Чтобы проверить правильность полученного результата, подставляем его в левую часть второго уравнения и получим

$$XA = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+9 & -14+15 \\ -9+12 & -18+20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = B.$$

Решение верно.

Замечаем, что решения первого и второго уравнений не совпадают.

Упражнение 1.9. Решим матричные уравнения $AX = B$ и $XA = B$, где матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (та же самая, что и в задаче 1.7), а матрица $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение

1. Для решения первого уравнения умножим на него слева обратную матрицу $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}A = E$, а обратная матрица A^{-1} уже вычислена в задаче 1.7, то

$$EX = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+1 & -2+1 & -1+3 \\ 2-2 & 4-1 & 2-2 \\ 2-1 & 1-1 & 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть первого матричного уравнения:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+3 & 2-1 \\ 2 & -2+3 & 4-2 \\ 1 & -2+3 & 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Наше решение верно.

б) Для решения второго уравнения умножим на него справа обратную матрицу $XAA^{-1} = BA^{-1}$. Так как $AA^{-1} = E$, то

$$XE = X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+4 & -2+1 & 1-1 \\ -2+2 & -1+2 & 2-2 \\ -1+2 & -1+3 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что решение второго уравнения отличается от решения первого. Для проверки подставим полученную матрицу в левую часть второго матричного уравнения:

$$XA = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 & 3-1 & 3-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1+4-4 & 1+2-2 & 1+4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

Наше решение верно.

Упражнение 1.10. Определим ранг прямоугольной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение

Ранг матрицы равен числу линейно независимых строк в ней. Если мы приведем матрицу к ступенчатому виду, то линейно зависимые строки зануляться. Мы, складывая и вычетая строки, будем добиваться того, чтобы в первом столбце во всех строках, кроме первой, стояли нули. Затем мы будем добиваться появления нулей во втором столбце во всех строках, кроме первых двух, и т.д.:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 3 & -8 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \\ C_4 - 4C_1 \to C_2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 - C_2 \to C_3 \\ C_4 - C_2 \to C_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видим, что последние две строки полностью занулились — это означает, что они являются линейными комбинациями первых двух. Очевидно, что первые две строки линейно независимы (на какое бы число мы ни умножали вторую строку, она не будет равной первой строке, так как ее первый элемент нулевой). Таким образом, у нашей матрицы только две линейно независимые строки, и ранг матрицы равен двум.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Определите, являются ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ линейно зависимыми:

а) $\vec{a} = (1, 5, 2)$; $\vec{b} = (3, -1, 0)$; $\vec{c} = (-2, 4, 1)$;

б) $\vec{a} = (2, 1, -2)$; $\vec{b} = (1, 1, 2)$; $\vec{c} = (-1, 1, 3)$;

в) $\vec{a} = (1, 0, 2)$; $\vec{b} = (2, -1, 1)$; $\vec{c} = (3, -1, 3)$;

г) $\vec{a} = (1, 3, 2)$; $\vec{b} = (1, 1, 4)$; $\vec{c} = (-1, 1, -6)$.

1.2. Найдите матрицу $C = 3A - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3. Найдите матрицу $C = BA - 3AB$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.4. Найдите матрицу $C = A - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

1.5. Найдите матрицу $C = 2A^T - BA$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1.6. Вычислите определитель матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -5 & 1 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Вычислите матрицу, обратную к данной:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

1.8. Решите матричное уравнение $AX = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.9. Решить матричное уравнение $XA = B$:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.10. Определите ранг матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Глава 2
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Решение уравнений, описывающих изучаемый процесс, является целью практически любого теоретического исследования. Не всегда это возможно в полной мере, и приходится прибегать к различным приближенным методам анализа. Но точно решаемые задачи дают реперные точки в количественном описании изучаемой ситуации. Модели, которые описываются системами линейных уравнений, допускают исчерпывающий количественный анализ и поэтому широко распространены. Умение анализировать системы линейных уравнений обязательно входит в арсенал современного исследователя социально-экономических процессов. Знакомству с основными положениями и методами этого раздела линейной алгебры и приобретению необходимых навыков в решении систем линейных уравнений посвящена данная глава.

Рассмотрим сначала систему n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

В матричной форме эта система имеет простой вид $A\vec{x} = \vec{b}$, где A — матрица из коэффициентов уравнений нашей системы (матрица системы)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix};$$

неизвестный вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ и правая часть $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$.

В случае если в правых частях всех уравнений стоят нули (все $b_i = 0$), система уравнений называется *однородной*.

2.1. Решение системы линейных уравнений при совпадении числа независимых уравнений с числом переменных

1. Метод обратной матрицы. Для решения указанной выше системы уравнений первым способом необходимо найти сначала обратную матрицу A^{-1} (любым методом), а затем найти неизвестный вектор по формуле $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$. Заметим, что здесь мы имеем дело с частным случаем решения матричного уравнения, рассмотренного в предыдущей главе.

Пример 2.1

Решим методом обратной матрицы систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

Решение

Обратную матрицу вычислим методом элементарных преобразований $(A \mid E) \to$ $\to (E \mid A^{-1})$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 3C_1/5 - 2C_2/5 + C_3/5 \to C_1, \\ -2C_1/5 + 3C_2/5 + C_3/5 \to C_2, \to \\ -C_1/5 - C_2/5 + 3C_3/5 \to C_3 \end{cases}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/5 & -2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & -1/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в правой половине получившейся матрицы стоит матрица A^{-1}, то решение системы находим по формуле

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

т.е. $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

2. Метод Крамера. Метод основан на следующей теореме.

Теорема 2.1 (Крамера). *Если определитель системы* $\Delta = |A| \neq 0$, *то решение системы находится по формулам* $x_j = \Delta_j / \Delta$ *для всех* $j = 1, \ldots, n$, *где* Δ_j — *определитель, который получается из определителя системы* Δ *заменой в нем* j*-го столбца столбцом компонент вектора* $\vec{b}$.

Действительно, из формулы $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ и выражения для обратной матрицы имеем $\vec{x} = (A'/\Delta)\vec{b}$, где присоединенная матрица $A' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$.

Произведение j-го столбца матрицы A' на вектор равно сумме произведений компонент этого вектора на соответствующие алгебраические дополнения к элементам j-го столбца начальной матрицы A. По свойству 8 определителей такая сумма равна как раз определителю Δ_j. Следовательно, для компоненты искомого вектора x_j справедливо утверждение теоремы.

Пример 2.2

Решим методом Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение

Вычислим основной и вспомогательные определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -3;\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -9;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

По формулам Крамера получаем решение:

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 3;\quad x_2 = \Delta_2 / \Delta = -1/3;\quad x_3 = \Delta_3 / \Delta = 1/3.$$

---

3. Метод Гаусса. При решении системы уравнений методом Гаусса мы сначала приводим матрицу A к ступенчатому виду (это всегда можно сделать с помощью элементарных преобразований над строками матрицы или подобрав подходящую матрицу-множитель). В результате мы придем к новой матрице C и новой (равносильной) системе линейных уравнений с правой частью $\vec{f}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \to \begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = f_1, \\ 0 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 + 0 + \ldots + c_{nn}x_n = f_n. \end{cases}$$

Отметим, что при $\Delta \neq 0$ на диагонали матрицы C нет нулей. Все компоненты x_i находятся последовательно, начиная с нижней строчки последней системы. Главное — привести матрицу к ступенчатому виду!

Пример 2.3

Решим систему уравнений, уже рассмотренную выше, методом Гаусса.

Решение

Символом C_i, как и в предыдущей главе, обозначаем i-ю строку. Комбинируя строки, приводим матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 0 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 0 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 \to C_3 + 2C_2 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 0 + x_2 - 2x_3 = -1, \\ 0 + 0 - 3x_3 = -1. \end{cases}$$

Решая уравнения последовательно снизу вверх:

$$x_3 = -1/(-3);\ x_2 = -1 + 2x_3;\ x_1 = 3 - x_2 - x_3,$$

получаем решение $x_1 = 3; x_2 = -1/3; x_3 = 1/3$.

2.2. Решение системы линейных уравнений общего вида

Система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

в матричной форме имеет тот же вид, что и при $m = n$: $A\vec{x} = \vec{b}$. Если $\vec{b} = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. Если система имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной*, в противном случае — *несовместной*. Две системы уравнений называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают. Дополнив матрицу A системы столбцом свободных членов, получим *расширенную матрицу* системы $\overline{A} = (A\,|\,\vec{b})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \overline{A} = \left(A\,|\,\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что всегда $\operatorname{rang} A \le \operatorname{rang} \overline{A}$.

Теорема 2.2 (Кронекера — Капелли). *Для того чтобы система уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы совпадал с рангом расширенной матрицы*: $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$.

Доказательство. Необходимость. Если система совместна, то существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не равные нулю одновременно (мы рассматриваем неоднородную систему уравнений), которые, умноженные на соответствующие столбцы матрицы A, дают в сумме столбец свободных членов, т.е. столбец свободных членов есть линейная комбинация столбцов матрицы A и его добавление при переходе к матрице $\overline{A}$ не меняет ранга.

Достаточность. Если $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = r \le n$, то найдется r столбцов матрицы A (и $\overline{A}$), через которые выражаются все остальные столбцы, включая столбец свободных членов. В качестве значений неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_r$ выбираются коэффициенты в этой линейной комбинации. Остальные неизвестные в случае $n > r$ можно положить равными нулю. Это и будет одним из решений нашей системы уравнений.

Для совместных систем уравнений справедливы следующие утверждения.

1. Если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$), то решение единственно.

Действительно, в этом случае мы можем оставить n линейно независимых уравнений, которым соответствует матрица n-го порядка с ненулевым определителем. По формулам Крамера мы найдем единственное решение. Это решение превращает в тождества остальные уравнения, поскольку те являются линейной комбинацией уравнений, выбранных нами.

2. Если ранг матрицы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система называется неопределенной и имеет бесконечное множество решений.

Действительно, выберем r линейно независимых строк матрицы системы и оставим только уравнения, соответствующие этим строкам. Переставим столбцы так, чтобы в левом верхнем углу стоял ненулевой минор. Далее перенесем все слагаемые, не содержащие первые r неизвестных, в правую часть уравнений. Согласно формулам Крамера каждому из *бесконечного* числа наборов значений остальных $n - r$ неизвестных соответствует свое решение. Остальные уравнения удовлетворяются автоматически.

В последнем случае мы имеем дело с *укороченной* системой, которая эквивалентна исходной. Неизвестные, оставшиеся в левой части уравнений, называются *базисными*, а остальные $n - r$ штук — *свободными*. Выбрав произвольным образом значения свободных переменных $x_{r+1} = c_1$; $x_{r+2} = c_2; ...; x_n = c_{n-r}$, найдем решение исходной системы как функцию $n - r$ констант. Такое решение системы называется *общим*. Конкретное решение системы (запишем его в виде вектор-строки) имеет вид

$$\vec{x}(\{c_i\}) = (x_1(c_1, ..., c_{n-r}), ..., x_r(c_1, ..., c_{n-r}), c_1, ..., c_{n-r}).$$

В случае если все константы $c_i = 0$ для $i = 1, 2, ..., n - r$, решение называется *базисным*.

2.3. Однородные системы уравнений

Особо отметим, что *однородные системы линейных уравнений* (*ОСЛУ*) всегда имеют нулевое решение. Оно называется тривиальным. Для существования нетривиального решения однородной системы необходимо и достаточно, чтобы ранг системы был меньше числа неизвестных ($r < n$), что следует из доказанных в предыдущем параграфе утверждений.

Очевидно, что любая линейная комбинация решений ОСЛУ сама является решением той же системы. Действительно, однородную систему уравнений можно записать в матричном виде: $A\vec{x} = 0$. Если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — решения этой системы ($A\vec{x}_1 = 0$ и $A\vec{x}_2 = 0$), то согласно правилам действия с матрицами для произвольной линейной комбинации указанных решений системы $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ получаем

$$A \cdot (\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2) = \alpha A \cdot \vec{x}_1 + \beta A \cdot \vec{x}_2 = 0.$$

Поэтому имеет смысл найти максимальное число линейно независимых ненулевых решений, через которые выразятся все остальные решения. Они образуют *фундаментальную систему решений*. Очевидно, что число линейно независимых решений ровно $n - r$. Действительно, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать общие решения (см. выше), в которых все константы c_i, кроме одной, равны нулю. Таких решений ровно $n - r$. Базисное же решение ОСЛУ является нулевым.

Пример 2.4

Найдем фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Выбирая в качестве базисных переменных первые две и перенося остальные в правую часть уравнений, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = x_3 - x_4, \\ 2x_1 - x_2 = 2x_3 + x_4. \end{cases}$$

Решение ее есть

$$\begin{cases} x_1 = x_3 + x_4, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

Обозначая $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, можем записать общее решение системы уравнений в форме вектор-строки: $\vec{x}_{\text{об}} = (c_1 + c_2, c_2, c_1, c_2)$. Это общее решение можно выразить в виде линейной комбинации фундаментальных решений, а именно: $\vec{x}_{\text{об}} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$, где фудаментальные решения $\vec{e}_1 = (1, 0, 1, 0)$ и $\vec{e}_2 = (1, 1, 1, 0)$ получаются из общего приравниванием одной свободной константы к единице, а другой — к нулю ($c_1 = 1$; $c_2 = 0$ или $c_1 = 0$; $c_2 = 1$).

Заметим, что разность двух решений системы линейных уравнений равна решению соответствующей ОСЛУ. Действительно, если $A\vec{x} = b$ и $A\vec{y} = b$, то справедливо $A(\vec{x} - \vec{y}) = 0$. Следовательно, *общее решение неоднородной системы уравнений можно представить в виде суммы общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной.*

Пример 2.5

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 0 + 5x_3 = 10, \end{cases}$$

предварительно проверив ее совместность.

Решение

Определитель системы $|A| = -5 + 12 + 3 - 10 = 0$, а $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A} = 2$, так как есть отличный от нуля минор второго порядка $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$ и третья строка расширенной матрицы есть линейная комбинация двух первых: $C_3 = C_1 + 2C_2$. Система совместна. Оставляя два первых уравнения, решаем их:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 - x_3, \\ x_1 - x_2 = 3 - 2x_3 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 5(2 - x_3)/3, \\ x_2 = (1 + x_3)/3. \end{cases}$$

Получаем общее и базисное решения:

$$\vec{x}_{\text{об}} = (5(2 - c)/3, (1 + c)/3, c); \vec{x}_{\text{б}} = (10/3, 1/3, 0).$$

Общее решение соответствующей однородной системы (нашей системы с нулевыми правыми частями) равно $\vec{x}_{\text{об од}} = (-5c/3, c/3, c) = c(-5/3, 1/3, 1)$. Поэтому справедливо равенство $\vec{x}_{\text{об}} = \vec{x}_{\text{об од}} + \vec{x}_{\text{б}}$.

Пример 2.6

Проверим совместность еще одной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 0 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Решение

Имеем $|A|=0$; $\operatorname{rang} A=2$, а $\operatorname{rang}\bar{A}=3$. В последнем равенстве легко убедиться, если мы заменим третий столбец матрицы A столбцом свободных членов (полученный определитель равен –4). Следовательно, система несовместна.

2.4. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Изложенный выше материал широко применяется для анализа экономических ситуаций в рамках различных моделей, известнейшим представителем которых является модель Леонтьева.

Рассматривается n отраслей экономики, каждая из которых выпускает свой продукт в количестве x_i, $i = 1, 2, ..., n$. Данную величину можно рассматривать также как затраты i-й отрасли. Часть этого продукта x_{ij} передается в j-ю отрасль, $j = 1, 2, ..., n$, для дальнейшего производства, а остаток y_i передается потребителю. Все величины даются в стоимостном выражении. Уравнение баланса имеет вид $x_i = \sum\limits_j x_{ij} + y_i$ для всех i.

В сложившейся экономической системе (в «спокойном» состоянии) сохраняется пропорциональность в распределении продукта, поэтому справедливо равенство $x_{ij} = a_{ij}x_j$, где a_{ij} — коэффициент прямых затрат, который показывает затраты отрасли i на производство единицы продукта j. Теперь уравнение баланса можно записать только через общие затраты каждой из отраслей: $x_i = \sum\limits_j a_{ij}x_j + y_j$. В матричном виде данное уравнение можно переписать как $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ или $(E - A)\vec{x} = \vec{y}$, где A — матрица коэффициентов a_{ij}; E — единичная матрица, а векторы равны соответственно $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$.

Матрица A называется *матрицей прямых затрат*. Она используется, когда известен вектор $\vec{x}$ и нужно найти вектор $\vec{y}$. Если же известен вектор $\vec{y}$, то вектор $\vec{x}$ находится из *уравнения Леонтьева*: $\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}$. Матрица $S = (E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*. Если все компоненты матрицы A неотрицательны и все компоненты векторов тоже неотрицательны, то матрицу A и модель Леонтьева называют *продуктивной*.

Существует следующий критерий продуктивности матрицы A с неотрицательными элементами: $\sum\limits_i a_{ij} \le 1$ для всех j, причем хотя бы для одного столбца неравенство должно быть строгим. Критерий этот следует из уравнения баланса и условия неотрицательности всех компонент векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$.

Пример 2.7

Пусть матрица прямых затрат имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, а вектор затрат равен $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Найдем вектор потребления $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Решение

$$\vec{y} = (E - A)\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}3 \\ 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите методы решения системы линейных уравнений.
2. Какое решение системы линейных уравнений называется общим, а какое — базисным?
3. Что показывает ранг основной и расширенной матрицы системы уравнений?
4. В чем состоит условие совместности системы линейных уравнений?
5. Что такое фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений?

Практикум по решению задач

Упражнение 2.1. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 12, \\ 3x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

методами: а) обратной матрицы, б) Крамера и в) Гаусса.

Решение

а) Прежде чем решать систему линейных уравнений, следует убедиться, что определитель матрицы нашей системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ отличен от нуля: $|A| = \Delta = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) = 7.$ Для матрицы размером 2×2, как было указано в предыдущей главе, присоединенная матрица получается перестановкой элементов на главной диагонали и изменением знака других элементов: $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Обратная же матрица $A^{-1} = A' / \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \dfrac{1}{7}.$ Неизвестный вектор $\vec{x}$ находится умножением обратной матрицы на вектор свободных членов:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 12 + 2 \\ -3 \cdot 12 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Подстановкой $x_1 = 2; x_2 = -5$ в исходную систему уравнений убеждаемся, что полученное решение верно.

б) При решении методом Крамера необходимо, помимо определителя системы $\Delta = 7$, вычислить еще и дополнительные определители, которые получаются из главного определителя заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов: $\Delta_1 = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 12 + 2 = 14;$ $\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = 1 - 36 = -35.$ Решение вычисляется по формулам $x_1 = \Delta_1 / \Delta = 2;$ $x_2 = \Delta_2 / \Delta = -5.$

в) Для получения решения методом Гаусса следует привести систему уравнений к ступенчатому виду. В нашем простом случае это выполняется в одно действие. Заменяя второе уравнение его разностью с утроенным первым и сохраняя первое уравнение неизменным, приходим к эквивалентной системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 12, \\ 7x_2 = -35. \end{cases}$$

Решая эти уравнения последовательно, начиная со второго, получим решение $x_1 = 2;\ \ x_2 = -5$, справедливость которого мы уже проверили выше.

Упражнение 2.2. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$$

методами: а) обратной матрицы, б) Крамера и в) Гаусса.

Решение

а) Проверим, что определитель матрицы нашей системы $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Действительно, $\Delta = 1\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot2 + 1\cdot3\cdot3 - (2\cdot1\cdot3 + 1\cdot2\cdot1 + 3\cdot1\cdot1) = 3$. Следовательно, решение нашей системы единственно. Обратную матрицу будем искать методом элементарных преобразований. Для этого формируем большую матрицу и, комбинируя строки, превращаем левую половину этой матрицы в единичную:

$$(A\,|\,E) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - C_1 \to C_2 \\ C_3 - 2C_1 \to C_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 - C_2 \to C_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 + C_3 \to C_1 \\ C_2 - 2C_3/3 \to C_2 \\ C_3/(-3) \to C_3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C_1 + 2C_2 \to C_1 \\ C_2 \cdot (-1) \to C_2 \\ C_3 \to C_3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/3 & 7/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

В правой части нашей большой матрицы стоит обратная матрица A^{-1}. Решение системы будет

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{pmatrix} -2/3 & 7/3 & -1/3 \\ 1/3 & -5/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-28+42-11)/3 \\ (14-30+22)/3 \\ (14+6-11)/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

В справедливости полученного решения $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3$ убеждаемся подстановкой его в исходную систему уравнений.

б) При решении методом Крамера необходимо, помимо определителя системы $\Delta = 3$, вычислить еще и дополнительные определители, которые получаются из главного определителя заменой соответствующего столбца столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} 14 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 1 \\ 11 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 14\cdot1\cdot1 + 2\cdot1\cdot11 + 6\cdot3\cdot3 - (11\cdot1\cdot3 + 6\cdot2\cdot1 + 3\cdot1\cdot14) = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 14 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot6\cdot1 + 14\cdot1\cdot2 + 1\cdot11\cdot3 - (2\cdot6\cdot3 + 11\cdot1\cdot1 + 1\cdot14\cdot1) = 6;$$

$$\Delta_3=\begin{pmatrix}1&2&14\\1&1&6\\2&3&11\end{pmatrix}=1\cdot1\cdot11+2\cdot6\cdot2+1\cdot3\cdot14-(2\cdot1\cdot14+3\cdot6\cdot1+1\cdot2\cdot11)=9.$$

Решение вычисляется по формулам $x_1=\Delta_1/\Delta=1;\ x_2=\Delta_2/\Delta=2;\ x_3=\Delta_3/\Delta=3.$

в) Для получения решения методом Гаусса следует привести систему уравнений к ступенчатому виду. Складывая и вычитая строки, приходим к эквивалентной системе уравнений:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\x_1+x_2+x_3=6,\\2x_1+3x_2+x_3=11\end{cases}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2-C_1\to C_2\\C_3-2C_1\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\-x_2-2x_3=-8,\\-x_2-5x_3=-17\end{cases}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3-C_2\to C_3\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=14,\\-x_2-2x_3=-8,\\-3x_3=-9.\end{cases}$$

Решаем последовательно уравнения, начиная с последнего, и получаем

$$x_3=-9/(-3)=3;\ x_2=-(-8+2x_3)=2;\ x_1=14-2x_2-3x_3=1,$$

или в векторном виде $\bar{x}=(1,2,3)$.

Упражнение 2.3. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\2x_1+x_2-x_3+x_4=9,\\-x_1+3x_2+x_3+2x_4=6,\\3x_1-x_2+2x_3-2x_4=-3.\end{cases}$$

Решение

Системы, состоящие из большого числа уравнений, обычно рациональнее всего решать методом Гаусса, приводя исходную систему уравнений к ступенчатому виду, а затем последовательно, снизу вверх, решаем уравнения нашей системы:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\2x_1+x_2-x_3+x_4=9,\\-x_1+3x_2+x_3+2x_4=6,\\3x_1-x_2+2x_3-2x_4=-3\end{cases}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2-2C_1\to C_2\\C_3+C_1\to C_3\\C_4-3C_1\to C_4\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\-3x_2-5x_3+3x_4=11,\\5x_2+3x_3+x_4=5,\\-7x_2-4x_3+x_4=0\end{cases}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3+5C_2/3\to C_3\\C_4-7C_2/3\to C_4\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\-3x_2-5x_3+3x_4=11,\\-16x_3/3+6x_4=70/3,\\23x_3/3-6x_4=-77/3\end{cases}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\C_3\to C_3\\C_4+23C_3/16\to C_4\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\-3x_2-5x_3+3x_4=11,\\-16x_3/3+6x_4=70/3,\\21x_4/8=63/8\end{cases}\to\begin{pmatrix}C_1\to C_1\\C_2\to C_2\\-3C_3\to C_3\\8C_4/21\to C_4\end{pmatrix}\to\begin{cases}x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1,\\-3x_2-5x_3+3x_4=11,\\8x_3-9x_4=-35,\\x_4=3\end{cases}\to$$

$$\to\begin{cases}x_1=-1-2x_2-2x_3+x_4,\\x_2=(11+5x_3-3x_4)/(-3),\\x_3=(-35+9x_4)/8,\\x_4=3\end{cases}\to\begin{cases}x_1=2,\\x_2=1,\\x_3=-1,\\x_4=3.\end{cases}$$

Упражнение 2.4. Найдем общее и какие-нибудь два базисных решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=9, \\ -x_1+x_2+3x_3-2x_4=-10, \\ 4x_1+5x_2+3x_3-x_4=7. \end{cases}$$

Решение

Приводим систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+x_2-x_3+x_4=9, \\ -x_1+x_2+3x_3-2x_4=-10, \\ 4x_1+5x_2+3x_3-x_4=7 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1\to C_1 \\ C_2-2C_1\to C_2 \\ C_3+C_1\to C_3 \\ C_4-4C_1\to C_4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1, \\ -3x_2-5x_3+3x_4=11, \\ 3x_2+5x_3-3x_4=-11, \\ -3x_2-5x_3+3x_4=11. \end{cases}$$

Видим, что третье уравнение отличается от второго множителем (-1), а четвертое уравнение совпадает с первым. Следовательно, последние два уравнения являются линейно зависимыми и могут быть отброшены (они выполняются автоматически, если справедливы первые два). Таким образом, мы имеем дело с системой только из двух уравнений с четырьмя неизвестными

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3-x_4=-1, \\ -3x_2-5x_3+3x_4=11. \end{cases}$$

Выберем в качестве свободных переменные x_3 и x_4, тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1+2x_2=-1-2x_3+x_4, \\ -3x_2=11+5x_3-3x_4. \end{cases}$$

Решая ее относительно базисных переменных x_1 и x_2, получим общее решение в виде

$$\vec{x}(\{c_i\})_{\text{общ}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 19/3+4c_1/3-c_2 \\ -11/3-5c_1/3+c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Чтобы подчеркнуть, что свободные переменные могут принимать любые значения, их переобозначили: $x_3=c_1$; $x_4=c_2$. Базисное решение получается, если мы положим $c_1=c_2=0$, тогда

$$\vec{x}_{\text{баз}}=\begin{pmatrix} 19/3 \\ -11/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что мы можем по-другому разбить переменные на свободные и базисные. Пусть, например, свободными переменными будут x_2 и x_3 (их мы теперь обозначим $x_2=c_1$; $x_3=c_2$). Решая ту же самую систему уравнений относительно базисных переменных x_1 и x_4, получим в другом виде общее решение

$$\vec{x}(\{c_i\})_{\text{общ}}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8/3-c_1-c_2/3 \\ c_1 \\ c_2 \\ 11/3+c_1+5c_2/3 \end{pmatrix}$$

и другое базисное решение $\vec{x}'_{\text{баз}} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 0 \\ 0 \\ 11/3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 2.5. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 9. \end{cases}$$

Решение

Приводим систему уравнений к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -10, \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - 4C_1 \to C_4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ -3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 11, \\ 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -11, \\ -3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 13 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 \to C_2 \\ C_3 + C_2 \to C_3 \\ C_4 - C_2 \to C_4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ -3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 11, \\ 0 + 0 + 0 = 0, \\ 0 + 0 + 0 = 13. \end{cases}$$

Оказалось, что система уравнений не имеет решения.

Заметим, что ранг основной матрицы равен 2 (можно взять минор на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$). Ранг же расширенной матрицы равен 3. В качестве ненулевого минора третьего порядка можно выбрать минор на пересечении 1-й, 2-й и 4-й строк и 1-го, 2-го столбца и столбца свободных членов: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -39$. Согласно теореме Кронекера — Капелли такая система линейных уравнений не имеет решения.

Упражнение 2.6. Решим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему решений и выразим через нее общее решение.

Решение

Приводя систему уравнений к ступенчатому виду, замечаем, что независимых уравнений только два:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - 3C_1 \to C_4 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0, \\ -3x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения пропорциональны второму уравнению и могут быть опущены. Таким образом, фактически у нас система двух уравнений с четырьмя неизвестными. Выберем в качестве свободных переменных $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$ и выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -2c_1 + c_2, \\ -3x_2 = 5c_1 - 4c_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 4c_1/3 - 5c_2/3, \\ x_2 = -5c_1/3 + 4c_2/3. \end{cases}$$

Общее решение

$$\vec{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 4c_1/3 - 5c_2/3 \\ -5c_1/3 + 4c_2/3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

В качестве фундаментальной системы решений выберем решение, соответствующее $c_1 = 1, c_2 = 0$, и решение, соответствующее $c_1 = 0, c_2 = 1$, т.е.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда можно записать

$$\vec{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 4c_1/3 - 5c_2/3 \\ -5c_1/3 + 4c_2/3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -5/3 \\ 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2.$$

Упражнение 2.7. Решим однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 14. \end{cases}$$

Решение представим в виде суммы общего решения соответствующей одродной системы и частного решения исходной неоднородной системы.

Решение

Методом Гаусса решаем соответствующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - 4C_1 \to C_4 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 0 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 0 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0, \\ 0 - 3x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{pmatrix} C_1 \to C_1 \\ C_2 - 2C_1 \to C_2 \\ C_3 + C_1 \to C_3 \\ C_4 - 4C_1 \to C_4 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что последние два уравнения линейно зависимы от первых и могут быть отброшены. Обозначая $x_3 = c_1$; $x_4 = c_2$, решаем систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2c_1 + c_2, \\ -3x_2 = 5c_1 - 3c_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = -c_1/3, \\ x_2 = -5c_1/3 + c_2. \end{cases}$$

Легко проверить, что, делая те же самые преобразования над строками исходной системы, мы приходим к системе двух независимых уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 - 2c_1 + c_2, \\ -3x_2 = -6 + 5c_1 - 3c_2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 3 - c_1 / 3, \\ x_2 = 2 - 5c_1 / 3 + c_2. \end{cases}$$

В качестве частного решения неоднородной системы можно выбрать базисное решение, в котором $c_1 = c_2 = 0$. Таким образом, общее решение неоднородной системы можно записать в виде

$$\vec{x}_{\text{общ}} = \begin{pmatrix} 3 - c_1 / 3 \\ 2 - 5c_1 / 3 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1 / 3 \\ -5c_1 / 3 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где первое слагаемое в правой части последнего равенства есть общее решение однородной системы, а второе — частное решение неоднородной системы.

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найдите решение системы уравнений методами обратной матрицы, Крамера и Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 14, \\ 3x_1 - 2x_2 = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$

2.2. Найдите решение системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 6. \end{cases}$

2.3. Найдите общее и базисное решения системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 15, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 15. \end{cases}$

2.4. Найдите фундаментальную систему решений системы уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 7x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

Глава 3
ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ОПЕРАТОРЫ) И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

При разработке моделей, в которых конкретные системы характеризуются векторными параметрами, естественно возникает необходимость описания преобразования векторов. Общий подход к такой задаче и примеры преобразований изложены в этой главе. Усвоив представленный материал, учащийся должен знать основные положения теории линейных операторов, уметь рассчитывать действия оператора на вектор, находить собственные векторы и собственные значения оператора и исследовать знакоопределенность квадратичных форм, уметь переходить в предложенной задаче к удобной системе координат, а также овладеть навыками решения указанных задач.

3.1. Линейный оператор и его матрица

Рассмотрим два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m.

Определение 3.1. Если задано правило, по которому каждому вектору $\vec{x}$ из R^n ставится в соответствие единственный вектор $\vec{y}$ из R^m, то говорят, что задан *оператор* $\hat{A}(\vec{x})$, действующий из R^n в R^m, и записывают $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$.

Оператор называется *линейным*, если для любых векторов $\vec{x}$ и $\vec{z}$ из R^n и любого числа λ выполняются соотношения:

1) $\hat{A}(\vec{x}+\vec{z}) = \hat{A}(\vec{x}) + \hat{A}(\vec{z})$ — свойство аддитивности оператора;

2) $\hat{A}(\lambda\vec{x}) = \lambda\hat{A}(\vec{x})$ — свойство однородности оператора.

Вектор $\vec{y} = \hat{A}(\vec{x})$ называется *образом* вектора $\vec{x}$, который, в свою очередь, является *прообразом* вектора $\vec{y}$. Вместо термина «линейный оператор» используют также термин «линейное преобразование». Если пространства R^n и R^m совпадают, то говорят, что оператор отображает векторное пространство само на себя. Именно такие операторы мы и будем рассматривать.

Установим, как можно математически описать действие конкретного линейного оператора на вектор.

Выберем в нашем пространстве ортонормированный базис $\{\vec{e}_i\}$, через который можно выразить векторы $\vec{x} = \sum\limits_i x_i\vec{e}_i$ и $\vec{y} = \sum\limits_i y_i\vec{e}_i$, где i = 1, 2, ..., n. В силу линейности оператора можно записать $\hat{A}(\vec{x}) = x_1\hat{A}(\vec{e}_1) + x_2\hat{A}(\vec{e}_2) + \ldots +$

$+x_n\hat{A}(\vec{e}_n)$. Разложим действие оператора на каждый из базисных векторов $\vec{e}_i$ по этим же базисным векторам: $\hat{A}(\vec{e}_i)=a_{1i}\vec{e}_1+a_{2i}\vec{e}_2+\ldots+a_{ni}\vec{e}_n$. Подставляя полученные разложения в уравнение $\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})$, придем к системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=y_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=y_n. \end{cases}$$

Матрица A коэффициентов a_{ij} называется матрицей оператора $\hat{A}$. Замечаем, что i-й столбец матрицы оператора состоит из коэффициентов разложения результата действия оператора на i-й базисный вектор. Видим, что действие нашего оператора на вектор эквивалентно умножению его матрицы на этот вектор: $\hat{A}(\vec{x})=A\vec{x}$. Мы в параграфе о вычислении обратной матрицы уже сталкивались с матрицами O_1, O_2, O_3, соответствующими некоторым операторам.

Приллюстрируем изложенную выше процедуру построения матрицы оператора для двумерного евклидова пространства. Выберем в пространстве ортонормированный базис

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix};\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Результат действия линейного оператора $\hat{A}$ на каждый вектор базиса определяется равенствами

$$\hat{A}(\vec{e}_1)=a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2 \text{ и } \hat{A}(\vec{e}_2)=a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2.$$

В силу линейности оператора результат его действия на произвольный вектор $\vec{x}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2$ можно описать следующими соотношениями:

$$\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})=x_1\hat{A}(\vec{e}_1)+x_2\hat{A}(\vec{e}_2).$$

Подставляя формулы для результата действия линейного оператора на базисные векторы в последнее равенство, получим

$$\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})=x_1\hat{A}(\vec{e}_1)+x_2\hat{A}(\vec{e}_2)=x_1(a_{11}\vec{e}_1+a_{21}\vec{e}_2)+x_2(a_{12}\vec{e}_1+a_{22}\vec{e}_2)=$$
$$=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)\vec{e}_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)\vec{e}_2.$$

Пропуская промежуточные равенства, итог запишем в матричном виде:

$$\vec{y}=\hat{A}(\vec{x})=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2\\a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A\vec{x}.$$

Видим, что действие оператора на произвольный вектор можно представить как умножение на этот вектор определенной матрицы. Первый столбец этой матрицы образуют коэффициенты разложения по базису вектора $\hat{A}(\vec{e}_1)$, а второй столбец — коэффициенты разложения вектора $\hat{A}(\vec{e}_2)$.

Приведем некоторые примеры линейных операторов, действующих в двумерном евклидовом пространстве:

1) оператор поворота на угол φ относительно оси x в положительном направлении (против часовой стрелки) задается матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix};$$

2) оператор отражения относительно оси x задается матрицей

$$A_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

3) оператор отражения относительно оси y задается матрицей

$$A_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

4) оператор растяжения в a раз вдоль оси x и в b раз вдоль оси y задается матрицей

$$A_{ab} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Хотелось бы отметить свойство операторов, обладающих вырожденной матрицей (определитель которой равен нулю). В вырожденной матрице второго порядка вторая строка должна быть пропорциональной первой строке: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ pa_{11} & pa_{12} \end{pmatrix}$. При умножении такой матрицы на произвольный вектор $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ pa_{11} & pa_{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ p\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2\right) \end{pmatrix}.$$

Получаем, что после такого преобразования у всех векторов отношения компонент равны одному и тому же числу p. Следовательно, все такие векторы лежат на одной и той же прямой (имеют одинаковое направление) и принадлежат одномерному пространству. Это явление уменьшения размерности пространства под действием вырожденного оператора носит общий характер. Таким образом, любой линейный оператор с вырожденной матрицей сужает векторное пространство.

Преобразование координат вектора при переходе к другому базису. Выше мы рассматривали задачу линейного преобразования всех векторов пространства, но при этом и начальные векторы, и их образы мы описывали в одном и том же базисе. Важной является и другая постановка задачи: все векторы пространства остаются без изменения, но описываются в другом базисе. Рассмотрим пример перехода к другому базису с помощью линейного преобразования. Пусть в двумерном векторном пространстве выбран базис $\{\vec{e}_i\}$, по которому мы раскладываем произвольный вектор

$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Переход к другому базису $\{\vec{e}_i'\}$ осуществляется с помощью линейного оператора с матрицей $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, так что

$$\vec{e}_1' = P\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} \text{ и } \vec{e}_2' = P\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь мы все векторы нашего пространства (в том числе и вектор $\vec{x}$) будем раскладывать по новому базису, т.е. $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2'$. Наша задача — установить связь между координатами одного и того же вектора в разных базисах. Приравняем разложения вектора в разных базисах, выразив новые базисные векторы через старые:

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' = x_1'(p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2) + x_2'(p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2) =$$
$$= (p_{11}x_1' + p_{12}x_2')\vec{e}_1 + (p_{21}x_1' + p_{22}x_2')\vec{e}_2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых старых базисных векторах в обеих частях равенства, получаем

$$x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' \text{ и } x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2'.$$

Эти два равенства можно объединить в одно матричное равенство

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}.$$

Если символами $\vec{x}, \vec{x}'$ мы обозначим один и тот же вектор, записанный в старых и новых координатах соответственно, то последнее равенство можно представить в компактном виде: $\vec{x} = P\vec{x}'$. Данное соотношение носит общий характер. Доказательство его справедливости для векторных пространств любой размерности аналогично рассуждениям, приведенным выше.

3.2. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение 3.2. Вектор $\vec{x}$ называется *собственным вектором* оператора $\hat{A}$, если существует такое число λ, что справедливо равенство $\hat{A}(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$. При этом число λ называется *собственным значением* оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному вектору $\vec{x}$. Таким образом, линейный оператор может изменить лишь длину своих собственных векторов.

Указанное выше операторное уравнение можно представить в матричной форме: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ или, что то же самое, $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$, где E — единичная матрица. Данные матричные равенства равносильны системам линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases} \text{или} \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Определитель последней однородной системы уравнений $\left|A-\lambda E\right|$ является многочленом n-й степени относительно λ. Он назван *характеристическим многочленом* оператора $\hat{A}$ или матрицы A. Интересно, что характеристический многочлен $P_n(\lambda)$ не зависит от выбора базиса.

Так как ненулевые решения однородной системы уравнений возможны лишь при равном нулю определителе системы, мы должны приравнять наш многочлен нулю. Таким образом, мы получаем уравнение n-й степени $P_n(\lambda)=0$. Оно называется *характеристическим* или *секулярным* уравнением и может иметь n различных корней, каждый из которых соответствует своему собственному вектору. Если при этом все собственные векторы линейно независимы, их можно выбрать в качестве базиса. В этом базисе матрица оператора $\hat{A}$ будет диагональной.

Покажем процедуру нахождения собственных векторов и собственных значений линейного оператора на простом примере.

Пример 3.1

Пусть линейный оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Найдем собственные векторы и собственные значения.

Решение

Система для поиска собственных векторов $\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$ и собственных значений λ имеет вид

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+3x_2=0,\\ 2x_1+(1-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение только в том случае, если ее определитель равен нулю. В нашем случае имеет место равенство

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

Вычисляя определитель, приходим к характеристическому уравнению $\lambda^2-3\lambda-4=0$. Оно имеет два решения $\lambda^{(1)}=4$; $\lambda^{(2)}=-1$. Равенство нулю определителя при полученных значениях параметра λ означает линейную зависимость уравнений. Действительно, наша система при $\lambda=4$ примет вид

$$\begin{cases}-2x_1+3x_2=0,\\ 2x_1-3x_2=0,\end{cases}$$

а при $\lambda=-1$

$$\begin{cases}3x_1+3x_2=0,\\ 2x_1+2x_2=0.\end{cases}$$

Видим, что в обоих случаях второе уравнение совпадает с первым с точностью до множителя и может быть отброшено. Так как у нас остается только одно значащее уравнение, то мы можем найти только связь между компонентами собственного вектора ($x_2=2x_1/3$ — для $\lambda=4$ и $x_2=-x_1$ в случае $\lambda=-1$), а не их определенные значения, т.е. мы находим только направления собственных векторов, а не их модули! Поэтому иногда собственные векторы называют собственными направлениями. Таким образом, мы можем наложить на собственные векторы дополнительные условия: потребовать, например, чтобы они были единичной длины или чтобы одна из компонент была равна единице. Потребуем в нашем примере, чтобы первые компоненты собственных векторов равнялись единице. Тогда наши собственные векторы и собственные значения можно записать в виде $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, $\lambda^{(1)} = 4$ и $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda^{(1)} = -1$.

Номера собственных векторов и собственных значений (см. выше) мы указываем верхними индексами, чтобы не путать их с номерами компонент векторов.

Заметим, что иногда в рассмотренных выше задачах собственные значения и собственные векторы приписывают матрице (а не оператору).

К сожалению, не всегда уравнение n-й степени имеет ровно n действительных корней (вспомним квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом). Нас же интересуют ситуации, когда все собственные значения оператора действительны. Оказывается, что операторы, матрица которых равна своей транспонированной матрице, имеют только действительные собственные значения. Кроме того, собственные векторы таких операторов, соответсвующие разным собственным значениям, обязательно ортогональны. Указанные выше матрицы и соответствующие им операторы называются симметрическими. Приведем доказательства этих свойств на примере операторов, действующих в двумерных векторных пространствах.

Рассмотрим матрицу симметрического оператора $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$, в которой на симметричных относительно главной диагонали местах стоят одинаковые числа. Секулярное уравнение для собственных значений такого оператора имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель, приходим к квадратному уравнению

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0,$$

которое, очевидно, имеет два действительных корня:

$$\lambda^{(1,2)} = \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}}{2} =$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22} \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Действительно, дискриминант данного уравнения не может быть меньше нуля. Равен нулю он только при $a_{11} = a_{22}$; $a_{12} = 0$. В этом случае матрица оператора диагональна и имеется два одинаковых собственных значения $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = a_{11}$. Легко заметить, что для такого оператора любой вектор является собственным:

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{11}x_2 \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

В данной ситуации можно выбрать в качестве базиса любые два ортогональных единичных вектора.

Найдем теперь собственные векторы $\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1{}^{(1)} \\ x_2{}^{(1)} \end{pmatrix}$; $\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1{}^{(2)} \\ x_2{}^{(2)} \end{pmatrix}$, соответствующие разным собственным значениям. Для собственных значений $\lambda^{(1,2)}$ уравнения системы для нахождения компонент собственного вектора $(A - \lambda^{(i)}E)\vec{x}^{(i)} = 0$, $i = 1, 2$, являются линейно зависимыми и можно рассматривать только одно из них. Так, из первого уравнения

$$(a_{11} - \lambda^{(i)})x_1{}^{(i)} + a_{12}x_2{}^{(i)} = 0$$

получаем

$$x_2{}^{(i)} = \frac{(a_{11} - \lambda^{(i)})x_1{}^{(i)}}{a_{12}} = \frac{a_{11} - \lambda^{(i)}}{a_{12}}.$$

Здесь мы положили первые компоненты обоих собственных векторов равными единице: $x_1{}^{(1)} = x_1{}^{(2)} = 1$. Мы всегда можем это сделать, так как собственные векторы определяются с точностью до своего модуля. Подставляя в формулу для вторых компонент собственных векторов явные выражения для собственных значений, получаем

$$x_2^{(1)} = \frac{a_{11} - a_{22} - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}};\ x_2^{(2)} = \frac{a_{11} - a_{22} + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}}.$$

Скалярное произведение собственных векторов

$$(\vec{x}^{(1)}, \vec{x}^{(2)}) = x_1^{(1)}x_1^{(2)} + x_2^{(1)}x_2^{(2)}.$$

Первое слагаемое равно 1 (согласно нашему выбору), а второе равно

$$\frac{(a_{11} - a_{22})^2 - (a_{11} - a_{22})^2 - 4a_{12}^2}{4a_{12}^2} = -1.$$

Таким образом, мы показали (на примере двумерных евклидовых пространств), что все собственные значения симметрических операторов действительны, а сами собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, ортогональны.

Заметим, что действительными собственными значениями могут обладать не только симметрические, но и линейные операторы других видов (см. разобранный выше пример с конкретной матрицей).

В случае если оператор, действующий в n-мерном векторном пространстве, имеет n ортогональных собственных векторов, последние могут быть выбраны в качестве базисных. Матрица оператора в этом новом базисе обязательно диагональна. Поясним это утверждение опять-таки на примере двумерных векторов. Пусть базисные векторы $\vec{e}_1 = (1, 0)$ и $\vec{e}_2 = (0, 1)$ являются собственными для оператора $\hat{A}$, а его матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

При умножении этой матрицы на каждый из ортонормированных базисных векторов (собственных для $\hat{A}$) получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Видим, что вторая компонента в правой части первого равенства (a_{21}) и первая компонента в правой части второго равенства (a_{12}) должны быть равны нулю. Диагональные же элементы матрицы оператора равны соответствующим собственным значениям — $a_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$. Напомним, что δ_{ij} — символ Кронекера (элементы единичной матрицы). Таким образом, матрица оператора в базисе собственных векторов является диагональной с диагональными элементами, равными соответствующим собственным значениям.

В качестве примера применения понятия собственных векторов при описании экономических процессов рассмотрим модель международной торговли.

Линейная модель обмена. Пусть имеется n стран, национальные доходы которых равны соответственно $x_1, x_2, ..., x_n$. Величина a_{ij} — доля национального дохода j-й страны, которую она тратит на закупки товаров у i-й страны. Если весь национальный доход любой страны тратится на закупки товаров у себя или у других стран (нет накопления), то справедливо равенство $\sum_i a_{ij} = 1$ (для всех j = 1, 2, ..., n), которое назовем условием нормировки. Величина $a_{ij}x_j$ есть объем закупок страной j у страны i и одновременно это выручка i-й страны от торговли с j-й страной. Рассмотрим структурную матрицу торговли A, образованную элементами a_{ij}. Выручка любой i-й страны от ее внешней и внутренней торговли равна $p_i = \sum_j a_{ij} x_j$. Вводя векторы $\vec{p}$ и $\vec{x}$, из последнего равенства получим $\vec{p} = A\vec{x}$. Для бездефицитной торговли необходимо, чтобы выручка от торговли каждой страны была не меньше ее национального дохода: $p_i \geq x_i$ (т.е. для торговли без убытка). Таким образом, приходим к системе неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \geq x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \geq x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n \geq x_n. \end{cases}$$

Сложив их, с учетом условия нормировки приходим к соотношению $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_n$, которое, очевидно, может быть только равенством. Равенство же возможно только при наличии точного равенства во всех строках последней системы (чтобы никто не имел неоправданную прибыль и никто не был обманутым). Таким образом, правильное соотношение есть $p_i = x_i$ для всех i, или в матричном виде $A\vec{x} = \vec{x}$. Задача свелась к нахождению собственного вектора $\vec{x}$ для матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda = 1$.

Рассмотрим пример двух стран: матрица $A = \begin{pmatrix} 1/4 & 2/3 \\ 3/4 & 1/3 \end{pmatrix}$ приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{4} + \dfrac{2x_2}{3} = x_1, \\ \dfrac{3x_1}{4} + \dfrac{x_2}{3} = x_2. \end{cases}$$

Следует помнить, что в данном случае мы ищем только отношение национальных доходов, так как имеем однородную систему уравнений. Ее решение есть $x_1 = 8x_2 / 9$.

Но ведь не все матрицы имеют собственное значение, равное 1. Нужны ли какие-то дополнительные условия на структурную матрицу, чтобы рассматриваемая задача имела решение? Оказывается, что условие нормировки обеспечивает наличие собственного значения, равного 1. Проиллюстрируем это на примере двумерной матрицы. Согласно условию нормировки сумма элементов каждого столбца структурной матрицы равна 1. Найдем собственные значения структурной матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{pmatrix}$; $a, b \geq 0$. Они находятся из характеристического уравнения $\left|A - \lambda E\right| = 0$:

$$\lambda^2 - \lambda(a + 1 - b) + a(1 - b) - b(1 - a) = 0,$$

или

$$\lambda^2 - \lambda(a - b + 1) + a - b = 0.$$

По теореме Виета находим корни этого уравнения: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = a - b$.

3.3. Квадратичная форма

Определение 3.3. *Квадратичной формой* назывется функция n переменных x_i, $i = 1, 2, ..., n$, имеющая вид

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(x_i \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j \right).$$

Данная функция представляет собой линейную комбинацию квадратов всех переменных и всех их парных произведений. Легко заметить, что если мы умножим каждую переменную на одно и то же число, то вся функция умножится на квадрат этого числа. Функции, обладающие таким свойством, называются *однородными функциями степени 2*.

Любую квадратичную форму можно записать в более компактном симметричном виде. Введем новые коэффициенты a_{ij} согласно следующим правилам:

1) для $i = j$ $a_{ii} = b_i$;

2) для $i < j$ $a_{ij} = 0{,}5c_{ij}$;

3) для $i > j$ $a_{ij} = 0{,}5c_{ji}$ (величины c_{ij} определены, только если второй индекс больше первого).

С новыми коэффициентами наша квадратичная форма примет вид

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

в котором оба индекса в двойной сумме равноправны и независимо друг от друга пробегают все значения от 1 до n. Если переменные x_i считать компонентами вектора $\vec{x}$, то квадратичную форму можно записать в матричных обозначениях, а именно

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \vec{x}^T A \vec{x},$$

где квадратная матрица n-го порядка A составлена из коэффициентов a_{ij}. Она называется *матрицей квадратичной формы*. Вектор $\vec{x}$ является вектор-столбцом, а транспонированный вектор $\vec{x}$ — это вектор-строка с теми же компонентами, который обозначается $\vec{x}^T$. Можно сказать, что квадратичная форма является функцией от вектора: $F(x_1, x_2, ..., x_n) = F(\vec{x})$.

Поясним процедуру представления квадратичной формы в матричном виде на простом примере.

Пример 3.2

Рассмотрим квадратичную форму $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_1x_2$.

Решение

В заданной форме имеем коэффициенты $b_1 = 1$; $b_2 = 2$; $c_{12} = 6$. Переход к новым коэффициентам происходит по формулам $a_{11} = 1$; $a_{22} = 2$; $a_{21} = 3$, т.е. недиагональные элементы матрицы A получаются делением коэффицентов при смешанных произведениях соответствующих переменных пополам, а диагональные элементы просто равны коэффициентам в функции F при квадратах переменных. Матрица квадратичной формы и матричная запись этой формы имеют вид соответственно

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}; \; F(x_1, x_2) = (x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что данная матричная формула дает правильный результат. Умножая матрицу на вектор-столбец, получим другой вектор-столбец:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}.$$

Умножая затем на него слева вектор-строку, окончательно получим скалярную величину:

$$F = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1(x_1 + 3x_2) + x_2(3x_1 + 2x_2) = x_1^2 + 6x_1x_2 + 2x_2^2.$$

В практических задачах возникает необходимость исследования поведения квадратичной формы при изменении переменных. В случае, когда переменных много, это становится затруднительным. Задача резко упрощается, если все коэффициенты при смешанных произведениях равны нулю (матрица квадратичной формы является диагональной). В этом случае говорят, что квадратичная форма задана в *каноническом* (*нормальном*) *виде*. Отклонение от нуля переменной в этой ситуации приводит к росту или уменьшению функции F в зависимости от того, какой знак стоит при квадрате этой переменной. Если все элементы в диагональной матрице квадратичной формы имеют один и тот же знак, то такая форма называется *знакоопределенной*.

Учитывая вышесказанное, представляется важным найти такую замену переменных, которая приведет исследуемую квадратичную к нормальному виду. Здесь мы ограничимся поиском только линейных преобразований, приводящих к указанной цели. Ниже изложим два метода приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Метод Лагранжа. Начнем с конкретного примера.

Пример 3.3

Дана квадратичная форма

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1{}^2 + 2x_2{}^2 - x_3{}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Приведем ее к нормальному виду методом Лагранжа.

Решение

Суть метода состоит в последовательном выделении полного квадрата от линейных комбинаций, содержащих все меньшее число переменных. Эти линейные комбинации и будут новыми переменными. Выделим из функции F все слагаемые, содержащие x_1: $x_1{}^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$. Перед нами квадрат первой переменной плюс удвоенное произведение первой переменной на вторую и минус удвоенное произведение первой переменной на удвоенную третью. До полного квадрата не хватает квадрата второй переменной, квадрата удвоенной третьей переменной и удвоенного произведения второй переменной на удвоенную третью со знаком минус. Дополним рассматриваемый трехчлен до полного квадрата с последующей компенсацией добавленных членов (компенсирующие члены мы для удобства отделили от предыдущих пробелом):

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 \quad - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + x - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3.$$

Теперь функцию F можно записать в виде

$$F = (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 - x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_2x_3 + 2x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_2x_3.$$

Мы представили нашу квадратичную форму в виде суммы квадрата линейной комбинации $x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3$ и другой квадратичной формы $\tilde{F}(x_2, x_3) = x_2{}^2 - 5x_3{}^2 +$ $+6x_2x_3$, которая не содержит уже первой переменной. Матрица этой формы равна

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

В функции $\tilde{F}$ выделяем полный квадрат линейной комбинации $x_2' = x_2 + 3x_3$, вбирающей целиком в себя вторую переменную, и получаем $\tilde{F}(x_1, x_2) = (x_2 + 3x_3)^2 - 14x_3^2$. Теперь исходную квадратичную форму можно переписать в каноническом виде:

$$F(x_1', x_2', x_3') = x_1'^2 + x_2'^2 - 14x_3'^2,$$

где $x_1' = x_1 + x_2 - 2x_3$, $x_2' = x_2 + 3x_3$, $x_3' = x_3$. Матрица квадратичной формы будет диагональной:

$$A_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}.$$

Заметим по рассмотренному примеру, что коэффициенты в первой линейной комбинации совпадают с элементами первой строки матрицы A, а коэффициенты во второй линейной комбинации — с элементами первой строки матрицы $\tilde{A}$. Это свойство является общим для квадратичных форм любой размерности, если первый элемент матрицы равен 1. Но к этому виду любую квадратичную форму можно привести, вынося первый коэффициент за знак суммы в выражении для квадратичной формы как общий множитель. Указанное свойство помогает быстро выделить нужную линейную комбинацию при применении метода Лагранжа в конкретных задачах.

Приведем кратко *общую схему метода Лагранжа*. Пусть у нас есть квадратичная форма

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j .$$

Если $a_{11} = 1$, то, как показано в примере, в этой форме можно выделить квадрат линейной комбинации, включающий в себя все члены формы, содержащие x_1, т.е.

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i x_j,$$

где урезанная квадратичная форма $\tilde{F}(x_2, ..., x_n) = \sum\limits_{i,j=2}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i x_j$ уже не содержит первой переменной. Затем будет совершен переход к квадратичной форме, не содержащей первых двух переменных, и т.д., пока не выразим исходную квадратичную форму в виде суммы квадратов от линейных комбинаций наших переменных. Причем каждая последующая комбинация будет содержать, вообще говоря, меньше исходных переменных, чем предыдущая. Эти линейные комбинации и будут новыми переменными. Если $a_{11} \neq 1$, то мы разделим каждое слагаемое квадратичной формы на a_{11} и получим

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n \right)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} \tilde{a}_{ij} x_i x_j.$$

На следующем шаге процедуры придем к равенству

$$\tilde{F}(x_2, ..., x_n) = \tilde{a}_{22}\left(x_2 + \frac{\tilde{a}_{23}}{\tilde{a}_{22}} x_3 + ... + \frac{\tilde{a}_{2n}}{\tilde{a}_{22}} x_n \right)^2 + \sum_{i,j=3}^{n} \tilde{\tilde{a}}_{ij} x_i x_j$$

и т.д. Наша квадратичная форма будет записана как сумма квадратов от линейных комбинаций, указанных в скобках в правых частях вышеприведенных формул, а коэффициенты перед ними будут равны a_{11}, $\tilde{a}_{22}$, $\tilde{\tilde{a}}_{33}, \dots$. В примере для квадратичной формы, разобранном выше, указанные коэффициенты равны $a_{11} = \tilde{a}_{22} = 1$, $\tilde{\tilde{a}}_{33} = -14$.

Заметим, что квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Например, мы на первом этапе процедуры Лагранжа можем выделить линейную комбинацию, полностью вбирающую в себя не первую переменную, а последнюю — n-ю. Затем исключим из дальнейших преобразований предпоследнюю переменную и т.д. При этом у нас будет уже другой набор линейных комбинаций x_i'. Переменные x_i', в которых квадратичная форма имеет канонический вид, называют *нормальными переменными квадратичной формы*. Как указанно выше, для любой квадратичной формы существует много наборов нормальных переменных.

Метод собственных значений. Суть метода состоит в нахождении собственных значений и собственных векторов матрицы квадратичной формы. В силу симметричности этой матрицы все ее собственные значения действительны, а соответствующие векторы ортогональны. В качестве новых базисных векторов выбираются собственные векторы. При переходе к новому базису координаты всех векторов изменяются. В этом новом базисе матрица квадратичной формы становится диагональной, а сама квадратичная форма в новых переменных принимает канонический вид, причем коэффициенты при квадратах новых переменных в этой форме равны найденным собственным значениям.

Пример 3.4

Продемонстрируем предлагаемый метод, приводя к каноническому виду квадратичную форму от двух переменных $F(x_1, x_2) = 0{,}5x_1^2 + 0{,}5x_2^2 - 3x_1x_2$ с матрицей $A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1{,}5 \\ -1{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$.

Решение

Из матричного уравнения для собственного вектора $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ стандартным путем получаем характеристическое уравнение для собственных значений $|A - \lambda E| = 0$: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ и два его решения $\lambda^{(1)} = 2$; $\lambda^{(2)} = -1$. Подставляя первое собственное значение в уравнение для собственного вектора, находим соотношение между его компонентами: $(1/2 - 2)x_1^{(1)} = 3x_2^{(1)}/2 \Rightarrow x_1^{(1)} = -x_2^{(1)}$. Аналогично для второго собственного вектора находим $(1/2 + 1)x_1^{(1)} = 3x_2^{(1)}/2 \Rightarrow x_1^{(1)} = x_2^{(1)}$. Потребуем дополнительно, чтобы модули обоих собственных векторов равнялись единице, и выберем эти векторы в качестве нового ортонормированного базиса:

$$\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \ \vec{e}_2' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Связь между новыми и старыми координатами одного и того же вектора, как было показано выше, осуществляется с помощью оператора преобразования координат

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

так что $\vec{x} = P\vec{x}'$, или в скалярной форме

$$x_1 = \frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}};\ x_2 = \frac{-x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}.$$

Подставляя эти равенства в формулу для нашей квадратичной формы, получим

$$F(x_1', x_2') = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{-x_1' + x_2'}{\sqrt{2}}\right)^2 - 3\frac{x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-x_1' + x_2'}{\sqrt{2}} = 2x_1'^2 - x_2'^2.$$

Видим, что в новых переменных квадратичная форма принимает канонический вид, а коэффициенты при квадратах новых переменных в точности равны собственным значениям матрицы квадратичной формы. Чтобы выразить новые переменные через старые, нужно обратить написанные выше формулы связи между ними: $\vec{x}' = P^{(-1)}\vec{x}$, или в скалярной форме $x_1' = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}; x_2' = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$. Все соотношения в матричном виде здесь носят общий характер.

Заметим, что любая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих положительным собственным значениям матрицы квадратичной формы, дает вектор, на координатах которого значение формы положительно. Противоположное утверждение можно сделать о линейной комбинации собственных векторов, соответствующих отрицательным собственным значениям матрицы квадратичной формы. Тогда если матрица квадратичной формы от векторов n-мерного гильбертового пространства имеет m положительных собственных значений и $n - m$ отрицательных собственных значений, то все n-мерное пространство может быть разделено на два ортогональных подпространства размерностей n и $n - m$ соответственно. Причем квадратичная форма от векторов первого подпространства будет положительно определенной (будет принимать только положительные значения), а от векторов второго — отрицательно определенной (будет принимать только отрицательные значения).

Закон инерции квадратичной формы состоит в утверждении, что количество положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах нормальных переменных будет одним и тем же при любом выборе этих переменных, т.е., переходя от одного канонического вида данной квадратичной формы к другому, мы будем получать одно и то же количество положительных коэффициентов при квадратах ее нормальных переменных. Например, квадратичную форму $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2$ можно представить в двух разных канонических видах: $F(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2$ и $F(x_1, x_2) = -3x_1^2 + (2x_1 + x_2)^2$. Очевидно, что в обоих канонических видах данная форма имеет один положительный и один отрицательный коэффициенты.

Приводя квадратичную форму к каноническому виду, можно узнать, в частности, является ли она знакоопределенной. Но этот факт можно установить и более простым способом. Согласно *критерию Сильвестра* миноры всех порядков, занимающие левый верхний угол матрицы положительно определенной формы, положительны. Если квадратичная форма — отрицательно определенная, то указанные миноры ее матрицы чередуются по знаку, причем минор первого порядка (элемент a_{11}) меньше нуля. Например, квадратичная форма $F_1(x_1, x_2, x_3)$ с матрицей $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, все миноры которой положительны:

$$\Delta_1 = 2 > 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0;\ \Delta_3 = |A_1| = 9 > 0,$$

является положительно определенной. Квадратичная же форма $F_2(x_1, x_2, x_3)$ с матрицей $A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ является отрицательно определенной, так как ее миноры имеют правильное чередование знаков:

$$\Delta_1 = -3 < 0;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0;\ \Delta_3 = |A_2| = -1 < 0.$$

Критерий Сильвестра очевиден для диагональных матриц, в которых минор k-го порядка равен просто произведению первых k диагональных матричных элементов:

$$M_k = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{kk}.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Каким образом можно найти матрицу линейного оператора для заданного ортонормированного базиса?
2. Что такое собственные векторы и собственные значения линейного оператора и как их найти?
3. Укажите, как изменяется матрица квадратичной формы при заданном линейном преобразовании координат.
4. Опишите методы приведения квадратичной формы к каноническому виду.
5. Каким условиям удовлетворяют знакоопределенные квадратичные формы?

Практикум по решению задач

Упражнение 3.1. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Найдем результат действия этого оператора на векторы $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Решение

Действие оператора на вектор сводится к умножению матрицы оператора на этот вектор. Поэтому

$$\vec{y}_1 = A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+2 \\ -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \vec{y}_2 = A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ 6-15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.2. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем результат действия этого оператора на векторы $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение

Как и в предыдущей задаче,

$$\vec{y}_1 = A\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0+1 \\ 0+0+1 \\ 6+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\vec{y}_2 = A\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1+0 \\ 0-2+1 \\ 3+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.3. Найдем матрицу оператора в двумерном пространстве, который увеличивает первую компоненту вектора в два раза, а вторую — в три раза.

Решение

Нам нужно найти четыре матричных элемента матрицы оператора $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. По условию задачи компоненты векторов $\vec{x}$ и $\vec{y}$, связанных равенством $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 2x_1, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 3x_2 \end{cases} \to \begin{cases} (a_{11}-2)x_1 + a_{12}x_2 = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-3)x_2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку данная система должна быть совместной при любых значениях x_1 и x_2, то она должна быть правомерной и при $x_1 = 0$. Тогда в первом уравнении при $x_2 \neq 0$ $a_{12} = 0$. В случае $x_2 = 0$, а $x_1 \neq 0$ во втором уравнении $a_{21} = 0$. При равенстве нулю недиагональных элементов необходимо, чтобы $a_{11} = 2$; $a_{22} = 3$. Таким образом, получили, что искомая матрица равна $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.4. Найдем матрицу оператора в трехмерном пространстве, который увеличивает первую компоненту вектора в три раза, вторую — в два раза, а третью — оставляет без изменения.

Решение

Нам нужно найти матричные элементы матрицы оператора, который удовлетворяет равенству $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ для любого вектора $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Это условие эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 3x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 2x_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = x_1. \end{cases}$$

Поскольку данная система должна быть совместной при любых значениях x_1, x_2 и x_3, то она должна быть правомерной и при $x_1 = x_2 = 0$. Тогда в первом уравнении при $x_3 \neq 0$, $a_{13} = 0$. В случае $x_1 = x_3 = 0$, а $x_2 \neq 0$ в первом уравнении $a_{12} = 0$. Наконец, при $x_2 = x_3 = 0$, а $x_1 \neq 0$ в первом уравнении $a_{11} = 3$. Аналогично анализируя в тех же ситуациях следующие уравнения, найдем и остальные элементы матрицы оператора. Как и в предыдущей задаче, матрица оператора оказалась диагональной: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.5. Найдем матрицу оператора поворота в двумерном пространстве на угол α. Выпишем матрицы поворота на углы $\pi/4$ и $\pi/6$.

Решение

Запишем произвольный вектор в виде $\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$, где r — длина вектора; φ — угол его наклона к оси x. По условию

$$A_\alpha \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\alpha) \\ r\sin(\varphi+\alpha) \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу на вектор и раскрывая косинус и синус суммы углов по правилам тригонометрии, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = \cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha, \\ a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi = \sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha, \end{cases}$$

которая имеет очевидное решение $a_{11} = \cos\alpha$; $a_{12} = -\sin\alpha$; $a_{21} = \sin\alpha$; $a_{22} = \cos\alpha$ и $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Указанные в условии задачи матрицы поворота равны

$$A_{\pi/4} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; A_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.6. Найдем матрицу оператора в двумерном пространстве, который, действуя на произвольный вектор, поворачивает его на угол $\pi/3$ и растягивает его в пять раз.

Решение

Из геометрических соображений ясно, что поворот и растяжение можно осуществлять в произвольном порядке. Учитывая предыдущую задачу, выпишем матрицу поворота: $A_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$. Матрица растяжения $A_5 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда искомая матрица оператора

$$A = A_5 \cdot A_{\pi/3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 & -5\sqrt{3}/2 \\ 5\sqrt{3}/2 & 5/2 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.7. Определим, как изменятся координаты двумерного вектора при повороте осей координат на угол α.

Решение

Пусть в исходной системе координат задан произвольный вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, где базисные векторы $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ направлены вдоль старых осей координат. Выразим исходные базисные векторы через новые $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$, повернутые относительно старых на угол α. Но старые базисные векторы повернуты относительно новых на угол $-\alpha$. Следовательно, в новой системе координат старые базисные векторы примут вид

$$\vec{e}_1 \to A_{-\alpha}\vec{e}_1' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{pmatrix}$$

и

$$\vec{e}_2 \to A_{-\alpha}\vec{e}_2' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Подставляя эти формулы в выражение для рассматриваемого вектора $\vec{x}$, получим его вид в новых координатах: $\vec{x}' = x_1 A_{-\alpha}\vec{e}_1' + x_2 A_{-\alpha}\vec{e}_2' = A_{-\alpha}\vec{x}$. Обратное преобразование имеет вид $\vec{x} = A_\alpha \vec{x}'$. В координатном представлении мы приходим в первом случае к системе равенств

$$\begin{cases} x_1' = x_1\cos\alpha + x_2\sin\alpha, \\ x_2' = -x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha, \end{cases}$$

а во втором — к системе равенств

$$\begin{cases} x_1 = x_1'\cos\alpha - x_2'\sin\alpha, \\ x_2 = x_1'\sin\alpha + x_2'\cos\alpha. \end{cases}$$

Таким образом, переход от старых координат любого вектора к его новым координатам осуществляется с помощью оператора, обратного к оператору поворота новых осей координат относительно старых.

Упражнение 3.8. Найдем собственные векторы $\vec{a}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1^{(1,2)} \\ a_2^{(1,2)} \end{pmatrix}$ и собственные значения $\lambda_{1,2}$ линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (верхний индекс при координатах вектора указывает номер вектора).

Решение

Уравнение для собственных значений имеет вид $|A - \lambda E| = 0 \to \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, решение которого есть $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = 4$. Связь между первой и второй компонентами каждого собственного вектора определяется из условия того, что вектор собственный: $(A - \lambda_i E)\vec{a}_i = 0$. В координатном представлении это условие сводится в нашем случае к системе двух уравнений

$$\begin{cases} (1-\lambda_i)a_1^{(i)} + 3a_2^{(i)} = 0, \\ 2a_1^{(i)} + (2-\lambda_i)a_2^{(i)} = 0, \end{cases}$$

из которых независимым является только одно. Подставляя в первое уравнение системы первое собственное значение, найдем отношение координат первого собственного вектора: $2a_1^{(1)} + 3a_2^{(1)} = 0 \Rightarrow a_2^{(1)} = -2a_1^{(1)}/3$. Аналогично для координат второго собственного вектора получим соотношение $a_2^{(2)} = a_1^{(2)}$. Так как длины собственных векторов мы можем выбирать любыми, положим их первые координаты равными единице. Тогда для собственного значения $\lambda_1 = -1$ собственный вектор будет равен $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2/3 \end{pmatrix}$, а для собственного значения $\lambda_2 = 4$ собственный вектор будет равен $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Если мы хотим иметь дело с единичными собственными векторами, то следует разделить каждый собственный вектор на его модуль. В нашей задаче $|\vec{a}_1| = \sqrt{1+4/9} = \sqrt{5}/3$; $|\vec{a}_2| = \sqrt{2}$. Тогда единичные собственные векторы равны $\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Упражнение 3.9. Найдем собственные векторы $\vec{a}_{1,2} = \begin{pmatrix} a_1^{(1,2)} \\ a_2^{(1,2)} \end{pmatrix}$ и собственные значения $\lambda_{1,2}$ линейного оператора с матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение

Уравнение для собственных значений имеет вид $|A - \lambda E| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$ Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение $\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$, решение которого есть $\lambda_1 = 3 - \sqrt{10}$ и $\lambda_2 = 3 + \sqrt{10}$. Связь между первой и второй компонентами каждого собственного вектора определяется из условия того, что вектор собственный: $(A - \lambda_i E)\vec{a}_i = 0$. В координатном представлении это условие сводится в нашем случае к системе двух уравнений

$$\begin{cases} (2-\lambda_i)a_1^{(i)} + 3a_2^{(i)} = 0, \\ 3a_1^{(i)} + (4-\lambda_i)a_2^{(i)} = 0, \end{cases}$$

из которых независимым является только одно. Подставляя в первое уравнение системы первое собственное значение, найдем отношение координат первого собственного вектора: $(2 - 3 + \sqrt{10})a_1^{(1)} + 3a_2^{(1)} = 0 \Rightarrow a_2^{(1)} = (1 - \sqrt{10})a_1^{(1)}/3$. Аналогично для координат второго собственного вектора получим соотношение $a_2^{(2)} = (1 + \sqrt{10})a_1^{(2)}/3$. Так как длины собственных векторов мы можем выбирать любыми, положим их первые координаты равными единице. Тогда для собственного значения $\lambda_1 = 3 - \sqrt{10}$ собственный вектор будет равен $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1-\sqrt{10})/3 \end{pmatrix}$, а для собственного значения $\lambda_2 = 3 + \sqrt{10}$ собственный вектор будет равен $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ (1+\sqrt{10})/3 \end{pmatrix}$. Иногда удобно иметь дело с векторами единичной длины. В этом случае необходимо разделить каждый собственный вектор на его модуль. В нашей задаче длины векторов равны

$$|\vec{a}_1| = \sqrt{1 + \frac{9}{(1-\sqrt{10})^2}} = \frac{\sqrt{2(10-\sqrt{10})}}{\sqrt{10}-1} \text{ и } |\vec{a}_2| = \sqrt{1 + \frac{9}{(1+\sqrt{10})^2}} = \frac{\sqrt{2(10+\sqrt{10})}}{\sqrt{10}+1}.$$

Поэтому единичные собственные векторы, соответствующие полученным собственным значениям $\lambda_{1,2} = 3 \mp \sqrt{10}$, равны соответственно

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{a}_1}{|\vec{a}_1|} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{2(10-\sqrt{10})}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2(10-\sqrt{10})}} \end{pmatrix}; \vec{e}_2 = \frac{\vec{a}_2}{|\vec{a}_2|} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{10}+1}{\sqrt{2(10+\sqrt{10})}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{2(10+\sqrt{10})}} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 3.10. Приведем к каноническому виду квадратичную форму $F = 7x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 5x_2^2$: а) методом собственных значений; б) методом Лагранжа.

Решение

а) Матрица указанной квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$. Характеристическое уравнение для ее собственных значений имеет вид

$$|A - \lambda E| = 0 \to \begin{vmatrix} 7-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0.$$

Его решение есть $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 4$. Отношение координат собственных векторов $\vec{a}_i = (a_1^{(i)}, a_2^{(i)})$ находятся из системы уравнений $(A - \lambda_i E)\vec{a}_i = 0$:

$$\begin{cases} (7-\lambda_i)a_1^{(i)} - \sqrt{3}a_2^{(i)} = 0, \\ -\sqrt{3}a_1^{(i)} + (5-\lambda_i)a_2^{(i)} = 0. \end{cases}$$

Для $\lambda_1 = 8$ находим из первого уравнения $a_2^{(1)} = -a_1^{(1)} / \sqrt{3}$, а для $\lambda_1 = 4$ справедливо $a_2^{(2)} = \sqrt{3}a_1^{(2)}$. Единичные собственные векторы равны $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$; $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

Матрица перехода $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$, и $\vec{x} = P\vec{x}' \to \begin{cases} x_1\sqrt{3}/2 + x_2/2 = x_1', \\ -x_1/2 + x_2\sqrt{3}/2 = x_2'. \end{cases}$

Квадратичная форма $F(x_1, x_2) \to F(x_1', x_2') = \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2$. Окончательно получаем

$$F(x_1, x_2) = 8\left(\frac{\sqrt{3}x_1 + x_2}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{-x_1 + \sqrt{3}x_2}{2}\right)^2.$$

б) $F = 7x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 5x_2^2 = 7(x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2/7 + 3x_2^2/49) + (5 - 3/7)x_2^2 =$

$$= 7\left(x_1 - \frac{\sqrt{3}}{7}x_2\right)^2 + \frac{32}{7}x_2^2.$$

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Линейный оператор задан матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найдите результат действия этого оператора на следующие векторы: а) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3.2. Линейный оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -2\end{pmatrix}$. Найдите результат действия этого оператора на следующие векторы: а) $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix}-3\\-1\\-4\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}4\\1\\0\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$.

3.3. Найдите матрицу оператора в двумерном пространстве, который: а) увеличивает первую компоненту вектора в четыре раза, а вторую уменьшает в три раза; б) уменьшает первую компоненту в два раза, а вторую меняет на противоположную; в) удлинняет вектор в три раза, а направление меняет на противоположенное.

3.4. Найдите матрицу оператора в трехмерном пространстве, который: а) увеличивает первую компоненту вектора в два раза, вторую — в три раза, а третью оставляет без изменения; б) меняет первую компоненту на противоположенную, вторую оставляет без изменения, а третью уменьшает в четыре раза; в) уменьшает первую компоненту втрое, а остальные компоненты увеличивает вдвое.

3.5. Найдите матрицу оператора поворота в двумерном пространстве на угол α. Выпишите матрицы поворота на углы: а) $\pi/6$; б) $\pi/4$; в) $\pi/3$; г) $\pi/2$; д) $2\pi/3$; е) $3\pi/4$; ж) $5\pi/6$.

3.6. Найдите матрицу оператора в двумерном пространстве, который, действуя на произвольный вектор, делает следующее: а) поворачивает его на угол $\pi/6$ и растягивает в шесть раз; б) уменьшает длину вектора в три раза и поворачивает его на угол $\pi/4$; в) поворачивает вектор на угол $\pi/2$ и растягивает его вдвое; г) поворачивает вектор на угол $2\pi/3$ и сжимает его втрое.

3.7. Определите, какими станут координаты двумерного вектора $\vec{x}$ при повороте осей координат на угол α, если:

а) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$; б) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix}$, $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$; в) $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$, $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$.

3.8. Найдите собственные векторы $\vec{a}_{1,2}=\begin{pmatrix}a_1^{(1,2)}\\ a_2^{(1,2)}\end{pmatrix}$ и собственные значения $\lambda_{1,2}$ линейного оператора с матрицей A, если: а) $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Верхний индекс при координатах вектора указывает номер вектора. Первую компоненту собственного вектора положите равной единице.

3.9. Приведите к каноническому виду методом собственных значений следующие квадратичные формы: а) $F=5x_1{}^2-6x_1x_2+5x_2{}^2$; б) $F=3x_1{}^2-2\sqrt{3}x_1x_2+5x_2{}^2$; в) $F=13x_1{}^2-12x_1x_2+22x_2{}^2$.

3.10. Приведите к каноническому виду методом Лагранжа следующие квадратичные формы:

а) $F=x_1{}^2+x_2{}^2+4x_3{}^2-6x_1x_2+2x_1x_3+x_3x_2$;

б) $F=x_1{}^2+4x_2{}^2-4x_3{}^2-x_1x_2+12x_1x_3+6x_3x_2$;

в) $F=3x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-6x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$.

Глава 4
ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

При количественном анализе сложных процессов в экономике, социологии или любой другой отрасли человеческой деятельности на первом этапе используют максимально упрощенные модели, в которых переменные связаны линейными или простыми квадратичными зависимостями. Графиками таких зависимостей являются прямые линии, плоскости, а также кривые второго порядка. Систематическому алгебраическому описанию таких графиков и посвящена данная глава.

После усвоения материала этой главы студент должен знать алгебраические способы описания и свойства прямых, плоскостей и кривых второго порядка, уметь составить уравнение указанных объектов и определить их геометрические характеристики по заданным уравнениям. Кроме того, учащийся должен иметь достаточно прочные навыки для решения практических задач по указанным вопросам.

4.1. Прямая на плоскости

Аналитическая геометрия — это раздел геометрии, который занимается описанием и исследованием геометрических объектов и фактов и решением геометрических задач средствами алгебры. Основой аналитической геометрии является *метод координат*, предложенный Декартом. Он состоит в следующем. В исследуемом пространстве (или на плоскости) вводится декартова система координат:

1) фиксируется точка, которая называется началом координат;

2) через эту точку проводятся взаимно ортогональные направленные прямые, называемые осями координат (две — на плоскости и три — в пространстве); эти оси обозначаются буквами и (или) цифрами и упорядочиваются;

3) выбирается единица длины и с ее помощью на каждую ось наносится измерительная шкала, причем отклонения от начала координат по каждой оси вдоль ее направления считаются положительными, против направления оси — отрицательными.

После этого из выбранной точки пространства опускаются перпендикуляры на каждую из осей. Длины отрезков с учетом их знака, отсекаемые от осей, называются *координатами* данной точки, они записываются в порядке следования соответствующих осей. Таким образом, каждая точка в пространстве характеризуется тремя числами (на плоскости — двумя), которые обычно записываются в скобках, например (x_1, x_2, x_3) или (x, y, z).

Видим, что эти обозначения совпадают с обозначениями вектора. Действительно, каждой точке в пространстве можно сопоставить направленный отрезок, начало которого помещено в начало координат, а конец — в заданную точку.

Так как координаты точек, рассматриваемых линий, фигур или тел подчиняются некоторым соотношениям между собой, то указанные геометрические объекты могут определяться уравнениями или неравенствами. Начнем с описания прямой линии на плоскости. Координаты точек плоскости будем обозначать как $M(x, y)$. Координаты каждой точки прямой связаны между собой линейным соотношением, которое называется уравнением прямой. Есть много видов задания прямой. Укажем наиболее распространенные из них.

Говорят, что прямая задана в параметричеком виде, если каждая координата принадлежащей ей точки определяется одним и тем же значением параметра:

$$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt. \end{cases}$$

Эти формулы называют *уравнением прямой в параметрическом виде*. Изменение параметра t соответствует движению вдоль прямой. Величины же p и q задают прямую в целом. Очевидно, что при любом значении указанного параметра отношение смещений по каждой координате от начальной точки $M_0(x_0, y_0)$ остается постоянным:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{p}{q},$$

т.е. отношение величин p и q задает наклон прямой. Заметим, что умножение этих величин на одно и то же число не меняет саму прямую, а только меняет соответствие между значением параметра и положением описываемой точки на этой прямой. Если же одновременно с умножением величин p и q на произвольное число a мы разделим значение параметра t на это же число, формулы для задания прямой не изменятся. Действительно, совершая замену переменных $ap = p_1;\ aq = q_1;\ t / a = t_1$, приходим к формулам

$$\begin{cases} x = x_0 + ap(t / a) = x_0 + p_1 t_1, \\ y = y_0 + aq(t / a) = y_0 + q_1 t_1. \end{cases}$$

Разделив p и q на $\sqrt{p^2 + q^2}$, мы придем к значениям p_1 и q_1, сумма квадратов которых равна единице. Тогда, вводя обозначения $\cos\varphi = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}$;

$\sin\varphi = \dfrac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}$, приходим к заданию прямой в форме

$$\begin{cases} x = x_0 + t\cos\varphi, \\ y = y_0 + t\sin\varphi, \end{cases}$$

где φ — угол между рассматриваемой прямой и осью OX.

Важно отметить, что вектор $\vec{l}=(p,q)$, называемый *направляющим вектором*, параллелен рассматриваемой прямой. Действительно, в силу уравнения прямой произвольный вектор на этой прямой $\vec{m}=(x-x_0, y-y_0)=(pt, qt)=t\vec{l}$ пропорционален направляющему вектору.

Например, прямая, заданная в параметрическом виде системой

$$\begin{cases} x = 2+\sqrt{3}t, \\ y = 1+t, \end{cases}$$

проходит через точку $M_0(2,1)$ под углом 60° к оси OX.

Если мы выразим параметр t из уравнений для x и y при задании прямой в параметрическом виде и затем приравняем полученные выражения, то получим *каноническое уравнение прямой*

$$\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}.$$

Как и ранее, числовые параметры x_0, y_0 определяют точку, через которую проходит прямая, а p, q — координаты направляющего вектора прямой $\vec{l}=(p,q)$. Так, прямая, рассмотренная в примере выше, соответствует каноническому уравнению $\dfrac{x-2}{\sqrt{3}}=\dfrac{y-1}{1}$.

Два предыдущих способа определения прямой явно содержали координаты одной из точек, через которую проходит прямая. Но из курса школьной геометрии известно, что положение прямой полностью определяется заданием любых двух точек, через которые она проходит. Пусть прямая, уравнение которой мы хотим найти, проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Выберем на нашей прямой еще одну произвольную точку $M(x, y)$ и найдем условие, которому должны удовлетворять ее координаты. Заметим, что векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ с координатами $(x-x_1, y-y_1)$ и (x_2-x_1, y_2-y_1) соответственно параллельны (лежат на одной прямой). Следовательно, существует коэффициент пропорциональности k, такой что $\overrightarrow{M_1M}=k\overrightarrow{M_1M_2}$. Расписывая это векторное равенство в координатах, приходим к системе двух равенств

$$\begin{cases} x-x_1 = k(x_2-x_1), \\ y-y_1 = k(y_2-y_1). \end{cases}$$

Поделив второе равенство на первое, получим уравнение

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

называемое *уравнением прямой, проходящей через две заданные точки*.

Существует еще одна форма задания прямой. Выберем в качестве первой точки из предыдущего пункта точку $M_1(a,0)$, а в качестве второй точки — $M_2(0,b)$. Тогда уравнение прямой из предыдущего пункта примет вид $\dfrac{y}{x-a}=\dfrac{b}{-a}$ или $\dfrac{y}{b}=\dfrac{x-a}{-a}$, откуда получаем

$$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=1.$$

Последнее равенство называется *уравнением прямой в отрезках*. Модули чисел a и b равны длинам отрезков, отсекаемых от координатных осей рассматриваемой прямой.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом изучается в средней школе, оно имеет вид $y=kx+b$. В нем параметр k равен тангенсу угла наклона рассматриваемой прямой к оси OX, а b — отрезок, отсекаемый прямой от оси OY.

Все предложенные выше уравнения прямой, кроме самого первого, имеют один недостаток. Они не описывают вертикальную прямую $x=x_0$. Предлагается способ задания прямой, свободный от указанного недостатка: $ax+by+c=0$. Это равенство называется *общим уравнением прямой*. В него обе переменные входят равноправно. Рассмотрим некоторые частные случаи этого уравнения. Если $a=0$, то уравнение описывает горизонтальную прямую $y=-c/b$, а если $b=0$, то уравнение описывает вертикальную прямую $x=-c/a$. Во всех остальных случаях уравнение описывает наклонную прямую $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$ в форме уравнения прямой с угловым коэффициентом $k=-a/b$, отсекающей от вертикальной координатной оси отрезок $-c/b$.

Параметры a, b имеют и другой смысл. Рассмотрим произвольный вектор $\overrightarrow{M_0M}$, лежащий на прямой, с началом в точке $M_0(x_0,y_0)$ и концом в точке $M(x,y)$. Подставляя координаты точек в общее уравнение прямой, получим равенства $ax+by+c=0$ и $ax_0+by_0+c=0$. Вычитая из первого равенства второе, приходим к условию $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Данное равенство можно интерпретировать как равенство нулю скалярного произведения вектора $\vec{n}=(a,b)$ на произвольный вектор $\overrightarrow{M_0M}$, принадлежащий прямой. Таким образом, вектор $\vec{n}=(a,b)$ перпендикулярен рассматриваемой прямой. Он называется *нормальным вектором* прямой. Он также перпендикулярен любому направляющему вектору той же прямой.

Отметим, что любое линейное уравнение с двумя переменными описывает прямую на плоскости и наоборот: любая прямая на плоскости описывается некоторым линейным уравнением от координат лежащих на ней точек.

Рассмотрим некоторые вопросы о прямых на плоскости, на которые можно ответить исходя из уравнений для этих прямых. Так, если нам требуется найти угол α между прямыми, заданными в параметрической или канонической форме, мы замечаем, что этот угол равен углу между направляющими векторами этих прямых $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$. Тогда, как известно из программы средней школы, косинус искомого угла можно выразить через скалярное произведение указанных векторов: $\cos\alpha=\frac{(\vec{l}_1,\vec{l}_2)}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|}$. Если прямая задана общими уравнениями, то справедлива аналогичная формула для нормальных векторов изучаемых прямых: $\cos\alpha = \frac{(\vec{n}_1, \vec{n}_2)}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$. Наконец, если прямые заданы уравнениями прямых с угловыми коэффициентами, то искомый угол $\alpha = \varphi_2 - \varphi_1$, где φ_1, φ_2 — углы между соответствующими прямыми и осью OX. По известным тригонометрическим формулам находим $\text{tg}\alpha = \frac{\text{tg}\varphi_2 - \text{tg}\varphi_1}{1 + \text{tg}\varphi_1 \text{tg}\varphi_2}$. Через угловые коэффициенты прямых то же равенство имеет вид $\text{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

В частности, условие ортогональности прямых, заданных с помощью направляющих векторов $\vec{l}_1$ и $\vec{l}_2$, имеет вид $(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = 0$, а условие их параллельности — $(\vec{l}_1, \vec{l}_2) = |\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|$. Аналогично для прямых, заданных своими нормальными векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, условия их ортогональности и параллельности выражаются равенствами $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$ и $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|$ соответственно. Наконец, если прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом ($y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$), то условиями их ортогональности и параллельности будут служить равенства $k_1 = -1/k_2$ и $k_1 = k_2$ соответственно.

Другой важной геометрической задачей является определение расстояния от заданной точки до заданной прямой. Пусть прямая задана общим уравнением $ax + by + c = 0$ и нужно найти расстояние от нее до точки $M_0(x_0, y_0)$. Опустим перпендикуляр из указанной точки на заданную прямую, которую он пересечет в точке $M_1(x_1, y_1)$. Вектор $\vec{s} = \overline{M_1 M_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ перпендикулярен рассматриваемой прямой, а его длина $|\vec{s}|$ равна искомому расстоянию. Так как нормальный вектор к прямой $\vec{n} = (a, b)$ параллелен вектору $\vec{s}$, то модуль их скалярного произведения равен призведению их длин: $|(\vec{n}, \vec{s})| = |\vec{n}| \cdot |\vec{s}|$. Тогда справедливо равенство

$$|\vec{s}| = \frac{|(\vec{n}, \vec{s})|}{|\vec{n}|} = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Так как точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит рассматриваемой прямой, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению прямой: $ax_1 + by_1 + c = 0$, или $-ax_1 - by_1 = c$. Подставляя это равенство в выражение под знаком модуля в формулу для $|\vec{s}|$, получаем формулу для расстояния между прямой и точкой:

$$|\vec{s}| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Например, расстояние s от прямой, задаваемой уравнением $2x + 3y + 1 = 0$, до точки $M_0(2, 1)$ равно $s = \frac{|2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13}$.

Если прямая задана не общим уравнением, а каким-либо другим способом, указанное уравнение всегда можно найти. Например, если прямая задана в каноническом виде, то координаты нормального вектора $\vec{n}$ можно выразить через координаты направляющего вектора $\vec{l}=(p,q)$ как $\vec{n}=(q,-p)$ (при этом равно нулю скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{l}$). Тогда общее уравнение прямой примет вид $qx-py+c=0$.

4.2. Прямая и плоскость в пространстве

Приравнивая линейную функцию двух переменных к нулю, мы оставляем независимой только одну переменную, т.е. определяем одномерное множество — прямую линию. Если же мы приравняем к нулю линейную функцию трех переменных, то определим уже двумерное множество — получим общее уравнение плоскости

$$ax+by+cz+d=0.$$

Действительно, из курса геометрии известно, что через заданную точку можно провести только одну плоскость, перпендикулярную заданному (нормальному) вектору. Найдем уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(a,b,c)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$. Для этого потребуем, чтобы произвольный вектор плоскости $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ был перпендикулярен нормальному вектору. Приравнивая к нулю скалярное произведение указанных векторов, получим

$$(\vec{n},\overrightarrow{M_0M})=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0,$$

или

$$ax+by+cz-(ax_0+by_0+cz_0)=0.$$

Вводя обозначение $d=-(ax_0+by_0+cz_0)$, приходим к написанному выше общему уравнению плоскости в пространстве. Таким образом, аналогично случаю уравнения прямой на плоскости коэффициенты при переменных в общем уравнении плоскости имеют смысл координат нормального вектора к ней. В отличии от прямой плоскость не имеет направляющего вектора.

Угол между плоскостями, очевидно, равен углу между их нормальными векторами, который можно найти с помощью той же общей формулы, что и угол между прямыми на плоскости: $\cos\alpha=\dfrac{(\vec{n}_1,\vec{n}_2)}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$. Так, угол между плоскостями, определяемыми уравнениями $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ и $ax_2+by_2+cz_2+d_2=0$, равен

$$\cos\alpha=\frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1{}^2+b_1{}^2+c_1{}^2}\cdot\sqrt{a_2{}^2+b_2{}^2+c_2{}^2}}.$$

Рассуждая так же, как и в предыдущем параграфе, получим формулу для расстояния между заданной плоскостью и точкой вне ее:

$$|\vec{s}|=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Прямую в пространстве нельзя задать с помощью одного равенства, так как нужно сузить трехмерное пространство до одномерного. Необходимо минимум два уравнения. Система двух независимых линейных уравнений определит, очевидно, прямую, по которой пересекаются две плоскости:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

Исключением является случай, когда коэффициенты при переменных в первом уравнении пропорциональны соответствующим коэффициентам во втором, а отношение свободных членов равно другому числу, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. В этой ситуации уравнения системы описывают параллельные плоскости (параллельны их нормальные векторы: $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$), которые не пересекаются. Прямых в пространстве, перпендикулярных одному и тому же вектору, бесконечно много, и поэтому он не может быть определяющей характеристикой прямой.

Как и на плоскости, в пространстве прямую, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, можно задать в *параметрическом виде*:

$$x = x_0 + pt;\ y = y_0 + qt;\ z = z_0 + rt,$$

где числа p, q, r служат координатами направляющего вектора заданной прямой $\vec{l} = (p, q, r)$. С помощью этой же тройки чисел та же самая прямая может быть задана и в *каноническом виде*:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}.$$

Легко видеть, что данное двойное равенство можно переписать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} qx - py + py_0 - qx_0 = 0, \\ rx - pz + pz_0 - rx_0 = 0. \end{cases}$$

Первое из этих уранений определяет плоскость, параллельную оси OZ, второе — параллельную оси OY. Угол между прямыми в пространстве равен углу между их направляющими векторами и может быть вычислен по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(\vec{l}_1, \vec{l}_2)}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|},$$

или в развернутом виде

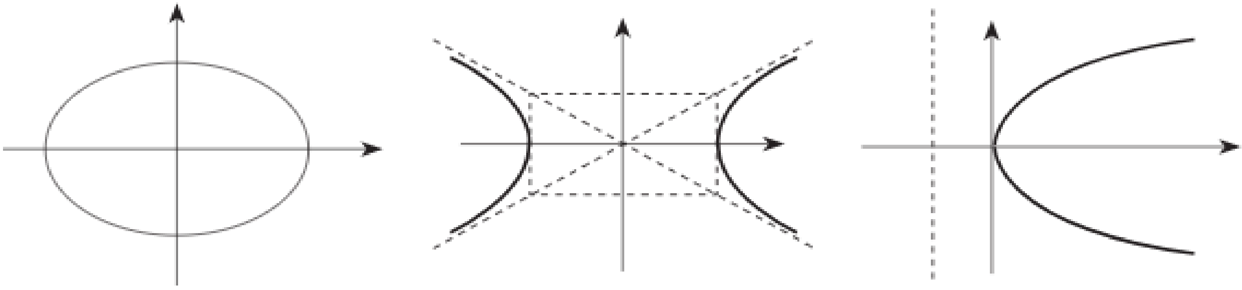
$$\cos\alpha = \frac{p_1p_2 + q_1q_2 + r_1r_2}{\sqrt{p_1{}^2 + q_1{}^2 + r_1{}^2} \cdot \sqrt{p_2{}^2 + q_2{}^2 + r_2{}^2}}.$$

Так, косинус угла между прямыми, задаваемыми уравнениями $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{3}$ и $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$, равен $\cos\alpha = \frac{2\cdot(-2) + 1\cdot 2 + 3\cdot 1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{1}{3\sqrt{14}}$.

Условия перпендикулярности и параллельности прямых в пространстве, заданных с помощью их направляющих векторов, имеют тот же вид, что и для прямых на плоскости. Условия перпендикулярности и параллельности плоскостей в пространстве, заданных с помощью их нормальных векторов, имеют тот же вид, что и аналогичные условия для прямых на плоскости.

4.3. Кривые второго порядка на плоскости

До этого мы рассматривали геометрические объекты, задаваемые линейными равенствами. В данном пункте мы кратко познакомимся с кривыми второго порядка (рис. 4.1), задающимися соотношениями, в которые переменные входят во второй и, возможно, в первой степени.



Эллипс Гипербола Парабола

Рис. 4.1. **Кривые второго порядка**

Эллипс. Одним из примеров таких объектов является эллипс. *Эллипсом* называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух выделенных точек, называемых фокусами, постоянна (не меняется от точки к точке). Таким образом, эллипс характеризуется положением своих фокусов и суммарным расстоянием от фокусов до произвольной точки эллипса. Если мы вобьем два гвоздика в точки фокусов на плоскости и привяжем к гвоздикам нитку так, чтобы она не была натянута, то, натянув эту нитку тонким карандашом и ведя его вокруг фокусов, мы опишем замкнутую линию — эллипс. Также отметим, что эллипс получается в сечении кругового цилиндра плоскостью под углом к его оси.

Для нахождения уравнения эллипса выберем начало координат точно посередине между эллипсами. Ось OX пустим вдоль отрезка, соединяющего фокусы, а ось OY — перпендикулярно оси OX. Расстояние от начала координат до каждого из фокусов обозначим f. Тогда точки фокусов будут иметь координаты $F_1(-f,0)$ и $F_2(f,0)$.

Если суммарное расстояние от любой точки эллипса до фокусов обозначить $2a$, то согласно определению $2a=r_1+r_2$, где r_i — расстояние до i-го фокуса. Расписывая эти расстояния с помощью теоремы Пифагора в координатах, приходим к уравнению

$$\sqrt{(x+f)^2+y^2}+\sqrt{(x-f)^2+y^2}=2a,$$

где x, y — координаты произвольной точки эллипса. Перенесем второе слагаемое из левой части равенства в правую и возведем обе его части равенства в квадрат:

$$(x+f)^2+y^2=(x-f)^2+y^2+4a^2-4a\sqrt{(x-f)^2+y^2}.$$

После приведения подобных получим

$$4a\sqrt{(x-f)^2+y^2}=-4xf+4a^2.$$

Поделив на четыре и возведя обе части равенства в квадрат, приходим к уравнению

$$a^2(x-f)^2+a^2y^2=a^4+x^2f^2-2a^2xf\to(a^2-f^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-f^2).$$

Разделив обе части этого равенства на его правую часть и вводя обозначение $b=\sqrt{a^2-f^2}$, получим *каноническое уравнение эллипса*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Легко заметить, что выполняются неравенства $|x|\le a$ и $|y|\le b$. Таким образом, эллипс вписан в прямоугольник длиной $2a$ и высотой $2b$, причем касание прямоугольника происходит, когда одна из переменных, x или y, равняется нулю. Величины a и b называются большой и малой *полуосями* эллипса. Поскольку в данном уравнении $b<a$, то оно описывает эллипс, вытянутый вдоль горизонтальной оси. Степень вытянутости характеризуется параметром, который называется *эксцентриситетом*: $\varepsilon=f/a<1$. Если $\varepsilon=0$, то эллипс превращается в окружность (оба фокуса сходятся в начале координат и $a=b$). В случае же, когда $\varepsilon\to1$, эллипс сплющивается в вертикальном направлении (его высота неограниченно уменьшается, $b\to0$). При параллельном переносе эллипса, таком что его центр оказывается в точке $M_0(x_0, y_0)$, уравнение эллипса преобразуется к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

То же самое произойдет при переносе начала координат в противоположенном направлении на то же расстояние. Если мы повернем эллипс на 90°, то он будет описываться каноническим уравнением, в котором уже $a<b$ и $\varepsilon=f/b$. При повороте эллипса на произвольный угол (см. выше пункт о линейном преобразовании координат) уравнение усложнится, в нем появятся слагаемые, содержащие смешанные произведения переменных, и будет труднее определить форму и размеры фигуры.

Приведем без вывода уравнения касательной и нормали к эллипсу, заданному каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение касательной есть $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1$, а уравнение нормали имеет вид $y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$. Если центр эллипса сдвинут в точку $M_1(x_1, y_1)$, то в написанных уравнениях прямых нужно провести замену $x\to x-x_1$, $y\to y-y_1$.

Гипербола. Еще одним примером кривой второго порядка является гипербола. *Гиперболой* называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, по модулю постоянна. В символическом виде уравнение гиперболы имеет вид $r_1 - r_2 = 2a$, где $2a$ — указанная выше разность расстояний; r_1 — расстояние от точки до дальнего фокуса; r_2 — до ближнего. Положение фокусов выберем таким же, как и выше: $F_1(-f, 0)$ и $F_2(f, 0)$. Если мы рассматриваем точки с положительной первой координатой ($x > 0$), то, подставляя вместо расстояний r_1 и r_2 в символическом уравнении их выражения через координаты, приходим к равенству

$$\sqrt{(x+f)^2 + y^2} - \sqrt{(x-f)^2 + y^2} = 2a.$$

Проделывая преобразования, аналогичные тем, что использовались в случае эллипса, находим *каноническое уравнение гиперболы*:

$$(x+f)^2 + y^2 = (x-f)^2 + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow xf - a^2 = a\sqrt{(x-f)^2 + y^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow (f^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(f^2 - a^2) \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{f^2 - a^2}$. Уравнение выведено для случая $x > 0$, но оно справедливо и в общем случае. При $x < 0$ ближний фокус становится дальним, и наоборот. Очевидно, что по модулю координата x точки гиперболы не может быть меньше параметра a. Фокусное же расстояние $f > a$. Из канонического уравнения следует, что $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, т.е. кривая распадается на две ветви, вытянутые вдоль оси OX и расположенные симметрично относительно начала координат: $x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$. Каждая из ветвей симметрична относительно оси OX. Видно, что при всех возможных значениях аргумента ветви гиперболы расположены внутри угла α между прямыми $\tilde{y} = \pm\frac{b}{a}x$, причем при неограниченном росте $|x|$ ветви гиперболы неограниченно приближаются к указанным границам: $y(x) \rightarrow \tilde{y}(x)$. В случае гиперболы параметр b может быть как больше, так и меньше a. Длина a называется *действительной полуосью* гиперболы, b — ее *мнимой полуосью*. Ось гиперболы, на которой находятся фокусы, называется *фокальной осью* (у нас это ось OX).

Так же как и для эллипса, вводится *эксцентриситет* $\varepsilon = f / a$. Для гиперболы $\varepsilon > 1$. Увеличение эксцентриситета при заданном значении параметра a соответствует увеличению фокусного расстояния $f = \sqrt{a^2 + b^2}$. Угол α, ограничивающий ветви гиперболы, неограниченно приближается к π при $\varepsilon \rightarrow \infty$. При уменьшении эксцентриситета ($\varepsilon \rightarrow 1$) ветви гиперболы «прижимаются» к фокальной оси.

Аналогично эллипсу параллельный перенос гиперболы, такой что ее центр помещается в точку $M_0(x_0, y_0)$, преобразует ее каноническое уравнение к виду

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Поворот гиперболы на угол 90° приводит к тому, что ее действительная и мнимая оси меняются местами. В каноническом уравнении уже перед y^2 будет стоять знак «плюс», а перед x^2 — знак «минус». Стоит запомнить, что если нам предъявляют уравнение гиперболы, то фокальная ось соответствует той переменной, перед которой стоит знак «плюс».

При взгляде на полученное выше каноническое уравнение гиперболы может возникнуть вопрос: что общего между ним и знакомой со школы формулой для гиперболы $y = k / x$? Повернем оси координат на угол $\pi/4$. Согласно формулам параграфа, посвященного линейным преобразованиям, старые координаты связаны с новыми формулами

$$\begin{cases} x = (x' + y') / \sqrt{2}, \\ y = (-x' + y') / \sqrt{2}. \end{cases}$$

Подставляя их в каноническое уравнение при условии $a = b$, приходим к равенству

$$\frac{x'^2 + 2x'y' + y'^2}{2a^2} - \frac{x'^2 - 2x'y' + y'^2}{2a^2} = 1.$$

Приводя подобные, получаем формулу $y' = \dfrac{a^2}{2x'}$, принимающую после замены $k = a^2 / 2$ знакомый «школьный» вид. Таким образом, в школе мы изучали частный случай гиперболы, в котором ветви кривой заключены вутри прямого угла, стороны которого выбраны в качестве осей координат.

Приведем без вывода уравнения касательной и нормали к гиперболе, заданной каноническим уравнением, в точке $M_0(x_0,\ y_0)$. Уравнение касательной есть $\dfrac{xx_0}{a^2} - \dfrac{yy_0}{b^2} = 1$, а уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\dfrac{b^2 y_0}{a^2 x_0}(x - x_0)$. Если центр гиперболы сдвинут в точку $M_1(x_1,\ y_1)$, то в написанных уравнениях прямых нужно провести замену $x \to x - x_1$, $y \to y - y_1$. Если же мы поменяем знаки перед слагаемыми в левой части канонического уравнения (поменяем местами действительную и мнимую оси гиперболы), то в полученных формулах нужно поменять местами x и y, а также a и b.

Парабола. В качестве последнего примера кривых второго порядка рассмотрим параболу. *Параболой* называется геометрическое место точек, каждая из которых равноудалена от фиксированной точки, называемой фокусом, и от выбранной прямой, назывемой директрисой. Для вывода уравнения параболы построим прямую, перпендикулярную директрисе и проходящую через фокус. Эту прямую назовем осью OX и направление от директрисы к фокусу будем считать положительным. Начало координат выберем точно посередине между директрисой и фокусом. Ось OY пройдет через начало координат параллельно директрисе. Тогда фокус будет иметь координаты $F(f, 0)$, а уравнение директрисы запишется в виде $x = -f$.

Исходя из определения параболы символически ее уравнение можно записать как $r_1 = r_2$, где r_1 — расстояние от точки кривой $M(x, y)$ до фокуса;

r_2 — расстояние до директрисы. В выбранной системе координат уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{(x-f)^2+y^2}=x+f.$$

Возводя обе части равенства в квадрат и приводя подобные члены, получим $y^2=4xf$. После введения обозначения $p=2f$ приходим к *каноническому уравнению параболы* $y^2=2px$. Очевидно, что данное уравнение описывает «школьную» параболу, повернутую на 90°. Вершина параболы находится в начале координат. Величина p называется *параметром* параболы, эксцентриситет параболы, по определению, равен 1. Заметим, что ось симметрии параболы направлена вдоль той координатной оси, которая соответствует переменной, входящей в каноническое уравнение кривой в первой степени.

Приведем без вывода уравнения касательной и нормали к параболе, заданной каноническим уравнением $y^2=2px$, в точке $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение касательной для верхней ветви есть $yy_0=p(x+x_0)$, а уравнение нормали имеет вид $y-y_0=-\dfrac{y_0}{p}(x-x_0)$. Если вершина параболы сдвинута в точку $M_1(x_1,\ y_1)$, то в написанных уравнениях прямых нужно провести замену $x\to x-x_1,\ y\to y-y_1$.

Может возникнуть вопрос по поводу введения такой характеристики всех рассмотренных кривых, как эксцентриситет. В случае эллипса и гиперболы он соответствует разным геометрическим свойствам, а для параболы, вообще, декларативно приравнивается единице. Возможно ли рассмотрение всех трех кривых с каких-то единых позиций так, чтобы величина эксцентриситета описывала эволюцию кривых и их переход от одной к другой?

Рассмотрим эллипс в полярной системе координат (цилиндрической системе координат на плоскости), в которой каждая точка M на плоскости характеризуется расстоянием от начала координат до нее ρ и углом φ между осью OX и вектором $\overrightarrow{OM}$, проведенным из начала координат к точке M (отсчет угла происходит от оси OX к вектору $\overrightarrow{OM}$). Подчеркнем, что положительные значения угла соответствуют повороту против часовой стрелки. Начало координат поместим в левый фокус эллипса. Переход к полярным переменным от декартовых с учетом сдвига начала координат происходит по формулам $x=-f+\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi$. Подчеркнем, что это преобразование не является линейным. Подставляя эти формулы в каноническое уравнение эллипса, получаем уравнение в новых переменных:

$$\frac{(\rho\cos\varphi-f)^2}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2}=1.$$

Решаем это квадратное уравнение относительно ρ и получаем $\rho=$ $=\dfrac{b^2}{a(1-\varepsilon\cos\varphi)}$.

Теперь переходим к преобразованию уравнения гиперболы, выбирая в качестве начала координат правый фокус. Тогда формулы перехода примут вид $x = f + \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$. Подставив их в каноническое уравнение гиперболы, получим квадратное уравнение

$$\frac{(\rho\cos\varphi + f)^2}{a^2} - \frac{\rho^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1.$$

Решая его относительно ρ, получим решение в той же самой форме, что и для эллипса: $\rho = \dfrac{b^2}{a(1-\varepsilon\cos\varphi)}$.

Заметим, что при всех возможных значениях угла φ знаменатель в последней формуле положителен. Из канонического уравнения параболы с помощью тех же формул перехода к полярным координатам, что и в случае гиперболы, приходим к уравнению $\rho^2(1-\cos^2\varphi) - 2\rho p\cos\varphi - p^2 = 0$, где $p = 2f$. Это уравнение имеет решение $\rho = \dfrac{p}{1-\cos\varphi}$. Если в случае эллипса и гиперболы мы обозначим $p = b^2/a$, то все три рассмотренные кривые второго порядка опишутся одним и тем же уравнением $\rho = \dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. В нем для случая эллипса $\varepsilon < 1$, для параболы $\varepsilon = 1$, а для гиперболы $\varepsilon > 1$. Предлагается следующая картина эволюции кривых. При увеличении эксцентриситета эллипса последний становится все более вытянутым и при $\varepsilon = 1$ размыкается справа и трансформируется в параболу. При дальнейшем увеличении ε парабола превращается в гиперболу со все большим углом α, ограничивающим ее ветви.

Отметим интересный геометрический факт. Если мы рассечем конус плоскостью под углом (от нуля до 90°) к его оси, то граница сечения окажется эллипсом. Если же секущая плоскость параллельна образующей конуса, то сечение будет ограничено параболой. Наконец, рассекая конус плоскостью, параллельной его оси, но не проходящей через эту ось, мы получим область, ограниченную гиперболой.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите способы задания прямой на плоскости.
2. Какой вектор называется направляющим вектором к прямой, а какой — нормальным вектором к плоскости?
3. На каких геометрических представлениях основаны условия параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей?
4. Какими уравнениями задаются кривые второго порядка?
5. Какими уравнениями задаются касательные и нормали к кривым второго порядка?

Практикум по решению задач

Упражнение 4.1. Задан направляющий вектор $\vec{b} = (2;-1)$ и точка $M(-1;1)$. Запишем уравнение прямой, направленной вдоль заданного направляющего вектора $\vec{l}$ и проходящей через указанную точку: а) в параметрическом виде; б) в каноническом виде; в) в виде уравнения в отрезках; г) в виде уравнения с угловым коэффициентом; д) в общем виде.

Решение

Так как в нашем случае координаты направляющего вектора равны $p=2$; $q=-1$, а координаты указанной точки на прямой $x_0=-1$; $y_0=1$, то в пункте а) из общих формул $\begin{cases} x(t)=x_0+pt, \\ y(t)=y_0+qt \end{cases}$ получаем $\begin{cases} x(t)=-1+2t, \\ y(t)=1-t. \end{cases}$

Аналогично в пункте б) из равенства $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}$ получаем $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{-1}$. В пункте в) требуется записать уравнение в виде $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{c}=1$. Из уравнения, полученного в предыдущем пункте, после простых преобразований получаем

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}\to\frac{x}{2}-\frac{y}{-1}=-\frac{1}{2}+\frac{-1}{-1}\to\ \frac{x}{2}+\frac{y}{1}=\frac{1}{2}\to\frac{x}{1}+\frac{y}{1/2}=1.$$

В пункте г) нужно записать уравнение прямой в виде $y=kx+b$. Из уравнения, полученного в предыдущем пункте, после простых преобразований получаем $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{(1/2)}=1\to y=-\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$. В последнем пункте д) нужно привести уравнение прямой к виду $ax+by+c=0$. Перенося в уравнении, полученном в предыдущем пункте, все члены в левую часть, получаем $\dfrac{x}{2}+y-\dfrac{1}{2}=0$.

Упражнение 4.2. Задан нормальный вектор $\vec{h}=(3;2)$ и точка $M(1;-4)$. Запишем уравнение прямой, направленной перпендикулярно заданному вектору $\vec{h}$ и проходящей через указанную точку: а) в общем виде; б) в виде уравнения с угловым коэффициентом; в) в виде уравнения в отрезках; г) в каноническом виде; д) в параметрическом виде.

Решение

а) Коэффициентами при переменных в общем уравнении прямой $ax+by+c=0$ могут выступать координаты напраляющего вектора, т.е. $a=3$; $b=2$. Затем, подставляя вместо переменных в уравнение прямой значения координат точки M, находим коэффицент c: $3\cdot1+2\cdot(-4)+c=0\Rightarrow c=5$. Таким образом, общее уравнение нашей прямой имеет вид $3x+2y+5=0$.

б) Разделив полученное в предыдущем пункте уравнение на 2 и оставляя в его левой части только переменную y, получим уравнение с угловым коэффициентом: $y=-1{,}5x-2{,}5$.

в) Перенося в уравнении, полученном в пункте а), свободный член в правую часть и поделив после этого все уравнение на (-5), находим уравнение прямой в отрезках:

$3x+2y+5=0\to\ \dfrac{x}{-5/3}+\dfrac{y}{-5/2}=1.$

г) Так как направляющий вектор прямой перпендикулярен ее нормальному вектору, то, поменяв местами координаты нормального вектора и изменив знак одной из них, получим направляющий вектор: $\vec{h}=(3;2)\to\vec{b}=(-2;3)$. Затем, следуя решению предыдущей задачи, находим $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}\to\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+4}{3}$.

д) В параметрическом виде прямая задается равенствами

$$\begin{cases} x(t)=x_0+pt, \\ y(t)=y_0+qt \end{cases}\to\begin{cases} x(t)=1-2t, \\ y(t)=-4+3t. \end{cases}$$

Упражнение 4.3. Заданы две точки $M_1(0, 2)$ и $M_2(1, 4)$. Запишем уравнение прямой, проходящей через указанные точки: а) в обычном для такой задачи виде; б) в общем виде; в) в виде уравнения с угловым коэффициентом; г) в виде уравнения в отрезках; д) в каноническом виде; е) в параметрическом виде.

Решение

а) Подставляя координаты указанных точек в общую формулу для уравнения прямой в требуемом виде, находим $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} \to \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{4-2}$.

б) Чтобы получить уравнение прямой в общем виде, умножим найденное только что уравнение на 2 и перенесем все слагаемые в левую часть: $2x-y+2=0$.

в) Если теперь умножить общее уравнение на -1 и перенести первый и последний члены в правую часть, то придем к уравнению прямой с угловым коэффициентом: $y=2x+2$.

г) Перенося свободный член в правую часть в общем уравнении (см. пункт б) и поделив затем все уравнение на -2, получим уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{2}=1$.

д) Выполнив вычитание в знаменателе дроби в правой части уравнения прямой в пункте а, приходим к уравнению прямой в каноническом виде: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{2}$.

е) Замечаем, что в качестве направляющего вектора можно выбрать вектор с координатами, равными знаменателям в полученном только что уравнении: $\vec{b}=(p, q)=(1, 2)$. Выбирая в качестве начальной точки точку M_1, нашу прямую можно задать в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x(t)=x_1+pt, \\ y(t)=y_1+qt \end{cases} \to \begin{cases} x(t)=t, \\ y(t)=2+2t. \end{cases}$$

Упражнение 4.4. Даны три точки $M_1(1, 1)$, $M_2(2, 3)$ и $M_3(1, 4)$. Найдем расстояние s от третьей точки до прямой, проходящей через первые две точки.

Решение

Найдем общее уравнение указанной прямой. Поступая так же, как и при решении предыдущей задачи, получим

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \to \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1} \to \frac{x-1}{2-1}=\frac{y-1}{3-1} \to 2x-y-1=0.$$

Затем по формуле $s=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, заменяя в ней x_0 и y_0 на координаты точки M_3, находим

$$s=\frac{|2\cdot 1-1\cdot 4-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Упражнение 4.5. Найдем острый угол между прямой, задаваемой уравнением общего вида $x-3y+2=0$, и прямой, описываемой каноническим уравнением $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{3}$.

Решение

Острый угол между прямыми равен углу между их нормальными векторами (или смежному к нему) и, одновременно, углу между их направляющими векторами (или смежному к нему):

$$\cos\alpha = \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|} = \frac{|(\vec{l}_1, \vec{l}_2)|}{|\vec{l}_1|\cdot|\vec{l}_2|}.$$

Здесь скалярные произведения берутся по модулю, так как требуется найти именно острый угол, косинус которого положителен. Координаты нормального вектора к прямой равны коэффициентам при соответствующих переменных в общем уравнении этой прямой, а координаты направляющего вектора равны знаменателям в каноническом уравнении прямой. Умножая каноническое уравнение второй прямой на 6 и перенося все слагаемые в левую часть, получаем общее уравнение этой прямой: $3x - 2y + 1 = 0$. Выбирая в качестве координат нормальных векторов соответствующие коэффициенты в общих уравнениях прямых, находим косинус искомого угла:

$$\cos\alpha = \frac{|1\cdot 3 + (-3)\cdot(-2)|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{9}{\sqrt{130}}.$$

Заметим, что этот же результат можно получить, записав уравнение первой прямой в каноническом виде и определив ее направляющий вектор $\vec{l}_1$.

Упражнение 4.6. Заданы направляющий вектор $\vec{l} = (1, -1, 3)$ и точка $M(2, 4, -2)$ в пространстве. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку M и направленную вдоль вектора $\vec{l}$: а) в параметрическом и б) каноническом виде.

Решение

а) Подставляя в общие формулы

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + pt, \\ y(t) = y_0 + qt, \\ z(t) = z_0 + rt \end{cases}$$

координаты указанной точки и направляющего вектора, находим требуемые уравнения

$$\begin{cases} x(t) = 2 + t, \\ y(t) = 4 - t, \\ z(t) = -2 + 3t. \end{cases}$$

б) Аналогично из общих формул следует каноническое уравнение рассматриваемой прямой:

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \to \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+2}{3}.$$

Упражнение 4.7. Запишем уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(-2, 3, 1)$ и $M_2(1, -3, 5)$. Запишем уравнение этой же прямой в каноническом виде.

Решение

Аналогично двумерному случаю из общей формулы получаем требуемое уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \to \frac{x+2}{1+2} = \frac{y-3}{-3-3} = \frac{z-1}{5-1}.$$

Выполняя сложение в знаменателях дробей в последней формуле, приходим к уравнению прямой в каноническом виде:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-6} = \frac{z-1}{4}.$$

Упражнение 4.8. Запишем уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $2x+6y-3z-5=0$ и $x-3y+2z-1=0$.

Решение

Искомая прямая принадлежит каждой из указанных плоскостей, поэтому она описывается системой двух равенств

$$\begin{cases} 2x+6y-3z-5=0, \\ x-3y+2z-1=0. \end{cases}$$

Упражнение 4.9. Запишем уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(2,-3,1)$ и проходящей через точку $M(1,2,-4)$.

Решение

Коэффициентами при переменных в искомом уравнении плоскости $ax + by + cz + d = 0$ можно назначить координаты нормального вектора: $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$. Для нахождения свободного члена следует придать переменным значения координат указанной точки:

$$2\cdot 1+(-3)\cdot 2+1\cdot(-4)+d=0 \to d=8.$$

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид $2x-3y+z+8=0$.

Упражнение 4.10. Найдем расстояние s от точки $M_0(3,2,-1)$ до плоскости, описываемой уравнением общего вида $2x-3y+z+8=0$.

Решение

Из общей формулы, аналогичной формуле для расстояния от точки до прямой на плоскости, получаем

$$s=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \to \frac{|2\cdot 3-3\cdot 2+1\cdot(-1)|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

Упражнение 4.11. Найдем острый угол между плоскостями $x-2y+3z+6=0$ и $2x-y+4z+2=0$.

Решение

Острый угол между плоскостями равен углу между их нормальными векторами (или смежному к нему): $\cos\alpha=\dfrac{|(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$. Здесь скалярное произведение взято по модулю, так как требуется найти именно острый угол, косинус которого положителен. Выбирая в качестве координат нормальных векторов соответствующие коэффициенты в общих уравнениях плоскостей, находим косинус искомого угла:

$$\cos\alpha=\frac{|1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)+3\cdot 4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}}=\frac{16}{7\sqrt{6}}.$$

Упражнение 4.12. Эллипс с центром в начале координат проходит через точку $M(0,-4)$, а расстояние между его фокусами равно 8. Найдем каноническое уравнение эллипса и его эксцентриситет, если известно, что оси симметрии эллипса параллельны осям координат или совпадают с ними.

Решение

Так как центр эллипса находится в начале координат, то оси симметрии совпадают с координатными осями. Тогда координата y точки M совпадает с полуосью b, $-4 \le y \le 4$. Замечаем, что фокусы должны находиться на оси x, так как они просто не поместятся внутри эллипса на оси y. Тогда большая полуось a находится из равенства $a=\sqrt{b^2+c^2}$, где $c=4$ — расстояние от начала координат до каждого из фокусов. Получаем $a=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$; $\varepsilon=c/a=1/\sqrt{2}$, и искомое каноническое уравнение имеет вид $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Упражнение 4.13. Запишем каноническое уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник $1 \le x \le 5;\ 0 \le y \le 2$. Укажем положение его фокусов и найдем эксцентриситет эллипса.

Решение

Оси симметрии описанного прямоугольника совпадают с осями симметрии эллипса. В нашем случае они параллельны осям координат, а их уравнения даются формулами

$$y = 0{,}5(y_{\max} + y_{\min}) = 1;\ x = 0{,}5(x_{\max} + x_{\min}) = 3.$$

Полуоси эллипса находятся из равенств

$$a = 0{,}5(x_{\max} - x_{\min}) = 2;\ b = 0{,}5(y_{\max} - y_{\min}) = 1,$$

а каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{1} = 1.$$

Фокусное расстояние $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$, эксцентриситет равен $\varepsilon = \sqrt{3} / 2$, а фокусы расположены на большой оси эллипса в точках $F_{1,2}\left(\frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} \pm c, \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}\right)$ или, окончательно, $F_1(3 + \sqrt{3}, 1)$ и $F_2(3 - \sqrt{3}, 1)$.

Упражнение 4.14. Запишем каноническое уравнение гиперболы, ветви которой заключены между прямыми $y = -3x$ и $y = 3x$, примыкая к ним, и выполняется условие $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. Укажем положение ее фокусов и вычислим эксцентриситет гиперболы.

Решение

Судя по положению асимптот, центр гиперболы находится в начале координат и оси симметрии совпадают с координатными осями. Так как у нас есть разрыв в значениях переменной x, то именно ось OX и является действительной осью гиперболы, причем действительная полуось равна половине расстояния между ветвями гиперболы, $a = 2$. Мнимая полуось нашей гиперболы втрое больше действительной ($b = 3a = 6$), так как асимптоты кривой равны $y = \pm\frac{b}{a}x$. Таким образом, каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$, фокусное расстояние равно $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{10}$.

Эксцентриситет равен $\varepsilon = c / a = \sqrt{10}$, а фокусы находятся на действительной оси в точках $F_1(2\sqrt{10}, 0)$ и $F_2(-2\sqrt{10}, 0)$.

Упражнение 4.15. Запишем каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены в точках $F_1(0, 3)$ и $F_2(0, -3)$, а эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$.

Решение

Фокусы гиперболы находятся всегда на действительной оси — в нашем случае это ось OY. Следовательно знак «минус» в каноническом уравнении нашей гиперболы будет стоять перед слагаемым, зависящем от переменной y. Центр гиперболы находится в начале координат, фокусное расстояние $c = 3$. Кроме того, из равенств $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, $\varepsilon = b / a = 1{,}5$ следует, что $b = 1{,}5a$ и, далее, $\sqrt{a^2 + (1{,}5a)^2} = 3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 6 / \sqrt{13}; b = 9 / \sqrt{13}$. Каноническое уравнение имеет вид $-\frac{13x^2}{36} + \frac{13y^2}{81} = 1$.

Упражнение 4.16. Запишем каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в точке $M(0; 1)$, а фокус — в точке $F(2, 1)$. Запишем уравнение директрисы.

Решение

Вершина и фокус параболы находятся на одной прямой — на оси кривой. В нашем случае ось параболы описывается уравнением $y = 1$ — ось горизонтальна, и поэтому уравнение параболы должно иметь вид $(y-y_v)^2=2p(x-x_v)$. Здесь x_v, y_v — координаты вершины параболы, p — ее параметр. Директриса перпендикулярна оси параболы и расположена на том же расстоянии от вершины, что и фокус, но по другую сторону от вершины. Ее уравнение есть $x=-2$. Фокусное расстояние и параметр равны соответственно $f=2$; $p=4$, и уравнение параболы имеет вид $(y-1)^2=8x$.

Упражнение 4.17. Запишем каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в точке $M(0,\ 2)$, а директриса задается уравнением $x=-1$. Укажем положение фокуса.

Решение

Так как директриса в нашей задаче вертикальна, то ось параболы — горизонтальна. Поскольку ось параболы проходит через вершину, то ее уравнение есть $y=2$. Фокус находится относительно директрисы на том же расстоянии от вершины, но по другую сторону от нее, т.е. в точке $F(1,2)$. Фокусное расстояние и параметр параболы равны $f=1$; $p=2$. Уравнение параболы есть $(y-2)^2=4x$.

Упражнение 4.18. Запишем уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(-1,2)$, а директриса описывается уравнением $y=6$.

Решение

Директриса параболы горизонтальна, следовательно, ее ось вертикальна. Поскольку вертикальная ось проходит через фокус, то ее положение определяется координатой x фокуса, т.е. уравнение оси $x=-1$. Вершина параболы M находится на оси кривой точно посередине между фокусом и точкой пересечения оси с директрисой, $M(-1,4)$. Фокусное расстояние и параметр равны, соответственно, $f=2$, $p=4$. Уравнение параболы есть $(x+1)^2=8(y-4)$.

Упражнение 4.19. Дано уравнение эллипса $\dfrac{(x-1)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$. Найдем эксцентриситет эллипса и положение его фокусов.

Решение

Согласно уравнению длинная ось расположена параллельно оси OY, полуось $b=3$, малая полуось $a=2$. Фокусы находятся на длинной оси. Фокусное расстояние $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$, эксцентриситет $\varepsilon=c/b=\sqrt{5}/3$. Так как вершина эллипса находится в точке $M(1,-2)$, то фокусы расположены в точках $F_1(1,-2+\sqrt{5})$ и $F_2(1,-2-\sqrt{5})$.

Упражнение 4.20. Дано уравнение гиперболы $-\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$. Найдем эксцентриситет гиперболы и положение ее фокусов.

Решение

Действительная ось, как очевидно из уравнения, направлена вертикально (знак «плюс» в уравнении стоит при переменной y), действительная полуось $b=3$, мнимая полуось $a=5$. Следовательно, фокусное расстояние $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$, эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{34}}{5}$. Вершина гиперболы находится в точке $M(-1,2)$, ось гиперболы описывается уравнением $x=-1$, а фокусы расположены на оси в точках, симметричных относительно вершины: $F_1(-1,2+\sqrt{34})$ и $F_1(-1,2-\sqrt{34})$.

Упражнение 4.21. Дано уравнение параболы $(x+1)^2=12(y+3)$. Найдем точку фокуса и уравнение директрисы.

Решение

Ось параболы направлена вертикально, так как именно переменная y входит только в первой степени. Вершина параболы находится в точке $M(-1,-3)$, ось параболы описывается уравнением $x=-1$. Параметр параболы $p=6$, фокусное расстояние $f=p/2=3$. Фокус находится на оси параболы на расстоянии f от вершины: $F(-1,-3+3) \to F(-1,0)$. Отметим, что фокус должен находиться в области, где значения координаты вдоль оси (в нашем случае переменная y) допустимы в уравнении (у нас $y \geq -3$). Директриса пересекает под углом $\pi/2$ ось параболы в точке, симметричной фокусу относительно вершины. Уравнение директрисы есть $y=-6$.

Упражнение 4.22. Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{5^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$. Запишем уравнения касательной и нормали к эллипсу в точке $M_0(1;4\sqrt{6}/5)$.

Решение

Из общей формулы для касательной получаем $\dfrac{xx_0}{a^2}+\dfrac{yy_0}{b^2}=1 \to \dfrac{x}{5^2}+\dfrac{4\sqrt{6}y}{2^2\cdot 5}=1$, или $y=\dfrac{5}{\sqrt{6}}-\dfrac{1}{5\sqrt{6}}x$. Аналогично получаем уравнение нормали:

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0) \to y-\frac{4\sqrt{6}}{5}=5\sqrt{6}(x-1).$$

Упражнение 4.23. Пусть гипербола задана уравнением $\dfrac{x^2}{3^2}-\dfrac{y^2}{2^2}=1$. Запишем уравнение касательной и нормали к гиперболе в точке $M_0(5;8/3)$.

Решение

Из общей формулы для касательной к гиперболе получаем $\dfrac{xx_0}{a^2}-\dfrac{yy_0}{b^2}=1 \to$ $\to \dfrac{5x}{3^2}-\dfrac{8y}{2^2\cdot 3}=1$, или $y=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{6}x$. Аналогично получаем уравнение нормали

$$y-y_0=-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0) \to y-\frac{8}{3}=-\frac{25\cdot 8}{4\cdot 3}(x-5) \to y=-\frac{50}{3}(x-5)+\frac{8}{3}.$$

Упражнение 4.24. Парабола задана уравнением $y^2=8x$. Запишем уравнение касательной и нормали к параболе в точке $M_0(2;4)$.

Решение

Учитывая, что в нашей задаче параметр $p=4$, из общей формулы получаем уравнение касательной: $yy_0=p(x+x_0) \to 4y=4(x+2)$, или $y=x+2$. Аналогично для нормали находим

$$y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0) \to y-y_0=-\frac{y_0}{p}(x-x_0) \to y-4=-(x-2),$$

или $y=-x+6$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Заданы направляющий вектор $\vec{b}=(2;5)$ и точка $M(2;1)$. Запишите уравнение прямой, направленной вдоль заданного направляющего вектора и проходящей через указанную точку: а) в параметрическом виде; б) в каноническом виде; в) в виде уравнения в отрезках; г) в виде уравнения с угловым коэффициентом; д) в общем виде.

4.2. Заданы направляющий вектор $\vec{b}=(3;1)$ и точка $M(-2;2)$. Запишите уравнение прямой, направленной вдоль заданного направляющего вектора и проходящей через указанную точку: а) в параметрическом виде; б) в каноническом виде; в) в виде уравнения в отрезках; г) в виде уравнения с угловым коэффициентом; д) в общем виде.

4.3. Заданы нормальный вектор $\vec{h}=(-1;3)$ и точка $M(1;-2)$. Запишите уравнение прямой, направленной перпендикулярно заданному вектору и проходящей через указанную точку: а) в общем виде; б) в виде уравнения с угловым коэффициентом; в) в виде уравнения в отрезках; г) в каноническом виде; д) в параметрическом виде.

4.4. Заданы нормальный вектор $\vec{h}=(-2;-1)$ и точка $M(3;2)$. Запишите уравнение прямой, направленной перпендикулярно заданному вектору и проходящей через указанную точку: а) в общем виде; б) в виде уравнения с угловым коэффициентом; в) в виде уравнения в отрезках; г) в каноническом виде; д) в параметрическом виде.

4.5. Заданы две точки $M_1(1,-1)$ и $M_2(2,3)$. Запишите уравнение прямой, проходящей через указанные точки: а) в обычном для такой задачи виде; б) в общем виде; в) в виде уравнения с угловым коэффициентом; г) в виде уравнения в отрезках; д) в каноническом виде; е) в параметрическом виде.

4.6. Заданы две точки $M_1(2,-1)$ и $M_2(3,1)$. Запишите уравнение прямой, проходящей через указанные точки: а) в обычном для такой задачи виде; б) в общем виде; в) в виде уравнения с угловым коэффициентом; г) в виде уравнения в отрезках; д) в каноническом виде; е) в параметрическом виде.

4.7. Даны три точки $M_1(-1,1)$, $M_2(2,3)$ и $M_3(2,5)$. Найдите расстояние s от третьей точки до прямой, проходящей через первые две точки.

4.8. Даны три точки $M_1(1,1)$, $M_2(3,2)$ и $M_3(4,1)$. Найдите расстояние s от третьей точки до прямой, проходящей через первые две точки.

4.9. Найдите острый угол между прямой, задаваемой уравнением общего вида $2x-y+1=0$, и прямой, описываемой каноническим уравнением $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-1}{1}$.

4.10. Найдите острый угол между прямой, задаваемой уравнением общего вида $x+4y+1=0$, и прямой, описываемой каноническим уравнением $\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-1}{-2}$.

4.11. Заданы направляющий вектор $\vec{l}=(1,2,-1)$ и точка $M(-2,1,2)$ в пространстве. Запишите уравнение прямой, проходящей через точку M и направленную вдоль вектора $\vec{l}$: а) в параметрическом и б) каноническом виде.

4.12. Задан направляющий вектор $\vec{l}=(4,2,3)$ и точка $M(2,3,1)$ в пространстве. Найдите уравнение прямой, проходящей через точку M и направленную вдоль вектора $\vec{l}$: а) в параметрическом и б) каноническом виде.

4.13. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(1,3,2)$ и $M_2(2,1,5)$, в каноническом виде.

4.14. Запишите уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $M_1(1,1,-1)$ и $M_2(2,4,0)$, в каноническом виде.

4.15. Запишите уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $x+y-$ $-z-3=0$ и $3x-y+2z-9=0$.

4.16. Запишите уравнение прямой, по которой пересекаются плоскости $-x+2y+$ $+z-5=3$ и $2x+4y+z-9=0$.

4.17. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(2,3,5)$ и проходящей через точку $M(1,1,1)$.

4.18. Запишите уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}=(3,1,3)$ и проходящей через точку $M(1,2,2)$.

4.19. Найдите расстояние s от точки $M_0(1,3,-1)$ до плоскости, описываемой уравнением общего вида $3x-y+2z+1=0$.

4.20. Найдите расстояние s от точки $M_0(2,-1,1)$ до плоскости, описываемой уравнением общего вида $x+y+z+6=0$.

4.21. Найдите острый угол между плоскостями $x-y+z+4=0$ и $2x+y+z+5=0$.

4.22. Эллипс с центром в начале координат проходит через точку $M(0,3)$, а расстояние между его фокусами равно 6. Найдите каноническое уравнение эллипса и его эксцентриситет, если известно, что оси симметрии эллипса параллельны осям координат или совпадают с ними.

4.23. Запишите каноническое уравнение эллипса, вписанного в прямоугольник $-1 \le x \le 5;\ 0 \le y \le 4$. Укажите положение его фокусов и найдите его эксцентриситет.

4.24. Запишите каноническое уравнение гиперболы, ветви которой заключены между прямыми $y=-2x$ и $y=2x$, примыкая к ним, и выполняется условие $x \in (-\infty;-3) \cup (3;\infty)$. Укажите положение ее фокусов и вычислите ее эксцентриситет.

4.25. Запишите каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены в точках $F_1(0,4)$ и $F_2(0,-4)$, а эксцентриситет $\varepsilon=2$.

4.26. Запишите каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в точке $M(0;0)$, а фокус — в точке $F(3,0)$. Запишите уравнение директрисы.

4.27. Запишите каноническое уравнение параболы, вершина которой находится в точке $M(0,4)$, а директриса задается уравнением $x=1$. Укажите положение фокуса.

4.28. Запишите уравнение параболы, фокус которой находится в точке $F(1,3)$, а директриса описывается уравнением $y=1$.

4.29. Дано уравнение эллипса $\dfrac{(x+1)^2}{16}+\dfrac{(y-3)^2}{9}=1$. Найдите эксцентриситет эллипса и положение его фокусов.

4.30. Дано уравнение гиперболы $-\dfrac{(x+2)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{16}=1$. Найдите эксцентриситет гиперболы и положение ее фокусов.

4.31. Дано уравнение параболы $(x-2)^2=20(y+1)$. Найдите точку фокуса и уравнение директрисы.

4.32. Дано уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$. Запишите уравнение касательной и нормали к эллипсу в точке $M_0(1;4\sqrt{2}/3)$.

4.33. Пусть гипербола задана уравнением $\dfrac{x^2}{2^2}-\dfrac{y^2}{1}=1$. Запишите уравнение касательной и нормали к ней в точке $M_0(4;\sqrt{3})$.

4.34. Парабола задана уравнением $y^2=12x$. Запишите уравнение касательной и нормали к параболе в точке $M_0(3;6)$.

Глава 5
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Материал этой главы, помимо общекультурной ценности, имеет и прикладное значение. Например, владение им может быть полезным при поиске решений алгебраических уравнений. Кроме того, использование аппарата комплексных чисел часто упрощает количественный анализ колебательных процессов. После усвоения материала этой главы студент должен владеть понятием комплексного числа, знать правила действия с комплексными числами и уметь проводить простые расчеты с ними.

5.1. Комплексные числа и действия с ними

Всем известно, что не всякое квадратное уравнение имеет действительное решение. Более того, не существует действительного числа, равного корню четной степени из отрицательного числа. А можно ли предложить какое-то обобщение действительных чисел, свободных от указанных ограничений? Таким обобщением являются комплексные числа.

Определение комплексного числа начинается с введения нового математического объекта — мнимой единицы i. *Мнимая единица* — это такое «число» (оно не может быть действительным), квадрат которого равен минус единице: $i^2 = -1$. Оставляя, по возможности, без изменения все правила арифметики, получим ряд равенств:

$$i^2 = -1;\ i^3 = i \cdot i^2 = -i;\ i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)\cdot(-1) = 1;\ i^5 = i \cdot i^4 = i.$$

Дальнейшее увеличение степени мнимой единицы приведет к повторению указанной четверки чисел. Мнимая единица является примером *мнимого числа*. Умножая ее на произвольное действительное число, получим множество мнимых чисел, которое можно определить формулой $y \cdot i$, где y — любое действительное число. *Комплексным числом* называется сумма произвольного действительного числа и произвольного мнимого числа: $z = x + iy$. Заметим сразу, что пока это просто символ — мы не знаем, что такое «сложить действительное число с мнимым».

Чтобы как-то определить, с каким именно комплексным числом мы имеем дело, необходимо указать два действительных числа, $x = \mathrm{Re}\, z$ и $y = \mathrm{Im}\, z$, которые называются действительной и мнимой частью комплексного числа соответственно. Но мы уже сталкивались с объектами, которые определяются двумя действительными числами, — это двумерные векторы или точки на плоскости. Сопоставим каждому комплексному числу точку на координатной плоскости так, чтобы проекция этой точки на горизонтальную ось была равна действительной части комплексного числа, а проекция на вертикальную ось — его мнимой части. Если мы будем складывать два произвольных комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ по привычным для нас правилам, то получим

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

Видим, что комплексные числа складываются так же, как и векторы. Определим для каждого комплексного числа комплексно сопряженное к нему число с помощью формулы $z^* = x - iy$ (т.е. при комплексном сопряжении меняется знак мнимой части числа).

Теперь перемножим два комплексных числа, работая с мнимой единицей как с буквенным параметром, учитывая выражения для ее степеней, написанные выше:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

Оказывается, что произведение двух комплексных чисел равно третьему комплексному числу. Здесь нарушается сходство комплексного числа с вектором. Отметим, что произведение комплексного числа на свое сопряженное всегда равно действительному числу. Действительно,

$$z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2.$$

А можно ли делить комплексные числа друг на друга, и есть ли у каждого комплексного числа обратное? Какой смысл имеет символ $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}$? Как и ранее, будем обращаться с комплексными числами как с алгебраическими выражениями. Умножив числитель и знаменатель написанной выше дроби на z^*, получим общее выражение для числа, обратного к заданному комплексному числу:

$$\frac{1}{z} = \frac{z^*}{z \cdot z^*} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Так же как и с действительными числами, разделить на число означает умножить на обратное к нему:

$$\frac{z_1}{z_2} = (x_1 + iy_1)\frac{x_2 - iy_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x^2 + y^2} + i\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x^2 + y^2}.$$

Пример 5.1

Сложим, перемножим и разделим друг на друга числа $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 1 - 4i$.

Решение

Получим:

$$z_1 + z_2 = 2 + 3i + (1 - 4i) = 2 + 1 + 3i - 4i = 3 - i;$$

$$z_1z_2 = (2 + 3i)(1 - 4i) = (2 \cdot 1 - 3i \cdot 4i) + (3i \cdot 1 - 2 \cdot 4i) = 14 - 5i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{1 - 4i} = \frac{(2 + 3i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} = \frac{(2 + 12i^2) + i(8 + 3)}{1 - 16i^2} = \frac{-10 + 11i}{17}.$$

5.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

Положение точки на плоскости можно задать с помощью двух чисел. Однако необязательно, чтобы эти числа были декартовыми координатами. Например, положение рассматриваемой точки можно задать в полярной системе координат (см. предыдущую главу) и характеризовать каждую точку M ее удалением от начала координат, точки O, и углом между вектором $\overrightarrow{OM}$ и осью OX. При этом $M(x,y) \to M(\rho,\varphi)$, а связь между старыми и новыми координатами определяется формулами $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$. Так как каждое комплексное число соответствует определенной точке на комплексной плоскости, его можно записать в тригонометрической форме:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где $|z| = \rho$ называется модулем комплексного числа z, а угол φ — аргументом z. В тригонометрической форме произведение комплексных чисел имеет вид

$$z_1 z_2 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= |z_1||z_2|[(\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i\cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cdot\cos\varphi_2)] =$$
$$= |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Полученные формулы показывают, что при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Другими словами, умножение исходного комплексного числа z_1, характеризуемого вектором $\overrightarrow{OM_1}$, на другое комплексное число $z_2(\rho_2,\varphi_2)$ приводит к увелиению модуля исходного числа $|z_1|$ в $|z_2| = \rho_2$ раз и повороту вектора $\overrightarrow{OM_1}$ на угол φ_2 против часовой стрелки.

Пример 5.2

Перемножим числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $z_2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Видим, что модуль первого числа равен 2, а его аргумент равен $\pi/6$, или 30°. У второго числа модуль равен 4, а аргумент равен $-\pi/4$, или $-45°$. Знак угла φ определяется вторым слагаемым в представлении комплексного числа, так как первое от знака угла не зависит. Используя написанные выше формулы, получим

$$z_1 z_2 = 2\cdot 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\right).$$

Таким образом, получившееся число можно характеризовать вектором на комплексной плоскости, начало которого совмещено с началом координат, длина вектора равна 8, и он повернут на угол $\pi/12$ (15°) по часовой стрелки относительно оси OX.

Особенно удобно пользоваться тригонометрической формой комплексного числа при возведении числа в степень. Действительно, согласно установленному выше правилу при возведении в n-ю степень произвольного комплексного числа его модуль возводится в эту степень, а аргумент увеличивается в n раз, т.е если комплексное число $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то его степень

$$z^n=|z|^n(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)).$$

Последняя формула называется *формулой Муавра*. Переход к показательной форме комплексного числа осуществляется с помощью *формулы Эйлера*

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi.$$

Таким образом, $z=|z|e^{i\varphi}$. При этом сложение углов и перемножение модулей при умножении комплексных чисел происходит в полном согласии с известными правилами умножения действительных чисел. Действительно, если $z_1=|z_1|e^{i\varphi_1}$ и $z_2=|z_2|e^{i\varphi_2}$, то $z_1\cdot z_2=|z_1|e^{i\varphi_1}\cdot|z_2|e^{i\varphi_2}=|z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Пример 5.3

Найдем произведение $z_1^4z_2^5$, если $z_1=3\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, а $z_2=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Согласно формуле Муавра

$$z_1^4z_2^5=3^4\left(\cos\frac{4\pi}{6}-i\sin\frac{4\pi}{6}\right)\cdot2^5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

Мы получили произведение двух чисел. Модуль первого из них равен 81, а его аргумент равен $-2\pi/3$ (знак аргумента φ_1 определяется знаком перед синусом). Аналогично модуль второго числа равен 32, а его аргумент равен $5\pi/4$. Перемножая модули комплексных сомножителей и складывая их аргументы, получаем

$$z_1^4z_2^5=81\cdot32\left(\cos\left(\frac{-2}{3}+\frac{5}{4}\right)\pi+i\sin\left(\frac{-2}{3}+\frac{5}{4}\right)\pi\right)=2592\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Заметим, что правило умножения комплексных чисел обеспечивает справедливость формулы Муавра и в случае дробного показателя степени n. Мы здесь ограничимся рассмотрением дробных показателей степени вида $1/n$, т.е. корней n-й степени из комплексного числа. Внимательно приглядевшись к тригонометрической форме комплексного числа $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, обнаруживаем, что угол φ в силу периодичности всех тригонометрических функций может принимать бесконечное множество значений $\varphi_k=\varphi_0+2\pi k$, где $\varphi_0\in[0,2\pi)$; $k=0,\pm1,\pm2,\dots$. Однако при возведении в целую степень учет второго слагаемого в выражении для аргумента не приводит к изменению рассматриваемого комплексного числа ни при каком целом значении параметра k (изменение k ведет к добавлению целого числа оборотов на комплексной плоскости вокруг начала координат, и рассматриваемая точка переходит сама в себя). Совсем по-другому обстоят дела в случае дробного показателя степени.

Начнем с частного примера.

Пример 5.4

Найдем все значения корня 3-й степени из числа $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Решение

Следуя формуле Муавра и учитывая неоднозначность выбора угла φ, получим

$$\sqrt[3]{z} = (z)^{1/3} = 8^{1/3}\left[\cos\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right].$$

Посмотрим, какие значения корня получаются при разных значениях параметра k. При $k = 0$ находим $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$, а при $k = 1$ получим уже

$$z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Продолжая процесс, для $k = 2$ находим

$$z_2 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Замечаем, что аргументы получившихся трех чисел меньше 2π и отличаются друг от друга (хотя модули совпадают). Следовательно, они описывают три разных комплексных числа. Аргумент каждого последующего числа при последовательном увеличении k отличается от предыдущего ровно на треть полного оборота. Понятно, что, добавив эту порцию ($\Delta\varphi = 2\pi/3$) три раза, мы совершим полный оборот и вернемся в исходную точку ($3\Delta\varphi = 2\pi$):

$$z_3 = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{6\pi}{3}\right)\right] = z_0.$$

Все последующие добавки приведут к перебору тех же трех корней: $z_{k+3} = z_k$. Наши рассуждения показывают, что корень 3-й степени из комплексного числа имеет ровно три различных значения: z_0, z_1, z_2. Перемножая каждое из этих чисел само на себя три раза, получаем исходное число. Количество корней, как легко видеть, равно кратности корня.

Сформулируем общее решение поставленной задачи: корень n-й степени из произвольного комплексного числа имеет ровно n различных значений:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{|z|}(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k),$$

где $\varphi_k = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}$ и $k = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Пример 5.5

Для корня 4-й степени из числа $81\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ получим ровно 4 разных значения:

$$\sqrt[4]{81\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)} = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}\right)\right],$$

где $k = 0, 1, 2, 3$.

Заметим, что задача о вычислении всех значений корня n-й степени непосредственно связана с задачей решения алгебраических уравнений. Так, любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами всегда имеет ровно два корня (в частности, одинаковых) на множестве комплексных чисел.

Пример 5.6

Решим квадратное уравнение $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Решение

Действительных корней уравнение не имеет. Но в области комплексных значений уравнение имеет два решения: $z_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm 3i$.

Контрольные вопросы и задания

1. Опишите геометрическую интерпретацию комплексного числа.
2. Какими переменными описывается комплексное число в тригонометрической и показательной формах?
3. Какие правила умножения комплексных чисел обуславливают формулу Муавра?
4. Почему корень n-й степени из комплексного числа имеет ровно n различных значений?
5. Сколько различных значений имеет число $z^{m/n}$, если m и n — взаимно простые числа?

Практикум по решению задач

Упражнение 5.1. Выполним следующие действия с комплексными числами $z_1 = 3 - i$; $z_2 = 2 + 5i$: а) $3z_1 - iz_2$; б) $2z_1 + 3z_2$; в) $5z_1 i + 4z_2$; г) $z_1(3z_2 - i)$; д) $z_1(3z_2 + 2iz_1)$; е) $z_2 + iz_1(3z_2 + z_1)$.

Решение

Учитывая, что $i^2 = -1$; $i^3 = -i$, находим:

а) $3z_1 - iz_2 = 3(3-i) - i(2+5i) = 9 - 3i - 2i - 5i^2 = 9 - 3i - 2i + 5 = 14 - 5i$;

б) $2z_1 + 3z_2 = 2(3-i) + 3(2+5i) = 6 - 2i + 6 + 15i = 12 + 13i$;

в) $5z_1 i + 4z_2 = 5(3i - i^2) + 4(2+5i) = 15i + 5 + 8 + 20i = 13 + 35i$;

г) $z_1(3z_2 - i) = (3-i)[3(2+5i) - i] = 18 - 6i + 45i - 15i^2 - 3i + i^2 = 32 + 36i$;

д) $z_1(3z_2 + 2iz_1) = (3-i)[3(2+5i) + 2i(3-i)] = (3-i)(6 + 15i + 6i - 2i^2) =$
$= (3-i)(8+21i) = 24 - 8i + 63i - 21i^2 = 45 + 55i$;

е) $z_2 + iz_1(3z_2 + z_1) = (2+5i) + i(3-i)[3(2+5i) + 3 - i] =$
$= 2 + 5i + (3i - i^2)(6 + 15i + 3 - i) = 2 + 5i + 27i + 42i^2 - 9i^2 - 14i^3 = 53 + 46i$.

Упражнение 5.2. Выполним следующие действия с комплексными числами $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 4 - i$: а) $\frac{z_1 z_2}{2i + z_2}$; б) $\frac{z_1^* + 3z_2}{z_1 + 1}$; в) $\frac{5z_1 i}{(z_1 + z_2)^2}$; г) $\frac{z_1 z_2^*}{z_1^*}$; д) $\frac{2iz_1}{(3z_2 + i)^{2*}}$; е) $\left(\frac{z_2 + iz_1^*}{2z_2 + z_1}\right)^*$.

Решение

Учитывая, что $z^* = (a + ib)^* = a - ib$, находим:

а) $\frac{z_1 z_2}{2i + z_2} = \frac{(2+3i)(4-i)}{2i + 4 - i} = \frac{11 + 10i}{4 + i} = \frac{11 + 10i}{4 + i} \cdot \frac{4 - i}{4 - i} = \frac{54 + 29i}{4^2 - i^2} = \frac{54 + 29i}{17}$;

б) $\dfrac{z_1^*+3z_2}{z_1+1}=\dfrac{(2+3i)^*+3(4-i)}{2+3i+1}=\dfrac{2-3i+12-3i}{3+3i}=\dfrac{14-6i}{3(1+i)}\cdot\dfrac{1-i}{1-i}=\dfrac{8-20i}{6}=\dfrac{4-5i}{3}$;

в) $\dfrac{5z_1 i}{(z_1+z_2)^2}=\dfrac{5i(2+3i)}{(2+3i+4-i)^2}=\dfrac{5(-3+2i)}{(6+2i)^2}=\dfrac{5(-3+2i)}{4(3+i)^2}=\dfrac{5(-3+2i)}{4(8+6i)}=$

$=\dfrac{5(-3+2i)}{8(4+3i)}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i}=\dfrac{5(-6+17i)}{8\cdot 25}=\dfrac{-6+17i}{40}$;

г) $\dfrac{z_1 z_2^*}{z_1^*}=\dfrac{(2+3i)(4-i)^*}{(2+3i)^*}=\dfrac{(2+3i)(4+i)}{(2-3i)}=\dfrac{5+14i}{2-3i}\cdot\dfrac{2+3i}{2+3i}=\dfrac{-32+43i}{13}$;

д) $\dfrac{2iz_1}{[(3z_2+i)^2]^*}=\dfrac{2i(2+3i)}{\{[3(4-i)+i]^2\}^*}=\dfrac{-6+4i}{[(12-2i)^2]^*}=\dfrac{-2(3+2i)}{4[(6-i)^2]^*}=\dfrac{-3+2i}{2(35-12i)^*}=$

$=\dfrac{-3+2i}{2(35+12i)}\cdot\dfrac{35-12i}{35-12i}=\dfrac{-81+106i}{2738}$;

е) $\left(\dfrac{z_2+iz_1^*}{2z_2+z_1}\right)^*=\left(\dfrac{4-i+i(2+3i)^*}{2(4-i)+2+3i}\right)^*=\left(\dfrac{7+i}{10+i}\right)^*=\left(\dfrac{7+i}{10+i}\cdot\dfrac{10-i}{10-i}\right)^*=\dfrac{(71+3i)^*}{101}=\dfrac{71-3i}{101}$.

Упражнение 5.3. Используя тригонометрическую или экспоненциальную форму комплексных чисел $z_1=3+3i$ и $z_2=1-\sqrt{3}i$, выполним с ними следующие действия:

а) $z_1^5 z_2^{11}$; б) $z_1^9 z_2^7$; в) z_1^6 / z_2^{10}; г) z_2^8 / z_1^5; д) $2z_1^6+4z_2^9$.

Решение

Переходим к тригонометрической форме комплексного числа по формуле $z=x+iy=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где модуль $|z|=x^2+y^2$, а аргумент $\varphi=\arcsin(y/|z|)=$ $=\arccos(x/|z|)$, а к экспоненциальной — по формуле $z=x+iy=|z|e^{i\varphi}$. Получаем

$$z_1=3+3i=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=3\sqrt{2}e^{i\pi/4}$$

и

$$z_2=1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{-\pi}{3}+i\sin\frac{-\pi}{3}\right)=2e^{-i\pi/3}.$$

Учитывая, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, находим:

а) $z_1^5 z_2^{11}=\left(3\sqrt{2}\right)^5(2)^{11}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{-11\pi}{3}+i\sin\dfrac{-11\pi}{3}\right)=$

$=3^5\cdot 2^{27/2}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{11\pi}{3}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{4}-\dfrac{11\pi}{3}\right)\right)=$

$=3^5\cdot 2^{27/2}\left(\cos\left(\dfrac{-29\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{-29\pi}{12}\right)\right)=$

$=3^5\cdot 2^{27/2}\left(\cos\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\dfrac{-5\pi}{12}\right)\right)=3^5\cdot 2^{27/2}e^{-5i\pi/12}$

(на последнем этапе мы учли, что угол определяется с точностью до целого числа оборотов и $-(29/12)\pi=-2\pi-(5/12)\pi$);

б) $z_1^9 z_2^7=(3\sqrt{2})^9(2)^7\left(\cos\dfrac{9\pi}{4}+i\sin\dfrac{9\pi}{4}\right)\left(\cos\dfrac{-7\pi}{3}+i\sin\dfrac{-7\pi}{3}\right)=$

$$= 3^9 \cdot 2^{23/2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{7\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\frac{7\pi}{3}\right)\right)=$$

$$= 3^9 \cdot 2^{23/2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)= 3^9 \cdot 2^{23/2}e^{-i\pi/12};$$

в) $z_1{}^6 / z_2{}^{10} = (3\sqrt{2})^6(2)^{-10}e^{i6\pi/4} / e^{-i10\pi/3} = 3^5 2^{-7}e^{i\pi 29/6} = \dfrac{3^5}{2^7}\left(\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right);$

г) $z_2{}^8 / z_1{}^5 = (3\sqrt{2})^8 \cdot (2)^{-5}e^{i8\pi/4} / e^{-i5\pi/3} = 3^8 2^{-1}e^{i11\pi/3} = 3^8 2^{-1}e^{-i\pi/3} =$

$$= \frac{3^8}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right);$$

д) $2z_1{}^6 + 4z_2{}^9 = 2(3\sqrt{2})^6e^{i6\pi/4} + 4(2)^9e^{-i9\pi/3} = 3^6 2^3e^{i3\pi/2} + 2^{11}e^{-i\pi} = -2^{11} - i3^6 2^3.$

Упражнение 5.4. Найдем все значения корня n-й степени:

а) $\sqrt{6+i6\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{-3+3i}$; в) $\sqrt[4]{-2+2i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[5]{-7-7i}$; д) $\sqrt[5]{-32}$.

Решение

Записывая указанные числа в экспоненциальной форме и используя стандартную процедуру, находим требуемые числа:

а) $\sqrt{6+i6\sqrt{3}} = \sqrt{12\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \sqrt{12e^{i(2k\pi+\pi/3)}} = \sqrt{12}e^{i(k\pi+\pi/6)}$ — получаем два разных значения корня: для $k=0$ $z_1 = \sqrt{12}e^{i\pi/6} = \sqrt{12}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right) = 3+\sqrt{3}i$ и для $k=1$ $z_2 = \sqrt{12}e^{i7\pi/6} =$ $= \sqrt{12}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right) = -3-\sqrt{3}i;$

б) $\sqrt[3]{-3+3i} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}}+\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}e^{i(2k\pi+3\pi/4)}} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i(2k\pi/3+\pi/4)}$. Придавая параметру разные значения k = 0; 1; 2, получаем три разных значения корня: $z_1 =$ $= \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i(\pi/4)} = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}(1+i)$; $z_2 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i(2\pi/3+\pi/4)} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i11\pi/12}$ и $z_3 = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i(4\pi/3+\pi/4)} =$ $= \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{i(2k\pi/3+\pi/4)} = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}e^{-i5\pi/12};$

в) $\sqrt[4]{-2+i2\sqrt{3}} = \sqrt[4]{4e^{i(2k\pi+2\pi/3)}} = \sqrt{2}e^{i\pi(k/2+1/6)}$. Придавая параметру разные значения k = 0; 1; 2; 3, получаем четыре разных значения корня: $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}};$

$z_2 = \sqrt{2}e^{i2\pi/3} = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; $z_3 = \sqrt{2}e^{i\pi 7/6} = \dfrac{-\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$; $z_4 = \sqrt{2}e^{i\pi 5/3} = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}};$

г) $\sqrt[5]{-7-7i} = \sqrt[5]{7\sqrt{2}\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}} = \sqrt[5]{7\sqrt{2}e^{i\pi(2k+5/4)}} = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi(2k/5+1/4)}$. Придавая параметру различные значения k = 0; 1; 2; 3; 4, получаем пять разных корней: $z_1 = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi/4} =$ $= \sqrt[5]{7\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $z_2 = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i13\pi/20}$; $z_3 = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi 21/20} = -\sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi/20}$; $z_4 = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi 29/20} =$ $= -\sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi 9/20}$; $z_4 = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{i\pi 36/20} = \sqrt[5]{7\sqrt{2}}e^{-i\pi/5};$

д) $\sqrt[5]{-32}=2\sqrt[5]{e^{i\pi(2k+1)}}=2e^{i\pi(2k+1)/5}$. Придавая параметру различные значения $k=0$; 1; 2; 3; 4, получаем пять разных корней: $z_1=2e^{i\pi/5}$; $z_2=2e^{i\pi3/5}$; $z_3=2e^{i\pi}=-2$; $z_4=2e^{i\pi7/5}$; $z_4=2e^{-i\pi/5}$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Выполните следующие действия с комплексными числами $z_1=1+i$; $z_2=2-i$:

а) z_1-iz_2; б) $2iz_1+3z_2$; в) $5z_1+i+z_2$; г) $z_1(z_2-2i)$; д) $z_2(z_2+2iz_1)$; е) $z_2+i(3z_2+z_1)$.

5.2. Выполните следующие действия с комплексными числами $z_1=2-3i$; $z_2=4-3i$:

а) $3iz_1-z_2$; б) z_1+3iz_2; в) $5z_1+2iz_2$; г) $z_1(3z_2-i+2z_1)$; д) $3z_1(z_2+2z_1)$; е) $iz_1(3z_2-4z_1)$.

5.3. Выполните следующие действия с комплексными числами $z_1=-2+i$; $z_2=3-i$:

а) $\dfrac{z_1z_2^*}{2+iz_2}$; б) $\dfrac{-z_1^*+z_2}{2z_1+i}$; в) $\dfrac{z_1+i}{(3z_1+z_2^*)^2}$; г) $\dfrac{z_1+z_2^*}{z_1^*+i}$; д) $\dfrac{2i+z_1^*}{(z_2-i)^{2*}}$; е) $\left(\dfrac{z_2^*+iz_1}{2z_2+z_1^*}\right)^*$.

5.4. Выполните следующие действия с комплексными числами $z_1=1+3i$; $z_2=-2+2i$:

а) $\dfrac{(z_1z_2)^*}{2i+z_2}$; б) $\dfrac{z_1^*-z_2}{z_1+1+i}$; в) $\dfrac{3z_1i+z_2^*}{(z_1+z_2)^2}$; г) $\dfrac{z_1^*}{z_1z_2^*}$; д) $\dfrac{-2iz_1+2}{[(z_2+3i)^2]^*}$; е) $\left(\dfrac{z_2+5z_1^*}{z_2^*+z_1}\right)^*$.

5.5. Используя тригонометрическую или экспоненциальную форму комплексных чисел $z_1=4-4i$ и $z_2=2\sqrt{3}-2i$, выполните с ними следующие действия:

а) $z_1{}^6z_2{}^7$; б) $z_1{}^7z_2{}^5$; в) $z_1{}^8\,/\,z_2{}^6$; г) $z_2{}^{12}\,/\,z_1{}^9$; д) $5z_1{}^4+2z_2{}^6$; е) $\dfrac{2z_1{}^{12}+3z_2{}^9}{z_1{}^{10}-2z_2{}^{12}}$.

5.6. Найдите все значения корня n-й степени:

а) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{5+5i}$; в) $\sqrt[4]{-2\sqrt{3}+2i}$; г) $\sqrt[5]{4\sqrt{3}+4i}$; е) $\sqrt[6]{64}$; ж) $\sqrt[6]{8+8i}$.

Раздел II
ОСНОВЫ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

При анализе, исследовании и решении социальных и управленческих задач активно используются дискретные методы формализованного представления. Рассмотрением этих методов занимается дискретная математика. К ним относятся методы, основанные на теоретико-множественных представлениях, математическая логика, графы и др.

Дискретная математика предлагает:

- универсальные средства (языки) формализованного представления;
- способы корректной переработки информации, представленной на этих языках;
- возможности и условия перехода с одного языка описания явлений на другой с сохранением содержательного смысла модели.

Задачей данного раздела является знакомство с основными моделями и методами формализованного представления описания процессов: теоретико-множественных, логических, графических, и освоение их. Теория множеств, логика, теория графов являются фундаментом дискретной математики.

Изучение раздела II способствует формированию у студента следующих компетенций:

- способность применять системный подход и математические методы в формализации решения прикладных задач;
- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- способность выбирать математические модели организационных систем, анализировать их адекватность, проводить адаптацию моделей к конкретным задачам управления;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящиеся за пределами непосредственной сферы деятельности.

После освоения раздела II студент должен:

знать

- основы дискретной математики;
- методы теории множеств, математической логики, алгебры высказываний, теории графов;

уметь

- строить математические модели объектов профессиональной деятельности;
- применять методы дискретной математики для решения математических и прикладных задач;

владеть

- навыками решения задач дискретной математики;
- комбинаторным, теоретико-множественным подходами к постановке и решению задач;
- навыками моделирования прикладных задач методами дискретной математики.

Глава 6
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

6.1. Множества и способы их задания

Понятие множества относится к первичным, неопределяемым понятиям математики, т.е. его нельзя свести к другим понятиям и определениям.

Под *множеством* понимается совокупность (система) каких-либо объектов произвольной природы, обладающих некоторым общим признаком.

Множества обозначают заглавными буквами латинского алфавита — A, B, C. Множество задано (определено), если о всяком объекте можно сказать, принадлежит он к данному множеству или нет. Объекты, образующие множество, называются *элементами множества* и обозначаются малыми буквами — a, b, c.

Если элемент a принадлежит множеству A, то это обозначается как $a \in A$, в противном случае — $a \notin A$ (элемент a не принадлежит множеству A).

Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Пример 6.1

Укажем примеры множеств: множество студентов, присутствующих на лекции; множество отрицательных чисел; множество государств — членов какого-нибудь союза.

Некоторые множества имеют общепринятые обозначения: N — множество натуральных чисел; R — множество действительных чисел; Z — множество целых чисел и т.д.

Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если $A \subseteq B$ и $A \neq B$, то A называется *строгим* (*собственным*) подмножеством (обозначение $A \subset B$). Пустое множество является подмножеством любого множества: $\varnothing \subseteq A$.

Два множества называются *равными* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов, или если выполняются соотношения $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются *конечными*, в противном случае — *бесконечными*. Число элементов конечного множества A называют его *мощностью* (обозначение $|A|$). Мощность пустого множества равна нулю: $|\varnothing| = 0$.

Если каждому элементу некоторого множества A можно присвоить номер: $\{a_1, a_2, a_3, ...\}$, причем каждый элемент имеет только один номер, то множество называется *счетным*, в противном случае множество называется *несчетным*.

Рассмотрим *способы задания множеств*.

1. Задание списком (перечислением всех входящих в него элементов). Списком можно задать только конечные множества. Обозначение списка — в фигурных скобках.

Пример 6.2

Примеры задания множеств списком:

1) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ — множество десятичных цифр;

2) множество A компонентов компьютера, состоящего из процессора a и периферических устройств B (монитор b, клавиатура c, мышь d, принтер e): $A = \{a, B\} = \{a, b, c, d, e\}$.

Замечание 6.1. Задание типа $N = 1, 2, 3, ...$ — не список, а допустимое условное обозначение.

2. Порождающая процедура. Порождающая процедура описывает способ получения элементов множества из уже имеющихся элементов или других объектов. Тогда элементами множества являются все объекты, которые могут быть получены с помощью этой процедуры.

Пример 6.3

Множество натуральных чисел A, делящихся на 3 без остатка, может быть представлено порождающей процедурой, заданной двумя правилами, которые называются рекурсивными или индуктивными:

1) $3 \in A$;

2) если $a \in A$, то $a + 3 \in A$.

3. Характеристическое свойство. Характеристического свойство — это свойство, которым должны обладать все элементы множества. Обозначение $A = \{x \mid P(x)\}$ или $A = \{x : P(x)\}$ (множество A состоит только из тех элементов, которые обладают свойством $P(x)$).

Пример 6.4

Множество натуральных четных чисел, меньших 10, можно задать в следующем виде: $B = \{2, 4, 6, 8\}$ или $B = \{n \mid n = 2m$, где m — целое число, $1 \le m \le 4\}$.

Одним из способов описать характеристическое свойство множества является наличие *распознающей* (разрешающей) *процедуры*.

Распознающая или разрешающая процедура устанавливает для любого элемента, принадлежит ли он данному множеству (обладает ли он данным характеристическим свойством).

Пример 6.5

Распознающей процедурой для множества всех студентов конкретного вуза является проверка наличия студенческого билета этого вуза.

6.2. Операции над множествами

Сумма (объединение) ($A \bigcup B$). Объединение множеств A и B есть множество C, состоящее из всех элементов множеств A и B. Элемент входит в множество C, если он входит в A или в B: $C = A \bigcup B = \{c \mid c \in A$ или $c \in B\}$.

$\bigcup$ — символ объединения множеств.

Произведение (пересечение) ($A \bigcap B$). Пересечение множеств A и B есть множество C, элементы которого принадлежат и множеству A, и множеству B: $C = A \bigcap B = \{c \mid c \in A$ и $c \in B\}$.

$\bigcap$ — символ пересечения множеств.

Вычитание ($A \setminus B$). Разность множеств A и B есть множество C, элементы которого обладают свойствами множества A и не обладают свойствами множества B или, иначе, принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B: $C = A \setminus B = \{c \mid c \in A$ и $c \notin B\}$.

В общем случае $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Дополнение ($\overline{A}$). Пусть имеется некоторое «универсальное» множество U и все рассматриваемые множества есть его подмножества. Элементами множества $\overline{A}$ являются все элементы, не входящие в A, но принадлежащие U: $\overline{A} = U \setminus A = \{a \mid a \notin A\}$.

Множество U должно быть или задано, или очевидно из контекста.

Множества часто задают графически с помощью *диаграмм Эйлера — Венна.* Каждая фигура соответствует одному из множеств и символически ограничивает его элементы, а рамка, ограничивающая все элементы пространства, в верхнем правом углу имеет обозначение 1.

Введенные операции позволяют выражать одни множества через другие, при этом сначала выполняется операция дополнения, затем пересечения и потом объединения или вычитания. Для изменения этого порядка используют скобки.

На рис. 6.1 приведены диаграммы Эйлера — Венна, выражающие основные соотношения между множествами.

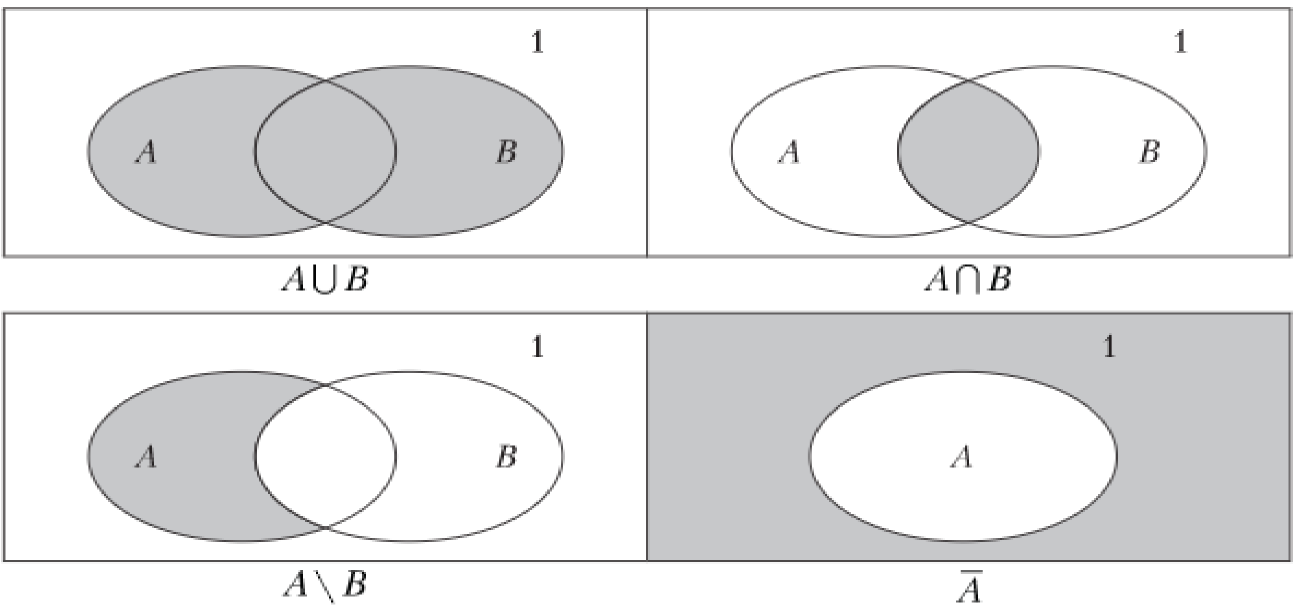


Рис. 6.1

Объединение и пересечение произвольной совокупности множеств определяются аналогично: $A \bigcup B \bigcup C \bigcup D$ — объединение четырех множеств; $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$; $\bigcap\limits_{A \in S} A$; $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ и т.д.

Операции объединения, пересечения и дополнения $\{\bigcup, \bigcap, \setminus\}$ называются *булевыми операциями* над множествами.

Пример 6.6

Пусть универсальное множество U — множество сотрудников некоторой организации. Рассмотрим следующие множества:

A — множество всех сотрудников старше 35 лет;

B — множество сотрудников, имеющих стаж более 5 лет;

C — множество менеджеров фирмы.

Укажем характеристическое свойство (содержательный смысл) каждого из следующих множеств: а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \bigcap B \bigcap C$; в) $A \bigcup (B \bigcap \overline{C})$; г) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$.

Решение

а) $\overline{B}$ — множество сотрудников организации, стаж которых не больше 5 лет;

б) $\overline{A} \bigcap B \bigcap C$ — множество менеджеров организации не старше 35 лет, имеющих стаж более 10 лет;

в) $A \bigcup (B \bigcap \overline{C})$ — множество всех сотрудников организации старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 5 лет;

г) $B \setminus C$ — множество сотрудников организации со стажем более 5 лет, не работающих менеджерами;

д) $C \setminus B$ — множество менеджеров со стажем не более 5 лет.

Основные тождества операций над множествами. Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества.

1. а) $A \bigcup B = B \bigcup A$ (коммутативность $\bigcup$);
   б) $A \bigcap B = B \bigcap A$ (коммутативность $\bigcap$).
2. а) $A \bigcup (B \bigcup C) = (A \bigcup B) \bigcup C$ (ассоциативность $\bigcup$);
   б) $A \bigcap (B \bigcap C) = (A \bigcap B) \bigcap C$ (ассоциативность $\bigcap$).
3. а) $A \bigcup (B \bigcap C) = (A \bigcup B) \bigcap (A \bigcup C)$ (дистрибутивность $\bigcup$ относительно $\bigcap$);
   б) $A \bigcap (B \bigcup C) = (A \bigcap B) \bigcup (A \bigcap C)$ (дистрибутивность $\bigcap$ относительно $\bigcup$).
4. а) $A \bigcup \overline{A} = U$; б) $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$.
5. а) $A \bigcup \varnothing = A$; б) $A \bigcap U = A$.
6. а) $A \bigcup A = A$; б) $A \bigcap A = A$.
7. а) $A \bigcup U = U$; б) $A \bigcap \varnothing = \varnothing$.
8. а) $\overline{A \bigcup B} = \overline{A} \bigcap \overline{B}$ (1-й закон двойственности де Моргана);
   б) $\overline{A \bigcap B} = \overline{A} \bigcup \overline{B}$ (2-й закон двойственности де Моргана).
9. а) $A \bigcup (A \bigcap B) = A$ (1-й закон поглощения);
   б) $A \bigcap (A \bigcup B) = A$ (2-й закон поглощения).

Справедливость тождества устанавливается так: показывается, что множества, находящиеся в его левой и правой частях, состоят из одних и тех же элементов.

Пример 6.7

Докажем тождество 3 а): $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Решение

Покажем, что $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

Если $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Поэтому ($x \in A$ или $x \in B$) и ($x \in A$ или $x \in C$), т.е. $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Но тогда $x \in A \cup (B \cap C)$.

Покажем, что $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Если $x \in A \cup (B \cap C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cap C$. Но если $x \in A$, то $x \in A \cup B$ и $x \in A \cup C$. Следовательно, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

6.3. Прямое произведение

Вектором (*кортежем*) называется упорядоченный набор элементов (обозначается $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$). Такое понятие вектора не связано с геометрической интерпритацией вектора на плоскости или в пространстве, как это сделано в разделе «Линейная алгебра». Часто такого рода векторы называют «арифметическими векторами». Элементы, образующие вектор, называются *координатами* (компонентами). Координаты нумеруют слева направо. Число координат n называют *размерностью* (*длиной*) вектора. Координаты векторов могут совпадать (в отличие от элементов множества). Вектор, состоящий из двух элементов, называется упорядоченной парой или просто парой, вектор длины 3 — тройкой и т.д. Векторы $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $b = (b_1, b_2, ..., b_m)$ называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и их соответствующие координаты равны: 1) $n = m$; 2) $a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_n = b_m$.

Прямым (*декартовым*) *произведением* множеств A и B называется множество $M = A \times B$ всех пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$: $M = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Аналогично вводится операция прямого произведения n множеств $A_1, A_2, ..., A_n$: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. При этом рассматриваются все векторы длины n:

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то прямое произведение $A \times A \times ... \times A = A^n$ называется *n-й степенью* множества A.

Пример 6.8

Рассмотрим все точки плоскости. Считаем, что задано множество $R^2 = R \times R$; R — множество действительных чисел, а пары (a, b), где $a, b \in R$, — координаты точек на плоскости. Тогда R^2 — двумерное пространство (плоскость). Аналогично можно рассмотреть множество R^3— множество точек трехмерного пространства. При этом важно, что положение точки на плоскости (в пространстве) однозначно определяется ее координатами.

Теорема 6.1. *Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ — некоторые конечные множества, их мощности соответственно равны $|A_1| = k_1, |A_2| = k_2, ..., |A_n| = k_n$. Тогда мощ-*

ность прямого произведения этих множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ *равна произведению мощностей множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n$: $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n| = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$.

Следствие. $|A^n| = |A|^n$.

Теорема 6.1 и ее следствие лежат в основе многих утверждений комбинаторики.

Следующая теорема дает простое правило вычисления мощности объединения двух множеств. Используя метод математической индукции, это правило можно обобщить на любое конечное число множеств.

Теорема 6.2. *Формула включений и исключений*: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Пример 6.9

Каждый из 120 студентов первого курса, изучающих математику в университете, может посещать дополнительные лекции. Пусть 46 из них слушают еще курс «Математические модели современной банковской деятельности», 37 — курс «Математические модели социальных процессов», а 5 изучают обе эти дисциплины. Сколько студентов не посещают дополнительных лекций?

Решение.

Обозначим:

A — это студенты, посещающие курс «Математические модели современной банковской деятельности»;

B — студенты, посещающие курс «Математические модели социальных процессов».

Тогда $|A| = 46, |B| = 37,\ |A \cap B| = 5$.

Поэтому $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 46 + 37 - 5 = 78$.

Следовательно, 120 – 78 = 42 студента не посещают дополнительных лекций.

Проекцией вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *на i-ю ось* (обозначение: $\text{пр}_i a$) называется его i-я компонента: $\text{пр}_i a = a_i$.

Проекцией вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *на оси* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ называется вектор вида $\text{пр}_{i_1, i_2, \ldots, i_k} a = (a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})$ длины k.

Над векторами одинаковой длины возможно выполнение различных *операций сравнения*.

Правило сравнения векторов. Пусть V — множество векторов длины n, компонентами которых являются числа. Вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ предшествует вектору $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ (не превосходит вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$) (обозначение $a \preceq b$), если компоненты вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ не больше соответствующих компонент вектора $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$: $a \preceq b$, если $a_1 \le b_1$, $a \le b_2$, ..., $a_n \le b_n$.

При этом вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ назовем *предшествующим* вектору $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, а вектор $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ назовем *последующим* для вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Пример 6.10

Сравним векторы: а) $a = (1, 2, 3, 4)$ и $b = (4, 3, 3, 5)$, б) $a = (6, 2, 5, 4)$ и $b = (4, 2, 3, 4)$, в) $a = (1, 2, 3, 4)$ и $b = (1, 3, 3, 1)$.

Решение

а) Сравниваем у векторов $a = (1, 2, 3, 4)$ и $b = (4, 3, 3, 5)$ соответствующие координаты: $1 < 4,\ 2 < 3,\ 3 = 3,\ 4 < 5$. Требования правила сравнения выполняются. Поэтому вектор $a = (1, 2, 3, 4)$ предшествует вектору $b = (4, 3, 3, 5)$: $a \preceq b$.

б) Сравниваем у векторов $a = (6, 2, 5, 4)$ и $b = (4, 2, 3, 4)$ соответствующие координаты: $6 > 4,\ 2 = 2,\ 5 > 3,\ 4 = 4$. Вектор $a = (6, 2, 5, 4)$ не предшествует вектору $b = (4, 2, 3, 4)$, но вектор $b = (4, 2, 3, 4)$ предшествует вектору $a = (6, 2, 5, 4)$: $b \preceq a$.

в) Сравниваем у векторов $a = (1, 2, 3, 4)$ и $b = (1, 3, 3, 1)$ соответствующие координаты: $1 = 1,\ 2 < 3,\ 3 = 3,\ 4 > 1$. Вектор $a = (1, 2, 3, 4)$ не предшествует вектору $b = (1, 3, 3, 1)$, и при этом вектор $b = (1, 3, 3, 1)$ не предшествует вектору $a = (1, 2, 3, 4)$. Эти два вектора нельзя сравнивать; нельзя сказать, какой из них является предшествующим, а какой последующим.

Замечание 6.2. Не все векторы одинаковой длины можно сравнивать.

Пример 6.11

При отборе кандидатов на вакантную должность менеджера отдел кадров организации интересуют следующие характеристики:

A_1 — пол, A_1 = {*мужской, женский*};

A_2 — возраст, $A_2 = \{18, 19, ..., 60\}$;

A_3 — образование, A_3 = {*среднее, бакалавр, магистр*};

A_4 — общий стаж работы (лет), A_4 = {0, 1, 2, ..., 10, *более* 10};

A_5 — стаж работы менеджером (лет), A_5 = {0, 1, 2, ..., 5, *более* 5};

A_6 — знание иностранного языка, A_6 = {*не владеет, со словарем, свободно*};

A_7 — уровень владения компьютером, A_7 = {*не владеет, пользователь*};

A_8 — семейное положение, A_8 = {*холост* (*не замужем*), *женат* (*замужем*)}.

Опишем векторно две кандидатуры.

Претендент 1: Иванов — 27 лет, магистр, свободно владеет английским языком, общий стаж работы 4 года, из них работал менеджером 2 года, компьютером владеет как пользователь, женатый.

Претендент 2: Петрова — 22 года, бакалавр, свободно владеет английским языком, стажа работы нет, компьютером владеет на уровне программиста, не замужем.

Определим проекции полученных векторов на оси с номерами 3, 5, 6, 7.

Решение

Заметим, что владение компьютером на уровне программиста не является преимуществом, достаточно уровня пользователя. При указанной последовательности характеристик получим такие векторные описания претендентов:

a = {*мужской*, 27, *магистр*, 4, 2, *свободно*, *пользователь*, *женат*};

b = {*женский*, 22, *бакалавр*, 0, 0, *свободно*, *пользователь*, *не замужем*}.

Проекции полученных векторов на оси (характеристики) с номерами 3, 5, 6, 7:

$\text{пр}_{3,5,6,7}a$ = (*магистр*, 2, *свободно*, *пользователь*);

$\text{пр}_{3,5,6,7}b$ = (*бакалавр*, 0, *свободно*, *пользователь*).

Пример 6.12

Сравним проекции векторов (векторные оценки), полученные в примере 6.11.

Решение

Для корректного сравнения полученных векторных оценок следует перейти от качественного (вербального, словесного) описания характеристик к количественному. Это можно сделать путем ранжирования уровней характеристик. Рассмотрим характеристику 3: A_3 — образование, A_3 = {*среднее, бакалавр, магистр*}. Пусть уровень образования «среднее» имеет ранг 1, уровень «бакалавр» имеет ранг 2, «магистр» имеет ранг 3. Ранги следует присваивать по степени предпочтения уровня. Тогда можно записать $A_3 = \{1, 2, 3\}$. Аналогично для характеристики 6: A_6 — знание иностранного языка, A_6 = {*не владеет, со словарем, свободно*} введем ранги: 1 — не владеет, 2 — со словарем, 3 — свободно. Получим $A_6 = \{1, 2, 3\}$. Для характеристики 7: A_7 — уровень владения компьютером, A_7 = {*не владеет, пользователь*} введем ранги: 1 — не владеет, 2 — пользователь. Получим $A_7 = \{1, 2\}$.

После ранжирования векторные оценки примут вид $\text{пр}_{3,5,6,7}a = (3, 2, 3, 2)$, $\text{пр}_{3,5,6,7}b = (2, 0, 3, 2)$. Теперь их можно сравнить. Получим $\text{пр}_{3,5,6,7}b(2, 0, 3, 2) \preceq \text{пр}_{3,5,6,7}a(3, 2, 3, 2)$.

Следовательно, претендент 1 более предпочтителен по совокупности характеристик 3, 5, 6, 7, чем претендент 2.

Пример 6.13

Пусть при сравнении пяти вариантов решений по четырем критериям-характеристикам получены следующие векторные оценки каждого варианта: $V = \{(2, 3, 1, 2), (3, 3, 1, 2), (2, 2, 2, 2), (3, 2, 1, 2), (2, 3, 2, 2)\}$. Определим наилучшие векторные оценки.

Решение

Для нахождения наилучших векторных оценок следует провести их попарное сравнение. Сравним первую векторную оценку и вторую. Получим $(2, 3, 1, 2) \preceq (3, 3, 1, 2)$, т.е. вторая векторная оценка оказывается лучше. Поэтому дальнейшее сравнение первой векторной оценки со всеми остальными можно не проводить, и из последующего рассмотрения ее исключаем.

Рассматриваем оставшиеся векторные оценки $V_1 = \{(3, 3, 1, 2), (2, 2, 2, 2), (3, 2, 1, 2), (2, 3, 2, 2)\}$. В этом списке вектор (3, 3, 1, 2) можно сравнить только с вектором (3, 2, 1, 2): $(3, 2, 1, 2) \preceq (3, 3, 1, 2)$, поэтому вектор (3, 2, 1, 2) из дальнейшего рассмотрения исключаем.

Рассмотрим новый список $V_2 = \{(3, 3, 1, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 3, 2, 2)\}$. В нем сравнить можно векторы (2, 2, 2, 2) и (2, 3, 2, 2): $(2, 2, 2, 2) \preceq (2, 3, 2, 2)$. Вектор (2, 2, 2, 2) исключаем.

В конце процедуры сравнения получим список $V_2 = \{(3, 3, 1, 2), (2, 3, 2, 2)\}$. Эти векторные оценки несравнимы между собой по правилу сравнения векторов, следовательно, никакой из них нельзя отдать предпочтение. Поэтом их следует признать наилучшими среди векторных оценок исходного списка.

Множество наилучших и несравнимых оценок, полученных с использования правила сравнения векторов, называют в теории принятия решений *областью компромиссов* или множеством *парето-оптимальных решений*.

6.4. Элементы комбинаторики

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий число комбинаций, которые можно составить из элементов данного конечного множества. Приведем наиболее часто используемые формулы комбинаторики.

Возьмем n элементов. Присвоим каждому из них номер от 1 до n, т.е. упорядочим (сделаем различимыми). Затем расположим их некоторым образом: $k_1, \ldots, k_n$. *Перестановкой* называется комбинация n различных элементов. Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения элементов.

Сколько существует перестановок из n элементов? Ответ дает следующая формула: число перестановок из n элементов равно $P_n = n! = n(n-1) \times \times (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$. По определению $0! = 1$.

Пример 6.14

Сколькими способами можно разместить на полке 6 книг?

Решение

Книги можно разместить $6! = 720$ способами.

Снова возьмем n элементов. Занумеруем их числами от 1 до n. *Размещением* из n элементов по m называется любая упорядоченная комбинация из m различных элементов, выбранных из общего множества в n элементов. Размещения отличаются друг от друга или составом элементов, или их порядком.

Сколько можно составить размещений из n элементов по m? Это можно сделать $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ способами. A_n^m — число размещений из n элементов по m.

Пример 6.15

Сколькими способами можно выбрать из 25 студентов группы старосту, заместителя старосты и профорга?

Решение

Их можно выбрать $A_{25}^3 = \dfrac{25!}{(25-3)!} = 13\,800$ способами.

Теперь возьмем n неупорядоченных (неразличимых, не занумерованных) элементов. *Сочетанием* называется любая неупорядоченная комбинация из m различных элементов, выбранных из общего множества в n элементов. Разные сочетания отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, т.е. по составу, а не по порядку элементов.

Сколько можно составить сочетаний из n элементов по m? Это можно сделать $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ способами. C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Пример 6.16

Сколькими способами можно выбрать из 25 студентов трех человек в Студенческий совет?

Решение

Это можно сделать $C_{25}^3 = \dfrac{25!}{3!(25-3)!} = 2300$ способами.

Между числом перестановок, размещений и сочетаний существует следующее соотношение: $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$.

При решении задач комбинаторики часто используются следующие два правила.

Правило суммы. Если некоторый элемент A может быть выбран из множества элементов m способами, а другой элемент B может быть выбран n способами, то выбрать или A, или B можно $m + n$ способами.

Пример 6.17

На первой тарелке 5 эклеров, на второй — 3 пирожных «Картошка», на третьей — 4 пирожных «Наполеон». Сколькими способами можно выбрать одно из пирожных?

Решение

По правилу суммы число способов $5 + 3 + 4 = 12$.

Правило произведения. Если некоторый элемент A может быть выбран из множества элементов m способами и после каждого такого выбора элемент B может быть выбран n способами, то выбрать пару элементов (A, B) в указанном порядке можно $m \cdot n$ способами.

Пример 6.18

На тарелке лежат пирожные эклер, «Картошка» и «Наполеон». На подносе — стакан с чаем, чашка черного кофе, чашка кофе с молоком и стакан воды. Сколько можно составить пар (пирожное и напиток)?

Решение

По правилу произведения число возможных пар $3 \cdot 4 = 12$.

Замечание 6.3. Если некоторые элементы повторяются, то тогда число *комбинаций с повторениями* можно найти по другим формулам. Например, если среди n элементов есть n_1 элементов одного типа, n_2 элементов другого типа, ..., n_k элементов k-го типа, то число перестановок с повторениями будет равно $P(n_1, n_2, ..., n_k) = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$, где $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое множество? Как его обозначить? Как можно задать множество?
2. Что такое подмножество? Какое множество называется пустым множеством? Поясните термин «мощность множества». Какое множество называют счетным?
3. Какие соотношения (действия) между множествами вы знаете, как они обозначаются?
4. Какое множество можно назвать универсальным?
5. Что такое диаграмма Эйлера — Венна? Проиллюстрируйте с помощью диаграмм Эйлера — Венна объединение и пересечение трех множеств.
6. Дайте определение декартова произведения множеств.
7. Дайте определение проекции вектора.
8. Сформулируйте правило сравнения векторов.
9. Как найти число престановок из n элементов? Почему число размещений из n элементов по m отличается от числа сочетаний из n элементов по m?

Практикум по решению задач

Упражнение 6.1. Зададим различными способами множество N всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ...

Решение

Списком это множество задать нельзя ввиду его бесконечности.

Порождающая процедура содержит два правила:

а) $1 \in N$; б) если $n \in N$, то $n + 1 \in N$.

Описание характеристического свойства элементов множества N: $N = \{x \mid x$ — целое положительное число$\}$.

Упражнение 6.2. Пусть $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$. Найдем $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

Решение

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $A \setminus B = \{2, 4\}$.

Упражнение 6.3. Пусть универсальное множество $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 3\}$. Найдем $\overline{B}$.

Решение

$\overline{B} = \{2, 4, 5\}$.

Упражнение 6.4. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Найдем прямые произведения $A \times B$ и $B \times A$ и A^2.

Решение

Найдем $A \times B$. Составляем всевозможные пары, в которых первый элемент берется из множества A, второй из множества B: $A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$.

Найдем $B \times A$. Составляем всевозможные пары, в которых первый элемент берется из множества B, второй из множества A: $B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$.

Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$.

Найдем A^2. Составляем всевозможные пары, в которых первый и второй элементы берутся из множества A: $A^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

Упражнение 6.5. Сравним векторные оценки множества $V = \{(5, 3, 4, 5), (4, 4, 3, 5), (3, 4, 5, 4), (5, 2, 4, 4), (3, 4, 4, 5), (5, 4, 5, 4), (4, 4, 4, 4), (4, 5, 3, 5)\}$ с использованием правила сравнения векторов и определим множество компромиссов.

Решение

Проведем попарное сравнения векторных оценок. Сравним первую оценку с последующими:

$(5,3,4,5)$ и $(4,4,3,5)$ — не сравнимы;

$(5,3,4,5)$ и $(3,4,5,4)$ — не сравнимы;

$(5,2,4,4) \preceq (5,3,4,5)$ и $(5,2,4,4)$ исключается из дальнейшего рассмотрения;

$(5,3,4,5)$ и $(3,4,4,5)$ $(3,4,4,5)$ — не сравнимы;

$(5,3,4,5)$ и $(5,4,5,4)$ — не сравнимы;

$(5,3,4,5)$ и $(4,4,4,4)$ — не сравнимы;

$(5,3,4,5)$ и $(4,5,3,5)$ — не сравнимы.

Получим список $V_1 = \{(5, 3, 4, 5), (4, 4, 3, 5), (3, 4, 5, 4), (3, 4, 4, 5), (5, 4, 5, 4), (4, 4, 4, 4), (4, 5, 3, 5)\}$.

Теперь сравним вторую оценку этого списка с последующими:

$(4,4,3,5)$ и $(3,4,5,4)$ — не сравнимы;

$(4,4,3,5)$ и $(3,4,4,5)$ — не сравнимы;

$(4,4,3,5)$ и $(5,4,5,4)$ — не сравнимы;

$(4,4,3,5)$ и $(4,4,4,4)$ — не сравнимы;

$(4,4,3,5) \preceq (4,5,3,5)$ и $(4,4,3,5)$ исключаем из рассмотрения.

Получим список $V_2 = \{(5, 3, 4, 5), (3, 4, 5, 4), (3, 4, 4, 5), (5, 4, 5, 4), (4, 4, 4, 4), (4, 5, 3, 5)\}$.

Сравним $(3,4,5,4)$ с последующими оценками списка:

$(3,4,5,4)$ и $(3,4,4,5)$ — не сравнимы;

$(3,4,5,4) \preceq (5, 4, 5, 4)$ и $(3,4,5,4)$ исключаем из рассмотрения.

Получим список $V_3 = \{(5, 3, 4, 5), (3, 4, 4, 5), (5, 4, 5, 4), (4, 4, 4, 4), (4, 5, 3, 5)\}$.

Сравним $(3,4,4,5)$ с последующими оценками списка:

$(3,4,4,5)$ и $(5,4,5,4)$ — не сравнимы;

$(3,4,4,5)$ и $(4,4,4,4)$ — не сравнимы;

$(3,4,4,5)$ и $(4,5,3,5)$ — не сравнимы.

Список не изменился. Сравним $(5,4,5,4)$ с последующими оценками списка:

$(4,4,4,4) \preceq (5,4,5,4)$, $(4,4,4,4)$ исключаем из рассмотрения;

$(5,4,5,4)$ и $(4, 5, 3, 5)$ — не сравнимы.

Получим список $V_4 = \{(5, 3, 4, 5), (3, 4, 4, 5), (5, 4, 5, 4), (4, 5, 3, 5)\}$. Это и есть множество компромиссов.

Упражнение 6.6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если цифры не должны повторяться в записи числа?

Решение

Искомое число трехзначных чисел $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Упражнение 6.7. Имеется 6 воздушных шаров разного цвета. Сколько пар шаров можно из них составить?

Решение

Искомое число пар шаров равно числу размещений из 6 элементов по 2: $A_6^2 = 5 \cdot 6 = 30$.

Упражнение 6.8. В ящике находится 10 деталей. Сборщик наугад выбирает две детали. Сколько возможных пар деталей может составить сборщик?

Решение

Число возможных пар деталей равно числу сочетаний из 10 элементов по 2: $C_{10}^2 = \dfrac{10!}{2! \cdot 8!} = 45$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Задайте различными способами множество всех четных чисел 2, 4, 6, ..., не превышающих 100.

6.2. Задайте различными способами множество натуральных чисел, кратных 7 и не превышающих 50: 7, 14, 21, ...

6.3. Пусть $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Найдите $A \cup C$, $B \cap C$, $A \setminus C$.

6.4. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 4\}$. Найдите $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cap B}$, $A \cap \overline{B}$, $(B \setminus A) \cup \overline{C}$.

6.5. Пусть $A = (-1; 5]$, $B = [-3; 2)$, $C = [0; 1]$. Найдите $A \cup B$, $B \cap C$, $B \setminus C$.

6.6. Пусть $A = (0; 8)$, $B = (2; 7]$, $C = (-3; -1)$. Найдите $A \cup C$, $A \cap B$, $B \setminus C$, $A \setminus B$.

6.7. Определите проекцию векторов $a = (2, 3, 4, 5)$ и $b = (3, 1, 1, 4)$ на вторую, четвертую и одновременно на третью и четвертую оси.

6.8. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Найдите прямые произведения $A \times B$, $B \times A$ и A^2.

6.9. При предварительном отборе кандидатов в хореографическую группу на вакантную должность танцовщицы балетмейстера интересуют следующие характеристики:

A_1 — пол, A_1 = {*мужской*, *женский*};

A_2 — возраст, A_2 = {18, 19, ..., 35};

A_3 — наличие профессиональной хореографической подготовки, A_3 = {*есть*, *нет*};

A_4 — стаж работы в танцевальных коллективах (лет), A_4 = {0, 1, 2, ..., 10, *более* 10};

A_5 — знание иностранного языка, A_5 = {не *владеет*, *свободно*, *со словарем*};

A_6 — семейное положение, A_6 = {*холост* (*не замужем*), *женат* (*замужем*)}.

Опишите векторно две кандидатуры.

Претендент 1: Сидоров — 25 лет, окончил хореографическое училище, со словарем владеет английским языком, 6 лет танцует в различных коллективах, женатый.

Претендент 2: Иванова — 23 года, владеет английским языком свободно, профессиональной хореографической подготовки не имеет, 5 лет танцует в самодеятельности, не замужем.

Определите проекции полученных векторов на оси с номерами 1, 2, 4.

6.10. Сравните векторные оценки множества $V = \{(1, 2, 2, 1), (1, 3, 3, 2), (2, 3, 1, 4), (2, 1, 4, 2), (3, 4, 4, 4)\}$ с использованием правила сравнения векторов и определите множество компромиссов.

6.11. В аудитории стоит семь столов. Сколькими способами можно разместить в ней семь студентов по одному за столом?

6.12. Участники конкурса песни тянут жребий для определения номера в порядке очередности выступлений. Сколько различных вариантов порядка очередности выступлений может получиться, если участвуют шесть певцов?

6.13. В конкурсе участуют 10 команд. По итогам конкурса определяются победитель, участники, занявшие второе и третье места, и участник, получивший приз зрительских симпатий (это должны быть разные люди). Сколько существует различных исходов конкурса?

6.14. Турист, прибывший в Рим на неделю, хочет посетить музеи Ватикана, увидеть Колизей и Форум (во время одной экскурсии) и побывать на экскурсии «Ночной Рим». Сколько различных вариантов расписания экскурсий он может составить, если в одни сутки он ходит только на одну экскурсию?

6.15. Имеется восемь разноцветных шаров. Сколько различных комбинаций из трех шаров можно составить?

6.16. Спортивный турнир проводится по круговой системе, т.е. каждая команда встречается с каждой. Сколько таких попарных встреч надо провести, если в турнире участвует шесть команд?

Глава 7
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

7.1. Логика высказываний

Математическая логика — это формальный математический аппарат, изучающий различные способы логических рассуждений. Простейшую из формальных логических теорий называют *алгеброй высказываний*.

Определение 7.1. *Высказыванием* называют повествовательное предложение, о котором можно сказать в данный момент, что оно истинно или ложно, но не то и другое одновременно.

Пример 7.1

Предложения «столица России — город Москва», «$5 - 3 = 3$» — высказывания, причем первое из них — истинное, второе — ложное.

Высказывания, истинные в одних ситуациях и ложные в других, называются *переменными* высказываниями. Высказывания обозначают буквами русского или латинского алфавита.

В логике высказываний изучают не содержание, а истинность (ложность) высказываний. Истинное значение высказываний обозначают И или 1, а ложное — Л или 0. Множество {Л, И} = {0, 1} называется *множеством истинностных значений*. Такое обозначение дает возможность рассматривать алгебру высказываний в виде *двоичной* (или *булевой*) алгебры, заданной на множестве из элементов 0 и 1. Переменные, которые принимают значения из множества {0, 1}, называются *булевыми переменными*.

Высказывание называется *простым* (*элементарным*), если оно рассматривается как некоторое неделимое целое (аналогично элементу множества). К простым относят высказывания, не содержащие логических связок. *Сложным* (*составным*) называется высказывание, составленное из простых с помощью логических связок.

Среди логических связок (булевых операций) основными считаются следующие: дизъюнкция, конъюнкция, отрицание, импликация, эквивалентность, сложение по модулю 2 (табл. 7.1).

Дизъюнкция. Если p и q — некоторые высказывания, то запись $p \vee q$ (p или q) определяет операцию дизъюнкции (табл. 7.1, столбец 3).

Пример 7.2

Если имеются два высказывания: «3 — делитель числа 8» (p), «9 — простое число» (q), то запись $p \vee q$ — ложная, так как оба высказывания, входящие в дизъюнкцию, — ложные.

Таблица 7.1

Основные булевы операции

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\overline{p}$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$	$p \oplus q$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	1	1	0

Конъюнкция. Если p и q — некоторые высказывания, то $p \wedge q$ (p и q) определяет операцию конъюнкции (табл. 7.1, столбец 4).

Пример 7.3

Если имеются два высказывания: «2 — делитель числа 7» (p), «4 — простое число» (q), то запись $p \wedge q$ — ложная, так как оба высказывания, входящие в конъюнкцию, — ложные.

Отрицание. Если p — некоторое высказывание, то $\overline{p}$ ($\neg p$) (не p) — высказывание противоположного смысла (табл. 7.1, столбец 5).

Пример 7.4

Если имеется высказывание «8 — простое число» (p), то $\overline{p}$ — истинно, так как исходное утверждение ложно.

Импликация (следование). Если p и q — некоторые высказывания, то высказывание $p \to q$ (если p, то q) или (из p следует q) определяет операцию импликации (табл. 7.1, столбец 6).

Пример 7.5

Если имеем высказывания «число 3 — делитель 7» (p) и «4 — простое число» (q), то высказывание $p \to q$ истинно, так как оба члена импликации ложны.

Эквивалентность (равнозначность). Если p и q — некоторые высказывания, то $p \leftrightarrow q$ или $p \sim q$ (p равнозначно или эквивалентно q) определяет операцию эквивалентности (табл. 7.1, столбец 7).

Пример 7.6

Если имеем высказывания «число 2 — делитель 5» (p) и «9 — простое число» (q), то высказывание $p \leftrightarrow q$ истинно, так как оба члена эквивалентности ложны.

Сложение по модулю 2 (неравнозначность, исключающее «или»). Если p и q — некоторые высказывания, то $p \oplus q$ или $p \Delta q$ (p неравнозначно q; или p, или q — понимается в разделительном смысле) определяет операцию сложения по модулю 2 (табл. 7.1, столбец 8).

Пример 7.7

Высказывание $p \oplus q$ (или «число 3 — делитель 7» (p), или «4 — простое число» (q)) ложно, поскольку оба члена неравнозначности ложны.

Действия этих операций задаются *таблицами истинности* (см. табл. 7.1), каждой строке соответствует взаимно-однозначный набор значений элементарных высказываний и соответствующие значения составных.

Из таблиц истинности получаем для логических операций следующие утверждения:

- отрицание $\overline{a}$ ложно тогда и только тогда, когда a — истинно;
- конъюнкция $p \wedge q$ истинна тогда и только тогда, когда p и q — истинны;
- дизъюнкция $p \vee q$ ложна тогда и только тогда, когда p и q — ложны;
- импликация $p \to q$ ложна тогда и только тогда, когда посылка p истинна, а следствие q ложно;
- эквивалентность $p \leftrightarrow q$ истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания p и q одновременно либо истинны, либо ложны;
- неравнозначность $p \oplus q$ истинна тогда и только тогда, когда одно из высказываний истинно, а другое ложно.

Рассмотрим множество всех логически возможных случаев, множество всех логических ситуаций для высказываний, связанных с некоторой проблемой, — некоторое универсальное множество.

Алфавит логики высказываний содержит следующие символы: переменные, обозначающие высказывания: A_1, A_2, A_3, ...; символы скобок: (...), {...}; логических операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, $\oplus$.

Определение 7.2. *Логической формулой* называется выражение, составленное из обозначений высказываний, скобок и связок, если оно удовлетворяет следующим условиям.

1. Любая переменная, обозначающая высказывание, — формула.
2. Если A и B — формулы, то $A \vee B$, $A \wedge B$, $\overline{A}$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$, $A \oplus B$ — формулы.
3. Других формул нет.

Например, высказывание «Город расположен на реке Москве, а село расположено на берегу озера» — формула, так как при конкретной подстановке названия города и поселка она может иметь как истинное, так и ложное значение.

Пример 7.8

Представим логическими формулами следующие высказывания:

1. «Сегодня пятница или суббота».
2. «Сегодня праздничный или выходной день».
3. «Если сегодня солнце, то асфальт сухой. Солнца нет, но асфальт сухой».

Решение

1. Сложное (составное) высказывание «Сегодня пятница или суббота» состоит из двух простых:

A — «Сегодня пятница»;

B — «Сегодня суббота».

Высказывания A и B соединены связкой «или» в разделительном смысле. Поэтому логическое высказывание представимо следующей формулой: $A \oplus B$.

2. Сложное (составное) высказывание «Сегодня праздничный или выходной день» состоит из двух простых:

A — «Сегодня праздничный день»;

B — «Сегодня выходной день».

Высказывания A и B соединены связкой «или» в соединительном смысле. Поэтому логическое высказывание представимо следующей формулой: $A \vee B$.

3. Сложное (составное) высказывание «Если сегодня солнце, то асфальт сухой. Солнца нет, но асфальт сухой» состоит из двух простых:

A — «Сегодня солнце»;

B — «Асфальт сухой».

В первом предложении «Если сегодня солнце, то асфальт сухой» высказывания A и B соединены связкой «если ..., то ...»: $A \to B$. Во втором «Солнца нет, но асфальт сухой» союз «но» имеет смысл связки «и». Тогда получим формулу $\overline{A} \wedge B$. И для всего высказывания получим логическую формулу $(A \to B) \wedge (\overline{A} \wedge B)$.

Содержательных интерпретаций одной и той же формулы может быть бесконечное множество, поэтому алгебра высказываний изучает формальные (логические) законы.

Язык логики высказываний, кроме алфавита и логических формул, содержит также правила преобразования логических формул. Эти правила реализуют общелогические законы и обеспечивают логически правильные рассуждения.

Приведем *основные законы* (свойства логических операций).

1. Идемпотентность дизъюнкции и конъюнкции: $a \vee a \leftrightarrow a$, $a \wedge a \leftrightarrow a$.
2. Коммутативность дизъюнкции и конъюнкции: $a \vee b \leftrightarrow b \vee a$, $a \wedge b \leftrightarrow \leftrightarrow b \wedge a$.
3. Ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции: $a \wedge (b \wedge c) \leftrightarrow (a \wedge b) \wedge c$, $a \vee (b \vee c) \leftrightarrow (a \vee b) \vee c$.
4. Дистрибутивность операций дизъюнкции и конъюнкции относительно друг друга: $a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) \leftrightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.
5. Двойное отрицание: $a \leftrightarrow \overline{\overline{a}}$.
6. Законы де Моргана: $\overline{a} \vee \overline{b} \leftrightarrow \overline{a \wedge b}, \overline{a \vee b} \leftrightarrow \overline{a} \wedge \overline{b}$.
7. Расщепление: $(a \vee b) \wedge (a \vee \overline{b}) \leftrightarrow a, (a \wedge b) \vee (a \wedge \overline{b}) \leftrightarrow a$.
8. Поглощение: $a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a, \quad a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$.
9. Действия с логическими константами 0 и 1: $a \vee 0 \leftrightarrow a$, $a \wedge 0 \leftrightarrow 0$, $a \vee 1 \leftrightarrow \leftrightarrow 1$, $a \wedge 0 \leftrightarrow a$, $a \wedge \overline{a} \leftrightarrow 0$.
10. Закон исключенного третьего: $a \vee \overline{a} \leftrightarrow 1$.
11. Тождества: $a \leftrightarrow a$.
12. Отрицание противоречия: $\overline{\overline{a} \wedge a} \leftrightarrow 1$.
13. Контрапозиция: $(a \to b) \leftrightarrow (\overline{b} \to \overline{a})$.
14. Цепное заключение: $((a \to b) \wedge (b \to c)) \leftrightarrow (a \to c)$.
15. Противоположность: $(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (\overline{a} \leftrightarrow \overline{b})$.

Названия и формы законов булевой алгебры и соответствующих законов алгебры множеств похожи не случайно. В табл. 7.2 приводится соответствие между булевыми операциями, логическими операциями логики высказываний и операциями над множествами.

Таблица 7.2

Соответствие между булевыми операциями, логическими операциями логики высказываний и операциями над множествами

Логические операторы	Операции над множествами	Булевы операции
не	$\bar{}$	$\bar{}$
или	$\cup$	$\vee$
и	$\cap$	$\wedge$

Пусть описание некоторой системы представляет собой множество составных высказываний. Эти высказывания принимают истинное значение для данной системы в конкретной ситуации. Меняя имеющиеся логические представления о системе с использованием допустимых преобразований, можно выполнить анализ или синтез этих логических представлений и получить новые представления о системе. Таким образом можно получать новые знания из уже имеющихся.

Определение 7.3. *Умозаключение* (рассуждение) — это процесс получения новых знаний, выраженных высказываниями, из других знаний, также выраженных высказываниями. Исходное высказывание называется *посылкой* (*гипотезой*, *условием*). Получаемое высказывание — *заключением* или *следствием*.

Перечислим примеры наиболее распространенных схем логически правильных рассуждений. В числителе дроби находится посылка, в знаменателе — заключение.

1. Правило заключения — утверждающий модус (*modus ponens*):

$$\frac{A \to B, A}{B}.$$

«Если из высказывания A следует высказывание B и A — истинно, то B также истинно».

2. Правило отрицания — отрицательный модус (*modus tollens*):

$$\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}.$$

«Если из высказывания A следует высказывание B и B — ложно, то A также ложно».

3. Правило утверждения — отрицания (*modus ponendo-tollens*):

$$\frac{A \oplus B, A}{\overline{B}}, \ \frac{A \oplus B, B}{\overline{A}}.$$

«Если истинно или высказывание A, или высказывание B (в разделительном смысле), и истинно одно из них, то ложно другое».

4. Правила отрицания-утверждения (*modus tollen-ponens*):

$$\text{а) } \frac{A \oplus B, \overline{A}}{B}, \ \frac{A \oplus B, \overline{B}}{A}; \text{ б) } \frac{A \vee B, \overline{A}}{B}, \frac{A \vee B, \overline{B}}{A}.$$

«Если истинно или высказывание A, или высказывание B (в разделительном или соединительном смысле), и ложно одно из них, то истинно другое».

5. Правило транзитивности (упрощенное правило силлогизма):

$$\frac{A \to B, B \to C}{A \to C}.$$

«Если из высказывания A следует высказывание B и из B следует C, то из A следует C».

6. Закон противоречия:

$$\frac{A \to B, A \to \overline{B}}{\overline{A}}.$$

«Если из высказывания A следуют и B, и $\overline{B}$, то A ложно».

7. Правило контрапозиции:

$$\frac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}.$$

«Если из высказывания A следует B, то из того, что B — ложно, следует, что A также ложно».

8. Правило сложной контрапозиции:

$$\frac{(A \wedge B) \to C}{(A \wedge \overline{C}) \to \overline{B}}.$$

«Если из A и B следует высказывание C, то из A и не-C следует не-B».

Замечание 7.1. Для построения логических формул, отражающих вышеприведенные логически правильные заключения, следует все посылки соединить связкой «и» и полученную обобщенную посылку — связкой «если ..., то ...».

Пример 7.9

Правило заключения $\frac{A \to B, A}{B}$ может быть представлено следующей формулой: $((A \to B) \wedge A) \to B$.

Пример 7.10

Приведем рассуждения, не являющиеся правильными:

а) $\frac{A \to B, B}{A}$; б) $\frac{A \to B, \overline{A}}{\overline{B}}$; в) $\frac{A \vee B, A}{\overline{B}}$ и др.

Для того чтобы проверить, является ли данное умозаключение логически правильным, следует восстановить схему рассуждения и определить, относится ли она к схемам логически правильных рассуждений. Но такая проверка может быть очень сложной, поскольку схем логически правильных рассуждений существует бесконечно много. Для проверки правильности рассуждений могут быть использованы методы алгебры логики.

Пример 7.11

Определим, к каким схемам относятся следующие рассуждения и являются ли данные рассуждения логически правильными.

1. «Если студент отсутствовал на занятии, он не выполнил задания. Он не выполнил задания. Следовательно, он отсутствовал на занятии».

2. «Человек постоянно живет в России или заграницей. Он живет в России. Следовательно, он не живет заграницей».

Решение

1. Рассмотрим простые высказывания:

A — «студент отсутствовал на занятии», B — «он не выполнил задания». Тогда схема данного рассуждения имеет вид $\dfrac{A \to B, B}{A}$. Она относится к схемам неправильных рассуждений. Следовательно, это рассуждение неверно.

2. Рассмотрим простые высказывания:

A — «человек постоянно живет в России», B — «человек постоянно живет за границей». Тогда схема данного рассуждения имеет вид: $\dfrac{A \oplus B, \overline{A}}{B}$. Это рассуждение правильное, так как его схема относится к схемам логически правильных рассуждений (правило 4а).

Рассуждение является логически правильным, если представляющая его формула является тождественно истинной. Это значит, что при всех значениях истинности входящих в нее простых высказываний формула принимает значение «И», или 1.

Если к формуле логики высказываний применяется операция взятия логического значения, то в результате получается булева функция. Таким образом, всякой формуле логики высказываний соответствует некоторая булева функция. Рассмотрим эти функции далее.

7.2. Булевы функции

Определение 7.4. Переменные $x_1, ..., x_n \in E$, где $E = \{0, 1\}$, называют *булевыми переменными*. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ от n переменных, принимающая значения или 0, или 1 для каждого набора переменных $(x_1, ..., x_n) \in E^n$, называется *булевой функцией*.

Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ от n аргументов $x_1, ..., x_n$ сопоставляет каждому кортежу (упорядоченному набору), составленному из n элементов 0 и 1, числа или 1, или 0. Две булевы функции называются *равными*, если для любых одинаковых наборов значений аргументов обе функции принимают одинаковые значения.

Теорема 7.1. *Число булевых функций, зависящих от n переменных, равно* 2^{2^n}.

Булевых функций одного аргумента четыре, двух аргументов — шестнадцать и т.д.

Каждому двоичному набору $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, где $\alpha_i = \{0, 1\}$, можно однозначно поставить в соответствие число p, которое называется номером набора и определяется по формуле $p = \alpha_1 \cdot 2^{n-1} + \alpha_2 \cdot 2^{n-2} + ... + \alpha_{n-1} \cdot 2 + a_n$.

Пример 7.12

Определим номер набора 1101.

Решение

По вышеприведенной формуле его номер $p=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2+1=13$.

Таким образом, номер набора — это число p, n-разрядной двоичной записью которого является набор.

Для двоичных наборов длины 2: набор 00 имеет номер $p = 0$, 01 — номер $p = 1$, 10 — номер $p = 2$, 11 — номер $p = 3$.

Для двоичных наборов длины 3: набор 000 — номер $p = 0$, 001 — номер $p = 1$, 010 — номер $p = 2$, 011 — номер $p = 3$, 100 — номер $p = 4$, 101 — номер $p = 5$, 110 — номер $p = 6$, 111 — номер $p = 7$ (всего наборов 8, но нумерация идет от 0 до 7).

Рассмотрим *способы задания булевых функций*.

1. Таблица истинности. Такой таблицей является следующая:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, ..., x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, ..., 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, ..., 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, ..., 1, 0)$
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	$f(1, ..., 1, 0)$
1	1	...	1	1	$f(1, ..., 1)$

В левой части таблицы перечисляются упорядоченные двоичные наборы соответствующей длины, а справа — значение функции (0 или 1) на соответствующем наборе двоичных переменных.

Пример 7.13

Пусть известно, что $f(0, 0, 0) = 1$, $f(0, 0, 1) = 0$, $f(0, 1, 0) = 0$, $f(0, 1, 1) = 1$, $f(1, 0, 0) = 1$, $f(1, 0, 1) = 1$, $f(1, 1, 0) = 0$, $f(1, 1, 1) = 1$. Составим таблицу истинности этой булевой функции трех переменных. Для этого в левой части таблицы перечислим все двоичные наборы длины 3 по возрастанию их номеров: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. В левой части запишем значение функции на соответствующем наборе. Полученная таблица — таблица истинности данной булевой функции:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

2. Строка значений. Не обязательно выписывать всю таблицу истинности. Можно выписывать только правый столбец. Но надо записать его в строку, отделяя точкой или пробелом каждые четыре разряда: $f = 1001.1101$.

Замечание 7.2. Двоичный набор определяет булеву функцию тогда и только тогда, когда его длина есть степень числа 2. Соответствующий показатель степени определяет число переменных данной функции.

3. Носитель (единичное множество) булевой функции — это те булевы наборы (или номера этих наборов), на которых функция равна 1.

Соответственно те булевы наборы (или номера этих наборов), на которых функция равна 0, образуют *антиноситель* (нулевое множество).

Пример 7.14

Для функции из примера 7.13 носитель $N_f = \{000, 011, 100, 101, 111\}$ — перечислены сами наборы, или $N_f = \{0, 3, 4, 5, 7\}$ — перечислены номера наборов. Антиноситель: $\overline{N}_f = \{1, 2, 6\}$, или $\overline{N}_f = \{001, 010, 110\}$.

4. Геометрический метод. На кубе соответствующей размерности жирными точками отмечаются вершины, входящие в носитель (рис. 7.1).

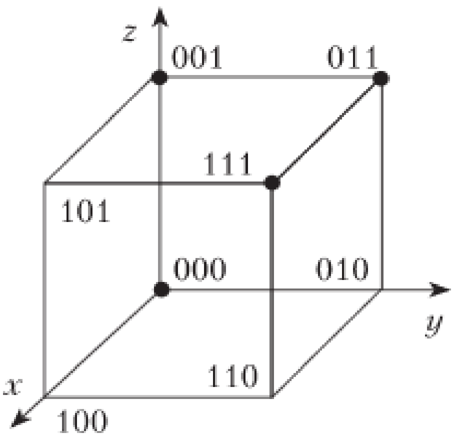


Рис. 7.1

5. Формула. Для построения формул следует использовать следующие логические операции.

А. Функции одной переменной.

1. Константа 1. $f(x) = 1$:

x	f
0	1
1	1

2. Константа 0. $f(x) = 0$:

x	f
0	0
1	0

3. Тождественная функция. $f(x) = x$:

x	f
0	0
1	1

4. Отрицание (инверсия). $f(x) = \bar{x}$:

x	f
0	1
1	0

Б. Некоторые функции двух переменных.

1. Конъюнкция (логическое умножение, операция «И»). $f(x, y) = xy = x \wedge y$:

x	y	f
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

2. Дизъюнкция (логическое сложение, операция «ИЛИ»). $f(x, y) = x \vee y$:

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3. Сложение по модулю 2. $f(x, y) = x \oplus y$:

x	y	f
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

4. Эквивалентность. $f(x, y) = x \sim y$:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

5. Следование (импликация). $f(x, y) = x \to y$:

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

6. Штрих Шеффера (операция «НЕ И»). $f(x, y) = x \mid y$:

x	y	f
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

7. Стрелка Пирса (операция «НЕ ИЛИ»). $f(x, y) = x \downarrow y$:

x	y	f
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Используя элементарные функции, можно строить различные более сложные функции — формулы.

Две формулы называются *эквивалентными*, если они задают булеву функцию с одной и той же строкой значений.

Пример 7.15

Рассмотрим формулы $f_1(x, y) = x \vee y$ и $f_2(x, y) = (x \to y) \to y$. Покажем, что они определяют одну и ту же функцию.

Решение

Построим таблицы истинности для каждой из них:

x	y	f_1
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

и

x	y	$x \to y$	f_2
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Правые столбцы в этих таблицах одинаковые. Таким образом, это эквивалентные функции.

Приведем *основные тождества элементарных операций.*

1. Коммутативность: $x \circ y = y \circ x$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim, \downarrow, |\}$.

2. Ассоциативность: $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$, где $\circ \in \{\wedge, \vee, \oplus, \sim\}$.

3. Дистрибутивность: $(x \vee y)z = xz \vee yz$, $(xy) \vee z = (x \vee z)(y \vee z)$, $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$.

4. Законы де Моргана: $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

5. Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{x}} = x$.

6. Выражение дизъюнкции через $\oplus$ и $\wedge$: $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

7. $x \vee y = (x \to y) \to y$.

8. $x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

9. $\overline{x} = x \,|\, x = x \downarrow x = x \oplus 1 = x \sim 0$.

10. $xy = (x \,|\, y) \,|\, (x \,|\, y)$.

11. $xx = x$, $\overline{x}x = 0$, $x0 = 0$, $x1 = x$, $x \vee x = x$, $x \vee \overline{x} = 1$, $x \vee 0 = x$, $x \vee 1 = 1$, $x \oplus x = 0$, $x \oplus \overline{x} = 1$, $x \oplus 0 = x$, $x \oplus 1 = \overline{x}$.

12. Закон склеивания: $xA \vee \overline{x}A = xA \oplus \overline{x}A = A$.

13. Закон поглощения: $xy \vee x = x$, $x(x \vee y) = x$.

14. $x \vee \overline{x}y = x \vee y$, $x(\overline{x} \vee y) = xy$.

15. Обобщенные законы де Моргана: $\overline{\bigvee_{i=1}^{n} x_i} = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x}_i$, $\overline{\bigwedge_{i=1}^{n} x_i} = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{x}_i$.

Для доказательства справедливости любого из приведенных тождеств надо найти функции, соответствующие правым и левым частям соответствующего тождества, и их сравнить.

Ниже перечислены свойства конъюнкции и дизъюнкции, которыми удобно пользоваться при преобразовании формул.

Свойство 1. Если в конъюнкции один из множителей равен 0, то вся конъюнкция равна 0.

Свойство 2. Если в конъюнкции есть множитель 1, то его можно вычеркнуть.

Свойство 3. Если в дизъюнкции одно из слагаемых равно 1, то вся дизъюнкция равна 1.

Свойство 4. Если в дизъюнкции есть слагаемое 0, то его можно вычеркнуть.

Пример 7.16

Построим таблицу истинности для функции $f = ((x \vee y) \to (y \oplus z)) \leftrightarrow (x\overline{z} \to y)$.

Решение

Расставим порядок операций, соблюдая приоритеты: сначала выполняется инверсия, затем конъюнкция, затем все остальные операции. Это можно сделать разными способами. Например, так: $x \vee y$ — 1-я операция, $y \oplus z$ — 2-я, $(x \vee y) \to (y \oplus z)$ — 3-я, $\overline{z}$ — 4-я, $x\overline{z}$ — 5-я, $x\overline{z} \to y$ — 6-я, $((x \vee y) \to (y \oplus z)) \leftrightarrow (x\overline{z} \to y)$ — 7-я. Последняя 7-я операция дает функцию $f = ((x \vee y) \to (y \oplus z)) \leftrightarrow (x\overline{z} \to y)$.

Начинаем составлять расчетную таблицу. В левой части таблицы указываем в верхней строке переменные, а ниже — все двоичные наборы длины 3 по возрастанию номеров. В правой части: в верхней строке — номер операции, операция применяется целиком к соответствующему столбцу.

Начальная таблица:

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0							
0	0	1							
0	1	0							
0	1	1							
1	0	0							
1	0	1							
1	1	0							
1	1	1							

После применения 1-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0						
0	0	1	0						
0	1	0	1						
0	1	1	1						
1	0	0	1						
1	0	1	1						
1	1	0	1						
1	1	1	1						

После применения 2-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0					
0	0	1	0	1					
0	1	0	1	1					
0	1	1	1	0					
1	0	0	1	0					
1	0	1	1	1					
1	1	0	1	1					
1	1	1	1	0					

После применения 3-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0	1				
0	0	1	0	1	0				
0	1	0	1	1	1				
0	1	1	1	0	0				
1	0	0	1	0	1				
1	0	1	1	1	0				
1	1	0	1	1	1				
1	1	1	1	0	0				

После применения 4-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0	1	1			
0	0	1	0	1	1	0			
0	1	0	1	1	1	1			
0	1	1	1	0	0	0			
1	0	0	1	0	0	1			
1	0	1	1	1	1	0			
1	1	0	1	1	1	1			
1	1	1	1	0	0	0			

После применения 5-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0	1	1	0		
0	0	1	0	1	1	0	0		
0	1	0	1	1	1	1	0		
0	1	1	1	0	0	0	0		
1	0	0	1	0	0	1	1		
1	0	1	1	1	1	0	0		
1	1	0	1	1	1	1	1		
1	1	1	1	0	0	0	0		

После применения 6-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	
0	0	1	0	1	1	0	0	1	
0	1	0	1	1	1	1	0	1	
0	1	1	1	0	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	0	1	1	0	
1	0	1	1	1	1	0	0	1	
1	1	0	1	1	1	1	1	1	
1	1	1	1	0	0	0	0	1	

После применения 7-й операции получим

x	y	z	1	2	3	4	5	6	$7 = f$
0	0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0	1	0

Таким образом, таблицей истинности данной функции будет являться следующая таблица:

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

7.3. Функциональные представления булевых функций

Булеву функцию можно записать в виде различных формул. Рассмотрим наиболее важные способы представления булевых функций.

I. **СДНФ** — совершенная дизъюнктивная нормальная форма.

Теорема 7.2 (существования и единственности СДНФ). *Каждая булева функция может быть записана в виде СДНФ, и притом единственным способом (с точностью до перестановки дизъюнктивных членов).*

Алгоритм построения СДНФ булевой функции:

1) находим носитель функции;

2) для каждого набора носителя выписываем конъюнкцию переменных по правилу: если компонента двоичного набора равна 1, то переменная записывается без отрицания. Если компонента набора равна 0, то переменная записывается с отрицанием;

3) из полученных конъюнкций составляется СДНФ.

Пример 7.17

Запишем функцию $f = 0101.1101$ в виде СДНФ.

Решение

Носитель функции $N_f = \{001, 011, 100, 101, 111\}$.

Набору 001 соответствует конъюнкция $\overline{x} \cdot \overline{y}z$, набору 011 — $\overline{x}yz$, набору 100 — $x\overline{y} \cdot \overline{z}$, набору 101 — $x\overline{y}z$, набору 111 — xyz.

Тогда СДНФ примет вид $\text{СДНФ}_f = \overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz$.

II. **СКНФ** — совершенная конъюнктивная нормальная форма.

Теорема 7.3 (существования и единственности СКНФ). *Каждая булева функция может быть записана в виде СКНФ, и притом единственным способом (с точностью до перестановки конъюнктивных членов).*

Алгоритм построения СКНФ булевой функции:

1) находим антиноситель функции;

2) для каждого набора антиносителя выписываем дизъюнкцию переменных по правилу: если компонента двоичного набора равна 1, то переменная записывается с отрицанием, если компонента набора равна 0, то переменная записывается без отрицания;

3) из полученных дизъюнкций составляется СКНФ.

Пример 7.18

Запишем функцию $f = 0101.1101$ в виде СКНФ.

Решение

Антиноситель $\overline{N}_f = \{000, 010, 110\}$.

Набору 000 соответствует дизъюнкция $x \vee y \vee z$, набору 010 — $x \vee \overline{y} \vee z$, набору 110 — $\overline{x} \vee \overline{y} \vee z$.

Тогда $\text{СКНФ}_f = (x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)$.

III. **Многочлен Жегалкина.**

Определение 7.5. *Многочленом (полиномом) Жегалкина* функции f называется выражение вида $f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus \sum\limits_{1 \le i_1 \le ... \le i_k \le n} a_{i_1 i_2 ... i_k} x_{i_1} ... x_{i_k}$.

Коэффициенты многочлена Жегалкина $a_0, a_{i_1 i_2 ... i_k} \in \{0, 1\}$, а число слагаемых равно 2^n.

Отсюда следует, что число различных многочленов Жегалкина совпадает с числом булевых функций от n переменных и равно 2^{2^n}.

Общий вид многочлена Жегалкина функции двух переменных имеет вид

$$P(x_1, x_2) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2.$$

Общий вид многочлена Жегалкина функции трех переменных имеет вид

$$P(x_1, x_2, x_3) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_3 x_3 \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus$$
$$\oplus\, a_{13} x_1 x_3 \oplus a_{23} x_2 x_3 \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3.$$

Теорема 7.4 (существования и единственности многочлена Жегалкина). *Каждая булева функция может быть записана в виде своего многочлена Жегалкина и причем единственным способом.*

Алгоритм определения многочлена Жегалкина:

1) находим носитель функции N_f;
2) если $N_f = \varnothing$, то $f \equiv 0$; если $N_f = E^n$, то $f \equiv 1$;
3) составляем СДНФ данной функции;
4) в СДНФ каждый знак операции $\vee$ заменяем на $\oplus$;
5) упрощаем, если возможно, полученное выражение, используя тождество

$$Ax \oplus A\overline{x} = A;$$

6) в полученной формуле отрицание каждой переменной заменяем таким образом: $\overline{x}_i = x_i \oplus 1$;
7) раскрываем скобки в полученной формуле, содержащей только операции $\oplus$, $\wedge$ и число 1;
8) приводим подобные члены, используя тождество $A \oplus A = 0$. В результате получим многочлен Жегалкина данной функции.

Пример 7.19

Запишем функцию $f = 0101.1101$ в виде многочлена Жегалкина.

Решение

Применим алгоритм построения многочлена Жегалкина.

Носитель функции $N_f = \{001, 011, 100, 101, 111\}$.

СДНФ примет вид $\text{СДНФ}_f = \overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz$.

В СДНФ каждый знак операции $\vee$ заменяем на $\oplus$:

$$\overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xyz = \overline{x} \cdot \overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus x\overline{y} \cdot \overline{z} \oplus x\overline{y}z \oplus xyz\ .$$

Упрощаем полученное выражение, используя тождество $Ax \oplus A\overline{x} = A$:

$$\overline{x} \cdot \overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus x\overline{y} \cdot \overline{z} \oplus x\overline{y}z \oplus xyz = \overline{x}z \oplus x\overline{y} \oplus xyz\ .$$

В полученной формуле заменяем отрицания:

$$\overline{x}z \oplus x\overline{y} \oplus xyz = (x \oplus 1)z \oplus x(y \oplus 1) \oplus xyz.$$

Раскрываем скобки в полученной формуле, содержащей только операции $\oplus$, $\wedge$ и число 1:

$$(x \oplus 1)z \oplus x(y \oplus 1) \oplus xyz = xz \oplus z \oplus xy \oplus x \oplus xyz.$$

В нашем примере подобные члены приводить не надо. Записываем многочлен Жегалкина данной функции: $f = x \oplus z \oplus xy \oplus xz \oplus xyz$.

7.4. Полные системы и замкнутые классы

Обозначим P_2 множество всех булевых функций.

Определение 7.6. Множество функций $B = \{f_1, ..., f_t, ...\} \subset P_2$ называется *функционально полной системой*, если любую функцию можно представить в виде формулы над B.

Пример 7.20

Следующие системы являются функционально полными:

$$B_1 = \{x_1x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}\},\ B_2 = \{x_1x_2, \overline{x}\},\ B_3 = \{x_1 \vee x_2, \overline{x}\},\ B_4 = \{x_1 \to x_2, \overline{x}\},$$

$$B_5 = \{x_1 \mid x_2\},\ B_6 = \{x_1 \downarrow x_2\},\ B_1 = \{x_1x_2, x_1 \oplus x_2, 1\}.$$

Определение 7.7. Пусть $B = \{f_1, ..., f_t, ...\} \subset P_2$. Тогда множество всех функций из P_2, представимых в виде формулы над B, называется *замыканием* множества B и обозначается $[B]$.

Пример 7.21

Определим замыкания для некоторых множеств:

1) $B = \{x_1 \vee x_2, 1\}$, тогда $[B] = \{a_1x_1 \vee ... \vee a_nx_n, 1, n = 1, 2, ...\}$;
2) $B = \{x_1 \oplus x_2, 1\}$, , тогда $[B] = \{a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ...\ a_{n\oplus}x_n, n = 1, 2, ...\}$;
3) $B = P_2$, тогда $[B] = P_2$.

Определение 7.8. Множество $B \subset P_2$ называется *функционально замкнутым*, если $B = [B]$.

Рассмотрим основные замкнутые классы булевых функций.

Рассмотрим множество $T_\sigma = \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 \mid f(\sigma, ..., \sigma) = \sigma\}, \sigma = (0,1)$.

Определение 7.9. Множество функций T_σ называется классом функций, *сохраняющим константу* σ.

Класс $T_0 = \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 \mid f(0, ..., 0) = 0\}$ — это множество булевых функций, принимающих на нулевом наборе значение 0.

Класс $T_1 = \{f(x_1, ..., x_n) \in P_2 \mid f(1, ..., 1) = 1\}$ — это множество булевых функций, принимающих на единичном наборе значение 1.

Класс T_σ является замкнутым классом.

Пример 7.22

Определим принадлежность некоторых функций:

1) $f = 1100.0101 \in T_1$;
2) $f = 0110.1110 \in T_0$;
3) $f = 0100.0101 \in T_1, f = 0100.0101 \in T_0$.

Определение 7.10. Функция $f^*(x_1, ..., x_n)$ называется *двойственной* к $f(x_1, ..., x_n)$, если $f^*(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$.

Принцип двойственности. Для получения двойственной к данной функции

$$F(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

нужно в формуле, реализующей данную функцию, провести замены элементарных функций согласно табл. 7.3.

Таблица 7.3

Таблица двойственных элементарных функций

f	1	0	x	$\overline{x}$	x_1x_2	$x_1 \vee x_2$	$x_1 \oplus x_2$	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \to x_2$	$x_1 \mid x_2$	$x_1 \downarrow x_2$
f^*	0	1	x	$\overline{x}$	$x_1 \vee x_2$	x_1x_2	$x_1 \sim x_2$	$x_1 \oplus x_2$	x_1x_2	$x_1 \downarrow x_2$	$x_1 \mid x_2$

Определение 7.11. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f^* = f$, т.е. $f(x_1, ..., x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$.

Множество всех самодвойственных функций образует замкнутый класс, который обозначается S.

Из табл. 7.3 следует, что элементарные функции x и $\overline{x}$ являются самодвойственными.

Двоичные наборы $x_1 = (x_1, ..., x_n)$ и $x_2 = (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ называются *противоположными*. Например, наборы 0110.1110 и 1001.0001 являются противоположными.

Свойство. Булева функция $f(x_1, ..., x_n)$ является самодвойственной тогда и только тогда, когда она на противоположных наборах принимает противоположные значения.

Алгоритм определения самодвойственности булевой функции по набору ее значений:

1) делим набор значений $\tilde{f}$ функции $f(x_1, ..., x_n)$ пополам на два набора $\tilde{f}_1$ и $\tilde{f}_2$;

2) один из полученных наборов, например $\tilde{f}_1$, переворачиваем (записываем от конца к началу) и инвертируем;

3) сравниваем полученный набор $\tilde{f}_1'$ и $\tilde{f}_2$. Если $\tilde{f}_1' = \tilde{f}_2$, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ является самодвойственной. В противоположном случае $f(x_1, ..., x_n)$ — не самодвойственная.

Пример 7.23

Проверим функцию $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ на самодвойственность.

Решение

Находим набор $\tilde{f} = 0001.0111$. Делим его пополам на два набора $\tilde{f}_1 = 0001$ и $\tilde{f}_2 = 0111$.

Переворачиваем набор $\tilde{f}_1 = 0001$, получим 1000. Инвертируем набор 1000, получим $\tilde{f}_1' = 0111$.

Сравниваем $\tilde{f}_1'$ и $\tilde{f}_2$. Имеем $\tilde{f}_1' = \tilde{f}_2$. Следовательно $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ — самодвойственная функция.

Определение 7.12. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *монотонной*, если из того, что $(a_1, a_2, ..., a_n) \preceq (b_1, b_2, ..., b_n)$, следует, что $f(a_1, a_2, ..., a_n) \le f(b_1, b_2, ..., b_n)$.

Константные функции 0 и 1, тождественная функция x являются монотонными.

Алгоритм проверки монотонности булевой функции $f(x_1, ..., x_n)$, заданной таблицей истинности:

1) наборы носителя N_f записываем в порядке возрастания номеров:

$$N_f = \{\tilde{\alpha}_1, ..., \tilde{\alpha}_r\},\ \tilde{\alpha}_i = \alpha_{1i}, ..., \alpha_{ni},\ 0 \le p(\tilde{\alpha}_1) < ... < p(\tilde{\alpha}_r) \le 2^n - 1;$$

2) последовательно, для каждого $i = 1, 2, ..., r$ находим множество $M_i = \{\tilde{\alpha} \in E^n \mid \tilde{\alpha}_i \preceq \tilde{\alpha}\}$;

3) проверяем условие $M_i \in N_f$, $i = 1, 2, ..., r$. Если оно выполняется для всех индексов i, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ является монотонной. В противном случае $f(x_1, ..., x_n)$ не монотонная. Причем при первом i, для которого $M_i \notin N_f$, алгоритм прекращает работу.

Пример 7.24

Проверим на монотонность функцию $\tilde{f} = 0001.0001.0011.0011$.

Решение

Носитель имеет вид $N_f = \{0001, 0111, 1010, 1011, 1110, 1111\}$.

Последовательно строим множества:

$M_1 = \{0011, 0111, 1011, 1111\} \in N_f$;

$M_2 = \{0111, 1111\} \in N_f$;

$M_3 = \{1010, 1011, 1110, 1111\} \in N_f$;

$M_4 = \{1011, 1111\} \in N_f$;

$M_5 = \{1110, 1111\} \in N_f$;

$M_6 = \{1111\} \in N_f$.

Для всех $i = 1, 2, ..., 6$ условие $M_i \in N_f$ выполнено. Следовательно, данная функция является монотонной.

Пример 7.25

Проверим на монотонность функцию $\tilde{f} = 0011.0101$.

Решение

Носитель имеет вид $N_f = \{010, 011, 101, 111\}$.

Строим множество $M_1 = \{010, 011, 110, 111\} \notin N_f$. Алгоритм прекращает работу. Функция не является монотонной.

Признаки монотонности:

1. Если на нулевом наборе 0...0 функция $f(x_1, ..., x_n)$ равна 1, то функция будет монотонной только в том случае, если $f(x_1, ..., x_n) \equiv 1$.

2. Если на единичном наборе 1...1 функция $f(x_1, ..., x_n)$ равна 0, то функция будет монотонной только в том случае, если $f(x_1, ..., x_n) \equiv 0$.

Множество всех монотонных функций алгебры логики образует замкнутый класс монотонных функций, обозначаемый M.

Определение 7.13. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *линейной*, если ее можно представить в виде $f(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n$.

Другими словами, функция линейная, если ее многочлен Жегалкина есть линейная функция относительно переменных x_1, ..., x_n, т.е. в многочлене Жегалкина коэффициенты при произведениях переменных равны нулю.

Алгоритм определения линейности булевой функции:

1) по таблице истинности данной функции $f(x_1, ..., x_n)$ и по формулам

$$\begin{cases} a_0 = f(0, ..., 0), \\ a_1 = f(0, ..., 0) + f(1, ..., 0), \\ ... \\ a_n = f(0, ..., 0) + f(0, ..., 1) \end{cases}$$

вычисляем коэффициенты многочлена Жегалкина;

2) выписываем формулу (многочлен) $F(x_1, ..., x_n) = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus ... \oplus a_n x_n$ и проверяем, задает ли она данную функцию. Для этого строим таблицу истинности функции $F(x_1, ..., x_n)$ и сравниваем ее с таблицей истинности исходной функции $f(x_1, ..., x_n)$;

3) если таблицы истинности совпадают, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ линейная и $F(x_1, ..., x_n)$ — ее многочлен Жегалкина. В противном случае функция нелинейная.

Пример 7.26

Проверим на линейность функцию $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = 1001.1001$.

Решение

Вычисляем коэффициенты многочлена Жегалкина:

$$\begin{cases} a_0 = f(000) = 1, \\ a_1 = 1 \oplus f(100) = 1 \oplus 1 = 0, \\ a_2 = 1 \oplus f(010) = 1 \oplus 0 = 1, \\ a_3 = 1 \oplus f(001) = 1 \oplus 0 = 1. \end{cases}$$

Тогда $F(x_1, x_2, x_3) = 1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

Находим таблицу истинности этого многочлена:

<table>
<tr><th>x_1</th><th>x_2</th><th>x_3</th><th>F</th></tr>
<tr><td rowspan="4">любое</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

Таким образом $N_F = \{000, 100, 011, 111\}$, $N_f = \{000, 100, 011, 111\}$. Носители этих функций совпадают, следовательно, $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3)$ является линейной.

Необходимый признак линейности функции. Если $f(x_1, ..., x_n)$ отлична от константы и является линейной, то $\left|N_f\right| = \frac{1}{2} 2^n = 2^{n-1}$, т.е. непостоянная линейная функция на половине наборов обращается в единицу.

Этот признак является необходимым, но не достаточным для линейности функции, т.е. если $\left|N_f\right| \neq 2^{n-1}$, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ заведомо нелинейная. Обратное утверждение неверно.

Пример 7.27

Функция $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$ не является линейной. Однако $N_f = \{011, 101, 110, 111\}$ и $|N_f| = 4 = \frac{1}{2}2^3$.

Последним из основных замкнутых классов булевых функций является L — класс линейных функций, т.е.

$$L = \{a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n \mid a_i = \{0, 1\}, n = 1, 2, ...\}.$$

Критерий полноты системы функций. Классы T_0, T_1, S, M, L попарно различны, что следует из таблицы, которая называется таблицей Поста:

f	T_0	T_1	S	M	L
0	+	−	−	+	+
1	−	+	−	+	+
$\bar{x}$	−	−	+	−	+

Знак «+» означает, что соответствующая функция содержится в классе, а знак «−» — обратную ситуацию.

Теорема 7.5 (Поста, о функциональной полноте). *Система функций $B = \{f_1, f_2, ..., f_t, ...\}$ является полной тогда и только тогда, когда она целиком не принадлежит ни одному из замкнутых классов T_0, T_1, S, M, L.*

Замечание 7.3. Система функций будет полной тогда и только тогда, когда в каждом столбце таблицы Поста есть хотя бы один знак «−».

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется высказыванием?
2. Перечислите виды булевых (логических) операций над высказываниями и сформулируйте их определения.
3. Что называется рассуждением?
4. Перечислите основные схемы логически правильных рассуждений.
5. Что такое булева функция?
6. Какие способы задания булевых функций вы знаете?
7. Как строятся СДНФ, СКНФ, многочлен Жегалкина?
8. Сформулируйте теорему Поста.

Практикум по решению задач

Упражнение 7.1. Запишем логическими формулами следующие сложные высказывания:

«Если ночью готовишься к экзамену и при этом пьешь много кофе, то утром проснешься в плохом настроении или с головной болью».

«Если социологический опрос показывает, что покупатель предпочитает комфорт и многообразие выбора, то производитель должен сделать упор на качество товара и увеличение ассортимента».

Сравним логические формулы.

Решение

1. Первое сложное высказывание состоит из следующих простых: A — «Ночью готовишься к экзамену»; B — «Пьешь много кофе»; C — «Утром проснешься в плохом настроении»; D — «Утром проснешься с головной болью». Тогда сложное высказывание может быть представлено в виде следующей логической формулы:

$$(A \wedge B) \to (C \vee D).$$

2. Второе сложное высказывание состоит из следующих простых: X — «Социологический опрос показывает, что покупатель предпочитает комфорт»; Y — «Социологический опрос показывает, что покупатель предпочитает многообразие выбора»; Z — «Производитель должен сделать упор на качество товара»; U — «Производитель должен сделать упор на увеличение ассортимента». Тогда сложное высказывание может быть представлено в виде следующей логической формулы:

$$(X \wedge Y) \to (Z \vee U).$$

С точностью до обозначений получены одинаковые формулы. Несмотря на разный содержательный смысл, оба сложных высказывания описываются одной и той же формулой.

Упражнение 7.2. Запишем логической формулой следующее умозаключение:

«Если корпорация приглашает на работу высокооплачиваемого специалиста в области современного производства, то она считает это производство прибыльным и начинает изменение производства своего традиционного продукта или запуск нового продукта. Некоторая корпорация пригласила на работу высокооплачиваемого специалиста в области современного производства. Следовательно, она начинает изменение производства своего традиционного продукта или начинает запуск нового продукта».

Решение

Введем следующие обозначения для простых высказываний: A — «Корпорация приглашает на работу высокооплачиваемого специалиста в области современного производства»; B — «Корпорация считает это производство прибыльным»; C — «Корпорация начинает изменение производства своего традиционного продукта»; D — «Корпорация начинает запуск нового продукта».

Тогда первое предложение умозаключения примет вид «Если A, то B и (C или D)». Окончательно получим формулу

$$((A \to (B \wedge (C \vee D))) \wedge A) \to (C \vee D).$$

Для проверки правильности рассуждения запишем эту формулу в виде схемы рассуждения: $\dfrac{A \to (B \wedge (C \vee D)), A}{C \vee D}$. Сравним ее со схемой правила заключения 1. По этому правилу будет истинным заключение $B \wedge (C \vee D)$. Но конъюнкция двух высказываний является истинной тогда, когда истинны оба высказывания. То, что B истинно, очевидно из текста, следовательно, $C \vee D$ также истинно. Таким образом, данное рассуждение является истинным при истинности B.

Упражнение 7.3. Запишем логической формулой следующее краткое содержание телевизионного сериала: «Если Иван — не сын Андрея, то или Кирилл — отец Ивана, или Наталья — не его сестра. Если Наталья — сестра Ивана, то Иван — сын Андрея и Кирилл лжет. Если Кирилл лжет, то или Наталья — не сестра Ивана, или Кирилл — его отец. Следовательно, Иван — сын Андрея».

Решение

Обозначим: A — «Иван — сын Андрея»; B — «Наталья — не сестра Ивана»; C — «Кирилл — отец Ивана»; D — «Кирилл лжет».

Используя эти обозначения, первые три предложения текста можно записать в виде формул следующим образом:

$$\overline{A} \to (C \oplus B);\ \overline{B} \to (A \wedge D);\ D \to (B \oplus C).$$

Из текста понятно, что высказывания A и C не могут выполняться одновременно. Поэтому имеем еще одно истинное высказывание: $A \oplus C$. В результате получим сложное высказывание

$$(\overline{A} \to (C \oplus B)) \wedge (\overline{B} \to (A \wedge D)) \wedge (D \to (B \oplus C)) \wedge (A \oplus C)).$$

Это высказывание является посылкой для следствия (последнего предложения текста) — A.

Окончательная логическая формула имеет вид

$$((\overline{A} \to (C \oplus B)) \wedge (\overline{B} \to (A \wedge D)) \wedge (D \to (B \oplus C)) \wedge (A \oplus C))) \to A.$$

Упражнение 7.4. Для булевой функции $f = 1101.0110$ составим: а) СДНФ; б) СКНФ; в) многочлен Жегалкина.

Решение

а) $N_f = \{000, 001, 011, 100, 101, 110\}$, $\text{СДНФ}_f = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}$;

б) $\overline{N}_f = \{010, 100, 111\}$, $\text{СКНФ}_f = (x \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$;

в) $(\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z}) \Rightarrow (\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \oplus \overline{x} \cdot \overline{y}z \oplus \overline{x}yz \oplus x\overline{y}z \oplus xy\overline{z}) \Rightarrow (\overline{x} \cdot \overline{y} \oplus \overline{x}yz \oplus$ $\oplus\, x\overline{y}z \oplus xy\overline{z}) \Rightarrow (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus (x \oplus 1)yz \oplus x(y \oplus 1)z \oplus xy(z \oplus 1) \Rightarrow xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus xyz \oplus$ $\oplus\, yz \oplus xyz \oplus xz \oplus xyz \oplus xy \Rightarrow 1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$.

Таким образом, многочлен Жегалкина имеет вид $f = 1 \oplus x \oplus y \oplus xz \oplus yz \oplus xyz$.

Упражнение 7.5. Составим таблицу Поста для функции $\tilde{f}(x_1, x_2, x_3) = 0101.0100$. Проверим на полноту систему, состоящую из этой одной функции.

Решение

По строке значений функции очевидно, что $f(0, 0, 0) = 0$, поэтому она принадлежит классу T_0. $f(1, 1, 1) = 0$, поэтому она не принадлежит классу T_1.

Проверим ее на самодвойственность. Возьмем ее строку значений $\tilde{f} = 0101.0100$. Делим ее пополам на два набора $\tilde{f}_1 = 0101$ и $\tilde{f}_2 = 0100$.

Переворачиваем набор $\tilde{f}_1 = 0101$, получим 1010. Инвертируем набор 1010, получим $\tilde{f}_1' = 0101$. Сравниваем $\tilde{f}_1'$ и $\tilde{f}_2$. Имеем $\tilde{f}_1' \neq \tilde{f}_2$. Следовательно, данная функция не является самодвойственной.

Проверим функцию на монотонность. Поскольку $f(1, 1, 1) = 0$ и функция не является постоянной, то она не будет монотонной по второму признаку монотонности.

Проверим функцию на линейность. В строке значений число нулей (5) не совпадает с числом единиц (3). Необходимый признак линейности не выполняется. Поэтому данная функция не является линейной.

Итак, можно составить таблицу Поста:

	T_0	T_1	S	M	L
f	+	–	–	–	–

Система не является полной, так как в первом столбце стоит знак «+».

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Исходя из определения логической формулы установите, являются ли формулами следующие выражения:

а) $((\overline{X} \wedge Y) \leftrightarrow (Z \oplus \overline{U})) \wedge (A \to B)$; б) $((X \wedge \overline{Y}) \leftrightarrow (Z \oplus \overline{U})) \wedge (A \vee \to \overline{B})$.

7.2. Запишите логическими формулами следующие сложные высказывания:

а) «Иванов женат на Марине Сергеевне или на Ольге Петровне»;

б) «Если при производстве продукта отклонение некоторой характеристики продукта от стандарта превышает допустимые нормы, то требуется немедленная корректировка производства или уточнение стандарта».

7.3. Представьте логической формулой следующий текст.

«Если предприятие продолжает выпуск существующего продукта и ориентировано на сегодняшний рынок, то ему следует придерживаться стратегии экономии издержек. Эта стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг не является сильной стороной предприятия. Если интенсивный маркетинг — это сильная сторона предприятия, то ему следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для выпускаемого продукта».

7.4. Найдите номера следующих двоичных наборов: 1001, 1110, 01101, 10000, 11011, 1010, 1011.

7.5. Для функции f, заданной стандартным набором своих значений $\tilde{f}$, найдите множество N_f и задайте множество N_f списком номеров соответствующих наборов:

а) $\tilde{f}_1 = 1100.1010$; б) $\tilde{f}_2 = 0011.0111$.

7.6. Составьте СДНФ для следующих функций:

а) $\tilde{f}_1 = 0101.0100$; б) $\tilde{f}_2 = 1101.1010$.

7.7. Составьте СКНФ для следующих функций:

а) $\tilde{f}_1 = 0000.1011$; б) $\tilde{f}_2 = 1011.0010$.

7.8. Составьте многочлен Жегалкина для следующих функций:

а) $\tilde{f}_1 = 1110.1000$; б) $\tilde{f}_2 = 0101.1011$.

7.9. Постройте таблицу истинности, найдите СДНФ, СКНФ и многочлен Жегалкина для следующих функций:

а) $\tilde{f}_1 = \overline{x} \to (\overline{z} \leftrightarrow (y \oplus xz))$; б) $\tilde{f}_2 = ((x \vee y) \oplus x\overline{y}\,\overline{z} \oplus 1) \to xz$.

7.10. Составьте таблицу Поста и проверьте систему функций на полноту:

а) $\tilde{f}_1 = 0000.1101$; $\tilde{f}_2 = 1000.1110$;

б) $\tilde{f}_1 = 1001.1001$; $\tilde{f}_2 = 1101.0100$.

Глава 8
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

8.1. Основные определения и понятия

Определение 8.1. *Графом G* называется упорядоченная пара множеств $G = G(V, E)$, где V — непустое конечное множество объектов произвольной природы, называемых *вершинами*; E — конечное множество пар элементов из V (не обязательно различных), называемых *ребрами*.

Вершины v и w называются *соединенными* (*связанными*) ребром (v, w), если $(v, w) \in E$. Вершины v и w называются при этом *смежными вершинами* и концами соответствующего ребра. Ребро $e = (v, w)$ называется *инцидентным* вершинам v и w, а вершины v и w — *инцидентными* ребру e. *Петля* (v, v) соединяет вершину v с ней самой.

Два различных ребра называются *смежными ребрами*, если они имеют по крайней мере одну общую вершину.

Обычно вершины графа изображают точками, а ребра, соединяющие две вершины, — линиями между этими точками.

Пример 8.1

Рассмотрим граф на рис. 8.1.

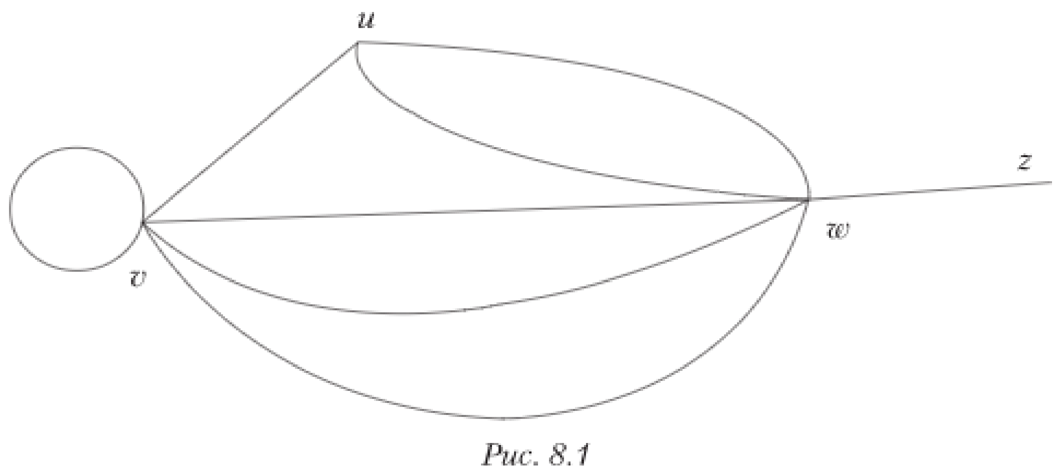


Рис. 8.1

На рисунке ребро (v, w) соединяет вершину v с вершиной w. Петля (v, v) соединяет вершину v с ней самой. Ребра (v, w), (v, w), (v, w) — кратные ребра.

Граф без петель и кратных ребер называется *простым*.

Граф $G(V, E)$, множество ребер которого E является неупорядоченными парами вершин, называется *неориентированным* графом. Ребро в неориентированном графе будем обозначать так: в фигурных скобках записываем инцидентные ему вершины: $e=\{a,b\}$. Для неориентированного графа $e=\{a,b\}=\{b,a\}$.

Граф $G(V,E)$, множество E ребер которого является упорядоченными парами вершин, называется *ориентированным* графом (*орграфом*).

Ребро в ориентированном графе будем обозначать так: в круглых скобках записываем инцидентные ему вершины: $e_{ij}=(v_i,v_j)$. Для ориентированного графа $e_{ij}=(v_i,v_j)\neq(v_j,v_i)=e_{ji}$.

Ребра ориентированного графа обычно называют *дугами*. При графическом изображении направление дуги орграфа указывают стрелкой (рис. 8.2).

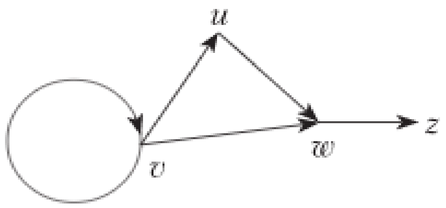


Рис. 8.2

Дуга, у которой вершина v является первым элементом, а вершина w — вторым, называется дугой из v в w и обозначается (v, w). Вершина v называется *началом дуги*, вершина w — *концом дуги*.

Степенью или *валентностью вершины* v называется число ребер, инцидентных v: $\rho(v)=n$.

Вершина степени 0 называется *изолированной* вершиной, вершина степени 1 называется *висячей* или *концевой* вершиной.

При вычислении степени вершины v петля считается два раза (если только явно не сказано иное).

Свойство. В любом графе число вершин нечетной степени должно быть четным.

Граф $G_1(V_1, E_1)$ называется *подграфом* графа $G(V, E)$, если $V_1\subseteq V$ и $E_1\subseteq E$. Обозначается $G_1\preceq G$. Значит, каждая вершина подграфа $G_1(V_1, E_1)$ является вершиной исходного графа $G(V, E)$ и каждое ребро $G_1(V_1, E_1)$ является ребром $G(V, E)$.

Рассмотрим *способы задания графа*.

1. Список элементов множеств вершин и ребер $G(V, E)$.

2. Графический. Основное достоинство такого способа задания графа — его высокая наглядность.

3. Список ребер графа. Каждый элемент такого списка соответствует ребру. В нем перечислены номера вершин, инцидентных этому ребру. Для неориентированного графа $G(V, E) = \{\{v_i, v_j\}\}$ порядок вершин для ребра $\{v_i, v_j\}$ произволен. Для ориентированного графа $G(V, E) = \{(v_i, v_j)\}$ порядок вершин (v_i, v_j) важен. Первым стоит начало дуги, вторым — конец дуги. Графическое изображение графа, заданного списком ребер, неоднозначно. Но все они обладают одинаковыми свойствами. Для удобства граф стараются изобразить так, чтобы число пересекающихся ребер было минимальным.

Пример 8.2

Граф задан списком своих ребер: $G = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$. Построим графическую иллюстрацию этого графа на плоскости.

Решение

Варианты изображения графа представлены на рис. 8.3 и 8.4.

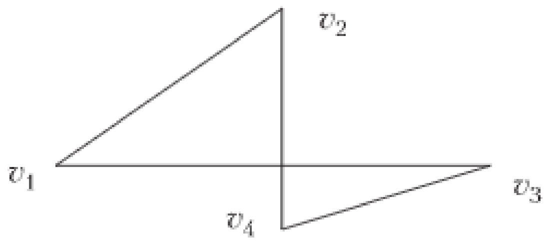


Рис. 8.3

Точки пересечения ребер вершинами не являются.

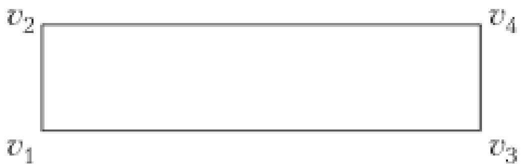


Рис. 8.4

4. Матрица инциденций.

Определение 8.2. *Матрицей инциденций* простого неориентированного графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ и множеством ребер $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ называется матрица $A = (a_{ij})$ размера $n \times m$, у которой

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ инцидентно } e_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентно } e_j. \end{cases}$$

Для ориентированного графа $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } v_i \text{ — конец } e_j, \\ -1, \text{если } v_i \text{ — начало } e_j, \\ 0, \text{если } v_i \text{ не инцидентно } e_j. \end{cases}$

Свойство. В неориентированном графе сумма чисел, стоящих в любой строке, равна степени вершины, соответствующей выбранной строке.

Пример 8.3

Построим граф по матрице инциденций $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение

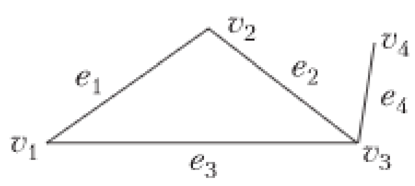


Рис. 8.5

Пример 8.4

Построим орграф по матрице инциденций $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение

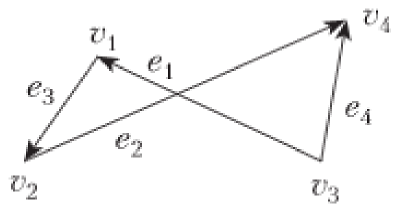


Рис. 8.6

5. Матрица смежности.

Определение 8.3. *Матрицей смежности* графа G с множеством вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ называется матрица $B = (b_{ij})$ размера $n \times n$, в которой элемент b_{ij} равен числу ребер в G, соединяющих v_i и v_j.

Пример 8.5

По графу G (рис. 8.7) составим его матрицу смежности

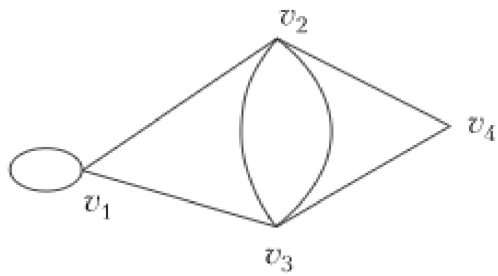


Рис. 8.7

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно получить несколько различных матриц смежности данного графа, меняя обозначения его вершин. Это приведет к изменению порядка строк и столбцов матрицы A. Но в итоге всегда получится симметрическая матрица из неотрицательных целых чисел.

Свойство матрицы смежности. Сумма чисел в любой строке или столбце равна степени соответствующей вершины (здесь петля учитывается в вершине только один раз).

И обратно, по любой заданной симметрической матрице из неотрицательных целых чисел можно построить граф, для которого данная матрица является матрицей смежности.

8.2. Задача построения минимального остова графа

Определение 8.4. *Маршрутом* в данном графе G называется конечная последовательность ребер вида $\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, ..., \{v_{m-1}, v_m\}$, или $v_0 \to v_1 \to$ $\to ... \; v_m$, где v_0 — начальная вершина; v_m — конечная вершина. *Длиной маршрута* называется число m ребер в нем.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Маршрут называется *простой цепью*, если все вершины $v_0, v_1, ..., v_m$ различны (кроме, может быть, $v_0 = v_m$). Цепь или простая цепь называется *замкнутой*, если $v_0 = v_m$. Замкнутая простая цепь, содержащая по крайней мере одно ребро, называется *циклом*. В частности, любая петля или любая пара кратных ребер образует цикл.

Пример 8.6

В графе на рис. 8.8 найдем цепь, простую цепь, замкнутую цепь, цикл.

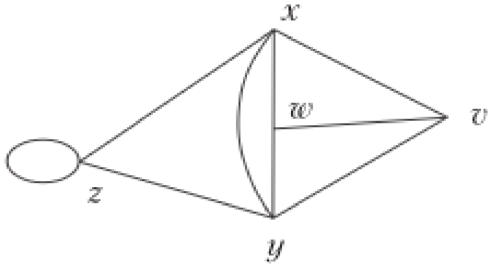


Рис. 8.8

Решение

Маршрут $v \to w \to x \to y \to z \to z \to x$ образует цепь; $v \to w \to x \to y \to z$ — простая цепь; $v \to w \to x \to y \to z \to x \to v$ — замкнутая цепь; $v \to w \to x \to y \to v$ — цикл.

Цикл длины три ($v \to x \to w \to v$) называется *треугольником*.

Граф G называется *связным*, если для любых его вершин v и w существует простая цепь из v в w. *Лесом* называется граф, не содержащий циклов. Связный лес называется *деревом* (т.е. дерево — это связный граф без циклов).

Пример 8.7

На рис. 8.9 изображен лес, состоящий из четырех деревьев.

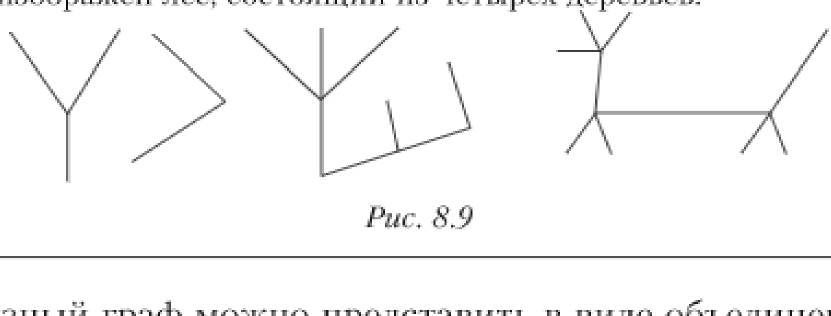


Рис. 8.9

Любой несвязный граф можно представить в виде объединения конечного числа связных графов (компонент связности).

Мост в графе — это ребро графа, удаление которого увеличивает количество компонент связности графа.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. *Пусть граф T имеет n вершин. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

- *T является деревом*;
- *T не содержит циклов и имеет n – 1 ребро*;
- *T — связный граф, и имеет n – 1 ребро*;
- *T — связный граф, и каждое его ребро является мостом*;
- *любые две вершины графа T соединены ровно одной простой цепью*;
- *T не содержит циклов, но, добавляя к нему любое новое ребро, получим ровно один цикл.*

Остовом (остовным деревом) связного графа G называется всякий простой связный граф без циклов (дерево), содержащий все вершины G и являющийся его подграфом.

Пусть в связном графе каждому ребру x приписано неотрицательное число $l(x)$ — его вес. Такой граф называется взвешенным или нагруженным. Число $l(x)$ может обозначать длину ребра, стоимость проезда и т.п.

Минимальным остовом графа G называется его остов, имеющий наименьший вес среди всех остальных остовов.

Задача о построении минимального остова. В данном связном графе требуется построить минимальный остов.

На практике это может быть задача составления наилучшего (кратчайшего или самого дешевого) туристического маршрута (с обязательным посещением всех городов), задача прокладки телефонного кабеля между населенными пунктами и т.п.

Рассмотрим *алгоритм построения минимального остова*.

1. Упорядочим ребра графа в порядке возрастания их весов (длин): $x_1, x_2, ..., x_m$ — список ребер.

2. Включим в остов T первое ребро из списка, не являющееся петлей. Пусть это будет ребро x_{i_1}.

3. Включим в остов T первое после x_{i_1} ребро из списка, не образующее цикла с x_{i_1}. Пусть это ребро x_{i_2}.

4. Включим в остов T первое после x_{i_2} ребро из списка, не образующее цикла с включенными в T ребрами, и т.д.

5. Если граф G содержит n вершин, то процесс заканчивается, когда в остов T включено $n - 1$ ребро (так как остов — это дерево, а число ребер дерева на 1 меньше числа вершин).

Замечание 8.1. Минимальный остов не обязательно является единственным для данного графа, но вес всех полученных остовов будет одинаков.

Пример 8.8

Построим минимальный остов для графа на рис. 8.10.

Решение

1. Упорядочиваем ребра в порядке возрастания их весов: $(v_2, v_4) = 1, (v_1, v_2) = 2,$ $(v_1, v_4) = 2, (v_4, v_5) = 4,$ $(v_1, v_3) = 5, (v_1, v_5) = 8,$ $(v_3, v_4) = 8,$ $(v_2, v_3) = 10,$ $(v_3, v_5) = 12.$

2. Выбираем ребро (v_2, v_4).

Далее возможны два варианта.

3а. Выбираем ребро (v_1, v_2).

3б. Выбираем ребро (v_1, v_4).

4а. Выбираем ребро (v_4, v_5).

4б. Также выбираем ребро (v_4, v_5).

5а. Выбираем ребро (v_1, v_3) (рис. 8.11).

5б. Также выбираем ребро (v_1, v_3) (рис. 8.12).

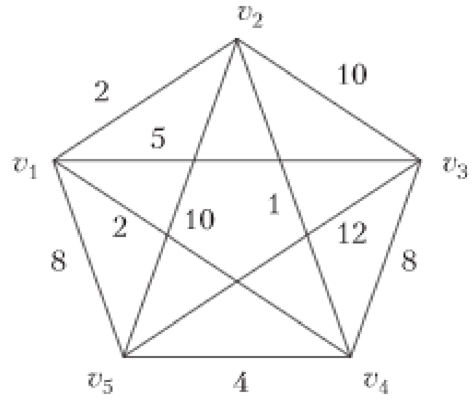


Рис. 8.10

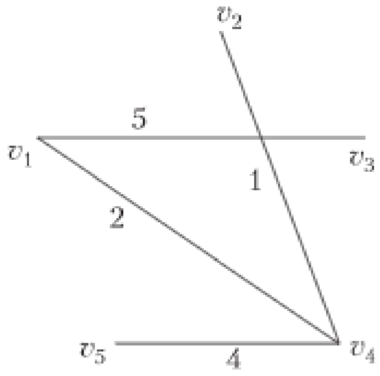


Рис. 8.11

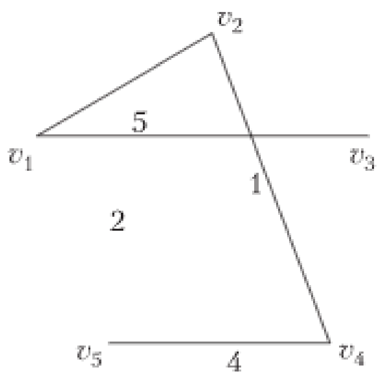


Рис. 8.12

Таким образом, получены два минимальных остова, длина каждого из которых равна 12.

8.3. Задача поиска кратчайшего пути

Пусть дан связный неориентированный граф, в котором выделены вершины $v_0 = a$ и $v_n = b$. Каждому ребру графа $x = (v, w)$ между вершинами v и w приписано целое неотрицательное число $l(x) = l(v, w)$ — его длина (вес). Требуется найти цепь, соединяющую вершины a и b и имеющую кратчайшую длину.

Эта задача может служить математической моделью следующей задачи логистики: имеется несколько населенных пунктов, между которыми проложены дороги. Известно расстояние между населенными пунктами. Надо проложить самый короткий маршрут между двумя выделенными населенными пунктами (посещение всех населенных пунктов необязательно).

Для решения этой задачи будем использовать *алгоритм Дейкстры.*

Алгоритм Дейкстры. Прямой ход: *определение длины кратчайшей цепи.*

1 шаг. Вершина $v_0 = a$ получает метку $\lambda(v_0) = 0$ и становится постоянной. Все остальные вершины $(v_1, v_2, ..., v_n)$ графа G получают метку $\lambda(v_i) = \infty, i = 1, 2, ..., n,$ и становятся временными.

2 шаг. Все вершины v_{i_k}, смежные с $v_0 = a$, меняют метку с $\lambda(v_{i_k}) = \infty$ на $\lambda(v_{i_k}) = l(v_0, v_{i_k})$ (метка равна расстоянию от v_0 до данной вершины). Среди этих меток выбираем наименьшую. Пусть это будет $\lambda(v_{i_s})$. Тогда вершина v_{i_s} становится постоянной, остальные вершины (исключая v_0) остаются временными.

3 шаг. Пусть вершина v_k с меткой $\lambda(v_k)$ является постоянной на данном этапе алгоритма. Для каждой временной вершины v_j, смежной с v_k, проверяем условие

$$\lambda(v_k) + l(v_k, v_j) < \lambda(v_j).$$

Если условие выполняется, то величина метки вершины v_j уменьшается: $\lambda(v_j) = \lambda(v_k) + l(v_k, v_j)$, если условие не выполняется, то величина метки остается прежней.

Находим временную вершину с наименьшей меткой. Делаем ее постоянной. На каждом шаге алгоритма ровна одна временная вершина с наименьшей величиной метки переходит из временных в постоянные. После этого величина ее метки не меняется (принимается условие $\infty - \infty = 0$).

Шаг 3 повторяется до тех пор, пока вершина $v_n = b$ не станет постоянной. Когда это произошло, то величина $\lambda(v_n)$ приписанной ей метки равна длине кратчайшего пути из $v_0 = a$ в $v_n = b$.

Для удобства на графе отмечаем только постоянные метки, а все временные метки записываем в таблице.

Обратный ход: *определение кратчайшей цепи.*

1 шаг. Находим ребро (v_{i_1}, b), для которого $l(v_{i_1}, b) = \lambda(b) - \lambda(v_{i_1})$.

2 шаг. Находим ребро (v_{i_2}, v_{i_1}), для которого $l(v_{i_2}, v_{i_1}) = \lambda(v_{i_1}) - \lambda(v_{i_2})$, и т.д., пока не придем к вершине $v_0 = a$. Искомая цепь проходит через вершины $a \to ... \to v_{i_2} \to v_{i_1} \to b$.

Пример 8.9

Найдем кратчайший путь из вершины v_0 в вершину v_5 в графе, заданном на рис. 8.13.

Решение

Прямой ход. Вершина v_0 получает метку 0, остальные вершины — метку ∞. Для наглядности постоянные метки выделяем в таблице и отмечаем на графе (рис. 8.14).

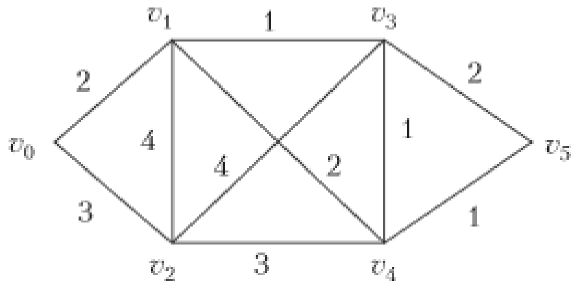


Рис. 8.13

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞

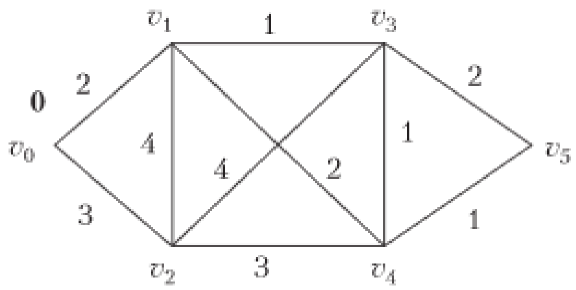


Рис. 8.14

Вершины v_1 и v_2, смежные с v_0, получают метки, равные длинам ребер. Вершина v_1 имеет наименьшую среди всех временных вершин метку (v_0 — это постоянная вершина) и становится постоянной (рис. 8.15).

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
—	2	3	∞	∞	∞

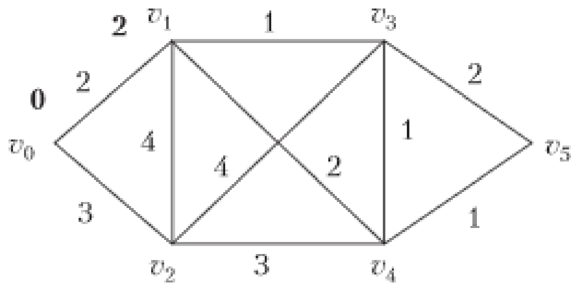


Рис. 8.15

Рассмотрим временные вершины v_2, v_3 и v_4, смежные с v_1. Проверим их метки.

Для вершины v_2 $\lambda(v_2) = 3 < \lambda(v_1) + l(v_1, v_2) = 2 + 4 = 6$, поэтому метка вершины v_2 не меняется: $\lambda(v_2) = 3$.

Для вершины v_3 $\lambda(v_3) = \infty > \lambda(v_1) + l(v_1, v_3) = 2 + 1 = 3$, поэтому метку вершины v_3 меняем: $\lambda(v_3) = 3$.

Для вершины v_4 $\lambda(v_4) = \infty > \lambda(v_1) + l(v_1, v_4) = 2 + 2 = 4$, поэтому метку вершины v_4 меняем: $\lambda(v_4) = 4$.

Среди меток временных вершин выберем наименьшую. Это метка 3. Получилось, что две вершины имеют одинаковые метки: $\lambda(v_2) = \lambda(v_3) = 3$. В качестве постоянной можно выбрать любую из этих вершин. Выберем v_2, поскольку она расположена в таблице левее (рис. 8.16). Получим

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
—	2	3	∞	∞	
—	—	3	3	4	∞

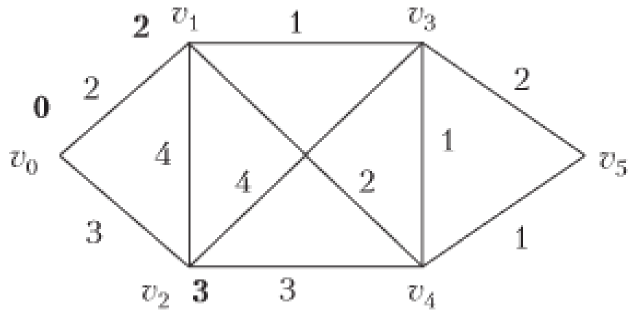


Рис. 8.16

4. Рассмотрим временные вершины v_3 и v_4, смежные с v_2. Проверим их метки.

Для вершины v_2 $\lambda(v_2) = 3 < \lambda(v_1) + l(v_1, v_2) = 2 + 4 = 6$, поэтому метка вершины v_2 не меняется: $\lambda(v_2) = 3$.

Для вершины v_3 $\lambda(v_3) = 3 < \lambda(v_2) + l(v_2, v_3) = 3 + 4 = 7$, поэтому метка вершины v_3 не меняется: $\lambda(v_3) = 3$.

Для вершины v_4 $\lambda(v_4) = 4 < \lambda(v_2) + l(v_2, v_4) = 3 + 3 = 6$, поэтому метка вершины v_4 не меняется $\lambda(v_4) = 4$.

Среди меток временных вершин выберем наименьшую. Это метка 3. Вершина v_3 становится постоянной с меткой $\lambda(v_3) = 3$ (рис. 8.17). Получим

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
—	2	3	∞	∞	∞
—	—	3	3	4	∞
—	—	—	3	4	∞

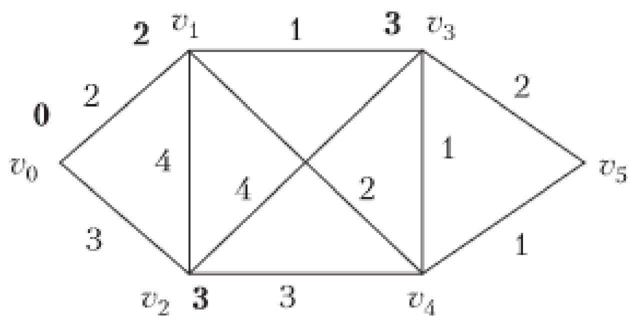


Рис. 8.17

5. Рассмотрим временные вершины v_4 и v_5, смежные с v_3. Проверим их метки.

Для вершины v_4 $\lambda(v_4) = 4 < \lambda(v_3) + l(v_3, v_4) = 3 + 1 = 4$, поэтому метку вершины v_4 не меняем: $\lambda(v_4) = 4$.

Для вершины v_5 $\lambda(v_5) = \infty > \lambda(v_3) + l(v_3, v_5) = 3 + 2 = 5$, поэтому метку вершины v_5 меняем: $\lambda(v_5) = 5$.

Среди меток временных вершин выберем наименьшую. Это метка 4.

Вершина v_4 становится постоянной с меткой $\lambda(v_4) = 4$ (рис. 8.18). Получим

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
—	2	3	∞	∞	∞
—	—	3	3	4	∞
—	—	—	3	4	∞
—	—	—	—	4	5

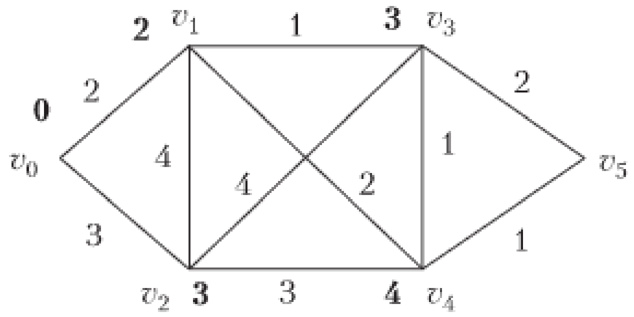


Рис. 8.18

6. Рассмотрим временную вершину v_5, смежную с v_4. Проверим ее метку.

Для вершины v_5 $\lambda(v_5) = 5 = \lambda(v_4) + l(v_4, v_5) = 4 + 1 = 5$, поэтому метку вершины v_5 не меняем: $\lambda(v_5) = 5$.

Вершина v_5 получила постоянную метку $\lambda(v_5) = 5$ (рис. 8.19). Значит, длина кратчайшего пути равна 5.

v_0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
0	∞	∞	∞	∞	∞
—	2	3	∞	∞	∞
—	—	3	3	4	∞
—	—	—	3	4	∞
—	—	—	—	4	5
—	—	—	—	—	5

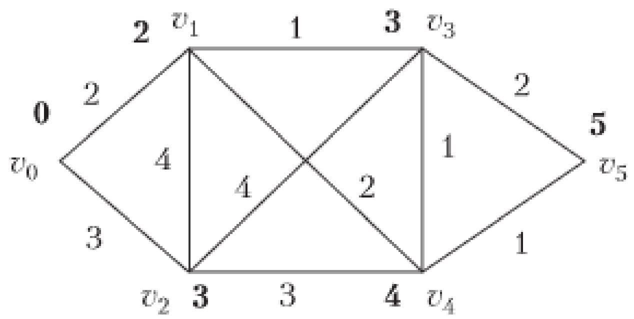


Рис. 8.19

Прямой ход алгоритма закончен.

Обратный ход. Начинаем двигаться из вершины v_0. Ищем смежную ей вершину, для которой разность меток $\lambda(v_5) = 5$ и этой вершины будет равна длине ребра.

Для вершины v_4 $\lambda(v_5) - \lambda(v_4) = 5 - 4 = 1 = l(v_4, v_5)$. Поэтому ребро (v_4, v_5) входит в кратчайший путь.

Для вершины v_3 $\lambda(v_5)-\lambda(v_3)=5-3=2=l(v_3,v_5)$. Поэтому ребро (v_3, v_5) тоже входит в кратчайший путь.

Таким образом, задача будет иметь два решения: а) $v_5 \to v_4$ и б) $v_5 \to v_3$.

а) Двигаемся из вершины v_4. Ищем смежную ей вершину, для которой разность меток $\lambda(v_4) = 4$ и этой вершины будет равна длине ребра.

Для вершины v_3 $\lambda(v_4)-\lambda(v_3)=3-1=2\neq l(v_3,v_4)=1$. Поэтому ребро (v_3, v_4) не входит в кратчайший путь.

Для вершины v_2 $\lambda(v_4)-\lambda(v_2)=4-3=1\neq l(v_2,v_4)$. Поэтому ребро (v_2, v_4) не входит в кратчайший путь.

Для вершины v_1 $\lambda(v_4)-\lambda(v_1)=4-2=2=l(v_1,v_4)$. Поэтому ребро (v_1, v_4) входит в кратчайший путь: $v_5 \to v_4 \to v_1$.

б) Двигаемся из вершины v_3. Ищем смежную ей вершину, для которой разность меток $\lambda(v_3) = 3$ и этой вершины будет равна длине ребра.

Для вершины v_2 $\lambda(v_3)-\lambda(v_2)=3-3=0\neq l(v_2,v_3)=4$. Поэтому ребро (v_2, v_3) не входит в кратчайший путь.

Для вершины v_1 $\lambda(v_3)-\lambda(v_1)=3-2=1=l(v_1,v_3)$. Поэтому ребро (v_1, v_3) входит в кратчайший путь: $v_5 \to v_3 \to v_1$.

Двигаемся из вершины v_1. Ищем смежную ей вершину, для которой разность меток $\lambda(v_1) = 2$ и этой вершины будет равна длине ребра.

Для вершины v_0 $\lambda(v_1)-\lambda(v_0)=2-0=2=l(v_0,v_1)$. Поэтому ребро (v_0, v_1) входит в каждый из кратчайших путей: $v_5 \to v_4 \to v_1 \to v_0$ и $v_5 \to v_3 \to v_1 \to v_0$.

Обратный ход алгоритма закончен.

Мы имеем два кратчайших пути одинаковой длины (рис. 8.20).

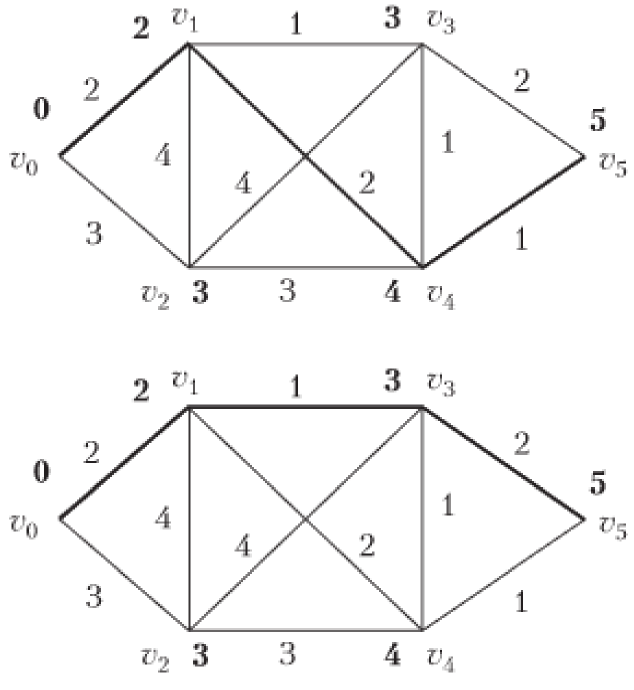


Рис. 8.20

8.4. Задача об оптимальном назначении. Максимальные паросочетания в двудольном графе

Определение 8.5. Граф G называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на два непересекающихся подмножества V и W так, что каждое ребро в G соединяет какую-нибудь вершину из V с какой-нибудь вершиной из W.

Обозначение: $G(V, W)$. В двудольном графе каждую вершину можно окрасить красным или синим цветом так, чтобы любое ребро имело один конец красный, другой — синий.

Определение 8.6. *Паросочетанием* в двудольном графе называется любое множество попарно несмежных ребер этого графа. Паросочетание называется *максимальным* для графа, если оно содержит наибольшее число ребер среди всех паросочетаний этого графа. Паросочетание П называется *совершенным* из V в W, если число ребер в П и число вершин в V совпадают: $|\Pi| = |V|$.

Очевидно, что совершенное паросочетание — всегда максимальное.

Для множества S вершин из V обозначим через $\varphi(S)$ подмножество вершин из W, каждая из которых является смежной хотя бы одной вершине подмножества S.

Теорема 8.2 (Холла). *Для того чтобы в двудольном графе $G(V, W)$ существовало совершенное паросочетание из V в W, необходимо и достаточно, чтобы для любого подмножества S вершин из V выполнялось $|S| \le |\varphi(S)|$, т.е. число вершин в подмножестве S не должно превосходить число вершин в подмножестве $\varphi(S)$.*

Определение 8.7. Паросочетание называется *полным*, если к нему нельзя добавить ни одного ребра, не смежного с ребрами паросочетания. Ребра, вошедшие в полное парасочетание, называются *толстыми*, а остальные — *тонкими*. Вершины, инцидентные толстым ребрам, называются *насыщенными*, а остальные вершины — *ненасыщенные*. Цепь в графе называется *чередующейся*, если толстые и тонкие ребра в ней чередуются. Чередующаяся цепь называется *тонкой цепью*, если она соединяет две ненасыщенные вершины. В любой тонкой цепи тонких ребер на единицу больше, чем толстых.

Рассмотрим *алгоритм отыскания максимального паросочетания в двудольном графе* (венгерский алгоритм).

1. Находим в графе полное паросочетание. Для этого просматриваем в произвольном порядке ребра графа. Включаем в паросочетание первое ребро и те из последующих, которые не смежны ни с одним из уже включенных в паросочетание.

2. Для данного полного паросочетания ищем тонкую цепь. Если ее нет, то алгоритм закончен, а полное паросочетание и будет искомым максимальным. Если тонкая цепь есть, то переходим к шагу 3.

3. Из исходного паросочетания исключаем те толстые ребра, которые входят в найденную тонкую цепь. Вместо них включаем в паросочетание тонкие ребра из найденной тонкой цепи. Число ребер в новом паросочетании будет на единицу больше. Переходим к началу шага 2.

Пример 8.10

Двудольный граф задан матрицей смежности

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем в этом графе максимальное паросочетание.

Решение

По матрице смежности строим граф (рис. 8.21).

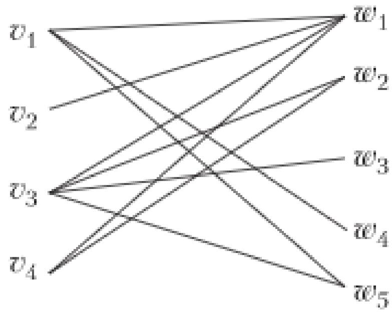


Рис. 8.21

Цикл 1. Находим полное паросочетание П = {(v_1, w_1), (v_3, w_2)}. Толстые ребра (v_1, w_1), (v_3, w_2). Насыщенные вершины v_1, v_3, w_1, w_2 (рис. 8.22).

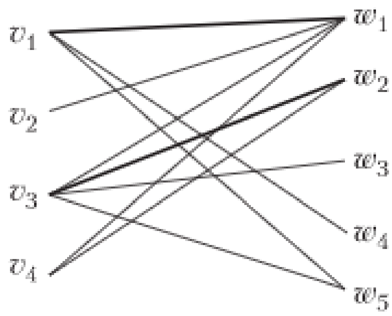


Рис. 8.22

Тонкая цепь проходит через вершины v_4, w_1, v_1, w_4 и состоит из ребер (v_2, w_1), (v_1, w_1), (v_1, w_4) (рис. 8.23).

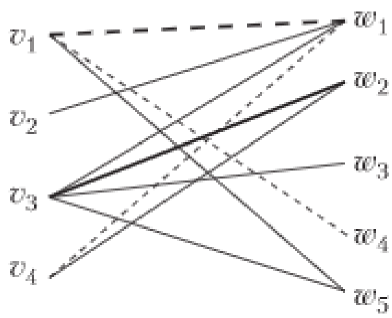


Рис. 8.23

Из паросочетания П исключаем ребро (v_1, w_1), которое входит в тонкую цепь. Включаем в паросочетание П ребра (v_4, w_1), (v_1, w_4). Получим паросочетание $П_1$, состоящее из ребер $\{(v_1,w_4),(v_3,w_2),(v_4,w_1)\}$ (рис. 8.24).

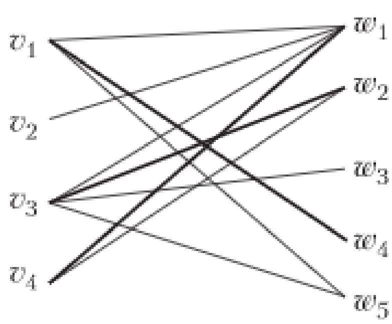


Рис. 8.24

Цикл 2. Далее начинаем шаг 2 второго цикла алгоритма.

2. Тонкая цепь проходит через вершины $v_2, w_1, v_4, w_2, v_3, w_5$. Она состоит из ребер $(v_2, w_1), (v_4, w_1), (v_4, w_2), (v_3, w_2), (v_3, w_5)$ (рис. 8.25).

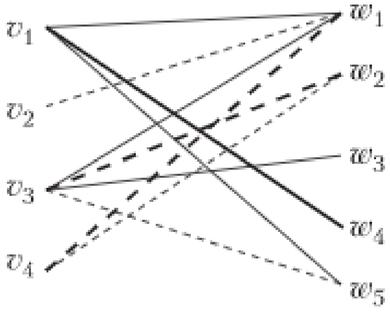


Рис. 8.25

3. Из паросочетания Π_1 исключаем ребра $(v_4, w_1), (v_3, w_2)$, которые входят в тонкую цепь. Вместо них включаем в паросочетание ребра $(v_2, w_1), (v_4, w_2), (v_3, w_5)$. Получим паросочетание $\Pi_2 = \{(v_1, w_4), (v_2, w_1), (v_3, w_5), (v_4, w_2)\}$ (рис. 8.26).

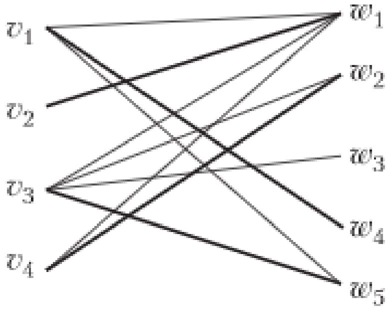


Рис. 8.26

Цикл 3. Далее начинаем шаг 2 третьего цикла алгоритма.

2. Тонкой цепи нет. Алгоритм закончен. Максимальное паросочетание будет иметь вид $\Pi_2 = \{(v_1, w_4), (v_2, w_1), (v_3, w_5), (v_4, w_2)\}$.

Задача об оптимальном назначении. Пусть есть n рабочих и n работ. Рабочий с номером i выполняет работу с номером j с эффективностью a_{ij}. Требуется каждого рабочего назначить на одну работу таким образом, чтобы выполнялись все работы и суммарная эффективность при этом была бы максимальной.

Из эффективностей a_{ij} можно составить матрицу эффективностей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В терминах матрицы эффективностей задачу можно сформулировать так: надо выбрать по одному элементу в каждой строке и каждому столбцу так, чтобы сумма выбранных элементов была бы максимальной.

В терминах графов формулировка задачи такая: рассмотрим двудольный граф $G(V, W)$, каждому ребру которого приписана эффективность a_{ij} («длина» или «вес» ребра). Надо найти такое совершенное паросочетание, чтобы сумма «длин» ребер была бы максимальной среди всех возможных совершенных паросочетаний.

Рассмотрим *алгоритм решения задачи об оптимальном назначении*.

1. Припишем вершинам v_i метки a_i, а вершинам w_i — метки b_j так, чтобы $a_i + b_j \geq a_{ij}$. К примеру, можно положить $a_i = \max\limits_j a_{ij}$, $b_j = 1$.

2. Находим в графе $G(V, W)$ ребра (v_i, w_j), для которых $a_i + b_j = a_{ij}$. Составляем граф G_1 из этих ребер и всех вершин графа $G(V, W)$.

3. Находим в графе G_1 максимальное паросочетание П. Если оно совершенное, то оно дает решение задачи и алгоритм закончен. В противном случае переходим к шагу 4.

4. Поскольку в графе G_1 нет совершенного паросочетания, то по теореме Холла найдется подмножество S вершин из V такое, что $|S| > |\varphi(S)|$.

5. В каждой вершине $v_i \in S$ метку a_i уменьшаем на 1. В каждой вершине $w_j \in \varphi(S)$ метку b_j увеличиваем на 1. Остальные метки не меняем. Получаем граф $G(V, W)$ с новой разметкой вершин. Переходим к шагу 2.

Пример 8.11

Решим задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективностей

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Цикл 1.

1. Подчеркнем максимальные элементы в каждой строке:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{4} & 2 & 1 & 2 \\ 2 & \underline{5} & 2 & 4 \\ \underline{6} & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & \underline{5} \end{pmatrix}.$$

Они являются начальными значениями меток a_i. Все $b_j = 0$.

2. Расставляем метки:

a_i \ b_j	0	0	0	0
4	$\underline{4}$	2	1	2
5	2	$\underline{5}$	2	4
6	$\underline{6}$	5	2	3
5	3	1	3	$\underline{5}$

В таблице подчеркнуты эффективности ребер, для которых $a_i + b_j = a_{ij}$. Граф G_1 изображен на рис. 8.27.

3. Максимальное паросочетание $\Pi = \{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_4, w_4)\}$. В G_1 оно отмечено толстыми ребрами (рис. 8.28).

Оно не совершенное, так как $|\Pi| = 3 < |V| = 4$.

Для подмножеств $S = \{v_1, v_3\}$, $\varphi(S) = \{w_1\}$ имеем $|S| = 2 > |\varphi(S)| = 1$.

Меняем метки вершин $v_1, v_3 \in S$ и $w_1 \in \varphi(S)$.

Переходим к шагу 2 нового цикла.

Цикл 2.

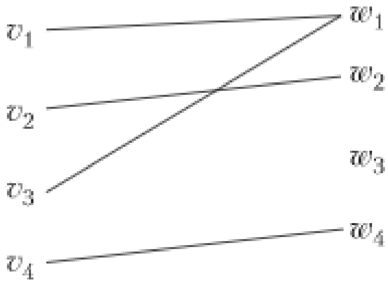


Рис. 8.27

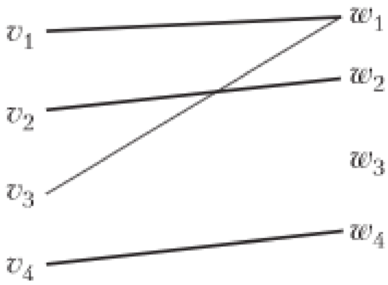


Рис. 8.28

2. Новые метки отмечаем в той же таблице слева и сверху:

a_i \ b_j		1	0	0	0
		0 ↑	0	0	0
3	4 ↓	$\underline{4}$	2	1	2
5	5	2	$\underline{5}$	2	4
5	6 ↓	$\underline{6}$	5	2	3
5	5	3	1	3	$\underline{5}$

Получаем граф G_1, изображенный на рис. 8.29.

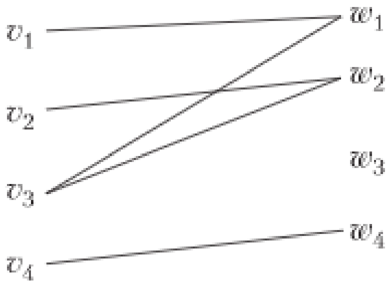


Рис. 8.29

3. Максимальное паросочетание $\Pi = \{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_4, w_4)\}$ (рис. 8.30).

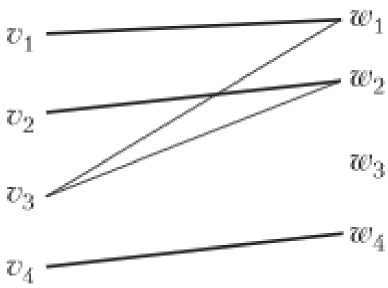


Рис. 8.30

Оно не совершенное, так как $|\Pi| = 3 < |V| = 4$.

4. Для подмножеств $S = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\varphi(S) = \{w_1, w_2\}$ имеем $|S| = 3 > |\varphi(S)| = 2$.

5. Изменим метки вершин $v_1, v_2, v_3 \in S$ и $w_1, w_2 \in \varphi(S)$.
Переходим к шагу 2 нового цикла.
Цикл 3.
2. Новые метки отмечаем в той же таблице слева и сверху:

a_i \ b_j			2	1	0	0
			1 ↑	0 ↑	0	0
			0 ↑	0	0	0
2	3 ↓	4 ↓	$\underline{4}$	2	1	2
4	5 ↓	5	2	$\underline{5}$	2	4
4	5 ↓	6 ↓	$\underline{6}$	5	2	3
5	5	5	3	1	3	$\underline{5}$

Граф G_1 изображен на рис. 8.31.

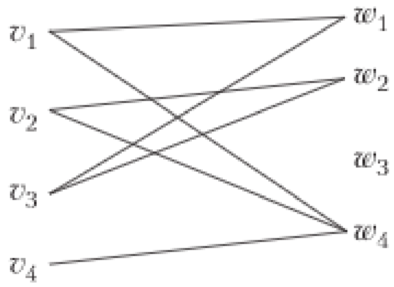


Рис. 8.31

3. Максимальное паросочетание $\Pi = \{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_4, w_4)\}$ (рис. 8.32).

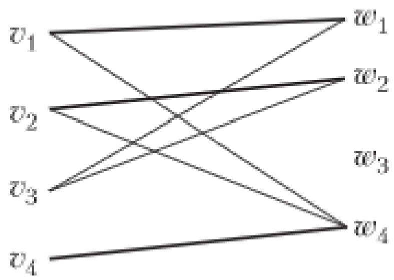


Рис. 8.32

Оно не совершенное, так как $|\Pi| = 3 < |V| = 4$.
4. Для подмножеств $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $\varphi(S) = \{w_1, w_2, w_4\}$ имеем $|S| = 4 > |\varphi(S)| = 3$.
5. Изменим метки вершин $v_1, v_2, v_3, v_4 \in S$ и $w_1, w_2, w_4 \in \varphi(S)$.
Переходим к шагу 2 нового цикла.
Цикл 4.
2. Новые метки отмечаем в той же таблице слева и сверху:

a_i \ b_j				3	2	0	1
				2 ↑	1 ↑	0	0 ↑
				1 ↑	0 ↑	0	0
				0 ↑	0	0	0
1	2 ↓	3 ↓	4 ↓	$\underline{4}$	2	1	2
3	4 ↓	5 ↓	5	2	$\underline{5}$	2	4
3	4 ↓	5 ↓	6 ↓	$\underline{6}$	5	2	3
4	5 ↓	5	5	3	1	3	$\underline{5}$

Граф G_1 изображен на рис. 8.33.

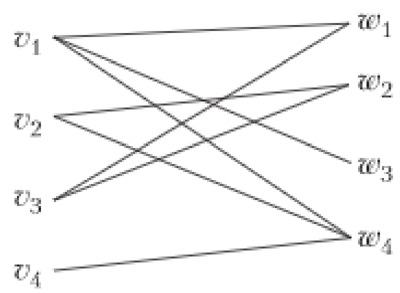


Рис. 8.33

3. Максимальное паросочетание $\Pi = \{(v_1, w_3), (v_2, w_2), (v_3, w_1), (v_4, w_4)\}$ (рис. 8.34).

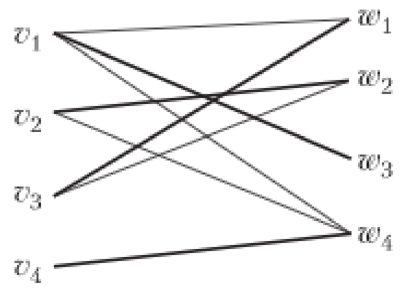


Рис. 8.34

Для его построения можно использовать венгерский алгоритм. Оно совершенное, так как $|\Pi| = 4 = |V|$. В таблице выделим эффективности ребер, входящих в максимальное паросочетание:

b_j \ a_i				3	2	0	1
				2 ↑	1 ↑	0	0 ↑
				1 ↑	0 ↑	0	0
				0 ↑	0	0	0
1	2 ↓	3 ↓	4 ↓	$\underline{4}$	2	**1**	2
3	4 ↓	5 ↓	5	2	$\underline{\mathbf{5}}$	2	4
3	4 ↓	5 ↓	6 ↓	$\underline{\mathbf{6}}$	5	2	3
4	5 ↓	5	5	3	1	3	$\underline{\mathbf{5}}$

Найдем суммарную эффективность:

$$\sum_{(v_i, w_j) \in \Pi} a_{ij} = 1 + 5 + 6 + 5 = 17.$$

Найдем сумму получившихся меток:

$$\sum_i a_i + \sum_j b_j = 1 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 0 + 1 = 17.$$

Числа равны, следовательно, задача решена правильно.

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется графом?
2. Какие способы задания графа вы знаете?
3. Какой граф называется деревом, лесом?
4. Сформулируйте постановку задачи построения минимального остова в графе.
5. Как найти кратчайший путь в графе?

6. Сформулируйте теорему Холла.

7. Сформулируйте задачу об оптимальном назначении в разных терминах: рабочие и работы, матрицы, графы.

Практикум по решению задач

Упражнение 8.1. Построим минимальный остов для графа на рис. 8.35.

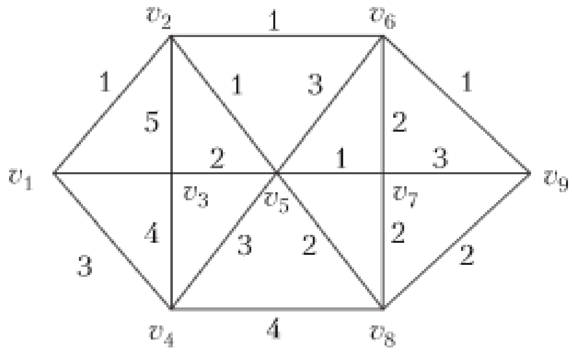
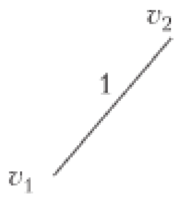


Рис. 8.35

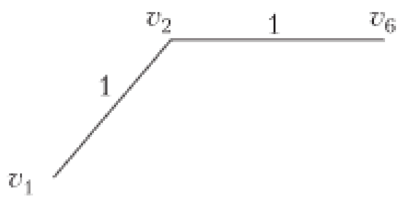
Решение

Построим один из возможных остовов по шагам.

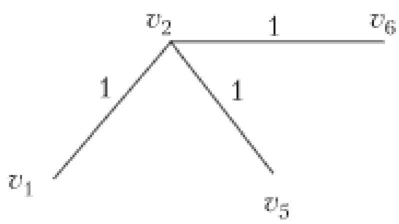
Шаг 1. Упорядочиваем ребра в порядке возрастания их весов: $(v_1, v_2) = 1$, $(v_2, v_5) = 1$, $(v_2, v_6) = 1$, $(v_5, v_7) = 1$, $(v_6, v_9) = 1$, $(v_3, v_5) = 2$, $(v_5, v_8) = 2$, $(v_6, v_7) = 2$, $(v_7, v_8) = 2$, $(v_8, v_9) = 2$, $(v_4, v_5) = 3$, $(v_5, v_6) = 3$, $(v_7, v_9) = 3$, $(v_1, v_4) = 4$, $(v_4, v_8) = 4$, $(v_1, v_3) = 5$, $(v_2, v_3) = 5$, $(v_3, v_4) = 5$.



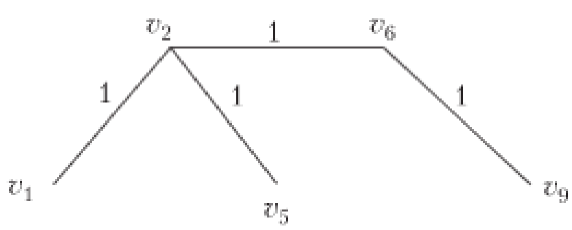
Шаг 2:



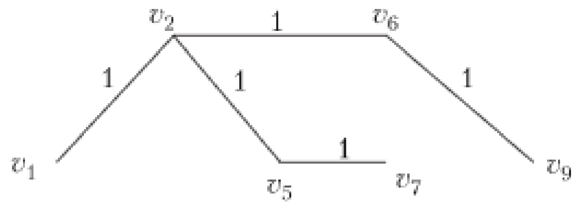
Шаг 3:



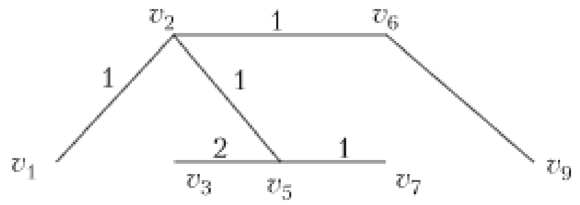
Шаг 4:



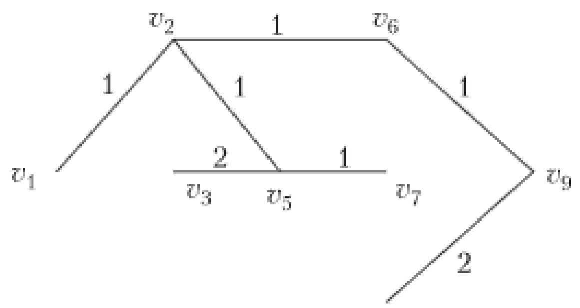
Шаг 5:



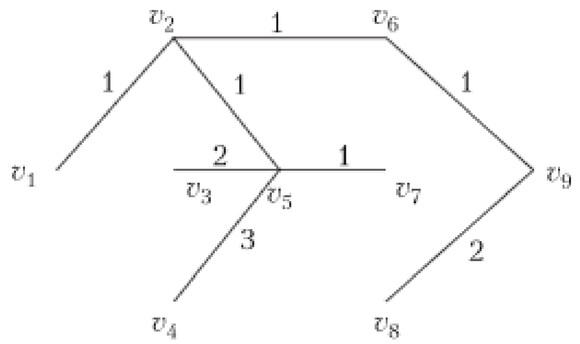
Шаг 6:



Шаг 7:



Шаг 8:



Шаг 9:

Длина минимального остова равна $L = 1+1+1+1+1+2+2+3 = 12$.

Упражнение 8.2. Найдем кратчайший путь в графе (рис. 8.36) из вершины v_1 в вершину v_9.

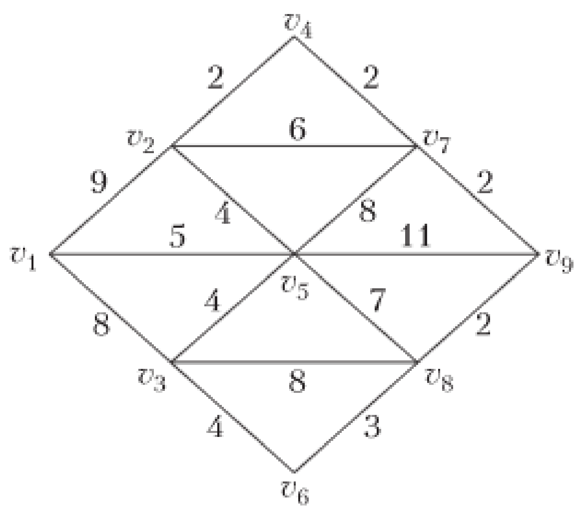


Рис. 8.36

Решение

Список значений меток вершин графа приведен в таблице:

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
—	9	8	∞	**5**	∞	∞	∞	∞
—	9	**8**	∞	—	∞	13	12	16
—	**9**	—	∞	—	12	13	12	16
—	—	—	**11**	—	12	13	12	16
—	—	—	—	—	**12**	13	12	16
—	—	—	—	—	—	13	**12**	16
—	—	—	—	—	—	**13**	—	14
—	—	—	—	—	—	—	—	**14**

Длина кратчайшего пути равна 14.

Используя обратный ход алгоритма, найдем сам кратчайший путь (рис. 8.37).

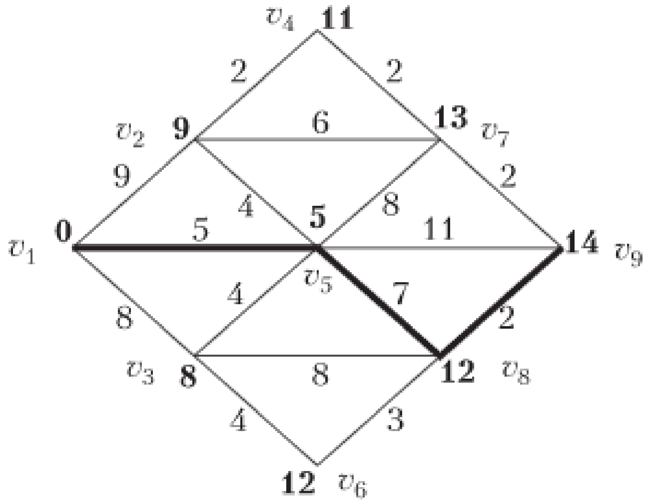


Рис. 8.37

Упражнение 8.3. Решим задачу об оптимальном назначении с матрицей эффективностей

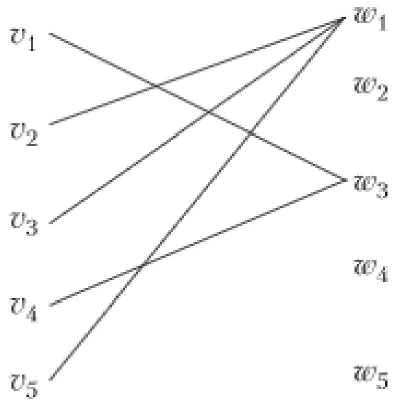
$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 9 & 5 & 6 \\ 9 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 10 & 8 & 7 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 10 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение

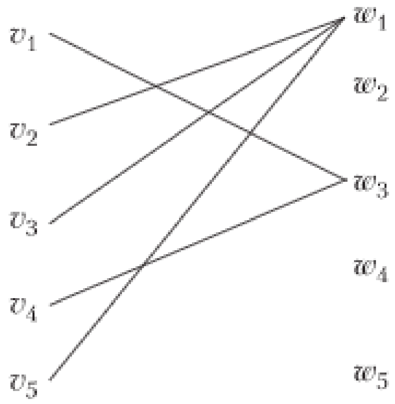
Приведем таблицу расстановки меток и вид графов G_1 на каждом цикле алгоритма:

				b_j	4	2	2	0	0
					3 ↑	1 ↑	2	0	0
					2 ↑	0 ↑	2	0	0
					1 ↑	0	1 ↑	0	0
a_i					0 ↑	0	0 ↑	0	0
7	7	7	8 ↓	9 ↓	6	5	$\underline{9}$	5	6
5	6 ↓	7 ↓	8 ↓	9 ↓	$\underline{9}$	6	6	5	4
6	7 ↓	8 ↓	9 ↓	10 ↓	$\underline{10}$	8	7	4	5
8	8	8	9 ↓	10 ↓	5	6	$\underline{10}$	7	8
4	5 ↓	6 ↓	7 ↓	8 ↓	$\underline{8}$	5	4	4	3

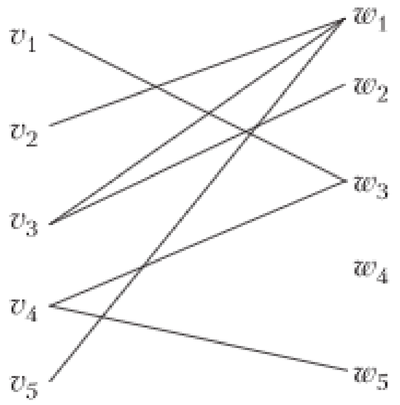
Цикл 1:



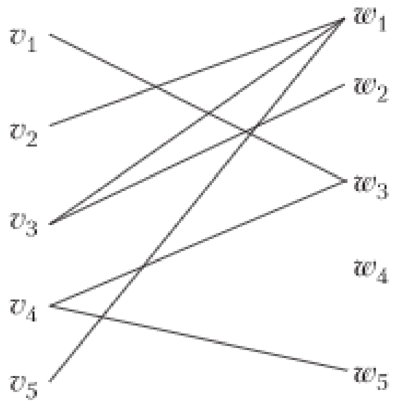
Цикл 2:



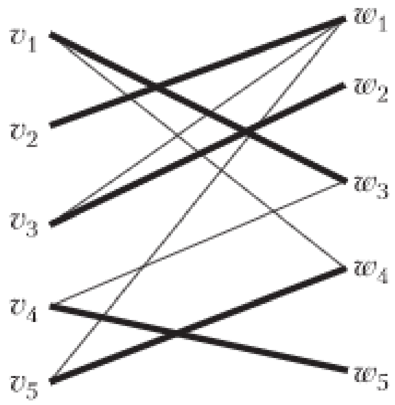
Цикл 3:



Цикл 4:



Цикл 5:



Сумма эффективностей равна $\sum\limits_{(v_i, w_j)\in\Pi} a_{ij} = 9+9+8+8+4 = 38.$

Контроль: сумма меток $\sum\limits_i a_i + \sum\limits_j b_j = 7+5+6+8+4+4+2+2 = 38.$

Задачи для самостоятельного решения

Если в задачах для самостоятельного решения имеется несколько решений, то в ответе приводится только одно из них.

8.1. Для матрицы инциденций $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ постройте граф.

8.2. Для матрицы смежности $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ постройте граф.

8.3. Дан граф (рис. 8.38).

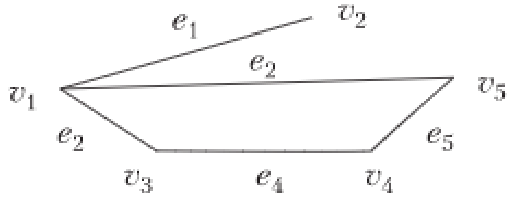


Рис. 8.38

Запишите для него матрицу инциденций A и матрицу смежности B.

8.4. Найдите минимальный остов в графе: а) рис. 8.39; б) рис. 8.40.

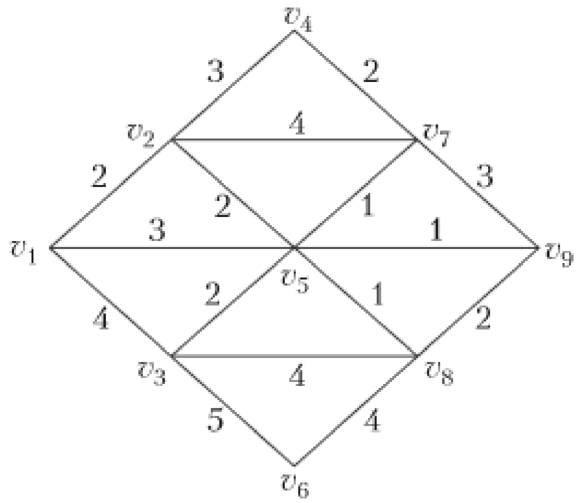


Рис. 8.39

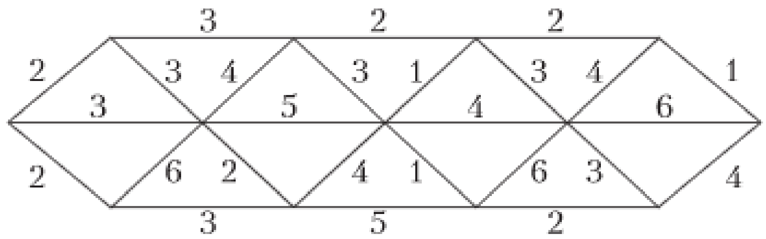


Рис. 8.40

8.5. Найдите кратчайший путь из вершины v_1 в вершину v_9 в графе: а) рис. 8.41; б) рис. 8.42.

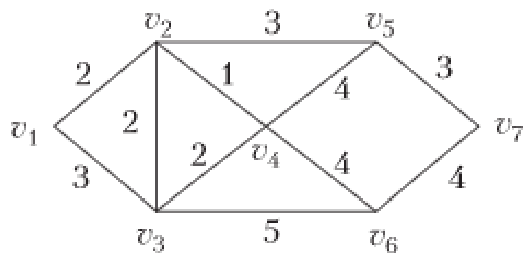


Рис. 8.41

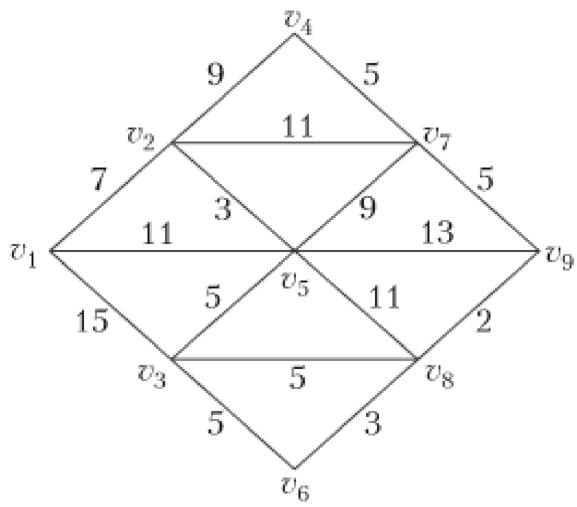


Рис. 8.42

8.6. Найдите максимальное паросочетание в двудольном графе (рис. 8.43).

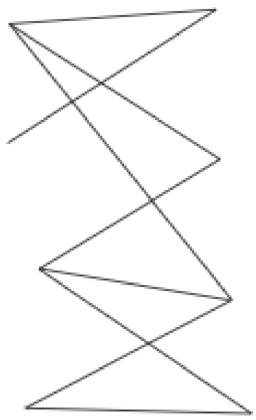


Рис. 8.43

8.7. Решите задачу об оптимальном назначении с заданной матрицей эффективностей:

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 8 & 5 \\ 6 & 4 & 7 & 3 \\ 8 & 7 & 7 & 5 \\ 6 & 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Раздел III
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Дисциплина «Математический анализ» является самостоятельной дисциплиной или частью дисциплины «Математика» из базовой части математического и естественно-научного цикла дисциплин ФГОС ВО. Изучение данной дисциплины базируется на знаниях, полученных в объеме средней общеобразовательной школы по дисциплинам «Математика», «Алгебра и начала анализа», «Геометрия». Математический анализ закладывает фундамент для изучения дисциплин, использующих статистические методы сбора и анализа информации, формирует у студентов фундаментальные математические знания по использованию математических методов, необходимых для исследования и моделирования политических процессов и решения прикладных экономических задач.

Развитие математики в тесной связи с запросами развития естествознания и технического прогресса привело к созданию переменной величины и развитию на ее основе дифференциального и интегрального исчислений. Без этих и других разделов математического анализа теперь невозможно представить описание природных явлений и экономических процессов, а также развитие других, более новых математических и близких к математике дисциплин, таких как финансовая математика, макроэкономика, информатика, теория игр и многие другие.

Изучение математического анализа способствует формированию следующих общекультурных и профессиональных компетенций:

- способность к восприятию, обобщению, анализу информации, постановке цели и выбору путей ее достижения;
- умение применять количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений и строить социальные, экономические и организационно-управленческие модели;
- умение обрабатывать и анализировать данные для подготовки аналитических решений, экспертных заключений и рекомендаций;
- способность использовать методы сбора, обработки и интерпретации комплексной социальной информации для решения организационно-управленческих задач, в том числе находящихся за пределами непосредственной сферы деятельности;
- знание основных положений, законов и методов естественных наук и математики, умение на их основе представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира;
- готовность использовать основные законы естественно-научных дисциплин в профессиональной деятельности, применять методы математического анализа и моделирования;
- способность выявить естественно-научную сущность проблем, возникающих в ходе профессиональной деятельности, привлечь для их решения соответствующий физико-математический аппарат.

После освоения раздела III студент должен:

знать

- основные понятия и инструменты математического анализа;
- математические модели принятия решений;
- теории множеств и функций, теории пределов, дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов, которые необходимы для решения профессиональных задач;

уметь

- применять методы математического анализа для постановки и решения прикладных задач;
- решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений;
- использовать математический язык, математическую символику при построении организационно-управленческих моделей;

владеть

- математическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих задач;
- навыками применения современного математического инструментария решения типовых социальных и экономических задач;
- методикой построения, анализа и применения адекватных математических моделей для оценки состояния и перспектив развития социальных и экономических явлений и процессов.

Глава 9
ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

9.1. Понятие функции. Основные свойства функций

Определение 9.1. Величина, которая всегда сохраняет одно и то же значение, называется *постоянной величиной*. Если значение сохраняется лишь в определенных условиях конкретного процесса, то в таком случае она называется *параметром*. Величина, которая может принимать различные числовые значения, называется *переменной величиной*.

В качестве постоянной величины выступает, например, число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру. В качестве параметра можно рассматривать производительность труда, когда объем работ и время являются переменными величинами.

Определение 9.2. Величина y называется *функцией* переменной величины x ($y = f(x)$), если каждому значению x из множества X поставлено в соответствие одно определенное значение величины y из множества Y.

В этом случае x называется *аргументом функции* (независимой переменной), множество X называется *областью определения функции*, множество Y называется *областью значений функции*, y является зависимой переменной, а f обозначает закон соответствия между переменными y и x.

Множество X может специально оговариваться. В большинстве случаев этого не происходит, и, следовательно, под областью определения функции подразумевают область допустимых значений независимой переменной x, при которых функция y имеет смысл.

Например, для функции $y = x^3 \cdot \sqrt{4-x}$ областью определения служит полуинтервал $(-\infty; 4]$. Но если переменная x обозначает вес товара или количество единиц продукции, то в этих случаях областью определения функции будут множества $(0; 4]$ и $\{0; 1; 2; 3; 4\}$ соответственно.

Задать функцию означает указать ее область определения и правило, по которому для каждого значения аргумента найдется соответствующее ему значение функции.

Основными способами задания функции являются *аналитический* (при помощи формулы), *графический*, *табличный*, *словесный*. У каждого из них есть свои преимущества и свои недостатки. Например, недостатком аналитического способа является отсутствие наглядности, а преимущество графического способа как раз в его наглядности. Табличный способ задания хорош при сборе статистической информации, например зависимости количества людей от получаемого ими дохода и т.д.

Определение 9.3. *Графиком функции* в прямоугольной (декартовой) системе координат называется множество всех точек, абсциссами которых являются значения независимой переменной (откладываются по оси x), а ординатами являются значения функции, соответствующие этим значениям x (откладываются по оси y).

Рассмотрим основные *свойства функций.*

1. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если для любых ее значений из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 9.1, 9.4, 9.12).

2. Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если для любых ее значений из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 9.2, 9.3, 9.6, 9.11, 9.13—9.15, 9.17).

3. Если функция не является четной или нечетной, то она называется функцией *общего вида*. На графике такой функции отсутствуют описанные выше симметрии.

4. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции: $x_1 \in X, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ (см. рис. 9.5—9.7, 9.9, 9.15, 9.17).

5. Функция $y = f(x)$ называется *убывающей* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции: $x_1 \in X, x_2 \in X, x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$ (см. рис. 9.3, 9.8, 9.10, 9.16, 9.18).

6. Возрастающие и убывающие, а также невозрастающие (при $x_2 > x_1$ $f(x_2) \le f(x_1)$) и неубывающие (при $x_2 > x_1$ $f(x_2) \ge f(x_1)$) функции являются *монотонными*, причем первые две — строго монотонными.

7. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху* на множестве X, если для всех значений x из этого множества справедливо неравенство $f(x) \le M$, где M — некоторое постоянное число.

8. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу* на множестве X, если для всех значений x из этого множества справедливо неравенство $f(x) \ge m$, где m — некоторое постоянное число (см. рис. 9.1, 9.4, 9.5, 9.7, 9.8).

9. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на множестве X, если она на этом множестве ограничена и сверху, и снизу (см. рис. 9.11, 9.12, 9.15—9.18).

10. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* на множестве X, если для всех $x \in X$ найдется такое число $T \ne 0$, для которого справедливо равенство $f(x + T) = f(x)$. Наименьший положительный период T, если он существует, называется *главным периодом* (см. рис. 9.11—9.14).

9.2. Основные элементарные функции и их графики

К основным элементарным функциям относят следующие.

1. Степенная функция.

а) $y = x^n, x \in (-\infty; +\infty), n \in N.$

Если $n = 1$, то $y = x$, графиком этой функции является прямая, которая была подробно разобрана в четвертой главе данного пособия.

Нарисуем графики степенной функции при $n = 2$ (рис. 9.1) и при $n = 3$ (рис. 9.2), при остальных четных n график будет похож на график функции $y = x^2$, а при остальных нечетных n — на график $y = x^3$.

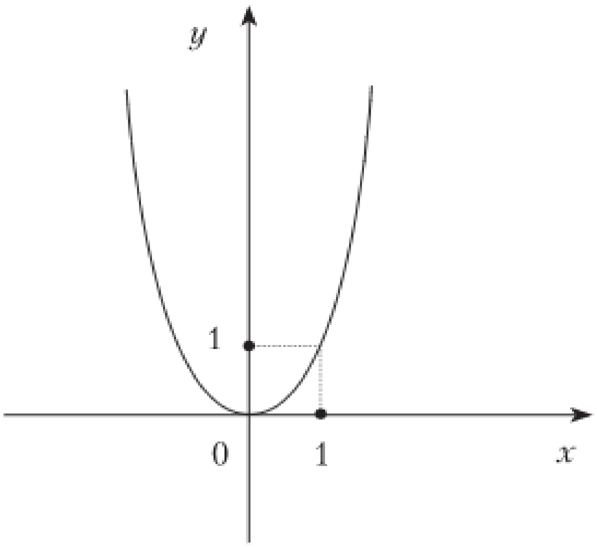


Рис. 9.1

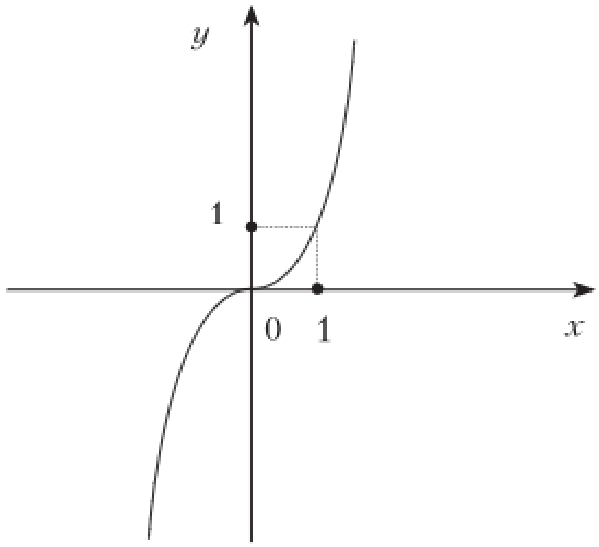


Рис. 9.2

б) $y = x^{-n}, x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty), n \in N.$

Нарисуем графики этой функции при $n = 1$ (рис. 9.3) и $n = 2$ (рис. 9.4), при остальных четных n график будет похож на график $y = \dfrac{1}{x^2}$, а при остальных нечетных n — на график $y = \dfrac{1}{x}$.

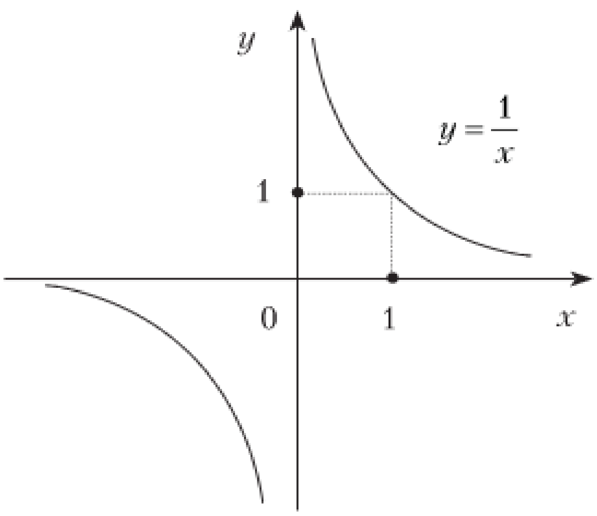


Рис. 9.3

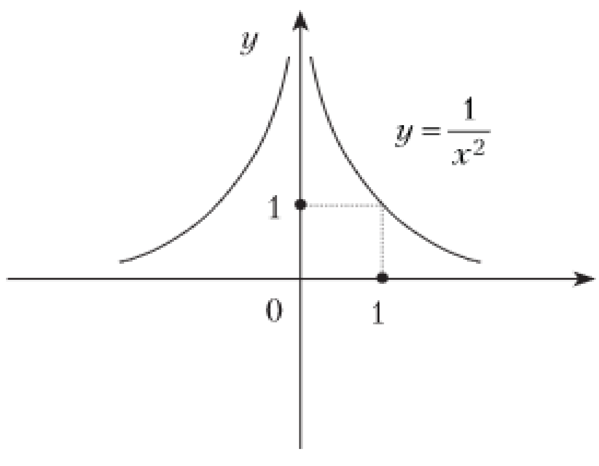


Рис. 9.4

в) $y = \sqrt[n]{x}, n \in N, n > 1.$

Область определения функции: $x \in (-\infty; +\infty)$, если n нечетно; $x \in [0; +\infty)$, если n четно.

Нарисуем график этой функции при $n = 2$ (рис. 9.5) и $n = 3$ (рис. 9.6), при остальных четных n график будет похож на график $y = \sqrt{n}$, а при остальных нечетных n — на график $y = \sqrt[3]{n}$.

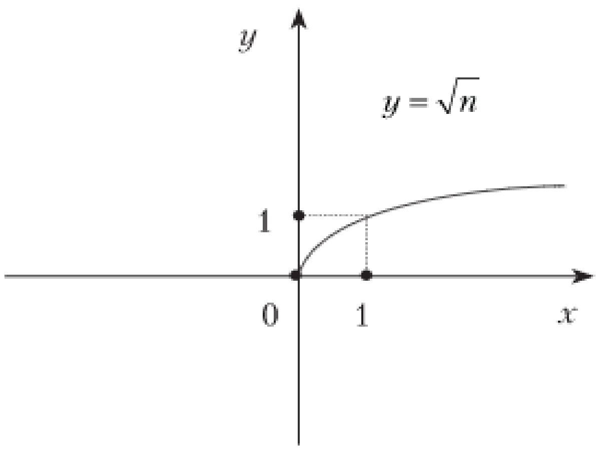


Рис. 9.5

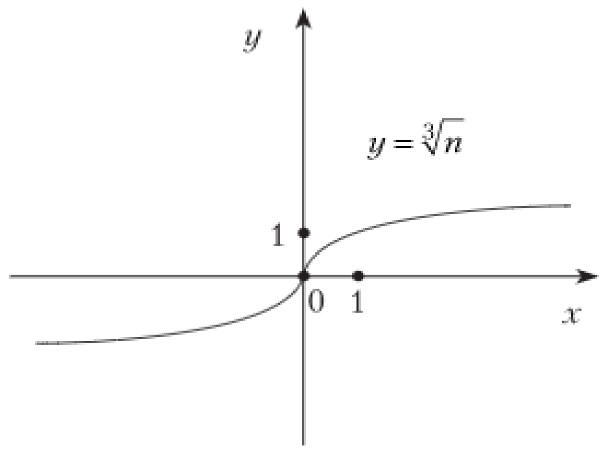


Рис. 9.6

2. Показательная функция $y = a^x$, где a — постоянное число, $a > 0$, $a \neq 1$. При $a > 1$ график функции показан на рис. 9.7, при $a < 1$ — на рис. 9.8.

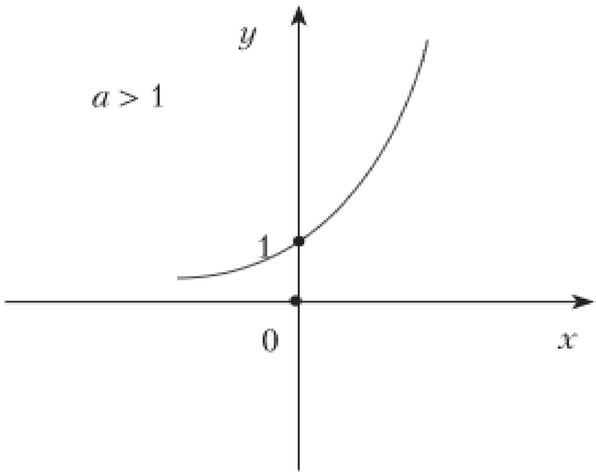


Рис. 9.7

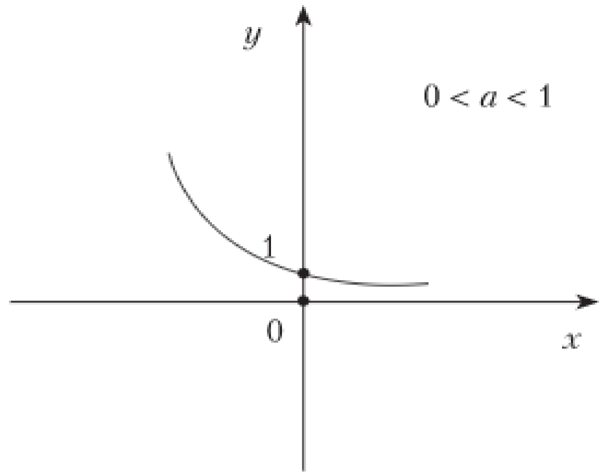


Рис. 9.8

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a — постоянное число, $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения функции — $x \in (0; +\infty)$. При $a > 1$ график функции показан на рис. 9.9, при $a < 1$ — на рис. 9.10.

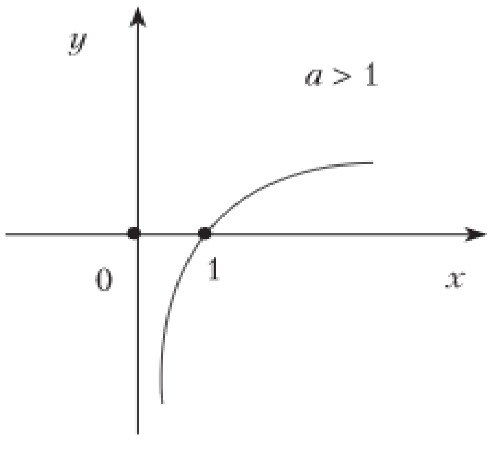


Рис. 9.9

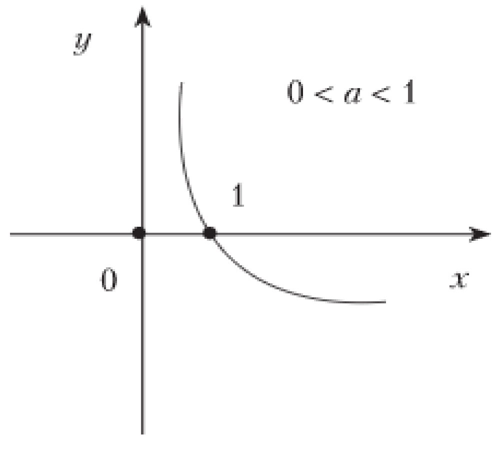


Рис. 9.10

4. Тригонометрические функции.

а) $y = \sin x$, $y \in [-1; 1]$ (рис. 9.11).

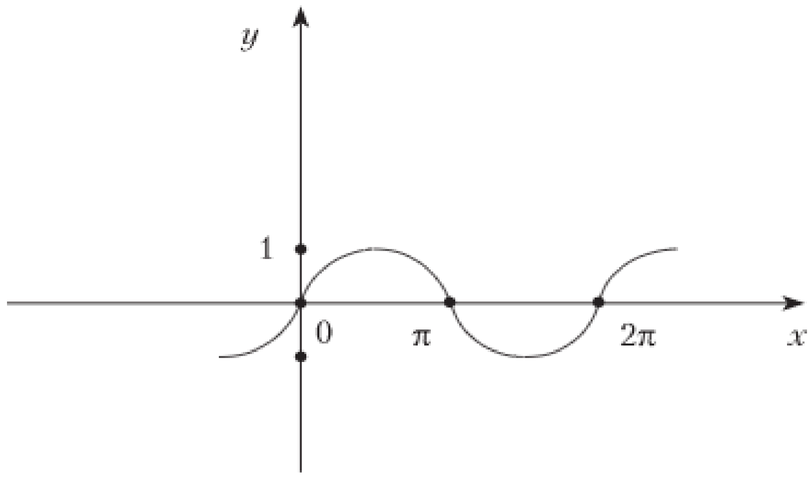


Рис. 9.11

б) $y = \cos x,\ y \in [-1;1]$ (рис. 9.12).

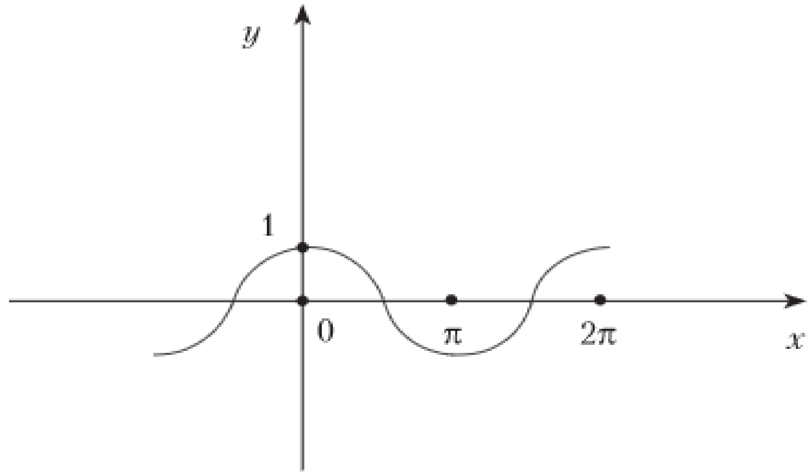


Рис. 9.12

в) $y = \operatorname{tg} x,\ x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in Z$ (рис. 9.13).

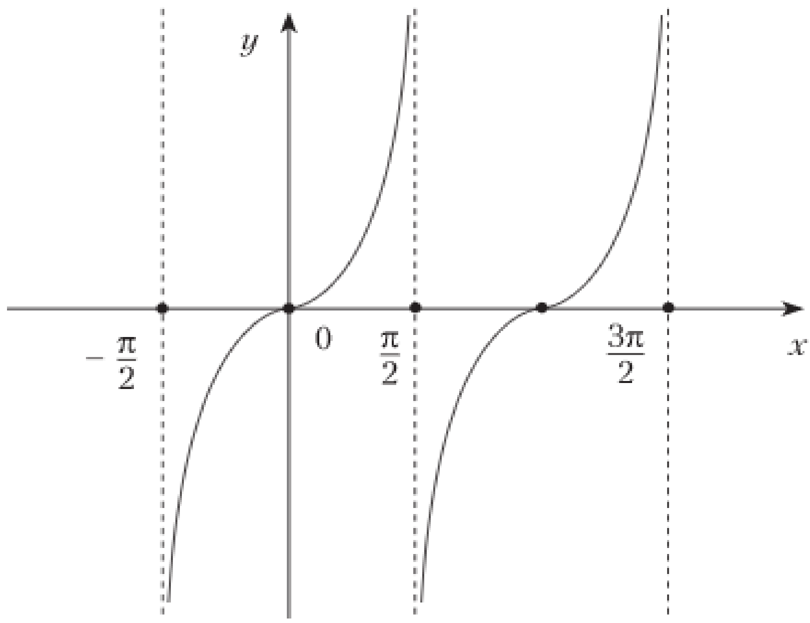


Рис. 9.13

г) $y = \mathrm{ctg}\, x$, $x \in (\pi n; \pi + \pi n), n \in Z$ (рис. 9.14).

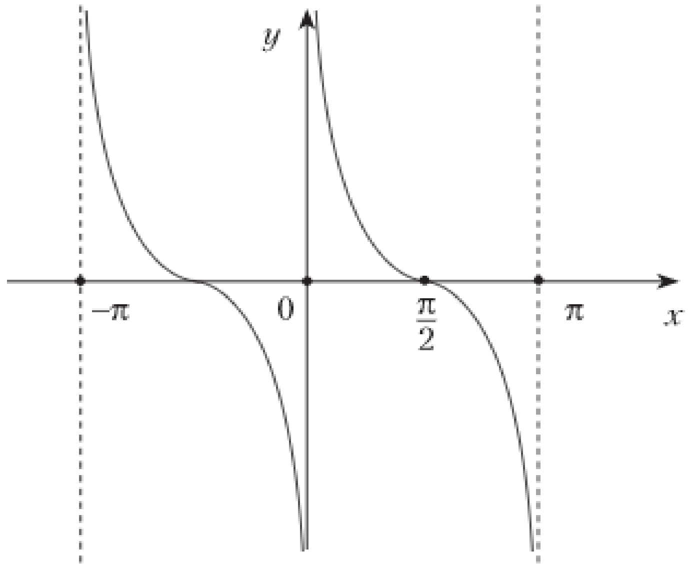


Рис. 9.14

5. Обратные тригонометрические функции.

а) $y = \arcsin x, x \in [-1; 1], y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (рис. 9.15).

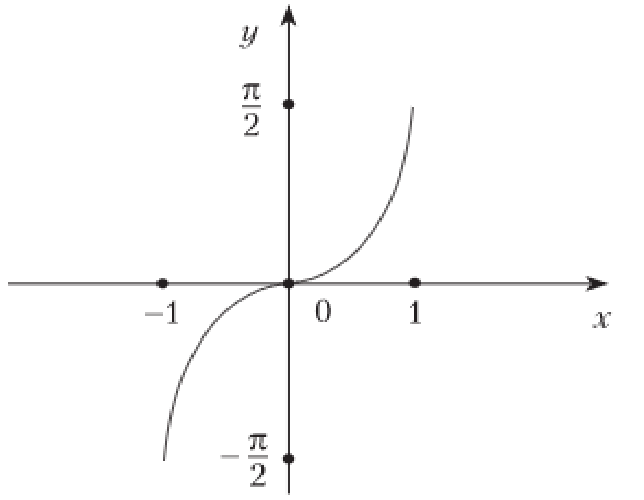


Рис. 9.15

б) $y = \arccos x, x \in [-1; 1], y \in [0; \pi]$ (рис. 9.16).

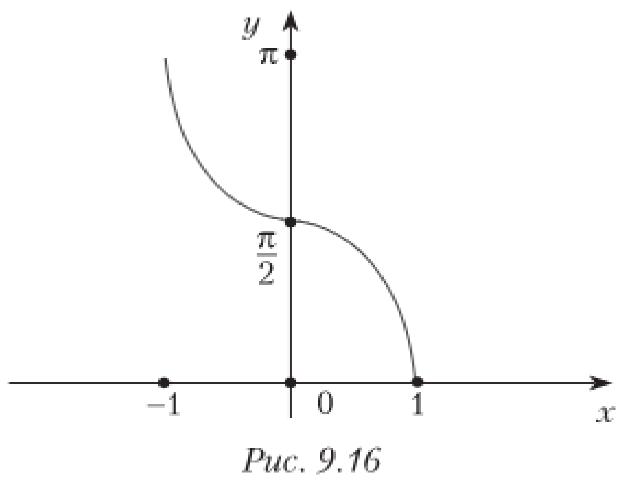


Рис. 9.16

в) $y = \operatorname{arctg} x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 9.17).

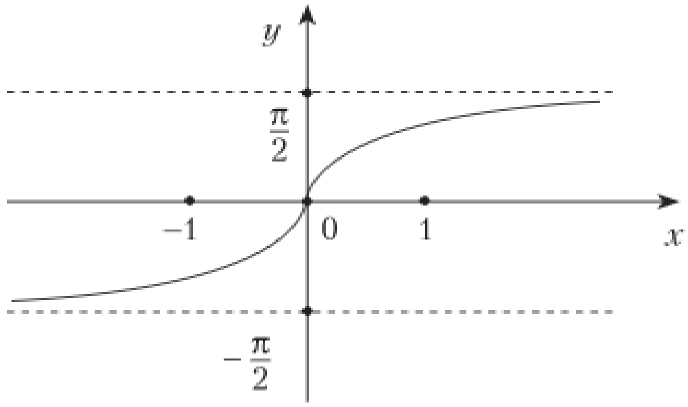


Рис. 9.17

г) $y = \operatorname{arcctg} x, y \in (0; \pi)$ (рис. 9.18).

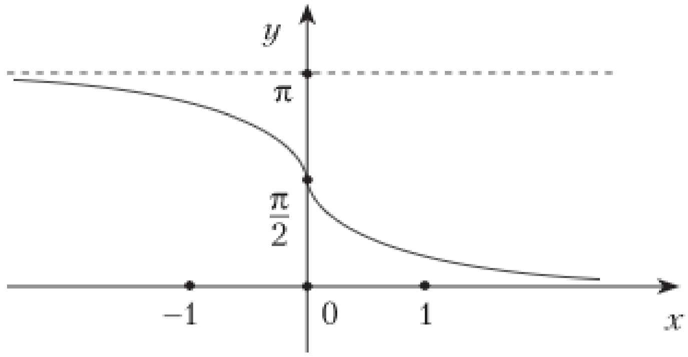


Рис. 9.18

6. Гиперболические функции:

а) гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

б) гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Из перечисленных выше основных элементарных функций можно составлять (строить) новые функции, причем не только с помощью четырех арифметических действий, но и с помощью операции взятия функций от функции $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — промежуточный аргумент функции y, который сам в свою очередь является функцией от переменной x. Например: $y = \sin \lg x$.

Функция, составленная таким образом, называется *сложной функцией*.

Утверждение 9.1. Функции, составленные (построенные) из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа арифметический действий и операций образования сложной функции, являются *элементарными* функциями.

Определение 9.4. Функция y, значения которой находятся из уравнения, разрешенного относительно y ($y = f(x)$), называется *явной*. Функция y, значения которой находятся из уравнения, не разрешенного относительно y, называется *неявной* $f(x, y) = 0$.

Для любой строго монотонной функции $y = f(x)$ существует *обратная функция* $y = f^{-1}(x)$, которая образуется следующим образом: пусть $y = f(x)$ — функция, определенная на множестве X с областью значений Y. Каждому $y \in Y$ поставим в соответствие единственное значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$, так получается функция $x = \varphi(y)$, определенная на множестве Y с областью значений X.

Применим традиционные обозначения (аргумента за x, а функции за y) и введем новое обозначение для обратной функции. Получили, таким образом, функцию вида $y = f^{-1}(x)$, которая является обратной к функции $y = f(x)$. Например, показательная и логарифмическая функции с одним и тем же основанием являются взаимно обратными. Стоит заметить, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

9.3. Классификация функций. Преобразование графиков

Все элементарные функции делятся на *алгебраические* и *трансцендентные* (неалгебраические).

Определение 9.5. Функция называется *алгебраической*, если над ее аргументом производится конечное число алгебраических действий. К ним помимо четырех арифметических действий (сложения, вычитания, деления и умножения) относится еще и возведение в степень с рациональным показателем. Любая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*.

К числу алгебраических относятся следующие функции:

1) целая рациональная функция (многочлен)

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n;$$

2) дробно-рациональная функция

$$y = \frac{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n}{b_0 + b_1x + ... + b_mx^m};$$

3) иррациональная функция (с рациональным показателем степени), например $y = \sqrt[5]{3 + 5x - x^2}$.

К трансцендентным относятся функции, составленные из показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических и гиперболических функций.

В гл. 11 будет предложена общая схема исследования функций и построения их графиков при помощи производной. Но в некоторых случаях эта схема оказывается громоздкой, поэтому не теряют своей актуальности приемы построения графиков функций преобразованием основных элементарных функций.

Используются следующие утверждения.

1. График функции $y = f(x + a)$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц, причем если $a > 0$, то влево, а если $a < 0$, то вправо (рис. 9.19).

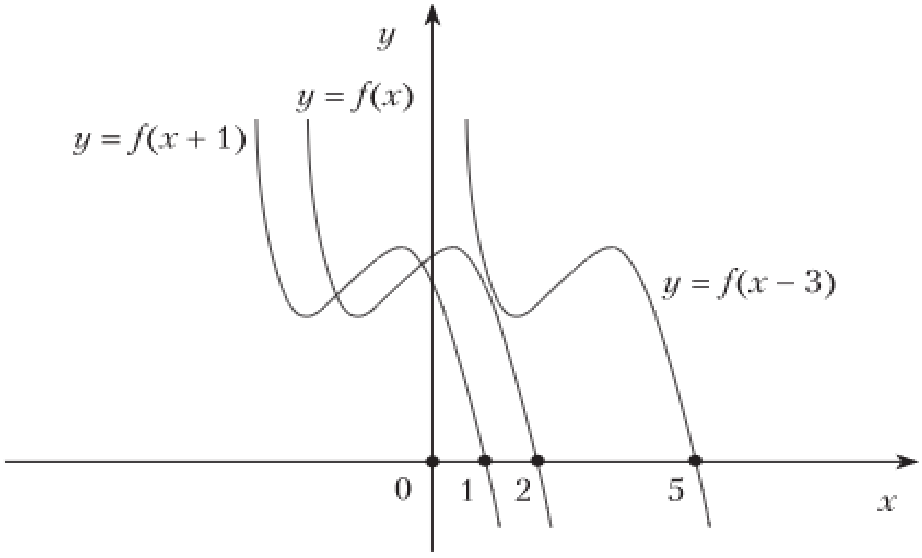


Рис. 9.19

2. График функции $y = f(x) + b$ получается из графика $y = f(x)$ сдвигом параллельно оси ординат на $|b|$ единиц, причем если $b > 0$, то вверх, если $b < 0$, то вниз (рис. 9.20).

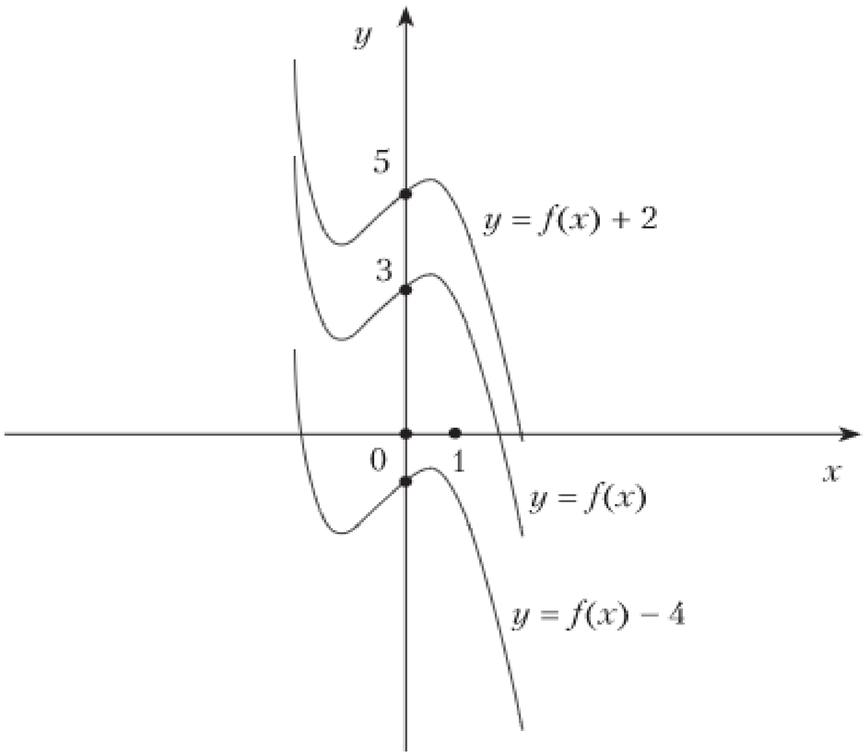


Рис. 9.20

3. График функции $y = r \cdot f(x)$, $r \neq 0$, получается из графика $y = f(x)$ растяжением (при $r > 1$) или сжатием (при $0 < r < 1$) в r раз вдоль оси ординат. Причем если $r < 0$, то график симметрично отобразится относительно оси абсцисс (рис. 9.21).

4. График функции $y = f(mx)$, $m \neq 0$, получается из графика $y = f(x)$ растяжением (при $0 < m < 1$) или сжатием (при $m > 1$) в m раз вдоль оси абсцисс. Причем если $m < 0$, то график симметрично отобразится относительно оси ординат (рис. 9.22, 9.23).

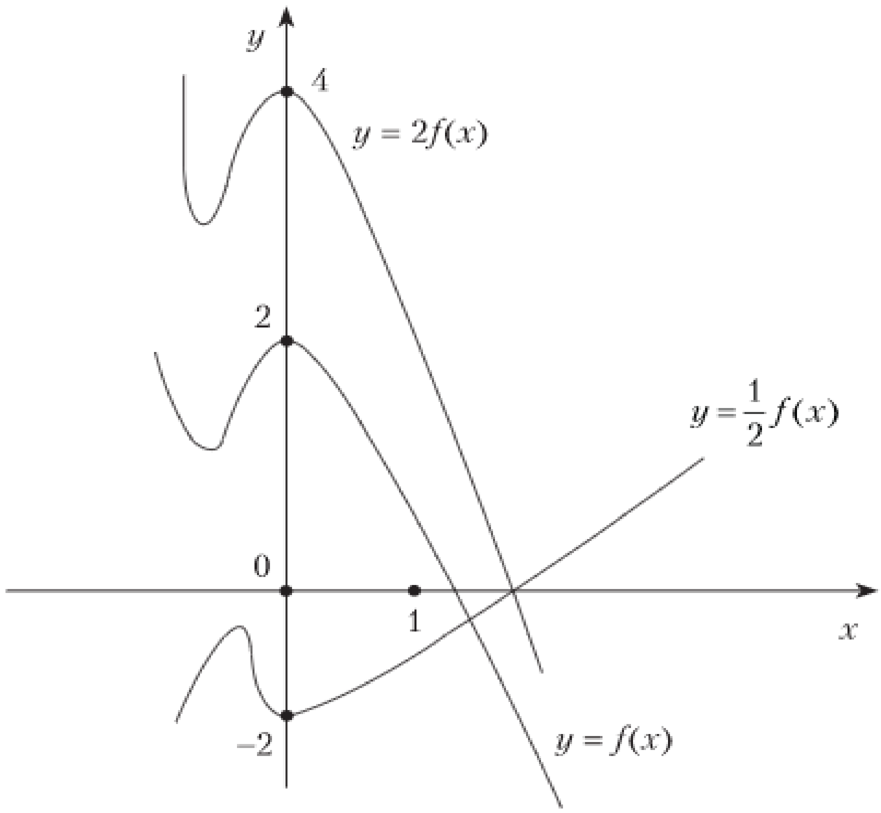


Рис. 9.21

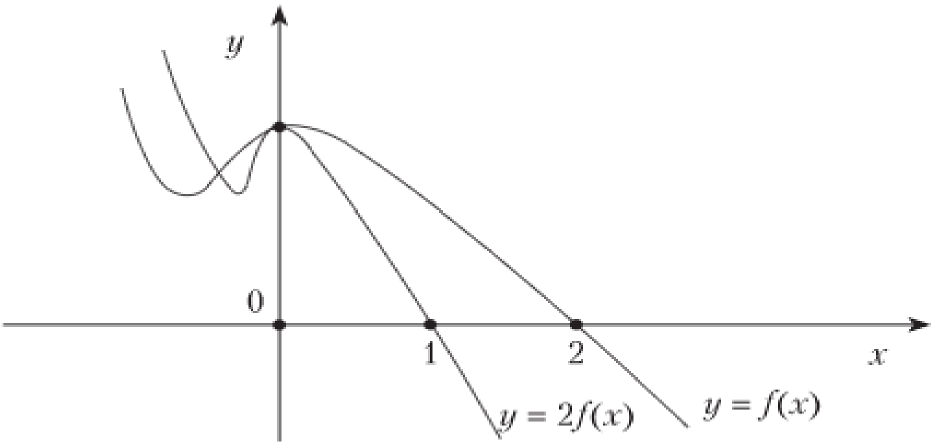


Рис. 9.22

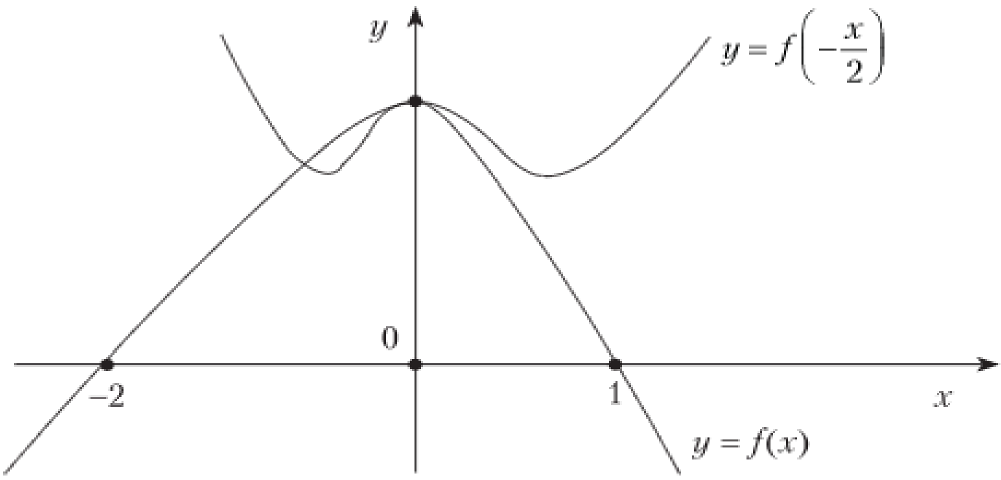


Рис. 9.23

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные способы задания функции. Какие, по вашему мнению, имеются достоинства и недостатки у каждого из этих способов?

2. Какая функция называется сложной? Является ли сложной функция, график которой получен из графика основной элементарной функции сдвигом вдоль оси ординат?

3. Какая функция называется периодической? Являются ли периодическими обратные тригонометрические функции?

4. Какая функция называется обратной? Является ли функция $y=\dfrac{1}{x}$ обратной к функции $y = x$?

5. Какая функция называется неявной? Является ли функция $y = xy + \sin x$ неявной?

6. Какая функция называется алгебраической? Является ли функция $y = x^2 + 2^x$ алгебраической?

Практикум по решению задач

Упражнение 9.1. Найдем области определения функций:

а) $y=\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{x-2}-\lg(x+1)$; б) $y=\sqrt{16-x^2}\cdot\log_5\sin x$;

в) $y=\sqrt{(x-1)\sqrt{4-x^2}}$; г) $y=\arcsin\dfrac{3-x}{2x}$.

Решение

Вспомним все ограничения, связанные с областью определения элементарных функций:

- знаменатель дроби отличен от нуля;
- выражение под корнем четной степени должно быть неотрицательно;
- выражение под знаком логарифма строго больше нуля;
- выражения под знаками арксинуса и арккосинуса не превышают единицы по абсолютной величине.

а) Следуя вышеизложенным пунктам, имеем систему

$$\begin{cases}25-x^2\ge 0,\\ x-2\ne 0,\\ x+1>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(5-x)(5+x)\ge 0,\\ x\ne 2,\\ x>-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in[-5;5],\\ x\ne 2,\\ x>-1,\end{cases}$$

откуда получаем ответ: $x\in(-1;2)\cup(2;5]$.

б) Имеем систему

$$\begin{cases}\sin x>0,\\ 16-x^2\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in(2\pi k;\pi+2\pi k),\,k\in Z,\\ x\in[-4;4].\end{cases}$$

Решим систему с помощью числовой прямой (рис. 9.24).

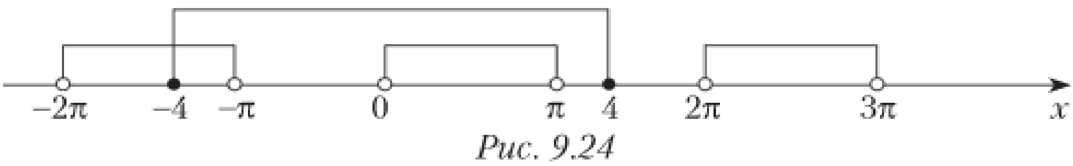


Рис. 9.24

Получаем ответ $x \in [-4; -\pi) \cup (0; \pi)$.

в) Имеем неравенство $(x-1)\sqrt{4-x^2} \ge 0$. Необходимо рассмотреть два случая. В первом случае имеем неотрицательный второй сомножитель, тогда первый сомножитель должен тоже быть неотрицательным:

$$\begin{cases} x-1 \ge 0, \\ 4-x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ (2-x)(2+x) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1; 2].$$

Во втором случае рассматриваем отрицательность первого сомножителя при условии, что второй равен нулю:

$$\begin{cases} x-1 < 0, \\ 4-x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

Объединяя полученные множества, имеем ответ $x \in \{-2\} \cup [1; 2]$.

г) Будем искать область определения, решая неравенство $\left|\frac{3-x}{2x}\right| \le 1$, из которого следует система

$$\begin{cases} \frac{3-x}{2x} \le 1, \\ \frac{3-x}{2x} \ge -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-x}{2x} - 1 \le 0, \\ \frac{3-x}{2x} + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-x-2x}{2x} \le 0, \\ \frac{3-x+2x}{2x} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3-3x}{2x} \le 0, \\ \frac{3+x}{2x} \ge 0. \end{cases}$$

Применительно к системе рассматриваем числовую прямую (рис. 9.25).

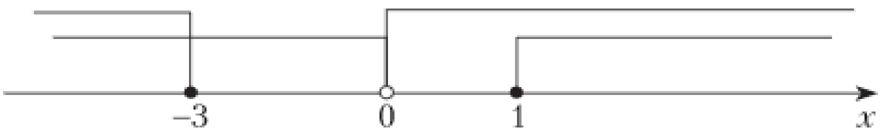


Рис. 9.25

Получаем ответ $x \in (-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$.

Упражнение 9.2. Найдем область значений функций:

а) $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x$; б) $y = \frac{1}{x^2+2x+5}$.

Решение

а) Преобразуем исходную функцию:

$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) =$$

$$= 2\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Функция $y = \sin x$ ограничена, ее область значений $y \in [-1; 1]$, таким образом,

$$-1 \le \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 1 \Rightarrow -2 \le 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \le 2.$$

Получаем ответ $y \in [-2; 2]$.

б) Преобразуем исходную функцию:

$$y = \frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{x^2+2x+1+4} = \frac{1}{(x+1)^2+4}.$$

Выражение $(x+1)^2$ принимает значения от нуля до бесконечности, следовательно, знаменатель принимает значения от четырех до бесконечности. Чем знаменатель больше, тем дробь меньше. Когда знаменатель стремится к бесконечности, дробь стремится к нулю, причем нуля не достигает. Таким образом получаем ответ $y \in \left(0; \frac{1}{4}\right]$.

Упражнение 9.3. Исследуем функции на четность-нечетность:

а) $y = x^3 \arcsin x$; б) $y = \frac{x^3}{\cos x}$;

в) $y = (x+2)^2 \cdot \operatorname{tg} x^4$; г) $y = x^5 - \cos x$.

Решение

Рассмотрим и преобразуем функцию $y(-x)$.

а) $y(-x) = (-x)^3 \arcsin(-x) = -x^3 \cdot (-\arcsin x) = x^3 \cdot \arcsin x = y(x)$.

Получили, что исходная функция четная.

б) $y(-x) = \frac{(-x)^3}{\cos(-x)} = \frac{-x^3}{\cos x} = -\frac{x^3}{\cos x} = -y(x)$.

Получили, что исходная функция нечетная.

в) $y(-x) = (-x+2)^2 \operatorname{tg}(-x)^4 = (2-x)^2 \operatorname{tg} x^4$.

Получили $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, таким образом, исходная функция является функцией общего вида.

г) $y(-x) = (-x)^5 - \cos(-x) = -x^5 - \cos x$.

Получили $y(-x) \neq y(x)$ и $y(-x) \neq -y(x)$, исходная функция является функцией общего вида.

Упражнение 9.4. Найдем период функции $y = \cos 4x$.

Решение

Воспользуемся условием периодичности функции:

$$\cos[4(x+T)] = \cos 4x \Rightarrow \cos(4x+4T) - \cos 4x = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -2\sin\frac{4x+4T-4x}{2} \cdot \sin\frac{4x+4T+4x}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sin 2T \cdot \sin(4x+2T) = 0.$$

Так как T не зависит от x, то решаем уравнение:

$$\sin 2T = 0 \Rightarrow 2T = \pi k, k \in Z \Rightarrow T = \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

Выбираем наименьшее положительное T.

Ответ: $T = \frac{\pi}{2}$.

Упражнение 9.5. Для функции $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$ найдем $f\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$.

Решение

Следует в выражение для $f(x)$ вместо x подставить $\frac{x-3}{x+3}$. Получаем

$$f\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = \left(\frac{x-3}{x+3} - 3\right) : \left(\frac{x-3}{x+3} + 3\right) =$$
$$= \frac{x-3-3x-9}{x+3} : \frac{x-3+3x+9}{x+3} = \frac{-2x-12}{4x+6} = -\frac{x+6}{2x+3}.$$

Ответ: $f\left(\frac{x-3}{x+3}\right) = -\frac{x+6}{2x+3}$.

Упражнение 9.6. Зная, что $f(x) = 4x - 1$, а $f(1 - 3z(x)) = 27 - 12x$, найдем $z(x)$.

Решение

Подставляя вместо x в $f(x)$ выражение $1 - 3z(x)$ и пользуясь условием, получаем $4(1 - 3z(x)) - 1 = 27 - 12x$. Отсюда $z(x) = x - 2$.

Упражнение 9.7. Найдем функцию, обратную к функции $y = x^2 + 6x - 1$, которая задана на множестве $x \in (-3; +\infty)$.

Решение

Выделим полный квадрат: $y = (x + 3)^2 - 10$. Получили квадратичную функцию, графиком которой является парабола с абсциссой вершины $x = -3$. Ветви ее направлены вверх. На множестве $x \in (-3; +\infty)$ исходная функция строго монотонна, следовательно, имеет обратную функцию. Выразим x через y:

$$(x + 3)^2 = y + 10 \Rightarrow |x + 3| = \sqrt{y + 10}.$$

По условию $x > -3$, следовательно, $|x + 3| = x + 3$. Получаем $x + 3 = \sqrt{y + 10}$, или $x = \sqrt{y + 10} - 3$. Переобозначаем переменные x и y и получаем $y = \sqrt{x + 10} - 3$. Эта функция и является обратной $f^{-1}(x)$ к $y = x^2 + 6x - 1$ на множестве $x \in (-3; +\infty)$.

Упражнение 9.8. Построим график функции $y = |y^2 + 4x + 1|$.

Решение

1. Преобразуем функцию, выделив полный квадрат: $y = |(x + 2)^2 - 3|$.
2. Строим график функции $y = x^2$.
3. Строим график функции $y = (x + 2)^2$, смещая график $y = x^2$ вдоль оси x на 2 единицы влево (рис. 9.26).

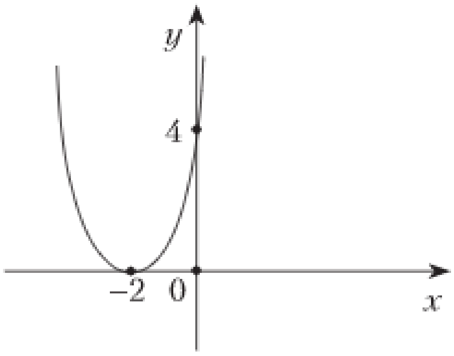


Рис. 9.26

4. Строим график функции $y = (x + 2)^2 - 3$, смещая предыдущий график вдоль оси y на 3 единицы вниз (рис. 9.27).

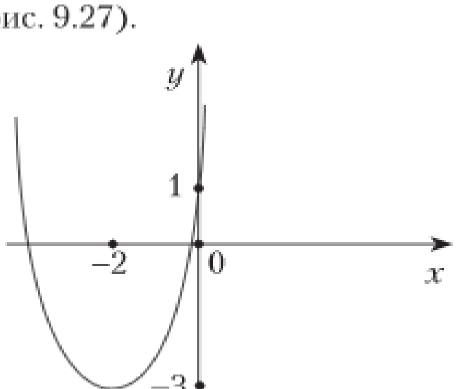


Рис. 9.27

5. Строим график функции $y = |(x + 2)^2 - 3|$, симметрично отображая относительно оси абсцисс часть параболы, расположенную ниже этой оси (рис. 9.28).

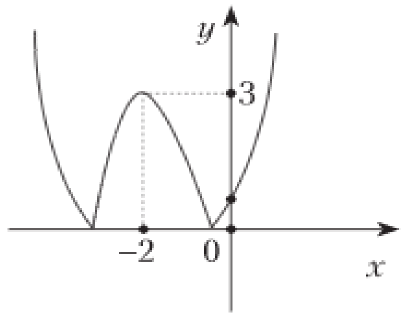


Рис. 9.28

Упражнение 9.9. Построим график функции $y = 3\sin 2x$.

Решение

1. Строим график функции $y = \sin x$.
2. Строим график функции $y = \sin 2x$, сжимая график $y = \sin x$ в два раза вдоль оси x (рис. 9.29).
3. Строим график функции $y = 3\sin 2x$, растягивая график $y = \sin 2x$ в три раза вдоль оси y (см. рис. 9.29).

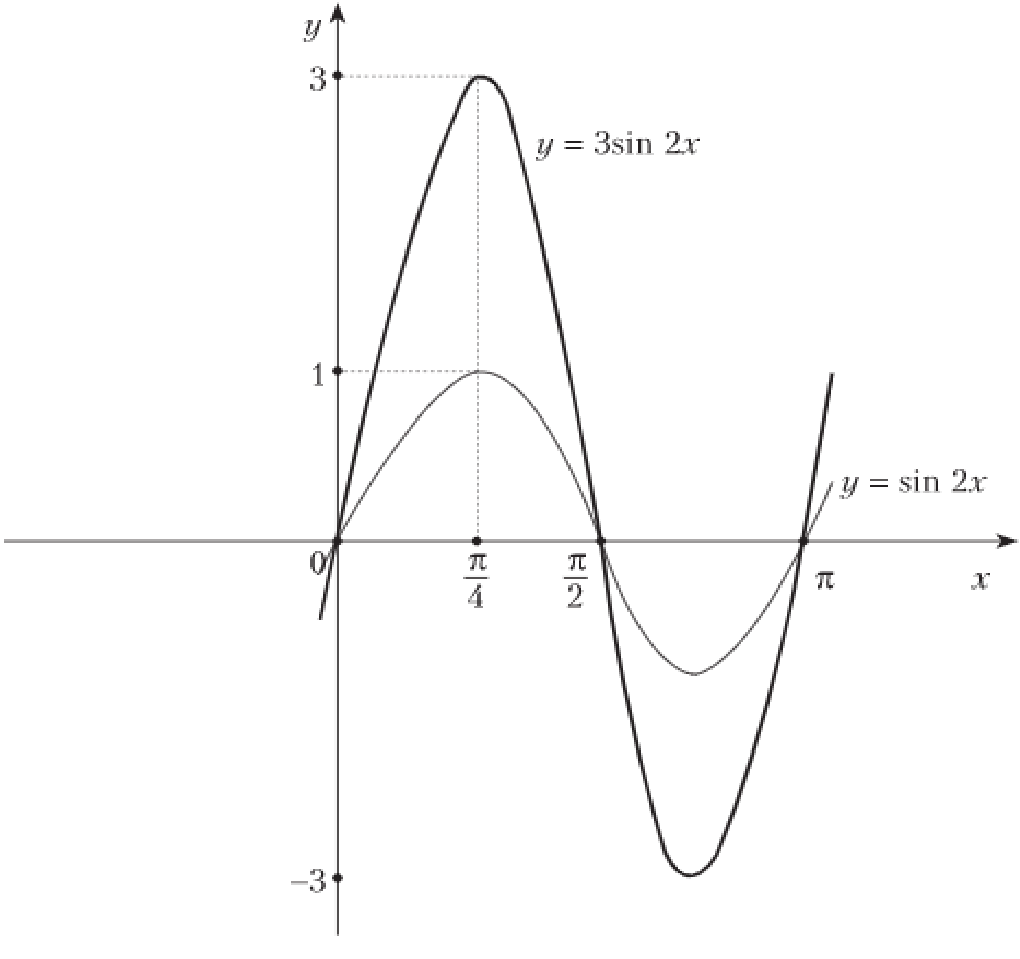


Рис. 9.29

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Найдите область определения функций:

а) $y = 2^{-\sqrt{x+1}} \cdot \lg x^2$; б) $y = \dfrac{2^x\sqrt{x^2+x+1}}{x-2}$; в) $y = \sqrt{\log_{0,1}\dfrac{3x-1}{x+3}}$;

г) $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2-4}}{\lg x}$; д) $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{x-1}}$; е) $y=\sqrt{\dfrac{\sqrt{4x-x^2-3}}{x-2}}$;

ж) $y=3^{\sqrt{6x-x^2}}\cdot\lg\cos x$; з) $y=\arccos\dfrac{2x+1}{x-1}$.

9.2. Найдите область значений функций:

а) $y=\pi+\operatorname{arctg} x$; б) $y=\arccos x-2\pi$; в) $y=\sin x-\cos x$; г) $y=3\sin x+4\cos x+1$;

д) $y=\sqrt{4x-x^2}$; е) $y=\dfrac{2x^2-1}{2x^2+3}$; ж) $y=\dfrac{2}{2x-x^2-5}$.

9.3. Исследуйте функции на четность-нечетность:

а) $y=\sin(x^4+3x^2+1)$; б) $y=\sin^2(x+1)$;

в) $y=\dfrac{\cos x}{\arcsin x}$; г) $y=\arccos^2 x$; д) $y=2^x\cdot\operatorname{arctg} x$; е) $y=\lg^2 x$;

ж) $y=\lg x^2$; з) $y=x^2\cdot\lg x^3$; и) $y=\cos x\cdot\arcsin x$.

9.4. Найдите период функций:

а) $y=\sin 8x$; б) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{4}$; в) $y=\sin^2 x$; г) $y=\cos\dfrac{x}{5}$.

9.5. Для функции $f(x)=\dfrac{2-3x}{4x-1}$ найдите $f\left(\dfrac{1+2x}{x-2}\right)$.

9.6. Зная, что $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$, а $f\left(\dfrac{3-g(x)}{2}\right)=6x$, найдите $g(x)$.

9.7. Найдите функцию, обратную к функции $y=x^2-8x+20$, которая задана на множестве $x\in(-\infty;4)$.

9.8. Постройте графики функций:

а) $y=2\lg x-1$; б) $y=\left|3+2x-x^2\right|$; в) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$; г) $y=2\operatorname{arctg} x$; д) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;

е) $y=2\cos\dfrac{x}{2}$; ж) $y=1-2\sin 2x$.

Глава 10
ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

10.1. Предел числовой последовательности

Определение 10.1. Если каждому натуральному числу n по некоторому закону поставить в соответствие определенное число a_n, то говорят, что в этом случае задана *числовая последовательность* $\{a_n\}$: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2), ..., a_n = f(n), ...$.

Сами числа a_1, a_2, a_3, ..., a_n называются *членами* последовательности, а число a_n — *общим* (*энным*) *членом* данной последовательности.

Примеры числовых последовательностей можно вспомнить из школьного курса математики. Арифметическая и геометрическая прогрессии являются числовыми последовательностями:

2, 5, 8, 11, ..., $(3n - 1)$ — арифметическая прогрессия;

2, –6, 18, –54, ..., $2 \cdot (-3)^{n-1}$, ... — геометрическая прогрессия.

Так как последовательность является функцией натурального аргумента, то понятия монотонности и ограниченности распространяются и на последовательности аналогичным, как и для функции, образом.

Последовательность может задаваться формулой ее общего члена, как в вышеуказанном примере ($a_n = 3n - 1$ и $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$), или рекуррентным способом: заданием первого члена (или нескольких первых членов) и правила нахождения следующего члена. Например приведенные прогрессии могут быть заданы так:

арифметическая — $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 3$;

геометрическая — $b_1 = 2, b_{n+1} = -3b_n$.

Одним из важнейших понятий в математическом анализе является понятие предела. *Предел* — это число (если таковое существует), к которому постоянно приближается функция при монотонном изменении ее аргумента; при этом функция может и не достигать своего предельного значения.

Записывают предел следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

где lim — сокращение слова, обозначающего предел; x_0 — предельное значение независимой переменной (аргумента); $f(x)$ — выражение, стоящее под знаком предела; $x \to x_0$ читается как «x стремится к x_0».

Вернемся к последовательностям и рассмотрим конкретный пример: $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Несложно заметить, что при неограниченном возрастании n

дробь $\frac{1}{n}$ постоянно уменьшается, но очевидно и то, что ни при каких сколь угодно больших значениях n дробь $\frac{1}{n}$ не станет равной нулю.

Перейдем теперь к определению предела числовой последовательности.

Определение 10.2. Число A называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности числа A найдется зависящий от величины этой окрестности такой номер члена последовательности, после которого все члены последовательности будут содержаться в упомянутой ε-окрестности числа A.

Данное определение можно записать, используя только логические символы (кванторы):

$$(A = \lim_{n\to\infty} a_n) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon): \forall n > N\ \left|a_n - A\right| < \varepsilon).$$

Пример 10.1

Можно проиллюстрировать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Зададим к примеру $\varepsilon = \frac{1}{10}$ (рис. 10.1).

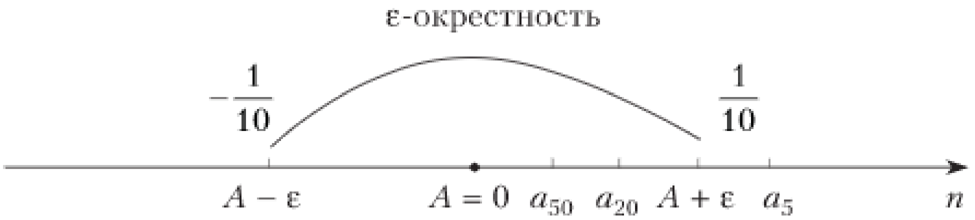


Рис. 10.1

Имеем $a_{10} = \frac{1}{10}, a_{11} = \frac{1}{11}, a_{12} = \frac{1}{12}$ и т.д. Получим, что *все* члены после десятого (N = 10) будут содержаться в ε-окрестности числа A, равного нулю. Задав, например, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ и рассмотрев аналогичный рисунок, получим, что опять-таки *все* члены после сотого (N = 100) будут содержаться в новой ε-окрестности числа A, равного нулю. И так для любой ε-окрестности имеем аналогичную ситуацию.

Что будет, если ошибочно утверждать, что искомый предел отличен от нуля, например $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \frac{1}{100}$? Тогда можно показать, что не для любой ε-окрестности найдется такой номер N члена последовательности, после которого *все* члены последовательности попадут в ε-окрестность. Если положить $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то аналогичный рисунок покажет, что уже начиная с десятого все члены последовательности будут содержаться в данной ε-окрестности числа $A = \frac{1}{100}$. Но если взять любое $\varepsilon < \frac{1}{100}$, например $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ (рис. 10.2), то несложно заметить, что a_{112}, а также члены последовательности с номерами, бо́льшими сто двенадцатого, будут находиться за пределами заданной ε-окрестности числа $A = \frac{1}{100}$, что противоречит определению предела последовательности.

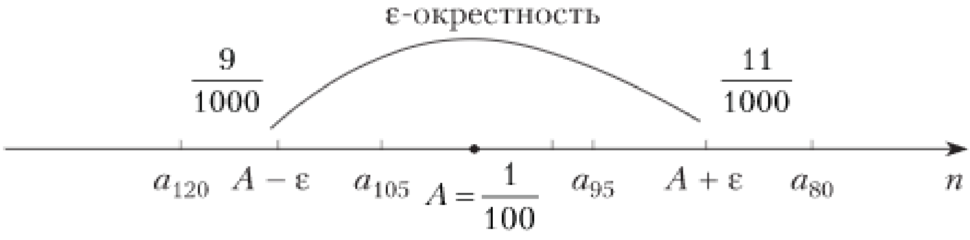


Рис. 10.2

Стоит подчеркнуть, что приведенные рассуждения не являются доказательством, а всего лишь иллюстрируют правильность или неправильность высказанных выше утверждений.

10.2. Предел функции

Рассмотрим теперь тот случай, когда независимая переменная может принимать любые, а не только натуральные значения.

Сначала сформулируем определение предела функции в бесконечности.

Определение 10.3. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при x, стремящемся к *бесконечности*, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности числа A найдется зависящее от нее число $S(\varepsilon)$, такое что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > S$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Сформулируем это определение с помощью логических символов:

$$(A = \lim_{x\to\infty} f(x)) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\, \exists S(\varepsilon) > 0 : \forall x : |x| > S \;\; |f(x) - A| < \varepsilon).$$

Рассмотрим геометрический смысл определения предела функции в бесконечности (рис. 10.3).

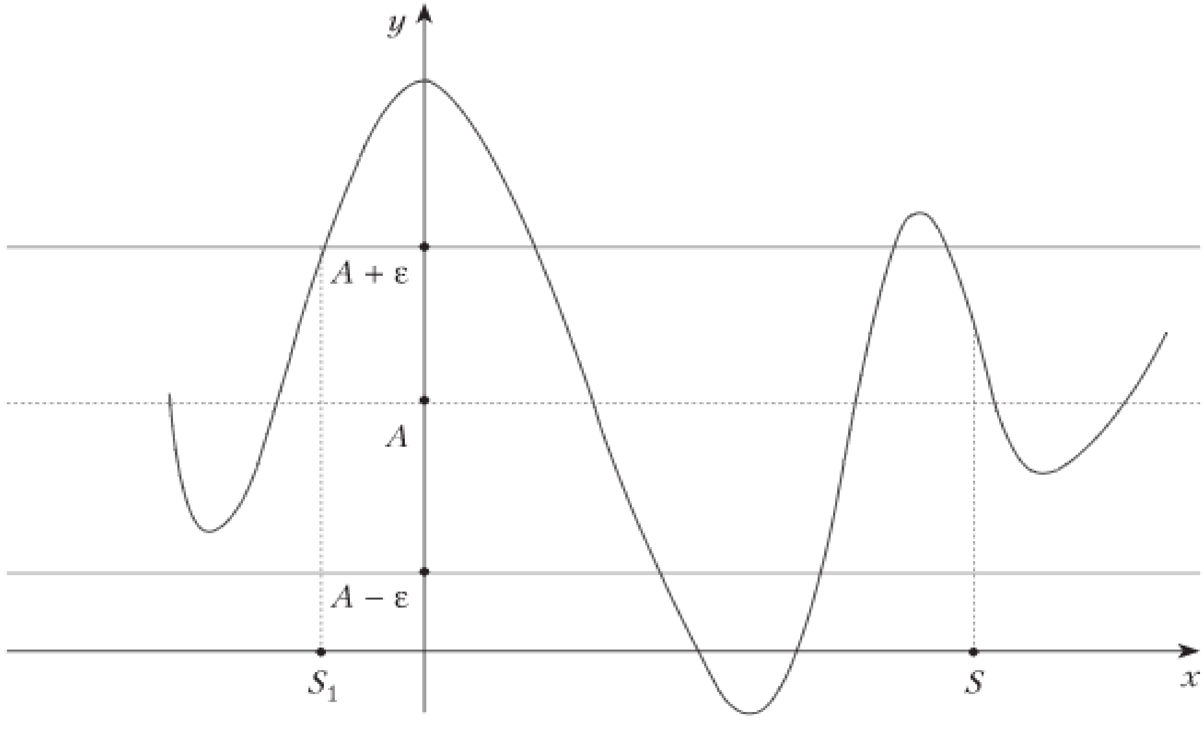


Рис. 10.3

Неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ равносильно тому, что $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$, т.е. все значения функции с определенного момента располагаются внутри полосы, ограниченной прямыми линиями $y=A+\varepsilon$ и $y=A-\varepsilon$, причем не имеет значения, насколько широкая или узкая эта полоса.

Но независимая переменная имеет не только неограниченное возрастание, но и может стремиться к какой-либо точке x_0.

Сформулируем определение предела функции в точке.

Определение 10.4. Пусть функция $y = f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0 за исключением, может быть, самой этой точки. Число A называется *пределом этой функции в точке* x_0, если для любой сколь угодно малой ε-окрестности числа A найдется зависящая от нее δ-окрестность числа x_0, такая что для всех x_0 из области определения функции, содержащихся в этой δ-окрестности, выполняется неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$.

Используя логические символы, получаем

$$(A=\lim_{x\to x_0} f(x)) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0\,\exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x\in X:0<\left|x-x_0\right|<\delta\quad \left|f(x)-A\right|<\varepsilon).$$

Рассмотрим данное определение на рис. 10.4.

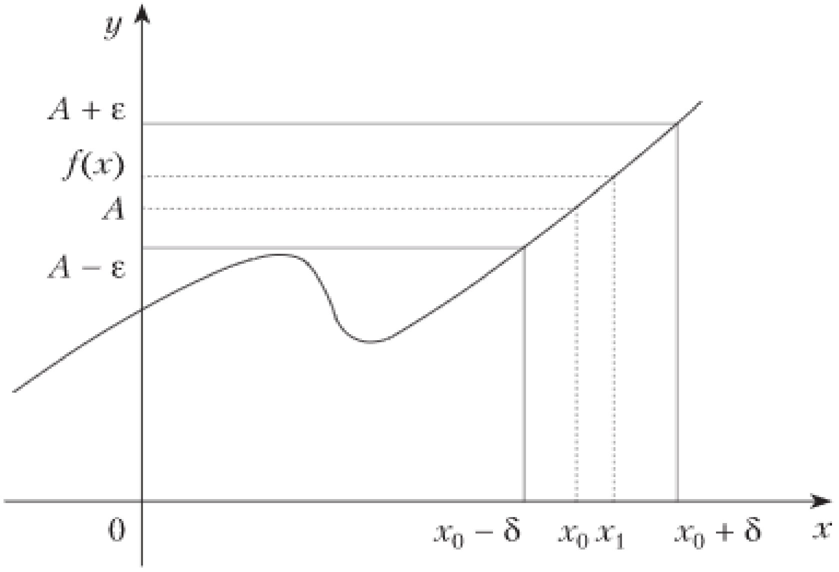


Рис. 10.4

Из рис. 10.4 очевидно, что какую бы точку x_1 из δ-окрестности точки x_0 мы бы ни взяли, значение функции в этой точке $f(x_1)$ обязательно попадет в ε-окрестность точки A. И если предположение о том, что $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ верно, то как бы мы ни изменяли (уменьшали) ε-окрестность, то все равно для каждой такой ε-окрестности найдется δ-окрестность точки x_0, в которой для всех x соответствующие им значения функции $f(x)$ будут содержаться в ε-окрестности точки A.

В некоторых рассматриваемых случаях (иногда это необходимо) аргумент стремится к своему предельному значению x_0, принимая только значения бо́льшие, чем x_0, или только меньшие, чем x_0. В этих случаях рассматриваются односторонние пределы функции справа от x_0 и слева от x_0 соответственно. Их обозначают $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

Разумеется, что если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$. Ситуация, когда эти односторонние пределы не будут равны между собой, будет рассмотрена в этой главе позже.

10.3. Бесконечно малые и бесконечно большие величины

Определение 10.5. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой величиной* при конкретном стремлении аргумента, если при этом стремлении предел этой функции равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0 (\infty)} \alpha(x) = 0.$$

Следует понимать, что бесконечно малая величина — это прежде всего переменная величина, а не какое-то, пусть даже очень маленькое, постоянное число.

Определение 10.6. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой величиной* при конкретном стремлении аргумента, если при этом стремлении предел этой функции равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 (\infty)} f(x) = \infty.$$

Необходимо заметить, что знак бесконечности не важен. Если предел функции равен $+\infty$ или $-\infty$, все равно эта функция является бесконечно большой величиной. Также не следует бесконечно большую (переменную) величину отождествлять с большим положительным постоянным числом.

Например $f(x) = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой величиной при стремлении аргумента к бесконечности $(\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0)$, является бесконечно большой величиной при стремлении аргумента к нулю $(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty)$ и не является ни бесконечно малой, ни бесконечно большой величиной при стремлении аргумента к любому постоянному числу, отличному от нуля $(\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_0}$, если $x_0 \neq 0)$.

Рассмотрим *свойства* бесконечно малых и бесконечно больших величин.

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной (под алгебраической суммой понимают как сложение, так и вычитание).

2. Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию (или на другую бесконечно малую величину) является бесконечно малой величиной.

3. Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой не равен нулю, является бесконечно малой величиной.

4. Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой не равен нулю, является бесконечно большой величиной.

5. Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции является бесконечно большой величиной.

6. Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, которая имеет конечный предел, является бесконечно большой величиной.

Сформулируем теорему о связи бесконечно малых величин с пределами функций.

Теорема 10.1. *Функция $f(x)$ имеет предел, равный A, при некотором стремлении аргумента тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой величины при том же стремлении аргумента.*

Необходимо подчеркнуть, что логическая связка «тогда и только тогда» является синонимом к высказыванию «необходимо и достаточно» или обозначению А $\Leftrightarrow$ Б, подразумевая: если выполнено утверждение А, то выполняется утверждение Б, и одновременно с этим если выполнено Б, то выполняется и утверждение А. При этом отпадает необходимость формулировать теорему, обратную данной. Но при доказательстве такого рода теорем приходится доказывать как прямое, так и обратное утверждение.

Доказательство. Приведем доказательство этой теоремы для случая $x \to x_0$. Доказательство для случая $x \to \infty$ аналогично.

Докажем прямое утверждение. Из условия имеем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Пользуясь определением предела функции в точке, получаем, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X$ и $x \neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x| < \delta$, справедливо $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначим разность $f(x) - A = \alpha(x)$, тогда последнее неравенство имеет вид $|\alpha(x)| < \varepsilon$, или $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, что согласно определению предела означает $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Из этого следует, что $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной. А так как $\alpha(x) = f(x) - A$, то $f(x) = A + \alpha(x)$, что и требовалось доказать.

Теперь докажем обратное утверждение. Из условия имеем $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая величина при $x \to x_0$, а значит, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Согласно определению предела функции в точке $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такая, что $\forall x \in X,\ x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, справедливо $|\alpha(x) - 0| < \varepsilon$, но $\alpha(x) = f(x) - A$, получаем $|f(x) - A| < \varepsilon$, откуда по определению предела функции в точке следует, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, что и требовалось доказать.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами существует связь, сформулируем ее в виде теоремы.

Теорема 10.2. *Если $\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной при некотором стремлении аргумента, то функция $f(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой величиной при том же стремлении аргумента. А также если $f(x)$ является бесконечно большой при некотором стремлении аргумента,* *то* $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ *является бесконечно малой величиной при том же стремлении аргумента.*

Бесконечно малые величины могут существенно отличаться друг от друга *порядком малости*, этот факт важен при решении задач.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые величины, рассмотрим предел их отношения:

а) если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$, то $\beta(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\alpha(x)$;

б) если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, чем $\beta(x)$;

в) если $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c$, где c — постоянное число, отличное от нуля ($c\neq 0$), то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют один и тот же порядок малости. Причем если $c=1$, то в этом случае говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — *эквивалентные бесконечно малые* величины, и записывается это как $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

10.4. Основные теоремы о пределах. Признаки существования предела

Сформулируем для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, которые имеют предел при некотором стремлении аргумента, основные теоремы о пределах. Пусть существуют $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0(\infty)}\varphi(x)=B$.

Теорема 10.3. *Функция не может иметь более одного предела.*

Важно понимать, что речь идет об одном конкретном стремлении аргумента.

Теорема 10.4. *Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме пределов этих функций*:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\pm\varphi(x))=A\pm B.$$

Теорема 10.5. *Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций*:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}(f(x)\cdot\varphi(x))=A\cdot B.$$

Теорема 10.6. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела* (*c — постоянное число*):

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}(c\cdot f(x))=c\cdot\lim_{x\to x_0(\infty)} f(x)=c\cdot A.$$

Теорема 10.7. *Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что предел делителя отличен от нуля*:

$$\lim_{x\to x_0(\infty)}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{A}{B},\ \text{где } B\neq 0,\ \varphi(x)\neq 0.$$

Теорема 10.8. *Если* $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$, *а* $\lim\limits_{u \to B} f(u) = A$, *то предел сложной функции* $f(\varphi(x))$ *тоже равен* A:

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = A.$$

Теорема 10.9. *Если в некоторой окрестности точки* x_0 *или при достаточно больших значениях* x $f(x) < \varphi(x)$, *то справедливо неравенство*

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} f(x) \le \lim_{x \to x_0(\infty)} \varphi(x) \quad (A \le B).$$

Использовать определение предела для ответа на вопрос о существовании этого предела не всегда бывает легко. В некоторых случаях удобнее использовать *признаки существования предела*. Сформулируем их в виде теорем.

Теорема 10.10. *Если числовая последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел.*

Различают два случая:

а) последовательность не убывает и ограничена сверху;

б) последовательность не возрастает и ограничена снизу.

Теорема 10.11. *Если значения функции* $f(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0 *или при достаточно больших* x *заключены между соответствующими значениями двух функций* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$, *имеющих один и тот же предел, равный* A, *то при том же стремлении аргумента функция* $f(x)$ *будет тоже иметь предел, равный* A.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$. По определению предела функции в точке для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X, x \ne x_0$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, будут справедливы два неравенства: $|\varphi(x) - A| < \varepsilon$ и $|g(x) - A| < \varepsilon$. Из этих неравенств следует, что $A - \varepsilon < \varphi(x) < A + \varepsilon$ и $A - \varepsilon < g(x) < A + \varepsilon$. По условию $\varphi(x) \le f(x) \le g(x)$, из этого следует, что для $f(x)$ справедливо $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, откуда $|f(x) - A| < \varepsilon$, что при использовании определения предела функции в точке означает $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, что и требовалось доказать.

10.5. Первый и второй замечательные пределы

Немного истории

Очень часто возникает вопрос о происхождении термина «замечательные пределы». По одной версии — это «замечательные математики» трудились над их созданием, по другой — как «замечательны» сами пределы, что помогают при решении ряда задач. Но, на наш взгляд, исторические корни следует искать в пересечении двух аспектов: особенностях перевода на русский язык и методологии.

В оригинальной литературе два «замечательных предела» не находятся в тесной связи друг с другом. Близким переводом первого является «предел, представляющий особый интерес», второго — «формула, представляющая интерес». С точки зрения методологии их действительно можно сблизить и объединить общим, не очень длинным названием. Так и родились в русскоязычной литературе первый и второй замечательные пределы, которые были когда-то *замечены* великими математиками и которые сегодня нужно *заметить* при решении задач.

Перейдем непосредственно к этим пределам. *Первым замечательным пределом* называется равенство

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Доказательство начнем с рассмотрения рис. 10.5.

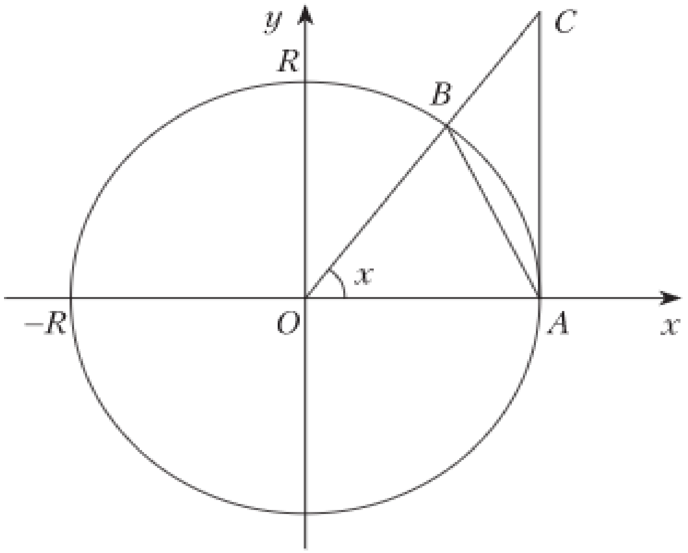


Рис. 10.5

На этом рисунке изображена окружность радиуса R, OB — радиус, который образует с осью абсцисс угол x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Из рисунка очевидно, что S_1 (площадь треугольника OBA) меньше S_2 (площади сектора круга OBA), которая, в свою очередь, меньше S_3 (площади треугольника OCA).

Площадь треугольника OBA

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot R \cdot R \sin x = \frac{1}{2} R^2 \sin x.$$

Площадь сектора OBA

$$S_2 = \frac{1}{2} R^2 \cdot x.$$

Площадь треугольника OCA

$$S_3 = \frac{1}{2} OA \cdot OC = \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} R^2 \cdot \operatorname{tg} x.$$

Имеем:

$$\frac{1}{2} R^2 \sin x < \frac{1}{2} R^2 x < \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x.$$

Разделим каждую часть неравенства на $\frac{1}{2} R^2 \sin x$ (знаки сохранятся, так как $\frac{1}{2} R^2 \sin x > 0$):

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

(так как $x > 0$, $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$). Функции $\cos x$ и $\dfrac{\sin x}{x}$ четные, поэтому эти неравенства (система неравенств) справедливы и для $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2};0\right)$.

Имеем $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. Используя теорему 10.11 из признаков существования предела, получаем, что предел функции $\dfrac{\sin x}{x}$, «зажатой» между ними, тоже равен единице: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, что и требовалось доказать.

Стоит отметить: из формулировки первого замечательного предела следует, что $\sin x$ и x являются эквивалентными бесконечно малыми величинами при $x \to 0$ ($\sin x \sim x$).

Вторым замечательным пределом называется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Здесь e — это постоянное число, которое точным образом не представимо, так же как и известное из геометрии число π. Число e, которое еще называют числом Эйлера или неперовым числом, считают примерно равным 2,7 ($e \approx 2{,}7$). Данное число широко используется в качестве оснований показательной функции $y = e^x$ (экспоненты) и логарифмической функции $y = \log_e x$. В последнем случае применяют более короткую запись $y = \ln x$ и название — натуральный логарифм x.

Формула второго замечательного предела верна не только для $n \in N$, но и для x, которое может принимать любые значения на числовой оси:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Сделаем замену $y = \dfrac{1}{x}$. Тогда если $x \to \infty$, то $y \to 0$ (по теореме 10.2 о связи между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами), а $x = \dfrac{1}{y}$. Получим еще одно равенство второго замечательного предела:

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

А в общем случае надо понимать, что x и y в формулах являются бесконечно малыми величинами, т.е.

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$$

Широкое применение формула второго замечательного предела имеет в экономике при рассмотрении задачи о непрерывном начислении процентов (сложные проценты).

10.6. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей различных типов

Чтобы вычислить предел элементарной функции при стремлении аргумента к значению из области определения функции, следует в выражение функции, стоящей под знаком предела, подставить вместо аргумента его предельное значение. Также поступают и когда $x \to \infty$, подставляя вместо x бесконечно большую величину и используя при этом свойства бесконечно больших величин.

Пример 10.2

Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6}{2x}$.

Решение

Подставляем вместо x в функцию, стоящую под знаком предела, 2, получаем $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-6}{2x}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8-6}{4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 10.3

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^4}$.

Решение

Знаменатель дроби x^4 при $x \to \infty$ является бесконечно большой величиной. По теореме 10.2 $\dfrac{1}{x^4}$ при $x \to \infty$ является бесконечно малой величиной, по второму свойству бесконечно малых и бесконечно больших величин $\dfrac{3}{x^4}$ тоже является бесконечно малой при $x \to \infty$. Используя определение бесконечно малой величины, имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^4}=0$ (можно было вместо использования второго свойства бесконечно малых вынести постоянный множитель 3 за знак предела по теореме 10.6 о пределах).

Пример 10.4

Найдем $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-16}{x^2-9}$.

Решение

Знаменатель дроби x^2-9 при $x \to 3$ является бесконечно малой величиной. По теореме 10.2 $\dfrac{1}{x^2-9}$ при $x \to 3$ является бесконечно большой величиной. Числитель дроби является функцией, предел которой отличен от нуля: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-16)=-7$. По четвертому свойству бесконечно малых и бесконечно больших величин $\dfrac{x^2-16}{x^2-9}$ является бесконечно большой величиной. Используя определение бесконечно большой величины, имеем $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-16}{x^2-9}=\infty$.

Но не каждая подстановка предельного значения в функцию, стоящую под знаком предела, вместо независимой переменной может сразу привести к ответу задачи. Случаи, в которых такая подстановка не дает значения предела, называются *неопределенностями*, и записываются они в квадратных скобках. К неопределенностям относятся следующие результаты подстановок предельных значений аргумента в функцию под знаком предела:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right],\left[\frac{0}{0}\right],[\infty-\infty],[0\cdot\infty],[1^\infty],[\infty^0],[0^0].$$

Не стоит забывать, что 0 в данном случае выступает как бесконечно малая величина и нельзя трактовать, например, $[0\cdot\infty]$, как «умножение нуля на какое-то число».

Пытаться устранить неопределенность следует при помощи алгебраических преобразований.

Пример 10.5

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}(2x^4-5x^3-9x)$.

Решение

Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Вынесем за скобку x в наибольшей степени: $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\dfrac{5}{x}-\dfrac{9}{x^3}\right)\right]$. Воспользуемся теоремой 10.5 о пределах:

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\frac{5}{x}-\frac{9}{x^3}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}x^4\cdot\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}-\frac{9}{x^3}\right).$$

Величина x^4 является бесконечно большой при $x\to\infty$. Воспользуемся теоремой 10.4:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{5}{x}-\frac{9}{x^3}\right)=\lim_{x\to\infty}2-\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}-\lim_{x\to\infty}\frac{9}{x^3}=2-0-0=2,$$

так как $\dfrac{5}{x}$ и $\dfrac{9}{x^3}$ при $x\to\infty$ являются бесконечно малыми величинами, а предел постоянной величины равен этой постоянной. По четвертому свойству бесконечно малых и бесконечно больших величин имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^4\left(2-\frac{5}{x}-\frac{9}{x^3}\right)\right]=\infty,$$

т.е. искомый предел равен ∞.

Приведенные в решении выкладки и ссылки, а также ответ данной задачи будем использовать как заранее известные факты при решении последующих примеров.

Для решения следующих примеров можно предложить классификацию по виду неопределенности, виду функции под знаком предела и предельного значения аргумента.

1-й тип. Рассматриваем примеры вида $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — сложные степенные или показательные функции. В случае только степенных функций следует и в числителе, и в знаменателе дроби вынести за скобку x с наибольшим показателем степени среди всех слагаемых дроби. При наличии показательной функции следует и в числителе, и в знаменателе выносить за скобки наиболее быстро возрастающее слагаемое среди всех слагаемых дроби. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

Пример 10.6

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x^4}{2x^4-5x-3}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Вынесем за скобку в числителе и знаменателе x^4, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x^4}{2x^4-5x-3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(\dfrac{2}{x^2}-3\right)}{x^4\left(2-\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}-3}{2-\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}}=\frac{0-3}{2-0-0}=-\frac{3}{2},$$

так как $\dfrac{2}{x^2},\dfrac{5}{x^3}$ и $\dfrac{3}{x^4}$ являются бесконечно малыми величинами при $x\to\infty$.

Пример 10.7

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2+5x+7}{x^3-3x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Вынесем за скобку в числителе и знаменателе x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{10}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}}{1-\dfrac{3}{x^2}}=\frac{0+0+0}{1-0}=0,$$

так как $\dfrac{10}{x},\dfrac{5}{x^2},\dfrac{7}{x^3}$ и $\dfrac{3}{x^2}$ являются бесконечно малыми величинами при $x\to\infty$.

Пример 10.8

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x^2-5x}{6x^4-9x^3-8x^2}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Вынесем за скобку в числителе и знаменателе x^5, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(1-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)}{x^5\left(\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}}{\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8}{x^3}}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

Так как $\frac{2}{x^3},\frac{5}{x^4},\frac{6}{x},\frac{9}{x^2}$ и $\frac{8}{x^3}$ являются бесконечно малыми величинами, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^3}-\frac{5}{x^4}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{6}{x}-\frac{9}{x^2}-\frac{8}{x^3}\right)=0$ (знаменатель является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$). По теореме 10.2 дробь является бесконечно большой величиной при $x\to\infty$, а по определению бесконечно большой величины ее предел равен бесконечности.

Пример 10.9

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2}-4x^2}{\sqrt[3]{x^6-3x}-5x-4}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Чтобы правильно определить наибольшую степень x слагаемых дроби, следует сначала вынести x с наибольшим показателем степени в выражениях под знаками радикала:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^4\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}-4x^2}{\sqrt[3]{x^6\left(1-\frac{3}{x^5}\right)}-5x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-4x^2}{x^2\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^5}}-5x-4}.$$

Теперь ясно, что наибольшая степень x — вторая, и, значит, следует выносить в числителе и знаменателе x^2 за скобки:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-4\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^5}}-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}-4}{\sqrt[3]{1-\frac{3}{x^5}}-\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{\sqrt{4+0}-4}{\sqrt[3]{1-0}-0-0}=\frac{2-4}{1}=-2,$$

так как $\frac{1}{x^2},\frac{3}{x^5},\frac{5}{x}$ и $\frac{4}{x^2}$ являются бесконечно малыми величинами при $x\to\infty$.

Пример 10.10

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-4}{2x+\sqrt{x^2-1}}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Как и в предыдущем примере, вынесем сначала x^2 под знаком радикала: $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x-4}{2x+\sqrt{x^2\cdot\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}$. Но в отличие от предыдущего примера, в котором $\sqrt{x^4}=x^2$ и $\sqrt[3]{x^6}=x^2$, в нашем случае $\sqrt{x^2}=|x|$, и, следовательно, необходимо рассмотреть два случая раскрытия модуля в выражении

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{9x-4}{2x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}.$$

а) Когда $x\geq 0$ $|x|=x$, это означает $x\to+\infty$. Имеем

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{9x-4}{2x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(9-\frac{4}{x}\right)}{x\left(2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{9-\frac{4}{x}}{2+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{9-0}{2+\sqrt{1-0}}=3.$$

б) Когда $x<0$, это означает $x\to-\infty$. Имеем

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{9x-4}{2x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(9-\frac{4}{x}\right)}{x\left(2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{9-\frac{4}{x}}{2-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\frac{9-0}{2-\sqrt{1-0}}=9.$$

Итак, ответ: 3 при $x\to+\infty$; 9 при $x\to-\infty$.

Рассмотрение двух или одного случаев зависит от области определения функции под знаком предела. Например, в задании 10.4 (5) практикума данной главы следует рассматривать только случай $x\to+\infty$, так как, учитывая область определения функции, x не может быть отрицательным.

Пример 10.11

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4^x+3^{x-1}}{4^{x+1}-3^x}$.

Решение

Удобнее сначала привести все основания показательных функций к одной и той же степени, предварительно ее выбрав. В нашем случае это степень x:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{4^x+\frac{3^x}{3}}{4\cdot4^x-3^x}.$$

Так как показательная функция при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ ведет себя по-разному, следует рассмотреть два случая.

а) Если $x\to+\infty$, то показательная функция $y=a^x$ стремится к $+\infty$ при $a>1$. Быстрее будет возрастать функция с бóльшим основанием, поэтому выносить следует 4^x:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x\left(1-\frac{3^x}{3\cdot 4^x}\right)}{4^x\left(4-\frac{3^x}{4^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x}{4-\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\frac{1-0}{4-0}=\frac{1}{4},$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0$ (см. график показательной функции с основанием, меньшим единицы, на рис. 9.8).

б) Если $x\to-\infty$, то показательная функция $y=a^x$ стремится к $+\infty$ при $0<a<1$, а показательная функция с основанием $a>1$ при $x\to-\infty$ будет стремиться к нулю (см. рис. 9.7). При решении примеров данного типа мы формируем бесконечно малые величины, поэтому в нашем случае для формирования бесконечно малых величин выносим за скобку в числителе и знаменателе дроби 3^x (чтобы получить в итоге основание больше единицы):

$$A=\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x\left(\frac{4^x}{3^x}+\frac{1}{3}\right)}{3^x\left(\frac{4\cdot 4^x}{3^x}-1\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x+\frac{1}{3}}{4\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^x-1}=\frac{0+\frac{1}{3}}{0-1}=-\frac{1}{3},$$

так как $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x=0$ (см. рис. 9.7).

В итоге ответ: $\frac{1}{4}$ при $x\to+\infty$; $-\frac{1}{3}$ при $x\to-\infty$.

2-й тип. Рассматриваем примеры вида $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ с неопределенностью вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ — степенные функции. В данном случае следует разложить на множители и числитель, и знаменатель дроби или домножить и числитель, и знаменатель на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения (см. школьный курс математики). Неопределенность устраняется после сокращения дроби.

Пример 10.12

Найдем $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Раскладываем на множители и числитель, и знаменатель дроби. Знаменатель — по формуле сокращенного умножения $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, числитель — по формуле разложения на множители квадратного трехчлена $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Получим

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)}.$$

Сократим дробь и подставим предельное значение аргумента в сокращенную дробь:

$$A=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+2}=\frac{2-3}{2+2}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 10.13

Найдем $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt{x+1}-3}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Так как числитель содержит кубический корень, то его нужно дополнять до разности кубов $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, а знаменатель, содержащий квадратный корень, — дополнять до разности квадратов. Получим

$$\lim_{x\to 8}\frac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{x+1}+3)}{(\sqrt{x+1}-3)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{x+1}+3)}=\lim_{x\to 8}\frac{(x-8)(\sqrt{x+1}+3)}{(x+1-9)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{x+1}+3}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{\sqrt{8+1}+3}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

3-й тип. Рассматриваем примеры с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$. Если функция, стоящая под знаком предела, представляет собой алгебраическую сумму дробей, то неопределенность или устраняется, или приводится ко второму типу после приведения дробей к общему знаменателю. Если же функция под знаком предела представляет собой алгебраическую сумму иррациональных выражений, то неопределенность или устраняется, или приводится к первому типу путем домножения и деления упомянутой функции на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения.

Пример 10.14

Найдем $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{7x-6}{x^3-27}\right)$.

Решение

Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Приведем дроби к общему знаменателю, предварительно разложив знаменатель второй дроби на множители:

$$A=\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{7x+6}{(x-3)(x^2+3x+9)}\right)\lim_{x\to 3}\frac{x^2+3x+9-7x-6}{(x-3)(x^2+3x+9)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-4x+3}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\left[\frac{0}{0}\right].$$

Получили предел второго типа. Следует числитель дроби, представляющий квадратный трехчлен, разложить на множители (знаменатель дроби на множители разложен):

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x^2+3x+9)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x^2+3x+9}=\frac{3-1}{9+9+9}=\frac{2}{27}.$$

Пример 10.15

Найдем $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+6x-8})$.

Решение

Имеем неопределенность вида $[\infty-\infty]$. Домножим и разделим (чтобы не нарушить знак равенства) функцию, стоящую под знаком предела, на сопряженное выражение, приводящее к разности квадратов:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+6x-8})=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x+1}-\sqrt{x^2+6x-8})(\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+6x+8})}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+6x+8}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+1-x^2-6x+8}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+6x+8}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+9}{\sqrt{x^2+3x+1}+\sqrt{x^2+6x-8}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Получили предел первого типа:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+9}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+9}{|x|\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}}.$$

По условию нашего примера $x\to+\infty$, а значит, $|x|=x$ по определению модуля, следовательно:

$$A=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+9}{x\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+x\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-3+\frac{9}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{9}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{6}{x}-\frac{8}{x^2}}}=\frac{-3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0-0}}=-1{,}5,$$

так как $\frac{9}{x},\frac{3}{x},\frac{1}{x^2},\frac{6}{x}$ и $\frac{8}{x^2}$ являются бесконечно малыми величинами при $x\to+\infty$.

4-й тип. Рассматриваем примеры с неопределенностью вида $[1^\infty]$. Функция, стоящая под знаком предела, в этом случае является степенно-показательной. Неопределенность устраняется при помощи выделения *второго замечательного предела*. Чтобы его выделить, основание степенно-показательной функции должно представлять собой сумму единицы и бесконечно малой величины. Если в основании функции, стоящей под знаком предела, стоит дробь, то следует выделить целую часть этой дроби, которая должна равняться единице.

Пример 10.16

Найдем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+4}\right)^{-9x^2}$.

Решение

Имеем под знаком предела степенно-показательную функцию. Найдем ее предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{3x^2+4}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\dfrac{4}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x^2}}{3+\dfrac{4}{x^2}}=\frac{3-0}{3+0}=1.$$

По теореме 10.1 данную дробь можно представить в виде суммы единицы и бесконечно малой величины. Выделим целую часть дроби:

$$\frac{3x^2-1}{3x^{+4}}=\frac{3x^2+4-5}{3x^2+4}=\frac{3x^2+4}{3x^2+4}+\frac{-5}{3x^2+4}=1+\frac{-5}{3x^2+4}.$$

Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5}{3x^2+4}=0$, следовательно, $\alpha(x)=\dfrac{-5}{3x^2+4}$ является бесконечно малой величиной при $x\to\infty$. Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Домножим показатель степени на выражение $\alpha(x)\cdot\dfrac{1}{\alpha(x)}$, это действие не нарушает знака равенства:

$$A=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+4}\right)^{-9x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x^2+4}\right)^{\frac{-5}{3x^2+4}\cdot\frac{3x^2+4}{-5}(-9x^2)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-5}{3x^2+4}\right)^{\frac{3x^2+4}{-5}}\right]^{\frac{45x^2}{3x^2+4}}.$$

Согласно второму замечательному пределу

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{3x^2+4}\right)^{\frac{3x^2+4}{-5}}=e,$$

таким образом,

$$A=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{45x^2}{3x^2+4}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{45x^2}{x^2\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{45}{3+\frac{4}{x^2}}}=e^{15}.$$

Пример 10.17

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{6x+2}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x}}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Выделим целую часть дроби:

$$\frac{6x+2}{3x+2}=\frac{3x+3x+2}{3x+2}=\frac{3x}{3x+2}+\frac{3x+2}{3x+2}=1+\frac{3x}{3x+2}.$$

Величина $\alpha(x)=\dfrac{3x}{3x+2}$ является бесконечно малой при $x\to 0$. Сделаем преобразования, аналогичные предыдущему примеру:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{6x+2}{3x+2}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x}{3x+2}\cdot\frac{3x+2}{3x}\cdot\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(\left(1+\frac{3x}{3x+2}\right)^{\frac{3x+2}{3x}}\right)^{\frac{6x}{x(3x+2)}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6}{3x+2}}=e^{\frac{6}{3\cdot 0+2}}=e^3.$$

Пример 10.18

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+5)-\ln 5}{2x}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, но ее можно преобразовать к виду $[1^\infty]$, используя свойства логарифмов $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ и $n\log_a x = \log x^n$. Получим

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+5)-\ln 5}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\cdot\ln\frac{x+5}{5}\right) = \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x+5}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{x}{5}+\frac{5}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x\to 0}\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2x}}.$$

Так как логарифмическая функция непрерывна, то перестановка местами символов lim и ln не повлечет нарушения знака равенства, поэтому

$$A = \ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{2x}} = \ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{x}{5}\cdot\frac{5}{x}\cdot\frac{1}{2x}} = \ln\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x}{5}\right)^{\frac{5}{x}}\right]^{\frac{x}{10x}} = \ln e^{\frac{1}{10}} = 0{,}1.$$

5-й тип. Рассматриваем примеры, сводящиеся к первому замечательному пределу $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. Выражение, стоящее под знаком предела, должно содержать тригонометрические или обратные тригонометрические функции.

Пример 10.19

Найдем $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x}$.

Решение

Сделаем замену $y = 5x$, откуда $x = \frac{y}{5}$, при $x \to 0$ новая переменная $y \to 0$. После замены имеем

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{2x} = \lim_{y\to 0}\frac{5\sin y}{2y}.$$

Вынесем постоянный множитель за знак предела, используя теорему 10.6:

$$A = \frac{5}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = \frac{5}{2}\cdot 1 = 2{,}5.$$

В последующих примерах мы будем использовать выкладки, приведенные в этом решении, как заранее известные факты, расширив тем самым формулировку первого замечательного предела до следующего равенства:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\alpha(x)}{\sin\alpha(x)} = 1.$$

Пример 10.20

Найдем $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$.

Решение

Сделаем замену $\operatorname{arctg} x = y \Rightarrow x = \operatorname{tg} y$. При $x \to 0$ новая переменная $y \to 0$ (см. рис. 9.17). После замены имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0}\frac{y\cdot\cos y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}\cdot\lim_{y\to 0}\cos y = 1\cdot 1 = 1,$$

так как первый сомножитель представляет собой первый замечательный предел, а $\cos 0 = 1$.

Пример 10.21

Найдем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}}$.

Решение

Имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Сначала удобнее сделать замену $y = \frac{\pi}{2} - x$, откуда $x = \frac{\pi}{2-y}$. При $x \to \frac{\pi}{2}$ новая переменная $y \to 0$. После замены имеем

$$A = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{2}{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}} = \lim_{y\to 0}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]^{\frac{2}{(-y)^2}} = \lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{2}{y^2}}.$$

Сделаем преобразования, приводящие ко второму замечательному пределу:

$$A = \lim_{y\to 0}[1+(\cos y-1)]^{\frac{2}{y^2}} = \lim_{y\to 0}[1+(\cos y-1)]^{\frac{1}{\cos y-1}(\cos y-1)\frac{2}{y^2}} = e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{2(\cos y-1)}{y^2}}.$$

Найдем предел показателя степени, используя первый замечательный предел:

$$\lim_{y\to 0}\frac{2(\cos y-1)}{y^2} = -2\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{y^2} = -2\lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\frac{y}{2}}{y^2} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin^2\frac{y}{2}}{\frac{y^2}{4}} =$$

$$= -\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}} = -\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} = -1.$$

Таким образом, $A = e^{-1}$.

Используя решение примера 10.21, можно в дальнейшем еще расширить рамки формулировки первого замечательного предела до равенства

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin^n\alpha(x)}{(\alpha(x))^n} = 1.$$

Решения многих примеров можно существенно укоротить, используя замену одних бесконечно малых величин на другие, им эквивалентные. Основан этот способ на том, что предел отношения двух эквивалентных бесконечно малых величин равен единице и замена одной на эквивалентную ей другую бесконечно малую величину не изменит знака равенства. Приведем примеры эквивалентных бесконечно малых величин при $x \to 0$ (некоторые из них были нами уже получены ранее, а остальные легко доказываются при использовании приемов и методов решений предыдущих примеров):

$$\sin x \sim x; e^x - 1 \sim x; \ln(1+x) \sim x; (1+x)^m \sim 1+mx;$$

$$\arcsin x \sim x; arctgx \sim x; 1-\cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

Причем во всех этих формулах вместо x может подразумеваться $a(x)$ — бесконечно малая величина.

Пример 10.22

Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{4x}$.

Решение

Вместо того чтобы делать замену $y = e^{5x} - 1$, приводящую ко второму замечательному пределу по аналогии с решением примера 10.18, можно воспользоваться эквивалентными бесконечно малыми: так как при $x \to 0$ $\alpha(x) = 5x$ тоже стремится к нулю, то $e^{5x} - 1 \sim 5x$. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

В данном параграфе мы не рассматриваем неопределенности видов $[0\cdot\infty]$, $[0^0]$ и $[\infty^0]$. Они могут быть устранены путем применения правила Лопиталя, которое будет рассматриваться в параграфе 11.5.

10.7. Непрерывность функции. Точки разрыва функций. Асимптоты

Определение 10.7. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она в этой точке определена и имеет конечный предел при $x \to x_0$, равный значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$ (см. окончание параграфа 10.2).

Имеет место еще одно определение непрерывности функции в точке.

Определение 10.8. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в этой точке и бесконечно малому приращению ее аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$.

Осмыслив определение непрерывности функции в точке, можно понять, что в этом случае возможна перестановка символов предела и функции: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$. Этим равенством мы уже воспользовались при вычислении пределов.

Рассмотрим *свойства функций, непрерывных в точке*.

1. Если функции $f(x)$ и $y(x)$ непрерывны в некоторой точке, то их алгебраическая сумма, произведение и частное являются функциями, непрерывными в этой точке (для частного знаменатель должен быть отличен от нуля).

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность точки x_0, для всех точек которой справедливо неравенство $f(x) > 0$.

3. Если функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 ($u_0 = \varphi(x_0)$), то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ тоже непрерывна в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x))$.

4. Функция, обратная к монотонной и непрерывной функции, является непрерывной.

Определение 10.9. Функция называется *непрерывной на множестве*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Из этого определения следует, что всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Рассмотрим *свойства функций непрерывных на отрезке*. Сформулируем их в виде теорем.

Теорема 10.12 (первая теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она на этом отрезке ограничена.*

Теорема 10.13 (вторая теорема Вейерштрасса). *Если функция непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значений.*

Теорема 10.14 (Теорема Больцано — Коши). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и значения этой функции на концах отрезка имеют разные знаки, то в интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна точка, значение функции в которой равно нулю.*

Следствие из теоремы 10.14. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(b) > f(a)$, то в интервале $(a; b)$ найдется хотя бы одна точка x_0, для которой справедливо $f(a) < f(x_0) < f(b)$.

Определение 10.10. Если в какой-либо точке функция не является непрерывной, то данная точка называется *точкой разрыва функции*, а сама функция называется *разрывной в этой точке*.

Из определения следует, что x_0 будет точкой разрыва функции $f(x)$, если не выполнено какое-нибудь из условий равенства $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)$. Приведем *классификацию точек разрыва*.

1. Разрыв *второго рода* (неустранимый). Точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ второго рода, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ бесконечен или не существует (см. рис. 9.3 и 9.4, где $x_0 = 0$ — точка разрыва функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = \dfrac{1}{x^2}$ второго рода, рис. 9.13, где $x_0 = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$, — точки разрыва функции $y = \operatorname{tg} x$ второго рода, и рис 9.14, где $x_0 = \pi n$, $n \in Z$, — точки разрыва функции $y = \operatorname{ctg} x$ второго рода).

Возможен и такой вариант, как на рис. 10.6, где изображенная функция при $x_0 = 0$ имеет разрыв второго рода.

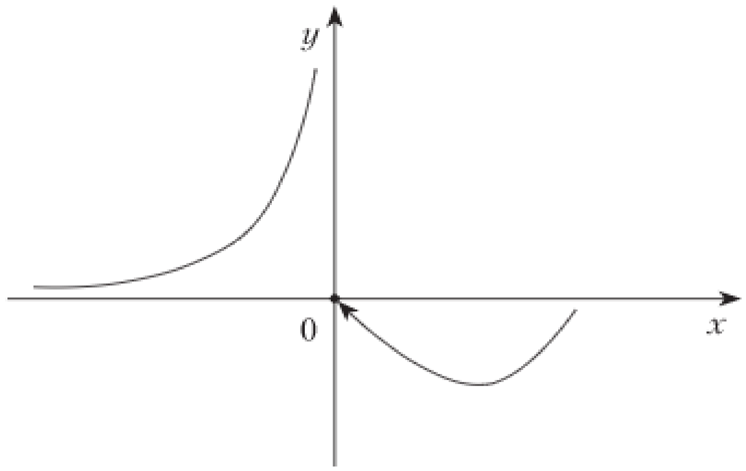


Рис. 10.6

2. Разрыв *первого рода неустранимый*. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, не равные друг другу, то в этой точке функция $f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

В качестве примера можно привести функцию, заданную в кусочно-непрерывном виде (рис. 10.7):

$$f(x)=\begin{cases} x+1 \text{ при } x\geq 0, \\ -x-1 \text{ при } x<0. \end{cases}$$

Имеем $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=-1$.

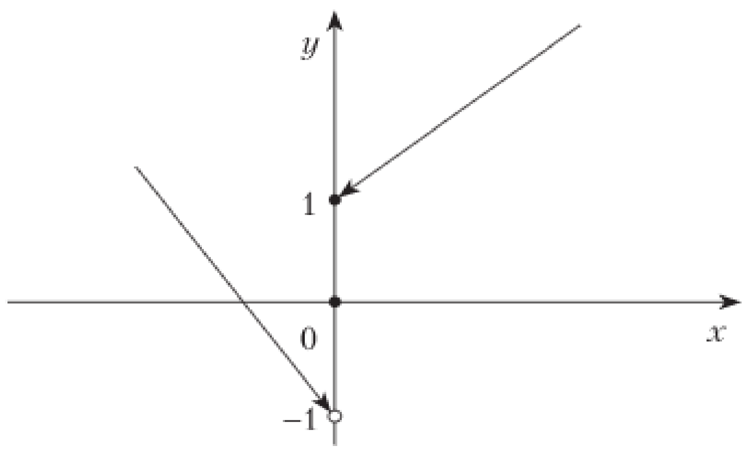


Рис. 10.7

Точка $x_0=0$ является точкой неустранимого разрыва первого рода.

3. Разрыв *первого рода устранимый* (или просто устранимый). Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы, равные между собой, но не равные значению функции в этой точке, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq f(x_0).$$

Например, рассмотрим функцию $y=\dfrac{x^3}{x}$ (рис. 10.8).

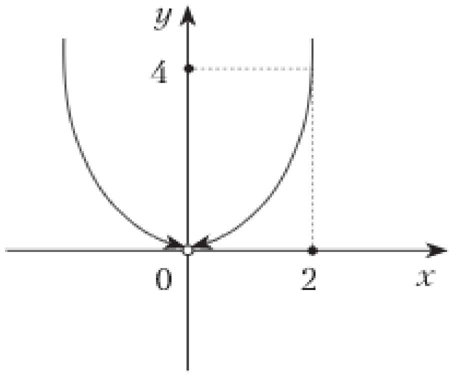


Рис. 10.8

В точке $x_0 = 0$ функция $y = \dfrac{x^3}{x}$ не существует (так как знаменатель не должен обращаться в нуль), следовательно, x_0 — точка разрыва этой функции.

$\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to 0+0} x^2 = 0$, аналогично $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{x^3}{x} = 0$, откуда следует, что x_0 — точка устранимого разрыва.

«Устранить» устранимый разрыв можно, доопределив функцию. В нашем случае это можно сделать таким образом:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Этого невозможно сделать в случаях с неустранимыми разрывами.

Через точки разрыва второго рода функции проходят вертикальные асимптоты.

Определение 10.11. *Асимптотой графика функции* $y = f(x)$ называется прямая, для которой расстояние от точки функции до этой прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки графика от начала координат.

На рис. 9.3 и 9.4 оси координат являются асимптотами графиков функции: ось y (ее уравнение $x = 0$) является вертикальной (проходит через точку разрыва второго рода функции), а ось x (ее уравнение $y = 0$) является горизонтальной асимптотой. На рис. 9.7 и 9.8 $y = 0$ — горизонтальная асимптота (односторонняя). На рис. 9.9 и 9.10 $x = 0$ — вертикальная асимптота (проходит «по краю» области определения функции). На рис. 9.13 через точки разрыва второго рода функции $y = \operatorname{tg} x$ проходят вертикальные асимптоты, их уравнения $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. На рис. 9.14 через точки разрыва второго рода функции $y = \operatorname{ctg} x$ проходят вертикальные асимптоты, их уравнения $x = \pi n,\ n \in Z$. На рис. 9.17 и 9.18 имеем по две односторонние горизонтальные асимптоты $y = \dfrac{\pi}{2}$ и $y = -\dfrac{\pi}{2}$ для функции $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$ и $y = \pi$ — для функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

Итак, чтобы установить, имеет ли график функции $y = f(x)$ вертикальную асимптоту в точке разрыва x_0 функции, нужно найти односторонние пределы функции около этой точки разрыва: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Если хотя бы один из односторонних пределов бесконечен или не существует, то x_0 — точка разрыва второго рода функции и через эту точку проходит вертикальная асимптота с уравнением $x = x_0$.

Если из области определения функции исключены не только точки, но и целые интервалы, то следует рассмотреть односторонний предел функции на концах каждого интервала. И там, где предел бесконечен или не существует, пройдет вертикальная асимптота. Например, функция $y = \ln x$ имеет область определения $x \in (0; +\infty)$. Согласно предыдущим рассуждениям следует рассмотреть односторонний предел функции при $x \to 0+0$: $\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$, предел бесконечен, следовательно, через точку $x = 0$ проходит вертикальная асимптота (ее уравнение $x = 0$) (см. рис. 9.9).

Помимо вертикальных асимптот имеются наклонные. Если функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существуют ее конечные пределы

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b,$$

то график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой $y = kx + b$.

Если при выполнении вышеуказанных условий оказалось, что $k = 0$, то в этом случае имеем горизонтальную асимптоту (как частный случай наклонной).

Следует понимать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ могут быть различными, тогда мы имеем дело с односторонними асимптотами.

Например, на рис. 9.7 $y = 0$ — левосторонняя горизонтальная асимптота; на рис. 9.8 $y = 0$ — правосторонняя; на рис. 9.17 $y = -\dfrac{\pi}{2}$ — левосторонняя, $y = \dfrac{\pi}{2}$ — правосторонняя горизонтальные асимптоты; на рис. 9.18: $y = 0$ — правосторонняя, $y = \pi$ — левосторонняя горизонтальные асимптоты.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте определение предела числовой последовательности.
2. Сформулируйте определение предела функции в точке.
3. Приведите примеры функций, для которых при определенном стремлении аргумента предел не существует.
4. Приведите пример неограниченной, но не бесконечно большой величины.
5. Приведите примеры пар бесконечно малых величин одного порядка малости, но не эквивалентных.
6. Приведите наиболее общие формулировки первого и второго замечательных пределов.
7. Какие вы можете назвать виды неопределенностей под знаком предела, рассматриваемые в этой главе?

Практикум по решению задач

Упражнение 10.1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$.

Решение

Пусть ε = 0,2, тогда неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ в определении предела функции в точке будет иметь вид

$$\left|(2x+1)-7\right|<0{,}2 \Rightarrow \left|2x-6\right|<0{,}2 \Rightarrow -0{,}2<2(x-3)<0{,}2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -0{,}1<x-3<0{,}1 \Rightarrow \left|x-3\right|<0{,}1.$$

Аналогично при $\varepsilon=0{,}02$ неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ будет выполнено при $\left|x-3\right|<0{,}01$. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ неравенство $\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$ выполнится при $\left|x-3\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, т.е. для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon}{2}$, что для всех $x\neq 3$, удовлетворяющих условию $\left|x-3\right|<\delta$, справедливо неравенство $\left|f(x)-7\right|<\varepsilon$, где $f(x)=2x+1$, откуда по определению предела функции в точке и следует, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1)=7$.

Упражнение 10.2. Докажем, что последовательность $1; \dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{8}; \dfrac{5}{11}; \ldots$ имеет предел, равный $\dfrac{1}{3}$.

Решение

Сначала найдем a_n. Представив единицу в виде $\dfrac{2}{2}$, имеем и в числителях, и в знаменателях членов последовательности арифметические прогрессии: в числителях 2; 3; 4; 5; ... с первым членом, равным 2, и разностью $d=1$, в знаменателях 2; 5; 8; 11; ... с первым членом, равным 2, и разностью $d=3$. Запишем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n=a_1+d(n-1)$ (известна из школьного курса математики) и подставим в эту формулу известные a_1 и d. Получим для числителей $a_n=2+1(n-1)\Rightarrow a_n=n+1$, для знаменателей $a_n=2+3(n-1)\Rightarrow a_n=3n-1$. Таким образом, общий член нашей последовательности имеет вид $a_n=\dfrac{n+1}{3n-1}$.

Неравенство $\left|a_n-A\right|<\varepsilon$ в определении предела числовой последовательности будет иметь вид

$$\left|\frac{n+1}{3n-1}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n+3-3n+1}{3(3n-1)}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4}{3(3n-1}\right|<\varepsilon.$$

Учитываем, что $n\in N$, следовательно, $\dfrac{4}{3(3n-1)}>0$, поэтому неравенство с модулем примет вид

$$\frac{4}{3(3n-1)}<\varepsilon \Rightarrow 3n-1>\frac{4}{3\varepsilon} \Rightarrow 3n>\frac{4}{3\varepsilon}+1 \Rightarrow n>\frac{4}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}.$$

Пусть $\varepsilon=\dfrac{1}{30}$, тогда $n>\dfrac{41}{3}$ (N = 14); если $\varepsilon=\dfrac{1}{300}$, тогда $n>\dfrac{401}{3}$ (N = 134) и т.д. Таким образом, для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, после которого для всех a_n

выполняется неравенство $\left|a_n - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$. По определению предела последовательности это и означает, что данная в условии последовательность имеет предел, равный $\frac{1}{3}$.

Упражнение 10.3. Докажем, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x+3}{2x} = 2$.

Решение

Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство в определении предела функции на бесконечности $|f(x) - A| < \varepsilon$ имеет вид

$$\left|\frac{4x+3}{2x} - 2\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{4x+3-4x}{2x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3}{2x}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{|x|} < \frac{2\varepsilon}{3} \Rightarrow |x| > \frac{3}{2\varepsilon}.$$

Получили, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $S(\varepsilon) = \frac{3}{2\varepsilon} > 0$, что для всех S таких, что $|x| > S$, будет справедливым неравенство $|f(x) - 2| < \varepsilon$, где $f(x) = \frac{4x+3}{2x}$. По определению предела функции на бесконечности получаем, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x+3}{2x} = 2$.

Упражнение 10.4. Исследуем на непрерывность функции $y = f(x)$ (в случае разрыва установим его характер):

а) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x \geq 1, \\ 2 - x \text{ при } x < 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x \geq 0, \\ 2 - x \text{ при } x < 0; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x + 2 \text{ при } x > 0, \\ 2 - x \text{ при } x < 0. \end{cases}$

Решение

а) Функция $y = f(x)$ определена при всех x, таким образом, остается проверить ее на непрерывность лишь в одной точке (на «стыке условий») при $x = 1$, рассмотрев при этом два односторонних предела функции:

$$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (x + 2) = 3; \quad \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} (2 - x) = 1.$$

Получили, что оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, следовательно, в точке $x = 1$ функция $y = f(x)$ имеет неустранимый разрыв первого рода.

б) Функция $y = f(x)$ определена при всех x, таким образом, остается проверить ее на непрерывность лишь в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x + 2) = 2; \quad \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (2 - x) = 2,$$

к тому же $f(0) = 2$. Получили, что оба односторонних предела не только конечны и равны между собой, но и равны значению функции в этой точке. Из этого следует, что исследуемая функция непрерывна.

в) Функция не определена при $x = 0$, следовательно, в этой точке имеет разрыв. Выясним характер разрыва. Имеем $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x \to 0-0} f(x) = 2$ (см. п. б). Односторонние пределы конечны и равны между собой, но функция в точке $x = 0$

не определена. Из этого следует, что функция $y = f(x)$ имеет в этой точке устранимый разрыв (первого ряда).

Упражнение 10.5. Исследуем на непрерывность функции $y = f(x)$ (в случае разрывов установим их характер): а) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; б) $f(x)=\dfrac{x+1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$.

Решение

а) Функция не определена при тех x, которые обращают в нуль знаменатель, т.е. при $x = \pm 2$. Следовательно, имеем две точки разрыва функции. Выясним их характер. Имеем $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{1}{x^2-4}=\infty$ (см. пример 10.4). Этого уже достаточно, чтобы сделать вывод о том, что $x = 2$ — точка разрыва второго рода нашей функции. Рассмотрим теперь вторую точку: $\lim\limits_{x\to -2+0}\dfrac{1}{x^2-4}=\infty$ (см. пример 10.4), откуда следует, что $x = -2$ тоже является точкой разрыва второго рода.

б) Функция не определена (а значит, имеет разрыв) только в одной точке $x = 0$. Рассмотрим односторонние пределы.

Сначала справа: $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x+1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$. При $x\to 0+0$ показатель степени $\dfrac{1}{x}\to+\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ (см. рис. 9.7) $\Rightarrow 2+2^{\frac{1}{x}}\to+\infty\Rightarrow\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}\to 0$ (теорема 10.2). $\lim\limits_{x\to 0+0}(x+1)=1$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x+1}{2+2^{\frac{1}{x}}}=0$ (теорема 10.5).

Теперь слева: $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x+1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$. При $x\to 0-0$ показатель степени $\dfrac{1}{x}\to-\infty\Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to 0$ (см. рис. 9.7) и $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\dfrac{0+1}{2+0}=\dfrac{1}{2}$. Получили, что оба односторонних предела конечны, но не равны между собой, следовательно, функция $f(x)$ имеет в точке $x=0$ неустранимый разрыв первого рода.

Упражнение 10.6. Найдем асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{x^2-4}$.

Решение

Воспользуемся решением предыдущего упражнения. Имеем две точки разрыва второго рода функции $f(x)$. Через точки разрыва второго рода всегда проходят вертикальные асимптоты, т.е. $x = 2$ и $x = -2$ — уравнения вертикальных асимптот. Выясним, имеет ли график функции $y=\dfrac{1}{x^2-4}$ наклонные или горизонтальные асимптоты, которые ищем в виде $y = kx + b$. Рассмотрим пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x(x^2-4)}=0=k;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-k\cdot x\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2-4}-0\cdot x\right)=0=b.$$

Получили $y=0$ — уравнение горизонтальной асимптоты.

Упражнение 10.7. Найдем асимптоты графиков функций: а) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}$.

Решение

а) Функция $f(x)$ неопределена при $x=1$. Рассмотрим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x^2+1}{x-1}=\infty$, таким образом, $x=1$ — уравнение вертикальной асимптоты. Выясним, имеет ли график функции наклонную асимптоту:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}=1=k;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-1\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x-1}=0=b.$$

Получили $y=1\cdot x+0$, или $y=x$, — уравнение наклонной асимптоты.

б) Функция $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$ определена при всех x, следовательно, ее график вертикальных асимптот не имеет. Выясним, имеет ли он наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x^2}}=\infty.$$

Таким образом, наклонных асимптот у графика рассматриваемой функции тоже нет.

в) Функция неопределена, а следовательно, разрывна в точке $x=0$. Рассмотрим односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}=\dfrac{1}{2+0}=\dfrac{1}{2}$ (подробности — в решении упражнения 10.5). Из этого следует, что вертикальных асимптот у графика нет. Выясним, имеет ли он наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x\left(2+2^{\frac{1}{x}}\right)}=0=k\ \ (\text{так как}\ \lim_{x\to\pm\infty}2^{\frac{1}{x}}=2^0=1);$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2+2^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2+2^0}=\frac{1}{3}=b.$$

Получили $y=0\cdot x+\dfrac{1}{3}$, или $y=\dfrac{1}{3}$, — уравнение горизонтальной асимптоты.

Задачи для самостоятельного решения

10.1. Докажите, что $\lim\limits_{x\to -1}(2-3x)=5$.

10.2. Докажите, что последовательность $3; \frac{13}{5}; \frac{17}{7}; \frac{21}{9}; \frac{25}{11}; \ldots$ имеет предел, равный 2.

10.3. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x+2}{3x} = 3$.

10.4. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^4+3x^2-6}{5x^3-2x^4-3x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3+7x^2-6}{2x^3-x^4+2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^4-2x^2+6x}{7x^3+2x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+4x}-x+2}{\sqrt[3]{5x-x^3}+5}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{x}}{4x-1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2^x-1}{2^{x-1}+5}$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5^x-2^{x+1}}{5^{x-1}+2^x}$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-2)^9}{4x^9+2x}$; 9) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots+(-1)^n\cdot\frac{1}{3^n}}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x-5}}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$; 11) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$; 12) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{x^2-8x+16}$;

13) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^3+1}$; 14) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-2}$; 15) $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x^2-81}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$; 17) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)^6}{x^6-64}$; 18) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x+x^2+\ldots+x^{15}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x^2-16}\right)$; 20) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{8}{x^2-16}\right)$;

21) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{12}{x^3+8}\right)$; 22) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2}{x+3}-x\right)$;

23) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^4}{x^2+x}-2x^2\right)$; 24) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+5})$;

25) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+9})$; 26) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x-3}-\sqrt[3]{x+4})$;

27) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-x-1}-\sqrt{x^2+3x+5})$; 28) $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{9x^2+4x}-3x)$;

29) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4x-2}-\sqrt{x^2+x-3})$; 30) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-1}{4x+5}\right)^{2x}$;

31) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{3x+5}\right)^{7x}$; 32) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5}{2x^2+1}\right)^{3x^2}$;

33) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+6x+5}{x^2+3x+1}\right)^{5x}$; 34) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-1}{3x^2+1}\right)^{6x}$;

35) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x^9-2}{4x^9+1}\right)^{6x^9}$; 36) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{4x+2}{x+2}\right)^{\frac{6}{x}}$;

37) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x^2}{1+3x^2}\right)^{\frac{4}{x^2}}$; 38) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+3)-\ln 3}{5x}$;

39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{5x}$; 40) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{x}-1}{x^2}$;

41) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+9x)}{3x}$; 42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^9-1}{5x}$;

43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{8x}$; 44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 6x}{3x}$;

45) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 2x}$; 46) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{ctg} x}{2x-\pi}$;

47) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{5x^2}$; 48) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 3x}{\sin 9x^3}$;

49) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 4x}{5x}$.

Глава 11
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

11.1. Определение и геометрический смысл производной

Различные задачи в разных областях приводят к понятию производной, это такие задачи, как о касательной к кривой, о скорости движения, о плотности вещества, о теплоемкости тела, о производительности труда. Если заострить внимание на первой из них, то следует определиться с понятием касательной. Конечно же, прямая, имеющая с кривой лишь одну общую точку, не может считаться касательной (рис. 11.1), и, наоборот, касательная может иметь с кривой не одну общую точку (рис. 11.2).

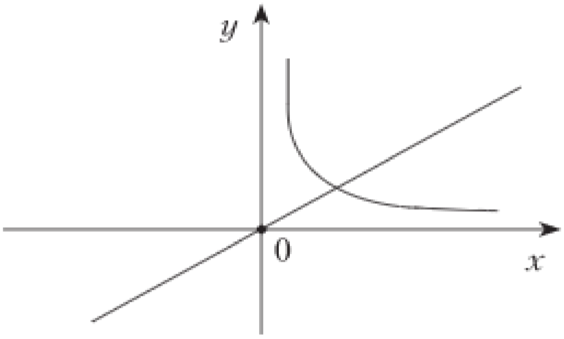


Рис. 11.1

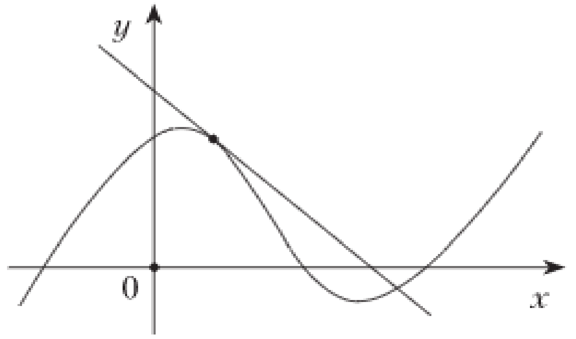


Рис. 11.2

Под *касательной* к кривой $y = f(x)$, проведенной в точке N, следует понимать предельное положение секущей (рис. 11.3), проходящей через точки $N(x_0; y_0)$ и $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$, при приближении точки M к точке N, т.е. когда расстояние между ними $\Delta x \to 0$.

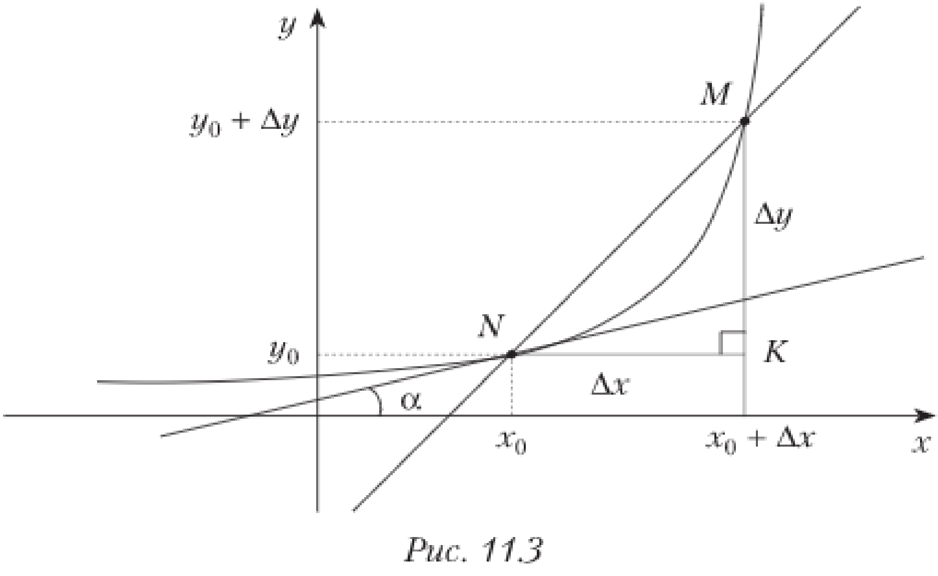


Рис. 11.3

Уравнение прямой через заданную точку с угловым коэффициентом k имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$. Угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона этой прямой, который в свою очередь в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего углу катета к прилежащему, т.е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Но для касательной $\Delta x \to 0$, следовательно, ее угловой коэффициент $k = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Здесь Δy и Δx называются *приращением функции* и *приращением аргумента* соответственно (задавая приращение Δx аргументу x_0, получаем изменение y_0 на Δy).

Таким образом, если функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве X, формулируется следующее определение.

Определение 11.1. *Производной функции* $y = f(x)$ называется предел, если он существует, отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Обозначаться производная может по-разному: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$ (где d — знак дифференциала), y'_x (где необходимо уточнение, по какой переменной берется производная).

Определение 11.2. Нахождение производной функции называется *дифференцированием* функции. Если функция в некоторой точке имеет конечную производную, то она называется *дифференцируемой* в этой точке. Если функция дифференцируема во всех точках некоторого множества, то она называется *дифференцируемой на множестве*.

Возвращаясь к задаче о касательной, можно сформулировать *геометрический смысл производной*: производная функции в точке численно равна тангенсу угла между касательной, проведенной к графику функции в этой точке, и положительным направлением оси абсцисс.

Само уравнение касательной принимает вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке имеет единственную касательную.

Теорема 11.1 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна.*

Эта теорема, как и все необходимые условия и признаки, не дает справедливости обратного утверждения, т.е. если функция непрерывна, то она может быть не дифференцируема. Но зато справедливо другое: в точках разрыва функция не дифференцируема.

В качестве примера можно рассмотреть функцию $y = |x|$ (рис. 11.4).

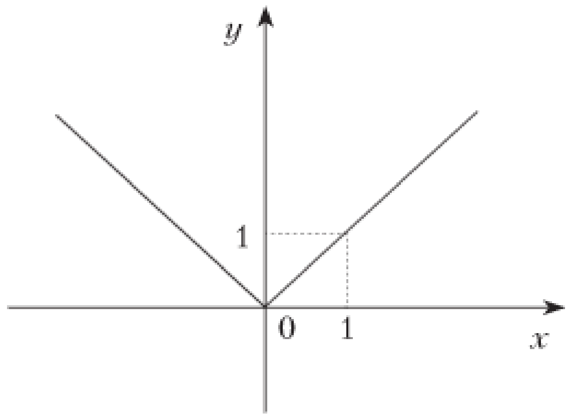


Рис. 11.4

Пример 11.1

Выясним, дифференцируема ли функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Решение

Воспользуемся определением производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x}.$$

При $x = 0$ имеем $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$. Для раскрытия модуля следует рассмотреть два случая:

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1; \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Так как пределы справа и слева от нуля не равны между собой, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке $x_0 = 0$ не существует, а значит, не существует и производная функции в точке $x_0 = 0$.

11.2. Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые по x функции, а c — постоянное число. Сформулируем основные правила дифференцирования:

1) $c' = 0$;
2) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
3) $(u \cdot v) = u' \cdot v + u \cdot v'$;
4) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$;
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Все свойства выводятся из определения производной, в качестве примера докажем, например, последнее.

Пример 11.2

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — дифференцируемые от x функции. Докажем, что $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Решение

Воспользуемся определением производной, где $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u \cdot v + \Delta u \cdot v - u \cdot v - u \cdot \Delta v}{v \cdot (v + \Delta v) \cdot \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} = F(u, v).$$

Имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ — по определению производной, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$ — по второму определению непрерывности функции в точке (см. начало параграфа 10.7).

Таким образом, $F(u, v) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$, что и требовалось доказать.

Теперь приведем формулы производных основных элементарных функций, каждая из которых также выводится из определения производной. В качестве примера предоставим вывод двух формул.

1. Степенная функция $y = x^n$:

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}.$$

Полезно помнить несколько часто встречающихся частных случаев этой формулы:

$$x' = 1;\ (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};\ \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Показательная функция $y = a^x$, где a — постоянное число, $a > 0$, $a \neq 1$:

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Ее частный случай: $(e^x)' = e^x$.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a — постоянное число, $a > 0$, $a \neq 1$:

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Ее частный случай: $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$:

$$(\sin x)' = \cos x; (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

5. Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};\ (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Пример 11.3

Найдем по определению производные функций: а) $y = \log_a x$; б) $y = \sin x$.

Решение

а) Для удобства работы с логарифмической функцией перейдем к основанию e по формуле $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (школьный курс математики). Имеем $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$. Найдем сначала производную $\ln x$, используя решение примера 10.18:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{1}{\Delta x}\ln\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} =$$

$$= \ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}\cdot x\cdot\frac{1}{x}} = \ln\lim_{\Delta x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

Получаем

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}\cdot(\ln x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

(пользуясь четвертым правилом дифференцирования, вынесли постоянный множитель $\dfrac{1}{\ln a}$ за знак производной).

б) Для нахождения производной функции $y = \sin x$ воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\frac{2x+\Delta x}{2} = 1\cdot\cos x = \cos x.$$

($\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ по первому замечательному пределу).

11.3. Производная сложной функции. Вычисление производной

Пусть задана сложная функция $y = f(\varphi(x))$ (см. параграф 9.2).

Теорема 11.2. *Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ — дифференцируемые по своим аргументам функции, то производная сложной функции $y = f(\varphi(x))$*

существует и равна производной внешней функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную этого промежуточного аргумента по независимой переменной:

$$y' = f'(u) \cdot u', \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

С учетом данной теоремы формулы дифференцирования параграфа 11.2 могут иметь следующий вид:

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u';$$

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u';$$

$$(\log_a u) = \frac{u'}{u \ln a} \text{ и т.д.}$$

На этой теореме базируются вычисления производных.

Пример 11.4

Найдем производные функций: а) $y = \sin^4 \ln x$; б) $y = \ln \operatorname{arctg} \sqrt{x}$; в) $y = \sqrt[5]{x^3} \cdot 3^{-x}$; г) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - \cos^2 x}{5 \lg x^5}$.

Решение

а) На первом шаге берем производную степенной функции, так как «последнее действие» нашей сложной функции — возведение в четвертую степень; второй шаг — нахождение производной тригонометрической функции и последний шаг — дифференцирование логарифмической функции:

$$y' = (\sin^4 \ln x)' = 4 \sin^3 \ln x \cdot (\sin \ln x)' =$$

$$= 4 \sin^3 \ln x \cdot \cos \ln x \cdot (\ln x)' = 4 \sin^3 \ln x \cdot \cos \ln x \cdot \frac{1}{x}.$$

б) На первом шаге — производная логарифмической функции, так как «последнее действие» — взятие логарифма; на втором шаге — дифференцирование обратной тригонометрической функции; на третьем шаге — производная степенной функции (частный случай):

$$y' = (\ln \operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot (\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + (\sqrt{x})^2} \cdot (\sqrt{x})' =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1 + x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1 + x) \operatorname{arctg} \sqrt{x}}.$$

в) Сначала приведем степенную функцию к удобному для дифференцирования виду: $\sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}$. Затем используем формулу производной произведения, так как «последнее действие» — умножение:

$$y' = (\sqrt[5]{x^3} \cdot 3^{-x})' = (x^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{-x})' = (x^{\frac{3}{5}})' \cdot 3^{-x} + x^{\frac{3}{5}} \cdot (3^{-x})' =$$

$$= \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} \cdot 3^{-x} + x^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{-x} \ln 3 \cdot (-x)' = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} \cdot 3^{-x} - x^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{-x} \ln 3.$$

Здесь учитывалось, что 3^{-x} — сложная функция, поэтому пришлось умножать слагаемое еще и на производную показателя степени $(-x)' = -1$.

г) Сначала преобразуем функцию для удобства дифференцирования: $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ и $\lg x^5 = 5 \lg x$ (по свойству логарифма). Затем вынесем постоянный множитель за знак производной. После этого перейдем непосредственно к дифференцированию, на первом шаге которого берем производную дроби (так как «последнее действие» нашей функции — деление):

$$y' = \left(\frac{\sqrt[3]{x} - \cos^2 x}{5\lg x^5}\right)' = \left(\frac{x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x}{5 \cdot 5\lg x}\right)' = \frac{1}{25}\left(\frac{x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x}{\lg x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x\right)' \lg x - \left(x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x\right)(\lg x)'}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\cos x \cdot (\cos x)'\right)\lg x - \left(x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x\right) \cdot \frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 2\cos x(-\sin x)\right)\lg x - \left(x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x\right) \cdot \frac{1}{x\ln 10}}{\lg^2 x} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \sin 2x\right)\lg x - \left(x^{\frac{1}{3}} - \cos^2 x\right) \cdot \frac{1}{x\ln 10}}{25\lg^2 x}.$$

При написании окончательного ответа мы воспользовались тригонометрической формулой двойного угла $2\sin x \cos x = \sin 2x$ (школьный курс математики).

11.4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Начнем изучение вопросов применения дифференциального исчисления к исследованию функций с нескольких основных теорем.

Теорема 11.3 (Ферма). *Если дифференцируемая на интервале функция достигает наибольшего или наименьшего значения в некоторой точке внутри этого интервала, то производная функции в этой точке равна нулю.*

Теорема 11.4 (Ролля). *Если функция непрерывна на отрезке $[a; b]$, дифференцируема на интервале $(a; b)$ и на концах отрезка имеет равные значения, то внутри этого интервала найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.*

Геометрический смысл теоремы Ролля таков, что при выполнении ее условий найдется хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельная оси абсцисс (рис. 11.5).

Теорема 11.5 (Лагранжа). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и дифференцируема на интервале $(a; b)$, то внутри этого интервала найдется хотя бы одна точка x_0, для которой справедливо равенство*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

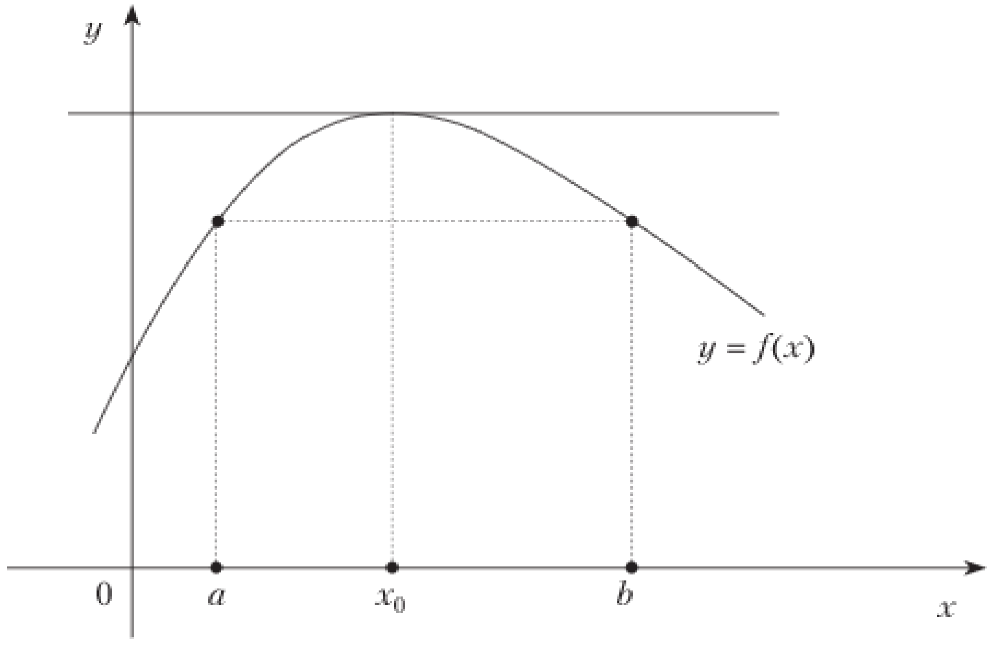


Рис. 11.5

Геометрический смысл теоремы Лагранжа таков, что при выполнении ее условий найдется такая точка, в которой касательная к графику функции в этой точке будет параллельная секущей, проходящей через концы данного отрезка (рис. 11.6).

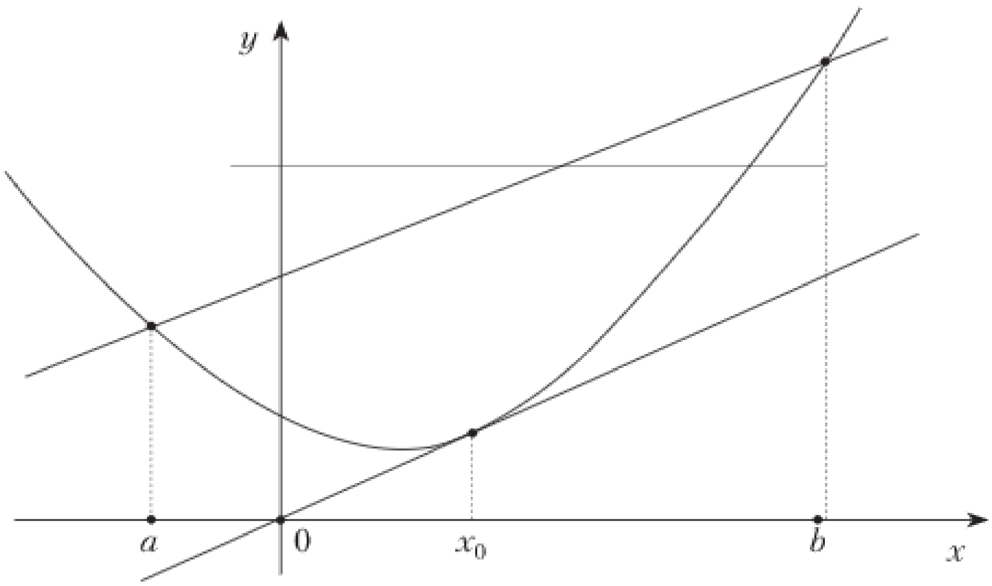


Рис. 11.6

Теорема 11.6 (Коши). *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a;\, b]$, *дифференцируемы на интервале* $(a;\, b)$, *причем* $g'(x) \neq 0$ *на этом интервале, то внутри него найдется такая точка* x_0, *для которой справедливо равенство*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Заметим, что теорема Лагранжа является частичным случаем теоремы Коши.

11.5. Правило Лопиталя

Возвращаемся к вычислению пределов.

Теорема 11.7 (правило Лопиталя). *Если выполняются следующие условия:*

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ являются бесконечно малыми (или бесконечно большими) при $x \to a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0\ (\infty)$, где $a = x_0$ или $a = \pm\infty$;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в окрестности a;

3) $g'(x) \neq 0$ в окрестности a;

4) существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Пределы также могут быть односторонними.

Иными словами, если мы имеем дело с неопределенностями вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ или $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, мы можем воспользоваться следующим равенством:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Если после однократного применения правила Лопиталя неопределенность не была устранена и осталась прежней, то правило можно применить еще раз. Это значит, что правило Лопиталя можно применять конечное число раз, но только до устранения неопределенности.

В параграфе 10.6 мы уже рассматривали устранение неопределенностей этих видов в примерах 1-го, 2-го и 5-го типов. Возникает вопрос, не является ли правило Лопиталя «просто» другим методом решения тех же примеров. Отчасти да. Во всех примерах 1-го, 2-го и 5-го типов можно применять правило Лопиталя, однако лишь в части из них ответ может быть достигнут при использовании только этого правила. Если взять пример 10.9, то станет очевидным, что производные числителя и знаменателя настолько громоздки, что не позволят довести этот пример до ответа с использованием только правила Лопиталя. В то же время мы сможем решать некоторые примеры, которые мы не могли решать ранее.

Следует подчеркнуть, что с правилом Лопиталя связаны не только заявленные выше две неопределенности, но и те неопределенности, которые мы не рассмотрели в параграфе 10.6. Например, неопределенность вида $[0\cdot\infty]$ при помощи теоремы 10.2 легко сводится или к неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, или к неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Мы увидим это в решении конкретных примеров.

Пример 11.5

Найдем пределы: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2-e^{-2x}-e^{2x}}$.

Решение

а) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^{3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2}{3e^{3x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{3e^{3x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{9e^{3x}}=0.$$

В этом примере правило Лопиталя применялось трижды, пока не была устранена неопределенность.

б) Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln^2 x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^{-1}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}x=\infty.$$

Для устранения неопределенности правило Лопиталя применяли дважды.

в) Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$, применяем правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2-e^{-2x}-e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{0+2e^{-2x}-2e^{2x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{-2x}-e^{2x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{-2e^{-2x}-2e^{2x}}=\frac{1}{-2-2}=-\frac{1}{4}.$$

Правило Лопиталя применялось дважды.

Рассмотрим примеры с другими видами неопределенностей, сводящимися к возможности применения правила Лопиталя.

Пример 11.6

Найдем пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\ln x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0+0}(\sin x)^x$.

Решение

а) Имеем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$, преобразуем функцию, стоящую под знаком предела, что приведет к неопределенности другого вида:

$$A=\lim_{x\to 0}(x^2\ln x)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}}.$$

Получили неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, которая позволяет применить правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2}=0.$$

Заметим, что функция под знаком предела могла быть преобразована к виду $\frac{x^2}{\ln^{-1} x}$ с неопределенностью $\left[\frac{0}{0}\right]$. Но в этом случае применение правила Лопиталя (неоднократное) не дает возможности получить ответ.

б) Имеем неопределенность вида $[0^0]$. Преобразуем функцию под знаком предела сначала к виду с неопределенностью $[0 \cdot \infty]$, а затем продолжим по схеме решения пункта а) данного примера:

$$A = \lim_{x \to 0+0} (\sin x)^x = [0^0] = \lim_{x \to 0+0} e^{\ln(\sin x)^x} = e^{\lim\limits_{x \to 0+0}(x \cdot \ln \sin x)}.$$

Рассмотрим отдельно предел показателя степени:

$$\lim_{x \to 0+0} (x \cdot \ln \sin x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln \sin x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to 0+0} \frac{\frac{1}{\sin x} \cdot \cos x}{-x^{-2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{-x^2 \cos x}{\sin x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \to 0+0} (-x \cos x) = 1 \cdot 0 = 0,$$

так как $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{x}{\sin x} = 1$ по первому замечательному пределу. Таким образом, $A = e^0 = 1$, т.е. искомый предел $\lim\limits_{x \to 0+0} (\sin x)^x = 1$.

11.6. Интервалы монотонности. Экстремумы функции

С понятиями возрастания, убывания и монотонности функции мы ознакомились в параграфе 9.1, эти понятия непосредственно связаны с производной функции. Сформулируем *достаточные условия монотонности функции.*

Теорема 11.8. *Если в каждой точке некоторого интервала производная дифференцируемой функции положительна, то функция на этом интервале возрастает.*

Теорема 11.9. *Если в каждой точке некоторого интервала производная дифференцируемой функции отрицательна, то функция на этом интервале убывает.*

Теорема 11.10. *Если в каждой точке некоторого интервала производная дифференцируемой функции равна нулю, то функция на этом интервале постоянна.*

Доказательство этих теорем основано на теореме 11.5 (Лагранжа): для функций, дифференцируемых на интервале $(a; b)$, найдется точка x_0, для которой справедливо равенство $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$. Если $f'(x_0) > 0$, то числитель и знаменатель дроби имеют одинаковые знаки: если $b > a$, то $f(b) > f(a)$, или если $a > b$, то $f(a) > f(b)$, это и есть определение возрастающей функции. Если $f'(x_0) < 0$, то числитель и знаменатель имеют разные знаки: если $b > a$, то $f(b) < f(a)$, или если $a > b$, то $f(a) < f(b)$, это определение убывающей функции. Если $f'(x_0) = 0$, то $f(b) = f(a)$ при $b \neq a$, что означает постоянство функции на интервале $(a; b)$.

Пример 11.7

Найдем интервалы монотонности функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Решение

Найдем производную данной функции: $y' = 3x^2 - 6x - 9$. Для нахождения интервалов монотонности функции следует решить два неравенства: $y' > 0$ и $y' < 0$.

Решим первое неравенство: $3x^2-6x-9>0$. Разделим каждое слагаемое на 3, получим $x^2-2x-3>0$. Разложим левую часть на множители по формуле разложения квадратного трехчлена, приведенной в решении примера 10.12: $(x-3)(x+1)>0$. Решим это неравенство методом интервалов (школьный курс математики): на числовую прямую нанесем точки, в которых производная или равна нулю, или не существует (рис. 11.7).

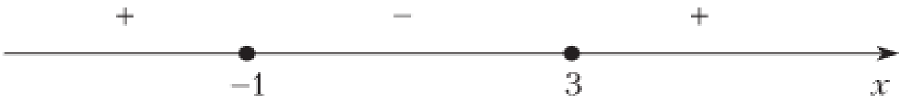


Рис. 11.7

Затем определим знак производной на каждом из полученных на числовой прямой интервалов путем подстановки произвольного значения x из каждого интервала:

$$f'(4)=(4-3)(4+1)>0;$$

$$f'(0)=(0-3)(0+1)<0;$$

$$f'(-3)=(-3-3)(-3+1)>0.$$

Таким образом, $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(-1;3)$. Следовательно, получаем ответ: функция возрастает на интервалах $(+\infty; -1)$ и $(3; +\infty)$ и убывает на интервале $(-1; 3)$.

Основными точками графика функции, определяющими его структуру и поведение, являются точки экстремума функции.

Определение 11.3. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$.

Определение 11.4. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует такая окрестность этой точки, что для всех точек этой окрестности выполняется неравенство $f(x)\ge f(x_0)$.

Точки максимума и минимума функции являются точками *экстремума функции*. Значения функции в точках экстремума (максимума, минимума) называются соответственно *экстремумом* (*максимумом*, *минимумом*) *функции*.

Экстремум функции часто называют *локальным экстремумом*, имея в виду, что определение максимума и минимума функции связано с достаточно малой окрестностью точки x_0. На произвольном интервале функция может иметь несколько экстремумов, причем значение функции в точке максимума может быть меньше значения в точке минимума (рис. 11.8).

Рисунок 11.8 также показывает, что наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (глобальный максимум и глобальный минимум) должны находиться в точках максимума и минимума функции. На этом рисунке очевидно, что наибольшее значение функции на $[a;b]$ достигается в точке максимума при $x=x_1$, а наименьшее значение достигнуто на конце отрезка при $x=a$.

Согласно этим рассуждениям и теореме 10.13 (Вейерштрасса) непрерывная на отрезке функция обязательно достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в точках экстремума, или на концах упомянутого отрезка.

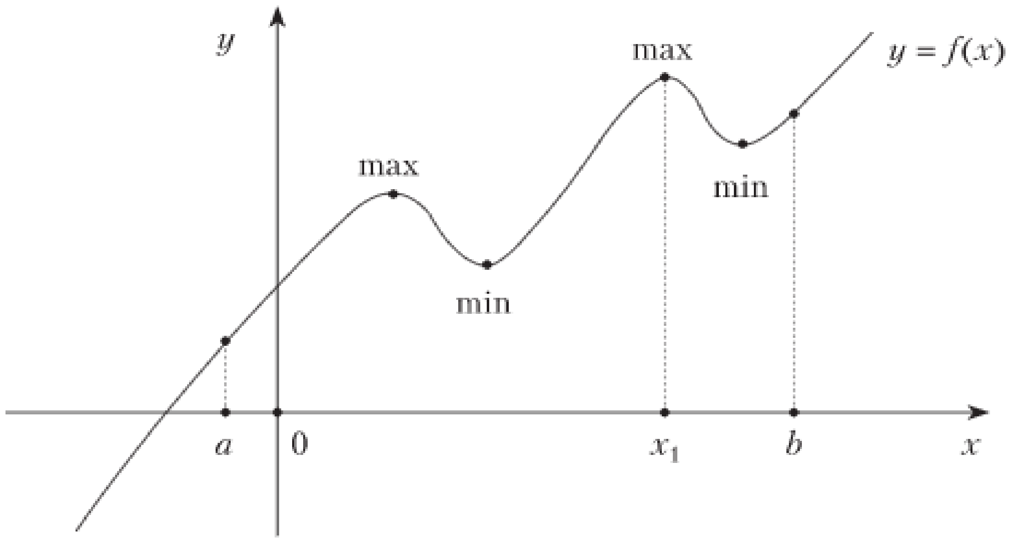


Рис. 11.8

Вернемся к локальному экстремуму функции. Функция может достигать экстремума не только в тех точках, в которых ее производная обращается в нуль, но и в тех точках, где производная не существует. Вспомним пример 11.1, где рассматривается функция $y = |x|$, которая в точке $x = 0$ не дифференцируема, но достигает минимума. Этот фактор учитывается при формулировке *необходимого условия существования экстремума функции в точке.*

Теорема 11.11. *Если функция в некоторой точке достигает экстремума, то ее производная в этой точке или равна нулю, или не существует.*

Обратное утверждение неверно. Не во всех критических точках (там, где производная равна нулю или не существует) функция достигает экстремума. Например, функция $y = x^3$ экстремума не имеет (см. рис. 9.2), но в точке $x = 0$ ее производная $y' = 3x^2$ обращается в нуль.

Чтобы сделать окончательный вывод о наличии экстремумов у функции, необходимо воспользоваться одним из двух *достаточных условий существования экстремума функции в точке.*

Теорема 11.12. *Если при переходе через некоторую точку производная дифференцируемой функции меняет свой знак, то в этой точке функция достигает экстремума. Причем если в положительном направлении оси абсцисс функция меняет знак с «плюса» на «минус», то функция в точке достигает максимума, а если с «минуса» на «плюс» — то минимума.*

На примере функции $y = x^3$ можно увидеть невыполнение условий теоремы 11.12: $y' = 3x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$, т.е. при переходе через точку $x = 0$ производная свой знак не меняет, а значит, функция экстремумов не имеет.

11.7. Производные высших порядков. Точки перегиба функций

Чтобы сформулировать второе достаточное условие существования экстремума функции в точке, необходимо помимо производной первого порядка функции $y'(x)$ рассмотреть производные высших порядков.

Получить производную второго порядка функции можно, продифференцировав производную первого порядка: $f''(x)=(f'(x))'$.

Производная третьего порядка получается дифференцированием производной второго порядка: $f'''(x)=(f''(x))'$ и т.д.

Для обозначения производных высоких порядков используют римские цифры или арабские в скобках, например $f^{IV}(x)$ или $f^{(4)}(x)$, $f^{V}(x)$ или $f^{(5)}(x)$.

Таким образом, производной n-го порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка функции: $f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$.

Теорема 11.13. *Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой точке x_0 и в этой точке $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то в точке x_0 функция достигает экстремума, причем максимума, если $f''(x_0)<0$, и минимума, если $f''(x_0)>0$.*

Практическое применение теоремы 11.13 можно проследить на функциях $y = x^2$ (см. рис. 9.1) и $y = x^3$ (см. рис. 9.2). Функция $y = x^2$ достигает минимума при $x = 0$, ее первая производная $y'=2x$ при $x = 0$ равна нулю, а вторая $y''=(2x)'=2>0$, что согласуется с теоремой 11.13. Функция $y = x^3$ экстремума не имеет, ее первая производная $y'=3x^2$ и вторая $y''=(3x^2)'=6x$ равны нулю при $x = 0$, что противоречит условию $f''(x_0)\neq 0$ теоремы 11.13.

Характерными отличиями какого-либо графика функции считаются не только экстремумы и интервалы монотонности. Монотонность, например, может выглядеть по-разному. Для примера снова возьмем график функции $y = x^3$ (см. рис. 9.2). До нуля и после нуля возрастание функции выглядит различным, так как до нуля функция возрастает выпукло, а после нуля — вогнуто. При этом точка, через которую происходит смена характера этого возрастания, является точкой перегиба функции.

Определение 11.5. Функция $y = f(x)$ называется *выпуклой* (или выпуклой вверх) на некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Определение 11.6. Функция $y = f(x)$ называется *вогнутой* (или выпуклой вниз) на некотором интервале, если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого интервала выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Геометрически это выглядит следующим образом: если на интервале выпуклости графика провести любую хорду (отрезок, соединяющий две точки графика), то график функции, заключенный между концами хорды, будет находиться над этой хордой, а на интервале вогнутости графика функции — под ней.

Сформулируем достаточные условия выпуклости и вогнутости функции.

Теорема 11.14. *Функция выпукла на некотором интервале тогда и только тогда, когда ее вторая производная во всех точках интервала отрицательна.*

Теорема 11.15. *Функция вогнута на некотором интервале тогда и только тогда, когда ее вторая производная во всех точках интервала положительна.*

Снова рассмотрим график функции $y = x^3$ (см. рис. 9.2). Имеем $y'' = 6x$. Очевидно, что $y'' < 0$ при всех $x < 0$ и до $x = 0$ функция выпукла, $y'' > 0$ при всех $x > 0$ и после $x = 0$ функция вогнута.

Определение 11.7. *Точкой перегиба* графика функции называется такая точка, проходя через которую, график сменяет выпуклость на вогнутость или вогнутость на выпуклость.

Теорема 11.16 (необходимое условие перегиба функции в точке). *Если в некоторой точке функция имеет точку перегиба, то вторая производная функции в этой точке или равна нулю, или не существует.*

Теорема 11.17 (достаточное условие перегиба функции в точке). *Точка x_0 является точкой перегиба функции тогда и только тогда, когда вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через эту точку меняет свой знак.*

Следует отметить, что если к графику функции в некоторой точке провести касательную и она будет расположена выше графика, то функция в точке касания выпукла, а если касательная будет расположена ниже графика, то функция в этой точке касания вогнута.

Кроме того, если в критической точке дифференцируемая функция экстремума не достигает, то в этой точке функция имеет перегиб.

Несколько слов о механическом (физическом) и экономическом смыслах первой и второй производной. Пусть точка движется вдоль некоторой прямой по закону $S = S(t)$, где S — пройденный путь; t — время, на этот путь затраченное. Тогда первая производная этой функции в точке t_0 равна *скорости точки* в данный момент времени t_0 (мгновенной скорости), а вторая производная (скорость скорости) равна *ускорению* точки в этот же момент времени. Там, где график функции $S = S(t)$ выпуклый, скорость увеличивается (движение ускоряется), а где вогнут — там скорость уменьшается (объект начинает «притормаживать»).

В экономике первая производная функции объема (количества) сделанной работы от времени является производительностью труда, а вторая — темпом роста или спада этой производительности. Например, если в некоторый момент времени первая производная функции объема выполненной работы от времени положительна, а вторая отрицательна, то в данный момент наблюдается замедление роста производительности труда.

11.8. Общая схема исследования функций и построения их графиков

Рекомендуется использовать для исследования функции и построения ее графика следующую схему.

1. Нахождение области определения функции.
2. Исследование на четность-нечетность.

3. Нахождение вертикальных асимптот.

4. Нахождение наклонных и горизонтальных асимптот (поведение функции в бесконечности).

5. Нахождение экстремумов и интервалов монотонности функции.

6. Нахождение точек перегиба и интервалов выпуклости-вогнутости функции.

7. Нахождение точек пересечения с осями координат и дополнительных точек, уточняющих график.

8. Построение графика.

Рассмотрим некоторые полезные детали каждого пункта данной схемы со ссылками на ранее изложенный материал:

1. В примере 9.7 мы сделали обобщение и вспомнили все ограничения, связанные с областью определения функции.

В предложенной схеме отсутствует пункт исследования функции на периодичность. Но это свойство присуще только тригонометрическим функциям. Мы не будем строить графики, которые содержат тригонометрические функции. В более простом варианте мы рассмотрели их ранее (см. упражнения 9.4 и 9.9).

2. Отдельные примеры исследования функции на четность-нечетность мы также уже рассмотрели (см. упражнение 9.3).

3—4. Вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты мы находили в упражнениях 10.6 и 10.7. На искомом чертеже асимптоты следует чертить пунктирными линиями.

5. Чтобы найти экстремумы и интервалы монотонности функции, требуется:

а) найти производную функции;

б) пользуясь необходимым условием существования экстремума функции в точке (теорема 11.11), найти критические точки функции. Для этого и числитель, и знаменатель производной приравнять к нулю (это точки, где производная равна нулю и где производная не существует соответственно);

в) пользуясь первым достаточным условием существования экстремума функции в точке (теорема 11.12), исследовать методом интервалов полученные критические точки на экстремум. Сначала нанести их на числовую прямую (масштаб можно не соблюдать). Затем выяснить знак производной на каждом из полученных на прямой интервалов путем подстановки произвольного значения аргумента в выражение для производной (которое должно быть разложено на множители);

г) те интервалы, на которых производная положительна, являются интервалами возрастания, а те, на которых отрицательна, — убывания функции;

д) точки, при проходе через которые меняется знак производной, являются точками экстремума (с «плюса» на «минус» — максимума, с «минуса» на «плюс» — минимума);

е) найти ординаты точек экстремума, которые входят в область определения функции.

6. Чтобы найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости функции, требуется:

а) найти производную второго порядка функции;

б) пользуясь необходимым условием перегиба функции в точке (теорема 11.16), найти точки, в которых возможен перегиб функции. Для этого числитель и знаменатель второй производной приравнять к нулю;

в) пользуясь достаточным условием перегиба функции в точке (теорема 11.17), исследовать методом интервалов полученные в п. б точки на перегиб. Нанести эти точки на числовую прямую. Выяснить знак второй производной на каждом интервале путем подстановки произвольного значения аргумента в выражение для второй производной (которое должно быть разложено на множители);

г) те интервалы, на которых производная второго порядка положительна, являются интервалами вогнутости, а те, на которых отрицательна, — выпуклости функции;

д) точки, при проходе через которые меняется знак второй производной, являются точками перегиба функции;

е) найти ординаты точек перегиба, которые входят в область определения функции.

В случае если вторая производная слишком громоздка, данный пункт исследования можно пропустить.

7. Чтобы найти точку пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью ординат, необходимо задать $x = 0$, если эта точка входит в область определения функции. Тогда $(0; f(0))$ — точка пересечения с осью ординат. Чтобы найти точки пересечения графика с осью абсцисс, необходимо решить уравнение $f(x) = 0$.

Если график не пересекает оси координат или на осях расположены его экстремумы, то для более точного построения графика следует задать два-три значения x и получить дополнительно две-три точки.

8. Отобразить результаты всех пунктов исследования на координатной плоскости. В принципе, отображать эти результаты можно параллельно с исследованием.

Пример 11.8

Исследуем функцию $y = x^3 - 3x$ и построим ее график.

Решение

1. Область определения функции $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x) = -y(x)$, следовательно, функция нечетная. График функции симметричен относительно начала координат.

3. Вертикальных асимптот нет, так как $x \in (-\infty; +\infty)$.

4. Наклонные асимптоты ищем в виде $y = kx + b$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x}{x} = \lim_{x\to\infty} (x^2 - 3) = \infty,$$

следовательно, наклонных и горизонтальных асимптот график функции не имеет.

5. $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ и $x_2 = -1$ — критические точки функции.

Значения производных (рис. 11.9):

$$y'(2) = 3(2-1)(2+1) > 0;$$
$$y'(0) = 3(0-1)(0+1) < 0;$$
$$y'(-2) = 3(-2-1)(-2+1) > 0.$$

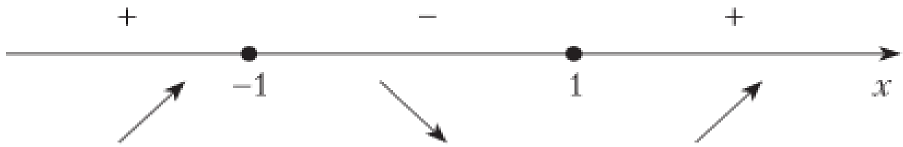


Рис. 11.9

На рис. 11.9 над каждым интервалом расставлены знаки производных.

Стрелками удобно показывать возрастание и убывание функции.

Значения функции: $y(-1)=(-1)^3-3(-1)=2$; $y(1)=-2$.

Получили $(-1;2)$ — точка максимума (возрастание сменяется убыванием), $(1;-2)$ — точка минимума функции (убывание сменяется возрастанием).

6. $y''=(3x^2-3)'=6x$; $6x=0 \Rightarrow x=0$. На рис. 11.10 расставлены знаки производной второго порядка исходной функции. Таким образом, функция выпукла на интервале $(-\infty;0)$, вогнута на интервале $(0;+\infty)$.

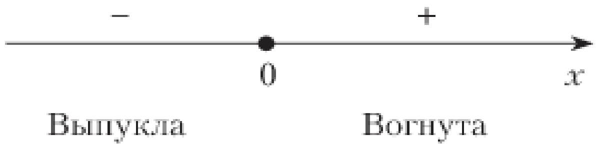


Рис. 11.10

Значение функции $y(0)=0^3-3\cdot 0=0$. Получили $(0;0)$ — точка перегиба функции (она же и точка пересечения с осями координат).

7. $f(x)=0 \Rightarrow x^3-3x=0 \Rightarrow x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0$. Тогда $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$, $x_3=-\sqrt{3}$ — точки пересечения с осью абсцисс.

8. Строим график (рис. 11.11).

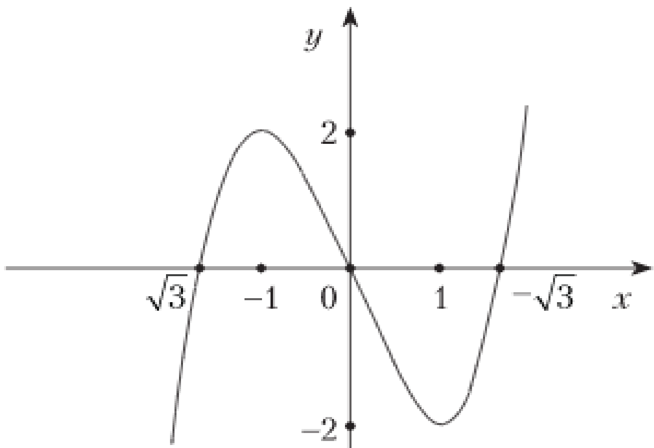


Рис. 11.11

Пример 11.9

Исследуем функцию $y=\dfrac{4x^2}{x^2-1}$ и построим ее график.

Решение

1. $x^2-1\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 1 \Rightarrow$ область определения функции

$$x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty).$$

2. $y(-x)=\dfrac{4\cdot(-x)^2}{(-x)^2-1}=\dfrac{4x^2}{x^2-1}=y(x)$, следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси ординат.

3. $x = \pm 1$ — точки разрыва функции. Рассмотрим односторонние пределы:

$$\lim_{x\to -1-0} y(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{4x^2}{x^2-1} = \infty; \quad \lim_{x\to -1+0} y(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{4x^2}{x^2-1} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{4x^2}{x^2-1} = \infty; \quad \lim_{x\to 1+0} \frac{4x^2}{x^2-1} = \infty.$$

Следовательно, $x = 1$ и $x = -1$ — уравнения вертикальных асимптот.

При желании в качестве дополнительной информации можно выяснять знак бесконечности по знаку дроби: $\lim\limits_{x\to -1+0} \dfrac{4x^2}{x^2-1} = -\infty$, так как знаменатель дроби отрицателен, а числитель положителен; $\lim\limits_{x\to -1-0} \dfrac{4x^2}{x^2-1} = +\infty$, так как числитель и знаменатель оба положительны; $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{4x^2}{x^2-1} = -\infty$, так как числитель положителен, а знаменатель отрицателен; $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{4x^2}{x^2-1} = +\infty$, так как числитель и знаменатель оба положительны.

4. Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$$

(применили правило Лопиталя);

$$b = \lim_{x\to\infty} (y(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2}{x^2-1} - 0\cdot x \right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{x^2-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{8x}{2x} = 4$$

(применили правило Лопиталя).

Получили $y = 0\cdot x + 4 \Rightarrow y = 4$ — уравнение горизонтальной асимптоты.

5. Вычисляем производную:

$$y' = \left(\frac{4x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{(4x^2)'\cdot(x^2-1) - 4x^2\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} = \frac{8x(x^2-1) - 4x^2\cdot 2x}{(x^2-1)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 - 8x - 8x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-8x}{(x-1)^2(x+1)^2}.$$

Применяем метод интервалов (рис. 11.12). Те точки, в которых производная не существует, наносятся на числовую прямую выколотыми.

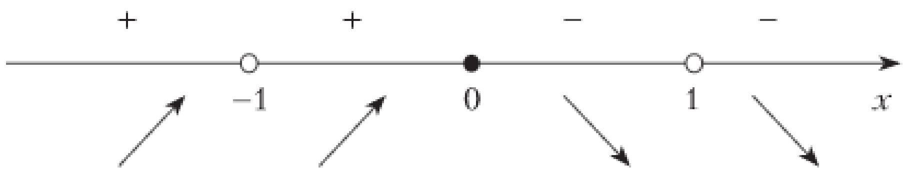


Рис. 11.12

Так как знаменатель при $x \neq \pm 1$ положителен, то знак производной зависит только от знака числителя. Очевидно, что при $x > 0$ $y'(x) < 0$, а при $x < 0$ $y'(x) > 0$.

Значение функции $y(0) = \dfrac{4\cdot 0^2}{0^2-1} = 0$.

Тогда $(0; 0)$ — точка максимума, так как возрастание сменяется убыванием (она же и точка пересечения с осями координат). Точки $x = 1$ и $x = -1$ не являются точками экстремума, так как производная, проходя через эти точки, не меняет своего знака.

6. Находим производную второго порядка исходной функции:

$$y''(x)=\left(\frac{-8x}{(x^2-1)^2}\right)'=-8\cdot\left(\frac{x}{(x^2-1)^2}\right)'=-8\cdot\frac{x'\cdot(x^2-1)^2-x\cdot[(x^2-1)^2]'}{(x^2-1)^4}=$$

$$=-8\cdot\frac{1\cdot(x^2-1)^2-x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=-8\cdot\frac{(x^2-1)(x^2-1-4x^2)}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{-8(-3x^2-1)}{(x^2-1)^3}=\frac{8(3x^2+1)}{(x-1)^3(x+1)^3}.$$

Применяем метод интервалов. На рис. 11.13 расставлены знаки производной второго порядка исходной функции.

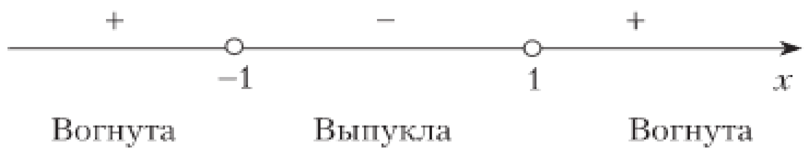


Рис. 11.13

Поскольку $x=1$ и $x=-1$ не входят в область определения функции, то как таковых точек перегиба нет. Наша функция выпукла на интервале $(-1;1)$, вогнута на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$.

7. Точка экстремума $(0;0)$ оказалась единственной точкой пересечения с осями координат, поэтому для уточнения графика произвольно зададим два значения аргумента, например $x=3$ и $x=-3$.

В силу четности функции $y(3)=y(-3)=\dfrac{4\cdot 3^2}{3^2-1}=4{,}5.$

8. Строим график (рис. 11.14).

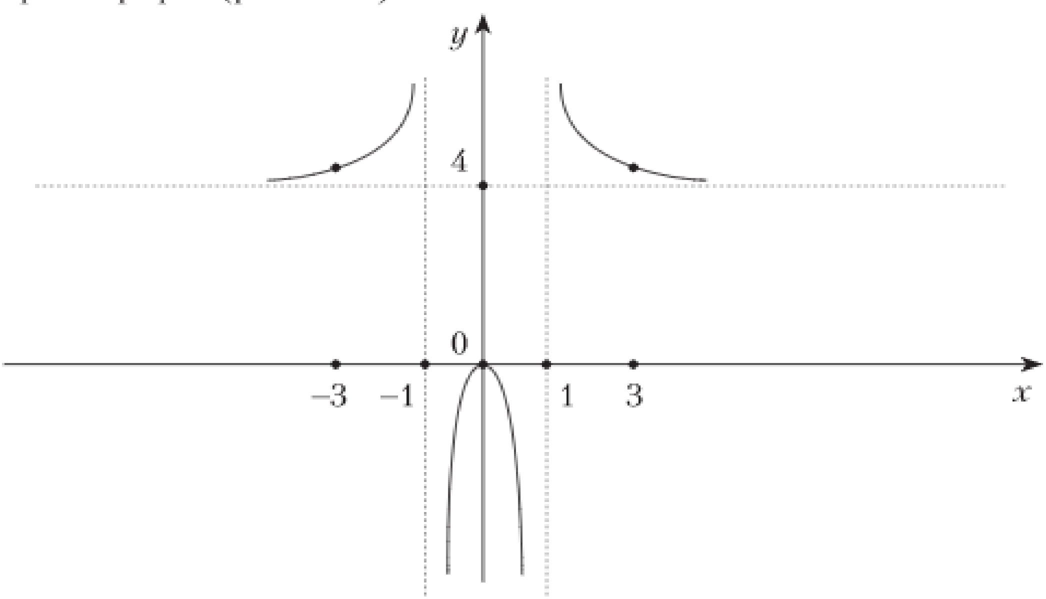


Рис. 11.14

Пример 11.10

Исследуем функцию $y=(x+1)e^{-x}$ и построим ее график.

Решение

1. Область определения функции $y\in(-\infty;+\infty)$.

2. $y(-x)=(-x+1)\,e^{x}$, полученное выражение не равно $y(x)$ или $-y(x)$, следовательно, имеем функцию общего вида.

3. Исходя из области определения функции вертикальных асимптот нет.
4. Ищем наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)\,e^{-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-x}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-x}=(1+0)\cdot\lim_{x\to\infty}e^{-x}=\lim_{x\to\infty}e^{-x}.$$

Необходимо рассмотреть отдельно два случая — когда $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0,\quad \lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty.$$

При $x\to-\infty$ наклонная и горизонтальная асимптоты отсутствуют, продолжим поиск асимптоты при $x\to+\infty$:

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}((x+1)\,e^{-x}-0\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x}}=0$$

(использовали правило Лопиталя).

Получили $y=0\cdot x+0$, или $y=0$, — уравнение правосторонней горизонтальной асимптоты.

5. Находим производную:

$$y'=[(x+1)e^{-x}]'=(x+1)'\cdot e^{-x}+(x+1)(e^{-x})'=$$
$$=1\cdot e^{-x}+(x+1)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(1-x-1)=-x\cdot e^{-x}.$$

Так как e^{-x} в нуль не обращается (всегда положительна), имеем лишь одну критическую точку $x=0$.

Применяем метод интервалов (рис. 11.15).

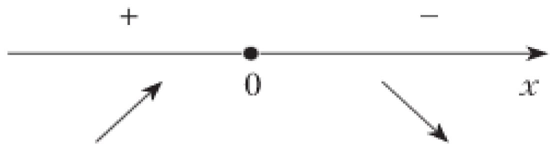


Рис. 11.15

Очевидно, что при $x>0$ $y'(x)<0$, а при $x<0$ $y'(x)>0$. Значение функции $y(0)=(0+1)e^{0}=1$. Точка $(0;1)$ — точка максимума функции, она же точка пересечения с осью ординат.

6. Находим производную второго порядка исходной функции:

$$y''(x)=(-xe^{-x})'=(-x)'\cdot e^{-x}+(-x)\cdot(e^{-x})'=-1\cdot e^{-x}+(-x)\cdot e^{-x}\cdot(-1)=e^{-x}(x-1).$$

Имеем $y''(x)=0$ при $x=1$. Применяем метод интервалов. На рис. 11.16 расставлены знаки производной второго порядка исходной функции.

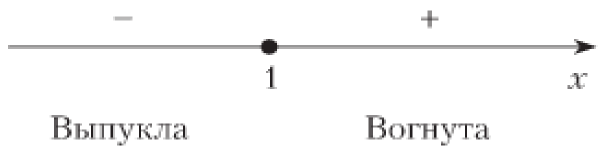


Рис. 11.16

Значение функции $y(1)=(1+1)e^{-1}=2e^{-1}$. На графике такие значения отображаются приближенно (можно считать $2e^{-1}\approx\frac{2}{3}$).

7. Точка пересечения с осью ординат уже была получена как точка экстремума. Ищем точки пересечения с осью абсцисс из уравнения $f(x)=0$:

$$(x+1)e^{-x}=0\Rightarrow x=-1.$$

8. Строим график (рис. 11.17).

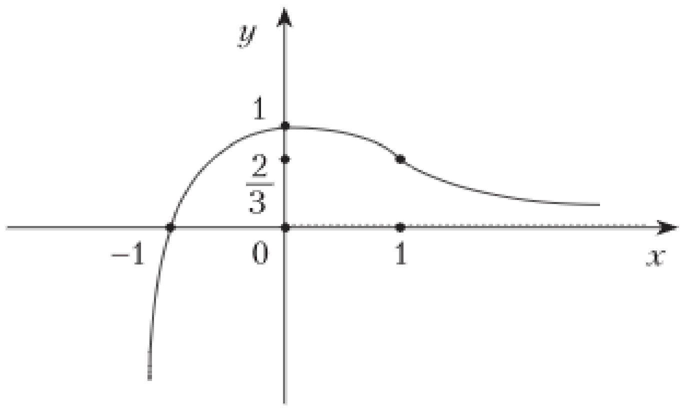


Рис. 11.17

Пример 11.11

Исследуем функцию $y = x \cdot \ln x$ и построим ее график.

Решение

1. Область определения функции — $x > 0$, или $x \in (0; +\infty)$.

2. В силу области определения функции $y(-x)$ не определена, если x из области определения функции. Поэтому наша функция — общего вида.

3. Рассмотрим функцию на наличие вертикальной асимптоты на границе ее области определения:

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x \cdot \ln x) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \to 0+0} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{(\ln x)'}{(x^{-1})'} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x^{-1}}{-1 \cdot x^{-2}} = \lim_{x \to 0+0} (-x) = 0.$$

Получили не только то, что вертикальные асимптоты отсутствуют, но и важную информацию к построению графика: при стремлении аргумента функции к нулю справа сама функция стремится к нулю.

4. Наклонную асимптоту ищем только при $x \to +\infty$:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty.$$

Наклонные асимптоты (и горизонтальные) у графика тоже отсутствуют.

5. Находим производную:

$$y' = (x \ln x)' = x' \ln x + x \cdot (\ln x)' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Найдем критические точки: $\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$.

Вместо числовой прямой рисуем луч, учитывая область определения функции (рис. 11.18).

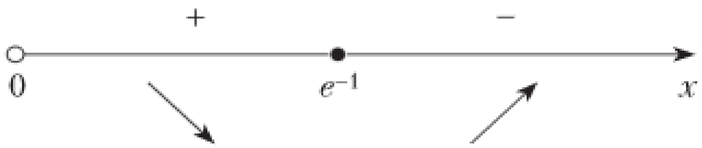


Рис. 11.18

Интервал убывания $(0; e^{-1})$ сменяется интервалом возрастания $(e^{-1}; +\infty)$ функции, следовательно, в точке $x = e^{-1}$ функция достигает минимума. Ее значение в этой точке $y(e^{-1}) = e^{-1} \cdot \ln e^{-1} = e^{-1} \cdot (-1) \ln e = -e^{-1}$.

6. Находим производную второго порядка исходной функции: $y'' = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$.

Очевидно, что на всей области определения $(x > 0)$ $y'' > 0$, следовательно, наша функция всюду вогнута (точек перегиба не имеет).

7. Точек пересечения с осью ординат нет, так как $x = 0$ не входит в область определения функции. Ищем точки пересечения с осью абсцисс:

$$x \cdot \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1.$$

8. Строим график (рис. 11.19).

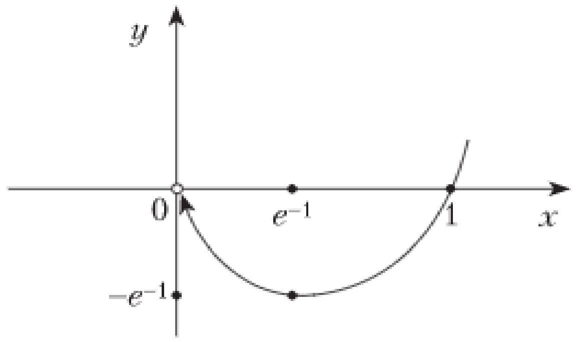


Рис. 11.19

11.9. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором интервале и дифференцируема в некоторой окрестности точки x из области определения, тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Используя теорему 10.1, запишем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$. Умножим каждое слагаемое равенства на Δx:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Получили, что приращение функции состоит из двух слагаемых: первое — линейное относительно Δx, а второе представляет собой бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx (см. параграф 10.3, сравнение бесконечно малых величин).

Определение 11.8. *Дифференциалом функции* называется главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции, равная произведению производной на приращение аргумента:

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Пример 11.12

Найдем дифференциал функции $y = x$.

Решение

По определению дифференциала $dy = y' \cdot \Delta x = x' \cdot \Delta x = \Delta x$, но по условию $y = x$, значит, $dy = dx$, таким образом, получили, что $dx = \Delta x$, т.е. дифференциал аргумента равен приращению аргумента. Следовательно, $dy = y'dx$, или $y' = \dfrac{dy}{dx}$.

Рассмотрим рис. 11.20.

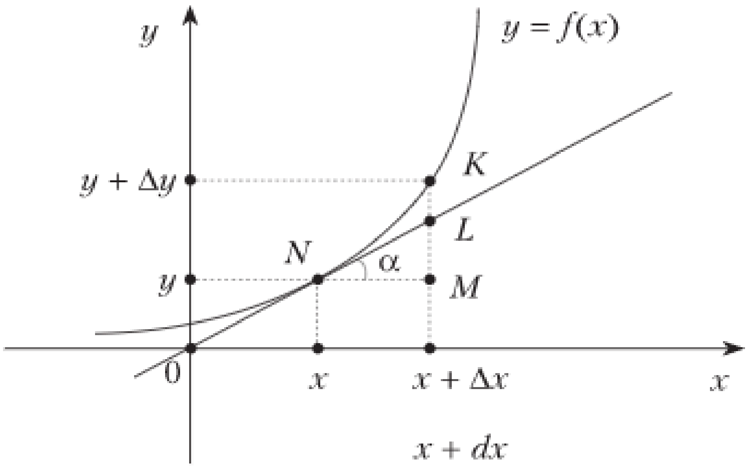


Рис. 11.20

На графике функции взята произвольно точка $N(x; y)$, аргументу x дается приращение Δx (которое равно dx), вследствие этого функция получает приращение Δy. В этой точке N проведена касательная к графику функции, образующая угол α с положительным направлением оси абсцисс. Из геометрического смысла производной следует, что $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Имеем прямоугольный треугольник NML, в котором

$$LM = NM \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \cdot f'(x).$$

Исходя из определения дифференциала функции имеем $LM = dy$, откуда следует *геометрический смысл дифференциала функции в точке*: дифференциал функции в точке численно равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, при изменении абсциссы этой точки на соответствующее приращение.

Почти все свойства дифференциала аналогичны свойствам производной:

1) $dc = 0$;
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$;
4) $d(c \cdot u) = c \cdot du$;
5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$,

где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые по x функции, а c — постоянное число.

Одним из свойств, которым обладает дифференциал, но не обладает производная функции, является *свойство инвариантности формы дифференциала* (неизменности формы или формулы дифференциала): форма дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной рассматривать функцию от зависимой от нее переменной u: $dy = f'(u)du$, где $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ — функции, дифференцируемые от своих аргументов.

При помощи дифференциала можно осуществлять приближенные вычисления (причем чем меньше dx по абсолютной величине, тем точнее вычисление).

Пример 11.13

Вычислим приближенно sin 39° с точностью до 0,01.

Решение

Представим $\sin 39° = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{20}\right)$.

Имеем: $y = \sin x$, $x_0 = 30°$, $\Delta x = dx = \frac{\pi}{20} \approx 0{,}157$. По определению дифференциала $dy = y'dx$.

Воспользуемся тем, что при достаточно малых значениях Δx $dy \approx \Delta y = y(39°) - y(30°)$, это связано с тем, что Δy отличается от dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем dy.

Следовательно:

$$y(39°) - y(30°) = y'(30°) \cdot dx \Rightarrow y(39°) - 0{,}5 = \cos 30° \cdot dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y(39°) \approx 0{,}5 + 0{,}85 \cdot 0{,}157 \approx 0{,}63$$

(так как $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1{,}7}{2} \approx 0{,}85$).

Для дифференцируемых функций $y(x)$ имеют место не только производные высших порядков, но и дифференциалы высших порядков, которые получаются взятием дифференциала от дифференциала:

$d^2y = d(dy)$ — дифференциал второго порядка;

$d^n y = d(d^{n-1}y)$ — дифференциал n-го порядка.

Вычисляем:

$$d^2y = d(dy) = d(y'dx) = dy' \cdot dx = (y')'dx \cdot dx = y''(dx)^2$$

(dx не зависит от x, поэтому как постоянный множитель был вынесен за знак производной). Выражение $(dx)^2$ обычно записывают без скобок как dx^2. Получили выражение для дифференциала второго порядка: $d^2y = y''dx^2$, аналогичным образом можно получить $d^n y = y^{(n)}dx^n$.

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение производной функции.
2. Каков геометрический смысл производной функции в точке?
3. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.
4. Приведите примеры непрерывных, но не дифференцируемых функций в точке.
5. В каких случаях применяется правило Лопиталя? Сформулируйте его.
6. Сформулируйте достаточные условия существования экстремума функции в точке.
7. Приведите примеры функций, имеющих экстремум в точке, в которой функция не дифференцируема.

Практикум по решению задач

Упражнение 11.1. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x-6}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Решение

Уравнение касательной ищем в виде $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания. Найдем эти координаты. Задаем $x_0 = 0$, получаем $y_0 = \dfrac{0-6}{0+2} = -3$, следовательно, $(0; -3)$ — точка пересечения графика функции с осью ординат, она же точка касания.

Вычисляем производную:

$$y'(x) = \left(\frac{x-6}{x+2}\right)' = \frac{(x-6)'\cdot(x+2)-(x-6)\cdot(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1\cdot(x+2)-(x-6)\cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2}.$$

В точке x_0 $y'(x_0) = y'(0) = \dfrac{8}{(0+2)^2} = 2$. Теперь запишем уравнение касательной:

$$y-(-3) = 2(x-0),\text{ или } y+3 = 2x,\text{ или окончательно } y = 2x-3.$$

Упражнение 11.2. Напишем уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 1$, перпендикулярной прямой $x + 2y - 4 = 0$.

Решение

Уравнение касательной ищем в виде $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, где $(x_0; y_0)$ — координаты точки касания; $y'(x_0)$ — угловой коэффициент касательной. В отличие от предыдущей задачи, в которой мы сначала нашли координаты точки касания, а потом угловой коэффициент касательной, в этой задаче, исходя из условия, сначала найдем угловой коэффициент, а затем из него получим координаты точки касания.

Найдем угловой коэффициент прямой, которая дана в условии задачи:

$$x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -0{,}5x + 2 \Rightarrow k = -0{,}5.$$

По условию эта прямая и искомая касательная перпендикулярны, следовательно, их угловые коэффициенты удовлетворяют равенству $k \cdot k_{\text{кас}} = -1$, где $k_{\text{кас}}$ — угловой коэффициент касательной. Из этого равенства получаем, что $k_{\text{кас}} = 2$.

Пользуясь геометрическим смыслом производной функции в точке $y'(x_0) = k_{\text{кас}}$, имеем $y'(x_0) = 2$. Для нахождения x_0 следует сначала найти $y'(x)$:

$$y'(x) = (x^2 - 4x + 1)' = 2x - 4 \Rightarrow y'(x_0) = 2x_0 - 4,$$

но $y'(x_0) = 2 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Rightarrow x_0 = 3$, $y_0 = y(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 1 = -2$. Подставим найденные x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение касательной:

$$y-(-2) = 2(x-3),\text{ или } y = 2x-8.$$

Упражнение 11.3. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке $[-2; 0{,}5]$.

Решение

Используя необходимое условие экстремума функции в точке, найдем критические точки функции, принадлежащие заданному в условии отрезку:

$$y' = (x^4 - 2x^2 + 1)' = 4x^3 - 4x;$$

$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1.$$

Из этих трех точек x_1 и x_3 принадлежат отрезку $[-2; 0,5]$, а x_2 не принадлежит. Пользуемся изложенным в параграфе 11.6 теоретическим материалом и рис. 11.8. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезку находятся или в точках экстремума, или на концах рассматриваемого отрезка. Поэтому достаточно сравнить значения функций в упомянутых точках (при этом нет необходимости исследовать критические точки на наличие в них экстремума функции). Имеем

$$y(0) = 0^4 - 2\cdot 0^2 + 1 = 1;$$

$$y(-1) = (-1)^4 - 2\cdot(-1)^2 + 1 = 0;$$

$$y(-2) = (-2)^4 - 2\cdot(-2)^2 + 1 = 9;$$

$$y(0,5) = (0,5)^4 - 2\cdot(0,5)^2 + 1 = \frac{9}{16}.$$

Ответ: $y_{\max} = 9,\ y_{\min} = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

11.1. Используя определение производной, найдите производные функций:

а) $y = 3x+1$; б) $y = e^{2x}$; в) $y = \sqrt{2+4x}$.

11.2. Найдите производные функций:

1) $y = \left(\dfrac{x^3-1}{x^3+1}\right)^2$; 2) $y = x^{10}\lg x$; 3) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin\ln x}$; 4) $y = 3^{-x}\cos x^3$; 5) $y = \sqrt{x^5}\operatorname{arctg}^2 x$;

6) $y = \cos^4 x - \sin^4 x$; 7) $y = \arcsin\sqrt{x} + \arccos x^2$; 8) $y = e^{\sqrt{1-x}}\cdot\operatorname{tg}3x$;

9) $y = \operatorname{arcctg}(x^4 + 4^x) + \ln 2$; 10) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{\sin x+2}{\sin x-2}} + \ln\sin\dfrac{\pi}{5}$; 11) $y = \sin x\cdot\ln\sin x$;

12) $y = (1+x^2)\operatorname{arctg}^2 x$; 13) $y = \sqrt{1-x^2}\arccos^2 x$; 14) $y = \ln(\sqrt[4]{x^7}\cdot e^{5x}\cdot\sin x)$;

15) $y = \sin^2 x - \cos 2x - e^3$; 16) $y = 2x(\operatorname{arctg}5x + \operatorname{arcctg}5x)$; 17) $y = e^{x^2} + e^{4x} + e^5$;

18) $y = \dfrac{5}{x^3} - \dfrac{3}{\ln x}$; 19) $y = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$; 20) $y = \operatorname{arctg}x\cdot\operatorname{arcctg}x$; 21) $y = \sqrt{1+\sqrt[3]{x}}$;

22) $y = \sqrt{\ln\sqrt[5]{x}}$; 23) $y = \log_{\cos x}\sin x$; 24) $y = \sin^3 2x + \cos^3 2x - 6x$.

11.3. Вычислите значения производной при $x = x_0$:

а) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x,\ x_0 = 0$;

б) $y = \ln\sin x + \ln cos x,\ x_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

в) $y = \dfrac{2+e^{2x}}{2-e^{2x}},\ x_0 = \ln 2$.

11.4. Найдите производные третьего порядка функций:

а) $y = \cos^2 4x$;

б) $y = x^3\ln x$;

в) $y = \dfrac{2x-1}{2x+1}$.

11.5. Найдите пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\lg^3 x}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 7}{x^2-25}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{2x}-e^4}{x^3-8}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3\ln x)$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}(x\ln^2 x)$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{4x-\pi}$; з) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arcsin(1-x)}{x^2-1}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2x+1)}{\sin 5x}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)^{2x}$; л) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x-1}{x^2-x}$; м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(3x+1)}{x^3+5x^2}$; н) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{x^4+x^2}$.

11.6. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\ln(4x+3)$ в точке с абсциссой $x=-0{,}5$.

11.7. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=-x^2+6x-5$ перпендикулярно прямой $x-2y+7=0$.

11.8. Составьте уравнения касательных к графику функции $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$, которые параллельны прямой $7x-y+2=0$.

11.9. Составьте уравнения касательных к графику функции $y=(x^2+1)(x-2)$ в точках ее пересечения с осями координат.

11.10. Составьте уравнения касательных к графику функции $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, образующих с положительным направлением оси абсцисс угол 135°.

11.11. Найдите интервалы монотонности функций:

а) $y=1-24x+15x^2-2x^3$; б) $y=\ln(1-x^2)$; в) $y=\cos x-x$; г) $y=\dfrac{e^{4x}}{1+x}$;

д) $y=2x(\ln x-2)$; е) $y=2\sin x-x$; ж) $y=\sqrt{\lg x}-10$.

11.12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке $[a;b]$:

а) $y=x^3-3x^2-9x+20$ на $[-4;4]$;

б) $y=x^3\ln x$ на $[1;e]$;

в) $y=\operatorname{arctg} x^4$ на $[-0{,}5;1]$;

г) $y=2\sin x+\cos x$ на $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

11.13. Используя понятие дифференциала, вычислите приближенно с точностью до 0,01 (считать $\pi=3{,}14$; $\sqrt{3}=1{,}7$):

а) $\sqrt[4]{18}$; б) $\sin 28°$; в) $\operatorname{arctg} 0{,}99$; г) $\ln 1{,}03$; д) $\arcsin 0{,}6$.

11.14. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y=x^2(x-1)^2$; б) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$; в) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; г) $y=\dfrac{3x-2}{x^3}$; д) $y=x+\dfrac{1}{x}$;

е) $y=\dfrac{x^2-6x+21}{x^2-9}$; ж) $y=x\sqrt{1-x^2}$; з) $y=e^{-x^2}$; и) $y=x^2e^{-3x}$; к) $y=\dfrac{e^{2x}}{x-1}$;

л) $y=\dfrac{e^{x^2}}{x}$; м) $y=\ln(4-x^2)$; н) $y=x-2\ln x$; о) $y=\dfrac{1+\ln x}{x}$.

Глава 12
ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

12.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл

В предыдущей главе одной из главных была задача нахождения производной от заданной функции. Теперь стоит *обратная* задача: зная производную, найти функцию, от которой была получена эта производная.

Определение 12.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на некотором множестве X, если в каждой точке этого множества выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Например, функция $F(x) = x^3$ является первообразной для функции $f(x) = 3x^2$, так как $(x^3)' = 3x^2$.

Но $F(x) = x^3 + 1$ тоже является первообразной для $f(x) = 3x^2$, так как $(x^3 + 1)' = 3x^2$. Этот факт формулируется в виде теоремы.

Теорема 12.1. *Любая непрерывная функция имеет бесконечное множество первообразных, которые отличаются друг от друга только постоянным слагаемым.*

Определение 12.2. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на некотором множестве X называется ее *неопределенным интегралом*.

Обозначение: $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Например: $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ — подынтегральным выражением; C — произвольная постоянная. Дифференциал dx (а точнее, выражение, стоящее под знаком дифференциала) указывает, по какой переменной ведется интегрирование.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием*. Поскольку представленный выше интеграл не имеет в виду нахождение какой-то конкретной первообразной, то такой интеграл называется *неопределенным интегралом*.

График первообразной от функции $f(x)$ называется *интегральной кривой* функции $f(x)$. Если построить одну интегральную кривую, то все остальные можно получить, передвигая построенную вдоль оси ординат.

12.2. Свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования

Перечислим основные *свойства* неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$(\int f(x)dx)' = f(x).$$

2. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx.$$

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции с точностью до постоянного слагаемого равен этой функции:

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int r \cdot f(x)\, dx = r \cdot \int f(x)\, dx,$$

где r — постоянное число, отличное от нуля.

5. Интеграл от алгебраической суммы нескольких функций равен такой же алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx.$$

Приведем доказательства трех первых свойств.

1) Пользуясь определениями сначала неопределенного интеграла, а затем и первообразной функции, имеем

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x),$$

что и требовалось доказать.

2) Пользуясь сначала определением неопределенного интеграла, а затем свойством и определением дифференциала, имеем

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = d(F(x)) + dC = F'(x)dx + 0 = f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

3) Пользуясь определениями сначала дифференциала, а затем неопределенного интеграла, имеем

$$\int d(F(x)) = \int F'(x)dx = \int f(x)\, dx = F(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

Перечислим наиболее часто употребляемые интегралы от элементарных функций, в дальнейшем их можно называть «табличными»:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$;

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

5) $\int e^x dx = e^x + C;$

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

11) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C;$

13) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C.$

В этих формулах a является произвольным постоянным числом, наличие a^2 объясняется «жесткостью» формулы в смысле неизменности знака перед a^2.

Справедливость представленных формул можно проверить, используя определение первообразной. Продифференцировав правые части всех формул, мы получим подынтегральные функции левых частей соответствующих формул.

Эти формулы обладают очень важным свойством.

Теорема 12.2 (свойство инвариантности формул интегрирования). *Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной любой дифференцируемой от нее функции.*

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ — дифференцируемая по x функция.

Например, по второй табличной формуле $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ и, пользуясь этой же формулой, получим $\int 3\sin^2 x d(\sin x) = \sin^3 x + C$.

Таким образом, мы видим, что под знаком дифференциала может стоять не только x, что найдет отражение при нахождении интегралов в одном из методов интегрирования.

12.3. Основные методы интегрирования

К сожалению, не существует одного универсального метода интегрирования. Поэтому имеется много различных методов, и несмотря на это, они все не дают возможности проинтегрировать любую функцию. Иными словами, к формулировке теоремы 12.1 следует добавить, что не для любой функции мы можем найти первообразную. В силу этого мы рассматриваем несколько основных методов интегрирования.

1. Метод разложения интеграла в сумму интегралов. Базируется этот метод на пятом свойстве неопределенного интеграла (см. параграф 12.2):

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int \varphi(x)\, dx.$$

Пример 12.1

Найдем $\int \left(x^3 - 3^x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{3}{x} + \frac{5}{\sqrt{x^2-2}} \right) dx.$

Решение

$$\int \left(x^3 - 3^x + \frac{2}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{3}{x} + \frac{5}{\sqrt{x^2-2}} \right) dx =$$

$$= \int x^3 dx - \int 3^x dx + 2\int x^{-\frac{5}{3}} - 3\int \frac{dx}{x} + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}} =$$

$$= \frac{x^4}{x} - \frac{3^x}{\ln 3} + 2 \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3\ln|x| + 5\ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| + C =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}} - 3\ln|x| + 5\ln\left|x + \sqrt{x^2-2}\right| + C.$$

При решении примера 12.1 использовались четвертое свойство неопределенного интеграла (о том, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла) и формулы табличных интегралов (см. параграф 12.2): вторая (для 1-го и 3-го слагаемых), четвертая (для 2-го слагаемого), третья (для 4-го слагаемого) и двенадцатая (для 5-го слагаемого). В ответе записана одна неопределенная постоянная C, если записывать постоянные от каждого слагаемого, то в результате их сложения получится все равно постоянное число C.

Пример 12.2

Найдем $\int \frac{(x-2)^3}{x^2}\, dx.$

Решение

Сначала преобразуем подынтегральную функцию, раскрывая скобки по формуле $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ и деля почленно числитель на знаменатель. После этого можно раскладывать интеграл в сумму интегралов:

$$\int \frac{(x-2)^3}{x^2}\, dx = \int \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{x^3}{x^2} - \frac{6x^2}{x^2} + \frac{12x}{x^2} - \frac{8}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int x dx - 6\int dx + 12\int \frac{dx}{x} - 8\int x^{-2} dx = \frac{x^2}{2} - 6x + 12\ln|x| + \frac{8}{x} + C.$$

При решении примера 12.2 использовались кроме четвертого свойства (подробнее — в предыдущем примере) формулы табличных интегралов: вторая (для 1-го и 4-го слагаемых), первая (для 2-го слагаемого) и третья (для 3-го слагаемого).

2. Метод замены переменной. Рассмотрим метод на примерах.

Пример 12.3

Найдем $\int \sqrt{4-3x}\,dx$.

Решение

Сделаем замену $4-3x=y$. Необходимо теперь выразить x и dx через новую переменную y (старой переменной под интегралом быть не должно):

$$x=\frac{4}{3}-\frac{y}{3};\ dx=d\left(\frac{4}{3}-\frac{y}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}-\frac{y}{3}\right)'dy=-\frac{dy}{3}.$$

Подставим полученные выражения в исходный интеграл, в найденной первообразной необходимо вернуться к старой переменной:

$$\int\sqrt{4-3x}\,dx=\int\sqrt{y}\cdot\left(-\frac{dy}{3}\right)=-\frac{1}{3}\int y^{-0,5}dy=-\frac{1}{3}\cdot\frac{y^{1,5}}{1,5}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3}+C.$$

Пример 12.4

Найдем $\int\frac{dx}{x\ln x}$.

Решение

Сделаем замену $y=\ln x\Rightarrow x=e^y\Rightarrow dx=d(e^y)=(e^y)'dy=e^y dy$. Подставим в исходный интеграл:

$$\int\frac{dx}{x\ln x}=\int\frac{e^y dy}{e^y\cdot y}=\int\frac{dy}{y}=\ln|y|+C=\ln|\ln x|+C.$$

Пример 12.5

Найдем $\int x\cdot 3^{x^2}dx$.

Решение

Сделаем замену $y=x^2\Rightarrow x=\sqrt{y}\Rightarrow dx=d(\sqrt{y})=(\sqrt{y})'dy=\frac{dy}{2\sqrt{y}}$. Подставим в исходный интеграл:

$$\int x\cdot 3^{x^2}dx=\int\sqrt{y}\cdot 3^y\frac{dy}{2\sqrt{y}}=\frac{1}{2}\int 3^y dy=\frac{3^y}{2\ln 3}+C=\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C.$$

Пример 12.6

Найдем $\int\frac{dx}{\sqrt{x-1}+3}$.

Решение

Сделаем замену $y=\sqrt{x-1}+3\Rightarrow x-1=(y-3)^2\Rightarrow x=y^2-6y+10\Rightarrow dx=d(y^2-6y+$ $+10)\Rightarrow dx=(2y-6)dy$. Подставим в исходный интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}+3} = \int \frac{(2y-6)dy}{y} = \int \left(\frac{2y}{y} - \frac{6}{y} \right) dy = 2\int dy - 6\int \frac{dy}{y} = 2y - 6\ln|y| + C =$$
$$= 2(\sqrt{x-1}+3) - 6\ln\left|\sqrt{x-1}+3\right| + C,$$

или $2\sqrt{x-1} - 6\ln(\sqrt{x-1}+3) + C$ (так как $6 + C = C$, а $\sqrt{x-1}+3 > 0$ всегда).

Но не любая замена может привести решение к ответу. С заменой можно «не угадать». Наряду с методом замены переменной может применяться *метод внесения функции под знак дифференциала*.

Мы не рассматриваем его отдельно, так как этим методом решается большинство примеров, решаемых методом замены переменной. И он не затрагивает примеры, которые не могут быть решены при помощи замены. Так, среди рассмотренных примеры 12.3, 12.4 и 12.5 могут быть решены методом внесения функции под знак дифференциала.

Базируется этот метод на определении дифференциала функции и свойстве инвариантности формул интегрирования (теорема 12.2). Преимущество его перед методом замены переменной состоит в том, что можно прогнозировать в начальной стадии, имеет ли смысл внесение под знак дифференциала какой-либо функции или нет. Вернемся к примеру 12.4, решив его по-новому.

Пример 12.7 (12.4)

Найдем $\int \frac{dx}{x\ln x}$, используя внесение функции под знак дифференциала.

Решение

Один из сомножителей подынтегральной функции $\frac{1}{x}$ является производной от $\ln x$, функции, которая также представлена в подынтегральной функции. Из определения дифференциала функции следует, что $y'dx = dy$, значит, $\frac{1}{x}dx = (\ln x)'dx = d(\ln x)$. Используем полученное в исходном интеграле:

$$I = \int \frac{dx}{x\ln x} = \int \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int \frac{1}{\ln x} d(\ln x).$$

Теперь воспользуемся свойством инвариантности формул интегрирования (теорема 12.2) и третьей формулой табличных интегралов $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. Таким образом, имеем (мысленно рассматривая $\ln x$ в качестве u): $I = \ln|\ln x| + C$, этот же ответ мы получили ранее, делая замену переменной в исходном интеграле.

Для решения некоторых примеров, в которых под знаком дифференциала хотелось бы иметь $ax + b$ (a и b — постоянные числа) вместо x, можно вывести полезную формулу. Рассмотрим $d(ax + b)$. Пользуясь свойствами дифференциала функции, преобразуем это выражение: $d(ax + b) = d(ax) + db = adx + 0$, т.е. получим $adx = d(ax + b)$. Разделив обе части равенства на a, имеем

$$dx = \frac{1}{a} d(ax + b).$$

Этой формулой можно воспользоваться при решении примера 12.3.

Пример 12.8 (12.3)

Найдем $\int\sqrt{4-3x}\,dx$ методом внесения функции под знак дифференциала.

Решение

Воспользуемся формулой $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$. В нашем случае $a=-3$, $b=4$, следовательно:

$$I=\int\sqrt{4-3x}\,dx=\int\sqrt{4-3x}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)d(4-3x)=-\frac{1}{3}\int(4-3x)^{0,5}d(4-3x).$$

Воспользуемся свойством инвариантности формул интегрирования, по второй формуле табличных интегралов будем иметь

$$I=-\frac{1}{3}\cdot\frac{(4-3x)^{1,5}}{1,5}+C=-\frac{2}{9}\sqrt{(4-3x)^3}+C,$$

что и было получено в решении примера 12.3.

Пример 12.9 (12.5)

Найдем $\int x\cdot 3^{x^2}dx$ методом внесения функции под знак дифференциала.

Решение

Сомножитель подынтегральной функции x является производной от $\frac{x^2}{2}$, выражение x^2 имеется в показателе степени, это значит, что есть смысл пробовать метод внесения под знак дифференциала:

$$I=\int x\cdot 3^{x^2}dx=\int 3^{x^2}d\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Постоянный множитель $\frac{1}{2}$ следует вынести как за знак дифференциала, так и за знак интеграла. Пользуясь инвариантностью формул интегрирования и четвертой формулой табличных интегралов, имеем

$$I=\frac{1}{2}\int 3^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{x^2}}{\ln 3}+C=\frac{3^{x^2}}{2\ln 3}+C,$$

что и было получено в примере 12.5.

Пример 12.10

Найдем $\int\frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение

Множитель $\frac{1}{\sqrt{x}}$ является производной от $2\sqrt{x}$. Имеем

$$I=\int\frac{e^{\sqrt{x}-2}}{\sqrt{x}}dx=\int e^{\sqrt{x}-2}\cdot(2\sqrt{x})'dx=\int e^{\sqrt{x}-2}d(2\sqrt{x})=2\int e^{\sqrt{x}-2}d\sqrt{x}.$$

Воспользуемся формулой $dx=\frac{1}{a}d(ax+b)$, в нашем случае в качестве x выступает $\sqrt{x}$, $a=1$, $b=-2$, поэтому $d\sqrt{x}=d(\sqrt{x}-2)$. Для получения ответа воспользуемся инвариантностью формул интегрирования и пятой формулой табличных интегралов:

$$I=2\int e^{\sqrt{x}-2}d(\sqrt{x}-2)=2e^{\sqrt{x}-2}+C.$$

Пример 12.11

Найдем $\int \frac{dx}{\sin 2x}$.

Решение

Преобразуем подынтегральную функцию: числитель умножим на единицу, представленную в тригонометрической форме ($1 = \sin^2 x + \cos^2 x$), а в знаменателе используем формулу синуса двойного угла: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Получаем

$$I = \int \frac{dx}{\sin 2x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x}dx.$$

Почленно разделим числитель на знаменатель и преобразуем I в сумму интегралов, сокращая дроби и вынося постоянный множитель за знак интеграла:

$$I = \int\left(\frac{\sin^2 x}{2\sin x\cos x} + \frac{\cos^2 x}{2\sin x\cos x}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{\sin x}{\cos x}dx + \frac{1}{2}\int\frac{\cos x}{\sin x}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{(-\cos x)'dx}{\cos x} + \frac{1}{2}\int\frac{(\sin x)'dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\int\frac{d(-\cos x)}{\cos x} + \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x)}{\sin x} =$$
$$= \frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x)}{\sin x} - \frac{1}{2}\int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{1}{2}\ln|\sin x| - \frac{1}{2}\ln|\cos x| + C =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x}{\cos x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x| + C.$$

3. Метод интегрирования по частям. Этот и предыдущий методы взаимно дополняют друг друга. Когда все варианты с заменой переменной или внесением под знак дифференциала оказываются бесплодными, стоит попробовать применить метод интегрирования по частям.

Выведем формулу, являющуюся основой этого метода. Запишем одно из свойств дифференциала:

$$d(u\cdot v) = du\cdot v + u\cdot dv,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые дифференцируемые по x функции. Проинтегрируем обе части нашего равенства:

$$\int d(u\cdot v) = \int(vdu + udv).$$

Воспользуемся вторым (для левой части) и пятым (для правой) свойствами неопределенного интеграла (см. параграф 12.2). Постоянную C в левой части можно не записывать, так как в правой части интегралы остаются:

$$u\cdot v = \int vdu + \int udv.$$

Перенесем первое слагаемое из правой части в левую и запишем равенство справа налево:

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Это и есть формула интегрирования по частям. Если правильно подходить к выбору функции $u(x)$, то интеграл, стоящий в правой части формулы, — или табличный, или существенно проще, чем интеграл, стоящий в левой части. И можно продолжать решение, в том числе применяя метод интегрирования по частям еще раз. Если интеграл, стоящий справа, стал более сложным, чем был слева, значит, функция $u(x)$ выбрана была неверно. Чтобы можно было быстрее выбрать правильный путь решения, сформулируем *правило выбора* функции u.

В первую очередь за u принимаются обратные тригонометрические функции или логарифмы. Если этих функций нет, то за u принимают степенную функцию x^n. Если отсутствует и степенная функция, то из оставшихся показательной и тригонометрической функций за u можно принимать любую из них. Естественно, в качестве dv принимается оставшаяся часть подынтегрального выражения.

Что касается одинакового приоритета обратной тригонометрической и логарифмической функций в части выбора u, следует заметить, что найти первообразную от функций, состоящих из произведения обратных тригонометрических и логарифмических функций, в общем случае невозможно.

Пример 12.12

Найдем $\int(3x-5)\ln x\,dx$.

Решение

Согласно правилу выбора u $u=\ln x$, а $(3x-5)dx=dv$. Чтобы воспользоваться формулой интегрирования по частям, следует найти du и v:

$$du=d(\ln x)=(\ln x)'dx=\frac{1}{x}dx;$$

$$v=\int dv=\int(3x-5)dx=\frac{3x^2}{2}-5x$$

(ранее отмечалось, что прибавлять постоянную C нет необходимости). Подставляем полученные выражения в формулу интегрирования по частям:

$$I=\int(3x-5)\ln x\,dx=\ln x\cdot\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right)-\int\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right)\ln x-\int\left(\frac{3x}{2}-5\right)dx.$$

Пользоваться пятым свойством неопределенного интеграла можно, не расписывая интеграл в сумму нескольких интегралов, а интегрируя каждое слагаемое этой суммы:

$$I=\left(\frac{3x^2}{2}-5x\right)\ln x-\left(\frac{3x^2}{4}-5x\right)+C,$$

это и есть окончательный ответ нашего примера.

Пример 12.13

Найдем $\int(x^2-3x)e^{4x}dx$.

Решение

Согласно правилу выбора функции u за нее выбираем степенную функцию: $u=x^2-3x,\ dv=e^{4x}dx$.

Найдем du и v:

$$du=d(x^2-3x)=(x^2-3x)'dx=(2x-3)dx;$$

$$v=\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}\int e^{4x}d(4x)=\frac{e^{4x}}{4}.$$

Подставим в формулу интегрирования по частям:

$$I = \int (x^2 - 3x)e^{4x}dx = (x^2 - 3x)\cdot\frac{1}{4}e^{4x} - \int (2x - 3)\cdot\frac{1}{4}e^{4x}dx =$$
$$= \frac{x^2 - 3x}{4}\cdot e^{4x} - \int\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{4x}dx.$$

Получили интеграл, не являющийся табличным, но который проще исходного, так как степень первого сомножителя понизилась. Проведем интегрирование по частям еще раз. За u снова выбираем степенную функцию: $u = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$, $dv = e^{4x}dx$, откуда $du = d\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}dx$, а v была найдена при первом интегрировании по частям: $v = \frac{1}{4}e^{4x}$. Подставляем в формулу интегрирования по частям:

$$I = \frac{x^2 - 3x}{4}\cdot e^{4x} - \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}e^{4x} - \int\frac{1}{4}e^{4x}\cdot\frac{1}{2}dx\right] =$$
$$= \frac{x^2 - 3x}{4}\cdot e^{4x} - \frac{2x - 3}{16}\cdot e^{4x} + \frac{1}{8}\int e^{4x}dx = \frac{x^2 - 3x}{4}e^{4x} - \frac{2x - 3}{16}\cdot e^{4x} + \frac{1}{32}e^{4x} + C =$$
$$= \frac{e^{4x}}{32}\cdot(8x^2 - 24x - 4x + 6 + 1) + C = \frac{8x^2 - 28x + 7}{32}\cdot e^{4x} + C.$$

Пример 12.14

Найдем $\int e^{2x}\sin 2x\,dx$.

Решение

За u можно принимать любой из сомножителей подынтегральной функции. Пусть $u = \sin 2x$, $dv = e^{2x}dx$, тогда

$$du = d(\sin 2x) = (\sin 2x)'dx = 2\cos 2x\,dx;$$
$$v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x) = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Подставим в формулу интегрирования по частям:

$$I = \int e^{2x}\sin 2x\,dx = \sin 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} - \int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\cos 2x\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{2x} - \int e^{2x}\cos 2x\,dx.$$

Применим интегрирование по частям еще раз. Пусть $u = \cos 2x$, $dv = e^{2x}dx$, тогда

$$du = d(\cos 2x) = (\cos 2x)'dx = -2\sin 2xdx;\quad v = \frac{1}{2}e^{2x}.$$

Подставим в формулу интегрирования по частям:

$$I = \frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{2x} - \left(\cos 2x\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + \int\frac{1}{2}e^{2x}\cdot 2\sin 2x\,dx\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x\cdot e^{x} - \frac{1}{2}\cos 2x\cdot e^{x} - \int e^{2x}\sin 2x\,dx.$$

Но полученный интеграл совпадает с исходным, который мы обозначили как I. Таким образом, имеем

$$I = \frac{e^{2x}}{2}(\sin 2x - \cos 2x) - I.$$

Перенеся I из правой части равенства в левую и разделив обе части полученного равенства на 2, имеем ответ:

$$I = \frac{e^{2x}}{4}(\sin 2x - \cos 2x) + C.$$

4. Интегрирование функций вида

$$\frac{a_1x + b_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} \text{ и } \frac{a_1x + b_1}{\sqrt{a_2x^2 + b_2x + c_2}},$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 и c_2 — постоянные числа. Интегрирование таких дробей рекомендуется осуществлять по следующей схеме:

а) в числителе дроби выделить производную от $a_2x^2 + b_2x + c_2$;

б) разложить подынтегральную функцию на два слагаемых, так чтобы числитель первого слагаемого содержал производную от $a_2x^2 + b_2x + c_2$;

в) первый интеграл решать методом замены переменной или внесением под знак дифференциала, а во втором выделять полный квадрат в знаменателе.

Пример 12.15

Найдем $\int \frac{3x - 15}{x^2 - 4x + 20} dx$.

Решение

$$I = \int \frac{3x - 15}{x^2 - 4x + 20} dx = 3\int \frac{x - 5}{x^2 - 4x + 20} dx.$$

Производная от $a_2x^2 + b_2x + c_2$ равна $(x^2 - 4x + 20)' = 2x - 4$, такое выражение следует иметь в числителе. Умножаем и делим на 2 наш интеграл, получаем:

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x - 10}{x^2 - 4x + 20} dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x - 4 - 6}{x^2 - 4x + 20} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x - 4)dx}{x^2 - 4x + 20} + \frac{3}{2}\cdot(-6)\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20} = \frac{3}{2}\int \frac{(x^2 - 4x + 20)'dx}{x^2 - 4x + 20} - 9\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 20} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{d(x^2 - 4x + 20)}{x^2 - 4x + 20} - 9\int \frac{d(x - 2)}{(x - 2)^2 + 16} \quad (dx = d(x - 2)).$$

Получили два табличных интеграла, первый решается по третьей табличной формуле интегрирования, а второй — по одиннадцатой ($a = 4$). Получаем ответ:

$$I = \frac{3}{2}\ln\left|x^2 - 4x + 20\right| - \frac{9}{4}\operatorname{arctg}\frac{x - 2}{4} + C.$$

В первом слагаемом знак модуля можно опустить, так как $x^2 - 4x + 20 > 0$ при всех x.

Пример 12.16

Найдем $\int \frac{dx}{\sqrt{6 + 4x - 2x^2}}$.

Решение

Так как в числителе подынтегральной функции отсутствует квадратный трехчлен, то можно сразу переходить к последнему пункту предложенной схемы — выделению полного квадрата под корнем:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6+4x-2x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-2(x^2-2x-3)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-2x-3)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-[(x-1)^2-4]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$$

Для получения ответа была использована десятая табличная формула интегрирования ($a = 2$).

---

5. Интегрирование дробно-рациональных функций. Если подынтегральная дробно-рациональная функция представляет собой неправильную дробь (степень числителя больше или равна степени знаменателя), то следует сначала выделить целую часть этой дроби, затем разложить знаменатель на рациональные множители. По виду полученного знаменателя следует разложить дробь в алгебраическую сумму простейших дробей и применить метод неопределенных коэффициентов.

Выделять целую часть дроби можно, подбирая числитель (в простых случаях), как, например, при решении пределов с помощью второго замечательного предела (см. решения примеров 10.16, 10.17, целая часть дроби выделялась в основании функции). В более сложных случаях следует осуществлять деление всего числителя на весь знаменатель, используя алгоритм деления многочленов «углом» (школьный курс математики).

Рассмотрим, как раскладываются сложные дроби в простейшие дроби по виду корней знаменателя.

1. Корни знаменателя действительные и различные:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3},$$

где $P(x)$ — многочлен меньшей степени, чем степень знаменателя; x_1, x_2, x_3 — корни знаменателя; A, B, C — неопределенные коэффициенты, которые должны быть найдены в процессе решения.

2. Корни знаменателя кратные:

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)^3} = \frac{A}{(x-x_1)^3} + \frac{B}{(x-x_1)^2} + \frac{C}{x-x_1}.$$

3. В знаменателе имеются комплексные корни (или неразложимые квадратные трехчлены):

$$\frac{P(x)}{(x-x_1)(ax^2+bx+c)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c},$$

где ax^2+bx+c не раскладывается на множители (дискриминант меньше нуля).

Примечание. Количество неопределенных коэффициентов совпадает со степенью знаменателя.

Пример 12.17

Выделим целую часть дробей: а) $\dfrac{x^3-2}{x-1}$; б) $\dfrac{x^3-2x}{x-1}$.

Решение

а) Преобразуем числитель дроби:

$$\frac{x^3-2}{x-1}=\frac{x^3-1-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}-\frac{1}{x-1}=$$
$$=x^2+x+1-\frac{1}{x-1}.$$

Исходная неправильная дробь теперь представлена в виде алгебраической суммы (разности) ее целой части и правильной дроби.

б) В этой дроби гораздо сложнее преобразовать числитель, чем в предыдущей, поэтому разделим числитель на знаменатель «углом»:

$$\begin{array}{l|l}
x^3-2x & x-1 \\ \cline{2-2}
- & x^2+x-1 \\
\underline{x^3-x^2} & \\
-\quad x^2-2x & \\
\quad \underline{x^2-x} & \\
-\quad\quad -x & \\
\quad\quad \underline{-x+1} & \\
\quad\quad\quad -1 &
\end{array}.$$

Получили в частном x^2+x-1 (это и есть целая часть), в остатке (-1). Таким образом:

$$\frac{x^3-2x}{x-1}=x^2+x-1-\frac{1}{x-1}.$$

Пример 12.18

Найдем $\int\frac{(2x^2-1)dx}{x^3-3x+2}$.

Решение

Дробь правильная (так как вторая степень числителя меньше третьей степени знаменателя). Разложим на множители знаменатель:

$$x^3-3x+2=x^3-3x+3-1=x^3-1-3(x-1)=(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)=$$
$$=(x-1)(x^2+x+1-3)=(x-1)(x^2+x-2)=$$
$$=(x-1)(x-1)(x+2)=(x-1)^2(x+2).$$

Формула разложения квадратного трехчлена на множители $ax^2+bx+x=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$ рассматривалась ранее (см. пример 10.12). Исходная дробь имеет следующее разложение:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-2x+2}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2},$$

где A, B, C — числа, которые мы будем вычислять методом неопределенных коэффициентов. Приведя правую часть тождественного равенства к общему знаменателю, перейдем к системе линейных относительно A, B и C уравнений, приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x в числителях левой и правой частей:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-2x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)};$$

$$2x^2-1=Ax+2A+Bx^2+Bx-2B+Cx^2-2Cx+C;$$

$$\begin{cases} B+C=2, \\ A+B-2C=0, \\ 2A-2B+C=-1. \end{cases}$$

Решить эту систему можно одним из методов, предложенных в параграфе 2.2. В результате получаем $A=\frac{1}{3}$, $B=\frac{11}{9}$, $C=\frac{7}{9}$. Таким образом:

$$\frac{2x^2-1}{x^3-2x+2}=\frac{1}{3(x-1)^2}+\frac{11}{9(x-1)}+\frac{7}{9(x+2)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\frac{2x^2-1}{x^3-2x+2}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\frac{11}{9}\int\frac{1}{x-1}dx+\frac{7}{9}\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$=\frac{1}{3}\int(x-1)^{-2}d(x-1)+\frac{11}{9}\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{7}{9}\int\frac{d(x+2)}{x+2}=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{11}{9}\ln|x-1|+\frac{7}{9}\ln|x+2|+C.$$

В первом слагаемом использовали 2-ю, а во втором и третьем — 3-ю формулу табличных интегралов.

Пример 12.19

Найдем $\int\frac{3x}{x^3+1}dx.$

Решение

Имеем правильную дробь. Разложим ее знаменатель на множители и по виду этого разложения представим ее в виде алгебраической суммы простейших дробей.

$$\frac{3x}{x^3+1}=\frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Применяем метод неопределенных коэффициентов для нахождения A, B и C:

$$3x=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1);$$

$$\begin{cases} A+B=0, \\ -A+B+C=3, \\ A+C=0, \end{cases}$$

откуда $A=-1$, $B=1$ и $C=1$. Таким образом,

$$I=\int\frac{3x}{x^3+1}dx=-\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=I_1+I_2.$$

Решим каждый интеграл по отдельности: первый интеграл I_1 почти табличный, а второй I_2 решаем предыдущим методом (см. решение примера 12.15):

$$I_1=-\int\frac{1}{x+1}dx=-\int\frac{d(x+1)}{x+1}=-\ln|x+1|+C_1;$$

$$I_2=\int\frac{x+1}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x+2}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1+3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2-x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x^2-x+1)'}{x^2-x+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{(x-0{,}5)^2+0{,}75}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{d(x-0{,}5)}{(x-0{,}5)^2+0{,}75}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln|x^2-x+1|+\frac{3}{2}\cdot\sqrt{0{,}75}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x-0{,}5}{\sqrt{0{,}75}}+C_2=\ln\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C_2.$$

В итоге $I = I_1 + I_2 = -\ln|x+1| + \ln\sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C,\ C = C_1 + C_2.$

6. Применение тригонометрических постановок в интегрировании. Тригонометрическая подстановка — это та же замена переменной, причем необязательно в интегралах, содержащих только тригонометрические функции. Рассмотрим два вида подстановок.

В интегралах, содержащих $\sin x$, $\cos x$, можно использовать тангенсную подстановку: $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, откуда

$$x = 2\,\mathrm{arctg}\,t,\ dx = (2\,\mathrm{arctg}\,t)'\,dt = \frac{2dt}{1+t^2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 12.20

Найдем $\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x - 1}$.

Решение

Применяем тангенсную подстановку, получаем

$$\int \frac{dx}{2\sin x + \cos x - 1} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1\right)} = \int \frac{2dt}{4t + 1 - t^2 - 1 - t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{-2t^2 + 4t} = -\int \frac{dt}{t^2 - 2t} = -\int \frac{d(t-1)}{(t-1)^2 - 1} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1-1}{t-1+1}\right| + C = C - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}(0{,}5x) - 2}{\mathrm{tg}(0{,}5x)}\right|.$$

В решении этого примера использовали метод выделения полного квадрата и затем воспользовались двенадцатой формулой табличных интегралов.

Пример 12.21

Найдем $\int \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

Решение

Сделаем замену $x = \sin t \Rightarrow dx = d(\sin t) = \cos t\ dt,\ t = \arcsin x$. Подставим в исходный интеграл:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot \cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt = 0{,}5\int (1 + \cos 2t)dt = 0{,}5\int dt + 0{,}5\int \cos 2t dt =$$

$$= 0{,}5t + 0{,}25\int \cos 2t\ d(2t) = 0{,}5t + 0{,}25\sin 2t + C =$$

$$= 0{,}5\arcsin x + 0{,}25 \cdot 2\sin(\arcsin x) \cdot \cos(\arcsin x) + C = 0{,}5\arcsin x + 0{,}5x\sqrt{1-x^2} + C.$$

При решении пользовались различными формулами из тригонометрии (школьный курс математики): $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha, \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$.

12.4. Определенный интеграл. Геометрический смысл определенного интеграла

Некоторые задачи из различных областей приводят к понятию определенного интеграла: определение площади плоской фигуры из геометрии, нахождение пути по заданной переменной скорости из физики, отыскание объема продукции от меняющейся производительности труда в экономике и некоторые другие.

Рассмотрим первую из перечисленных задач. На отрезке $[a;b]$ задана некоторая функция $y=f(x)$. Фигура, образованная этой функцией, осью абсцисс $(y=0)$ и прямыми $x=a$, $x=b$ называется *криволинейной трапецией* (трапеция, потому что имеет два параллельных основания $x=a$ и $x=b$). Разобъем отрезок $[a;b]$ на *n частичных отрезков* точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ($x_1 < x_2 < ... < x_{n-1}$) (рис. 12.1). Длина каждого отрезка обозначается как $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Внутри каждого частичного отрезка выберем произвольно точку t_i.

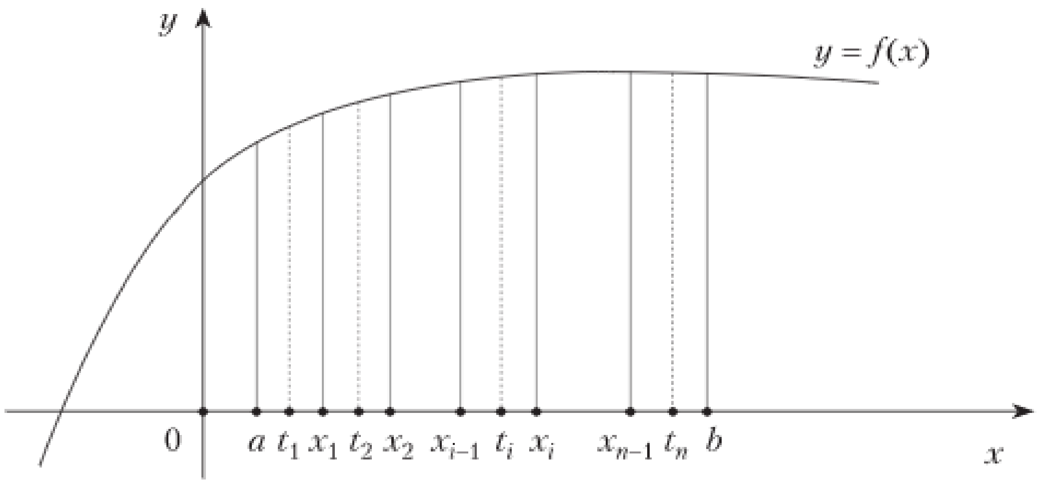


Рис. 12.1

Составим сумму вида

$$f(t_1)\Delta x_1 + f(t_2)\Delta x_2 + \ldots + f(t_i)\Delta x_i + \ldots + f(t_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

($\sum$ — символ суммы, $\sum\limits_{i=1}^{n}$ — читается как сумма по i от единицы до n).

Такого вида сумма называется *интегральной суммой* для функции $y=f(x)$, соответствующей выбору точек разбиения и внутренних точек отрезков.

Каждое слагаемое этой суммы равно площади прямоугольника, у которого основанием является частичный отрезок, а высотой — отрезок, равный значению функции в выбранной внутри отрезка точке t_i, т.е. $S_i = f(t_i)\Delta x_i$.

На рис. 12.1 можно видеть, что площадь упомянутой криволинейной трапеции приближенно равна сумме площадей прямоугольников, основаниями которых служат частичные отрезки. Очевидно, что это равенство будет более точным, если количество частичных отрезков неограниченно увеличивать и при этом обязательно уменьшать длину наибольшего из них.

Определение 12.3. Если существует конечный предел при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка, интегральной суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i$ и этот предел не зависит от способа выбора точек разбиения и внутренних точек отрезков, то такой предел называется *определенным интегралом* (по Риману) от функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{(\Delta x_i)_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i.$$

Концы отрезка a и b в этом случае называются *нижним* и *верхним пределами интегрирования* соответственно, а сам отрезок $[a; b]$ — *областью интегрирования* или отрезком интегрирования.

Теперь перейдем к *геометрическому смыслу определенного интеграла*. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$, то определеннный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (см. рис. 12.1).

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 12.3 (достаточное условие существования определенного интеграла). *Если функция непрерывна на некотором отрезке, то она на этом отрезке интегрируема, т.е. существует ее определенный интеграл на этом отрезке. В общем случае можно считать интегрируемой функцию, имеющую на отрезке $[a; b]$ конечное число точек разрыва первого рода.*

12.5. Свойства определенного интеграла

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, где $b > a$. Некоторые из свойств определенного интеграла аналогичны свойствам неопределенного интеграла:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0;$

2) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$

3) для любой точки из интервала $(a; b)$ справедливо равенство
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

4) постоянный множитель $(r \neq 0)$ можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b r \cdot f(x)dx = r \cdot \int_a^b f(x)dx;$$

5) $\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx;$

6) если функция знакопостоянна на отрезке $[a; b]$, то ее определенный интеграл имеет тот же знак, что и функция (из этого свойства следует, что обе части неравенства или равенства можно почленно интегрировать в области интегрирования);

7) если на отрезке $[a;b]$ функция удовлетворяет условию $m \le f(x) \le M$, где m и M — некоторые постоянные числа, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Теорема 12.4 (о среднем значении функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то внутри него найдется такая точка c, для которой справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Средним значением функции здесь является $f(c)$. Геометрический смысл этой теоремы состоит в том, что внутри отрезка интегрирования обязательно найдется такая точка c, что площадь криволинейной трапеции будет равна площади прямоугольника с высотой $f(c)$.

12.6. Формула Ньютона — Лейбница. Вычисление определенных интегралов

Рассмотрим сначала интеграл с переменным верхним пределом. Пусть функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, следовательно, на любом отрезке $[a;x]$, где $x \in [a;b]$, $f(t)$ будет интегрируема, при этом $\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$ будет называться *интегралом с переменных верхним пределом*.

Теорема 12.5. *Производная интеграла от непрерывной функции с переменным верхним пределом по этому верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу*:

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Из этой теоремы следует, что функция $\Phi(x)$, являющаяся интегралом с переменным верхним пределом, равна в свою очередь одной из первообразных функции $f(x)$. Данный факт подчеркивает связь между неопределенным и определенным интегралами. Изложенные выше рассуждения подводят нас к основной формуле интегрального исчисления.

Теорема 12.6. *Если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$, то значение определенного интеграла от этой функции равно приращению ее первообразной на этом отрезке*:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Это равенство называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Следует подчеркнуть еще раз, что определенный интеграл — это число, которое вычисляется по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Сначала находят превообразную и записывают ее без неопределенной постоянной, но с вертикальной чертой справа, возле которой вверху и внизу записывают пределы интегрирования. Затем подставляют эти пределы в первообразную, производя между полученными значениями первообразной соответствующее формуле вычитание. При вычислении всех определенных интегралов первым действием нужно проверять подынтегральную функцию на непрерывность (отсутствие разрывов второго рода) на отрезке интегрирования.

Нахождение первообразной происходит посредством применения тех методов, которые были представлены в параграфе 12.3, но имеются некоторые нюансы, которые присущи определенному интегрированию. Они проявляются в методах замены переменной и интегрирования по частям.

Теорема 12.7. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *имеет на отрезке* $[\alpha;\beta]$ *непрерывную производную,* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна в каждой точке* $x=\varphi(t)$, *где* $t\in[\alpha;\beta]$, *тогда справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)\cdot\varphi'(t)dt.$$

Данная теорема позволяет производить замену в определенном интеграле, сопровождая ее следующими действиями:

а) наряду с переходом подынтегрального выражения к новой переменной осуществить пересчет пределов интегрирования;

б) проверить полученную подынтегральную функцию на непрервыность (отсутствие разрывов второго рода) на новом отрезке интегрирования;

в) применить формулу Ньютона — Лейбница.

В отличие от неопределенного интегрирования возврат к старой переменной не происходит.

Теорема 12.8. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ определены на отрезке $[a;b]$ и имеют на этом отрезке непрерывные производные, то справедливо равенство

$$\int_a^b u\,dv=(u\cdot v)\Big|_a^b-\int_a^b v\,du.$$

Это равенство называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Теперь перейдем непосредственно к вычислению определенных интегралов.

Пример 12.22

Вычислим $\int_0^2\frac{dx}{5-2x}$.

Решение

Нахождение первообразной функции в нашем примере аналогично нахождению первообразной в примере 12.8. Подынтегральная функция непрерывна на отрезке $[0;2]$. Решаем с применением формулы Ньютона — Лейбница:

$$\int_0^2 \frac{dx}{5-2x} = -\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d(5-2x)}{5-2x} = -\frac{1}{2}\ln|5-2x|\Big|_0^2 = -\frac{1}{2}(\ln|5-2\cdot 2| - \ln|5-2\cdot 0|) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\ln 1 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln 5 = \ln\sqrt{5}.$$

Пример 12.23

Вычислим $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+3}$.

Решение

Подынтегральная функция непрерывна при $x \geq 1$. Сделаем замену:

$$y = \sqrt{x-1}+3 \Rightarrow \sqrt{x-1} = y-3 \Rightarrow x = y^2-6y+10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow dx = (y^2-6y+10)'\,dy \Rightarrow dx = (2y-6)dy.$$

Пересчитаем пределы интегрирования: нижний предел $x = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2-1}+3 = 4$, верхний предел $x = 5 \Rightarrow y = \sqrt{5-1}+3 = 5$. Получим

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-1}+3} = \int_4^5 \frac{(2y-6)dy}{y} = \int_4^5 \left(2 - \frac{6}{y}\right)dy = (2y - 6\ln|y|)\Big|_4^5 =$$

$$= 10 - 6\ln 5 - 8 + 6\ln 4 = 2 - 6\ln\frac{5}{4}.$$

Пример 12.24

Вычислим $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx$.

Решение

Подынтегральная функция непрерывна на отрезке интегрирования. Применяем интегрирование по частям. Пусть $u = \operatorname{arctg} x$, а $dv = dx$, следовательно, $du = (\operatorname{arctg} x)'\,dx = \frac{dx}{1+x^2}$, $v = x$. Пользуемся формулой интегрирования по частям в определенном интеграле:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx = (x\cdot\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} =$$

$$= 1\cdot\operatorname{arctg}1 - 0\cdot\operatorname{arctg}0 - \int_0^1 \frac{d\left(\frac{x^2}{2}\right)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+1^2) + \frac{1}{2}\ln(1+0^2) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2,$$

так как $\operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$, $\ln 1 = 0$.

12.7. Геометрические приложения определенного интеграла

При помощи определенного интеграла можно вычислять площади плоских фигур, объемы тел вращения, длину дуги плоских кривых и т.д. Рассмотрим сначала *вычисление площадей плоских фигур*.

В соответствии с геометрическим смыслом определенного интеграла (см. параграф 12.4) площадь фигуры (криволинейной трапеции), ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, равна $\int\limits_a^b f(x)dx$. Но есть и другие часто встречающиеся случаи взаимного расположения кривых, образующих замкнутую фигуру, площадь которой следует найти. Рассмотрим их с рисунками.

Случай 1 (рис. 12.2).

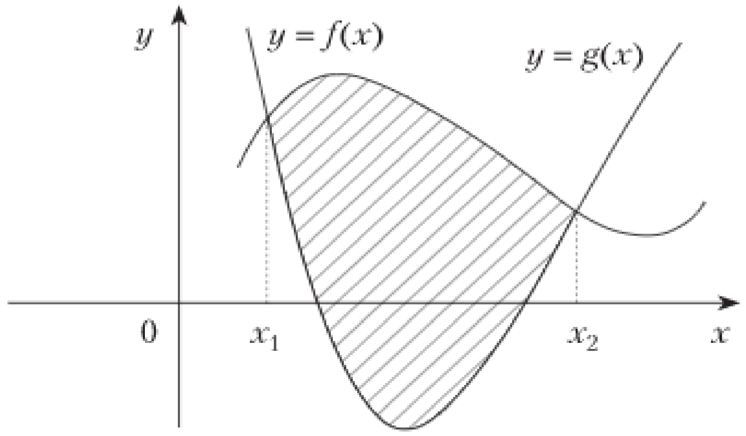


Рис. 12.2

В этом случае заштрихованная площадь ограничена линиями $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем при всех $x \in [x_1; x_2]$ $f(x) \geq g(x)$. Сначала следует найти пределы интегрирования x_1 и x_2, решив систему уравнений

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x), \end{cases}$$

из которой следует $f(x) = g(x)$. Тогда площадь заштрихованной фигуры будет вычисляться по формуле $S = \int\limits_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx$ (из уравнения кривой, ограничивающей фигуру сверху, вычитается уравнение кривой, ограничивающей фигуру снизу).

Случай 2 (рис. 12.3).

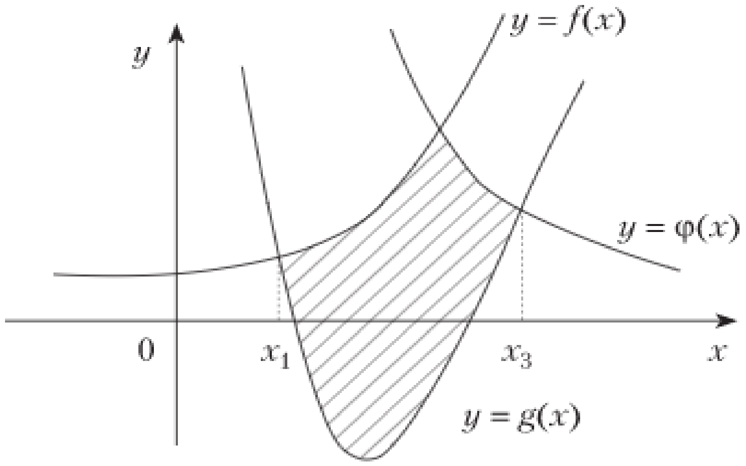


Рис. 12.3

На рис. 12.3 изображена заштрихованная фигура, ограниченная тремя линиями $y = f(x)$, $y = g(x)$ и $y = \varphi(x)$. Сначала надо найти точки пересечения кривых, абсциссы которых будут являться пределами интегрирования из уравнений $f(x) = g(x)$, $f(x) = \varphi(x)$ и $g(x) = \varphi(x)$. Искомая площадь ограничена сверху двумя линиями (снизу — одной), поэтому искомую площадь следует разбить на две площади, и вычисляться она будет следующим образом:

$$S = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx + \int_{x_2}^{x_3} (\varphi(x) - g(x))dx.$$

Случай 3 (рис. 12.4).

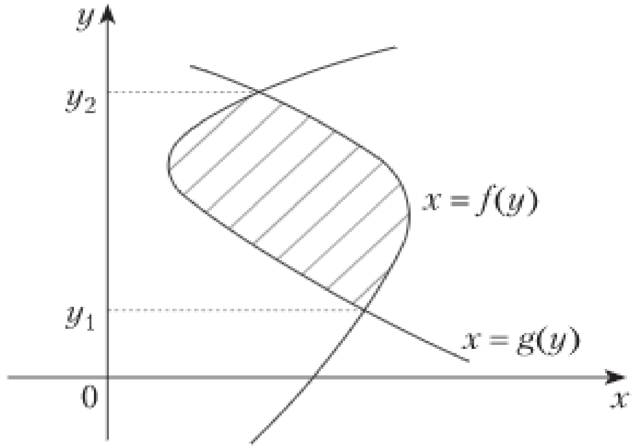


Рис. 12.4

На рис. 12.4 мы видим заштрихованную площадь, ограниченную линиями $x = f(y)$ и $x = g(y)$ справа и слева. Такого вида площадь нерационально ориентировать около оси x. Поэтому находим пределы интегрирования по y из уравнения $f(y) = g(y)$ и под знаком интеграла вычтем из уравнения кривой, которая справа ограничивает нашу площадь, уравнение кривой, которая ограничивает ее слева:

$$S = \int_{y_1}^{y_2} (f(y) - g(y))dy.$$

Теперь перейдем к вычислению *объемов тел вращения*. Пусть $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна и знакопостоянна. Требуется найти объем тела, которое образуется при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ (рис. 12.5).

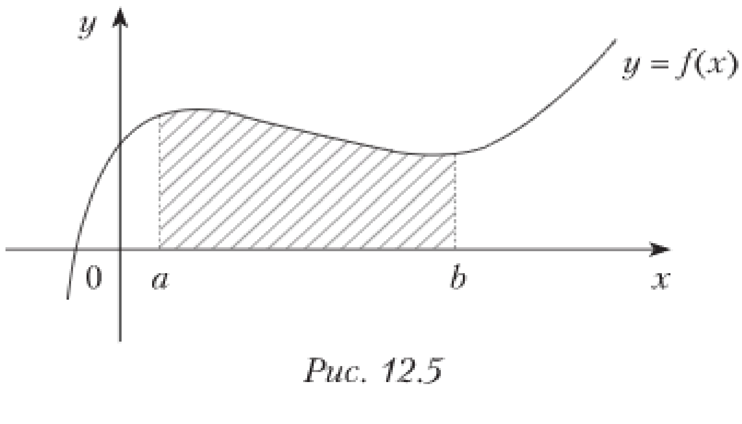


Рис. 12.5

Для решения данной задачи используется тот же подход, что и в параграфе 12.4 при решении задачи (на нахождение площади плоской фигуры), приводящей к понятию определенного интеграла (см. рис. 12.1). Только речь теперь идет не о прямоугольниках, а о цилиндрах с радиусами, равными $f(t_i)$, и высотами, равными длинам частичных отрезков Δx_i. Формула объема цилиндра из геометрии $V = \pi R^2 H$. В нашем случае объем каждого полученного цилиндра будет равен $V_i = \pi f^2(t_i)\Delta x_i$. Таким образом, объем искомой фигуры приближенно будет равен $\sum_{i=1}^{n} \pi f^2(t_i)\Delta x_i$.

Продолжая те же рассуждения, переходя к пределу интегральной суммы данного вида при стремлении к нулю длины наибольшего частичного отрезка, получаем *формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси абсцисс*:

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

Аналогичным образом получается *формула объема тела вращения вокруг оси ординат* фигуры, ограниченной линиями $x = \varphi(y)$, $y = y_1$ и $y = y_2$:

$$V = \pi\int_{y_1}^{y_2} (\varphi(y))^2\,dy \quad (y_2 > y_1).$$

12.8. Несобственные интегралы

До этого момента мы рассматривали интегралы от непрерывных функций в ограниченной области интегрирования. В этом параграфе рассмотрим интегралы от разрывных функций и с неограниченными областями интегрирования.

Определение 12.4. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на полуинтервале $[a; +\infty)$, то *несобственным интегралом первого рода* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ называется предел вида $\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Причем если этот предел конечен, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, а если предел бесконечен или не существует, то *расходящимся*.

Аналогично можно считать несобственными интегралами первого рода интегралы следующих видов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

если $f(x)$ непрерывна на $(-\infty; b]$;

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_0^{+\infty} f(x)dx,$$

если $f(x)$ непрерывна при всех x.

В этом случае имеет место утверждение: если хотя бы один из двух пределов бесконечен или не существует, то исходный интеграл расходится. В общем случае не только точкой $x=0$ можно разбивать исходный интеграл на два слагаемых, можно брать любую удобную точку $x=x_0$.

Определение 12.5. Если функция $y=f(x)$ непрерывна, но не ограничена на полуинтервале $[a;b)$, то *несобственным интегралом второго рода* $\int\limits_a^b f(x)dx$ называется предел вида $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\int\limits_a^{b-\delta} f(x)dx$, где $\delta>0$. Причем если этот предел конечен, то интеграл *сходится*, а если бесконечен или не существует, то интеграл *расходится*.

Из этого определения следует, что если стоит задача вычислить несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ или установить его расходимость, надо найти точки разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ и выяснить, какого рода разрыв в каждой из них (параграф 10.7). Если, например, функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода в некоторой точке $c\in(a;b)$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=$ $=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$ и вычисления производятся с применением формулы Ньютона — Лейбница. Если функция $f(x)$ терпит в некоторой точке $c\in(a;b)$ разрыв второго рода, то следует представить исходный интеграл в виде суммы $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$ и осуществить предельные переходы в этих интегралах, следуя определению несобственного интеграла второго рода:

$$\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx=\lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_a^{c-\delta} f(x)dx+\lim_{\delta\to 0+0}\int\limits_{c+\delta}^b f(x)dx.$$

Если хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то исходный интеграл расходится.

Теорема 12.9 (признак сравнения). *Пусть функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a;+\infty)$ и удовлетворяют условию $0\le f(x)\le$ $\le\varphi(x)$, тогда если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ и если расходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, то расходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$.*

Теорема 12.10 (предельный признак сравнения). *Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a;+\infty)$. Тогда если существует конечный,* *отличный от нуля предел* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$*, то несобственные интегралы* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *и* $\int\limits_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ *оба одновременно или сходятся, или расходятся.*

Контрольные вопросы и задания

1. Что называется первообразной от данной функции? Приведите примеры.
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Что называется определенным интегралом от данной функции на данном отрезке?
4. Сформулируйте геометрический смысл определенного интеграла.
5. Сформулируйте достаточное условие существования определенного интеграла.
6. Приведите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.
7. Сформулируйте определения несобственных интегралов первого и второго рода.
8. Перечислите известные вам методы интегрирования.

Практикум по решению задач

Упражнение 12.1. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

Решение

Сначала следует изобразить все данные задачи на декартовой плоскости и понять, как выглядит фигура, площадь которой требуется вычислить (рис. 12.6).

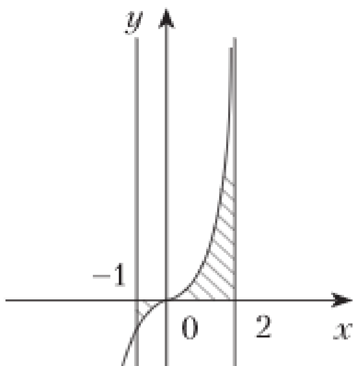


Рис. 12.6

Искомая площадь состоит из двух частей: первая ограничена сверху осью абсцисс ($y = 0$), снизу — кривой $y = x^3$, а вторая ограничена сверху кривой $y = x^3$, снизу — прямой $y = 0$.

Пределы интегрирования фактически известны из условия задачи: $x = -1$, $x = 2$, а также $x = 0$, разделяющий две упомянутые части. Таким образом:

$$S = \int\limits_{-1}^{0}(0-x^3)dx+\int\limits_{0}^{2}x^3dx = -\int\limits_{-1}^{0}x^3dx+\int\limits_{0}^{2}x^3dx = -\frac{x^4}{4}\bigg|_{-1}^{0}+\frac{x^4}{4}\bigg|_{0}^{2} =$$

$$= -\left(0-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{2^4}{4}-0\right) = 4{,}25 \text{ кв. ед. (квадратных единиц).}$$

Упражнение 12.2. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2$, $y = 6 - x^2$.

Решение

Изобразим в прямоугольной системе координат кривые (параболы), которые даны в условии задачи, и найдем их точки пересечения (рис. 12.7).

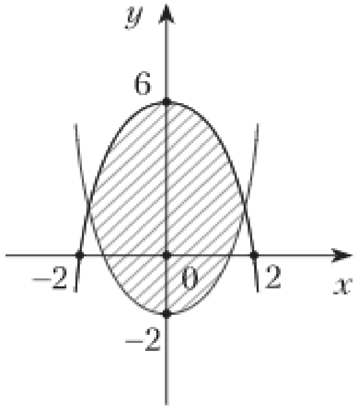


Рис. 12.7

Имеем $x^2 - 2 = 6 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$.

Искомая площадь ограничена сверху параболой $y = 6 - x^2$, снизу — параболой $y = x^2 - 2$. Таким образом:

$$S = \int_{-2}^{2} [(6 - x^2) - (x^2 - 2)]dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)dx = \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{2} =$$

$$= 16 - \frac{16}{3} + 16 - \frac{16}{3} = \frac{64}{3} \text{ кв. ед.}$$

Упражнение 12.3. Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2x$, $y = x$.

Решение

Изобразим в прямоугольной системе координат параболу и две прямые, уравнения которых даны в условии задачи (рис. 12.8). Найдем их точки пересечения.

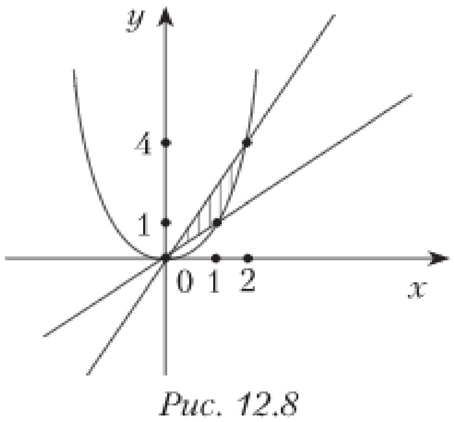


Рис. 12.8

По условию задачи площадь фигуры ограничена тремя линиями, это означает, что границами искомой площади должны быть все упомянутые в условии линии. Искомая площадь заштрихована на рис. 12.8.

Найдем пределы интегрирования:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2;$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1;$$

$$\begin{cases} y = x \\ y = 2x \end{cases} \Rightarrow x = 2x \Rightarrow x = 0.$$

Заштрихованная площадь ограничена сверху прямой $y = 2x$, снизу — прямой $y = x$ и параболой $y = x^2$, следовательно, ее следует разбить на две части. Таким образом:

$$S = \int_0^1 (2x - x)\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx = \int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (2x - x^2)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 + \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^2 = \frac{1}{2} - 0 + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{7}{6} \text{ кв. ед.}$$

Упражнение 12.4. Вычислим объем тела, полученного от вращения вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

Решение

Изобразим фигуру, ограниченную линиями, указанными в условии (рис. 12.9).

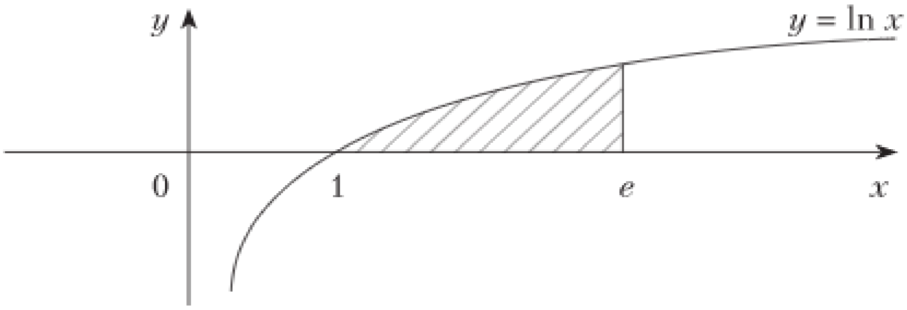


Рис. 12.9

Пределы интегрирования фактически даны в условии: $x_1 = 1$, $x_2 = e$. Воспользуемся формулой объема тела вращения вокруг оси абсцисс $V = \pi\int_1^e \ln^2 x\,dx$. Применим формулу интегрирования по частям для определенного интеграла (см. параграф 12.6). Пусть $u = \ln^2 x$, $dv = dx$, тогда $du = (\ln^2 x)'\,dx = 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$, $v = x$. Получаем

$$V = \pi\int_1^e \ln^2 x\,dx = \pi\left((x\ln^2 x)\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot 2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx\right) = \pi\left(e - \int_1^e 2 \cdot \ln x \cdot dx\right).$$

Снова интегрируем по частям. Пусть $u = 2 \cdot \ln x$, $dv = dx$, тогда

$$du = (2 \cdot \ln x)'\,dx = \frac{2}{x}dx,\ v = x.$$

Получаем

$$V = \pi\left(e - \int_1^e 2 \cdot \ln x \cdot dx\right) = \pi\left(e - 2x\ln x\Big|_1^e + \int_1^e 2dx\right) = \pi(e - 2e\ln e + 2 \cdot \ln 1 + 2x\Big|_1^e) =$$

$$= \pi(e - 2e + 2e - 2) = \pi(e - 2) \text{ куб. ед. (кубических единиц).}$$

Упражнение 12.5. Вычислим объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 0{,}5x^2 + 2$.

Решение

Сначала изобразим фигуру, ограниченную линиями, данными в условии задачи (рис. 12.10).

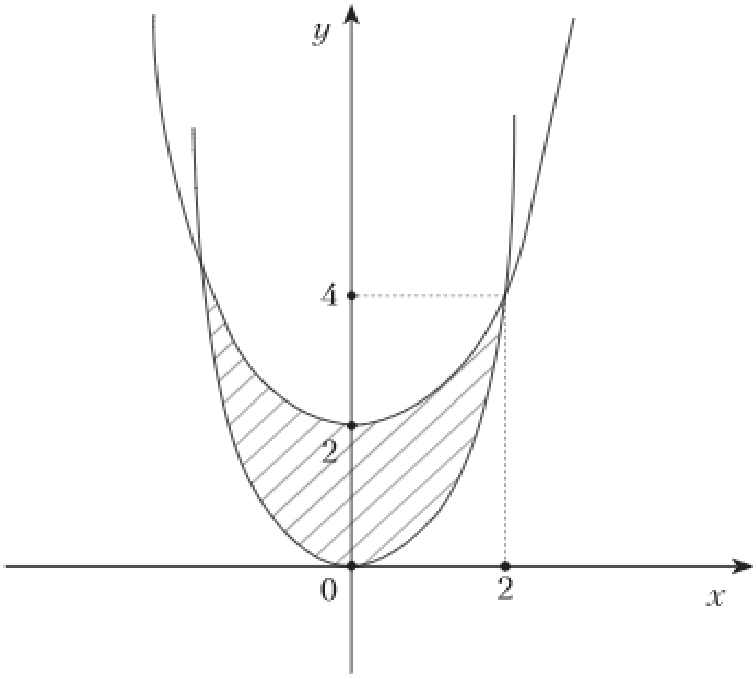


Рис. 12.10

Представим исходные функции как $x = f(y)$ и $x = \varphi(y)$. Учитывая, что в формуле объема подынтегральная функция стоит в квадрате, разумно выразить x^2 как функцию y. Первая из исходных практически не изменяется $x^2 = y$, а вторая $y = 0{,}5x^2 + 2$ представляется в виде $x^2 = 2y - 4$. Найдем ординаты точек пересечения графиков, которые будут являться пределами интегрирования $\begin{cases} x^2 = y \\ x^2 = 2y - 4 \end{cases} \Rightarrow y = 2y - 4 \Rightarrow y = 4$, другие пределы интегрирования являются ординатами вершин парабол $y = 0$ и $y = 2$. Пользуясь рис. 12.10, замечаем, что искомый объем получается вычитанием объема, полученного при вращении кривой $x^2 = 2y - 4$ из объема, полученного при вращении кривой $x^2 = y$. Таким образом:

$$V = \pi\int_0^4 y\,dy - \pi\int_2^4 (2y-4)\,dy = \pi\left[\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 - \left.(y^2 - 4y)\right|_2^4\right] = \pi(8-4) = 4\pi \text{ куб. ед.}$$

Упражнение 12.6. Требуется вычислить интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение

Функция $\frac{1}{x^2}$ непрерывна на полуинтервале $[1;+\infty)$. Имеем несобственный интеграл первого рода. По определению $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-2}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(\left.-\frac{1}{x}\right|_1^b\right) = \lim\limits_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$

Упражнение 12.7. Требуется вычислить интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^2}$ или установить его расходимость.

Решение

Функция $\frac{1}{x^2}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, следовательно, исходный интеграл является несобственным второго рода. По определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\delta\to 0+0} \int_{0+\delta}^1 x^{-2}dx = \lim_{\delta\to 0+0}\left(-\frac{1}{x}\bigg|_{0+\delta}^1\right) = \lim_{\delta\to 0+0}\left(-1+\frac{1}{\delta}\right) = \infty,$$

следовательно, исходный интеграл расходится.

Замечание 12.1. Несобственные интегралы могут использоваться при приближенных вычислениях площадей незамкнутых плоских фигур (рис. 12.11).

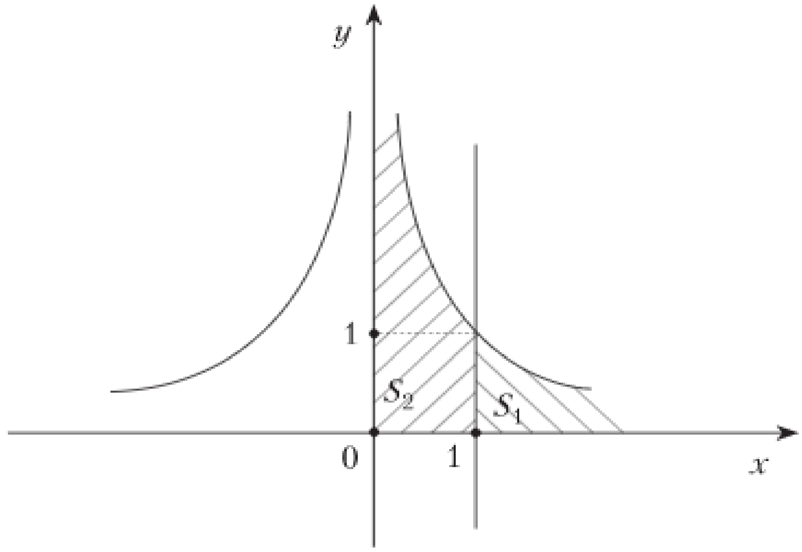


Рис. 12.11

Так, в упражнении 12.6 вычислялась площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$ при $x \geq 1$ (S_1 на рис. 12.11), она получилась равной 1 кв. ед., хотя на рисунке выглядит «бесконечной». В упражнении 12.7 вычислялась площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ (S_2 на рис. 12.11), эта площадь оказалась «бесконечной».

Упражнение 12.8. Требуется вычислить интеграл $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ или установить его расходимость.

Решение

Функция $\frac{1}{x}$ на отрезке $[-1; 1]$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода, следовательно, исходный интеграл является несобственным второго рода. Представим его в виде суммы двух слагаемых:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0+0} \int_{-1}^{0-\delta} \frac{dx}{x} + \lim_{\delta\to 0+0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x}.$$

Рассмотрим, например, второй предел

$$\lim_{\delta\to 0+0} \int_{0+\delta}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\delta\to 0+0} (\ln|x|)\Big|_{\delta}^{1} = \lim_{\delta\to 0+0} (\ln|\delta| - \ln 1) = \infty$$

(знак бесконечности не важен). Получили, что несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$ расходится, значит, первый интеграл $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{x}$ можно не исследовать, а сразу сделать вывод о том, что $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ расходится.

Упражнение 12.9. Требуется установить сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^6+x^4+1}$.

Решение

Функция $f(x)=\frac{1}{x^6+x^4+1}$ непрерывна на полуинтервале $[1;+\infty)$, так как знаменатель $x^6+x^4+1\neq 0$ при всех x. Но найти первообразную функции изученными ранее методами не представляется возможным, поэтому в условии задачи нет требования вычислить интеграл. Воспользуемся предельным признаком сравнения (теорема 12.10) и рассмотрим функцию $\varphi(x)=\frac{1}{x^6}$. Такой выбор не случаен, он опирается на материал параграфа 10.3, связанный с эквивалентными бесконечно малыми величинами. Несложно убедиться в том, что $\frac{1}{x^6}$ и $\frac{1}{x^6+x^4+1}$ являются эквивалентными бесконечно малыми, вычисляя

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^6+x^4+1}{x^6}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^6}\right)=1.$$

Теперь выясним, сходится или расходится $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6}$:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-6}dx=\lim_{b\to+\infty}\left(\left.\frac{x^{-5}}{-5}\right|_1^b\right)=-\frac{1}{5}\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b^5}-1\right)=\frac{1}{5},$$

следовательно, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6}$ сходится. Пользуясь теоремой 12.10, делаем вывод о том, что и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^6+x^4+1}$ тоже сходится.

Задачи для самостоятельного решения

12.1. Найдите неопределенные интегралы:

1) $\int e^{3x}(x-1)dx$; 2) $\int 3^x(2x-1)dx$; 3) $\int x^4\ln x\,dx$; 4) $\int\frac{\ln x}{\sqrt[5]{x}}dx$; 5) $\int\frac{x^3-5x^2+7x-9}{x-1}dx$;

6) $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x-8}}dx$; 7) $\int x^2e^{x^3+1}dx$; 8) $\int\frac{x}{\sqrt{x^4+9}}dx$; 9) $\int\frac{e^x}{e^{2x}-4e^x+5}dx$; 10) $\int\frac{dx}{x^3-2x^2}$;

11) $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}dx$; 12) $\int\frac{\sqrt[3]{x^7}-2}{x}dx$; 13) $\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}}dx$; 14) $\int\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3}dx$; 15) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-2}+5}$;

16) $\int \sin^3 x \cdot \cos x\,dx$; 17) $\int \frac{dx}{3\sin x - \cos x}$; 18) $\int \cos 5x \cdot \cos 9x\,dx$; 19) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^4}dx$;

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$; 21) $\int \frac{dx}{x^3-x}$.

12.2. Вычислите определенные интегралы:

1) $\int\limits_1^e \frac{\sqrt{5\ln x+2}}{x}dx$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+4}{x+1}dx$; 3) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x - 2\ln x - 3)}$; 4) $\int\limits_3^4 \frac{xdx}{x^2-4x+4}$;

5) $\int\limits_1^e \frac{(\ln x+2)^3}{x}dx$; 6) $\int\limits_0^1 \frac{4x^3dx}{5x^4+3}$; 7) $\int\limits_1^e x^3\ln x\,dx$; 8) $\int\limits_2^6 x\sqrt{x-2}\,dx$; 9) $\int\limits_1^9 \frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

10) $\int\limits_0^1 x^2e^x dx$; 11) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10}$; 12) $\int\limits_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$; 13) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+3}}$; 14) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$.

12.3. Вычислите площади фигур, ограниченных линиями:

а) $y = x^2-6,\ y=-x^2+6x-6$; б) $y=x^2,\ y=\frac{8}{x},\ y=8,\ x=0$;

в) $y=(x-5)(1-x),\ y=4,\ x=1$; г) $y=2^x,\ y=2^{\frac{x}{2}},\ y=2$; д) $y=-2x,\ y=3x-x^2$;

е) $y=\sqrt{1-x},\ y=x+1,\ y=0$; ж) $y=\sin x,\ y=0,\ x=0,\ x=2\pi$; з) $y=x^2,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{1}{4}$;

и) $x=y^2,\ x=8-y^2$.

12.4. Вычислите объемы тел, полученные от вращения фигуры, ограниченой линиями:

а) $y=e^x,\ y=0,\ x=0,\ x=\ln 2$ вокруг оси абсцисс;

б) $y=\ln(x+1),\ y=0,\ y=\ln 2,\ x=0$ вокруг оси ординат.

12.5. Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость:

а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^3}$; б) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}dx$; г) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2-2x+1}$; д) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+4}$; е) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

12.6. Установите сходимость или расходимость интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Глава 13
РЯДЫ

13.1. Знакопостоянные числовые ряды. Понятие сходимости ряда. Признаки сходимости

Ряды имеют широкое распространение в математике, физике, экономике. Например, в тех задачах, где рассматриваются суммы бесконечного числа слагаемых, в тех задачах, где исследуются и прогнозируются бесконечные во времени процессы, а также в приближенных расчетах (там, где невозможно достичь точных результатов).

Ряды подразделяются на числовые и функциональные. Числовые подразделяются на знакопостоянные и знакопеременные, среди которых выделяют частный случай — знакочередующиеся ряды. Среди функциональных рядов выделяют степенные ряды и тригонометрические (ряды Фурье).

Определение 13.1. *Числовым рядом* называется бесконечная числовая последовательность, представленная в виде суммы:

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ... = \sum_{i=1}^{\infty} u_n.$$

Числа u_1, u_2, ..., u_n, ... называются *членами ряда*, в свою очередь u_n называется *общим членом ряда*. Сумма первых n членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда*: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Если все члены ряда имеют один и тот же знак, ряд называется *знакопостоянным*.

Способы задания ряда:

а) формула общего члена ряда $u_n = f(n)$;

б) несколько последовательных членов ряда (количество членов должно быть таким, чтобы по ним можно было составить единственный ряд);

в) несколько последовательных частичных сумм ряда.

С числовыми рядами мы уже ранее встречались. В школьном курсе это арифметическая и геометрическая прогрессии (a_n и b_n — общие члены этих прогрессий соответственно, S_n — их частичные суммы), а в нынешнем курсе это числовые последовательности (см. параграф 10.1).

Необходимо подчеркнуть, что особую значимость приобретают именно те ряды, у которых значение суммы по абсолютной величине ограничено постоянным числом, или, проще, сумма ряда является конечным числом. По этому критерию и разбивают числовые ряды на две группы: *сходящиеся* и *расходящиеся* числовые ряды.

Определение 13.2. Если существует конечный предел последовательности частичных сумм ряда, то этот ряд называется *сходящимся*:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

При этом S является *суммой ряда*, т.е. $\sum_{i=1}^{\infty} u_n = S$. Если такой предел бесконечен или не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Из известного ранее материала в качестве сходящегося числового ряда можно выделить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию по той причине, что в школьном курсе имеется формула подсчета суммы ее членов.

Рассмотрим *свойства* сходящихся рядов.

1. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} u_n$ сходится и его сумма равна S, то сходится и ряд, полученный из исходного почленным умножением на постоянное число k, при этом сумма нового ряда будет равна $k \cdot S$.

2. Если сложить два сходящихся ряда с суммами S_1 и S_2, то полученный таким образом ряд тоже будет сходиться, а его сумма будет равна $S_1 + S_2$.

3. Если у сходящегося ряда отбросить (или приписать к нему) несколько членов, то ряд останется сходящимся (изменится лишь значение его суммы).

Если у числового ряда отбросить n его первых членов, то полученный ряд будет называться *n-м остатком ряда* r_n, т.е. сумму ряда можно представить в виде суммы его частичной суммы и соответствующего остатка:

$$S = S_n + r_n.$$

4. Чтобы ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы предел его n-го остатка был равен нулю:

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Заметим, что все пределы в данной главе рассматриваются при $n \to \infty$, поэтому в тексте этот факт может подразумеваться по умолчанию.

В силу крайней недостаточности методов подсчета сумм рядов следует сказать, что далеко не всегда нас интересует само значение суммы ряда, а интерес лишь в том, конечна ли она. Поэтому, ставя задачу установления сходимости или расходимости ряда, мы помимо определения используем и другие возможности (признаки сходимости).

Теорема 13.1 (необходимый признак сходимости). *Если ряд сходится, то предел его общего члена равен нулю*: $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Доказательство: u_n можно выразить через разность частичных сумм: $u_n = S_n - S_{n-1}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось доказать (здесь $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ по определению сходящегося ряда).

Следствие. Если предел общего члена ряда отличен от нуля, то упомянутый ряд расходится.

Поскольку обратное утверждение теоремы 13.1 несправедливо, как и у всех необходимых признаков, то на практике используют следствие из этой теоремы. Но из него не вытекает сходимость ряда, поэтому используется это следствие довольно редко. Наряду с ним используют чаще *достаточные признаки сходимости знакопостоянных числовых рядов*.

В качестве знакопостоянных числовых рядов имеем право рассматривать ряды с положительными членами.

Теорема 13.2 (признак сравнения). *Пусть даны два ряда с положительными членами* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *и для всех n выполняется условие* $u_n \le v_n$. *Тогда если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, *а если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *тоже расходится.*

Теорема 13.3 (предельный признак сравнения). *Если для рядов* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ *с положительными членами существует конечный отличный от нуля предел отношения их общих членов* ($\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = c \ne 0$), *то эти ряды одновременно или сходятся, или расходятся.*

Теорема 13.4 (признак Даламбера). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами существует предел отношения его последующего члена к предыдущему, равный c* ($\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = c$). *Тогда если* $c < 1$, *то ряд сходится, если* $c > 1$ *или предел бесконечен, то ряд расходится, а если* $c = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Теорема 13.5 (признак Коши). *Пусть для ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *с положительными членами существует предел корня n-й степени из общего члена, равный c* ($\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = c$). *Тогда если* $c < 1$, *то ряд сходится, если* $c > 1$ *или предел бесконечен, то ряд расходится, а если* $c = 1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

Теорема 13.6 (интегральный признак сходимости). *Если члены ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ *положительны и для всех n* $u_n \ge u_{n+1}$, *а функция* $f(x)$, *определенная при* $x \ge 1$, *является непрерывной и невозрастающей, причем* $f(n) = u_n$, *то* *исходный ряд сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$.

Выделим некоторые особенности (преимущества и недостатки) каждого из достаточных признаков и начнем с последнего (интегрального) признака.

С положительной стороны интегральный признак не имеет ограничений в применимости. Но найти первообразную известными нам методами можно далеко не для всех функций. Поэтому решение о целесообразности применения признака принимается, прогнозируя возможность нахождения первообразной.

Самый простой с точки зрения преобразований — это признак Даламбера. Но в ряде случаев его применения вопрос о сходимости остается нерешенным. Полезно знать наперед, в каких случаях его применять не следует, а в каких, напротив, он хорошо применим. Признак Даламбера применять не имеет смысла, если u_n состоит только из степенной и логарифмической функции (в этом случае мы получим $c = 1$). Зато если u_n содержит показательную функцию или факториальную зависимость, в подавляющем большинстве таких случаев ответ будет получен.

Факториальная зависимость представляет собой произведение натуральных чисел от единицы до n, т.е. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, где ! — символ факториала, читается «n факториал» (нуль-факториал принято считать равным единице: 0! = 1).

Радикальный признак Коши есть смысл применять только в случае наличия степенно-показательных функций, чтобы избавиться от n в показателе степени. Он применяется редко.

Наконец, признаки сравнения обычно применяют, когда исчерпались возможности применения других признаков. Спектр применения очень многообразен. Суть этих признаков в том, что для исходного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ мы подбираем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, информация о сходимости или расходимости которого нам известна заранее. Но в этом-то и заключена вся сложность, так как, сравнив общие члены двух рядов, мы можем не достичь выполнения условий теорем 13.2 и 13.3, и тогда творческий процесс поиска ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ придется продолжить.

Очевидно, что для использования признаков сравнения мы должны обладать информацией о сходимости или расходимости некоторого количества рядов. Эту информацию мы будем иметь после решения нескольких примеров.

Пример 13.1

Исследуем на сходимость ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$.

Решение

Все исследования на сходимость ряда производятся с формулой общего члена ряда. Поэтому если она в условии не дана, то ее следует выписать первым шагом. Имеем $u_n = \frac{1}{n}$. Применяем интегральный признак (признак Даламбера не дает результат, так как u_n содержит только степенную функцию). Исследуем на сходимость несобственный интеграл, соответствующий общему члену исходного ряда:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln|x| \Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty} (\ln b - 0) = +\infty,$$

это означает, что несобственный интеграл расходится, а согласно теореме 13.6 расходится и исходный ряд.

Рассмотренный нами ряд называется *гармоническим*, и информацию о его расходимости мы будем использовать в дальнейшем, применяя признаки сравнения.

Пример 13.2

Исследуем на сходимость ряд $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$.

Решение

Выпишем общий член ряда $u_n = \frac{1}{3^{n-1}}$, он содержит показательную функцию, следовательно, можно применить признак Даламбера (несложно воспользоваться и интегральным признаком). Для признака Даламбера нужна формула для u_{n+1}. Чтобы ее получить, следует в формулу общего члена вместо n подставить $n + 1$. Для нашего случая $u_{n+1} = \frac{1}{3^{(n+1)-1}} = \frac{1}{3^n}$. Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3} < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится. Он представляет собой бесконечно убывающую геометрическую прогрессию. Несложно показать, что любая бесконечно убывающая геометрическая прогрессия ($u_n = \frac{1}{a^n}$ при $a > 1$) является сходящимся рядом:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1,$$

так как $a > 1$.

Таким образом, информацию о сходимости бесконечно убывающей геометрической прогрессии мы будем использовать, применяя признаки сравнения, как известный факт.

Пример 13.3

Исследуем на сходимость ряд $u_n = \frac{1}{n^p}$, где p — постоянное число, $p \neq 1$.

Решение

Применяем интегральный признак (u_n содержит только степенную функцию, поэтому применение признака Даламбера результата не дает):

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b=\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-1\right).$$

Случай $p=1$ мы рассмотрели в примере 13.1.

Если $p > 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-1\right)=-1$, т.е. несобственный интеграл сходится.

Если $p < 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-1\right)=\infty$, т.е. несобственный интеграл расходится.

Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ называется *обобщенным гармоническим рядом*, он сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$. Этот вывод широко используется в примерах с применением признаков сравнения, по большей части — с применением предельного признака.

13.2. Знакочередующиеся числовые ряды. Признак Лейбница

Ряд вида $u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...$ является *знакочередующимся.*

Если первый член ряда отрицателен, то можно вынести за скобку знак «минус» из всех слагаемых ряда.

Теорема 13.7 (признак Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда убывают по абсолютной величине и предел общего члена ряда равен нулю, то ряд сходится, а его сумма меньше величины первого члена* ($0 < S < u_1$).

Используя признак Лейбница, удобнее вычислять предел общего члена по абсолютной величине, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Если $u_1 < 0$ и знак «минус» не был вынесен за скобку, то сумма ряда по абсолютной величине меньше модуля первого члена: $|S|<|u_1|$.

Сходящиеся знакочередующиеся (знакопеременные) ряды разделяют по виду сходимости на абсолютно и условно сходящиеся.

Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если абсолютные величины его членов образуют сходящийся ряд.

Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных его величин, расходится, то знакопеременный ряд *сходится условно.*

Теорема 13.8 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). *Если ряд, составленный из абсолютных величин исходного знакопеременного ряда, сходится, то сходится и исходный ряд.*

Смысл теоремы 13.8 состоит в том, что знакочередующийся ряд можно сразу (минуя признак Лейбница) исследовать на абсолютную сходимость. Но если ряд из абсолютных величин расходится, то ответа на вопрос о сходимости исходного ряда мы не получаем, так как в этом случае исходный знакочередующийся ряд может либо расходиться, либо сходиться условно.

Пример 13.4

Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, в случае сходимости выясним — условно или абсолютно.

Решение

Применяем признак Лейбница. Члены данного ряда убывают по абсолютной величине $(1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>...)$. Рассмотрим предел его общего члена по абсолютной величине:

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

следовательно, ряд сходится. Установим вид сходимости, для этого рассмотрим ряд из его абсолютных величин: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$; имеем гармонический ряд, который является расходящимся (см. пример 13.1). Следовательно, исходный ряд сходится условно.

13.3. Степенные ряды

В числовых рядах членами ряда были числа, теперь рассмотрим ряды, у которых члены ряда содержат степенную функцию. Такие ряды называются *степенными*.

Ряд вида

$$c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+...+c_n(z-z_0)^n+...$$

является степенным рядом. Для удобства работы с ним можно сделать замену $z-z_0=x$, и получится ряд

$$c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n+...=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

где числа c_1, c_2, ..., c_n, ... называются *коэффициентами степенного ряда*.

Подставляя вместо x числа, можно получать различные числовые ряды, как сходящиеся, так и расходящиеся. С практической точки зрения нас интересуют сходящиеся ряды. Это означает, что нам надо найти те значения x, при которых степенной ряд сходится.

Совокупность всех значений x, при которых сходится данный степенной ряд, называют его *областью сходимости*.

Теорема 13.9 (Абеля). *Если степенной ряд сходится при некотором значении $x=x_0\neq 0$, то он сходится абсолютно при всех x, удовлетворяющих условию $|x|<|x_0|$; если степенной ряд расходится при некотором $x=x_1$, то он расходится при всех x, удовлетворяющих условию $|x|>|x_1|$.*

Из теоремы Абеля следует, что для любого степенного ряда найдется такое неотрицательное число R, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ ряд расходится. Такое число R называется *радиусом сходимости степенного ряда*. Это означает, что при $x\in(-R;R)$ ряд сходится, а при

$x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$ ряд расходится. Интервал $(-R; R)$ является *интервалом сходимости* степенного ряда, но не является областью сходимости, пока нет ответа на вопрос о сходимости ряда на концах этого интервала, т.е. при $x = \pm R$. Для этого следует подставить в формулу общего члена степенного ряда $x = \pm R$ вместо x и исследовать два полученных числовых ряда на сходимость. То значение x, при котором ряд сходится, будет включено в область сходимости степенного ряда.

Из признака Даламбера (теорема 13.4) выводится формула для нахождения радиуса сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,$$

если все коэффициенты ряда отличны от нуля. Так как применение данной формулы ограничено, то рекомендуется придерживаться следующего *алгоритма нахождения области сходимости* степенного ряда.

1. Используя признак Даламбера (теорема 13.4) в совокупности с теоремой 13.8 найдем интервал сходимости (те значения x, при которых ряд сходится абсолютно), рассмотрев неравенство $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) < 1.$

2. Найденный интервал сходимости в общем случае не может считаться областью сходимости, так как найдены пока не все x, при которых ряд сходится. Следовательно, исследуем сходимость ряда на концах его интервала сходимости, т.е. исследуем на сходимость числовые ряды при $x = R$ и $x = -R$. При этом исследовании признак Даламбера неприменим.

Пример 13.5

Найдем область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}$.

Решение

Рассмотрим $c = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, где $u_n = \frac{x^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}$, $u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}}$:

$$c = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot 5^n\cdot\sqrt{n}}{5^{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{5}\sqrt{\frac{n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{5}\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{5}\cdot 1\right| = \left|\frac{x}{5}\right|,$$

так как $\left|\frac{x}{5}\right|$ от n не зависит и рассматривается как постоянная величина, предел которой равен ей самой.

По признаку Даламбера для сходимости ряда необходимо $c < 1$, следовательно, $\left|\frac{x}{5}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x}{5} < 1 \Rightarrow -5 < x < 5$, получили $x \in (-5; 5)$ — интервал сходимости ряда.

Исследуем на сходимость числовые ряды при $x = \pm 5$.

Пусть $x = 5$, тогда

$$u_n = \frac{5^n}{5^n\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}},$$

имеем обобщенный гармонический ряд $\frac{1}{n^p}$, где $p=\frac{1}{2}\le 1$, следовательно, при $x=5$ исходный ряд расходится.

Пусть $x=-5$, тогда

$$u_n=\frac{(-5)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}=\frac{(-1\cdot 5)^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n\cdot 5^n}{5^n\cdot\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

имеем знакочередующийся числовой ряд, члены которого убывают по абсолютной величине. Применяем признак Лейбница: $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, следовательно, ряд сходится. В данной задаче неважно, как сходится знакочередующийся ряд, абсолютно или условно.

Таким образом, получили область сходимости степенного ряда $x\in[-5;5)$.

13.4. Ряды Тейлора и Маклорена. Формула Тейлора

Пусть функция $y=f(x)$ имеет все производные до $(n+1)$-го порядка включительно в окрестности точки x_0. Требуется (для приближенных вычислений на практике) найти многочлен степени не выше, чем n, значение которого в точке $x=x_0$ сколь угодно мало отличалось бы от значения $f(x_0)$ и значения его производных в этой точке сколь угодно мало отличались бы от соответствующих значений производных функции $f(x)$ в точке x_0. Ищется такой многочлен в форме

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n,$$

где c_1, c_2, ..., c_n — неопределенные коэффициенты, которые можно найти из условия равенства производных многочлена и функции. Опуская подробности дифференцирования и решения системы уравнений, имеем

$$c_0=f(x_0),\, c_1=\frac{f'(x_0)}{1},\, c_2=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2},\, c_3=\frac{f'''(x_0)}{1\cdot 2\cdot 3},\, \ldots,\, c_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу $P_n(x)$ и зная, что $P_n(x)\approx f(x)$ по условию, получаем формулу разложения функции $y=f(x)$ в степенной ряд, который называется *рядом Тейлора*, а сама формула называется *формулой Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Необходимая точность приближенных вычислений достигается количеством принятых к рассмотрению членов ряда. Очевидно, что чем больше членов ряда, тем ближе $P_n(x_0)$ к $f(x_0)$. Следует заметить, что разложение функции $y=f(x)$ в степенной ряд по степеням $(x-x_0)$ единственно и этот ряд является рядом Тейлора.

Чаще всего в приближенных вычислениях формула Тейлора участвует при $x_0 = 0$. Подставив это значение в формулу Тейлора, получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Данное разложение в степенной ряд по степеням x называется *рядом Маклорена*.

Пример 13.6

Разложим в ряд Маклорена функцию $y = e^x$.

Решение

Найдем сначала $y(0) = e^0 = 1$. Затем будем находить производные этой функции в точке $x = 0$:

$$y'(x) = (e^x)' = e^x;\ y'(0) = 1;\ y''(x) = (y'(x))' = (e^x)' = e^x;$$

$$y''(0) = 1;\ y'''(x) = e^x;\ y'''(0) = 1.$$

Подставим полученные результаты в формулу для ряда Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots .$$

Но для стремления $P_n(x_0)$ к $f(x_0)$ необходимо, чтобы ряд был сходящимся, т.е. чтобы точка $x = x_0$ принадлежала области сходимости степенного ряда. Следовательно, разложение в ряд Маклорена должно сопровождаться указанием его области сходимости. В данном примере имеем степенной ряд, область сходимости которого будет найдена в упражнении 13.7 раздела «Практикум» данной главы: $x \in (-\infty; \infty)$.

Аналогичным образом выводятся формулы разложения в ряд других функций.

Приведем еще несколько наряду с $y = e^x$ наиболее часто встречающихся разложений в ряд Маклорена с указанием области сходимости ряда:

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in (-\infty; \infty);$

2) биномиальный ряд:

$$(1+x)^m = 1 + m \cdot x + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots .$$

Его область сходимости зависит от m: $x \in [-1; 1]$, если $m \geq 0$; $x \in (-1; 1]$, если $m \in (-1; 0)$; $x \in (-1; 1)$, если $m \leq -1$;

3) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$, если $x \in (-1; 1];$

4) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},\ x \in (-\infty; \infty);$

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},\ x \in (-\infty; \infty);$

6) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$, если $x \in [-1; 1]$.

Полезно заметить, что сумма нулевого, если он есть, и первого (при $n = 0$ и $n = 1$) членов разложения использовалась нами в вычислениях пределов при помощи эквивалентных бесконечно малых величин (см. окончание параграфа 10.6, пример 10.22).

13.5. Применение рядов в приближенных вычислениях

В данном параграфе мы будем проводить приближенные вычисления при помощи известных из предыдущего параграфа разложений шести функций в ряд Маклорена.

Пример 13.7

Вычислим $\sqrt[4]{90}$ с точностью до 0,001.

Решение

Используем разложение функции $(1+x)^m$ (биномиальный ряд, при этом должно быть выполнено условие $|x| \le 1$).

Представим $\sqrt[4]{90}$ таким образом, чтобы воспользоваться разложением в биномиальный ряд. Сначала следует 90 представить в виде суммы с ближайшим «извлекающимся» членом. Итак:

$$\sqrt[4]{90} = \sqrt[4]{81+9} = \sqrt[4]{81\left(1+\frac{9}{81}\right)} = \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{1+\frac{1}{9}} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{0,25} =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{0,25(0,25-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{0,25(0,25-1)(0,25-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots\right) =$$

$$= 3\left(1 + \frac{1}{36} - \frac{0,25\cdot 0,75}{2\cdot 9^2} + \frac{0,25\cdot 0,75\cdot 1,75}{6\cdot 9^3} - \ldots\right)\ldots = 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} + \frac{7}{64\cdot 6\cdot 81} - \ldots.$$

Получили знакочередующийся числовой ряд (не имеет значения, что чередование начинается со второго члена, а не с первого, так как первый член можно рассматривать отдельным от ряда слагаемым). Согласно второй части теоремы Лейбница (теорема 13.7) сумма ряда меньше, чем $|u_1|$, по абсолютной величине. Это позволяет найти первый член ряда, который меньше заданной точности, и отбросить его вместе с последующими членами, так как сумма отброшенных членов будет меньше заданной точности. В нашем случае $u_3 = \frac{1}{288} > 0{,}001$, а $u_4 = \frac{7}{63\cdot 6\cdot 81} < 0{,}001$, следовательно, всеми членами начиная с u_4 можно пренебречь, а в расчет брать только первые три члена разложения:

$$\sqrt[4]{90} \approx 3 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} = \frac{887}{288} \approx 3{,}080.$$

По требованию условия задачи дробь $\frac{887}{288}$ следует превратить в десятичную дробь, округленную до 0,001. Запись нуля в конце десятичной дроби указывает на порядок округления. Полученный ответ легко проверить при помощи калькулятора, убедившись в том, что разница между полученным ответом при решении и полученным с помощью калькулятора не превысит указанную в условии точность (0,001) по абсолютной величине.

Следует также отметить, что представление в виде именно *суммы* с ближайшим «извлекающимся» числом существенно, так как в случае разности получится знакопостоянный числовой ряд и теоремой Лейбница для достижения точности расчета пользоваться нельзя. В случае знакопостоянного ряда применяются более сложные оценки значения суммы ряда.

Пример 13.8

Вычислим $\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx$ с точностью до 0,00001.

Решение

Данный интеграл является «неберущимся», поэтому точное его значение найти невозможно. Воспользуемся готовым разложением в ряд Маклорена функции $y = e^x$, заменяя при этом x на $-x^2$:

$$\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{0,25}\left(1+\frac{-x^2}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\ldots\right)dx = \int\limits_0^{0,25}\left(1-x^2+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\ldots\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^{0,25} dx - \int\limits_0^{0,25} x^2dx + \int\limits_0^{0,25}\frac{x^4}{4}dx - \int\limits_0^{0,25}\frac{x^6}{6}dx + \ldots = x\Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{20}\Big|_0^{0,25} - \frac{x^7}{42}\Big|_0^{0,25} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{64\cdot 3} + \frac{1}{64\cdot 16\cdot 20} - \frac{1}{64\cdot 16\cdot 16\cdot 42} + \ldots .$$

Получили знакочередующийся числовой ряд, при этом

$$u_3 = \frac{1}{64\cdot 16\cdot 20} = \frac{1}{20480} > 0{,}00001,\ u_4 = \frac{1}{64\cdot 16\cdot 16\cdot 42} = \frac{1}{688128} < 0{,}00001,$$

следовательно, всеми членами ряда начиная с u_4 мы можем пренебречь. Таким образом:

$$\int\limits_0^{0,25} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{64\cdot 3} + \frac{1}{64\cdot 16\cdot 20} = \frac{15043}{61440} \approx 0{,}24484.$$

Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите достаточные признаки сходимости знакопостоянного числового ряда.
2. Для исследования каких рядов применяется признак Лейбница? Сформулируйте этот признак.
3. Что называется областью сходимости степенного ряда? Чем она отличается от интервала сходимости?
4. Может ли степенной ряд быть расходящимся при всех значениях x?
5. Чем отличается ряд Маклорена от ряда Тейлора?
6. Какие ряды называют абсолютно, а какие условно сходящимися?

Практикум по решению задач

Упражнение 13.1. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$.

Решение

Наличие показательной функции 5^n дает основания к применению признака Даламбера. Имеем

$$u_n = \frac{5^n}{n^5} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}.$$

Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot n^5}{(n+1)^5\cdot 5^n} = \lim_{n\to\infty}\left[5\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^5\right] =$$

$$= 5\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^5 = 5\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^5 = 5\cdot 1 = 5 > 1,$$

следовательно, исходный ряд расходится.

Упражнение 13.2. Исследуем на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{9^n}{n!}$.

Решение

Наличие показательной функции 9^n и факториальной зависимости $n!$ дает основание применить признак Даламбера. Имеем

$$u_n = \frac{9^n}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{9^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Преобразуем факториал: $(n+1)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot(n+1) = n!\cdot(n+1)$. Рассмотрим предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9^n\cdot 9\cdot n!}{n!(n+1)\cdot 9^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9}{n+1} = 0 < 1,$$

следовательно, исходный ряд сходится.

Упражнение 13.3. Исследуем ряд на сходимость $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Решение

Применять признак Даламбера не имеет смысла, так как общий член ряда содержит только логарифмическую функцию. Интегральный признак применить не получится, так как невозможно найти первообразную от функции $y = \frac{1}{\ln(x+1)}$. Остается признак сравнения. Сравним исходный ряд с гармоническим рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (зная, что он является расходящимся рядом). Сравним бесконечно малые величины $u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ и $v_n = \frac{1}{n}$ (см. конец параграфа 10.3), для этого рассмотрим

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln(n+1)}.$$

Имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, применим правило Лопиталя (см. параграф 11.5):

$$A = \lim_{n\to\infty}\frac{n'}{(\ln(n+1))'} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty,$$

следовательно, $u_n \ge v_n$. Имеем $u_n \ge v_n$, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится. Используя признак сравнения (вторая часть теоремы 13.2), делаем вывод, что исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ тоже расходится.

Упражнение 13.4. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}+1}$.

Решение

Применить интегральный признак не представляется возможным. Применять признак Даламбера не имеет смысла, так как общий член ряда содержит только степенную функцию. Применим предельный признак сравнения и в качестве v_n возьмем $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Сравним исходный u_n с выбранным v_n:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{\sqrt[6]{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1,$$

так как $\frac{3}{\sqrt[6]{n}}$ и $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — бесконечно малые при $n\to\infty$. Таким образом, $\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt[3]{n}+1}$, т.е. u_n и v_n — эквивалентные бесконечно малые величины, а значит, ряды $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ или оба сходятся, или оба расходятся. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Данный ряд является обобщенным гармоническим, и при $p=\frac{1}{2}\le 1$ он расходится, а следовательно, расходится и исходный ряд.

Упражнение 13.5. Исследуем на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!}{n^n}$, в случае сходимости выясним — условно или абсолютно.

Решение

Применить признак Лейбница, рассмотреть $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$ довольно сложно. Правда, есть вариант применения формулы Стирлинга $n!\approx\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Но мы попробуем, минуя признак Лейбница, исследовать на сходимость ряд из его абсолютных величин $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

Используем признак Даламбера, так как общий член ряда содержит факториал. Имеем

$$u_n=\frac{n!}{n^n},\ u_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot(n+1)\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=[1^\infty]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{n\cdot\frac{n+1}{-1}\cdot\frac{-1}{n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=e^{-1}<1,$$

ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно. При вычислении предела мы использовали второй замечательный предел (см. параграф 10.5) для устранения неопределенности вида $[1^\infty]$.

Упражнение 13.6. Найдем область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^{2n}}{n^2}$.

Решение

Рассмотрим $c=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, где $u_n=\frac{4^n x^{2n}}{n^2}$, $u_{n+1}=\frac{4^{n+1}x^{2(n+1)}}{(n+1)^2}$:

$$c=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^{n+1}\cdot x^{2n+2}\cdot n^2}{(n+1)^2\cdot 4^n\cdot x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|4x^2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right|=\lim_{n\to\infty}\left|4x^2\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^2\right|=\lim_{n\to\infty}\left|4x^2\cdot 1\right|=4x^2.$$

Для сходимости по признаку Даламбера необходимо $c<1$, следовательно, $4x^2<1\Rightarrow$ $\Rightarrow 4x^2-1<0\Rightarrow(2x-1)(2x+1)<0$. Решим неравенство методом интервалов (рис. 13.1).

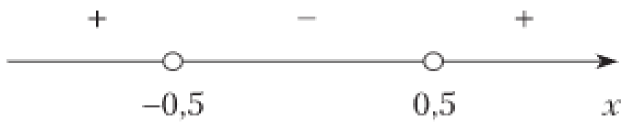


Рис. 13.1

Получили интервал сходимости ряда $x\in(-0{,}5;0{,}5)$.

Исследуем на сходимость числовые ряды при $x=\pm0{,}5$. При $x=0{,}5$ и при $x=-0{,}5$ получается один и тот же числовой ряд

$$u_n=\frac{4^n\cdot(\pm0{,}5)^{2n}}{n^2}=\frac{4^n\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n^2}=\frac{1}{n^2}.$$

Получили обобщенный гармонический ряд $\frac{1}{n^p}$, где $p=2>1$, следовательно, при $x=0{,}5$ и $x=-0{,}5$ исходный ряд сходится. Таким образом, область его сходимости $x\in[-0{,}5;0{,}5]$.

Упражнение 13.7. Найдем область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

Решение

Рассмотрим $c=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, где $u_n=\frac{x^n}{n!}$, $u_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$:

$$c=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x\cdot n!}{n!\cdot(n+1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0<1$$

при всех x. Следовательно, область сходимости исходного ряда $x\in(-\infty;\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

13.1. Исследуйте на сходимость числовые ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+n^3}{4^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3n^2-2n+5}{4+n-5n^2}$; е) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; ж) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2n^2+10}{1+5n-n^3}$;

з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{n\cdot4^n}$; и) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\cdot3^n}{n!}$; к) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5\cdot2^n}{5^n}$; л) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$; м) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4\sqrt{n+2}+10}{n^2+3n-7}$; н) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^n$.

13.2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, в случае сходимости выясните, абсолютно или условно:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2^n+n^2)}{3^n}$; г) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n e^n}{2^n}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{6n^2-4\sqrt{n}}{3+2n+7n^2}$;

е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+\ln n}{\sqrt{n^3}+2}$; ж) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{9^n}{n!}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{\sqrt{n^3}}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{n}$; к) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+3^n}{4^n}$.

13.3. Найдите области сходимости степенных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot 2^n}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\cdot 4^n}{n^2}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{6^n\sqrt[3]{n}}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 5^n\cdot x^n}{\sqrt[4]{n}}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot x^n}{n!}$; и) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{8^n}$; к) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{9^n n^4}$; л) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}\cdot 16^n}{\sqrt{n}}$; м) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$.

13.4. Вычислите приближенно:

а) $\sqrt[3]{72}$ с точностью до 0,001;

б) $\int_0^{0,5}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$ с точностью до 0,01;

в) $\ln 1{,}2$ с точностью до 0,001;

г) $\operatorname{arctg} 0{,}6$ с точностью до 0,01;

д) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ с точностью до 0,001.

Глава 14
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

14.1. Основные понятия. Частные производные функции нескольких переменных

Изучая различные природные явления и экономические процессы, приходим к выводу, что многие явления и процессы зависят не от одного фактора (одной переменной), а от множества факторов.

В этой связи возникла необходимость в рассмотрении *функций нескольких переменных*.

Если некоторому набору упорядоченных величин $(x_1, x_2, ..., x_n)$ из множества X поставить в соответствие одно определенное значение переменной z, то говорят, что на множестве X задана функция n переменных $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Множество X является областью определения функции. Для удобства будем рассматривать функцию двух переменных $z = f(x, y)$.

Пример 14.1

Найдем область определения и область значений функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Решение

Выражение под корнем четной степени должно быть неотрицательным:

$$4 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 4.$$

Геометрическим местом точек, удовлетворяющих данному неравенству, является круг, имеющий радиус, равный 2.

Значения исходной функции находятся в пределах отрезка $[0; 2]$.

Функцию двух переменных можно изобразить графически в трехмерной прямоугольной системе координат в виде поверхности. В примере 14.1 графиком функции является верхняя полусфера радиуса 2.

Построение графика функции происходит при помощи линий уровня, которые образуются при пересечении поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется множество точек на плоскости Oxy, для которых $f(x, y) = c$, число c называется *уровнем*.

В примере 14.1 линиями уровня являются окружности.

Определение 14.1. Число A называется *пределом* функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки M_0, что для всех $x \neq x_0$, $y \neq y_0$, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, выполняется неравенство $|f(x, y) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$

Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $(x_0; y_0)$, если она в этой точке определена и имеет в ней конечный предел, равный значению функции в этой точке:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0; y_0).$$

Дадим приращения двум независимым переменным — Δx и Δy. Тогда значение функции изменится на $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Величина Δz называется *полным приращением функции* в точке $(x; y)$. Если задавать приращение только одного аргумента, то полученные приращения функции $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ будут называться *частными*.

Пусть функция определена в некоторой окрестности точки $(x_0; y_0)$.

Определение 14.2. *Частной производной* функции нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел, если он существует, отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при стремлении этого приращения к нулю:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Еще частные производные z по x и по y могут обозначаться, как $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

При нахождении частной производной, например по x, только x считается переменной величиной, все остальные «буквы» считаются постоянными величинами со всеми вытекающими правилами нахождения производной функции одной переменной.

Теорема 14.1 (о производной сложной функции). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0; y_0)$, а x и y в свою очередь являются дифференцируемыми функциями от переменных u и v в точке $(u_0; v_0)$, причем $x_0 = x(u_0; v_0)$, $y_0 = y(u_0; v_0)$, то сложная функция $z = \varphi(u, v)$ дифференцируема в точке $(u_0; v_0)$, а ее частные производные вычисляются по формулам*

$$z'_u = z'_x \cdot x'_u + z'_y \cdot y'_u; \; z'_v = z'_x \cdot x'_v + z'_y \cdot y'_v.$$

Рассмотрим применение частных производных в некоторых задачах дифференцирования функции одной переменной.

Рассмотрим функцию одной переменной, заданную неявно: $f(x, y) = 0$. Продифференцируем равенство по x согласно теореме 14.1:

$$f'_x \cdot x'_x + f'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow f'_y \cdot y'_x = -f'_x \cdot 1 \Rightarrow y'_x = -\frac{f'_x}{f'_y}, \text{ или } y' = -\frac{f'_x}{f'_y}.$$

Получили формулу для нахождения *производной функции, заданной неявно.*

Как и у функции одной переменной, помимо производной первого порядка у функции многих переменных существуют производные высших порядков. Рассмотрим алгоритм их получения. Найдем частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$:

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x;\ z''_{yy} = (z'_y)'_y;\ z''_{xy} = (z'_x)'_y;\ z''_{yx} = (z'_y)'_x.$$

Последние две называются *смешанными частными производными*, причем $z''_{xy} = z''_{yx}$.

Имеет место еще одно обозначение частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ \text{(смешанная)}.$$

Таким же образом из частных производных второго порядка можно получить частные производные третьего порядка функции и т.д.

Смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь очередностью дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности. Это свойство называется *равенством смешанных производных.*

14.2. Экстремум функции нескольких переменных

Как и функции одной переменной, функции нескольких переменных тоже могут иметь экстремумы.

Определение 14.3. Точка $M(x_0; y_0)$ называется точкой *максимума* (локального максимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая δ-окрестность точки M, что для всех других точек $N(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) \le f(x_0, y_0)$.

Определение 14.4. Точка $M(x_0; y_0)$ называется точкой *минимума* (локального минимума) функции $z = f(x, y)$, если существует такая δ-окрестность точки M, что для всех других точек $N(x; y)$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) \ge f(x_0, y_0)$.

Теорема 14.2 (необходимое условие существования экстремума функции нескольких переменных). *Если дифференцируемая функция имеет экстремум в некоторой точке, то ее частные производные первого порядка в этой точке равны нулю.*

Точки из области определения функции, в которых частные производные первого порядка функции равны нулю (или не существуют за исключением хотя бы одной) называются *критическими точками.*

Теорема 14.3 (достаточное условие существования экстремума функции двух переменных). *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности критической точки $M(x_0; y_0)$ и имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $z''_{xx}(x_0; y_0) = A$, $z''_{xy}(x_0; y_0) = B$,*

$z''_{yy}(x_0; y_0) = C$. *Если* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, *то в точке M функция достигает экстремума, причем максимума, если* $A < 0$, *и минимума, если* $A > 0$. *Если* $\Delta < 0$, *то экстремума в точке M нет, если* $\Delta = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

14.3. Условный экстремум функции нескольких переменных

Может оказаться, что у функции нескольких переменных эти переменные не являются независимыми друг от друга, а связаны какими-то условиями. Такая ситуация типична для экономики. Она приводит к решению задачи нахождения экстремума функции нескольких переменных при дополнительных условиях. Рассмотрим более простую задачу нахождения экстремума функции двух переменных $z = f(x, y)$ при одном дополнительном условии $\varphi(x, y) = 0$. Это условие называется *уравнением связи*, а сам экстремум называется *условным экстремумом*. Решается данная задача *методом множителей Лагранжа*: составляется вспомогательная *функция Лагранжа*

$$L = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где $z = f(x, y)$ — исходная функция; $\varphi(x, y)$ — функция из уравнения связи; λ — неопределенный *множитель Лагранжа*.

Данная задача сводится к отысканию экстремума функции трех переменных $L(x, y, \lambda)$. Пользуясь необходимым условием существования экстремума функции нескольких переменных (теорема 14.2), имеем систему

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x + \lambda\varphi'_x = 0, \\ f'_y + \lambda\varphi'_y = 0, \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Чтобы выяснить, достигает ли функция в критической точке условного экстремума, достаточно вычислить значение следующего определителя $\Delta_н$ в критической точке:

$$\Delta_н = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta_н > 0$, то в критической точке функция достигает *условного максимума*, если $\Delta_н < 0$, то в критической точке функция достигает *условного минимума*, а если $\Delta_н = 0$, то функция не имеет экстремума в этой точке.

14.4. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате эксперимента был получен некоторый набор данных зависимости между двумя переменными, который можно представить в виде таблицы:

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Таким образом, имеем задание функции $y = y(x)$ табличным способом. Данные этой таблицы можно представить точками в прямоугольной системе координат. Если соединить эти точки ломаной или какой-нибудь «волнообразной» линией, то дальнейшая работа с этими данными в области сравнения этих данных с другими или в области прогнозирования процессов будет невозможна. Поэтому возникает задача подобрать из известных элементарных функций такую, значения которой сколь возможно мало отличались бы от соответствующих значений экспериментальных данных. Такая элементарная функция называется *эмпирической функцией*, формула, ее выражающая, — *эмпирической формулой*, а замена опытных данных на эмпирическую функцию называется *аппроксимацией*. Она происходит следующим образом: сначала по опытным данным устанавливается вид зависимости $y = f(x)$, который наиболее близок к экспериментальным данным. Затем среди множества кривых, описывающих данный вид, выбирается «лучшая» кривая (она должна быть достаточно гладкой и хорошо согласовываться с эмпирическими данными).

Таким образом, встает задача определения неизвестных параметров элементарных функций и выяснения степени их соответствия экспериментальным данным. Для поиска этих параметров используют наиболее распространенный и теоретически обоснованный *метод наименьших квадратов*. Согласно этому методу в качестве параметров функции выбирают для эмпирической формулы такие, чтобы сумма квадратов отклонений значений функции, найденных по эмпирической формуле, от соответствующих опытных значений была бы минимальной. На рис. 14.1 изображены точками экспериментальные данные, линией — эмпирическая функция, δ_i — отклонения экспериментальных точек от эмпирической функции.

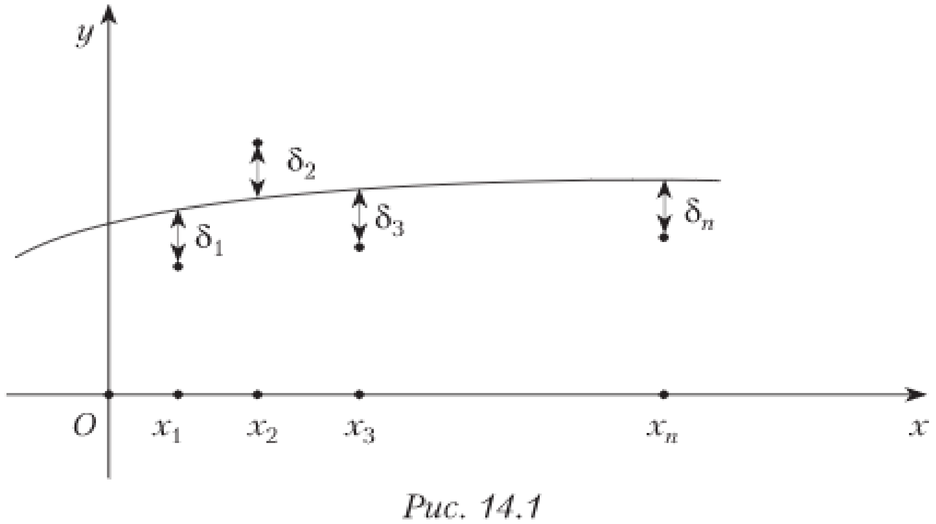


Рис. 14.1

Стоит отметить, что берется сумма квадратов отклонений, а не сумма отклонений по причине того, что некоторые $\delta_i > 0$, а некоторые $\delta_i < 0$, и если их суммировать, они будут компенсировать друг друга и картина сглаживания будет сильно нарушена. Если пытаться брать сумму отклонений по модулю, то такая функция будет не дифференцируема, что сильно усложнит решение задачи.

Наиболее простой аппроксимацией является линейная. Она имеет вид уравнения прямой $y = ax + b$, где a и b — параметры линейной функции. Значение аппроксимирующей функции при $x = x_i$ равно $ax_i + b$, y_i — соответствующее экспериментальное значение функции. Их разность $\delta_i = ax_i + b - y_i$. Следует рассмотреть сумму квадратов всех δ_i:

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_n^2 = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Имеем $S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ — функцию двух переменных a и b, и, чтобы достичь ее минимума (так как сумма квадратов должна быть наименьшей), необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} S'_a = 0, \\ S'_b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Сократив на 2 каждое слагаемое двух уравнений, получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i - x_i y_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

В этих уравнениях перегруппируем слагаемые левых частей в три суммы. С учетом вынесения общих множителей за скобку (за знак суммы) имеем

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Полученная система двух линейных уравнений с двумя неизвестными a и b называется *нормальной системой* уравнений для определения параметров a и b линейной функции $y = ax + b$ методом наименьших квадратов.

Контрольные вопросы и задания

1. Что является графиком функции двух переменных в прямоугольной системе координат?
2. Что называется линией уровня функции?
3. Что называется частной производной функции нескольких переменных?
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условия существования экстремума функции двух переменных в точке.

5. Какие производные называются смешанными? Сколько имеется смешанных производных третьего порядка функции двух переменных?

6. В чем суть метода наименьших квадратов?

Практикум по решению задач

Упражнение 14.1. Найдем частные производные функции $z=\ln\left(xy^2-\dfrac{x^2}{y}\right)+e^{-x}$.

Решение

При нахождении частной производной z'_x считаем y постоянной, а при нахождении частной производной z'_y постоянной является x:

$$z'_x=\left[\ln\left(xy^2-\frac{x^2}{y}\right)\right]'_x+(e^{-x})'_x=\frac{1}{xy^2-\dfrac{x^2}{y}}\cdot\left(xy^2-\frac{x^2}{y}\right)'_x+e^{-x}\cdot(-1)=$$

$$=\frac{1}{xy^2-\dfrac{x^2}{y}}\cdot\left(1\cdot y^2-2x\cdot\frac{1}{y}\right)-e^{-x}=\frac{y^2-\dfrac{2x}{y}}{xy^2-\dfrac{x^2}{y}}-e^{-x};$$

$$z'_y=\left[\ln\left(xy^2-\frac{x^2}{y}\right)\right]'_y+(e^{-x})'_y=\frac{1}{xy^2-\dfrac{x^2}{y}}\cdot\left(xy^2-\frac{x^2}{y}\right)'_y+0=$$

$$=\frac{1}{x^2y-\dfrac{x^2}{y}}\cdot\left[x\cdot 2y-x^2\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\right]=\frac{2xy+\dfrac{x^2}{y^2}}{x^2y-\dfrac{x^2}{y}}.$$

Упражнение 14.2. Найдем производную y' функции $y=\sin(xy^3)-\sqrt[3]{x^3+y}$.

Решение

Составим заданную неявно функцию $f(x,y)$, перенеся все слагаемые в одну сторону равенства:

$$f(x,y)=\sin(xy^3)-(x^3+y)^{\frac{1}{3}}-y.$$

Находим частные производные:

$$f'_x=[\sin(xy^3)]'_x-[(x^3+y)^{\frac{1}{3}}]'_x-y'_x=\cos(xy^3)\cdot(xy^3)'_x-\frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^3+y)'_x-0=$$

$$=\cos(xy^3)\cdot y^3\cdot 1-\frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}(3x^2+0)=y^3\cos(xy^3)-x^2(x^3+y)^{-\frac{2}{3}};$$

$$f'_y=[\sin(xy^3)]'_y-[(x^3+y)^{\frac{1}{3}}]'_y-y'_y=\cos(xy^3)\cdot(xy^3)'_y-\frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}\cdot(x^3+y)'_y-1=$$

$$=\cos(xy^3)\cdot x\cdot 3y^2-\frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}\cdot(0+1)-1=3xy^2\cos(xy^3)-\frac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}-1.$$

Подставим f'_x и f'_y в формулу производной неявной функции. Имеем ответ:

$$y'=\frac{y^3\cos(xy^3)-x^2(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}}{3xy^2\cos(xy^3)-\dfrac{1}{3}(x^3+y)^{-\frac{2}{3}}-1}.$$

Упражнение 14.3. Найдем производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\ln x}$.

Решение

Производные степенно-показательных функций (где переменная величина содержится и в основании, и в показателе степени) мы ранее не рассматривали. Сделаем замены переменных: пусть $u = \sin x$, $v = \ln x$. Полученная функция $y = u^v$ является функцией двух переменных — $y = y(u, v)$, а сами эти переменные u и v в свою очередь являются функциями одной переменной x. В нашем случае формула производной сложной функции из теоремы 14.1 примет следующий вид:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x + y'_v \cdot v'_x, \text{ или } y' = y'_u \cdot u' + y'_v \cdot v'.$$

Определяем производные:

$$u' = (\sin x)' = \cos x; \ v' = (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$y'_u = (u^v)'_u = v \cdot u^{v-1} = \ln x \cdot (\sin x)^{\ln x - 1};$$

$$y'_v = (u^v)'_v = u^v \cdot \ln u = (\sin x)^{\ln x} \cdot \ln \sin x.$$

Подставим эти четыре выражения в формулу для y':

$$y' = \ln x \cdot (\sin x)^{\ln x - 1} \cdot \cos x + (\sin x)^{\ln x} \cdot \ln \sin x \cdot \frac{1}{x}.$$

Упражнение 14.4. Найдем частные производные второго порядка функции $z = \sin\frac{x}{y}$.

Решение

Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}; \ z'_y = \cos\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right).$$

Теперь будем искать производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(\cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{y^2}\sin\frac{x}{y};$$

$$z''_{yy} = \left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)'_y = -x\left(y^{-2} \cdot \cos\frac{x}{y}\right)'_y = -x \cdot \left[(y^{-2})'_y \cdot \cos\frac{x}{y} + y^{-2} \cdot \left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y\right] =$$

$$= -x\left[-2y^{-3} \cdot \cos\frac{x}{y} + y^{-2} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)\right] = -x\left(-\frac{2}{y^3}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^4}\sin\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \frac{x}{y^4}\left(2y\cos\frac{x}{y} - x\sin\frac{x}{y}\right);$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\right)'_y = \left(\frac{1}{y}\right)'_y \cos\frac{x}{y} + \frac{1}{y}\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{1}{y} \cdot \left(-\sin\frac{x}{y}\right) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y}.$$

Замечание 14.1. На примере данного упражнения можно проверить справедливость равенства $z''_{xy} = z''_{yx}$:

$$z''_{yx} = \left(-\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}\left(x\cos\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1}{y^2}\left[x'_x \cdot \cos\frac{x}{y} + x\cdot\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x\right] =$$

$$= -\frac{1}{y^2}\left[1\cdot\cos\frac{x}{y} + x\cdot\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right] = -\frac{1}{y^2}\cos\frac{x}{y} + \frac{x}{y^3}\sin\frac{x}{y} = z''_{xy}.$$

Упражнение 14.5. Исследуем на экстремум функцию $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 3$.

Решение

Сначала найдем критические точки функции, пользуясь необходимым условием существования экстремума функции нескольких переменных (теорема 14.2). Найдем z'_x и z'_y:

$$z'_x = 3x^2 + 0 - 6y + 0, \text{ или } z'_x = 3x^2 - 6y;$$

$$z'_y = 0 + 24y^2 - 6x + 0, \text{ или } z'_y = 24y^2 - 6x.$$

Теперь решим систему уравнений:

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6y = 0, \\ 24y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0, \\ x = 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16y^4 - 2y = 0, \\ x = 4y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y(8y^3 - 1) = 0, \\ x = 4y^2, \end{cases}$$

откуда получаем две критические точки $M(0;0)$; $N(1;0{,}5)$. Исследуем их на экстремум, используя достаточное условие существования экстремума функции двух переменных. Найдем частные производные второго порядка функции:

$$z''_{xx} = (3x^2 - 6y)'_x = 6x;\ z''_{yy} = (24y^2 - 6x)'_y = 48y;\ z''_{xy} = (3x^2 - 6y)'_y = -6.$$

Вычислим их значения сначала в критической точке $M(0;0)$:

$$A = z''_{xx}(0;0) = 6\cdot 0 = 0;\ B = z''_{xy}(0;0) = -6;\ C = z''_{yy}(0;0) = 48\cdot 0 = 0.$$

Запишем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0,$$

следовательно, в критической точке M экстремума нет.

Вычислим A, B, C для точки $N(1;0{,}5)$:

$$A = z''_{xx}(1;0{,}5) = 6\cdot 1 = 6;\ B = z''_{xy}(1;0{,}5) = -6;\ C = z''_{yy}(1;0{,}5) = 48\cdot 0{,}5 = 24.$$

Запишем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 24 \end{vmatrix} = 108 > 0,$$

следовательно, в точке $N(1;0{,}5)$ исходная функция $z(x,y)$ достигает экстремума, причем минимума, так как $A = 6 > 0$.

Упражнение 14.6. Исследуем на экстремум функцию $z = 2x - 4y + 3$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение

Запишем функцию Лагранжа: $L = 2x - 4y + 3 + \lambda\cdot(x^2 + y^2 - 5)$.

Найдем критические точки функции, решив систему:

$$\begin{cases} L'_x = 0, \\ L'_y = 0, \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ -4 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ y = \dfrac{2}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{4}{\lambda^2} = 5. \end{cases}$$

Из третьего уравнения получаем, что $\lambda_{1,2} = \pm 1$, подставляем эти значения в первые два уравнения и имеем, таким образом, две критические точки: $(-1; 2)$ при $\lambda = 1$ и $(1; -2)$ при $\lambda = -1$. Рассмотрим определитель $\Delta_н$. Найдем для этого все необходимые частные производные: $L''_{xx} = (2+2\lambda x)'_x = 2\lambda$, $L''_{yy} = (-4+2\lambda x)'_y = 2\lambda$, $L''_{xy} = (2+2\lambda x)'_y = 0$, $\varphi'_x = 2x$, $\varphi'_y = 2y$. Запишем $\Delta_н$:

$$\Delta_н = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda y^2 - 8\lambda x^2 = -8\lambda(x^2+y^2) = -8\lambda \cdot 5 = -40\lambda.$$

Теперь достаточно подставить только значения λ для получения окончательного вывода:

$\lambda_1 = -1 \Rightarrow \Delta_н = -40 \cdot (-1) = 40 > 0$, следовательно, исходная функция достигает максимума в точке $(1; -2)$; $\lambda_2 = 1 \Rightarrow \Delta_н = -40 \cdot 1 = -40 < 0$, следовательно, исходная функция достигает минимума в точке $(-1; 2)$.

Упражнение 14.7. В таблице представлены экспериментальные данные:

x	1	4	9	16	25	36
y	1,5	2,5	2,7	3,8	4,9	6,6

В результате их выравнивания по степенной функции было получено уравнение $y = \sqrt{x}$. Пользуясь методом наименьших квадратов, аппроксимируем эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найдем параметры a и b). Установим, какая из двух функций достовернее в смысле метода наименьших квадратов выравнивает экспериментальные данные.

Решение

Сначала найдем прямую, которая лучше других прямых в смысле метода наименьших квадратов аппроксимирует экспериментальные данные. Решение представим в виде таблицы:

n	1	2	3	4	5	6	Σ
x_i	1	4	9	16	25	36	91
y_i	1,5	2,5	2,7	3,8	4,9	6,6	22
x_i^2	1	16	81	256	625	1296	2275
$x_i y_i$	1,5	10	24,3	60,8	122,5	237,6	456,7

Данные, представленные в последней (правой) колонке, обозначенной как Σ, являются суммами вдоль каждой строки. Это те самые суммы, которые содержатся в нормальной системе уравнений для определения параметров линейной функции. Подставляя в эту систему значения сумм из правой колонки таблицы, получим

$$\begin{cases} 2275a + 91b = 456{,}7, \\ 91a + 6b = 22. \end{cases}$$

Округляя значения a и b до 0,01, получаем $a \approx 0{,}14$; $b \approx 1{,}58$, следовательно, лучшая из прямых вида $y = ax + b$ имеет уравнение $y = 0{,}14x + 1{,}58$.

Чтобы сравнить теперь, какая из функций $y = 0{,}14x + 1{,}58$ или $y = \sqrt{x}$ лучше в смысле метода наименьших квадратов выравнивает данные эксперимента, следует найти суммы квадратов отклонений этих двух функций от экспериментальных данных. Лучше будет та, у которой эта сумма квадратов окажется меньше.

Сначала рассчитаем значения функций $y = 0{,}14x + 1{,}58$ и $y = \sqrt{x}$ при значениях x_i, представленных в условии задачи. Затем найдем квадраты отклонений эмпирических данных от соответствующих значений этих функций. Решение оформим в виде двух таблиц.

Для функции $y = 0{,}14x + 1{,}58$:

x_i	1	4	9	16	25	36
y_i	1,72	2,14	2,84	3,82	5,08	6,62
δ_i	0,22	–0,36	0,14	0,02	0,18	0,02
δ_i^2	0,0484	0,1296	0,0196	0,0004	0,0324	0,0004

$\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2 = 0{,}2308$, этот результат получен суммированием значений δ_i^2 вдоль последней строки.

Для функции $y = \sqrt{x}$:

x_i	1	4	9	16	25	36
y_i	1	2	3	4	5	6
δ_i	–0,5	–0,5	0,3	0,2	0,1	–0,6
δ_i^2	0,25	0,25	0,09	0,04	0,01	0,36

$\sum_{i=1}^{6}\delta_i^2 = 1$, этот результат получен суммированием значений δ_i^2 вдоль последней строки.

Получили, что сумма квадратов отклонений функции $y = 0{,}14x + 1{,}58$ от экспериментальных данных, равная 0,2308, оказалась меньше, чем сумма квадратов отклонений функции $y = \sqrt{x}$ от тех же данных эксперимента, следовательно, полученная прямая $y = 0{,}14x + 1{,}58$ лучше в смысле метода наименьших квадратов аппроксимирует экспериментальные данные.

Решение такой задачи можно оформлять в виде одной таблицы, а не трех.

Задачи для самостоятельного решения

14.1. Найдите частные производные первого порядка функций:

а) $z = e^{2x-y}\cdot(2xy^2 - x)$; б) $z = \cos^2(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})$; в) $z = x\cdot 2^y + y^x$; г) $z = \sqrt{\ln(y^3 - x)}$;

д) $z = x^{\sin y}$; е) $z = \operatorname{arctg}\left(xy - \dfrac{x}{y}\right)$; ж) $z = \dfrac{e^{xy}}{xy}$; з) $z = \dfrac{\sin y^3}{x^2}$; и) $z = \arcsin^3\sqrt{xy}$.

14.2. Найдите все частные производные второго порядка функций:

а) $z = xy^2 + e^{-x}$; б) $z = \ln(2x - 3y)$;

в) $z = \sin(xy + 1)$; г) $z = y\cdot\operatorname{arctg} x$.

14.3. Найдите точки максимума и минимума функций:

а) $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 2$; б) $z = 4x - 4y - x^2 - y^2 - 1$;

в) $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 5$; г) $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y) + e^2$;

д) $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2 - 4$; е) $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при $x + y = 0{,}5$;

ж) $z = 6x + 4y - 1$ при $x^2 + y^2 = 13$; з) $z = 4x + y + 2$ при $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3$;

и) $z = x + y - 3$ при $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 0{,}5$.

14.4. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y представлены в таблице:

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	1,3	1,8	2,2	2,3	2,6	3

В результате выравнивая этих данных получена функция $y = \sqrt{x+2}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найдите параметры a и b). Выясните, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

14.5. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y представлены в таблице:

x_i	4	4,5	5	5,5	6
y_i	0,8	0,5	0,2	0,4	0,9

В результате выравнивая этих данных получена функция $y = (x-5)^2$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найдите параметры a и b). Выясните, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

14.6. Экспериментальные данные о значениях переменных x и y представлены в таблице:

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y_i	5	3	2	1	1	0

В результате выравнивая этих данных получена функция $y = \dfrac{5}{x}$. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте эти данные линейной зависимостью $y = ax + b$ (найдите параметры a и b). Выясните, какая из двух линий лучше (в смысле метода наименьших квадратов) выравнивает экспериментальные данные.

Глава 15
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

15.1. Основные понятия

Определение 15.1. Уравнение, которое связывает функцию одной или нескольких переменных, эти переменные и производные данной функции различных порядков по этим переменным, называется *дифференциальным уравнением*.

Дифференциальные уравнения, включающие функции нескольких переменных, изучают в курсе «Уравнения в частных производных». Мы же будем рассматривать функции одной переменной в дифференциальных уравнениях. Полное название нашей главы «Обыкновенные дифференциальные уравнения». В дальнейшем слово «обыкновенные» будет подразумеваться по умолчанию. Итак, в общем случае дифференциальное уравнение может быть записано в виде $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок старшей производной функции, входящей в уравнение, определяет *порядок дифференциального уравнения*.

Обычно уравнение подразделяют на дифференциальные уравнения *первого порядка* $F(x, y, y') = 0$ и дифференциальные уравнения *высших порядков*.

Решить дифференциальное уравнение означает найти такую функцию $y = y(x)$, которая при подстановке ее в исходное уравнение обращает это уравнение в тождество. Решение может быть найдено в виде неявной функции $\varphi(x, y) = 0$, тогда она называется *интегралом дифференциального уравнения*.

В качестве примера простейшего дифференциального уравнения можно рассмотреть задачу о нахождении первообразной.

Пример 15.1

Решим уравнение $y' = \dfrac{1}{x}$.

Решение

Представим y' в виде $y' = \dfrac{dy}{dx}$:

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dy = \frac{dx}{x}.$$

Имеем право проинтегрировать обе части нашего равенства (знак равенства не нарушится). Получаем

$$\int dy = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow y = \ln|x| + C.$$

Достаточно записывать одну неопределенную постоянную C, так как если их будет две, то можно перенести их в одну сторону равенства и тогда их сумма или разность будет равна C.

В связи с наличием в ответе неопределенной постоянной делаем вывод о том, что дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением* дифференциального уравнения. Но если задавать произвольной постоянной C определенные числовые значения, то каждому такому значению будет соответствовать *частное решение* дифференциального уравнения. Количество неопределенных постоянных в ответе совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Для уравнения примера 15.1 функция $y=\ln|x|+C$ является общим решением, а функции $y=\ln|x|+2$ или $y=\ln|x|-5$ являются частными решениями дифференциального уравнения.

Каждому частному решению соответствует кривая в прямоугольной системе координат, которая называется *интегральной кривой*. Общему решению соответствует *семейство* интегральных кривых.

Но частные решения обычно не получают, задавая C. Их получают, когда задается конкретная задача, а именно, когда задаются в этой задаче *начальные условия*.

Для уравнения первого порядка — это значение функции при конкретном значении аргумента.

Пример 15.2

Найдем частное решение уравнения из примера 15.1 при условии, что $y(1)=3$.

Решение

Подставляем $x=1$ и $y=3$ в общее решение дифференциального уравнения:

$$y=\ln|x|+C \Rightarrow 3=\ln 1+C \Rightarrow C=3,$$

таким образом получили ответ $y=\ln|x|+3$.

Одним из главных вопросов, связанных с дифференциальными уравнениями, является вопрос о том, существует ли частное решение, удовлетворяющее каким-либо начальным условиям, и каково количество таких решений. На эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема 15.1 (о существовании и единственности решения). *Если в дифференциальном уравнении $y'=f(x,y)$ функция $f(x,y)$ непрерывна на некотором открытом множестве плоскости Oxy, то для любой точки этого множества (x_0,y_0) найдется решение $y=y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. А если на этом же множестве непрерывна и частная производная f'_y, то упомянутое решение единственно.*

Задача отыскания частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего какому-либо начальному условию, называют *задачей Коши*.

15.2. Уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Уравнение с разделяющимися переменными имеет вид $y' = f(x) \cdot g(y)$ или $f(x) \cdot \varphi(y)dx + g(x)\psi(y)dy = 0$. Данный вид уравнений предполагает «разделение переменных» по разные стороны равенства:

$$y' = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow dy = f(x) \cdot g(y)dx \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

или

$$f(x) \cdot \varphi(y)dx + g(x)\psi(y)dy = 0 \Rightarrow f(x) \cdot \varphi(y)dx = -g(x)\psi(y)dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f(x)dx}{g(x)} = -\frac{\psi(y)dy}{\varphi(y)}.$$

Разделив переменные, мы получаем возможность взять интегралы от обеих частей равенства.

Пример 15.3

Решим уравнение $y' = 2x + xy$.

Решение

$$y' = 2x + xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(2+y) \Rightarrow \frac{dy}{2+y} = xdx \Rightarrow \int \frac{d(y+2)}{2+y} = \int xdx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|y+2| = \frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow \ln|y+2| = \ln e^{0,5x^2} + \ln C \Rightarrow \ln|y+2| = \ln(C \cdot e^{0,5x^2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y + 2 = C \cdot e^{0,5x^2} \Rightarrow y = C \cdot e^{0,5x^2} - 2.$$

Получили общее решение исходного дифференциального уравнения. Стоит выделить некоторые этапы решения. При делении на $2+y$ обеих частей равенства можно потерять решение $2+y=0$. Чтобы проверить, является ли $2+y=0$ решением, надо подставить $y=-2$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$(-2)' = 2x + x \cdot (-2) \Rightarrow 0 = 2x - 2x \Rightarrow 0 = 0.$$

Получили тождество, следовательно, $y=-2$ является решением, которое в первой версии ответа $\ln|y+2| = \frac{x^2}{2} + \ln C$ не содержится, и его следовало бы указывать. Но мы преобразовали этот ответ. В заключительной версии ответа $y = C \cdot e^{0,5x^2} - 2$ решение $y=-2$ уже присутствует (при $C=0$).

Пример 15.4

Решим уравнение $xydx + (x+1)dy = 0$.

Решение

$$xydx + (x+1)dy \Rightarrow xydx = -(x+1)dy \Rightarrow \frac{xdx}{x+1} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{x+1-1}{x+1}dx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow \int dx - \int \frac{d(x+1)}{x+1} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x - \ln|x+1| - \ln C = -\ln|y| \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + \ln C - \ln e^x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln y = \ln\left|C(x+1)e^{-x}\right| \Rightarrow y = C(x+1)e^{-x}.$$

При разделении переменных нам пришлось делить обе части равенства на $x+1$ и на y, следовательно, могли потерять решения $x=-1$ и $y=0$. Проверим, подставляя каждое из них в исходное уравнение. Если $x=-1$, то имеем

$$-1\cdot y\cdot d(-1)=(-1+1)\cdot dy \Rightarrow -1\cdot y\cdot 0+0\cdot dy=0 \Rightarrow 0+0=0$$

— тождество, значит, $x=-1$ — решение (оно не вошло в $y=C(x+1)e^{-x}$). Если $y=0$, то имеем

$$x\cdot 0\cdot dx+(x+1)\cdot d0=0 \Rightarrow x\cdot 0\cdot dx+(x+1)\cdot 0=0 \Rightarrow 0+0=0$$

— тождество, значит, $y=0$ — решение (но оно входит в $y=C(x+1)e^{-x}$ при $C=0$). Таким образом, окончательный ответ: $y=C(x+1)e^{-x}$, $x=-1$.

15.3. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Если дифференциальное уравнение первого порядка может быть представлено в виде $y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ или в виде $f(x,y)dx+g(x,y)dy=0$, где $f(x,y)$ и $g(x,y)$ — однородные функции одной и той же степени, то исходное дифференциальное уравнение называется *однородным*. Однородность в данном случае — по x и y.

С однородными уравнениями уже приходилось работать в школьном курсе математики. Например, когда слагаемые тригонометрического уравнения делили на $\cos x$ или на $\cos^2 x$, получая после деления линейное или квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$.

Дифференциальное уравнение можно проверить на однородность. Для этого следует подставить kx вместо x и ky вместо y в исходное уравнение. Если после преобразований это уравнение примет первоначальный вид (т.е. k сократится), то исходное дифференциальное уравнение является однородным.

Однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены переменной $\frac{y}{x}=z(x)$. Тогда $y=x\cdot z \Rightarrow$ $\Rightarrow y'=x'\cdot z+x\cdot z' \Rightarrow y'=z+x\cdot z'$. И разделяющимися переменными будут переменные z и x.

Пример 15.5

Решим уравнение $(x^2+y^2)y'=xy$.

Решение

Заметив, что суммарная степень каждого слагаемого равна двум, проверим исходное уравнение на однородность:

$$[(kx)^2+(ky)^2]\cdot\frac{d(ky)}{d(kx)}=kx\cdot ky \Rightarrow (k^2x^2+k^2y^2)\cdot\frac{k\cdot dy}{k\cdot dx}=k^2xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2(x^2+y^2)\cdot\frac{dy}{dx}=k^2xy \Rightarrow (x^2+y^2)y'=xy.$$

Получили исходное дифференциальное уравнение, следовательно, оно является однородным. Сделаем замену $y=xz$, $y'=z+x\cdot z'$. Получим

$$[x^2+(xz)^2]\cdot(z+xz')=xxz \Rightarrow (x^2+x^2z^2)(z+xz')=x^2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(1+z^2)(z+xz')=x^2z \Rightarrow (1+z^2)(z+xz')=z \Rightarrow z+xz'+z^3+xz^2z'=z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xz'+xz^2z'=-z^3 \Rightarrow x(1+z^2)z'=-z^3 \Rightarrow x(1+z^2)\frac{dz}{dx}=-z^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(1+z^2)dz}{z^3}=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(z^{-3}+\frac{1}{z}\right)dz=-\frac{dx}{x} \Rightarrow \int\left(z^{-3}+\frac{1}{z}\right)dz=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int z^{-3}dz+\int\frac{dz}{z}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{z^{-2}}{-2}+\ln|z|=-\ln|x|+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z|+\ln|x|=\frac{1}{2z^2}+\ln C \Rightarrow \ln|xz|=\ln e^{\frac{1}{2z^2}}+\ln C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xz=C\cdot e^{\frac{1}{2z^2}} \Rightarrow x\cdot\frac{y}{x}=C\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}} \Rightarrow y=C\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}.$$

При разделении переменных z и x нам пришлось делить обе части уравнения на z^3 и на x, следовательно, могли потерять решения $x=0$ и $z^3=0 \Rightarrow z=0 \Rightarrow \frac{y}{x}=0 \Rightarrow y=0$.

Проверим, являются ли $y=0$ и $x=0$ решениями исходного уравнения. Для $y=0$ имеем $(x^2+y^2)\cdot 0=x\cdot 0 \Rightarrow 0=0$ — тождество, значит, $y=0$ является решением, не вошедшим в $y=C\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$, так как при $y=0$ обращается в нуль знаменатель показателя степени; $x=0$ не является решением, так как в условии фигурирует y', у которого в знаменателе $dx\neq 0$. Таким образом окончательный ответ: $y=C\cdot e^{\frac{x^2}{2y^2}}$, $y=0$.

15.4. Линейные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение, приводящееся к виду $y'+f(x)y=g(x)$, называется *линейным*.

Линейным оно называется потому, что переменная y содержится в уравнении строго в первой степени.

Линейным является и уравнение вида $x'+f(y)x=g(y)$, линейным оно является по x, и x здесь выступает как функция независимой переменной y.

Будем рассматривать уравнения вида $y'+f(x)y=g(x)$.

Если правая часть этого уравнения равна нулю ($g(x)=0$), то такое уравнение называется *линейным однородным*. В конкретном понимании оно является уравнением с разделяющимися переменными. Но в обобщенном случае линейное уравнение без правой части является однородным по y и y'.

Рассмотрим один из методов решения линейных уравнений, который называется *методом вариации произвольной постоянной*. Данный метод содержит следующие действия.

1. Решаем линейное однородное уравнение $y'+f(x)y=0$ (полагая $g(x)=0$) как уравнение с разделяющимися переменными. Получим y_0 — его общее решение.

2. В этом общем решении линейного однородного уравнения заменяем произвольную постоянную C на неизвестную функцию $C(x)$.

3. Полученное таким образом выражение для общего решения подставляем в исходное дифференциальное уравнение и находим $C(x)$.

4. Найденную $C(x)$ вместо C подставляем в y_0 (общее решение линейного однородного уравнения). В результате получим частное решение линейного уравнения $y_ч$.

5. Общее решение линейного уравнения записываем в виде суммы y_0 и $y_ч$: $y = y_0 + y_ч$.

Стоит отметить, что при нахождении y_0 приходится делить на y, но $y = 0$ не является решением исходного линейного уравнения.

Пример 15.6

Решим уравнение $xy' - 2y = 2x^4$.

Решение

Приведем уравнение к виду $y' + f(x)y = g(x)$, разделив каждое слагаемое на x ($x = 0$ не является решением уравнения): $y' - \dfrac{2}{x}y = 2x^3$. Общее решение уравнения ищем в виде $y = y_0 + y_ч$.

Найдем y_0, полагая правую часть равной нулю: $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = 2\int\frac{dx}{x} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln x^2 + \ln C \Rightarrow \ln|y| = \ln|Cx^2| \Rightarrow y_0 = Cx^2.$$

Получили общее решение линейного однородного уравнения.

Заменим произвольную постоянную C на функцию $C(x)$, получим соотношение $y = C(x)\cdot x^2$. Подставим $C(x)\cdot x^2$ вместо y в исходное дифференциальное уравнение:

$$(C(x)x^2)' - \frac{2}{x}C(x)\cdot x^2 = 2x^3 \Rightarrow C'(x)\cdot x^2 + C(x)\cdot 2x - 2C(x)\cdot x = 2x^3 \Rightarrow \frac{dC(x)}{dx}\cdot x^2 = 2x^3.$$

Необходимо заметить, что после преобразований обязательно уничтожаются члены, содержащие $C(x)$ в явном виде, и получается в итоге уравнение с разделяющимися переменными $C(x)$ и x.

Разделим последнее уравнение на x^2:

$$\frac{dC(x)}{dx} = 2x \Rightarrow dC(x) = 2xdx \Rightarrow \int dC(x) = \int 2xdx \Rightarrow C(x) = x^2.$$

Здесь нет необходимости записывать произвольную постоянную при этом интегрировании, так как ищется $C(x)$ для записи частного решения исходного дифференциального уравнения.

Полученное $C(x) = x^2$ подставим в выписанное ранее соотношение $y = C(x)\cdot x^2$, получим $y_ч = x^2\cdot x^2 \Rightarrow y_ч = x^4$.

Теперь выписываем ответ в виде $y = y_0 + y_ч$: $y = Cx^2 + x^4$.

15.5. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Рассмотрим два вида уравнений, допускающих понижение порядка.

1. Уравнение вида $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$ (уравнение, не содержащее y в явном виде). Порядок уравнения понижается при помощи замены $y^{(k)} = z(x)$.

2. Уравнение вида $F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ (уравнение, не содержащее x в явном виде). Порядок уравнения понижается при помощи замены $y' = z(y)$.

Пример 15.7

Решим уравнение $2xy'y'' = (y')^2 - 1$.

Решение

Уравнение не содержит y в явном виде.

Сделаем замену $y' = z(x)$, откуда $y'' = z'$. Подставим z и z' в исходное уравнение:

$$2xy'y'' = (y')^2 - 1 \Rightarrow 2xzz' = z^2 - 1.$$

Имеем уравнение с разделяющимися переменными z и x:

$$2xz \cdot \frac{dz}{dx} = z^2 - 1 \Rightarrow \frac{2zdz}{z^2 - 1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{2zdz}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{d(z^2 - 1)}{z^2 - 1} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z^2 - 1| = \ln|x| + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z^2 - 1| = \ln|C_1 x| \Rightarrow z^2 - 1 = C_1 x \Rightarrow z^2 = C_1 x + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \pm(C_1 x + 1)^{0,5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm(C_1 x + 1)^{0,5} \Rightarrow dy = \pm(C_1 x + 1)^{0,5} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \pm\int (C_1 x + 1)^{0,5} dx \Rightarrow y = \frac{1}{C_1} \int (C_1 x + 1)^{0,5} d(C_1 x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2(C_1 x + 1)^{1,5}}{3C_1} + C_2 \Rightarrow y - C_2 = \frac{2(C_1 x + 1)^{1,5}}{3C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3C_1(y - C_2) = 2(C_1 x + 1)^{1,5}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3.$$

В процессе решения пришлось делить на x и на $z^2 - 1$. $x = 0$ не является решением уравнения, так как $dx \neq 0$. Проверим, является ли решением $z^2 - 1$:

$$z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm 1 \Rightarrow dy = \pm dx \Rightarrow y = \pm x + C_3.$$

Подставим в исходное дифференциальное уравнение:

$$2x(\pm 1) \cdot 0 = (\pm 1)^2 - 1 \Rightarrow 0 = 0.$$

Получили тождество, следовательно, $y = \pm x + C_3$ является решением. Таким образом, имеем ответ: $9C_1^2(y - C_2)^2 = 4(C_1 x + 1)^3$, $y = \pm x + C_3$.

Пример 15.8

Решим уравнение $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Решение

Уравнение не содержит x в явном виде, следовательно, сделаем замену $y' = z(y)$, откуда $y'' = z'_y \cdot y' \Rightarrow y'' = z' \cdot z$. Подставим z и $z' \cdot z$ в исходное дифференциальное уравнение вместо y' и y''. Получим

$$(y')^2 + 2yy'' = 0 \Rightarrow z^2 + 2yzz' = 0 \Rightarrow 2yzz' = -z^2 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \ln C - 0,5\ln|y| \Rightarrow \ln|z| = \ln C - \ln\sqrt{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln\left|\frac{C}{\sqrt{y}}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=\frac{C}{\sqrt{y}}\Rightarrow y'=\frac{C}{\sqrt{y}}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{C}{\sqrt{y}}\Rightarrow\sqrt{y}dy=Cdx\Rightarrow\int\sqrt{y}dy=C\int dx\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{2}{3}y^{1,5}=Cx+C_4\Rightarrow y^{1,5}=\frac{3C}{2}x+\frac{3C_4}{2}\Rightarrow y^{1,5}=\sqrt{C_1}x+\sqrt{C_1}\cdot C_2$$

(произвольные постоянные представляем в любом удобном для дальнейших преобразований виде, поэтому $\frac{3C}{2}$ и $\frac{3C_4}{2}$ были заменены на $\sqrt{C_1}$ и $\sqrt{C_1}\cdot C_2$ соответственно) $\Rightarrow y^{1,5}=\sqrt{C_1}(x+C_2)$. Возведем обе части уравнения в квадрат. Получим $y^3=C_1(x+C_2)^2$. В процессе решения мы делили обе части уравнения на y и z. Проверим, являются ли $y=0$ и $z=0$ решениями. $y=0\Rightarrow 0^2+0=0$ — тождество, значит, $y=0$ является решением; $z=0\Rightarrow y'=0\Rightarrow\frac{dy}{dx}=0\Rightarrow y=C_3$. Подставим в исходное уравнение $(C_3')^2+2C_3\cdot C_3''=0\Rightarrow 0+0=0$ — тождество, значит, $y=C_3$ является решением, которое поглощает решение $y=0$, и это решение не входит в выражение $y^3=C_1(x+C_2)^2$. Таким образом имеем ответ: $y^3=C_1(x+C_2)^2$, $y=C_3$.

15.6. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами

Уравнение вида

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=f(x),$$

где a_0, a_1, ..., a_n — постоянные числа, называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. Если правая его часть равна нулю ($f(x)=0$), то уравнение является *однородным* (в обобщенном смысле, т.е. по y и ее производным). Если $f(x)\neq 0$, то уравнение является *неоднородным*.

Общее решение неоднородного уравнения представляется в виде $y = y_0 + y_ч$, где y_0 — общее решение однородного уравнения, а $y_ч$ — частное решение.

Сначала рассмотрим решения линейных однородных уравнений

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+...+a_1y'+a_0y=0.$$

Выпишем характеристическое уравнение, в котором $y^{(n)}$ заменяется на λ^n:

$$a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0=0.$$

В левой части уравнения имеем многочлен n-й степени. Необходимо решить данное уравнение и по этим корням выписать общее решение однородного уравнения.

Если корни характеристического уравнения действительные и различные, то решение линейного однородного уравнения будет выглядеть следующим образом:

$$y_0=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+...+C_ne^{\lambda_nx}.$$

Если среди этих корней есть корень λ_k кратности m, то этому корню будет соответствовать слагаемое вида $(C_1+C_2x+...+C_mx^{m-1})e^{\lambda_k}$.

Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные корни, то паре комплексных чисел $a \pm bi$ будет соответствовать слагаемое вида $e^{ax}(C_1 \sin bx + C_2 \cos bx)$.

Если комплексные числа кратные, то кратность k будет учитываться в виде многочленов степени $k-1$ вида $C_1 + C_2x + ... + C_kx^{k-1}$, умноженных на $\sin bx$ и $\cos bx$.

Следует отметить, что количество неопределенных постоянных совпадает с количеством корней характеристического уравнения и с порядком дифференциального уравнения.

Пример 15.9

Решим уравнение $y''' + y'' - 2y' = 0$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ или } \lambda^2 + \lambda - 2 = 0.$$

Решим квадратное уравнение. В итоге характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Эти корни действительные и различные, поэтому общее решение этого уравнения имеет вид $y = C_1 \cdot e^{0 \cdot x} + C_2 \cdot e^{1 \cdot x} + C_3e^{-2 \cdot x}$, или $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-2x}$.

Теперь перейдем к решению линейных неоднородных уравнений, а именно, к нахождению частного решения $y_ч$.

Наиболее распространены два метода: метод вариации произвольных постоянных и метод подбора частного решения по виду правой части $f(x)$. Рассмотрим второй метод, его применяют тогда, когда правая часть содержит многочлен, экспоненту, $\sin \alpha x$, $\cos \beta x$. Если $f(x)$ содержит другие функции, то следует применять метод вариации произвольных постоянных.

Если правая часть уравнения имеет вид $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$, то будем считать α *корнем правой части*, и частное решение следует искать в виде $y_ч = x^kQ(x)e^{\alpha x}$, где $Q(x)$ — многочлен общего вида той же степени, что и $P(x)$; k — кратность совпадения (число совпадений) α с действительными корнями характеристического уравнения λ.

Если правая часть содержит еще $\sin\beta x$ и (или) $\cos\beta x$, то корни правой части имеют вид $\alpha \pm \beta i$ и частное решение следует искать в виде $y_ч = x^ke^{\alpha x}(Q_1(x)\sin\beta x + Q_2(x)\cos\beta x)$, где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены общего вида той же степени, что и $P(x)$, k — кратность совпадения $\alpha \pm \beta i$ с парой комплексных корней характеристического уравнения.

Пример 15.10

Решим уравнение $y'' + 8y' + 16y = 4xe^{4x}$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4.$$

Имеем два действительных, совпадающих корня. Запишем общее решение однородного уравнения: $y_0 = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$. Частное решение будем искать в виде $y_ч = (Ax + B)e^{4x}$, так как правая часть содержит многочлен первой степени и экспоненту, а корень правой части (коэффициент при x в показателе степени) 4 не совпадает с корнями характеристического уравнения. A и B — неопределенные коэффициенты. Для того чтобы их найти, требуется подставить выражение для $y_ч$ в исходное дифференциальное уравнение. Для удобства найдем сначала $y'_ч$ и $y''_ч$:

$$y'_ч = Ae^{4x} + (Ax + B)\cdot 4e^{4x} = e^{4x}(A + 4Ax + 4B);$$

$$y''_ч = 4e^{4x}(A + 4Ax + 4B) + e^{4x}\cdot 4A = e^{4x}(4A + 16Ax + 16B + 4A).$$

Подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' соответственно и сокращая на e^{4x}, получаем

$$16Ax + 8A + 16B + 32Ax + 8A + 32B + 16Ax + 16B = 4x.$$

Решаем полученное тождество методом неопределенных коэффициентов, т.е. приравниванием коэффициенты при соответствующих степенях x левой и правой частей:

$$\begin{cases} 64A = 4, \\ 16A + 64B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{16}, \\ 64B = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{16}, \\ B = -\dfrac{1}{64}. \end{cases}$$

Подставляем полученные A и B в $y_ч$, получаем $y_ч = \left(\dfrac{x}{16} - \dfrac{1}{64}\right)e^{4x}$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = y_0 + y_ч$. Таким образом, получаем ответ:

$$y = e^{-4x}\cdot(C_1 + C_2x) + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{64}\right)\cdot e^{4x}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда подбор частного решения невозможен. В этом случае для его отыскания применяется метод вариации произвольных постоянных. Представим этот метод для случая линейных дифференциальных уравнений второго порядка $a_2y'' + a_1y' + a_0y = f(x)$.

1. Решаем линейное однородное уравнение, полагая $f(x) = 0$, получаем $y_0 = C_1y_1 + C_2y_2$.

2. В общем решении однородного уравнения заменяем произвольные постоянные на неизвестные функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$. Получим вид частного решения: $y_ч = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$.

3. Функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ определяются из системы

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1 + C'_2(x)y_2 = 0, \\ C'_1(x)y'_1 + C'_2(x)y'_2 = \dfrac{f(x)}{a_2}. \end{cases}$$

Найденные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ подставляем в $y_ч$.

4. Общее решение исходного уравнения запишется в виде $y = y_0 + y_ч$.

Пример 15.11

Решим уравнение $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

Решение

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1.$$

Имеем два действительных совпадающих корня, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = e^x(C_1 + C_2 x)$, или $y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x$. Заменим C_1 и C_2 на $C_1(x)$ и $C_2(x)$, таким образом, частное решение ищем в виде $y_ч = C_1(x)\cdot e^x + C_2(x)\cdot x\cdot e^x$. Запишем систему для определения $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'\cdot e^x + C_2'\cdot x\cdot e^x = 0, \\ C_1'\cdot (e^x)' + C_2'(xe^x)' = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0, \\ C_1' e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2'\cdot x, \\ C_2'\cdot e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

(второе уравнение последней системы было получено вычитанием первого уравнения из второго уравнения предыдущей системы).

Далее имеем

$$\begin{cases} C_1' = -C_2'\cdot x, \\ C_2'\cdot e^x = \dfrac{e^x}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1' = -1, \\ C_2' = \dfrac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -x, \\ C_2 = \ln|x| \end{cases} \Rightarrow y_ч = -x\cdot e^x + \ln|x|\cdot x\cdot e^x.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения записываем в виде $y = y + y_ч$. Получаем

$$y = e^x(C_1 + C_2 x) + (-x)e^x + x\ln|x|\cdot e^x, \text{ или } y = e^x[C_1 + (C_2 - 1)x + x\ln|x|].$$

Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что определяет порядок дифференциального уравнения?
3. Что означает решить дифференциальное уравнение?
4. Что называется общим решением дифференциального уравнения?
5. Что такое интегральная кривая?
6. Что называется частным решением дифференциального уравнения?
7. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения.
8. В чем суть задачи Коши?

Практикум по решению задач

Упражнение 15.1. Решим уравнение $y^{IV} - 4y^{III} = 0$.

Решение

Данное уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение: $\lambda^4 - 5\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda - 5) = 0$. Получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ (корень кратности три), $\lambda_4 = 5$. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)\cdot e^{0\cdot x} + C_4 e^{5x}$, или $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{5x}$.

Упражнение 15.2. Решим уравнение $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

Решение

Данное уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 13\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 13) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ или } \lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = 3 \pm 2i$. Имеем один действительный корень и пару комплексных корней. Общее решение исходного уравнения имеет вид $y = C_1 e^{0\cdot x} + e^{3x}(C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x)$, или $y = C_1 + e^{3x}(C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x)$.

Упражнение 15.3. Решим уравнение $y^{IV} - y = 0$.

Решение

Данное уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_{3,4} = \pm i$. Имеем два действительных различных корня и пару комплексных корней. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{1\cdot x} + C_2 e^{-1\cdot x} + e^{0\cdot x}(C_3 \sin x + C_4 \cos x), \text{ или } y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 \sin x + C_4 \cos x.$$

Упражнение 15.4. Решим уравнение $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

Решение

Данное уравнение является линейным однородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2 + 4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow \lambda = \pm 2i \text{ (кратности два) } \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2i,\ \lambda_{3,4} = -2i.$$

Имеем пару комплексных корней кратности два. Общее решение исходного уравнения имеет вид

$$y = (C_1 + C_2 x)\sin 2x + (C_3 + C_4 x)\cos 2x.$$

Упражнение 15.5. Решим уравнение $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}\sin x$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2.$$

Имеем два действительных и различных корня. Запишем общее решение однородного уравнения: $y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{2x}$. Правая часть исходного уравнения содержит экспоненту и $\sin x$, корни правой части $2 \pm i$ не совпадают с корнями характеристического уравнения, следовательно, частное решение ищем в виде $y_ч = e^{2x}(A\sin x + B\cos x)$. Для нахождения неопределенных коэффициентов A и B подставим $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение и сократим на e^{2x}:

$$y'_ч = 2e^{2x}(A\sin x + B\cos x) + e^{2x}(A\cos x - B\sin x) =$$
$$= e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x);$$

$$y''_ч = 2e^{2x}(2A\sin x + 2B\cos x + A\cos x - B\sin x) + e^{2x}(2A\cos x - 2B\sin x -$$
$$- A\sin x - B\cos x) = e^{2x}(3A\sin x + 3B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x);$$

$$3A\sin x + 3B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x - 6A\sin x - 6B\cos x -$$
$$-3A\cos x + 3B\sin x + 2A\sin x + 2B\cos x = \sin x.$$

Решаем полученное тождество методом неопределенных коэффициентов, т.е. приравниваем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$ левой и правой частей:

$$\begin{cases} 3A - 4B - 6A + 3B + 2A = 1, \\ 3B + 4A - 6B - 3A + 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -A - B = 1, \\ A - B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -0{,}5, \\ B = -0{,}5. \end{cases}$$

Подставим найденные A и B в $y_ч$ получим $y_ч = e^{2x}(-0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x)$. Запишем общее решение исходного дифференциального уравнения в виде $y = y_0 + y_ч$. Имеем ответ: $y = C_1 e^{x} + e^{2x}(C_2 - 0{,}5\sin x - 0{,}5\cos x)$.

Упражнение 15.6. Решим уравнение $y'' - 9y = xe^{3x}$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3.$$

Имеем два действительных и различных корня. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$. Правая часть исходного уравнения содержит многочлен первой степени и экспоненту, корень правой части $\alpha = 3$, он однократно совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Следовательно, частное решение будем искать в виде $y_ч = x(Ax + B)e^{3x}$. Наличие множителя x в $y_ч$ связано с совпадением корня правой части с корнем характеристического уравнения. Найдем A и B, подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение и сокращая на e^{3x}:

$$y_ч = (Ax^2 + Bx)e^{3x};$$

$$y'_ч = (2Ax + B)e^{3x} + (Ax^2 + Bx)\cdot 3e^{3x} = e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B);$$

$$y''_ч = 3e^{3x}(3Ax^2 + 2Ax + 3Bx + B) + e^{3x}(6Ax + 2A + 3B) =$$
$$= e^{3x}(9Ax^2 + 6Ax + 9Bx + 3B + 6Ax + 2A + 3B);$$

$$9Ax^2 + 12Ax + 9Bx + 2A + 6B - 9Ax^2 - 9Bx = x;$$

$$\begin{cases} 12A = 1, \\ A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{12}, \\ B = -\dfrac{1}{36} \end{cases} \Rightarrow y_ч = e^{3x}\left(\frac{x^2}{12} - \frac{x}{36}\right).$$

Получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = C_2 e^{-3x} + e^{3x}\left(C_1 + \frac{x^2}{12} - \frac{x}{36}\right).$$

Упражнение 15.7. Решим уравнение $y'' - 5y' = 2x^2 + 3$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5.$$

Имеем два действительных и различных корня. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1 + C_2 e^{5x}$. Правая часть — многочлен второй степени, поэтому корень правой части равен нулю, он однократно совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Частное решение ищем в виде

$$y_ч = x(Ax^2 + Bx + C), \text{ или } y_ч = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Найдем A, B, C, подставляя $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение и применяя метод неопределенных коэффициентов:

$$y'_ч = 3Ax^2 + 2Bx + C;\ y''_ч = 6Ax + 2B;$$

$$6Ax + 2B - 15Ax^2 - 10Bx - 5C = 2x^2 + 3;$$

$$\begin{cases} -15A = 2, \\ 6A - 10B = 0, \\ 2B - 5C = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{2}{15}, \\ B = -\dfrac{2}{25}, \\ C = -\dfrac{79}{125} \end{cases} \Rightarrow y_ч = -\frac{2x^3}{15} - \frac{2x^2}{25} - \frac{79x}{125}.$$

Получаем общее решение исходного дифференциального уравнения

$$y = C_1 + C_2e^{-5x} - \frac{2}{15}x^3 - \frac{2}{25}x^2 - \frac{79}{125}x.$$

Упражнение 15.8. Решим уравнение $y'' - 4y' + 4y = 8xe^{2x}$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2.$$

Имеем два действительных, совпадающих корня. Общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = e^{2x}(C_1 + C_2x)$. Правая часть уравнения содержит многочлен первой степени и экспоненту, корень правой части $\alpha = 2$, он дважды совпадает с корнями характеристического уравнения (кратности два). Следовательно, частное решение ищем в виде $y_ч = x^2(Ax + B)e^{2x}$, или $y_ч = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}$.

Найдем $y'_ч$ и $y''_ч$:

$$y'_ч = e^{2x}(3Ax^2 + 2Bx + 2Ax^3 + 2Bx^2);$$

$$y''_ч = e^{2x}(4Ax^3 + 4Bx^2 + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax^2 + 4Bx + 6Ax + 2B).$$

Подставим $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение, сокращая на e^{2x}. После приведения подобных получим $6Ax + 2B = 8x$.

Применяя метод неопределенных коэффициентов, имеем систему

$$\begin{cases} 6A = 8, \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{4}{3}, \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow y_ч = \frac{4}{3}x^3e^{2x}.$$

Общее решение исходного уравнения записываем в виде $y = y_0 + y_ч$. Имеем ответ:

$$y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{4}{3}x^3\right).$$

Упражнение 15.9. Решим уравнение $y'' + 4y = 2\cos 2x$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Имеем пару комплексных корней, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x$. Правая часть уравнения содержит $\cos 2x$, следовательно, корни правой части будут $\pm 2i$. Эта пара комплексных корней однократно совпадает с корнями характеристического уравнения. Следовательно, частное решение ищем в виде $y_ч = x(C_1\sin 2x + C_2\cos 2x)$. Найдем $y'_ч$ и $y''_ч$:

$$y'_ч = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + x(2C_1\cos 2x - 2C_2\sin 2x),$$

$$y''_ч = 2C_1\cos 2x - 2C_2\sin 2x + 2C_1\cos 2x - 2C_2\sin 2x + x(-4C_1\sin 2x - 4C_2\cos 2x).$$

Подставим $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное дифференциальное уравнение. После приведения подобных получим $4C_1\cos 2x - 4C_2\sin 2x = 2\cos 2x$. Применяя метод неопределенных коэффициентов, имеем систему

$$\begin{cases} 4C_1 = 2, \\ 4C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0{,}5, \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow y_ч = \frac{x}{2}\sin 2x.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения записываем в виде $y = y_0 + y_ч$. Имеем ответ:

$$y = \left(C_1 + \frac{x}{2}\right)\sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Упражнение 15.10. Решим уравнение $y'' - 2y' + 5y = x + 4e^{-x}$.

Решение

Данное уравнение является линейным неоднородным с постоянными коэффициентами. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i.$$

Имеем пару комплексных корней, следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y_0 = e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$. Правая часть состоит из двух слагаемых, следовательно, количество корней правой части два. Первое слагаемое — многочлен первой степени, значит, $\alpha_1 = 0$, второе слагаемое — экспонента, значит, $\alpha_2 = -1$. Корни правой части не совпадают с корнями характеристического уравнения. Следовательно, частное решение ищем в виде $y_ч = Ax + B + Ce^{-x}$. Подставим $y_ч$, $y'_ч$ и $y''_ч$ вместо y, y' и y'' в исходное уравнение:

$$y'_ч = A - Ce^{-x};\ y''_ч = Ce^{-x};$$

$$Ce^{-x} - 2A + 2Ce^{-x} + 5Ax + 5B + 5Ce^{-x} = x + 4e^{-x}.$$

Применяя метод неопределенных коэффициентов, имеем систему

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ -2A + 5B = 0, \\ C + 2C + 5C = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0{,}2, \\ B = 0{,}08, \\ C = 0{,}5 \end{cases} \Rightarrow y_ч = 0{,}2x + 0{,}08 + 0{,}5e^{-x}.$$

Общее решение исходного уравнения записываем в виде $y = y_0 + y_ч$. Имеем ответ:

$$y = e^x(C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x) + 0{,}2x + 0{,}08 + 0{,}5e^{-x}.$$

Задачи для самостоятельного решения

15.1. Решите дифференциальные уравнения:

1) $y' = \sqrt{1+x^4} + x(1+y) = 0$; 2) $(y^3+1)\ln x = y^2 xy'$; 3) $ydx + (x+4)dy = 0$;

4) $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$; 5) $(x^2 - xy)dx - x^2dy = 0$; 6) $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$;

7) $y' - \dfrac{y}{2x} = \dfrac{x}{2y}$; 8) $xdy - ydx = \sqrt{y^2 - 9x^2}dx$; 9) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$; 10) $y' - y = \dfrac{e^x}{x}$;

11) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$; 12) $x^2y' + xy + 1 = 0$; 13) $xy'' + y' = 0$; 14) $yy'' = (y')^2$;

15) $y''' + y'' - y' - y = 0$; 16) $y''' + y'' - 6y' = 0$; 17) $y''' + 8y = 0$;

18) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$; 19) $y^{IV} + 2y'' + y = 0$; 20) $y'' + 4y' + 13y = 13x^2$;

21) $y'' - 4y' + 5y = e^x \cos 2x$; 22) $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$; 23) $y'' + y = 4xe^x$;

24) $y'' + y' - 2y = 3xe^x$; 25) $y'' - 3y' + 2y = \sin x$; 26) $y'' + y = 3x - \sin 2x$;

27) $y'' - y = 2e^x - x^2$; 28) $x^2y^2y' + 1 = y$; 29) $xdy = (x+y)dx$; 30) $2yy'' = (y')^2 + 1$;

31) $y^V - 2y^{IV} - 16y' + 32y = 0$; 32) $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$; 33) $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$; 34) $2y'' + (y')^2 = 0$;

35) $y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}$; 36) $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

15.2. Найдите частное решение дифференциальных уравнений при указанных начальных условиях:

а) $(x^2-1)y'+2xy^2=0,\ y(0)=1;$

б) $y''=x,\ y(1)=0,\ y(2)=0;$

в) $y''-y'-2y=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=-5;$

г) $y''-2y'+y=x+1,\ y(0)=2,\ y'(0)=-3.$

Раздел IV
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА, СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Теория вероятностей — это раздел математики, занимающийся изучением закономерностей, которым подчиняются однородные случайные события, и вычислением степени возможности различных случайных результатов. Теория вероятностей является основой математической статистики. Математическая статистика используется для сбора, обработки, представления и оценки результатов наблюдений. Для описания случайных явлений, развивающихся во времени, методы классической теории вероятностей могут оказываться недостаточными. Такие задачи изучает особый раздел математики, который называется «Теория случайных процессов».

Изучение раздела IV способствует формированию следующих компетенций:

- умение обрабатывать и анализировать данные для подготовки аналитических решений, экспертных заключений и рекомендаций.

После освоения раздела IV студент должен:

знать

- основные понятия и инструменты теории вероятностей и математической статистики;
- основные математические модели принятия решений;

уметь

- решать типовые математические задачи, используемые при принятии управленческих решений;
- использовать математический язык и математическую символику при построении профессиональных моделей;
- обрабатывать эмпирические и экспериментальные данные;

владеть

- математическими, статистическими и количественными методами решения типовых организационно-управленческих, социальных и экономических задач.

Глава 16
СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

16.1. Определение случайных событий и операции над ними

Определение 16.1. *Случайным событием* называется событие, который может произойти или не произойти в данном опыте.

Событие, которое нельзя представить как объединение более простых событий, называется *элементарным* событием (элементарным исходом опыта). Все остальные случайные события называются *составными* или *сложными*. Случайные события обозначают большими латинскими буквами: A, B, C и т.д. *Пространство элементарных событий* — это множество всевозможных взаимоисключающих исходов опыта: $\Omega = \{w_1, w_2, ...\}$, где w_1, w_2, ... — элементарные исходы опыта.

Событие называется *достоверным*, если оно обязательно происходит в условиях данного опыта. Достоверное событие описывается всем пространством элементарных событий Ω.

Пример 16.1

Рассмотрим опыт — подбрасывание монеты. Подброшенная монета в обычных условиях обязательно упадет вниз (на землю, стол и т.п.), т.е. событие «монета упадет на землю» в обычных условиях является достоверным. Но при изменении условий опыта, например в невесомости, оно перестает быть достоверным.

Событие называется *невозможным*, если оно никогда не произойдет в условиях данного опыта. Такое событие описывается пустым множеством $\varnothing$.

Пример 16.2

Опыт — подбрасывание монеты. Подброшенная монета в обычных условиях никогда не зависнет в воздухе, т.е. событие «монета зависнет в воздухе» в обычных условиях является невозможным. Но при изменении условий опыта, например на орбитальной станции в невесомости, оно перестает быть невозможным.

Пример 16.3

Сначала подбрасывается монета. Если выпал герб (орел) Г, то подбрасывается игральная кость (кубик). Если цифра (решка) Р, то снова бросается монета. Запишем пространство элементарных событий, а также события A — «выпало четное число очков» и B — «выпала хотя бы одна решка».

Решение

$\Omega = \{Г1, Г2, Г3, Г4, Г5, Г6, РР, РГ\}$, $A = \{Г2, Г4, Г6\}$, $B = \{РР, РГ\}$.

Случайные события A и B называются *несовместными*, если они не могут происходить одновременно в одном опыте, т.е. появление события A исключает появление события B в этом же испытании.

Пример 16.4

Подброшенная монета в обычных условиях упадет кверху или гербом (орлом), или цифрой (решкой). Значит, события «появление орла» и «появление решки» — это несовместные события.

Пример 16.5

Если подбросить две монеты, то одна из них может выпасть орлом, а вторая — решкой. В этом случае «появление герба» и «появление решки» будут событиями совместными.

Рассмотрим основные операции над случайными событиями.

Суммой событий $A + B$ называется событие, которое происходит каждый раз, когда происходит или A, или B, или A и B вместе.

Произведением событий AB называется событие, которое происходит только тогда, когда оба события и A, и B происходят одновременно.

Пример 16.6

Пусть имеется колода из 36 карт. Наугад вынимают одну карту. Событие A — появление карты червовой масти, B — появление дамы. Тогда $A \cdot B$ — появление червовой дамы, $A + B$ — появление любой карты червовой масти или любой из дам.

Событие $\overline{A}$ называется *противоположным* событию A, если оно состоит в том, что A не происходит.

Пример 16.7

Стрелок произвел три выстрела по мишени. Обозначим A_i = «попадание при i-м выстреле», тогда $\overline{A_i}$ = «промах при i-м выстреле», $i = 1, 2, 3$. Выразим сложное событие A = «при первом и третьем выстрелах промахи, а при втором — попадание в мишень» через элементарные.

Решение

Имеем сложное событие $A = \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$.

Рассмотрим *свойства* операций сложения и умножения случайных событий.

Пусть A, B, C — произвольные случайные события. Тогда:

1) $A + B = B + A$;
2) $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$;
3) $A \cdot B = B \cdot A$;
4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B \cdot C$;
5) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Несколько событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно несовместными*, если появление любого из них исключает появление любого из остальных: $A_iA_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Случайные события образуют *полную группу* событий, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из них.

Пример 16.8

Опыт — бросание монеты. События A — «появление герба» и B — «появление решки» образуют полную группу.

Пример 16.9

Опыт — стрелок производит два выстрела по мишени. События: A — «ни одного попадания в мишень», B — «одно попадание», C — «два попадания» образуют полную группу.

Замечание 16.1. Операции умножения, сложения, перехода к противоположному событию равнозначны операциям конъюнкции, дизъюнкции и инверсии для высказываний. Поэтому все законы алгебры высказываний будут верными и для случайных событий. И для наглядного представления различных соотношений между событиями можно использовать диаграммы Эйлера — Венна.

16.2. Различные определения вероятности

Аксиоматическое определение вероятности. Рассмотрим *аксиомы вероятности*.

1. Каждому случайному событию A ставится в соответствие число $P(A)$, принимающее значение из отрезка $[0; 1]$, которое называется *вероятностью* события A.

2. Если A и B — несовместные случайные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

3. Если Ω — достоверное событие, то $P(\Omega) = 1$.

Из этих аксиом можно вывести следующие *следствия*.

1. Если $\varnothing$ — невозможное событие, то $P(\varnothing) = 0$.

Доказательство. Ω — достоверное и $\varnothing$ — невозможное события являются несовместными: $\Omega \cdot \varnothing = \varnothing$.

Тогда по второй аксиоме вероятностей $P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$.

Поскольку сумма достоверного и невозможного событий есть событие достоверное ($\Omega + \varnothing = \Omega$), то $P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega)$. Ω— достоверное событие, следовательно, по третьей аксиоме вероятностей $P(\Omega) = 1$.

Имеем $P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$, $P(\Omega + \varnothing) = P(\Omega) = 1$, поэтому $P(\varnothing) = 0$.

2. Если $\overline{A}$ — противоположное событие для события A, то $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ — вероятность противоположного события.

Доказательство. $A + \overline{A} = \Omega$, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$. Поэтому $P(A + \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Тогда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3. Если A_1, A_2, ..., A_n — попарно несовместные события, то

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Доказательство. Доказательство проводится методом математической индукции.

4. Для любых двух случайных событий A и B

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Доказательство. Используя диаграммы Эйлера — Венна (см. замечание 16.1), можно убедиться в справедливости равенств $A+B=A+B\cdot\overline{A}$, $B=BA+B\overline{A}$. События в правых частях этих равенств являются несовместными, поэтому $P(A+B)=P(A)+P(B\overline{A})$, $P(B)=P(AB)+P(B\overline{A})$. Тогда $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$. Отсюда $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Исходя из аксиом вероятности и этих следствий строится строгая математическая теория.

Замечание 16.2. Аргументом вероятности является случайное событие.

Классическое определение вероятности. Пусть пространство элементарных событий $\Omega=\{w_1, w_2, ..., w_n\}$ конечно и в силу симметрии или однородности условий опыта нет оснований считать, что одни элементарные события более возможны, чем другие. Пусть n — общее число равновозможных элементарных событий из Ω, m — число тех элементарных событий из Ω, появление которых приводит к осуществлению события A («благоприятных» для $A=\{w_{i_1}, w_{i_2}, ..., w_{i_m}\}$, где $\{i_1, i_2, ..., i_m\}\subseteq\{1, 2, ..., n\}$). Тогда *вероятностью события* A называется число $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

Вероятность события A равна отношению числа исходов, благоприятных событию A, к общему числу всех равновозможных и несовместных исходов.

Но иногда число элементарных событий нельзя пересчитать. Или результат опыта нельзя представить в виде множества элементарных событий. Или сложно указать причины равновозможности элементарных событий. Тогда классическое определение вероятности неприменимо.

Пример 16.10

Бросают две игральные кости. Найдем вероятность того, что сумма выпавших очков будет четной и делится на 3.

Решение

$\Omega=\{(1,1),(1,2),...,(6,6)\}$. Всего 36 исходов. Событие A состоит из следующих благоприятных исходов: $A=\{(1,5),(5,1),(2,4),(3,3),(4,2),(6,6)\}$. Их число 6. Поэтому $P(A)=\dfrac{6}{36}\approx 0{,}17$.

Пример 16.11

У ребенка есть семь кубиков с буквами А, А, К, М, М, О, Ч. Ребенок хаотично переставляет кубики в ряду. Какова вероятность, что он сложит слово «МАМОЧКА»?

Решение

Число перестановок из семи кубиков $n = 7!$. Кубики с одинаковыми буквами (две А и две М) будем считать различными. Кубики с буквами А можно разместить $2! = 2$ способами, с буквами М — также $2! = 2$ способами. Кубики с буквами К, О и Ч должны стоять на определенных местах. Тогда получим, что число благоприятных исходов для события A равно $m = 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 4$. Значит, $P(A) = \frac{4}{7!} = \frac{1}{210} \approx 0{,}0048.$ Вероятность очень маленькая.

Пример 16.12

В урне есть 10 шаров с номерами 1, ..., 10. Из урны 6 раз вынимают по одному шару, номер шара записывают и шар кладут обратно в урну. Найдем вероятность того, что все записанные номера будут различные.

Решение

Общее число исходов 10^6. Число благоприятных исходов равно числу размещений из 10 элементов по 6, т.е. A_{10}^6. Поэтому искомая вероятность будет равна

$$P = \frac{A_{10}^6}{10^6} = \frac{10!}{10^6(10-6)!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10} = 0{,}1512.$$

Пример 16.13 (задача о выборке)

Пусть дано n деталей. Из них m бракованных. Наудачу выбирается r деталей. Какова вероятность, что среди них ровно k бракованных?

Решение

Из n деталей r штук можно отобрать C_n^r способами, значит, общее число исходов C_n^r. Найдем число благоприятных исходов. Из m бракованных деталей k штук можно выбрать C_m^k способами. Из оставшихся $n - m$ годных деталей $r - k$ штук можно отобрать C_{n-m}^{r-k} способами. Тогда число благоприятных исходов равно $C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}$. Получим, что искомая вероятность равна следующему отношению: $P(A) = \frac{C_m^k \cdot C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}$.

Пример 16.14

Из колоды в 36 карт вынимают 7 карт. Найдем вероятность того, что среди них одна дама.

Решение

Имеем $n = 36$, $m = 4$ (количество дам в колоде), $r = 7$, $k = 1$. Тогда

$$C_n^r = C_{36}^7 = \frac{36!}{7!\cdot 29!} = 8\,347\,680,\ C_m^k C_{n-m}^{r-k} = C_4^1 C_{32}^6 = \frac{4!}{1!\cdot 3!}\cdot\frac{32!}{6!\cdot 26!} = 4\cdot 906\,192 = 3\,624\,768.$$

Искомая вероятность равна $P = \frac{3\,624\,768}{8\,347\,680} = 0{,}414.$

Пример 16.15

Из колоды в 36 карт вынимают 7 карт. Найдем вероятность того, что среди них хотя бы одна дама.

Решение

Событие A — хотя бы одна дама в выборке. Тогда противоположное событие $\overline{A}$ — нет дам в выборке, и $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Найдем $P(\bar{A})$: $n = 36$, $m = 4$ (количество дам в колоде), $r = 7$, $k = 0$. Тогда

$$C_n^r = C_{36}^7 = \frac{36!}{7!\cdot 29!} = 8\,347\,680,\; C_m^k C_{n-m}^{r-k} = C_4^0 C_{32}^7 = \frac{4!}{0!\cdot 4!}\cdot\frac{32!}{7!\cdot 25!} = 3\,365\,856;$$

$$P(\bar{A}) = \frac{3\,365\,856}{8\,347\,680} = 0,4.$$

Искомая вероятность равна $P(A) = 1 - 0,4 = 0,6$.

Статистическое определение вероятности. Пусть n — это достаточно большое число одинаковых опытов. Известно, что событие A произошло в n_A случаях. Тогда частота (отностительная частота) случайного события A будет равна $\mu = \frac{n_A}{n}$. В качестве вероятности $P(A)$ можно принять предел частоты события A при неограниченном увеличении числа опытов: $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n_A}{n}$. Это статистическое определение вероятности.

На практике в качестве вероятности $P(A)$ принимают значение частоты события A при достаточно большой величине n, т.е. $P(A) \approx \frac{n_A}{n}$.

Пример 16.16

Известно, что вероятности рождения мальчика и девочки не равны, а составляют 0,51 и 0,49 соответственно. Эти числа являются обобщением большого количества опытных данных.

Геометрическое определение вероятности. Пусть опыт имеет бесконечное число исходов. Исход опыта понимается как выбор наудачу точки из некоторого множества в R^n. Считаем, что множество имеет некоторую геометрическую форму. Пусть событие A состоит в случайном попадании «брошенной» наугад точки в область $A \subset \Omega$. Вероятностью события A называется отношение меры этого множества к мере всего пространства элементарных событий: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$. Под мерой $\mu(A)$ множества A понимаются его длина, площадь или объем соответственно:

- на отрезке AB (размерность пространства равна 1) известной длины выбирается некоторый отрезок CD. На исходный отрезок AB наудачу бросаем точку. Событие A — попадание точки на выбранный отрезок CD. Считаем, что вероятность попадания точки на отрезок не зависит от расположения отрезка CD на отрезке AB, а зависит только от длины CD. Тогда $P(A) = \frac{|CD|}{|AB|}$;
- на плоскости (размерность пространства равна 2) выбираем некоторую фигуру G известной площади $S(G)$. В G выделяем некоторую фигуру g. На исходную фигуру G наудачу бросаем точку. Событие A — попадание точки в выделенную часть g. Считаем, что вероятность попадания точки

в выделенную часть фигуры не зависит от расположения g в G, а зависит только от площади g. Тогда $P(A) = \dfrac{S(g)}{S(G)}$;

- в пространстве (размерность пространства равна 3) выбираем некоторую область G известного объема $V(G)$. В G выделяем некоторую область g. В исходную фигуру G наудачу бросаем точку. Событие A — попадание точки в выделенную часть g. Считаем, что вероятность попадания точки в выделенную часть фигуры не зависит от расположения g в G, а зависит только от объема g. Тогда $P(A) = \dfrac{V(g)}{V(G)}$.

Но некоторые подмножества не имеют меры: вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области равна нулю, но в точку попасть можно, следовательно, это событие не является невозможным.

Пример 16.17 (задача о встрече)

Два студента договорились встретиться в промежуток времени между 12 и 13 часами. Пришедший первым студент ждет второго в течение 20 мин, а затем уходит. Какова вероятность того, что студенты встретятся?

Решение

Пусть x — время прихода первого студента, $12 \le x \le 13$, y — время прихода второго студента, $12 \le y \le 13$. Тогда квадрат, состоящий из точек (x, y) $12 \le x \le 13$, $12 \le y \le 13$, — это множество всех исходов Ω (рис. 16.1).

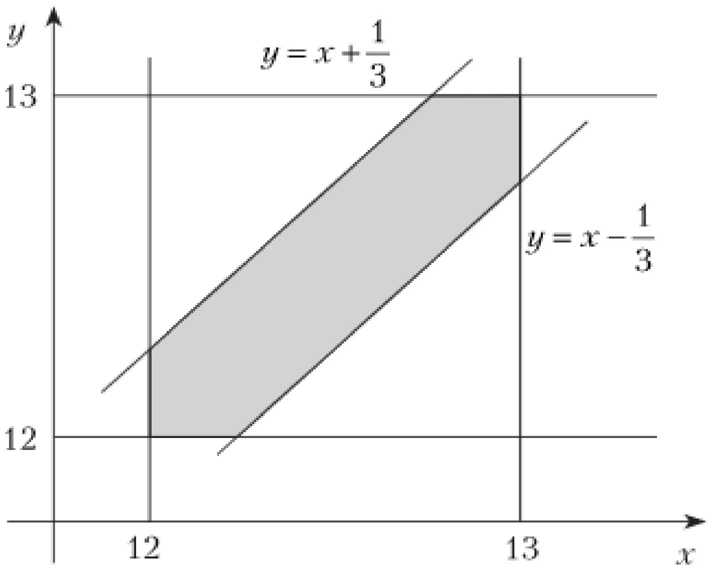


Рис. 16.1

Благоприятные исходы образуют точки, для которых $|x - y| < \frac{1}{3}$ ($\frac{1}{3}$ ч = 20 мин), т.е. точки между прямыми $y = x - \frac{1}{3}$, $y = x + \frac{1}{3}$. Площадь этой фигуры равна $S' = (13 - 12)^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$. Площадь квадрата равна $S = (13 - 12)^2 = 1$. Искомая вероятность $P = \dfrac{S'}{S} = \dfrac{5}{9}$.

16.3. Условная вероятность. Теоремы умножения и сложения

Условная вероятность. Пусть A и B — два события, рассматриваемые в данном опыте, причем $P(B) \neq 0$. Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Определение 16.2. *Условной вероятностью* события A при условии, что событие B произошло, называется величина $P_B(A) = P(A|B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$.

Аналогично определяется $P_A(B)$.

Определение 16.3. Случайные события A и B называются *независимыми*, если условная вероятность события A при условии B совпадает с безусловной вероятностью события A, т.е. $P_B(A) = P(A)$.

Свойство независимости событий взаимно: если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, т.е. если выполняется равенство $P_B(A) = P(A)$, то тогда и $P_A(B) = P(B)$.

События A и B будут независимыми, если вероятность появления одного из них не меняется в зависимости от того, произошло или нет второе.

Несколько событий $A_1, ..., A_n$ называются *независимыми попарно*, если любые два из них независимы.

Несколько событий $A_1, ..., A_n$ называются *независимыми в совокупности* (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует, что они независимы в совокупности.

Если события $A_1, ..., A_n$ независимы в совокупности, то и противоположные им события $\overline{A}_1, ..., \overline{A}_n$ также независимы в совокупности.

Пример 16.18

Пусть в урне 17 красных и 3 черных шара. При первом опыте один шар наугад вынимается и не возвращается в урну. Тогда при втором вынимании шара из урны вероятность появления красного шара будет зависеть от того, какого цвета шар был вынут в первом опыте. Если в первом опыте был вынут красный шар, то вероятность появления красного шара во втором опыте будет равна $\dfrac{16}{19}$, а если в первом опыте был вынут белый шар, то вероятность появления красного шара во втором опыте будет равна $\dfrac{17}{19}$.

Пример 16.19

Игральная кость брошена дважды. Рассматриваются события: A = «число очков при первом бросании равно 5»; B = «сумма очков при двух бросаниях равна 9». Определим, зависимы или нет события A и B.

Решение

$P(A) = \dfrac{1}{6}$. Событие B составляют следующие элементарные события: (3; 6), (6; 3), (4; 5), (5; 4), поэтому $P(B) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. Событие AB = «при первом бросании выпало 5 очков, при втором — 4 очка», $P(AB) = \dfrac{1}{36}$.

Так как $P(A)P(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{54}\neq\frac{1}{36}$, то условие независимости не выполняется, следовательно, события A и B зависимы.

Теоремы умножения и сложения вероятностей. Рассмотрим отдельно теоремы для двух и n событий.

Теорема умножения вероятностей для двух событий. *Для произвольных случайных событий A и B имеют место следующие формулы вычисления вероятности их произведения*: $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)$ *или* $P(AB)=P(B)\cdot P_B(A)$.

Следствие. Если A и B — независимые события, то $P(AB)=P(A)P(B)$.

Теорема умножения вероятностей для *n* событий. *Вероятность произведения n случайных событий* $A_1\cdot\ldots\cdot A_n$ *равна произведению вероятностей этих событий, причем вероятность каждого следующего по порядку события вычисляется при условии, что все предыдущие события состоялись*:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2\,|\,A_1)\cdot P(A_3\,|\,A_1\cdot A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n\,|\,A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{n-1}).$$

При этом порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым.

Пример 16.20

В подсобке есть 6 новых веников. Для уборки берут наудачу два из них, затем веники кладут обратно. Какова вероятность, что после трех уборок в подсобке все веники будут не новые?

Решение

Событие A произойдет единственным образом: для первой, второй и третьей уборки из подсобки возьмут новые веники. Пусть A_i, i = 1, ..., 6, — события, состоящие в том, что i-й взятый веник оказался новым. Для событий A_1 и A_2 это обеспечено. Поэтому $P(A_1)=1$, $P(A_2|\,A_1)=1$. Для остальных событий $P(A_3\,|\,A_1A_2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $P(A_4\,|\,A_1A_2A_3)=\frac{3}{5}$, $P(A_5\,|\,A_1A_2A_3A_4)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A_6\,|\,A_1A_2A_3A_4A_5)=\frac{1}{5}$. Тогда получим: $P(A)=1\cdot1\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{2}{75}$.

Теорема сложения вероятностей для двух событий. *Для произвольных случайных событий A и B имеет место следующая формула вычисления вероятности их суммы*: $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

Следствие. Если A и B — несовместные события (т.е. $P(AB)=0$), то формула примет вид $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

Теорема сложения вероятностей для *n* событий. *Вероятность суммы n случайных событий* $A_1+\ldots+A_n$ *равна сумме вероятностей этих событий минус сумма вероятностей того, что события появляются по два, плюс сумма вероятностей того, что события появляются по три, и т.д.; последний член — это с соответствующим знаком вероятность того, что все события произошли одновременно*:

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}A_1\right)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)-\sum_{k,i=1}^{n}P(A_kA_i)+\sum_{k,i,j=1}^{n}P(A_kA_iA_j)+\ldots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\ldots A_n).$$

Следствие 1. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице: если A_1, ..., A_n — полная группа событий, то $P\left(\sum\limits_{k=1}^{n} A_k\right) = 1.$

Следствие 2. Два несовместных события A и B, для которых $P(A) \neq 0$, $P(B) \neq 0$, всегда зависимы, так как $P(AB) = 0$.

Пример 16.21

В лотерее 1000 билетов. На один из них падает выигрыш 500 руб., на 10 билетов — выигрыш по 100 руб., на 50 билетов — по 20 руб., на 100 билетов — по 5 руб. Остальные билеты — без выигрыша. Найдем вероятность выигрыша не менее 20 руб.

Решение

Обозначим события: A — выиграть не менее 20 руб., A_1 — выиграть 20 руб., A_2 — выиграть 100 руб., A_3 — выиграть 500 руб.

Тогда $A = A_1 + A_2 + A_3$. События A_1, A_2, A_3 — несовместные, поэтому

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{50}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}061.$$

Пример 16.22

Для того чтобы сбить самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна 0,7, второго двигателя — 0,6, кабины пилота — 0,8. Части самолета поражаются независимо друг от друга. Найдем вероятность того, что самолет будет сбит.

Решение

Событие A — поражение самолета — есть сумма двух совместных событий: Д — поражение обоих двигателей; К — поражение кабины. Тогда

$$P(A) = P(\text{Д} + \text{К}) = P(\text{Д}) + P(\text{К}) - P(\text{ДК}) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}884.$$

16.4. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли

Формула полной вероятности. Пусть требуется найти вероятность некоторого события A, которое может произойти одновременно с одним из событий H_1, ..., H_n. События H_1, ..., H_n называются *гипотезами*. Они должны образовывать полную группу событий, т.е. должны выполняться следующие условия:

1) события H_1, ..., H_n несовместны;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1.$

Пусть из условия задачи известны вероятности гипотез $P(H_1)$, ..., $P(H_n)$ и условные вероятности события A при каждой гипотезе $P(A \mid H_1), ...,$ $P(A \mid H_n)$. Тогда вероятность события A можно найти по следующей *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)P(A \mid H_1) + \ldots + P(H_n)P(A \mid H_n).$$

Пример 16.23

Студент из 30 билетов выучил всего 5. Что вероятнее: вытащить «хороший» билет, если он взял билет первым или если он взял билет вторым?

Решение

Пусть событие A_1 — студент вытащил «хороший» билет, когда выбирал первым. Тогда $P(A_1)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$.

Пусть событие A_2 — студент вытащил «хороший» билет, когда выбирал вторым. A_2 может происходить при событиях H_1 и H_2: H_1 — первый студент взял «хороший» билет; H_2 — первый студент взял «плохой» билет. Имеем $P(H_1)=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$, $P(H_2)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. Вычислим условные вероятности события A_2 при каждой гипотезе:

$$P(A_2 \mid H_1)=\frac{4}{29};\ P(A_2 \mid H_2)=\frac{5}{29}.$$

Тогда

$$P(A_2)=P(H_1)P(A_2 \mid H_1)+P(H_2)P(A_2 \mid H_2)=\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{29}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{29}=\frac{1}{6}.$$

Получили $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{6}$, т.е. вероятность сдать экзамен зависит только от числа выученных билетов.

Формула Байеса. Пусть до опыта имеются гипотезы H_1, ..., H_n. После опыта известна неполная информация о его результатах. Известно только, что произошло событие A. Считая, что были известны вероятности гипотез до опыта (априорные вероятности) $P(H_1)$, ..., $P(H_n)$ и условные вероятности $P(A \mid H_1),\dots,P(A \mid H_n)$, можно найти вероятности гипотез после опыта (апостериорные вероятности) $P(H_1 \mid A),\dots,P(H_n \mid A)$. Это делается по *формуле Байеса*

$$P(H_k \mid A)=\frac{P(H_k)P(A \mid H_k)}{P(A)},$$

где вероятность события A надо найти по формуле полной вероятности.

Формула Байеса позволяет переоценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат опыта, в результате которого произошло событие A.

Пример 16.24

Три завода выпускают одинаковую продукцию. Первый завод производит 50%, второй — 20% и третий — 30% всей продукции. Первый завод выпускает 1% брака, второй — 8%, третий — 3%. Наудачу выбранное изделие оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на втором заводе?

Решение

Выберем такие гипотезы: H_1 — изделие изготовлено на первом заводе, H_2 — изделие изготовлено на втором заводе, H_3 — изделие изготовлено на третьем заводе. По условиям задачи $P(H_1)=0{,}5$, $P(H_2)=0{,}2$, $P(H_3)=0{,}3$ и $P(A \mid H_1)=0{,}01$, $P(A \mid H_2)=0{,}08$,

$P(A|H_3)=0{,}03$. Условную вероятность того, что бракованное изделие изготовлено на втором заводе, можно вычислить по формуле Байеса:

$$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)}=$$
$$=\frac{0{,}2\cdot 0{,}08}{0{,}5\cdot 0{,}01+0{,}2\cdot 0{,}08+0{,}3\cdot 0{,}03}=\frac{8}{15}.$$

Получили, что продукция второго завода составляет 0,2, но его доля в браке больше половины.

Схема Бернулли. *Биномиальной схемой испытаний*, или *схемой испытаний Бернулли* (*последовательной схемой испытаний*), называется последовательность испытаний, удовлетворяющая следующим условиям:

1) при каждом испытании возможны только два исхода: появление некоторого события A, которое называют «успех», либо появление противоположного события $\overline{A}$ — «неудачи»;

2) испытания являются независимыми;

3) вероятность «успеха» в любом испытании постоянна и равна $P(A)=p$, а «неудачи» $P(\overline{A})=1-p=q$.

Числа n и p называются *параметрами* схемы Бернулли. Тогда вероятность того, что при n опытах событие A произошло ровно m раз, может быть найдена по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m},\ m=0,1,...,n.$$

Не требуется, чтобы событие A осуществилось ровно m раз в определенной последовательности. Надо только, чтобы в n опытах было m успехов.

Наивероятнейшее число k_0 наступления события A в биномиальной схеме испытаний с параметрами n, p можно найти из условия $np-q\le k_0\le np+p$.

Пример 16.25

Вероятность сбоя в работе телефонной станции при каждом вызове равна 0,2. Поступило 6 вызовов. Найдем вероятность того, произошло ровно 2 сбоя. Найдем наивероятнейшее число сбоев в работе телефонной станции.

Решение

События A — сбой в работе телефонной станции, $P(A)=0{,}2=p$. Тогда $q=1-p=0{,}8$, $n=6$, $m=2$. По формуле Бернулли вероятность, что в 6 вызовах было 2 сбоя, равна

$$P_6(2)=C_6^2(0{,}2)^2(0{,}8)^{6-2}=15\cdot 0{,}04\cdot 0{,}4096=0{,}24576\approx 0{,}25.$$

Наивероятнейшее число сбоев найдем из неравенства

$$6\cdot 0{,}2-0{,}8\le k_0\le 6\cdot 0{,}2+0{,}2,\ \text{т.е.}\ 0{,}4\le k_0\le 1{,}4.$$

Следовательно, $k_0=1$.

Пример 16.26

Что вероятнее, выиграть в шахматы у равносильного противника 3 партии из 4 или 5 партий из 8 (ничьи в расчет не принимаются)?

Решение

Поскольку вероятность свести партию вничью равна нулю и противник равносильный, то вероятность выиграть одну партию (вероятность успеха в одном испытании) равна $\frac{1}{2}$. Вероятность проигрыша в одной партии (вероятность неудачи) также равна $\frac{1}{2}$. Тогда по формуле Бернулли

$$P(3 \text{ из } 4 \text{ партий}) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4},\ P(5 \text{ из } 8 \text{ партий}) = C_8^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{7}{32}.$$

Таким образом, более вероятно выиграть 3 партии из 4, чем 5 из 8.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие бывают случайные события?
2. Как определяется классическая вероятность?
3. Что такое статистическая и геометрическая вероятности?
4. Приведите свойства вероятности.
5. В чем заключается теорема сложения вероятностей?
6. В чем заключается теорема умножения вероятностей?
7. Когда можно использовать формулу полной вероятности? Формулу Байеса?
8. В чем заключается схема Бернулли? Напишите формулу Бернулли.

Практикум по решению задач

Упражнение 16.1. Стрелок один раз стреляет по мишени. Образуют ли события «попадание в мишень» и «промах по мишени» полную группу?

Решение

Эти два несовместных события образуют полную группу.

Упражнение 16.2. Купили два лотерейных билета. Образуют ли события: «выиграл только первый билет», «выиграл только второй билет», «выиграли оба билета», «оба билета не выиграли» полную группу? Являются ли эти события несовместными?

Решение

Да, образуют полную группу, поскольку обязательно произойдет одно из них. Да, являются несовместными, поскольку появление одного из них исключает появление других событий.

Упражнение 16.3. Монету подбросили один раз. Являются ли события «появление орла» и «появление решки» равновозможными?

Решение

Да. Монета изготовлена из однородного материала, является симметричной, и наличие чеканки не оказывает влияния на выпадение той или иной стороны монеты (если это не так, то эти условия оговариваются в условии задачи).

Упражнение 16.4. Бросили игральную кость. Рассматриваются события: «выпадение одного очка», «выпадение двух очков», ..., «выпадение шести очков». Являются ли события элементарными событиями?

Решение

Игральная кость имеет кубическую форму, изготовлена из однородного материала, и наличие очков не оказывает влияния на выпадение любой грани (если это не так, то эти условия оговариваются в условии задачи). Поэтому рассматриваемые события несовместны, равновозможны и образуют полную группу событий. Следовательно, они являются элементарными событиями.

Упражнение 16.5. Фирма производит доставку пиццы трем постоянным клиентам A, B и C. Вероятность получения заказа для A равна 0,7, для B — 0,2. Найти вероятность того, что очередной заказ будет получен для C.

Решение

События «заказ получен для A», «заказ получен для B», «заказ получен для C» образуют полную группу, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице: $0{,}7 + 0{,}2 + p = 1$. Тогда $p = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Упражнение 16.6. Набирая номер телефона, человек забыл одну цифру и набрал ее наугад. Найдем вероятность того, что была набрана нужная цифра.

Решение

Пусть событие A — набрана нужная цифра. Человек мог набрать любую из 10 цифр. Поэтому общее число элементарных событий равно 10. Благоприятным для события A является только одно событие (нужная цифра только одна). Поэтому $P(A) = \frac{1}{10}$.

Упражнение 16.7. Набирая номер телефона, человек забыл последние две цифры. Он набрал их наугад, помня только, что это разные цифры. Найдем вероятность того, что он набрал нужные цифры.

Решение

Пусть событие A — набраны две нужные цифры. Всего можно набрать столько различных цифр, сколько существует размещений из 10 цифр по 2, т.е. $A_{10}^2 = 9 \cdot 10 = 90$. Это общее число элементарных исходов. Благоприятным для события A является только один исход. Следовательно, $P(A) = \frac{1}{90}$.

Упражнение 16.8. Дана задача: «Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3». Предложено «решение»: «Возможны только два исхода опыта: сумма выпавших очков равна 3 (событие A) или сумма выпавших очков не равна 3. Следовательно, общее число исходов равно двум. Благоприятным является только один исход. Поэтому искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{2}$». Найдите ошибку в «решении» задачи.

Решение

Ошибка состоит в том, что рассматриваемые исходы: «сумма выпавших очков равна 3» и «сумма выпавших очков не равна 3», не являются равновозможными.

Правильное решение. Общее число исходов опыта равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятными для события A являются только два исхода: (1, 2), (2, 1). Здесь в скобках на первом месте указано число очков, выпавших на первой кости, на втором месте — число очков, выпавших на второй кости. Поэтому $P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

Упражнение 16.9. Брошены две игральные кости. Найдем вероятность того, что сумма выпавших очков четная, если известно, что хотя бы на одной кости выпало 5 очков.

Решение

Общее число исходов опыта равно $6 \cdot 6 = 36$. Благоприятными для события A являются следующие пять исходов: (5, 1), (5, 3), (5, 5), (1, 5), (3, 5). Тогда $P(A) = \frac{5}{36}$.

Упражнение 16.10. Бросают три игральные кости. Найдем вероятность того, что шестерка выпадет только на одной кости, если на двух других костях выпадут не равные шести и не равные между собой числа.

Решение

Общее число элементарных исходов опыта равно $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Благоприятные исходы можно подсчитать так. Пусть для определенности число 6 выпало на первой кости, тогда благоприятные исходы для такого события

$$\left\{\begin{matrix}(6,1,2),(6,1,3),(6,1,4),(6,1,5),(6,2,1),(6,2,3),(6,2,4),(6,2,5),(6,3,1),(6,3,2),\\(6,3,4),(6,3,5),(6,4,1),(6,4,2),(6,4,3),(6,4,5),(6,5,1),(6,5,2),(6,5,3),(6,5,4)\end{matrix}\right\}.$$

Их 20. Первая кость ничем не лучше любой другой. Поэтому число благоприятных исходов того, что шестерка выпадет только на одной кости, если на двух других костях выпадут не равные шести и не равные между собой числа, будет равно $m = 3 \cdot 20 = 60$. Искомая вероятность равна $P = \frac{60}{216} = \frac{5}{18}$.

Упражнение 16.11. В коллекции находились 21 серебряная и 10 золотых монет. При перевозке коллекции одна монета была потеряна, причем неизвестно, какая. После перевозки наудачу извлеченная из коллекции монета оказалась серебряной. Найдем вероятность того, что была потеряна:

а) серебряная монета;

б) золотая монета.

Решение

Извлеченная после перевозки серебряная монета не могла быть потеряна. Могла быть потеряна любая из остальных 30 монет.

а) Среди них было 20 серебряных ($21 - 1 = 20$). Вероятность того, что была потеряна серебряная монета, равна $P = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$.

б) Среди них было 10 золотых. Вероятность того, что потеряна золотая монета, равна $P = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Упражнение 16.12. В урне находятся одинаковые шары с номерами 1, 2, ..., 10. Наудачу извлечены шесть шаров. Найдем вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся: а) шар № 2; б) шары № 2 и № 3.

Решение

а) Пусть событие A — среди извлеченных шаров есть шар № 2. Общее число элементарных исходов опыта равно $C_{10}^6 = 210$. Вычислим число исходов, благоприятных для события A. В выборке из шести шаров только один шар № 2 и остальные пять шаров имеют другие номера. Число таких исходов равно числу способов, которыми можно выбрать пять шаров из оставшихся девяти. Это число $C_9^5 = 126$. Поэтому искомая вероятность будет равна $P = \frac{C_9^5}{C_{10}^6} = 0{,}6$.

б) Пусть событие B — среди выбранных шаров есть шары № 2 и № 3. Общее число элементарных исходов опыта не изменилось: $C_{10}^6 = 210$. Вычислим число исходов, благоприятных для события B. Два шара в выборке из шести шаров имеют определенные номера № 2 и № 3, остальные четыре шара в выборке имеют другие номера. Поэтому число благоприятных исходов равно числу способов, которыми можно вынуть четыре шара из оставшихся восьми, т.е. C_8^4. Тогда $P = \frac{C_8^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{3}$.

Упражнение 16.13. На плоскости начерчены две концентрические окружности с радиусами 5 и 10 см соответственно. В большой круг наудачу бросают точку. Найдем вероятность того, что эта точка попадет в кольцо между окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения относительно большого круга.

Решение

Это задача на геометрическую вероятность. Площадь большого круга (фигуры G) $S_G = \pi 10^2 = 100\pi$. Площадь кольца (фигуры g) $S_g = \pi(10^2 - 5^2) = 75\pi$. Поэтому вероятность попасть в кольцо $P = \frac{75\pi}{100\pi} = 0{,}75$.

Упражнение 16.14. Стрелок производит один выстрел по мишени, разделенной на три сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,45, во второй — 0,35. Найдем вероятность того, что стрелок попадет или в первый, или во второй сектор мишени.

Решение

События A — «стрелок попал в первый сектор» и B — «стрелок попал во второй сектор» несовместные, поскольку попадание в один сектор мишени исключает попадание в другой. Поэтому по теореме сложения вероятностей искомая вероятность будет равна $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}45+0{,}35=0{,}8$.

Упражнение 16.15. На полке в случайном порядке расставлено 15 книг. Из них пять — по теории вероятностей. Наудачу берут три книги. Какова вероятность, что хотя бы одна из них будет по теории вероятностей?

Решение

Пусть событие A — «хотя бы одна книга по теории вероятностей». Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ — «ни одна из взятых книг не является книгой по теории вероятностей». Тогда $P(A)=1-P(\overline{A})$. Вероятность события $\overline{A}$ $P(\overline{A})=\dfrac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\dfrac{24}{91}$. Поэтому $P(A)=1-P(\overline{A})=1-\dfrac{24}{91}=\dfrac{67}{91}$.

Упражнение 16.16. В ящике имеется 10 деталей, из которых 6 стандартных. Найдем вероятность того, что среди трех наудачу извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная.

Решение

Пусть событие A — «среди извлеченных деталей есть хотя бы одна стандартная». Рассмотрим противоположное событие $\overline{A}$ — «среди извлеченных деталей нет ни одной стандартной», т.е. $\overline{A}$ — «в выборке все детали нестандартные». Тогда $P(A)=1-P(\overline{A})$. Найдем $P(\overline{A})$. Общее число способов, которыми можно извлечь 3 детали из 10, равно C_{10}^3. Число нестандартных деталей в ящике равно $10-6=4$. Из этого числа нестандартных деталей можно извлечь три нестандартные детали C_4^3 способами. Поэтому вероятность того, что среди извлеченных трех деталей нет ни одной стандартной, равна $P(\overline{A})=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$. И тогда $P(A)=1-\dfrac{1}{30}=\dfrac{29}{30}$.

Упражнение 16.17. У сборщика имеется 3 крестовых и 7 прямых отверток. Сборщик взял одну отвертку, а затем вторую. Найдем вероятность того, что первая из взятых отверток — крестовая, а вторая — прямая.

Решение

Пусть событие A — «первая отвертка окажется крестовой», тогда $P(A)=\dfrac{3}{10}$. Пусть событие B — «вторая отвертка окажется прямой». Вероятность того, что вторая отвертка окажется прямой (событие B), вычисленная при условии, что первая отвертка — крестовая, есть условная вероятность $P(B\,|\,A)=\dfrac{7}{9}$. По теореме умножения вероятностей

$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}=\frac{7}{30}.$$

Упражнение 16.18. В урне 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Из урны три раза подряд вынимают наугад по одному шару и не возвращают их обратно. Найдем вероятность того, что при первом извлечении шара появится белый шар, при втором — черный и при третьем — синий.

Решение

Вероятность появления белого шара в первом опыте $P(A)=\frac{5}{12}$.

Вероятность появления черного шара во втором опыте вычисляется при условии, что в первом опыте вынули белый шар, т.е. условная вероятность $P(B\mid A)=\frac{4}{11}$. Вероятность появления синего шара в третьем опыте вычисляется при условии, что в первом опыте появился белый шар, а во втором — черный. Поэтому условная вероятность $P(C\mid AB)=\frac{3}{10}$.

Имеем по теореме умножения вероятностей

$$P(ABC)=P(A)\cdot P(B\mid A)\cdot P(C\mid AB)=\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11}\cdot\frac{3}{10}=\frac{1}{22}.$$

Упражнение 16.19. В читальном зале библиотеки имеется шесть учебников по математике. Из них половина в твердом переплете. Студент наудачу взял два учебника. Найдем вероятность того, что оба учебника окажутся в твердом переплете.

Решение

Пусть события A — «первый учебник в твердом переплете», B — «второй учебник в твердом переплете». Тогда $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. Вероятность того, что второй учебник в твердом переплете, при условии что первый взятый учебник был в твердом переплете, есть условная вероятность события B: $P(B\mid A)=\frac{2}{5}$. Тогда вероятность того, что оба учебника в твердом переплете, равна $P(AB)=P(A)\cdot P(B\mid A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$.

Упражнение 16.20. Имеются три ящика с 10 деталями в каждом. В первом ящике 8, во втором 7 и в третьем 9 окрашенных деталей. Из каждого ящика наугад вынимают по одной детали. Найдем вероятность того, что все три вынутые детали окажутся окрашенными.

Решение

Пусть событие A — «из первого ящика вынута окрашенная деталь». Тогда $P(A)=$ $=\frac{8}{10}=0{,}8$. Событие B — «из второго ящика вынута окрашенная деталь», и $P(B)=$ $=\frac{7}{10}=0{,}7$. Событие C — «из третьего ящика вынута окрашенная деталь», и $P(C)=\frac{9}{10}$. Поскольку события A, B и C независимые в совокупности, то вероятность

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0{,}8\cdot 0{,}7\cdot 0{,}9=0{,}504.$$

Упражнение 16.21. Имеются две урны. В первой урне 6 белых и 4 черных шара. Во второй урне 7 белых и 8 черных шаров. Человек подходит наугад к одной из урн и вынимает шар.

а) Найдем вероятность того, что это белый шар.

б) Найдем вероятность того, что этот белый шар из первой урны.

Решение

Событие A — «появление белого шара». Выберем гипотезы: H_1 — человек подошел к первой урне, H_2 — человек подошел ко второй урне. Человек мог подойти к каждой из урн с равной вероятностью, поэтому $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$. Найдем условные вероятности события A при каждой гипотезе:

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};\ P(A\,|\,H_2)=\frac{7}{15}.$$

а) Используем формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)P(H_1)+P(A\,|\,H_2)P(H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{2}=\frac{8}{15}.$$

б) Используем формулу Байеса: $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{P(A\,|\,H_1)P(H_1)}{P(A)}=\dfrac{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{9}{16}.$

Упражнение 16.22. Имеются две урны. В первой урне 6 белых и 4 черных шара. Во второй урне 7 белых и 9 черных шаров. Из первой во вторую перекладывают наугад один шар. Затем из второй урны также наугад извлекают один шар. Найдем вероятность того, что это будет белый шар.

Решение

Событие A — появление белого шара. Выберем гипотезы: H_1 — из первой урны во вторую переложили белый шар, H_2 — из первой урны во вторую переложили черный шар. Тогда вероятности гипотез будут равны

$$P(H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\ P(H_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Найдем условные вероятности события A при каждой гипотезе: $P(A\,|\,H_1)=\dfrac{8}{17}$, $P(A\,|\,H_2)=\dfrac{7}{17}$. Используем формулу полной вероятности:

$$P(A)=P(A\,|\,H_1)P(H_1)+P(A\,|\,H_2)P(H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{8}{17}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{17}=\frac{38}{85}\approx 0{,}4471.$$

Упражнение 16.23. У автопредприятия имеется четыре машины. Для каждой машины вероятность того, что она находится в рабочем состоянии, равна 0,9. Найдем вероятность того, что в данный момент хотя бы одна машина находится в рабочем состоянии. Найдем наивероятнейшее число машин, находящихся в рабочем состоянии.

Решение

Это задача на схему Бернулли. Число машин $n = 4$. Вероятность успеха — это вероятность того, что машина находится в рабочем состоянии: $p = 0{,}9$. События «машина находится в рабочем состоянии» и «машина находится в нерабочем состоянии» являются противоположными. Поэтому $p + q = 1$. Вероятность того, что в данный момент машина находится в нерабочем состоянии, равна $q=1-p=1-0{,}9=0{,}1$. Тогда $P(A)=1-q^4=1-0{,}1^4=0{,}9999$. Наивероятнейшее число машин, находящихся в рабочем состоянии, определяется по формуле $np-q\le k_0\le np+p$. Отсюда $k = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

16.1. Брошена одна игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет четное число очков.

16.2. Бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков делится нацело на 4.

16.3. Участники игры вынимают из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найдите вероятность того, что номер первого наудачу вынутого жетона не содержит цифры 5.

16.4. Одновременно бросают монету и игральную кость. Найдите вероятность одновременного появления событий: «выпал герб» и «выпало 6 очков».

16.5. На панели кодового замка наудачу выбирают две цифры. Найдите вероятность того, что сумма выбранных цифр будет больше 16?

16.6. На панели кодового замка наудачу выбирают две цифры. Какова вероятность того, что их произведение окажется меньше пяти?

16.7. Из полного набора костей домино (28 костей) наудачу вынимается одна. Какова вероятность того, что сумма очков на ней больше 8?

16.8. Некоторое предприятие выпускает 95% стандартных изделий. Из них 86% — первого сорта. Какова вероятность того, что взятое наудачу изделие окажется первого сорта?

16.9. Восемь различных книг расставляют на одной полке. Найдите вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

16.10. У куба окрасили все грани, а затем куб распилили на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешали. Наудачу извлекают один кубик. Найдите вероятность того, что он будет иметь окрашенных граней: а) одну; б) две; в) три.

16.11. Из полного набора домино (28 костей) наудачу извлечена одна кость. Найдите вероятность того, что вторую наудачу извлеченную кость можно приставить к первой, если первая кость: а) дубль; б) не дубль.

16.12. В замке на общей оси находится пять дисков. Каждый диск разделен на шесть секторов, на которых вписаны различные буквы. Замок открывается только тогда, когда каждый диск занимает одно определенное положение относительно корпуса замка. Диски устанавливаются произвольным образом. Найдите вероятность того, что замок можно открыть.

16.13. Имеется десять различных книг. Пять книг стоят по 400 руб. каждая, три книги — по 100 руб. и две книги — по 300 руб. Найдите вероятность того, что две взятые наудачу книги вместе стоят 500 руб.

16.14. При определении всхожести семян взяли пробу из 1000 семян. Из них не взошло 90. Какова относительная частота появления всхожего семени?

16.15. В партии из 100 деталей контролер обнаружил 5 нестандартных деталей. Чему равна относительная частота появления нестандартной детали?

16.16. Было произведено 120 выстрелов. При этом относительная частота попадания в цель оказалась равной 0,85. Найдите число попаданий.

16.17. В круг вписали квадрат. Внутрь круга наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в квадрат пропорциональна площади квадрата и не зависит от его расположения относительно круга.

16.18. В круг вписали правильный треугольник. Внутрь круга наудачу брошена точка. Найдите вероятность того, что точка окажется внутри треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения относительно круга.

16.19. Из колоды в 36 карт наугад вынимают две карты. Найдите вероятность того, что среди них будет хотя бы одна черная карта.

16.20. В ящике имеется 50 деталей. Из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найдите вероятность того, что эта деталь окажется окрашенной.

16.21. На полке в лаборатории случайным образом расположены коробки с различными реактивами: 8 коробок — с реактивом «А» и 6 коробок — с реактивом «Б». Наудачу взяли пять коробок. Какова вероятность, что из них 3 коробки будут с реактивом «А»?

16.22. Из колоды (36 карт) наугад вынимают 2 карты. Какова вероятность того, что среди них будет хотя бы один туз?

16.23. Среди 15 книг имеется 5 по экономике. Наугад выбираются 4 книги. Найдите вероятность того, что из них более двух по экономике.

16.24. В партии из 12 телевизоров имеются 4 бракованных. Наугад выбирают 3 телевизора. Найдите вероятность того, что среди выбранных телевизоров есть хотя бы один небракованный.

16.25. В группе 30 студентов. Из них 8 студентов не подготовились к занятию. Наугад вызывают 3 студентов. Найдите вероятность, что двое из них подготовились к занятию, а третий — нет.

16.26. В коллекции из 20 компакт-дисков имеется 5 с произведениями Баха. Наугад выбирают 4 компакт-диска. Найдите вероятность того, что из них хотя бы один компакт-диск будет с произведениями Баха.

16.27. В мешке имеется пять кубиков. На каждом кубике написана одна из следующих букв: О, П, Р, С, Т. Кубики вынимают по одному и располагают в ряд кверху написанными буквами. Найдите вероятность того, что можно будет прочесть слово «СПОРТ».

16.28. На каждой из шести одинаковых карточек написана одна из следующих букв: А, М, О, Р, С, Т. Карточки перемешиваются, из них вынимают четыре карточки и располагают их в ряд. Найдите вероятность того, что можно будет прочесть слово «ТРОС».

16.29. Ребенок берет буквы из разрезной азбуки. Какова вероятность того, что, разложив буквы А, Д, З, И, К, Н, П, Р, он составит слово «ПРАЗДНИК»?

16.30. Имеются 8 одинаковых карточек с буквами А, А, А, Г, Л, М, М, Ы. Карточки перемешиваются, а затем раскладываются в ряд. Найти вероятность, что можно будет прочесть слово «МАМАЛЫГА»?

16.31. Монету бросают до тех пор, пока она два раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найдите вероятность следующих событий: а) опыт закончится до шестого бросания; б) будет произведено четное число бросаний.

16.32. Контрольная работа по математике оценивается баллами 1, 2, ..., 10. Студент может получить 10 баллов с вероятностью 0,2; 9 баллов — с вероятностью 0,3 и от 1 до 9 баллов включительно — с вероятностью 0,7. Какова вероятность, что студент получит за контрольную работу по математике не менее 9 баллов?

16.33. В двух ящиках находятся детали. В первом из них 10 деталей. Из них три стандартных. Во втором ящике 15 деталей. Из них 6 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся стандартными?

16.34. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирается одна цифра, а затем из оставшихся четырех — вторая цифра. Найдите вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) в первый раз; б) во второй раз; в) в оба раза.

16.35. В корзине 3 яблока и 5 апельсинов. Из корзины наугад вынимают два фрукта. Чему равна вероятность вынуть фрукты одного вида?

16.36. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,7, для второго — 0,8. Найдите вероятность того, что хотя бы один стрелок промахнется.

16.37. В институтской библиотеке книг по экономике в два раза больше, чем по математике. Каждая вторая книга по математике и каждая третья книга по экономике — в переплете. Найдите вероятность того, что выбранная наудачу книга окажется в переплете.

16.38. В двух ящиках находится по 15 деталей. В первом ящике 9, а во втором — 10 стандартных деталей. Из первого ящика наудачу извлекли одну деталь и переложили во второй ящик. Затем из второго ящика наудачу вынули одну деталь. Найдите вероятность того, это будет стандартная деталь.

16.39. Имеется 10 пирожков, 3 из которых — с мясом. Остальные пирожки — с картошкой. Вероятность того, что пирожок с мясом окажется свежим, равна 0,9, для пирожка с картошкой эта вероятность равна 0,6. Был куплен один свежий пирожок. Что вероятнее, купили пирожок с мясом или с картошкой?

16.40. На теннисном корте есть 12 новых ракеток и 4 игранных. Вероятность того, что при игре порвется струна на новой ракетке, равна $\frac{1}{20}$. Для играной ракетки эта вероятность равна $\frac{3}{20}$. Наудачу берется одна ракетка.

а) Найдите вероятность того, что на ней порвется струна.

б) На произвольно взятой ракетке струна порвалась. Найдите вероятность того, что это новая ракетка.

16.41. На двух станках производятся одинаковые детали. Производительность второго станка втрое выше производительности первого. Вероятность того, что произведенная первым станком деталь окажется стандартной, равна 0,6, а для второго станка эта вероятность равна 0,9. С обоих станков детали сбрасываются на транспортер. С транспортера взяли наугад одну деталь.

а) Найдите вероятность того, что будет стандартная деталь.

б) Найдите вероятность, что эта стандартная деталь изготовлена вторым станком.

16.42. В сборной команде спортсменов борцов в два раза больше, чем гимнастов, а гимнастов в три раза больше, чем пловцов. Вероятность выиграть соревнование для борца — 0,9, для гимнаста — 0,75, для пловца — 0,8.

а) Найдите вероятность того, что спортсмен, выбранный наудачу, выиграет соревнование.

б) Наудачу выбранный спортсмен выиграл соревнование. Найдите вероятность того, что этот спортсмен — борец.

16.43. На трех станках изготавливают детали одного наименования. На первом станке изготавливают 10%, на втором — 30%, на третьем — 60% всех деталей. Первый станок изготавливает 70% стандартных деталей, второй — 80%, третий — 90% стандартных деталей.

а) Найдите вероятность того, что наугад взятая деталь окажется стандартной.

б) Наугад взятая деталь оказалась стандартной. Найдите вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

16.44. Стрелок в каждом выстреле поражает мишень с вероятностью 0,5. Найдите вероятность того, что он поразит мишень три раза подряд.

16.45. Стрелок произвел три выстрела по мишени. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле попадет в мишень, равна $p = 0,9$. Найдите вероятность того, что все три попадания были успешны.

16.46. Найдите вероятность того, что при бросании трех игральных костей хотя бы на одной из них выпадет 6 очков.

16.47. В студии телевидения три телевизионные камеры. Для каждой камеры вероятность того, что она включена в данный момент, равна $p = 0,6$. Найдите вероятность того, что в данный момент включена хотя бы одна камера. Найдите наивероятнейшее число включенных камер.

Глава 17
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

17.1. Случайные величины. Функция распределения

Случайные величины — это величины, которые можно измерить в случайных испытаниях. В результате испытания случайная величина примет только одно возможное значение, неизвестное наперед и зависящее от случайных причин, которые не могут быть заранее учтены. Случайная величина полностью определена, если известен исход испытания. Случайные величины обозначаются прописными латинскими буквами X, Y, Z, ..., а их возможные значения — строчными x, y, z, ... Таким образом, *случайной величиной* X называется функция, ставящая в соответствие каждому элементарному исходу w число $X = X(w)$.

Примеры случайных величин: число бракованных деталей в выборке из n деталей; время ожидания автобуса на остановке.

Функцией распределения случайной величины X называется функция $F(x)$, значение которой в точке x равно вероятности события $\{X < x\}$, т.е. события, состоящего из тех и только тех исходов w, для которых $X(w) < x$. Значение функции распределения в точке x равно вероятности случайной величины X принять значение меньше x: $F(x) = P\{X < x\}$.

Рассмотрим *свойства* функции распределения.

1. $0 \le F(x) \le 1$, так как $F(x)$ — это по определению вероятность.
2. При $\forall\, x_1 \le x_2$, $F(x_1) \le F(x_2)$, т.е. $F(x)$ — неубывающая функция.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$.
5. $P\{x_1 \le X < x_2\} = F(x_1) - F(x_2)$ — вероятность попадания в интервал $[x_1, x_2)$.
6. $F(x)$ — непрерывная слева (справа) функция.

Типичный вид графика функции распределения приведен на рис. 17.1.

Таким образом, с любой случайной величиной можно связать ее функцию распределения.

Но часто поведение случайной величины удобно характеризовать не заданием ее функции распределения, а как-то по-другому. Если при этом можно однозначно восстановить функцию распределения, то такая характеристика называется *законом распределения* (или просто *распределением*) случайной величины.

Дискретные случайные величины. *Дискретной случайной величиной* называется случайная величина, которая принимает конечное или счетное множество значений (т.е. их можно пронумеровать).

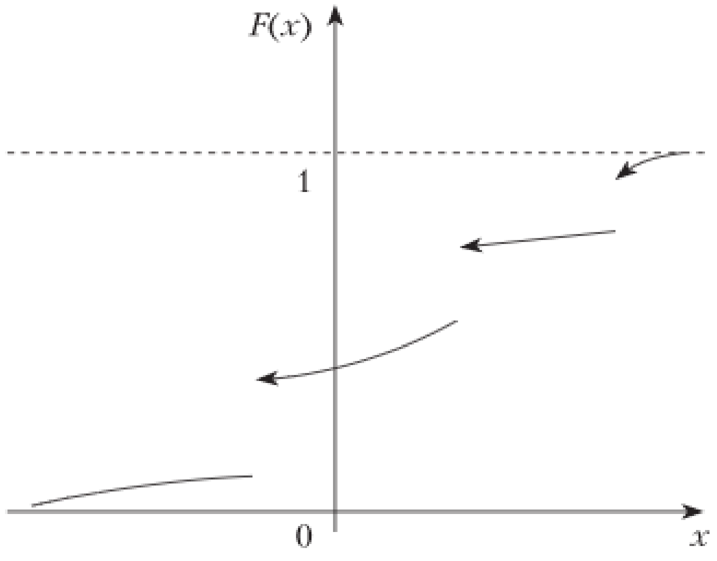


Рис. 17.1

Примеры дискретных случайных величин: число очков, выпавших при бросании игральной кости (возможные значения: 1, ..., 6, т.е. множество конечно); число звонков, поступивших на телефонную станцию в течение некоторого промежутка времени (возможные значения образуют счетное множество: 0, 1, 2, ...).

Рядом распределения, или *таблицей распределения*, дискретной случайной величины называется таблица, состоящая из двух строк. В верхней строке перечислены все возможные значения случайной величины, а в нижней — вероятности $p_i = P\{X = x_i\}$ того, что случайная величина принимает эти значения:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

Причем $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, если возможных значений x_i конечное число n, и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, если возможных значений x_i счетное число.

По таблице распределения дискретной случайной величины можно однозначно построить ее функцию распределения. Пусть X — дискретная случайная величина, заданная таблицей распределения, и пусть возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n$ расположены по возрастанию. Тогда для всех $x \le x_1$ событие $\{X < x\}$ является невозможным и поэтому $F(x) = 0$. Если $x_1 < X \le x_2$, то событие $\{X < x\}$ состоит только из тех элементарных исходов, для которых $X = x_1$, т.е. $F(x) = p_1$. Аналогично при $x_2 < X \le x_3$ событие $\{X < x\}$ состоит из тех элементарных исходов, для которых или $X = x_1$, или $X = x_2$, т.е. $\{X < x\} = \{X = x_1\} + \{X = x_2\}$. Поэтому $F(x) = p_1 + p_2$ и т.д. Если $x > x_n$, событие $\{X < x\}$ достоверное и $F(x) = 1$. Таким образом, функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией, принимающей на интервале $(-\infty, x_1]$ значение 0, на интервале $(x_k, x_{k+1}]$ значение $p_1 + ... + p_k$ и на интервале $(x_n, +\infty)$ значение 1.

Общий вид графика функции распределения дискретной случайной величины приведен на рис. 17.2.

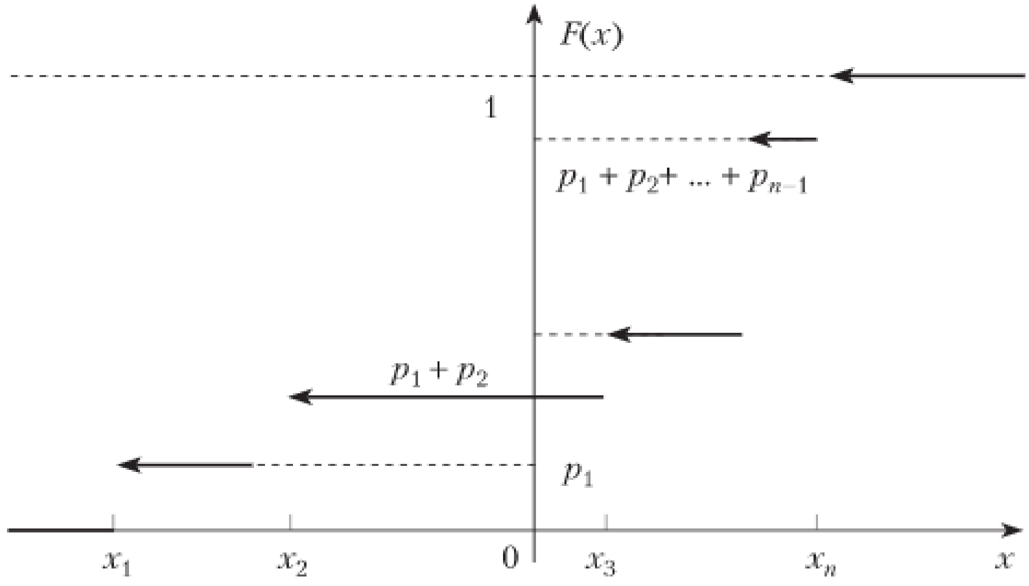


Рис. 17.2

Таким образом, если ряд распределения дискретной случайной величины имеет вид

x_i	x_1	x_2	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_n

,

то ее функция распределения следующая:

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \text{если}\ x\le x_1,\\ p_1,\ \text{если}\ x_1<x\le x_2,\\ p_1+p_2,\ \text{если}\ x_2<x\le x_3,\\ \ldots\\ p_1+p_2+\ldots+p_{n-1},\ \text{если}\ x_{n-1}<x\le x_n,\\ 1,\ \text{если}\ x>x_n.\end{cases}$$

Рассмотрим примеры дискретных распределений.

1. Биномиальное распределение (распределение Бернулли).

Рассматривается схема Бернулли: n — это число одинаковых и независимых опытов, в каждом из которых может с вероятностью p наступить успех (произойдет событие A) или с вероятностью $q=1-p$ наступить неудача (не произойдет событие A). Случайная величина X — это число успехов в n опытах. Вероятность того, что в n опытах будет получено ровно m успехов вычисляется по *формуле Бернулли* $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$.

Распределение, определяемое формулой Бернулли, называется *биномиальным распределением* или *распределением Бернулли.*

Ряд распределения Бернулли имеет следующий вид:

x_i	0	1	...	m	...	n
p_i	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^m p^m q^{n-m}$	...	p^n

Пример 17.1

На экзамене студент получил четыре задачи. Вероятность правильно решить задачу $p=0{,}8$. Пусть случайная величина X — это число правильно решенных задач. Запишем ряд распределения случайной величины X, функцию распределения и построим ее график.

Решение

Случайная величина X распределена по биномиальному закону с параметрами $n=4$, $p=0{,}8$, $q=0{,}2$. Вероятности в нижней строке находятся по формуле Бернулли $P(X=m)=C_n^m p^m q^{n-m}$. В этой формуле меняется только число успехов m. После вычислений получим таблицу

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Функция распределения будет

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ 0{,}0016, \text{ если } 0<x\le 1,\\ 0{,}272, \text{ если } 1<x\le 2,\\ 0{,}1808, \text{ если } 2<x\le 3,\\ 0{,}5904, \text{ если } 3<x\le 4,\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$$

График функции распределения имеет следующий вид (рис. 17.3).

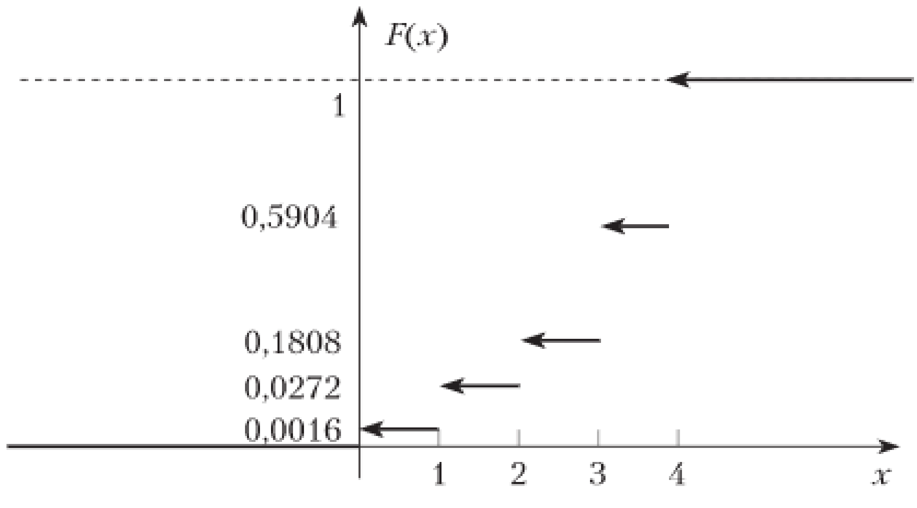


Рис. 17.3

2. Пуассоновское распределение.

Пусть число опытов n в схеме Бернулли достаточно велико, а вероятность успеха p в одном испытании мала, причем мало также произведение $\lambda=np$. Тогда число успехов m в n опытах можно найти по приближенной формуле — *формуле Пуассона:*

$$P(m,\lambda)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad m=0,1,2,\dots,n;\ \lambda=np,$$

и распределение числа успехов называется *распределением Пуассона*. Параметр λ называется *интенсивностью распределения*.

Таблица распределения пуассоновской случайной величины имеет следующий вид:

x_i	0	1	2	...	n
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$

Распределение Пуассона также называется законом редких событий, поскольку оно появляется там, где производится большое число испытаний, в каждом из которых с малой вероятностью происходит редкое событие. По закону Пуассона распределено, например, число вызовов, поступивших на телефонную станцию; число метеоритов, упавших в определенном районе; число распавшихся элементарных частиц и т.д.

Пример 17.2

Книга издана тиражом 20 000 экз. Вероятность того, что книга бракована, равна 0,0005. Найдем вероятность того, что в тираже ровно три бракованные книги.

Решение

Имеем $n = 20\ 000$, $p = 0{,}005$, $m = 3$. Вычислим $\lambda = np = 20\ 000 \cdot 0{,}0005 = 10$. Тогда искомая вероятность будет равна $P = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} = \frac{10^3}{3!}e^{-10} = \frac{10^3}{6} \cdot 0{,}000045 = 0{,}0075$.

3. Геометрическое распределение.

Пусть число одинаковых и независимых опытов не ограничено. Пусть p, $0 < p < 1$, — это вероятность успеха в одном опыте. Случайная величина X — это число опытов, которые нужно провести до первого успеха. Случайная величина X имеет *геометрическое распределение* с параметром p, $0 < p < 1$, если

$$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1},\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Геометрическое распределение очень хорошо иллюстрируется схемой «стрельба до первого попадания»: стрелок имеет неограниченный запас патронов и ведет стрельбу по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна p. Случайная величина X — число произведенных выстрелов.

Ряд распределения случайной величины X имеет вид

x_i	1	2	3	...	n	...
p_i	p	$p(1-p)$	$p(1-p)^2$	...	$p(1-p)^{n-1}$	...

Пример 17.3

Сколько раз надо выстрелить стрелку, чтобы с вероятностью 0,0864 можно было утверждать, что вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4?

Решение

Имеем $p = 0{,}4$, $1 - p = 0{,}6$, $0{,}4 \cdot 0{,}6^{n-1} = 0{,}0864$. Таким образом, $n - 1 = 3$, т.е. $n = 4$.

Непрерывные случайные величины. *Непрерывной* называется случайная величина X, функция распределения которой имеет вид $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$.

Функция $f(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* (плотностью распределения, дифференциальной функцией) случайной величины X. А функцию $F(x)$ иногда называют интегральной функцией.

Рассмотрим *свойства* плотности распределения.

1. Плотность распределения — это производная от функции распределения $f(x) = F'(x)$.

2. $f(x) \geq 0$ — плотность распределения — это неотрицательная функция.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ — условие нормировки. Геометрически это означает, что площадь, ограниченная кривой распределения и осью абсцисс, равна 1.

4. $P\{x_1 < X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$ — вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал (x_1, x_2).

4. $P\{x < X < x + \Delta x\} \approx f(x) \cdot \Delta x$ при $\Delta x \to 0$.

5. $P\{X = x\} = 0$ — вероятность попадания в точку непрерывной случайной величины.

В силу последнего свойства для непрерывной случайной величины имеет место следующее равенство вероятностей:

$$P\{x_1 < X < x_2\} = P\{x_1 \leq X < x_2\} = P\left\{x_1 < X \leq x_2\right\} = P\{x_1 \leq X \leq x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого интервала или совокупности интервалов. Непрерывную случайную величину невозможно описать рядом распределения.

График плотности распределения называется *кривой распределения*. Типичный вид графика плотности распределения приведен на рис. 17.4.

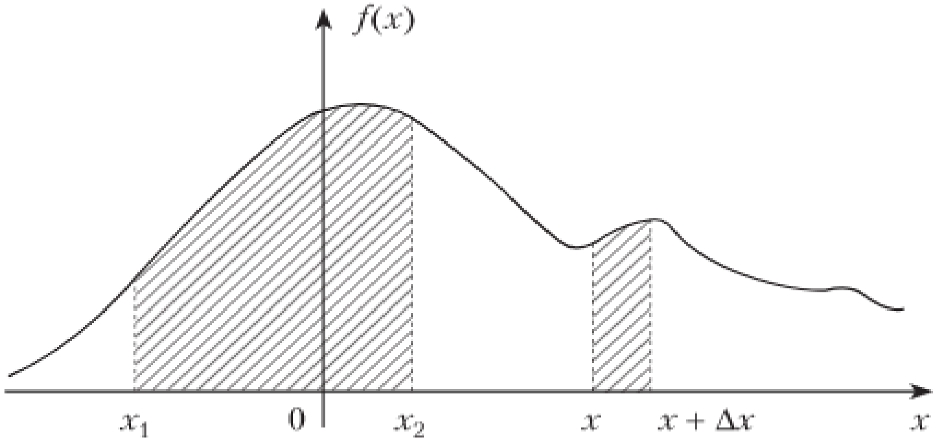


Рис. 17.4

Рассмотрим примеры непрерывных распределений.

1. Равномерное распределение.

Распределение вероятностей называют *равномерным*, если плотность распределения сохраняет постоянное значение на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины.

Равномерно распределенная на интервале (a, b) случайная величина X имеет плотность распределения следующего вида:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{если } a<x\le b,\\ 0, \text{если } x\le a \text{ или } x>b.\end{cases}$$

График плотности распределения равномерной случайной величины выглядит следующим образом (рис. 17.5).

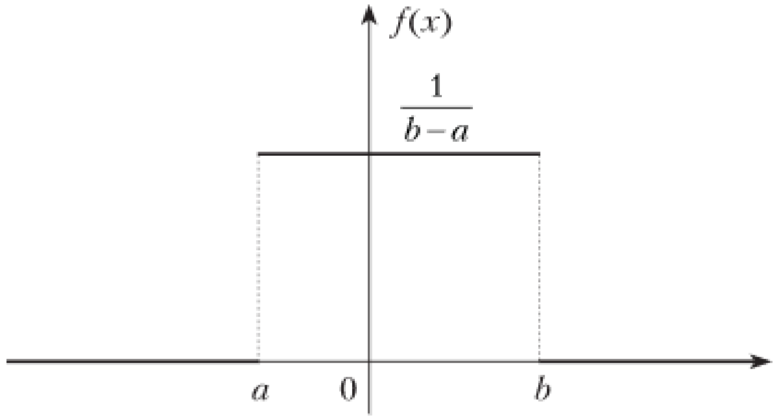


Рис. 17.5

Функция распределения равномерной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{если } x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{если } a<x\le b,\\ 1, \text{если } x>b.\end{cases}$$

График функции распределения равномерной случайной величины изображен на рис. 17.6.

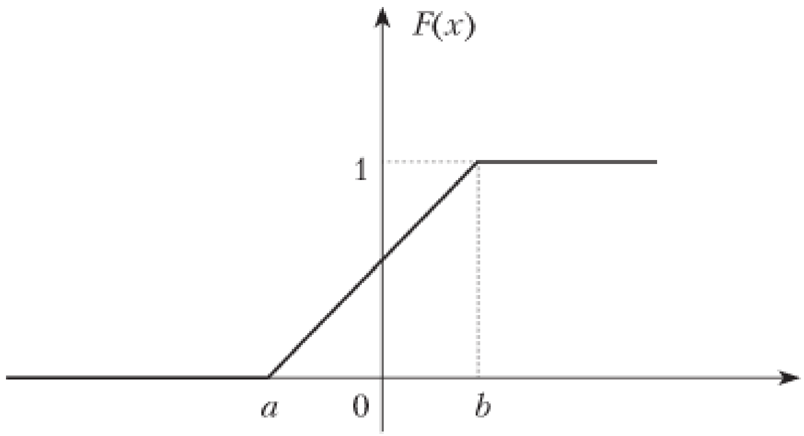


Рис. 17.6

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины в интервал $(x_1, x_2)\subseteq(a, b)$ равна $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$, т.е. пропорциональна длине этого интервала.

Пример 17.4

Цена деления весов равна 0,1 кг. При взвешивании груза показания округляются до ближайшего целого деления. Найдем вероятность того, что при взвешивании будет сделана ошибка, превышающая 0,01 кг.

Решение

Пусть случайная величина X — это ошибка округления. Она распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Интервал, в котором заключены возможные значения X, имеет длину 0,1. Поэтому $f(x)=\dfrac{1}{0{,}1}=10$. Ошибка отсчета превышает 0,01, если она будет заключена в интервале $(0{,}01; 0{,}09)$:

$$P\{0{,}01 < X < 0{,}09\} = \int_{0{,}01}^{0{,}09} 10dx = 0{,}9-0{,}1=0{,}8.$$

2. Показательное (экспоненциальное) распределение.

Случайная величина подчиняется *показательному закону* или имеет *показательное* или *экспоненциальное распределение*, если она имеет следующую плотность распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, \text{если } x \ge 0.\end{cases}$$

Число $\lambda > 0$ называется *параметром* показательного распределения.

Кривая распределения показательного закона имеет вид, как на рис. 17.7.

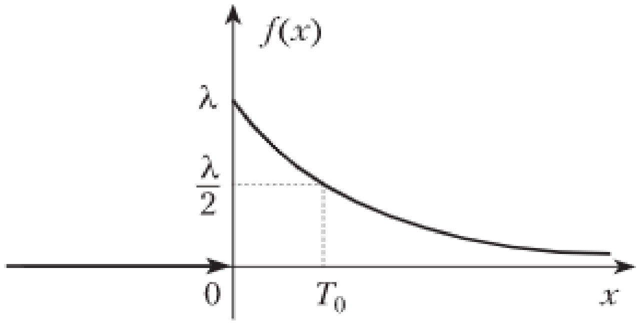


Рис. 17.7

Функция распределения показательного закона следующая:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{если } x<0,\\ 1-e^{-\lambda x}, \text{если } x \ge 0.\end{cases}$$

Ее график представлен на рис. 17.8.

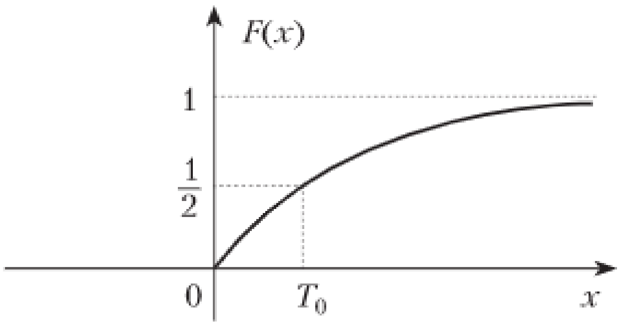


Рис. 17.8

Вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал (a, b): $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.

Экспоненциально распределенная случайная величина может принимать только положительные значения. Этому распределению подчинено время распада атомов различных элементов. Число $T_0 = \ln\frac{2}{\lambda}$ называется периодом полураспада, т.е. это время, в течение которого распадается половина имеющегося вещества.

Пример 17.5

Непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, \text{если } x > 0, \\ 0, \text{если } x < 0. \end{cases}$ Найдем вероятность того, что в результате опыта X попадет в интервал (0,39; 2,1).

Решение

$$P\{0,39 < X < 2,1\} = e^{-1\cdot 0,39} - e^{-1\cdot 2,1} = 0,677 - 0,122 = 0,555.$$

3. Нормальное распределение.

Случайная величина X имеет *нормальное* или *гауссовское распределение*, если ее плотность распределения имеет вид

$$\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ -\infty < m < +\infty, \ \sigma > 0.$$

Числа m, σ называются *параметрами* нормального распределения, m — *среднее значение* нормального закона, σ — *среднее квадратическое отклонение*. Обозначение: $X \sim N(m, \sigma^2)$. Параметр m определяет положение центра нормальной плотности, а σ — разброс относительно центра. Если $m = 0$, $\sigma = 1$, то такой нормальный закон называется *стандартным* и обозначается $X \sim N(0, 1)$. Плотность распределения стандартного нормального закона следующая:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Это табулированная функция (см. приложение, табл. П1). Так как $\varphi(x)$ — четная функция ($\varphi(-x) = \varphi(x)$), то для отрицательных значений x пользуются той же таблицей.

Кривые распределения нормального стандартного закона при различных параметрах m, σ приведены на рис. 17.9. Кривая распределения нормального закона называется еще *кривой Гаусса*.

Изменение параметра m приводит к смещению кривой вдоль оси абсцисс вправо, если m возрастает, и влево, если m убывает, без изменения формы кривой (рис. 17.10). Изменения параметра σ приводит к изменению формы кривой без сдвига вдоль оси Ox. С увеличением σ максимальная ордината уменьшается, а сама кривая становится более пологой. При убывании σ нормальная кривая становится более «островершинной» и растягивается в положительном направлении оси Oy (рис. 17.11).

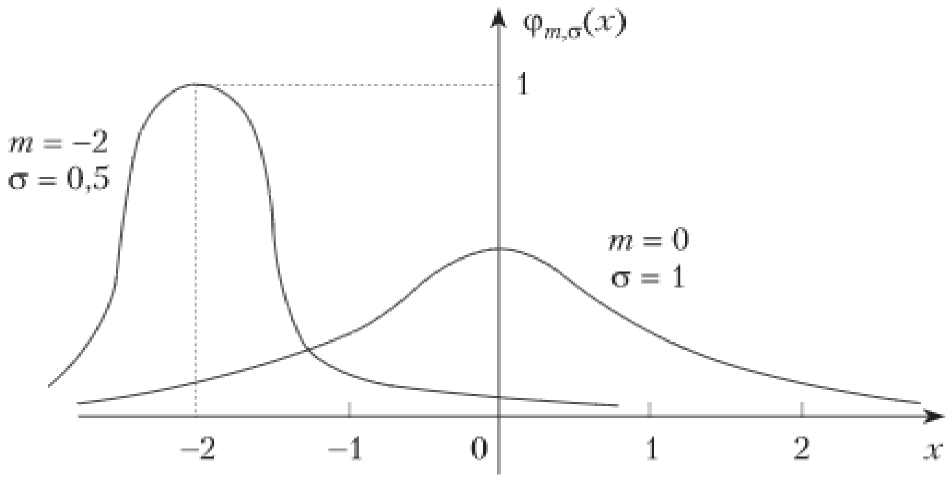


Рис. 17.9

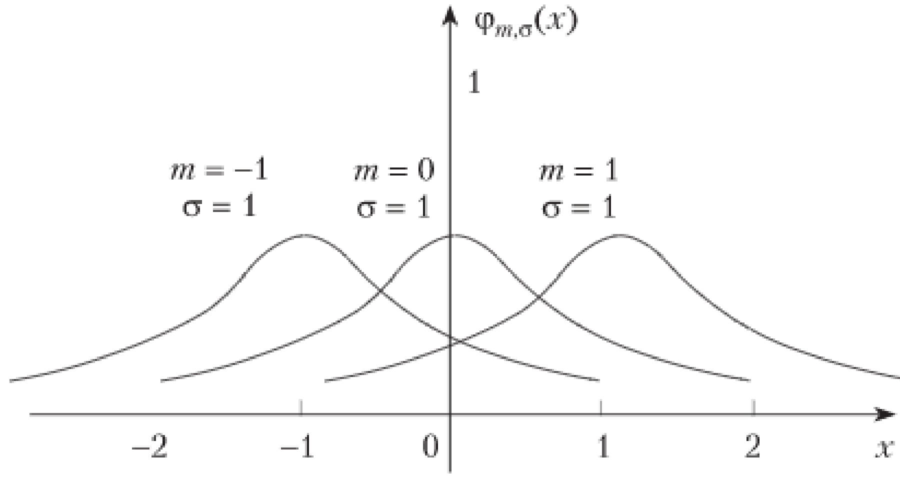


Рис. 17.10

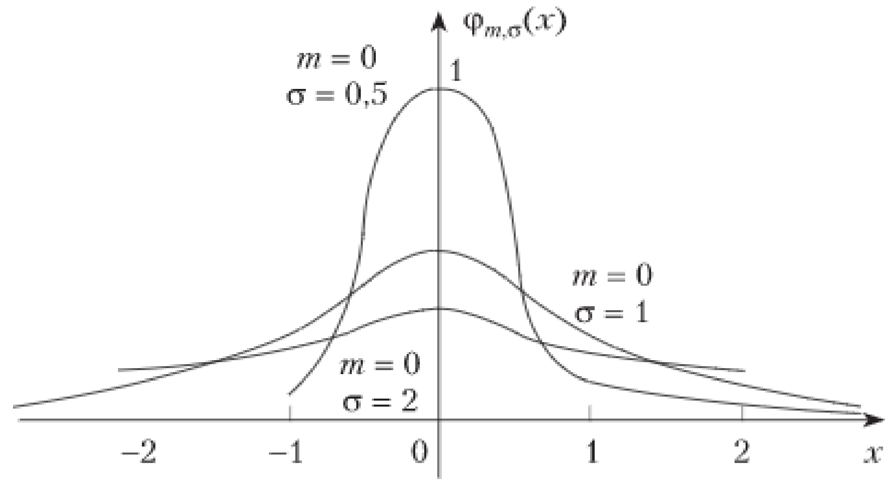


Рис. 17.11

Но при любых параметрах m, σ площадь, ограниченная кривой распределения нормального закона и осью Ox, равна 1.

Рассмотрим функцию распределения стандартного нормального закона:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Эта функция называется *функцией Лапласа, интегралом вероятностей* или *нормальной функцией распределения*.

В различных руководствах по теории вероятностей одно и то же название «функция Лапласа» и обозначение $\Phi(x)$ используется для функций, отличающихся от вышеприведенной. Чтобы их различать, введем обозначения:

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \text{ и } \Phi_2(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

В данном учебнике приведена таблица значений функции $\Phi(x)$ (см. приложение, табл. П2).

Рассмотрим *свойства* функции Лапласа.

1. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, т.е. $\Phi(x)$ — нечетная функция. Это дает возможность составлять таблицы только для неотрицательных x.

2. Для всех $x \geq 5$ принимаем $\Phi(x) \approx 0{,}5$. Таким образом, таблица составлена только для $x \in [0; 5]$.

3. $\Phi_1(x) = \Phi(x) + \dfrac{1}{2}$.

4. $\Phi_2(x) = 2\Phi_1(x) = 2\Phi(x) + 1$.

5. $\Phi_1(-x) = 1 - \Phi_1(x)$.

Вероятность попадания нормально распределенной с параметрами m, σ случайной величины в интервал (x_1, x_2) имеет вид

$$P\{x_1 < X < x_2\} = \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) = \Phi_1\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) - \Phi_1\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) =$$
$$= \Phi_2\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) - \Phi_2\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right).$$

В частности, если $x_1 = m - t$, $x_2 = m + t$, то вероятность попадания в интервал, симметричный относительно m, равна

$$P\{m - t < X < m + t\} = P\{|X - m| < t\} = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right) = 1 - 2\Phi_1\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

и зависит только от длины интервала t и параметра σ, и не зависит от среднего значения m.

На рис. 17.12 приведен график функции Лапласа при различных значениях параметров.

Правило трех сигм. С вероятностью 0,997 (практически достоверно) случайная величина X, распределенная нормально с параметрами m, σ, отклоняется от своего среднего значения m не более, чем на 3σ: $P\{|X - m| \leq 3\sigma\} \approx 0{,}997$ (рис. 17.13).

На практике правило трех сигм используется таким образом: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но выполняется условие $P\{|X - m| \leq 3\sigma\} \approx 0{,}997$, то считаем, что случайная величина распределена нормально. В противном случае она не распределена нормально.

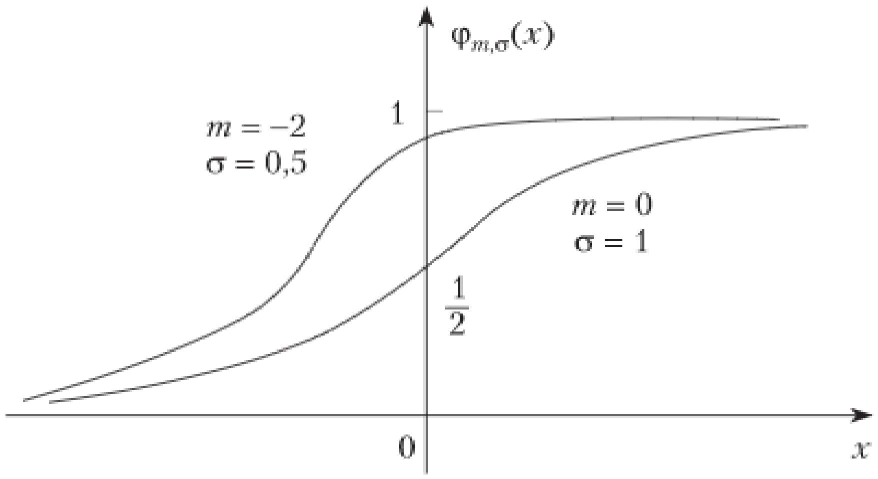


Рис. 17.12

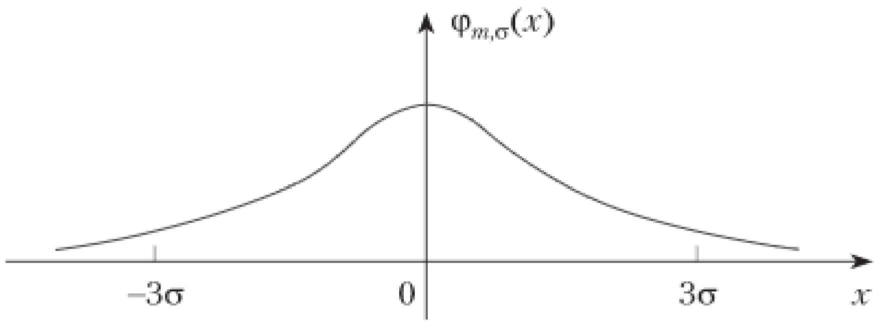


Рис. 17.13

Пример 17.6

Пусть случайная величина X, распределенная по нормальному закону, представляет собой измерение некоторого расстояния. При измерении допускается систематическая ошибка 1,2 м, среднее квадратическое отклонение ошибки измерения 0,8 м. Найдем вероятность того, что отклонение измеренного значения от истинного не превзойдет по абсолютной величине 1,6 м.

Решение

Имеем: систематическая ошибка — это среднее значение $m = 1,2$, среднее квадратическое отклонение $\sigma = 0,8$. Тогда

$$P\{|X| \le 1,6\} = P\{-1,6 \le X \le 1,6\} = \Phi\left(\frac{1,6-1,2}{0,8}\right) - \Phi\left(\frac{-1,6-1,2}{0,8}\right) =$$

$$= \Phi(0,5) - \Phi(-3,5) = \Phi(0,5) + \Phi(3,5) = 0,1915 + 0,4997 = 0,6912.$$

Значения $\Phi(0,5) = 0,1915$ и $\Phi(3,5) = 0,4997$ находим из табл. П2 приложения.

Пример 17.7

Деталь считается годной, если отклонение X размера детали от проектного по модулю меньше 0,7 мм. Считаем, что случайная величина X распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,4$ мм. Найдем процент годных деталей.

Решение

Поскольку X — отклонение размера детали от проектного, то $m = 0$. Используем формулу $P\{|X| < t\} = 2\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$. Подставим в нее $t = 0,7$ мм, $\sigma = 0,4$ мм. Тогда получим

$P\{|X|<0,7\}=2\Phi\left(\frac{0,7}{0,4}\right)=2\Phi(1,75)=2\cdot 0,4599=0,92.$ Следовательно, процент годных деталей равен 92%.

17.2. Числовые характеристики случайных величин

Характеристики положения. *Математическим ожиданием* случайной величины X называется ее среднее значение (если оно существует).

Если X — дискретная случайная величина, то ее математическое ожидание равно сумме произведений значений x_k случайной величины на вероятности $p_k=P\{X=x_k\}$, с которыми эти значения принимаются: $MX=\sum_k x_k p_k$.

Если случайная величина X принимает счетное число значений, необходимо, чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|p_k$ сходился, в противном случае говорят, что математическое ожидание не существует.

Математическое ожидание (среднее значение) MX непрерывной случайной величины X равно значению интеграла $MX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

В этом случае условие существования математического ожидания выглядит таким образом: несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx$ должен сходиться.

Приведем *свойства* математического ожидания.

1. $Mc=c$, где $c=\text{const}$.
2. $M(aX+b)=aMX+b,\ \ a,b-\text{const}$.
3. $M(X+Y)=MX+MY$ для любых случайных величин X и Y.
4. $M(X\cdot Y)=MX\cdot MY$, если X и Y — независимые случайные величины.

Замечание 17.1. Понятие независимости случайных величин вводится в параграфе 17.3. Далее в условии задачи оговаривается, какие случайные величины рассматриваются.

Выпишем математические ожидания для изученных нами дискретных и непрерывных распределений.

Распределение Бернулли: $MX=np$.

Распределение Пуассона: $MX=\lambda$ (таким образом, параметр распределения λ совпадает с математическим ожиданием).

Геометрическое распределение: $MX=\frac{1-p}{p}$, где p — вероятность успеха в одном опыте, и опыты повторяются до первого успеха.

Равномерное распределение: $MX=\frac{a+b}{2}$, т.е. совпадает с центром тяжести отрезка $[a,b]$.

Показательное распределение: $MX=\frac{1}{\lambda}$, где λ — параметр распределения.

Нормальное распределение со средним m и средним квадратическим отклонением σ: $MX = m$.

Пример 17.8

Бросают 5 игральных костей (кубиков). Найдем математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадут на всех кубиках.

Решение

Пусть случайная величина X — сумма числа очков, которые выпадут на всех кубиках; случайная величина X_k — число очков выпавших на k-м кубике, $k = 1, ..., 5$. Тогда $X = X_1 + ... + X_5$.

Следовательно, $MX = M(X_1 + ... + X_5) = \sum_{k=1}^{5} MX_k$. Поскольку кубики друг от друга ничем не отличаются, то все случайные величины X_k одинаково распределены и поэтому имеют одинаковые числовые характеристики. Следовательно, $MX_1 = ... = MX_5$. Тогда $MX = 5MX_1$. Найдем MX_1. Для этого построим ряд распределения случайной величины X_1:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда $MX_1 = \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$. Итого $MX = 5 \cdot \frac{7}{2} = \frac{35}{2}$.

Пример 17.9

Случайная величина X распределена по закону Лапласа с плотностью $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Найдем ее математическое ожидание.

Решение

Используем формулу для нахождения математического ожидания непрерывной случайной величины: $MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-|x|} dx = 0$ (интеграл от нечетной функции в симметричных пределах).

Модой Mo непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, при котором плотность распределения $f(x)$ достигает своего максимума.

Значит, мода — это точка локального максимума плотности распределения. Если такой максимум один, то распределение называют *унимодальным*, если максимумов больше одного — то *полимодальным*.

Медиана Me непрерывной случайной величины X определяется из условия $P(X < Me) = 0{,}5$, т.е. это точка, в которой функция распределения достигает значения 0,5: $F(Me) = 0{,}5$.

Так как $P(X < Me) + P(X > Me) = 1$, то для медианы выполняется свойство $P(X < Me) = P(X > Me)$, т.е. медиана делит площадь под плотностью распределения $f(x)$ пополам.

В отличие от моды медиана у каждого распределения только одна.

Характеристики рассеяния. *Вторым моментом* m_2 случайной величины X называется математическое ожидание квадрата X:

$$m_2 = MX^2 = \begin{cases} \sum\limits_k x_k^2 p_k \text{ — для дискретой случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx \text{ — для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Случайная величина вида $\dot{X} = X - MX$ называется *центрированной*. Для центрированной случайной величины $M\dot{X} = 0$.

Дисперсией DX случайной величины X называется второй момент центрированной случайной величины: $DX = M(X - MX)^2$.

В зависимости от типа распределения (дискретное или непрерывное) эта формула примет вид

$$DX = M\dot{X}^2 = M(X - MX)^2 =$$

$$= \begin{cases} \sum\limits_k (x_k - MX)^2 p_k \text{ — для дискретной случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx \text{ — для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Поэтому дисперсию иногда называют *вторым центральным моментом*. Дисперсия характеризует разброс (рассеяние) случайной величины вокруг ее математического ожидания.

Приведем *свойства* дисперсии.

1. $Dc = 0,\ c = \text{const}$.
2. $D(aX + b) = a^2 DX$.
3. $DX = M(X - MX)^2 = m_2 - (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$.
4. $D(X + Y) = DX + DY$, если X и Y — независимые случайные величины.

Запишем дисперсии изучаемых распределений.

Распределение Бернулли: $DX = npq,\ q = 1 - p$.

Распределение Пуассона: $DX = \lambda$, где λ — параметр распределения.

Геометрическое распределение: $DX = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Равномерное распределение: $DX = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Показательное распределение: $DX = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Нормальное распределение: $DX = \sigma^2$.

Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины X. Это не очень удобно для наглядного представления степени рассеяния случайной величины X. Поэтому вводится еще один показатель, имеющий размерность самой случайной величины X.

Число $\sigma = \sqrt{DX}$ называется *средним квадратическим отклонением* или *стандартным отклонением* случайной величины. Среднее квадратическое отклонение имеет размерность случайной величины.

Пример 17.10

Вычислим дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых опытах. При этом известно, что вероятности появления события в этих опытах одинаковы, а математическое ожидание $MX = 1,2$.

Решение

Пусть p — вероятность успеха в одном опыте. Случайная величина X имеет биномиальное распределение. Тогда $MX = np = 2 \cdot p = 1,2$. Отсюда $p = 0,6$; $q = 0,4$. Поэтому дисперсия будет равна $DX = npq = 2 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,48$.

Пример 17.11

Случайная величина X в интервале (–3; 3) задана плотностью распределения $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$. Вне этого интервала плотность распределения равна нулю. Найдем дисперсию X.

Решение

Используем формулу $DX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)dx$. Поскольку кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 0$ (функция $f(x) = \dfrac{1}{\pi\sqrt{9 - x^2}}$ четная), то $MX = 0$. Тогда

$$DX = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-3}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{3} \frac{x^2dx}{\sqrt{9 - x^2}}\Big|x = 3 \cdot \sin t\Big| = \frac{2 \cdot 9}{\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{81}{2}.$$

Для случайной величины X с математическим ожиданием $M(X) = m$ и дисперсией $D(X) = \sigma^2$ новая случайная величина $X_0 = \dfrac{X - m}{\sigma}$ называется *нормированной*. Нормированная случайная величина всегда имеет математическое ожидание, равное 0, и дисперсию, равную 1:

$$M\left(\frac{X - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}M(X - m) = \frac{1}{\sigma}(M(X) - m) = 0;$$

$$D\left(\frac{X - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}D(X - m) = \frac{1}{\sigma^2}D(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1.$$

Моменты старших порядков. *Моментом m_k порядка k* (k-м моментом, k-м начальным моментом) называется математическое ожидание k-й степени случайной величины X:

$$m_k = MX^k = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k p_i \text{ — для дискретной случайной величины,} \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx \text{ — для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Центральным моментом $\dot{m}_k$ порядка k (k-м центральным моментом) называется математическое ожидание k-й степени центрированной случайной величины $\dot{X} = X - MX$:

$$\dot{m}_k = M(X - MX)^k =$$

$$= \begin{cases} \sum_i (x_i - MX)^k p_i \text{ — для дискретной случайной величины,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^k f(x)dx \text{ — для непрерывной случайной величины.} \end{cases}$$

Момент первого порядка совпадает с математическим ожиданием, центральный момент первого порядка равен нулю, центральный момент второго порядка является дисперсией:

$$m_1 = MX^1 = MX;$$

$$\dot{m}_1 = M\dot{X}^1 = M(X - MX) = 0;$$

$$\dot{m}_2 = M\dot{X}^2 = M(X - MX)^2 = DX.$$

17.3. Предельные теоремы

Неравенство Чебышева. Для каждой случайной величины X, имеющей дисперсию $DX = \sigma^2$, при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$P\left\{\left|X - MX\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидания не менее чем на ε, не превосходит отношения дисперсии этой случайной величины и ε^2.

Следствием этого неравенства является очень важная теорема Чебышева.

Теорема Чебышева (закон больших чисел). *Если последовательность* $X_1, ..., X_n, ...$ *независимых случайных величин такова, что их дисперсии равномерно ограничены* ($DX_k \leq \sigma^2$ для $k = 1, 2, 3, ...$), *то для любого* $\varepsilon > 0$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k\right| < \varepsilon\right\} \to 1 \text{ при } n \to +\infty.$$

Выполнение закона больших чисел отражает предельную устойчивость арифметических средних случайных величин: при большом числе опытов средние случайных величин (математические ожидания) практически перестают быть случайными и с большой степенью достоверности могут быть предсказаны.

Таким образом, закон больших чисел подтверждает связь между случайностью ($\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$) и необходимостью ($\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} MX_k$).

Пусть произведено большое число n испытаний Бернулли, вероятность успеха p в одном испытании. По числу полученных успехов m определим относительную частоту успеха $\mu = \frac{m}{n}$. Возникает вопрос: как сильно частота успеха μ отличается от вероятности успеха p?

Теорема Бернулли (об устойчивости относительных частот). *Для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется* $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\mu - p\right| > \varepsilon\right\} = 0.$

Таким образом, частота $\dfrac{m}{n}$ успехов в серии из n испытаний сходится по вероятности к вероятности p успеха в одном испытании с ростом числа испытаний.

Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова). *Пусть* $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих числовые характеристики* $MX_n = m, DX_n = \sigma^2$. *Тогда верно предельное соотношение*

$$P\left\{\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - nm)}{\sigma\sqrt{n}} < x\right\} \to \Phi(x),\ n \to \infty,$$

где $\Phi(x)$ *— функция распределения стандартного нормального распределения.*

Сумма взаимно независимых, индивидуально малых случайных величин с ростом числа слагаемых сходится к нормальной функции распределения. Если исход опыта определяется большим числом случайных факторов, влияние каждого из которых пренебрежимо мало, то такой опыт хорошо описывается нормальным распределением с соответствующим образом подобранными математическим ожиданием и дисперсией.

Следствием этой теоремы выступают локальная и интегральная теоремы Муавра — Лапласа.

Локальная теорема Муавра — Лапласа. *Пусть производятся опыты в схеме Бернулли. Если число испытаний n стремится к бесконечности, то для вероятности* $P\{X = m\}$ *того, что число успехов X будет равно m, верно следующее предельное соотношение*:

$$P\{X = m\} \to \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(m),$$

где p — вероятность успеха в одном опыте, $q = 1 - p,\ \varphi(m) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{(m-np)^2}{2npq}}$.

Пример 17.12

Пусть проводится 100 независимых и одинаковых испытаний. Событие A может наступить в каждом из них с вероятностью 0,75. Найдем вероятность того, что оно произойдет в 80 случаях.

Решение

По условию $n = 100$, $p = 0{,}75$, $m = 80$, $q = 1 - p = 0{,}25$. Так как число опытов $n = 100$ и число успехов $m = 80$ достаточно велики, это делает неудобным использование формулы Бернулли, и так как вероятность успеха $p = 0{,}75$ не является маленькой и число $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}75 = 75$ также не мало, то становится некорректным использование формулы Пуассона. Применим локальную теорему Муавра — Лапласа.

Вычислим

$$\frac{m-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100\cdot 0,75}{\sqrt{100\cdot 0,75\cdot 0,25}}=\frac{5}{4,33}\approx 1,15.$$

По таблице $\varphi(1,15)=0,2059$. Искомая вероятность $P=\frac{1}{4,33}\cdot 0,2059\approx 0,0476.$

Интегральная теорема Муавра — Лапласа. *Пусть производятся опыты в схеме Бернулли. Если число испытаний n стремится к бесконечности, то для вероятности* $P\{m_1\le X\le m_2\}$ *того, что число успехов X заключается в интервале в пределах от* m_1 *до* m_2, *верно следующее предельное соотношение*:

$$P\{m_1\le X\le m_2\}\to\Phi\left(\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где p — вероятность успеха в одном испытании, $q=1-p$.

Пример 17.13

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,75. Найдем вероятность того, что событие появится не менее 65 и не более 80 раз.

Решение

По условию $n=100$, $p=0,75$, $q=1-p=0,25$, $m_1=65$, $m_2=80$.

Вычислим

$$\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{80-100\cdot 0,75}{\sqrt{100\cdot 0,75\cdot 0,25}}=\frac{5}{4,33}\approx 1,15;$$

$$\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{65-100\cdot 0,75}{\sqrt{100\cdot 0,75\cdot 0,25}}=\frac{-10}{4,33}\approx -2,31.$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ является нечетной функцией. Тогда

$$P=\Phi(1,15)-\Phi(-2,31)=\Phi(1,15)+\Phi(2,31).$$

По таблице функции Лапласа $\Phi(1,15)=0,3749$, $\Phi(2,31)=0,4895$. В результате получим $P=0,3749+0,4895=0,8644$.

17.4. Функции от случайных величин

Пусть X и Y — некоторые случайные величины. Если каждому возможному значению случайной величины X соответствует только одно возможное значение случайной величины Y, то Y называется *функцией случайного аргумента* X: $Y=\varphi(X)$.

Пусть известно распределение аргумента X. Как найти распределение функции $Y=\varphi(X)$?

1. X — дискретная случайная величина.

Если X — дискретная случайная величина, то она имеет ряд распределения

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

Для того чтобы построить ряд распределения случайной величины $Y = \varphi(X)$, следует записать в новой таблице вместо x_i новые возможные значения $y_i = \varphi(x_i)$. Затем, может быть, новый ряд придется упорядочить так, чтобы новые возможные значения $y_i = \varphi(x_i)$ были записаны в порядке возрастания. Может получиться так, что несколько одинаковых значений величины Y могут идти подряд. Тогда надо сложить все вероятности, которые соответствуют этим одинаковым значениям.

Пример 17.14

Пусть величина x имеет следующее распределение:

x_i	–2	–1	0	1	2	3
p_i	0,1	0,1	0,4	0,2	0,15	0,05

Найдем закон распределения величины $Y = X^2 - 2$.

Решение

Первая расчетная таблица распределения для случайной величины x^2 имеет вид

x_i^2	4	1	0	1	4	9
p_i	0,1	0,1	0,4	0,2	0,15	0,05

Упорядочим возможные значения в первой строке по возрастанию. Получим вторую расчетную таблицу:

x_i^2	0	1	1	4	4	9
p_i	0,4	0,2	0,1	0,15	0,1	0,05

Очевидно, что некоторые возможные значения повторятся (1 и 4). Сложим соответствующие им вероятности. В результате получим такой ряд распределения X^2:

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0,4	0,3	0,25	0,05

Итого получаем

y_i	–2	–1	2	7
p_i	0,4	0,3	0,25	0,05

2. X — непрерывная случайная величина.

Пусть X — непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, и $\varphi(x)$ — монотонная дифференцируемая функция. Рассмотрим случайную величину $Y = \varphi(X)$. Тогда плотность распределения $g(y)$ случайной величины Y можно найти по формуле

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(y)) \cdot \left|(\varphi^{-1}(y))'\right|,$$

где $\varphi^{-1}(y)$ — функция, обратная к $\varphi(x)$.

Пример 17.15

Пусть случайная величина X имеет плотность распределения $f(x) = x^5$. Найдем: а) плотность распределения случайной величины $Y = X^3$; б) $P\{0,3 < Y < 0,6\}$.

Решение

а) Функция $\varphi(x)=x^3$ является монотонно возрастающей, поэтому можно использовать формулу для нахождения плотности распределения Y. Обратная функция будет равна $\varphi^{-1}(y)=y^{\frac{1}{3}}$, ее производная $(\varphi^{-1}(y))'=\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}$. Поэтому $f(\varphi^{-1}(y))=y^{\frac{5}{3}}$.

В итоге получим $g(y)=f(\varphi^{-1}(y))\cdot\left|(\varphi^{-1}(y))'\right|=y^{\frac{5}{3}}\cdot\frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}=\frac{y}{3}$.

б) $P\{0{,}3<Y<0{,}6\}=\int\limits_{0{,}3}^{0{,}6}\frac{y}{3}dy=\frac{y^2}{6}\Big|_{0{,}3}^{0{,}6}=\frac{0{,}36-0{,}09}{6}\approx 0{,}04.$

17.5. Многомерные случайные величины

Совокупность двух случайных величин (X, Y), рассматриваемых совместно, называется *системой двух случайных величин* или *двумерным вектором*. На плоскости xOy систему двух случайных величин (X, Y) геометрически можно изобразить как случайную точку с координатами (X, Y) или как случайный вектор, направленный из начала координат в точку (X, Y). В трехмерном пространстве система трех случайных величин (X, Y, Z) изображается случайной точкой или случайным вектором. Система n случайных величин $(X_1, X_2, ..., X_n)$ изображается случайной точкой или случайным вектором в пространстве n измерений.

Двумерные случайные величины. *Функцией распределения* $F(x, y)$ *системы двух случайных величин* (X, Y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств: $X<x$ и $Y<y$: $F(x,y)=P(X<x, Y<y)$.

Геометрически $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрант с вершиной (x, y) (рис. 17.14).

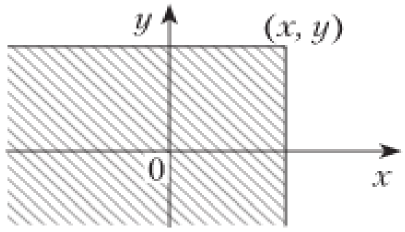


Рис. 17.14

Приведем *свойства* двумерной функции распределения.

1. $F(-\infty,-\infty)=F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=0.$

2. $F(+\infty,+\infty)=1.$

3. $F(x,+\infty)=F_1(x)$, $F(+\infty,y)=F_2(y)$, где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ — функции распределения случайных величин X и Y.

4. $F(x,y)$ — неубывающая функция своих аргументов.

Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, и включающий всю нижнюю и левую границы, но не включающий верхнюю и правую (рис. 17.15), выражается через функцию распределения $F(x, y)$ формулой

$$P((X,Y)\in D)=F(b,d)-F(a,d)-F(b,c)+F(a,c).$$

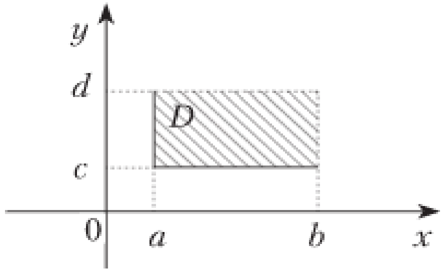


Рис. 17.15

Дискретные двумерные величины. Двумерная случайная величина (X, Y) называется дискретной, если каждая из случайных величин X и Y является дискретной. Если возможные значения случайной величины X — $x_1, ..., x_n$, а возможные значения случайной величины Y — $y_1, ..., y_m$, то двумерный случайный вектор (X, Y) может принимать только пары значений (x_i, y_j), $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$. Запишем это в виде таблицы:

$x_i \setminus y_j$	y_1	y_2	...	y_m	p_x
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	p_{x1}
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	p_{x2}
.	.	.	.	.	.
x_n	p_{n1}	p_{n2}		p_{nm}	p_{xm}
p_y	p_{y1}	p_{y2}		p_{ym}	1

На пересечении строки «x_i» и столбца «y_i» находится вероятность $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$ совместного осуществления событий $\{X = x_i\}$ и $\{Y = y_i\}$. В таблице добавляют еще строку p_y и столбец p_x. На пересечении столбца p_x со строкой x_i пишут $p_{xi} = p_{i1} + ... + p_{im}$. Но $p_{xi} = P\{X = x_i\}$. Таким образом, первый и последний столбцы таблицы задают распределение случайной величины X. Аналогично добавляют строку p_y. В строке p_y: $p_{yj} = p_{1j} + ... + p_{nj}$. Значит, первая и последняя строки задают распределение случайной величины Y. При этом осуществляется контроль: сумма элементов последней строки или последнего столбца должна равняться единице.

Функция распределения дискретного двумерного случайного вектора будет равна

$$F(x, y) = \sum_{i: x_i < x;\ j: y_j < y} p_{ij}.$$

Непрерывные двумерные случайные величины. *Непрерывной двумерной случайной величиной* (X, Y) называется такая двумерная случайная величина, функция распределения которой $F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}$ имеет вид $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f(u, v)\,du\,dv.$

Функция $f(x, y) = f_{xy}(x, y)$ называется *двумерной* или *совместной* плотностью распределения случайных величин X и Y.

Перечислим *свойства* совместной плотности распределения.

1. $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$ — совместная плотность распределения равна второй смешанной производной от функции распределения.

2. $f(x,y)\geq 0$ — неотрицательная функция.

3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=1$ — условие нормировки.

4. $P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ — вероятность попадания в двумерную область.

5. $P\{a_1<X<b_1, a_2<Y<b_2\}=\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2} f(x,y)dxdy$ — вероятность попадания в прямоугольник.

6. $P\{X=x, Y=y\}=0$ — вероятность попадания в точку.

7. $f_x(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy,\quad f_y(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$ — нахождение плотностей одномерных распределений компонент вектора по плотности совместного распределения.

Ковариация и корреляция случайных величин. Случайные величины (X, Y) называются *независимыми*, если их совместная функция распределения равна произведению одномерных функций распределения компонент: $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$.

Теорема 17.1. *Если (X, Y) — дискретный двумерный вектор, то его компоненты X и Y независимы тогда и только тогда, когда для любых возможных значений x_i и y_i выполняется равенство*

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\},$$

т.е. $p_{ij}=p_{xi}\cdot p_{yj}$. Если (X, Y) — непрерывный двумерный вектор, то его компоненты X и Y независимы тогда и только тогда, когда выполняется равенство $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, где $f(x, y)$ — совместная плотность распределения вектора (X, Y), $f_1(x)$ и $f_2(y)$ — плотности распределения компонент.

Пусть X и Y — это случайные величины, имеющие математическое ожидание и дисперсию. *Ковариацией* случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин $\dot{X}=X-MX$, $\dot{Y}=Y-MY$:

$$\operatorname{cov}(X,Y)=M(\dot{X}\cdot\dot{Y})=M((X-MX)(Y-MY)).$$

Для вычисления ковариации в зависимости от типа случайных величин используют формулу

$$\operatorname{cov}(X,Y)=\begin{cases}\sum\limits_{i,j}(x_i-MX)(y_j-MY)p_{ij}, \text{если } X \text{ и } Y \text{ дискретные}\\ \text{случайные величины,}\\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-MX)(y-MY)f_{xy}(x,y)dxdy, \text{если } X \text{ и } Y\\ \text{непрерывные случайные величины.}\end{cases}$$

Приведем *свойства* ковариации.

1. $\operatorname{cov}(X, X) = M(X - MX)^2 = DX$.

2. Если X и Y — независимые случайные величины и имеют математическое ожидание, то $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$.

3. Если $X_1 = a_1X + b_1, Y_1 = a_2Y + b_2$, то $\operatorname{cov}(X_1, Y_1) = a_1a_2 \operatorname{cov}(X, Y)$.

4. $-\sqrt{DX \cdot DY} \le \operatorname{cov}(X, Y) \le \sqrt{DX \cdot DY}$ $\left(\left|\operatorname{cov}(X, Y)\right| \le \sqrt{DX \cdot DY}\right)$.

5. $\operatorname{cov}(X, Y) = \pm\sqrt{DX \cdot DY}$ тогда и только тогда, когда X и Y линейно зависимы.

6. $\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - MX \cdot MY$.

Ковариация независимых случайных величин равна нулю. Но обратное неверно. Существуют зависимые случайные величины, ковариация которых также равна нулю.

Коэффициентом корреляции случайных величин X и Y называется число, определяемое выражением $\rho = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}}$.

Свойства коэффициента корреляции.

1. $\rho(X, X) = \dfrac{DX}{\sqrt{DX \cdot DX}} = 1$.

2. Если случайные величины X и Y независимы (и существуют $DX > 0$, $DY > 0$), то $\rho(X, Y) = 0$.

3. Пусть $X_1 = a_1X + b_1$, $Y_1 = a_2Y + b_2$, тогда $\rho(X_1, Y_1) = \pm\rho(X, Y)$, при этом знак «плюс» надо брать тогда, когда a_1 и a_2 имеют одинаковые знаки и «минус» — в противном случае.

4. $-1 \le \rho(X, Y) \le 1$ $\left(\left|\rho(X, Y)\right| \le 1\right)$.

5. $\rho(X, Y) = \pm 1$ тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y линейно зависимы.

Коэффициент корреляции ρ отражает степень линейной зависимости между случайными величинами X и Y. Если $\rho > 0$, то с возрастанием X случайная величина Y имеет тенденцию к увеличению. Если $\rho < 0$, то возрастание X влечет за собой уменьшение Y. Поэтому при $\rho > 0$ говорят о *положительной корреляционной зависимости* X и Y, при $\rho < 0$ — об *отрицательной*. Если $\rho = 0$, то случайные величины X и Y называются *некоррелированными*.

Для случайных величин, распределенных по нормальному закону, некоррелированность равносильна независимости.

Пример 17.16

Дано распределение случайного вектора (X, Y):

$x_i \setminus y_j$	-1	0	1
-1	0,25	0	0,25
0	0	0,25	0
1	0	0,25	0

Найдем:

а) ряды распределения случайных величин X и Y;

б) математические ожидания, дисперсии, ковариацию X и Y.

Выясним, зависимы ли случайные величины X и Y.

Решение

а) Ряд распределения компоненты X имеет вид

x_i	-1	0	1
p_i	0,5	0,25	0,25

Вероятности в нижней строке получаются из таблицы совместного распределения путем суммирования по строкам.

Ряд распределения компоненты Y имеет вид

y_j	-1	0	1
p_j	0,25	0,5	0,25

Вероятности в нижней строке получаются из таблицы совместного распределения путем суммирования по столбцам.

б) Сначала вычислим математические ожидания:

$$MX=(-1)\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{4};\ MY=(-1)\cdot\frac{1}{4}+0\cdot\frac{5}{8}+1\cdot\frac{3}{16}=-\frac{1}{4}.$$

Для нахождения ковариации используем формулу $\operatorname{cov}(X,Y)=M(XY)-MX\cdot MY$. Сначала найдем

$$M(XY)=\sum_{ij}x_iy_jp_{ij}=(-1)\cdot(-1)\cdot 0{,}25+(-1)\cdot 0\cdot 0+(-1)\cdot 1\cdot 0{,}25+0\cdot(-1)\cdot 0+$$
$$+0\cdot 0\cdot 0{,}25+0\cdot 1\cdot 0+1\cdot(-1)\cdot 0+1\cdot 0\cdot 0{,}25+1\cdot 1\cdot 0=0.$$

Получим $\operatorname{cov}(X,Y)=-\dfrac{1}{16}\neq 0$. Поэтому X и Y коррелированные и, следовательно, зависимые случайные величины (напоминаем, если случайные величины некоррелированные, то это не всегда означает их независимость).

Вопрос о зависимости X и Y можно было решить так: если они независимы, то $P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}$. Вычислим $P\{X=-1,Y=-1\}=0{,}25$. А затем найдем $P\{X=-1\}=0{,}5$ и $P\{Y=-1\}=0{,}25$. Получаем, что $0{,}25\neq 0{,}5\cdot 0{,}25$. Следовательно, X и Y — зависимые случайные величины.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие бывают случайные величины и чем они характеризуются?
2. Что такое математическое ожидание дискретной и непрерывной случайной величины? Каковы их свойства?
3. Что такое дисперсия и среднее квадратическое отклонение дискретной и непрерывной случайной величины? Каковы свойства дисперсии?
4. Что такое нормальный закон распределения и каковы его свойства?
5. Приведите формулу ковариации двух случайных величин.

Практикум по решению задач

Упражнение 17.1. Устройство состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном опыте равна 0,1. Составим закон распределения числа отказавших элементов в одном опыте.

Решение

Пусть дискретная случайная величина X — число отказавших элементов в одном опыте. X имеет такие возможные значения: $x_1=0$ — ни один из элементов устройства не отказал, $x_2 = 1$ — отказал один элемент, $x_3 = 2$ — отказали два элемента и $x_4 = 3$ — отказали три элемента. Отказы элементов независимы друг от друга, вероятности отказа каждого элемента равны между собой, поэтому можно использовать формулу Бернулли. По условию задачи $n = 3$, $p = 0{,}1$, $q = 1 - p = 0{,}9$, тогда получим

$$P_3(0) = q^3 = 0{,}9^3 = 0{,}729;\; P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}243;$$

$$P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9 = 0{,}027;\; P_3(3) = p^3 = 0{,}1^3 = 0{,}001.$$

Контроль: 0,729 + 0,243 + 0,027 + 0,001 = 1.

Биномиальный закон распределения случайной величины X имеет вид

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

Упражнение 17.2. Дискретная случайная величина X задана таблицей распределения

x_i	1	4	8
p_i	0,3	0,1	0,6

Найдем функцию распределения и построим график.

Решение

Если $x \le 1$, то $F(x) = 0$. Если $1 < x \le 4$, то $F(x) = 0{,}3$. Если $4 < x \le 8$, то $F(x) = 0{,}4$. Если $x > 8$, то $F(x) = 1$. Функция распределения может быть записана в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 1, \\ 0{,}3, \text{ если } 1 < x \le 4, \\ 0{,}4, \text{ если } 4 < x \le 8, \\ 1, \text{ если } x > 8. \end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 17.16.

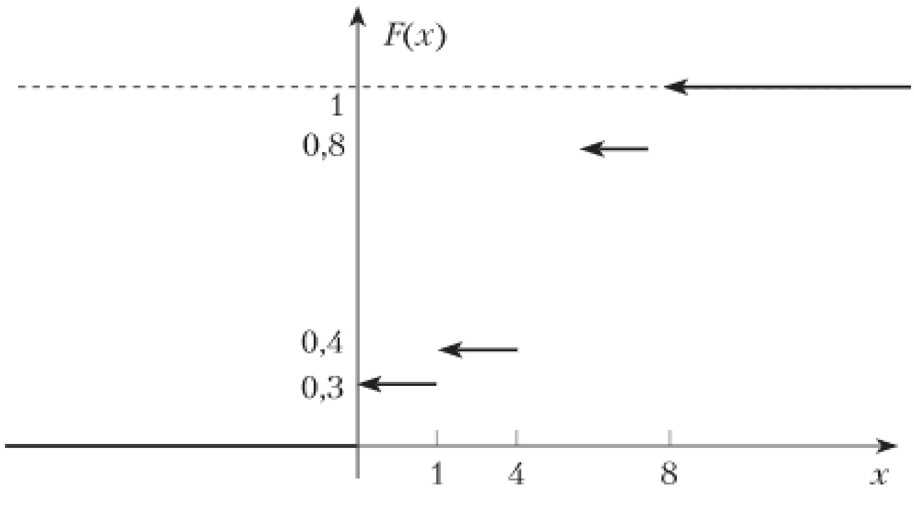


Рис. 17.16

Упражнение 17.3. Найдем математическое ожидание случайной величины X, если известен ее закон распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение

Математическое ожидание дискретной случайной величины ищем по формуле $MX = \sum_{1}^{3} x_k p_k = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9.$

Упражнение 17.4. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими законами распределения:

x_i	5	2	4
p_i	0,6	0,1	0,3

y_j	7	9
p_j	0,8	0,2

Найдем математическое ожидание произведения XY.

Решение

Найдем математическое ожидание каждой из случайных величин:

$$MX = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}3 = 4{,}4; \;\; MY = 7 \cdot 0{,}8 + 9 \cdot 0{,}9 = 7{,}4.$$

Случайные величины X и Y независимые, поэтому математическое ожидание $M(XY) = MX \cdot MY = 4{,}4 \cdot 7{,}4 = 32{,}56.$

Упражнение 17.5. Бросаются две игральные кости. Найдем математическое ожидание суммы числа очков, выпавших на обеих костях.

Решение

Пусть случайная величина X — это число очков, которое может выпасть на первой кости, а случайная величина Y — число очков, которое может выпасть на второй кости. Возможные значения этих величин 1, 2, 3, 4, 5, 6, и вероятность каждого из них — $\frac{1}{6}$. Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости: $MX = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}.$ Первая кость ничем не отличается от второй, поэтому $MY = \frac{7}{2}.$ Тогда $M(X+Y) = MX + MY = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7.$

Упражнение 17.6. Найдем дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,6	0,3

Решение

Сначала найдем математическое ожидание MX:

$$MX = 2 \cdot 0{,}1 + 3 \cdot 0{,}6 + 5 \cdot 0{,}3 = 3{,}5.$$

Затем запишем закон распределения случайной величины X^2:

x_i^2	4	9	25
p_i	0,1	0,6	0,3

Найдем математическое ожидание $M(X^2)$:

$$M(X^2) = 4 \cdot 0{,}1 + 9 \cdot 0{,}6 + 25 \cdot 0{,}3 = 13{,}3.$$

Тогда дисперсия будет равна

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = 13{,}3 - (3{,}5)^2 = 1{,}05.$$

Упражнение 17.7. Сравним дисперсии случайных величин, заданных законами распределения:

x_i	-1	1	2	3
p_i	0,48	0,01	0,09	0,042

y_j	-1	1	2	3
p_j	0,19	0,51	0,25	0,05

Решение

Возможные значения X и Y одинаковые. В результате вычислений получим, что математические ожидания случайных величин равны между собой: $MX = MY = 0{,}97$, а дисперсии разные — $DX \approx 3{,}69$, $DY \approx 1{,}21$, причем $DX > DY$. Этот результат можно было определить без вычислений, анализируя законы распределений случайных величин.

Упражнение 17.8. Случайные величины X и Y независимы. Найдем дисперсию случайной величины $Z = 3X + 2Y$, если известно, что $DX = 5$, $DY = 6$.

Решение

Случайные величины X и Y независимы, поэтому независимы также случайные величины $3X$ и $2Y$. Используя свойства дисперсии, получим

$$DZ = D(3X + 2Y) = 9DX + 4DY = 9 \cdot 5 + 4 \cdot 6 = 69.$$

Упражнение 17.9. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш 50 руб. и 10 выигрышей по 1 руб. Найдем закон распределения случайной величины X — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета. Найдем математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение X.

Решение

Запишем возможные значения случайной величины X — величины возможного выигрыша: $x_1 = 50$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$. Вероятности этих возможных значений такие: $p_1 = 0{,}01$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 1 - (p_1 + p_2) = 1 - 0{,}01 - 0{,}1 = 0{,}89$. Тогда закон распределения будет иметь вид

x_i	50	1	0
p_i	0,01	0,1	0,89

Математическое ожидание найдем по формуле $MX = \sum_k x_k p_k$. Тогда

$$MX = \sum_1^3 x_k p_k = 50 \cdot 0{,}01 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}89 = 0{,}6.$$

Дисперсию найдем по формуле

$$DX = \sum_1^3 x_i^2 p_i - (MX)^2 = 50^2 \cdot 0{,}01 + 1^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}89 - 0{,}6^2 = 24{,}74.$$

Среднее квадратическое отклонение будет равно $\sigma = \sqrt{DX} = \sqrt{24{,}74} = 4{,}97$.

Упражнение 17.10. Найдем математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ x, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $(0{,}5; 3)$.

Решение

Найдем плотность распределения:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, \\ 1, \text{ если } 0 < x \le 1, \\ 0, \text{ если } x > 1. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание по формуле для непрерывной случайной величины:

$$MX = \int_0^1 x \cdot 1 \cdot dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Вычислим дисперсию:

$$DX = \int_0^1 x^2 \cdot 1 \cdot dx - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Вероятность попадания в интервал ищется таким образом:

$$P\{0,5 < X < 3\} = F(3) - F(0,5) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Упражнение 17.11. Случайная величина X распределена по нормальному закону. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение этой величины соответственно равны 30 и 10. Найдем вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (10, 50).

Решение

По условию задачи $m = 30$, $\sigma = 10$, $\alpha = 10$, $\beta = 50$.

Тогда $P(10 < X < 50) = \Phi\left(\frac{50-30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10-30}{10}\right) = 2\Phi(2)$. По таблице функции Лапласа находим $\Phi(2) = 0,4772$. Отсюда $P(10 < X < 50) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544$.

Задачи для самостоятельного решения

17.1. Монета брошена 2 раза. Напишите закон распределения случайной величины X — числа выпадений «герба».

17.2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны две детали. Составьте закон распределения числа стандартных деталей среди отобранных.

17.3. Брокер купил на бирже 1000 одинаковых акций. Каждая акция может подешеветь с вероятностью 0,003. Найдите вероятность, что подешевеет:

а) более двух акций;

б) хотя бы одна акция.

Найдите среднее число подешевевших акций.

17.4. Вероятность сбить все кегли в кегельбане равна 0,4. Игрок получает приз, если он сбивает кегли с первой, второй или третьей попытки. Найдите вероятность того, что из 100 участников приз получат не более 2.

Указание. Сначала надо найти вероятность получения приза игроком.

17.5. Стрелок ведет стрельбу до первого попадания в мишень, имея неограниченный запас патронов. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что это событие произойдет: а) между 4 и 6 выстрелами включительно; б) до четвертого выстрела.

17.6. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, если известен ее закон распределения:

x_i	6	3	1
p_i	0,2	0,3	0,5

17.7. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -1, \\ \frac{x+1}{3}, \text{ если } -1 < x \le 2, \\ 1, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (0, 1).

17.8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 2,\\ \dfrac{x-2}{2}, \text{ если } 2<x\le 4,\\ 1, \text{ если } x>4.\end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, принадлежащее интервалу (2, 3).

17.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	2	6	10
p_i	0,5	0,4	0,1

Постройте график функции распределения этой величины.

17.10. Производится четыре выстрела с вероятностями попадания в мишень $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}5$, $p_4=0{,}7$. Найдите математическое ожидание общего числа попаданий.

17.11. Дискретные независимые случайные величины заданы законами распределения:

x_i	1	2
p_i	0,2	0,8

y_j	0,5	1
p_j	0,3	0,7

Найдите математическое ожидание произведения XY.

17.12. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения, указанными в задаче 17.11. Найдите математическое ожидание суммы $X+Y$.

17.13. Вероятность отказа детали за время испытания равна 0,2. Испытанию будут подвергнуты 10 деталей. Найдите математическое ожидание числа отказавших деталей.

17.14. Бросают две игральные кости. Найдите математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть.

17.15. Найдите математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

17.16. Найдите дисперсию и среднее квадратичное отклонение дискретной случайной величины X, заданной законом распределения

x_i	–5	2	3	4
p_i	0,4	0,3	0,1	0,2

17.17. Найдите дисперсию дискретной случайной величины X — числа появлений события A в двух независимых испытаниях, если вероятности появления события в этих испытаниях одинаковы и известно, что $MX=1{,}2$.

17.18. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 0,\\ x^2, \text{ если } 0<x\le 1,\\ 1, \text{ если } x>1.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал $(-1; 0{,}5)$.

17.19. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 1,\\ \dfrac{x^2-x}{2}, \text{ если } 1<x\le 2,\\ 1, \text{ если } x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию случайной величины и вероятность попадания в интервал (0; 1,5).

17.20. Интервал движения автобусов равен 10 мин. Пассажир приходит на остановку автобуса в случайный момент времени. Какова вероятность того, что он будет ждать автобус не более 3 мин?

17.21. Случайная величина X распределена равномерно на отрезке $[-1; 5]$. Найдите: а) вероятность попадания случайной величины X на отрезок $[0; 2]$; б) математическое ожидание и дисперсию X.

17.22. Случайная величина распределена по показательному закону с параметром 0,3. Найдите: а) вероятность попадания этой случайной величины в интервале $(1; 4)$; б) математическое ожидание и дисперсию этой случайной величины.

17.23. Случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)=ae^{-4x}$ при $x\ge 0$. Найдите: а) значение постоянной a; б) $P\{X>2\}$.

17.24. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайно величины X соответственно равны 10 и 2. Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

17.25. Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X соответственно равны 20 и 5. Найдите вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (15, 25).

17.26. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X равно $m=3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=2$. Напишите плотность вероятности X.

17.27. Напишите плотность вероятности нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $MX=3$, $DX=16$.

17.28. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/50}$. Найдите математическое ожидание и дисперсию X.

17.29. Дана функция распределения нормированного нормального закона $F(x)=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}dt$. Найдите плотность распределения $f(x)$. Запишите математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение.

Глава 18
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

18.1. Выборка и ее представление

Математическая статистика — это раздел математики, в котором изучаются методы сбора, систематизации и обработки результатов наблюдений массовых случайных явлений для выявления существующих закономерностей. *Задача* математической статистики — создание методов сбора и обработки статистических данных для получения практических выводов.

Генеральная совокупность — это множество всех изучаемых объектов или всевозможных результатов всех мыслимых наблюдений, производимых в одинаковых условиях над одним и тем же объектом.

Проводить сплошное обследование очень часто трудно, дорого или просто невозможно. Тогда из генеральной совокупности выбирают часть объектов — *выборочную совокупность* или *выборку* — и ее подвергают изучению. *Выборочный метод* — это метод статистического исследования, смысл которого состоит в том, что на основании исследования выборочной совокупности делается вывод о всей генеральной совокупности. Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности, для того чтобы по ней можно было верно судить о характеристиках генеральной совокупности. Поэтому необходимо, чтобы выборка была *репрезентативной* (*представительной*). Выборка будет репрезентативной, если все элементы генеральной совокупности будут иметь равную вероятность попасть в выборку. Таким образом, соблюдение случайности отбора — это условие создания репрезентативной выборки.

Вариационный и статистический ряды. *Выборочные значения* — это конкретные значения, полученные в результате наблюдений или отбора. Их обозначают $x_1, x_2, ..., x_n$. *Объем выборки* (n) — это число элементов в ней. *Вариационный ряд* выборки $x_1, x_2, ..., x_n$ — это упорядоченная по возрастанию перестановка элементов $x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)}$. Процедура упорядочивания выборки называется *ранжированием*, а номер элемента в вариационном ряду называется *рангом* этого элемента. *Размах* выборки — это разность между максимальным и минимальным элементом выборки $d = x_{\max} - x_{\min}$.

Если в выборке число x_1 встречается n_1 раз, число x_2 встречается n_2 раз, ..., число x_r встречается n_r раз, то значения x_i называется *вариантами*, а числа n_i называются *частотами* вариант x_i. Число $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ называется *относительной частотой* варианты. *Статистическим рядом выборки* называется перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот:

x_i	x_1	x_2	...	x_r
n_i	n_1	n_2	...	n_r

при этом $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$, или

x_i	x_1	x_2	...	x_r
w_i	w_1	w_2	...	w_r

тогда $\sum_{i=1}^{r} w_i = 1.$

Пример 18.1

В результате сбора некоторой статистической информации получены следующие данные: 3, 3, 5, 5, 5, 1, 1, 1, 1, 2. Построим вариационный и статистический ряды.

Решение

Вариационный ряд: 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 5, 5, 5.

Статистический ряд:

x_i	1	2	3	5
n_i	4	1	2	3

Статистический ряд может иметь дискретный характер (см. выше) и интервальный (непрерывный). Интервальный или группированный статистический ряд строится таким образом: весь размах выборки разбивается на некоторое число интервалов $[x_{i-1}, x_i)$, и интервалу соответствует частота, равная сумме частот элементов вариационного ряда, попавших в этот интервал.

При выборе числа интервалов, как правило (но не обязательно), используют правило Стерджеса: $r \approx 1 + 1{,}4 \ln n$. При выборе способа разбиения на интервалы, как правило (но не обязательно), выбирают интервалы одинаковой длины. Если варианта находится на границе интервала, то ее присоединяют к правому интервалу.

Пример 18.2 [8]

Дана выборка: 3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6. Построим ее интервальный статистический ряд.

Решение

Найдем объем выборки $n = 25$. По правилу Стерджеса найдем число интервалов: $1 + 1{,}4 \ln n = 1 + 1{,}4 \ln 25 \approx 5{,}51$. Число интервалов не может быть дробным числом, поэтому выбираем $r = 6$.

Построим вариационный ряд (ранжируем выборку): 2,9; 3,0; 4,2; 5,4; 7,3; 9,1; 9,9; 10,6; 11,2; 12,1; 12,2; 14,4; 16,8; 17,3; 18/,0; 18,3; 18,6: 20,0; 21,5; 25,0; 25,3; 26,7; 29,1; 29,6; 40,1.

Найдем размах выборки: $d = x_{\max} - x_{\min} = 40{,}1 - 2{,}9 = 37{,}2$.

Вычислим длину каждого интервала в статистическом ряду: $\Delta = \frac{d}{r} = \frac{37{,}2}{6} = 6{,}2.$

Строим интервальный статистический ряд:

$[a_{i-1}, a_i)$	[2,9; 9,1)	[9,1; 15,3)	[15,3; 21,5)	[21,4; 27,7)	[27,7; 33,9)	[33,9; 40,1)
n_i	5	7	6	4	2	1

От интервального статистического ряда можно перейти к дискретному таким образом: каждому частичному интервалу присваивается одна варианта (обычно это середина интервала) с соответствующей частотой:

z_j	6	12,2	18,4	24,6	30,8	37
n_i	5	7	6	4	2	1

Полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения. *Полигоном частот* называют ломаную, вершинами которой являются точки с координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$, где x_i — варианты; n_i — соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называют ломаную, вершинами которой являются точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), ..., (x_k, w_k)$, где x_i — варианты; $_{wi}$ — соответствующие им относительные частоты.

Полигон частот следует строить для дискретных статистических рядов.

Для интервальных статистических рядов строят гистограммы. Весь интервал, в который входят все выборочные значения, разбивается на некоторое число частичных интервалов длины h. Затем находят n_i — сумму частот вариант, попавших в i-й интервал. *Гистограммой частот* называют ступенчатую фигуру из прямоугольников, таких что основанием каждого прямоугольника является частичный интервал длины h, а высота прямоугольника равна отношению $\dfrac{n_i}{h}$ (плотность частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h \cdot \dfrac{n_i}{h} = n_i$, т.е. равна сумме частот вариант, попавших в этот интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т.е. объему выборки n.

Аналогично дается определение гистограммы относительных частот. *Гистограммой относительных частот* (эмпирической плотностью распределения) называют ступенчатую фигуру из прямоугольников, таких что основанием каждого прямоугольника является частичный интервал длины h, а высота равна отношению $\dfrac{w_i}{h}$ (плотность относительной частоты). Площадь частичного i-го прямоугольника равна $h \cdot \dfrac{w_i}{h} = w_i$ — относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал. Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т.е. единице.

Гистограмма относительных частот служит оценкой плотности распределения генеральной совокупности.

Пример 18.3

Построим гистограмму частот по данному распределению выборки объема 100:

Номер интервала i	Частичный интервал $x_{i-1} - x_i$	Сумма частот вариант интервала n_i	Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$
1	5—9	12	3
2	9—13	20	5
3	13—17	48	12
4	17—21	16	4
5	21—25	8	2

Решение

Отложим по оси абсцисс заданные интервалы длины $h = 4$. Построим над этими интервалами отрезки, параллельные оси абсцисс и находящиеся от нее на расстояниях, равных соответственно плотностям частоты $\frac{n_i}{h}$. Например, над интервалом (1, 5) построим отрезок, параллельный оси абсцисс, на расстоянии $\frac{n_1}{h} = \frac{12}{4} = 3$. Аналогично строятся все остальные отрезки (рис. 18.1).

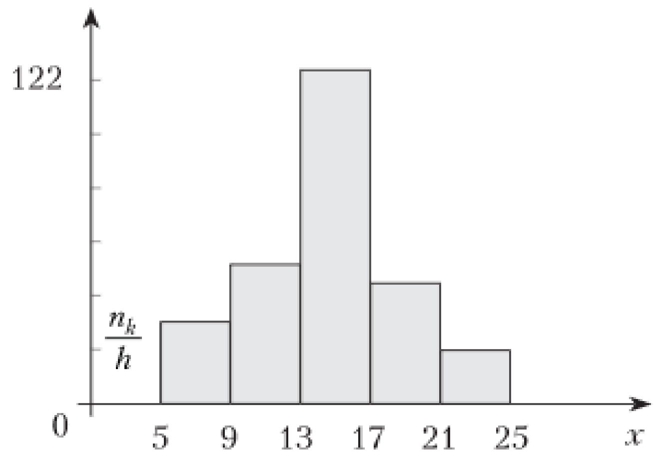


Рис. 18.1

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называется функция $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x — это *накопленная частота* — число вариант выборки, которые меньше x.

Если есть дискретный статистический ряд, то эмпирическую функцию распределения можно построить, используя формулу

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x < x_{\min}, \\ \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{i} n_k, \text{ если } x_{\min} \le x < x_{\max}, \\ 1, \text{ если } x \ge x_{\max}. \end{cases}$$

Типичный вид функции $F^*(x)$ приведен на рис. 18.2.

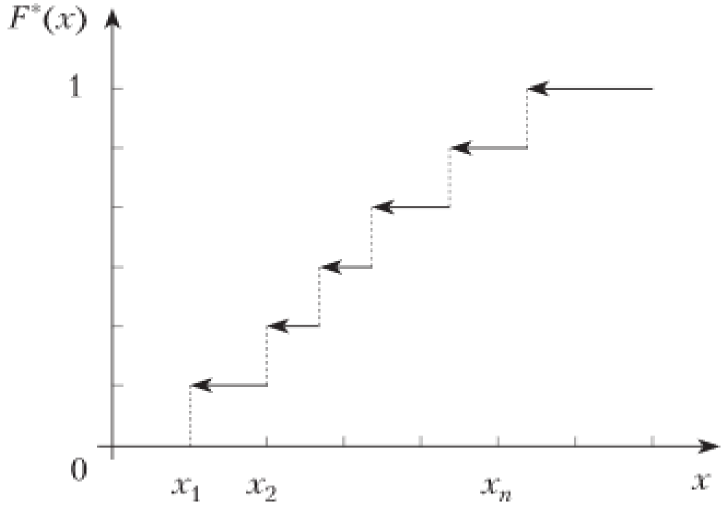


Рис. 18.2

Эмпирическая функция распределения используется для приближенного представления теоретической функции распределения генеральной совокупности.

Пусть известно, что генеральная совокупность имеет непрерывное распределение. Тогда для группированных выборок из такой генеральной совокупности используются графики эмпирической функции в виде ломаной с вершинами в точках $(x_i, F^*(x_i))$, так что эмпирическая функция линейно растет на каждом интервале (это согласуется с представлением о равномерном распределении частот внутри интервала). Такая функция (рис. 18.3) называется *кумулятивной кривой* (*кумулятой*).

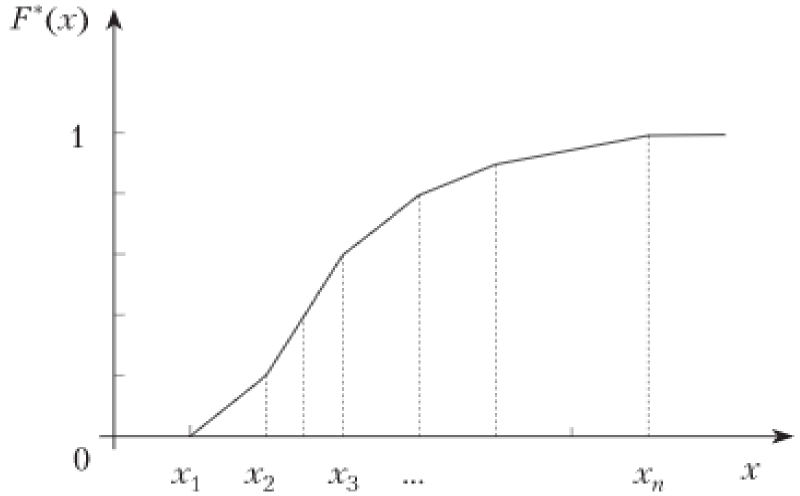


Рис. 18.3

Пример 18.4

Дана выборка: 60, 75, 100, 120, 75, 30, 100, 120, 60, 30, 45, 100, 45, 100, 60, 75, 30, 100, 100, 120, 60, 75, 60, 120, 45, 60, 75, 60, 100, 100.

Построим полигон частот и график эмпирической функции распределения.

Решение

Полигон частот строится на данных о частотах n_i (рис. 18.4).

График эмпирической функции распределения приведен на рис. 18.5.

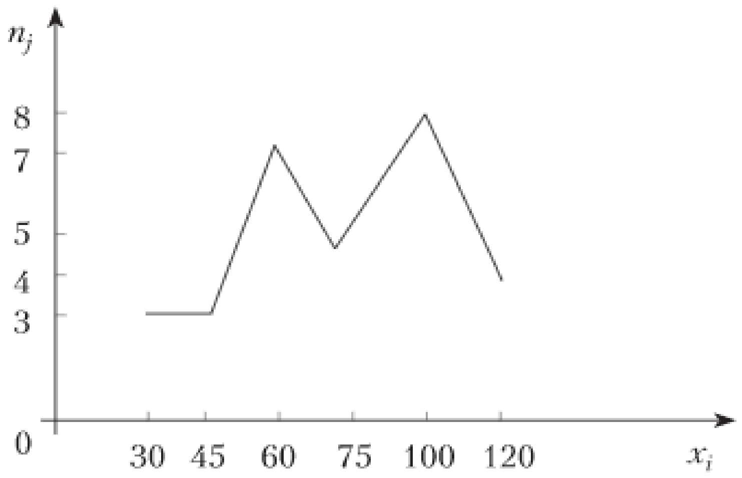


Рис. 18.4

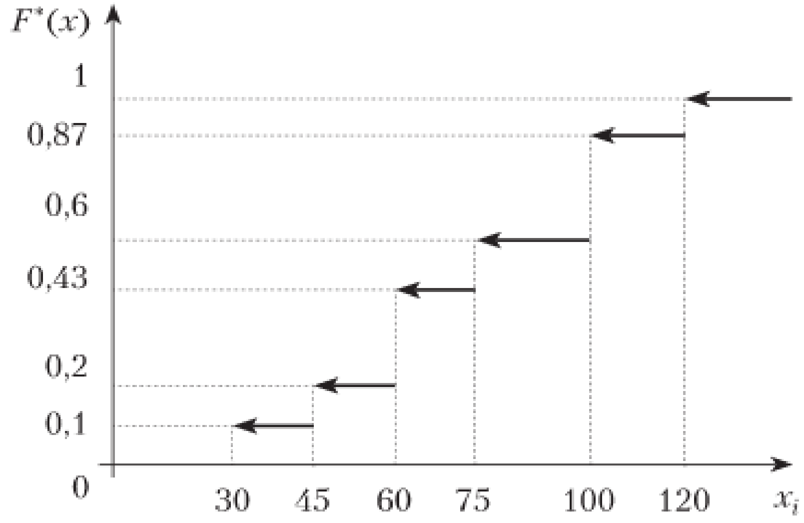


Рис. 18.5

18.2. Выборочные числовые характеристики

Выборочные (*эмпирические*) *числовые характеристики* — это приближенные значения соответствующих характеристик генеральной совокупности, найденные по выборке $x_1, x_2, ..., x_n$.

Любая функция элементов выборки называется *статистикой*.

Выборочное среднее (*выборочное математическое ожидание*) — это среднее арифметическое результатов наблюдений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Выборочное среднее дает приближенное значение математического ожидания $M(X)$ генеральной совокупности (его точечную оценку).

Для дисперсии генеральной совокупности $D(X)$ приближенным значением (оценкой) служит *выборочная дисперсия*, определяемая по формуле

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Для расчетов более удобной является следующая формула:

$$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2.$$

Величина $\tilde{S} = \sqrt{\tilde{S}^2}$ — *выборочное среднее квадратическое отклонение* — дает приближенное значение для среднего квадратического отклонения генеральной совокупности.

Используется также *уточненная* (*исправленная*) *выборочная дисперсия*

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

При этом $S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2$. Величина $S = \sqrt{S^2}$ называется *исправленным выборочным средним квадратическим отклонением*.

18.3. Точечные оценки

Характеристики генеральной совокупности обычно неизвестны. Задача заключается в их оценке по характеристикам выборки.

Характеристики генеральной совокупности называются *параметрами*, а характеристики выборки — *оценками*.

Пусть искомый параметр генеральной совокупности равен θ_0, а на основе выборки объема n определяется его оценка θ.

Точечной оценкой θ параметра θ_0 называется числовое значение этого параметра, полученное по выборке, т.е. $\theta_0 \approx \theta$.

Для того чтобы выборочная оценка давала хорошее приближение оцениваемого параметра, она должна удовлетворять определенным требованиям: несмещенности, эффективности и состоятельности.

Несмещенность оценок. Оценка θ называется *несмещенной*, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру θ_0 при любом объеме выборки, т.е. $M(\theta) = \theta_0$. Если это не так, то оценка называется *смещенной*, а разность $M(\theta) - \theta_0$ — *смещением*.

Требование несмещенности гарантирует отсутствие систематических ошибок при оценивании.

Выборочная средняя $\overline{x}$ является несмещенной оценкой генеральной средней m, так как $M(\overline{x}) = m$.

Выборочная дисперсия $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ является смещенной оценкой генеральной дисперсии $D(X)$, при этом $M(\tilde{S}^2) = \frac{n-1}{n}D(X)$.

В качестве несмещенной оценки генеральной дисперсии используется исправленная (уточненная) выборочная дисперсия: $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, для которой $M(S^2) = D(X)$.

Эффективность оценок. Несмещенная оценка θ называется *эффективной*, если она имеет минимальную дисперсию по сравнению с другими выборочными оценками.

Выборочная средняя $\overline{x}$ является эффективной оценкой генеральной средней m, так как имеет наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок.

Состоятельность оценок. Оценка θ называется *состоятельной*, если при $n \to \infty$ она сходится по вероятности к оцениваемому параметру θ_0, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P(|\theta - \theta_0| < \varepsilon) = 1.$$

Иначе говоря, состоятельной называется такая оценка, которая дает точное значение для большой выборки.

Выборочная средняя $\overline{x}$ является состоятельной оценкой генеральной средней m.

Пример 18.5

В таблице приведено распределение работников предприятия по возрасту:

Число лет	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
Число работников	20	30	25	15	10

Найдем выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию.

Решение

Перейдем от интервального распределения к дискретному. В качестве варианты возьмем середину соответствующего интервала:

Число лет	25	35	45	55	65
Число работников	20	30	25	15	10

Выборочная средняя ищется по формуле $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i$. Поэтому

$$\overline{x} = \frac{1}{100}(20\cdot 25 + 30\cdot 35 + 25\cdot 45 + 15\cdot 55 + 10\cdot 65) = 41{,}5.$$

Для нахождения исправленной выборочной дисперсии используем формулу $S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2$, где $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{x}^2$ — выборочная дисперсия. Получим

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 = \frac{20\cdot 25^2 + 30\cdot 35^2 + 25\cdot 45^2 + 15\cdot 55^2 + 10\cdot 65^2}{100} = 1875;$$

$\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_i x_i^2 - \overline{x}^2 = 1875 - 1722{,}25 = 152{,}75$ — выборочная дисперсия;

$S^2 = \frac{n}{n-1}\tilde{S}^2 = \frac{100}{99}\cdot 152{,}75 = 154{,}29$ — исправленная (уточненная) выборочная дисперсия.

18.4. Интервальные оценки

Прежде, чем рассматривать понятие интервальной оценки, введем ряд определений и рассмотрим некоторые распределения, используемые в математической статистике.

Число степеней свободы — это количество значений, которые могут свободно изменяться после того, как по выборке было вычислено значение статистики.

Квантиль — это значение, которое данная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью, т.е. α-квантиль (квантиль уровня α) случайной величины X с функцией распределения $F(x) = P\{X < x\}$ — это число x_α, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) $F(x_\alpha) \le \alpha$;

2) $F(x_\alpha + 0) \ge \alpha$.

Если функция распределения $F(x)$ является непрерывной строго монотонной функцией, то для любого числа $\alpha \in (0;1)$ существует единственный квантиль x_α, который можно однозначно найти из уравнения $F(x_\alpha) = \alpha$, т.е. через функцию, обратную к функции распределения: $x_\alpha = F^{-1}(\alpha)$.

Интервальной называется оценка, определяющая числовой интервал $(\theta - \varepsilon; \theta + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, в который входит оцениваемый параметр θ_0, т.е. $\theta - \varepsilon < \theta_0 < \theta + \varepsilon$, или $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$.

Доверительным интервалом называют интервал $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$, в котором с заданной вероятностью γ заключен неизвестный параметр θ_0. Вероятность γ называется *доверительной вероятностью* или *надежностью*, т.е. $P(|\theta - \theta_0| < \varepsilon) = \gamma$.

Уровнем значимости α называется вероятность $P(|\theta - \theta_0| > \varepsilon) = \alpha$, где $\alpha = 1 - \gamma$.

Хи-квадрат распределение. Пусть случайные величины Z_1, ..., Z_n независимы и имеют стандартное нормальное распределение: $Z_i \sim N(0,1)$, $i = 1, ..., n$. Введем случайную величину X: $X = \sum\limits_1^n Z_i^2$. Тогда случайная величина X имеет распределение хи-квадрат с n степенями свободы: $X = \sum\limits_1^n Z_i^2 \sim \chi_n^2$.

Распределение Стьюдента. Пусть случайная величина Z имеет стандартное нормальное распределение: $Z \sim N(0,1)$, случайная величина X имеет распредение хи-квадрат с n степенями свободы: $X \sim \chi_n^2$, а также эти случайные величины Z и X независимы, тогда случайная величина $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{X}{n}}}$ имеет распределение Стьюдента, или t-распределение, с n степенями свободы: $T = \dfrac{N(0,1)}{\sqrt{\dfrac{\chi_n^2}{n}}} \sim t_n$.

Распределение Фишера — Снедекора. Пусть случайная величина X_1 имеет распределение хи-квадрат с n_1 степенями свободы, а случайная величина X_2 имеет распределение хи-квадрат с n_2 степенями свободы, тогда случайная величина $F = \dfrac{X_1 / n_1}{X_2 / n_2}$ имеет распределение Фишера — Снедекора с n_1 и n_2 степенями свободы: $F = \dfrac{\chi^2_{n_1} / n_1}{\chi^2_{n_2} / n_2} \sim F_{n_1;n_2}$.

Рассмотрим *вычисление доверительных интервалов*.

1. Доверительный интервал для математического ожидания нормально распределенной случайной величины.

А. Дисперсия известна.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности с известной дисперсией σ^2, доверительная вероятность γ.

Искомый доверительный интервал имеет вид $\left(\overline{x} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, где $\overline{x}$ — точечная оценка математического ожидания, а число z определяется из равенства $\Phi(z) = \dfrac{\gamma}{2}$. По таблице функции Лапласа находят аргумент z, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\dfrac{\gamma}{2}$.

Б. Дисперсия неизвестна.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности, доверительная вероятность γ.

Искомый доверительный интервал имеет вид $\left(\overline{x} - t_\gamma\dfrac{S}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_\gamma\dfrac{S}{\sqrt{n}}\right)$, где $\overline{x}$ и S определяются по выборке. По табл. П3 приложения по заданным n и γ можно найти t_γ (это квантили распределения Стьюдента).

Пример 18.6

Найдем доверительный интервал с доверительной вероятностью $\gamma = 0,95$ для математического ожидания нормально распределенной случайной величины, если по выборке объема $n = 50$, найдено выборочное среднее $\overline{x} = 8$. Дисперсия случайной величины:

1) известна и равна 1,69;

2) неизвестна, но по выборке найдена уточненная выборочная дисперсия $S^2 = 1,69$.

Решение

1) Известно $n = 50$, $\overline{x} = 8$, $\sigma^2 = 1,69$, $\gamma = 0,95$. По условию $\Phi(z) = \dfrac{0,95}{2} = 0,475$. По таблицам функции Лапласа найдем z, поэтому $z = 1,96$. Тогда $z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96\dfrac{1,3}{\sqrt{50}} \approx 0,36$.

Левая граница доверительного интервала $\overline{x} - z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8 - 0,36 = 7,64$. Правая граница доверительного интервала $\overline{x} + z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 8 + 0,36 = 8,36$. Таким образом, с вероятностью 0,95 математическое ожидание находится в интервале $(7,64; 8,36)$.

2) Известно $n = 50$, $\overline{x} = 8$, $S^2 = 1,69$, $\gamma = 0,95$. По известным n и γ по табл. П3 приложения найдем t_γ: $t_{0,95} = 2,009$. Тогда $t_\gamma\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 2,009\dfrac{1,3}{\sqrt{50}} \approx 0,37$.

Левая граница доверительного интервала $\overline{x} - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 8 - 0,37 = 7,63$. Правая граница доверительного интервала $\overline{x} + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} = 8 + 0,37 = 8,37$. Таким образом, с вероятностью 0,95 математическое ожидание находится в интервале $(7,63; 8,37)$.

---

2. Доверительный интервал для дисперсии нормально распределенной случайной величины.

А. Математическое ожидание известно.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности с известным математическим ожиданием m, доверительная вероятность γ.

Искомый доверительный интервал $\left(\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}\right)$, где $S^2 = \frac{1}{n-1} \times$ $\times \sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$, числа $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ находятся по табл. П4 приложения (это квантили хи-квадрат распределения с n степенями свободы).

Б. Математическое ожидание неизвестно.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности, доверительная вероятность γ.

Искомый доверительный интервал $\left(\frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$, где $S^2 = \frac{1}{n-1} \times$ $\times \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ — исправленная выборочная дисперсия, числа $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ находятся по табл. П4 приложения (это квантили хи-квадрат распределения с $n - 1$ степенями свободы).

Пример 18.7

Дана выборка 10 значений случайной величины: 5,4; 15; –23; –7,4; 6,9; 12,5; –8,2; 3,4; –10,5; 6. Известно, что случайная величина имеет нормальный закон распределения с нулевым математическим ожиданием. Найдем 90%-ный доверительный интервал для дисперсии случайной величины.

Решение

По условию математическое ожидание известно и равно 0: $m = 0$. Тогда

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 = \frac{1}{9}(5,4^2 + 15^2 + 23^2 + 7,4^2 + 6,9^2 + 12,5^2 + 8,2^2 + 3,4^2 + 10,5^2 + 6^2) =$$

$$= \frac{1266,89}{9} \approx 140,76;$$

$$nS^2 = 10 \cdot 140,76 = 1407,6;$$

$$\alpha = 1 - \gamma = 1 - 0,9 = 0,1;$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,1}{2} = 0,05.$$

По табл. П4 приложения $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) = \chi^2_{0,95}(10) = 18,31$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n) = \chi^2_{0,05}(10) - 3,94$.

Левая граница доверительного интервала $\dfrac{n \cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} = \dfrac{1407,6}{18,31} \approx 76,88.$

Правая граница доверительного интервала $\dfrac{n \cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)} = \dfrac{1407,6}{3,94} \approx 351,26.$ Таким образом, с вероятностью 0,9 неизвестная дисперсия находится в интервале $(74,88; 351,26)$.

3. Доверительный интервал для параметра p биномиального распределения.

Дано: n — число опытов, проводимых по схеме Бернулли, k — число успехов в схеме Бернулли, доверительная вероятность γ.

Искомый доверительный интервал $\left(\hat{p} - z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$, где $\hat{p} = \dfrac{k}{n}$ — точечная оцнка параметра p, число z определяется из равенства $\Phi(z) = \dfrac{\gamma}{2}$. По таблице функции Лапласа находят аргумент z, которому соответствует значение функции Лапласа, равное $\dfrac{\gamma}{2}$.

Пример 18.8

Найдем 8доверительный интервал с доверительной вероятностью 0,9 для вероятности того, что турист вовремя приедет в аэропорт, если известно, что из 100 туристов вовремя приезжают в аэропорт 90 человек.

Решение

Имеем

$$\hat{p} = \frac{k}{n} = \frac{90}{100} = 0,9; \quad \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n} = \frac{0,9 \cdot 0,1}{100} = 0,0009; \quad \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \sqrt{0,0009} = 0,03; \quad \gamma = 0,9.$$

По условию $\Phi(z) = \dfrac{0,9}{2} = 0,45.$ По таблицам функции Лапласа найдем z, поэтому $z = 1,65$ и $z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 1,65 \cdot 0,03 = 0,0495.$

Левая граница доверительного интервала $\hat{p} - z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,9 - 0,0495 = 0,8505.$

Правая граница доверительного интервала $\hat{p} + z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0,9 + 0,0495 = 0,9495.$ Таким образом, с вероятностью 0,9 вероятность успеха p находится в интервале (0,8505; 0,9495).

18.5. Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется гипотеза о виде неизвестного распределения или о неизвестных параметрах известных распределений. Исходное предположение (*нулевая* гипотеза) обозначается H_0. Противоречащую ей гипотезу называют *альтернативной* или *конкурирующей* и обозначают H_1. *Уровень значимости* α задает вероятность отклонить гипотезу H_0, когда она в действительности верна.

Статистическим критерием называется случайная величина, которая служит для проверки гипотезы. В качестве статистического критерия выбирается такая случайная величина (обозначим ее K), точное или приближенное распределение которой известно.

Наблюдаемым или *выборочным значением* $K_{\text{набл}} = K_{\text{в}}$ называется значение критерия, вычисленное по данным выборки.

Множество значений критерия K разбивают на две непересекающиеся области: критическую область и область принятия гипотезы. *Критической областью* называется совокупность значений критерия, при которых H_0 отвергается. *Областью принятия гипотезы* называется совокупность значений критерия, при которых H_0 принимается. *Критическими точками* $K_{\text{кр}}$ называются точки, отделяющие критическую область и область принятия гипотезы. Критические точки определяются по таблицам известного распределения выбранного критерия K при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы υ.

Сравнивая $K_{\text{набл}}$ и $K_{\text{кр}}$, можно принять или отвергнуть нулевую гипотезу.

В результате принятия определенного решения возможны четыре варианта — два верных и два ошибочных:

Гипотеза H_0	Принимается	Отвергается
Верна	$p = 1 - \alpha$	Ошибка 1-го рода $p = \alpha$
Не верна	Ошибка 2-го рода $p = \beta$	$p = 1 - \beta$

Величина $1 - \beta$ называется *мощностью критерия*.

Статистические гипотезы относительно неизвестного истинного значения параметра θ называются *параметрическими*.

Пусть имеется выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из генеральной совокупности X, плотность распределения которой $f(x, \theta)$ зависит от неизвестного параметра θ. Рассмотрим одну из наиболее часто встречающихся параметрических гипотез.

Проверка гипотезы о числовом значении математического ожидания нормального распределения.

А. При известной дисперсии.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности с известной дисперсией σ^2; возможное значение математического ожидания m_0; уровень значимости α.

Пусть основная гипотеза H_0: $m = m_0$. Конкурирующая гипотеза H_1: $m \neq m_0$.

Выборочное значение статистики вычисляется по формуле

$$t_{\text{в}} = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n},$$

где $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$.

Критическое значение статистики вычисляется по формуле $t_{\text{кр}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}}$,

где $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль уровня $1 - \frac{\alpha}{2}$ нормального распределения.

Гипотеза H_0: $m = m_0$ принимается, если выполняется неравенство $|t_{\text{в}}| \le t_{\text{кр}}$.

Б. При неизвестной дисперсии.

Дано: выборка $x_1, x_2, ..., x_n$ из нормально распределенной генеральной совокупности; возможное значение математического ожидания m_0; уровень значимости α.

Основная гипотеза H_0: $m = m_0$, конкурирующая гипотеза H_1: $m \ne m_0$.

Выборочное значение статистики вычисляется по формуле

$$t_{\text{в}} = \frac{\overline{x} - m_0}{S}\sqrt{n},$$

где $S = \sqrt{S^2}$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$.

Критическое значение статистики вычисляется по формуле

$$t_{\text{кр}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1),$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента уровня $1 - \frac{\alpha}{2}$ с $n - 1$ степенями свободы.

Гипотеза H_0: $m = m_0$ принимается, если выполняется неравенство $|t_{\text{в}}| \le t_{\text{кр}}$.

Пример 18.9

На бирже продаются и покупаются акции. Брокер может купить акции по цене не более 43 ден. ед. за одну. Было куплено 50 акций по средней цене 42,972 ден. ед. Известно, что цена акции имеет нормальное распределение с известной дисперсией $\sigma^2 = 0{,}01$. Можно ли на основании этих данных сделать вывод о том, что на уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ покупка обеспечивает заданную цену?

Решение

Имеем $m_0 = 43$, $\overline{x} = 42{,}972$, $\sigma^2 = 0{,}01$, $n = 50$, $\alpha = 0{,}05$.

Проверяем гипотезу H_0: $m = m_0$, конкурирующая гипотеза H_1: $m \ne m_0$. Найдем наблюдаемое (выборочное) значение статистики:

$$t_{\text{в}} = \frac{\overline{x} - m_0}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{42{,}972 - 43}{0{,}1}\sqrt{50} \approx -1{,}98.$$

Критическое значение статистики $t_{\text{кр}} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}975} = 1{,}96$. Так как $|t_{\text{в}}| = 1{,}98 >$ $> t_{\text{кр}} = 1{,}96$, то гипотеза H_0: $m = m_0$ отвергается.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое генеральная совокупность?
2. Что такое вариационный ряд?
3. Что такое эмпирическая функция распределения?
4. Что такое выборочная средняя? Что такое выборочная дисперсия?
5. Какая оценка параметра закона распределения называется несмещенной, а какая состоятельной?
6. Что такое доверительный интервал?
7. Опишите, в чем состоит принцип проверки статистических гипотез.

Практикум по решению задач

Упражнение 18.1. По данной выборке $\{9; 12; -4; 3; 6; 12; -4; 12; 9; -4\}$ построим вариационный и статистический ряды, а также эмпирическую функцию распределения.

Решение

Объем выборки равен 10. Для построения вариационного ряда следует упорядочить результаты наблюдений в порядке возрастания:

Вариационный ряд:	–4	–4	–4	3	6	9	9	12	12	12

Для построения статистического ряда составим следующую таблицу: в верхней строке — варианты, во второй — соответствующие им частоты:

i	1	2	3	4	5
x_i	–4	3	6	9	12
n_i	3	1	1	2	3

Строим эмпирическую функцию распределения:

i	0	1	2	3	4	5
Диапазон x	$(-\infty; -4]$	$(-4; 3]$	$(3; 6]$	$(6; 9]$	$(9; 12]$	$(12; +\infty]$
$\sum n_j$	0	3	4	5	7	10
F_i^*	0	0,3	0,4	0,5	0,8	1

Эмпирическая функция распределения будет иметь вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -4, \\ 0{,}3, \text{ если } -4 < x \le 3, \\ 0{,}4, \text{ если } 3 < x \le 6, \\ 0{,}5, \text{ если } 6 < x \le 9, \\ 0{,}7, \text{ если } 9 < x \le 12, \\ 1, \text{ если } x > 12. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения представлен на рис. 18.6.

Упражнение 18.2. Найдем точечную оценку дисперсии генеральной совокупности для данной выборки:

x_i	–2	–1	0	1	2
n_i	2	1	1	3	3

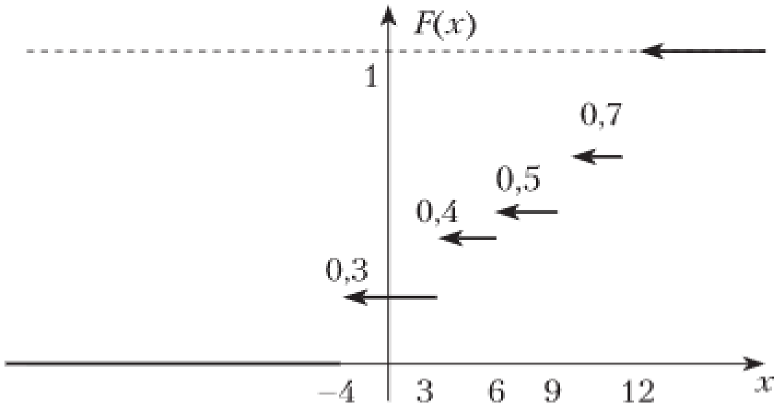


Рис. 18.6

Решение

Точечная оценка дисперсии будет равна исправленной выборочной дисперсии. Найдем выборочное среднее по формуле

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i=\frac{1}{10}(-2\cdot2+(-1)\cdot1+1\cdot3+2\cdot3)=0,4.$$

Выборочная дисперсия будет равна $\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i^2-\overline{x}^2$. Сначала вычислим

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i^2=\frac{2\cdot(-2)^2+1\cdot(-1)^2+1\cdot0^2+3\cdot1^2+3\cdot2^2}{10}=2,4.$$

Имеем $\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i^2-\overline{x}^2=2,4-(0,4)^2=2,24$. Поэтому точечная оценка дисперсии

$$S^2=\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2=\frac{10}{9}\cdot2,24=2,49.$$

Упражнение 18.3. Найдем интервальные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности для данных результатов обработки выборки. Уровень значимости $\alpha=0,05$, $n=26$, $\sum_{i=1}^{n}n_ix_i=26$, $\sum_{i=1}^{n}n_ix_i^2=676$.

Решение

Интервальная оценка математического ожидания при неизвестной дисперсии ищется по формуле $\left(\overline{x}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}},\overline{x}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$. Найдем выборочное среднее: $\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i=$ $=\frac{1}{26}26=1$. Выборочная дисперсия $\tilde{S}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_ix_i^2-\overline{x}^2=\frac{1}{26}\cdot676-1^2=25$. Исправленная выборочная дисперсия $S^2=\frac{n}{n-1}\tilde{S}^2=\frac{26}{25}\cdot25=26$. Вычислим $\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{S^2}{n}}=\sqrt{\frac{26}{26}}=1$, $\gamma=1-\alpha=1-0,05=0,95$. По таблице распределения Стьюдента при n = 26 найдем $t_\gamma=t_{0,95}=1,7056$. Тогда $t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}=1,7056$. Левая граница доверительного интервала $\overline{x}-t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}=1-1,7056=-0,7056$. Правая граница доверительного интервала $\overline{x}+t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}=1+1,7056=2,7056$.

Теперь найдем доверительный интервал для дисперсии при неизвестном математическом ожидании. Используем формулу $\left(\dfrac{n\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \dfrac{n\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$. Числа $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ находятся по табл. П4 приложения. Найдем $\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{0,05}{2}=0,025$, $1-\dfrac{\alpha}{2}=1-0,025=0,975$, $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0,975}(25)=40,65$, $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0,025}(25)=13,12$.

Левая граница доверительного интервала $\dfrac{n\cdot S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\dfrac{26\cdot 26}{40,65}\approx 16,63$. Правая граница доверительного интервала $\dfrac{n\cdot S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=\dfrac{26\cdot 26}{13,12}\approx 51,52$.

Таким образом, с вероятностью 0,95 получены следующие точечные и интервальные оценки: $\hat{M}(X)=1$; $M(X)]\in(-0,7056; 2,7056)$; $\hat{D}(X)=26; D(X)]\in \in$ (16,63; 51,52).

Упражнение 18.4. Для данного интервального статистического ряда заполним таблицу относительных частот группированной выборки, построим гистограмму приведенных относительных частот w_i / Δ.

i	$x_{i-1}\le x\le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	13—15	6			
2	15—17	6			
3	17—19	4			
4	19—21	7			
5	21—23	5			
6	23—25	6			
7	25—27	6			

Решение

Объем выборки — 40. В нашей задаче $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = 2$. Последовательно заполняем столбцы таблицы. Четвертый столбец:

i	$x_{i-1}\le x\le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	13—15	6	2		
2	15—17	6	2		
3	17—19	4	2		
4	19—21	7	2		
5	21—23	5	2		
6	23—25	6	2		
7	25—27	6	2		

Пятый столбец:

i	$x_{i-1} \le x \le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	13—15	6	2	0,15	
2	15—17	6	2	0,15	
3	17—19	4	2	0,1	
4	19—21	7	2	0,175	
5	21—23	5	2	0,125	
6	23—25	6	2	0,15	
7	25—27	6	2	0,15	

Шестой столбец:

i	$x_{i-1} \le x \le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	13—15	6	2	0,15	0,075
2	15—17	6	2	0,15	0,075
3	17—19	4	2	0,10	0,05
4	19—21	7	2	0,175	0,0875
5	21—23	5	2	0,125	0,0625
6	23—25	6	2	0,15	0,075
7	25—27	6	2	0,15	0,075

Гистограмма приведенных частот представлена на рис. 18.7.

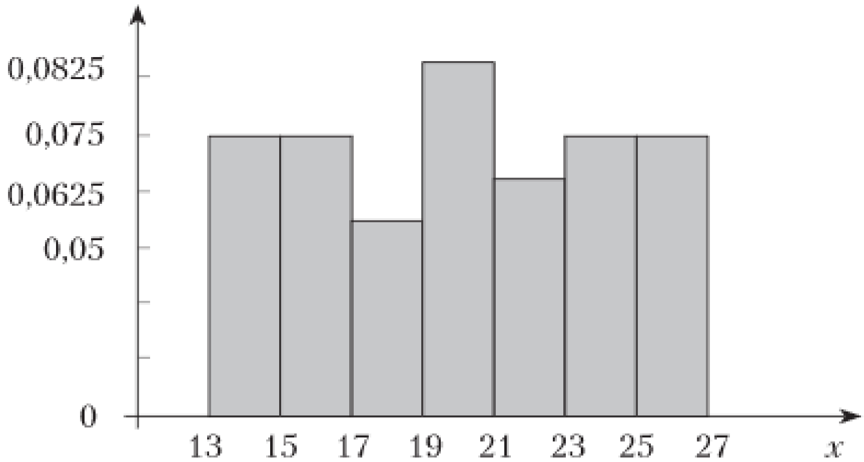


Рис. 18.7

Задачи для самостоятельного решения

18.1. В таблице дано распределение участков по урожайности зерновых:

Урожайность, ц/га	10,5	16,5	24	30,5	37	44	50,5	55
Число участков	3	5	15	26	20	5	4	2

Найдите выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию.

18.2. В таблице приведено распределение работников предприятия по возрасту:

Возраст, лет	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
Число работников	12	37	41	15	5

Найдите выборочное среднее и выборочное среднее квадратическое отклонение.

18.3. Найдите выборочное среднее и исправленную выборочную дисперсию случайной величины X, для которой получен следующий интервальный ряд:

x_i	(–1,76; –1,26]	(–1,26; –0,76]	(–0,76; –0,26]	(–0,26; 0,24]
n_i	4	9	7	13
x_i	(0,24; 0,74]	(0,74; 1,24]	(1,24; 1,74]	
n_i	10	3	4	

18.4. Из стада баранов произведена выборка для взвешивания 40 баранов. Их средний вес оказался равным 50 кг, исправленная выборочная дисперсия — 16. Найдите доверительный интервал для математического ожидания веса барана с доверительной вероятностью 0,8. Предполагается, что вес подчиняется нормальному закону распределения.

18.5. По данной выборке $\{9; -4; 3;\ 5; -7; -4; 9; 9; 9; 5\}$ постройте вариационный и статистический ряды, а также эмпирическую функцию распределения.

18.6. Найдите точечную оценку дисперсии генеральной совокупности для данной выборки:

x_i	–2	–1	0	1	2
n_i	2	1	3	1	3

18.7. Найдите интервальные оценки математического ожидания и дисперсии генеральной совокупности для данных результатов обработки выборки (уровень значимости $\alpha = 0{,}01$): $n = 17, \sum_{i=1}^{n} n_i x_i = 85, \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2 = 1513.$

18.8. Для данного интервального статистического ряда заполните таблицу относительных частот группированной выборки, построить гистограмму приведенных относительных частот w_i / Δ:

i	$x_{i-1} \le x \le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	10—12	6			
2	12—14	2			
3	14—16	7			
4	16—18	10			
5	18—20	6			
6	20–22	6			
7	22—24	13			

Глава 19
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

19.1. Определения и основные понятия

Теорией случайных процессов называется раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений в динамике их развития. Понятие случайного процесса представляет собой обобщение понятия случайной величины. Напомним, случайной величиной называется величина, которая в результате опыта со случайным исходом принимает то или иное значение.

Случайным процессом $x(t)$ называется процесс, значения которого при любом фиксированном $t = t_0$ является случайной величиной $x(t_0)$. Случайная величина $x(t_0)$, в которую обращается случайный процесс при $t = t_0$, называется *сечением* случайного процесса, соответствующим данному значению аргумента t.

Реализацией случайного процесса $x(t)$ называется неслучайная функция $\tilde{x}(t)$, в которую превращается случайный процесс $x(t)$ в результате опыта. Другими словами, реализация — это конкретный вид, принятый случайным процессом $x(t)$, который наблюдался на каком-то отрезке времени от 0 до t.

Классификация случайных процессов следующая.

1.1. Процессы с дискретными состояниями и дискретным временем.

1.2. Процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем.

2.1. Процессы с непрерывными состояниями и дискретным временем.

2.2. Процессы с непрерывными состояниями и непрерывным временем.

Случайный процесс $x(t)$ называется *процессом с дискретным временем*, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты $t_1, ..., t_j, ...$.

Случайный процесс $x(t)$ называется *процессом с непрерывным временем*, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент t наблюдаемого периода T.

Случайный процесс $x(t)$ называется *процессом с дискретными состояниями*, если в любой момент времени t множество его состояний конечно или счетно.

Случайный процесс $x(t)$ называется *процессом с непрерывными состояниями*, если его сечение в любой момент есть непрерывная случайная величина и, значит, множество ее значений несчетно.

Приведем примеры процессов.

Процесс 1.1. Некто купил m билетов выигрышного займа, которые могут выигрывать и погашаться в заранее известные моменты тиражей. Случайный процесс $x(t)$ — это число билетов, выигравших до момента времени T.

Процесс 1.2. Техническое устройство состоит из n узлов, которые могут в ходе работы устройства отказывать. Случайный процесс — это число узлов, отказавших до момента времени T.

Процесс 2.1. В моменты времени $t_1, t_2, \ldots$ регистрируется цена акции $x(t)$ конкретной компании. Последовательность значений этой величины — это случайный процесс.

Процесс 2.2. Процесс изменения напряжения $x(t)$ в электросети питания ЭВМ.

19.2. Цепи Маркова

Рассмотрим последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots$, принимающих значения $E_1, E_2, \ldots$.

Последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots$ называется *цепью Маркова*, если для произвольного набора $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots < i_k, k = 3, 4, \ldots$, и любых $E_{j_1}, \ldots, E_{j_k}$ справедливо равенство

$$P(x_{i_k} = E_{j_k} \mid x_{i_1} = E_{j_1}, \ldots, x_{i_{k-1}} = E_{j_{k-1}}) = P(x_{i_k} = E_{j_k} \mid x_{i_{k-1}} = E_{j_{k-1}}).$$

Если множество значений (множество состояний) цепи Маркова $S = \{E_1, E_2, \ldots\}$ конечно, то цепь называется *конечной* цепью Маркова, при бесконечном числе элементов в S — *счетной* цепью Маркова.

Цепь Маркова называется *однородной*, если для всех i и j вероятности $p_{ij} = P(x_{n+1} = E_j \mid x_n = E_i)$ не зависят от n.

В дальнейшем рассматриваются только однородные цепи Маркова. Вероятности $p_{ij} = P(x_{n+1} = E_j \mid x_n = E_i)$ перехода цепи из одного состояния в другое называются *переходными вероятностями*, а матрица $P = (p_{ij})$ — *матрицей переходных вероятностей* цепи Маркова или *матрицей перехода за один шаг*.

Свойства матрицы переходных вероятностей:

1) $p_{ij} \geq 0$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{N} p_{ij} = 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$.

Матрица, удовлетворяющая свойствам 1 и 2, называется *стохастической*.

Наряду с матрицей переходных вероятностей рассматриваются *матрицы перехода за n шагов* (за время n) $P(n) = (p_{ij}(n))$, где $p_{ij}(n) = P(x_{n+k} = E_j \mid x_k = E_i)$, при этом $P(1) = P$ — матрица переходных вероятностей.

Распределение x_n будем представлять вектором $\overline{p}(n) = (p_1(n), p_2(n), \ldots)$, где $p_i(n) = P(x_n = E_i)$ — вероятность того, что в момент времени n случайная величина x принимает значение E_i. Вектор $\overline{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \ldots)$ называется *начальным распределением* цепи Маркова.

Пример 19.1

Частица движется по пяти точкам на прямой единичными шагами. Каждый шаг вправо с вероятностью p и влево с вероятностью q. Частица движется, пока не попадет в крайние (граничные) точки, в которых стоит поглощающий экран. Напишем матрицу переходных вероятностей для цепи Маркова положения частицы на прямой.

Решение

Рассмотрим случай пяти состояний. S_1, S_5 — граничные состояния; S_2, S_3, S_4 — внутренние состояния.

Тогда матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведем ряд теорем.

Теорема 19.1. *Матрица перехода за n шагов — это n-я степень матрицы перехода за 1 шаг (матрицы переходных вероятностей):* $P(n) = P^n(1) = P^n$.

Теорема 19.2. *Распределение вероятностей на шаге n + k связано с распределением вероятностей на шаге k следующим образом:* $\overline{p}(k+n) = \overline{p}(k) \cdot P^n$.

Теорема 19.3. *Для произвольного набора* $i_0 < i_1 < ... < i_k, k = 2, 3, ...$ *и любых состояний* $E_{j_0}, E_{j_1}, ..., E_{j_k}$ *имеет место равенство*

$$P\left\{x_{i_0} = E_{j_0}, ..., x_{i_k} = E_{j_k}\right\} = p_{j_0} \cdot \prod_{m=1}^{k} p_{j_{m-1}j_m}(i_m - i_{m-1}).$$

Пример 19.2

Даны матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}3 & 0{,}3 \end{pmatrix}$ и начальное распределение $\overline{p}(0) = (0{,}5 \quad 0{,}1 \quad 0{,}4)$. Найдем: а) вероятность того, что в моменты t = 0, 1, 2, 3 состояния цепи Маркова будут соответственно 2, 1, 1, 3; б) $\overline{p}(2)$.

Решение

а) По теореме 19.3 имеем

$$P(x_0 = 2, x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 3) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}004.$$

б) По теореме 19.2 имеем

$$\overline{p}(2) = \overline{p}(0) \cdot P^2 = (0{,}5 \quad 0{,}1 \quad 0{,}4) \cdot \begin{pmatrix} 0{,}43 & 0{,}23 & 0{,}34 \\ 0{,}3 & 0{,}44 & 0{,}26 \\ 0{,}38 & 0{,}31 & 0{,}31 \end{pmatrix} = (0{,}397 \quad 0{,}283 \quad 0{,}32).$$

Пример 19.3

В ноябре не бывает подряд двух солнечных дней. Если сегодня солнечная погода, то завтра она изменится. С равными вероятностями будет снег или дождь. Если сегодня снег или дождь, то завтра погода с вероятностью $\frac{1}{2}$ не изменится. При изменении погоды в половине случаев будет солнечно. Сегодня снег. Найдем:

- распределение вероятностей погоды на завтра;
- вероятность того, что снег будет идти завтра и послезавтра.

Решение

Обозначим: состояния погоды E_1 — дождь, E_2 — солнечно, E_3 — снег. Случайный процесс: x_n — погода на n-й день ($n = 0$ — сегодня, $n = 1$ — завтра, $n = 2$ — послезавтра). Тогда матрица переходных вероятностей имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,25 & 0,25 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}$. Начальное распределение вероятностей $\overline{p}(0) = (0 \quad 0 \quad 1)$.

Распределение погоды на завтра:

$$\overline{p}(1) = \overline{p}(0) \cdot P = (0 \quad 0 \quad 1) \cdot P = (0,25 \quad 0,25 \quad 0,5).$$

Вероятность того, что снег будет идти завтра и послезавтра, вычисляется таким образом: $P(x_0 = E_3, x_1 = E_3, x_2 = E_3) = 1 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,25.$

19.3. Стационарные вероятности

Распределение $\overline{\hat{p}}$ цепи Маркова называется *стационарным*, если оно остается неизменным на каждом шаге. Стационарное распределение $\overline{\hat{p}}$ удовлетворяет соотношению $\overline{\hat{p}} = \overline{\hat{p}} \cdot P$.

Теорема 19.4. *Стационарные вероятности (вероятности стационарного распределения) являются решениями системы линейных уравнений*

$$\begin{cases} \hat{p}_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \hat{p}_i \cdot p_{ik}, k = 1, ..., n, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{p}_k = 1. \end{cases}$$

Пример 19.4

Производство некоторых изделий может находиться в двух состояниях: E_1 — изделие находит спрос и E_2 — изделие спроса не находит. Если производство находится в состоянии E_1, то к концу месяца оно с равными вероятностями останется в нем или переходит в E_2. Будучи в состоянии E_2, производство в конце месяца может перейти в состояние E_1 с вероятностью $\frac{2}{5}$. Найдем стационарное распределение.

Решение

Матрица переходных вероятностей за один шаг имеет вид $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$. Для нахождения стационарных вероятностей следует решить систему уравнений

$$\begin{cases} \hat{p}_1 = \frac{1}{2}\hat{p}_1 + \frac{2}{5}\hat{p}_2, \\ \hat{p}_1 + \hat{p}_2 = 1. \end{cases}$$

Отсюда $\hat{p}_1 = \frac{4}{9}, \hat{p}_2 = \frac{5}{9}.$

19.4. Пуассоновский поток

Потоком событий называется случайный процесс $x(t)$ — число однородных событий (вызовов на телефонной станции, поступлений информации в базу данных и т.д.), поступивших в некотором промежутке времени.

Поток событий называется *стационарным*, если вероятность поступления того или иного числа событий на участке времени длины T не зависит от его расположения на оси времени Ot, а зависит только от его длины. Поэтому среднее число событий λ, появляющихся в единицу времени, постоянно. Число λ называется *интенсивностью потока*.

Поток событий называется *ординарным*, если события появляются поодиночке, а не группами по два, три и т.д.

Поток событий называется *потоком с отсутствием последействия*, если вероятность попадания того или иного число событий на заданный участок оси Ot не зависит от того, сколько событий попало на любой другой, не пересекающийся с ним участок, в частности «будущее» процесса не зависит от его «прошлого».

Простейшим (*пуассоновским*) *процессом* называется стационарный ординарный поток событий с отсутствием последействия.

Случайный процесс $x(t)$ является марковским, при этом

$$P\{x(t+s)-x(t)=k\}=P\{x(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,...,$$

т.е. $x(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λ. Поэтому среднее число событий, появившихся в интервале $(s, s+t)$, равно $M(x(t))=\lambda t$ и $D(x(t))=\lambda t$.

Пример 19.5

В течение часа телефонная станция получает в среднем 60 вызовов. В течение 30 с был сбой в работе станции. Какова вероятность того, что за это время не было ни одного вызова? Каково среднее время между вызовами?

Решение

Считаем, что поток вызовов простейший. Тогда его интенсивность равна среднему числу вызовов в единицу времени (минуту): $\lambda=\frac{60}{60}=1$ выз/мин.

Вероятность того, что за время t = 0,5 мин не было не одного вызова, равна

$$P\{x(0{,}5)=0\}=e^{-\lambda\cdot 0{,}5}=e^{-0{,}5}=\frac{1}{\sqrt{e}}\approx 0{,}61.$$

Так как время T между вызовами распределено по показательному закону с параметром λ, то $\overline{T}=MT=\frac{1}{\lambda}=1$ мин.

19.5. Системы массового обслуживания

Система массового обслуживания (СМО) — это математическая модель реальных систем произвольной природы, предназначенных для обслуживания требований (заявок, вызовов, клиентов и т.п.), поступающих в случайные моменты времени. Устройства или субъекты, занимающиеся обслуживанием, условно называются *приборами*, *линиями* или *каналами* обслуживания.

Классификацию СМО проводят по типу входного потока заявок, по возможности СМО обслужить входной поток (число приборов, распределение времени обслуживания), по дисциплине обслуживания (число мест в очереди, тип порядка в очереди и т.д.).

Для характеристики СМО используется символика $(M/M/n/m)$, где на первом месте стоит характеристика входного потока заявок: M — пуассоновский поток, на втором — M — показательное распределение времени обслуживания, n — число приборов в СМО, m — число мест ожидания. Если m равно бесконечности, то используют обозначение $(M/M/n)$.

Пусть интенсивность входного пуассоновского потока, т.е. среднее число заявок в единицу времени, равна λ, а среднее время обслуживания одним прибором одной заявки равно $\frac{1}{\mu}$ $\left(\mu = \frac{1}{MT_{\text{обсл}}}\right.$ — интенсивность обслуживания одним прибором; $T_{\text{обсл}}$ — случайное время обслуживания). Тогда для СМО $(M/M/n/m)$ можно построить следующий граф состояний (рис. 19.1).

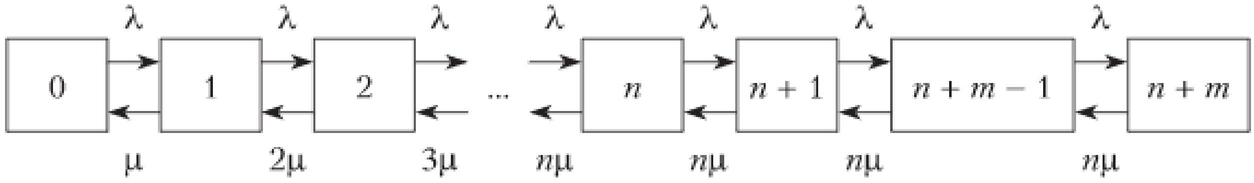


Рис. 19.1

Уравнения стационарных вероятностей будут следующего вида:

$$\hat{p}_k = \frac{\rho^k}{k!}\hat{p}_0, \; k = 1, 2, ..., n,$$

$$\hat{p}_{n+k} = \nu^k, \;\; \hat{p}_k = \nu^k \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot \hat{p}_0, \;\; k = 0, 1, ..., m,$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu}, \;\; \nu = \frac{\rho}{n} = \frac{\lambda}{n\mu}, \;\; \hat{p}_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \frac{1-\nu^{m+1}}{1-\nu}}.$

Рассмотрим некоторые характеристики эффективности функционирования СМО $(M/M/n/m)$. В такой системе заявка не будет обслужена, если она поступит в СМО, когда система находится в состоянии $n + m$ (все приборы заняты обслуживанием и нет свободных мест в очереди), поэтому *вероятность отказа в обслуживании*

$$p_{\text{отк}} = \hat{p}_{n+m} = \nu^m \frac{\rho^n}{n!}\hat{p}_0.$$

Вероятность того, что поступившая в СМО заявка будет обслужена (*вероятность обслуживания*) равна $p_{\text{обсл}} = 1 - p_{\text{отк}} = 1 - \hat{p}_{n+m}$.

Среднее число занятых каналов можно найти по формуле $\bar{k} = \rho p_{\text{обсл}}$.

Средняя длина очереди $\bar{r} = \nu \cdot \hat{p}_n \cdot \dfrac{1-(m+1)\cdot \nu^m + m\cdot \nu^{m+1}}{(1-\nu)^2}$.

Среднее число заявок, находящихся в СМО, равно $\bar{z} = \bar{k} + \bar{r}$.

Среднее время пребывания заявки в очереди и среднее время пребывания заявки в СМО могут быть найдены по формулам

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\bar{r}}{\lambda}; \bar{t}_{\text{смо}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \frac{1-\hat{p}_{n+m}}{\mu}.$$

Рассмотрим СМО вида $(M/M/n)$ (число мест ожидания неограниченно). Стационарные вероятности состояний и формулы для характеристик эффективности СМО могут быть получены из формул, приведенных для СМО $(M/M/n/m)$, при переходе к пределу при $m \to \infty$. Но число состояний будет бесконечным, и для того чтобы полученные ряды сходились и, следовательно, существовали стационарные вероятности, требуется выполнение условия $\nu = \dfrac{\lambda}{n\mu} < 1$, т.е. $\lambda < n\mu$. Формулы для $\hat{p}_k$ остаются прежними при $k \geq 1$, а при $k = 0$ имеем

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \dfrac{1}{1-\nu}}.$$

Далее получаем

$$p_{\text{отк}} = 0;\ p_{\text{обсл}} = 1;$$

$$\bar{k} = \rho, \quad \bar{r} = \frac{\nu \cdot \hat{p}_n}{(1-\nu)^2};\ \bar{z} = \frac{\nu \cdot \bar{p}_n}{(1-\nu)^2} + \rho;$$

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{\hat{p}_n}{n \cdot \mu \cdot (1-\nu)^2} = \frac{n\mu \hat{p}_n}{(n\mu - \lambda)^2};\ \bar{t}_{\text{смо}} = \bar{t}_{\text{оч}} + \frac{1}{\mu}.$$

Вероятность того, что время ожидания клиента в очереди будет больше t, будет равна $P\{t_{\text{оч}} > t\} = \dfrac{\hat{p}_n}{1-\nu} \cdot e^{-n\mu(1-\nu)t}$.

Рассмотрим СМО вида $(M/M/n/m)$ при $m = 0$, т.е. систему с отказами (мест ожидания нет). При этом стационарные вероятности находятся по формулам Эрланга:

$$\hat{p}_k = \frac{\rho^k}{k!} \hat{p}_0,\ \ k = 1, 2, ..., n,\ \hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}.$$

Для характеристик эффективности СМО $(M/M/n/0)$ получим такие формулы:

$$p_{\text{отк}} = \hat{p}_n = \frac{\rho^n}{n!} \hat{p}_0;\ p_{\text{обсл}} = 1 - \hat{p}_n;$$

$$\bar{r} = 0;\ \bar{z} = \bar{k} = \rho(1-\hat{p}_n);\ \bar{t}_{\text{оч}} = 0;\ \bar{t}_{\text{смо}} = \frac{1-\hat{p}_n}{\mu}.$$

Пример 19.6

У входа в метро находятся четыре автомата по продаже билетов на проезд. В среднем число желающих купить билет в автомате — 15 человек в час. Средняя длительность покупки — 2 мин. Если все автоматы заняты, то прохожий идет покупать билет в кассу. Найдем:

1) вероятность того, что желающий купить билет в автомате прохожий сможет это сделать;

2) среднее число занятых автоматов.

Решение

Это система массового обслуживания с отказами. Для нее число приборов $n = 4$. Интенсивность входного потока заявок $\lambda = 15\frac{\text{чел}}{\text{ч}} = \frac{1}{4}\frac{\text{чел}}{\text{мин}}$. Среднее время обслуживания одним прибором одной заявки $\frac{1}{\mu} = 2\,\text{мин}$, поэтому интенсивность обслуживания $\mu = \frac{1}{2}$. Используя формулы Эрланга, получим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2};\ \hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{4}\frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1+\rho+\frac{1}{2}\rho^2+\frac{1}{6}\rho^3+\frac{1}{24}\rho^4} = \frac{128}{211};$$

$$\hat{p}_4 = \frac{\rho^4}{4!}\cdot\hat{p}_0 = \frac{\frac{1}{16}}{24}\cdot\frac{128}{211} = \frac{1}{633}.$$

Тогда вероятность того, что есть свободный автомат (вероятность обслуживания), будет равна

$$p_{\text{обсл}} = 1 - \hat{p}_4 = 1 - \frac{1}{633} = \frac{632}{633} \approx 0{,}998.$$

И среднее число занятых автоматов $\bar{k} = \rho\cdot(1-\bar{p}_4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{632}{633} = \frac{316}{633} \approx 0{,}499.$

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите, чем реализация случайного процесса отличается от его сечения.
2. Какие бывают случайные процессы?
3. Что называется цепью Маркова?
4. Какая цепь Маркова называется однородной?
5. Какими свойствами обладает пуассоновский поток?
6. Опишите, чем отличаются друг от друга графы состояний систем массового обслуживания с конечной очередью, бесконечной очередью и системы с отказами.

Практикум по решению задач

Упражнение 19.1. Игрок опускает жетон в один из двух игровых автоматов. Первый автомат производит выплату с вероятностью 0,3, второй — с вероятностью 0,4. После проигрыша игрок продолжает игру с тем же автоматом, в случае выигрыша переходит к другому. Напишем матрицу переходных вероятностей.

Решение

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 19.2. Студент некоторого института каждый год с вероятностью p выбывает из института, с вероятностью q остается на том же курсе, с вероятностью r переходит на следующий курс. Составим матрицу переходных вероятностей.

Решение

Обозначим состояния: S_1 — первокурсник, S_2 — второкурсник, S_3 — третьекурсник, S_4 — четверокурсник, S_5 — выбыл, S_6 — окончил институт.

Тогда $P = \begin{pmatrix} q & r & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & q & r & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & p & 1-q-p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Упражнение 19.3. Три книги лежат в стопке. Каждую книгу берут с вероятностью $\frac{1}{3}$ и, прочитав, кладут сверху. Рассматривается цепь Маркова с шестью состояниями: $E_1 = \{1, 2, 3\}$, $E_2 = \{1, 3, 2\}$, ..., $E_6 = \{3, 2, 1\}$. Найдем матрицу переходных вероятностей и распределение вероятностей на втором шаге, если в начальный момент $\overline{p}(0) = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

Решение

Матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Распределение вероятностей на втором шаге

$$\overline{p}(2) = \overline{p}(0) \cdot P^2 = \left(\frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}\right).$$

Упражнение 19.4. На систему, состоящую из трех независимо работающих приборов, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание. Известно, что средняя длительность между поступлениями требований $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$ ч. Время обслуживания требования распределено по показательному закону, среднее время обслуживания $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}$ ч. Найдем: а) вероятность того, что за $t = \frac{1}{3}$ ч прибудет $k = 2$ требования; б) вероятность, что система занята (в случае системы с отказами).

Решение

а) Вероятность того, что за $t = \frac{1}{3}$ ч прибудет $k = 2$ требования, может быть найдена по формуле

$$P\left\{x\left(\frac{1}{3}\right) = 2\right\} = \frac{\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)^2}{2!} e^{-2\frac{1}{3}} = \frac{2}{6\sqrt[3]{e^2}}.$$

б) Это система массового обслуживания с отказами. Для нее число приборов $n = 3$. Интенсивность входного потока заявок $\lambda = 2$. Интенсивность обслуживания $\mu = 2$. Используя формулы Эрланга, получим

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 1;\ \hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{6}\rho^3} = \frac{3}{8}.$$

Вероятность отказа в обслуживании — это вероятность того, что все приборы заняты, т.е. $\hat{p}_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot \hat{p}_0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{8}$.

Упражнение 19.5. В парикмахерскую, в которой 3 мастера, в среднем приходит 8 человек в час (поток клиентов пуассоновский). Среднее время обслуживания одного клиента — 20 мин. Найдем вероятность того, что клиент будет ждать обслуживания более часа.

Решение

Это система массового обслуживания с бесконечной очередью. По условию $\lambda = 8, n = 3, \mu = 3$. Значит, $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{3},\ \nu = \frac{8}{9} < 1$. Далее:

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + \rho + \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{6}\rho^3} = \frac{81}{841};\ \hat{p}_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot \hat{p}_0 \approx 0{,}0886.$$

В итоге $P\{t_{\text{оч}} > 1\} = 9\hat{p}_3 e^{-1} \approx 0{,}293$.

Упражнение 19.6. Система состоит из трех независимо работающих приборов. Время обслуживания приходящего на прибор требования распределено по показательному закону. Среднее время обслуживания одним прибором одного требования равно 0,5 ч. Поток требований, поступающих на обслуживание, пуассоновский. За единицу времени (1 ч) поступает в среднем 4 требования.

а) Найдем вероятность, что за 2 ч поступит 5 требований.

б) Если все приборы заняты, то требование получает отказ. Найдем вероятность отказа.

в) Если все приборы заняты, то требование ожидает очереди. Найдем вероятность, что ожидает одно требование, вероятность занятости, среднее время ожидания.

Решение

а) Вероятность того, что за время $t = 2$ ч поступает $k = 5$ требований пуассоновского потока, находится по формуле $p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$. Поэтому $p_5(2) = 0{,}082$.

б) $\lambda = 4$ — среднее число требований, поступающих за единицу времени. Вероятность отказа определяется по формуле Эрланга при $k = n$:

$$\hat{p}_k = \frac{\rho^k}{k!} \hat{p}_0,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu},\ \hat{p}_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}.$$

Параметр μ показательного распределения времени обслуживания определяется по среднему значению этой случайной величины $\frac{1}{\mu} = 0{,}5$ ч, $k = n = 3$ прибора. Тогда $\hat{p}_3 = 0{,}21$.

в) Вероятность, что ожидает одно требование, определяется с помощью формул

$\hat{p}_k = \frac{\rho^k}{k!}\hat{p}_0$, $k = 1, 2, ..., n$, — в системе k требований ($k \le n$),

$\hat{p}_{n+i} = \frac{1}{n!n^i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+i}\hat{p}_0$ — все приборы заняты, в очереди i требований,

$$\hat{p}_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}},\ 0 < \frac{\lambda}{n\mu} < 1.$$

При $n = 3$, $i = 1$ получим $\hat{p}_0 = \frac{1}{9}$ и $\hat{p}_{3+1} = \frac{8}{81}$.

Вероятность занятости (все приборы заняты, в очереди $i = 0, 1, 2, 3, ...$ требований) определяется по формуле

$$p_{\text{зан}} = \sum_{i=0}^{\infty}\hat{p}_{n+i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n!n^i}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n+i}\hat{p}_0 = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}\hat{p}_0 = \frac{4}{9}.$$

Среднее время ожидания $t_{\text{ожид}} = \frac{1}{n\mu \cdot n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2}\hat{p}_0 = \frac{4}{27}$ ч.

Задачи для самостоятельного решения

19.1. Частица перемещается по пяти целочисленным точкам прямой от точки a до точки b. В точке a стоит отражающий экран (частица отражается в ближайшую к ней точку), в точке b — поглощающий, из внутренних точек частица перемещается вправо с вероятностью 0,6, влево — с вероятностью 0,4. Постройте матрицу переходных вероятностей.

19.2. Частица перемещается по пяти целочисленным точкам прямой от точки a до точки b. Достигнув границы, частица с вероятностью 0,5 остается в этом состоянии и с вероятностью 0,5 переходит в другое граничное состояние. Из внутренних точек частица перемещается вправо с вероятностью 0,6, влево — с вероятностью 0,4. Постройте матрицу переходных вероятностей.

19.3. Дана матрица переходных вероятностей $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$. Найдите:

а) матрицу переходных вероятностей через два шага;
б) распределение вероятностей через два шага;
в) стационарные вероятности.

19.4. Найдите стационарные вероятности цепи Маркова, если матрица переходных вероятностей имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

19.5. При повышении напряжения в сети дублирующее устройство выходит из строя с вероятностью 0,5, а с вероятностью 0,25 прибор выходит из строя полностью. Если дублирующее устройство вышло из строя, то следующее повышение напряжения с вероятностью 0,5 приводит к прекращению работы прибора. Найдите распределение вероятностей после одного повышения напряжения в сети, если:

а) в начальный момент прибор был полностью исправен;

б) в начальный момент прибор с равными вероятностями мог находиться в любом из возможных состояний.

Найдите стационарное распределение.

19.6. На систему, состоящую из двух независимо работающих приборов, поступает пуассоновский поток требований на обслуживание. Известно, что средняя длительность между поступлениями требований 1 ч. Время обслуживания требования распределено по показательному закону, среднее время обслуживания $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}$ ч. Найдите: а) вероятность того, что за $t = \frac{1}{2}$ ч прибудет $k = 3$ требования; б) вероятность того, что система занята, в случае системы с отказами; в) вероятность того, что система занята, в случае системы с ожиданием; г) вероятность того, что в очереди 4 требования; д) среднее время ожидания в очереди.

Список литературы

1. *Алескеров, Ф. Т.* Бинарные отношения, графы и коллективные решения / Ф. Т. Алескеров, Э. Л. Хабина, Д. А. Шварц. — М. : ГУ ВШЭ, 2006.

2. *Аляев, Ю. А.* Дискретная математика и математическая логика / Ю. А. Аляев, С. Ф. Тюрин. — М. : Финансы и статистика, 2006.

3. *Андерсон, Дж. А.* Дискретная математика и комбинаторика : пер. с англ. / Дж. А. Андерсон. — М. : Вильямс, 2004.

4. *Антонов, В. И.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия : опорный конспект / В. И. Антонов [и др.]. — М. : Проспект, 2011.

5. *Бермант, А. Ф.* Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — М. : Наука, 1966.

6. *Вентцель, Е. С.* Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. — М. : КноРус, 2010.

7. Высшая математика для экономических специальностей : учебник и практикум в двух частях / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : Высшее образование, 2005.

8. *Гаврилов, Г. П.* Задачи и упражнения по дискретной математике : учеб. пособие / Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко. — 3-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2005.

9. *Гисин, В. Б.* Дискретная математика. Руководство к решению задач / В. Б. Гисин, С. А. Зададаев, О. Е. Орел. — М. : Финуниверситет, 2012.

10. *Глебов, В. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. И. Глебов, С. Я. Криволапов. — М. : ВГНА, 2008.

11. *Гмурман, В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. — М. : Высшее образование, 2006.

12. *Гмурман, В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. — М. : Высшая школа, 2003.

13. *Дорофеева, А. В.* Высшая математика. Гуманитарные специальности. Сборник задач / А. В. Дорофеева. — М. : Дрофа, 2013.

14. *Дорофеева, А. В.* Высшая математика для гуманитарных направлений / А. В. Дорофеева. — М. : Юрайт, 2012.

15. *Кремер, Н. Ш.* Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / Н. Ш. Кремер. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Юнити-Дана, 2004.

16. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : учебник для вузов в 3-х томах / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высшая школа, 1988.

17. *Лобузов, А. А.* Задачи по теории случайных процессов : учеб. пособие / А. А. Лобузов, С. Д. Гумляева, Н. В. Норин. — М. : МИРЭА, 1993.

18. *Малугин, В. А.* Линейная алгебра / В. А. Малугин. — М. : Астрель, 2011.

19. *Мангейм, Дж. Б.* Политология. Методы исследования / Дж. Б. Мангейм, Р. К. Рич. — М. : Весь Мир, 1997.

20. *Марченков, С. С.* Булевы функции / С. С. Марченков. — М. : Физматлит, 2002.

21. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики / под ред. Н. Ш. Кремера. — М. : Юрайт, 2012.

22. *Москинова, Г. И.* Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях / Г. И. Москинова. — М. : Логос, 2000.

23. *Письменный, Д. Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. — 3-е изд. — М. : Айрис-пресс, 2008.

24. *Понтрягин, Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. — М. : Наука, 1974.

25. Практикум по высшей математике для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.

26. *Просветов, Г. И.* Математика для гуманитариев : задачи и решения / Г. И. Просветов. — М. : Альфа-Пресс, 2009.

27. *Соболева, Т. С.* Дискретная математика : учебник / Т. С. Соболева, А. В. Чечкин ; под ред. А. В. Чечкина. — М. : Академия, 2006.

28. *Феклин, В. Г.* Математический анализ : учеб. пособие / В. Г. Феклин, В. Н. Фронтов, Н. В. Мамонтова. — М. : Финансовый университет, 2013.

29. *Филиппов, А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — М. : Наука, 1979.

30. *Gill, J.* Essential mathematics for political and social research / J. Gill. — Cambridge University Press, 2006.

31. *Strang, G.* Introduction to linear algebra / G. Strang. — Wellesley-Cambridge Press, 2009.

Ответы

Глава 1

1.1. а) Да, являются; б) да, являются; в) нет, не являются; г) нет, не являются.

1.2. $C=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & -4\end{pmatrix}$.

1.3. $C=\begin{pmatrix}11 & -28 & -16\\ 22 & -29 & -11\\ -16 & -20 & -32\end{pmatrix}$.

1.4. $C=\begin{pmatrix}-1 & -3 & -3\\ 5 & -9 & -5\end{pmatrix}$.

1.5. Сумма не существует, так как слагаемые разного размера.

1.6. б) $|A|=-8$; в) $|A|=-28$; г) $|A|=-40$; д) $|A|=-12$; е) $|A|=56$.

1.7. а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2{,}5\end{pmatrix}$; б) $|A|=0\rightarrow$ обратной матрицы не существует; в) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 1 & -2 & -3\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$; г) $A^{-1}=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 5 & -1 & -2\end{pmatrix}$; д) $|A|=0\rightarrow$ обратной матрицы не существует.

1.8. а) $X=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}8 & 1{,}5\\ -3 & -0{,}5\end{pmatrix}$; в) $X=\dfrac{1}{18}\begin{pmatrix}-3 & -5 & -7\\ 3 & -1 & -23\\ 21 & 29 & 1\end{pmatrix}$.

1.9. а) $X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix}0{,}4 & -0{,}2\\ -0{,}4 & 2{,}2\end{pmatrix}$; в) $X=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix}56 & 40 & -19\\ 11 & 10 & 11\\ 7 & 5 & 7\end{pmatrix}$.

1.10. а) $r=3$; б) $r=2$; в) $r=3$.

Глава 2

2.1. а) $\vec{x}=(1,4)$; б) $\vec{x}=(2,-1,-1)$; в) $\vec{x}=(1,-2,-1)$; г) $\vec{x}=(2,-1,-1)$.

2.2. а) $\vec{x}=(2,1,2,1)$; б) $\vec{x}=(2,1,2,1)$.

2.3. а) $\vec{x}_{\text{общ}}=\left(1-\dfrac{4}{5}c;\, 2+\dfrac{3}{5}c;\, c\right)$; $\vec{x}_{\text{баз}}=(1;2;0)$;

б) $\vec{x}_{\text{общ}} = \left(2+\frac{c_1}{3}-\frac{2}{3}c_2; -4+\frac{7}{3}c_1+\frac{1}{3}c_2; c_1; c_2\right)$; $\vec{x}_{\text{баз}} = (2; -4; 0; 0)$;

в) $\vec{x}_{\text{общ}} = (-3+2c_1; 9-3c_1-c_2; c_1; c_2)$; $\vec{x}_{\text{баз}} = (-3; 9; 0; 0)$.

2.4. а) $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{3}; \frac{7}{3}; 1; 0\right)$; $\vec{e}_2 = \left(\frac{-2}{3}; \frac{1}{3}; 0; 1\right)$;

б) $\vec{e}_1 = \left(\frac{-1}{3}; \frac{10}{3}; 1; 0\right)$; $\vec{e}_2 = (-1; -1; 0; 1)$;

в) $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{5}; \frac{12}{5}; 1; 0\right)$; $\vec{e}_2 = \left(\frac{-3}{5}; \frac{4}{5}; 0; 1\right)$.

Глава 3

3.1. а) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 10 \\ 9 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -4 \\ 9 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3.2. а) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -11 \end{pmatrix}$.

3.3. а) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

3.4. а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.5. а) $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

3.6. а) $\begin{pmatrix} 3\sqrt{3} & -3 \\ 3 & 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1/6 & -\sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 & -1/6 \end{pmatrix}$.

3.7. а) $\begin{pmatrix} (3+\sqrt{3})/2 \\ (3\sqrt{3}-1)/2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; в) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

3.8. а) $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}; \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix};$

б) $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{\sqrt{13}-1}{2} \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\dfrac{\sqrt{13}+1}{2} \end{pmatrix};$

в) $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}; \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}-1 \end{pmatrix}.$

3.9. а) $F = 5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8\left(\dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}\right)^2;$

б) $F = 3x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 5x_2^2 = 6\left(\dfrac{x_1 - \sqrt{3}x_2}{2}\right)^2 + 2\left(\dfrac{\sqrt{3}x_1 + x_2}{2}\right)^2;$

в) $F = 13x_1^2 - 12x_1x_2 + 22x_2^2 = 25\left(\dfrac{x_1 - 2x_2}{\sqrt{5}}\right)^2 + 10\left(\dfrac{2x_1 + x_2}{\sqrt{5}}\right)^2.$

3.10. а) $F = (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 + 3(x_3 + x_2/6)^2 - 97x_2^2/12;$

б) $F = \left(x_1 - \dfrac{x_2}{2} + 6x_3\right)^2 + \dfrac{15}{4}\left(x_2 + \dfrac{4x_2}{5}\right)^2 - \dfrac{212}{5}x_3^2;$

в) $F = (x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 2(x_3 - x_2)^2 - 24x_2^2.$

Глава 4

4.1. а) $\begin{cases} x(t) = 2 + 2t, \\ y(t) = 1 + 5t; \end{cases}$ б) $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y-1}{5}$; в) $\dfrac{x}{8/5} + \dfrac{y}{-4} = 1$; г) $y = \dfrac{5x}{2} - 4$;

д) $5x - 2y - 8 = 0.$

4.2. а) $\begin{cases} x(t) = -2 + 3t, \\ y(t) = 2 + t; \end{cases}$ б) $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-2}{1}$; в) $\dfrac{x}{-8} + \dfrac{y}{2/3} = 1$; г) $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{8}{3}$;

д) $x - 3y + 8 = 0.$

4.3. а) $-x + 3y + 7 = 0$; б) $y = \dfrac{x}{3} - \dfrac{7}{3}$; в) $\dfrac{x}{7} + \dfrac{y}{-7/3} = 1$; г) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1}$;

д) $\begin{cases} x(t) = 1 + 3t, \\ y(t) = -2 + t. \end{cases}$

4.4. а) $-2x - y + 8 = 0$; б) $y = -2x + 8$; в) $\dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{8} = 1$; г) $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2}$;

д) $\begin{cases} x(t) = 3 - t, \\ y(t) = 2 + 2t. \end{cases}$

4.5. а) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{3+1}$; б) $4x - y - 5 = 0$; в) $y = 4x - 5$; г) $\dfrac{x}{5/4} + \dfrac{y}{-5} = 1$;

д) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{4}$; е) $\begin{cases} x(t) = 1 + t, \\ y(t) = -1 + 4t. \end{cases}$

4.6. а) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1+1}$; б) $2x-y-5=0$; в) $y=2x-5$; г) $\frac{x}{5/2}+\frac{y}{-5}=1$;
д) $\frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{2}$; е) $\begin{cases} x(t)=2+t, \\ y(t)=-1+2t. \end{cases}$

4.7. $s=\frac{6}{\sqrt{13}}$.

4.8. $s=\frac{3}{\sqrt{5}}$.

4.9. $\cos\alpha=\frac{6}{\sqrt{85}}$.

4.10. $\cos\alpha=\frac{14}{\sqrt{65}}$.

4.11. а) $\begin{cases} x(t)=-2+t, \\ y(t)=1+2t, \\ z(t)=2-t; \end{cases}$ б) $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$.

4.12. а) $\begin{cases} x(t)=2+4t, \\ y(t)=3+2t, \\ z(t)=1+3t; \end{cases}$ б) $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{3}$.

4.13. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-2}{3}$.

4.14. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+1}{1}$.

4.15. $\begin{cases} x+y-z-3=0, \\ 3x-y+2z-9=0. \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} -x+2y+z-5=0, \\ 2x+4y+z-9=0. \end{cases}$

4.17. $2x+3y+5z-10=0$.

4.18. $3x+y+3z-11=0$.

4.19. $s=\frac{1}{\sqrt{14}}$.

4.20. $s=\frac{8}{\sqrt{3}}$.

4.21. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

4.22. $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$; $\varepsilon=1/\sqrt{2}$.

4.23. $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{4}=1$; $F_1(2+\sqrt{5},2)$ и $F_2(2-\sqrt{5},2)$; $\varepsilon=\sqrt{5}/3$.

4.24. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$; $F_1(2\sqrt{10},0)$ и $F_2(-3\sqrt{5},0)$; $\varepsilon=\sqrt{5}$.

4.25. $-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$.

4.26. $y^2=12x$; $x=-3$;

4.27. $(y-4)^2=-4x$; $F(-1,4)$.

4.28. $(x-1)^2=4(y-1)$.

4.29. $\varepsilon=\sqrt{7}/4$; $F_1(-1+\sqrt{7},2)$ и $F_2(-1-\sqrt{7},2)$.

4.30. $\varepsilon=\frac{\sqrt{5}}{2}$; $F_1(-2,2+2\sqrt{5})$ и $F_2(-2,2-2\sqrt{5})$.

4.31. $F(2,4)$; $y=-6$.

4.32. $y=\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{x}{3\sqrt{2}}$; $y=3\sqrt{2}x-\frac{5\sqrt{2}}{3}$.

4.33. $y=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y=-\sqrt{3}x+5\sqrt{3}$.

4.34. $y=x+3$; $y=-x+9$.

Глава 5

5.1. а) $-i$; б) $4-i$; в) $7+5i$; г) $5-i$; д) $1+2i$; е) $4+6i$.

5.2. а) $5+9i$; б) $11+9i$; в) $16-7i$; г) $-16-80i$; д) $-33-126i$; е) $6+17i$.

5.3. а) $-1+\frac{4}{3}i$; б) $\frac{-4-3i}{5}$; в) $-0{,}08(1+7i)$; г) $-0{,}5-i$; д) $0{,}012+0{,}172i$; е) $-1{,}118+0{,}471i$.

5.4. а) $\frac{8+6i}{5}$; б) $\frac{3-i}{10}$; в) $0{,}376-0{,}198i$; г) $\frac{7-i}{20}$; д) $-0{,}143+0{,}15i$; е) $-8-5i$.

5.5. а) $2^{29}e^{-i2\pi/3}=-2^{28}(1+i\sqrt{3})$; б) $2^{31/2}e^{-i7\pi/12}$; в) -256; г) $4^6 i$; д) $5z_1{}^4+2z_2{}^6=-13\cdot 4^5$; е) $\frac{2^{13}-3-i(2^{13}+3)}{256}$.

5.6. а) $\pm\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{2}}$; б) $5^{1/3}2^{1/6}e^{i\pi/12}$; $5^{1/3}2^{-1/3}(i-1)$; $5^{1/3}2^{1/6}e^{i\pi 17/12}$;
в) $\sqrt{2}e^{i5\pi/24}$; $\sqrt{2}e^{i17\pi/24}$; $\sqrt{2}e^{i29\pi/24}$; $\sqrt{2}e^{-i7\pi/24}$;
г) $2^{3/5}e^{i\pi/30}$; $2^{3/5}e^{i\pi 13/30}$; $2^{-2/5}(-\sqrt{3}+i)$; $2^{3/5}e^{i37\pi/30}$; $2^{3/5}e^{-i11\pi/30}$;
д) $\sqrt[6]{64}=2$; $\sqrt{3}+i$; $-1+i\sqrt{3}$; -2; $-1-i\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}+i$;
е) $\sqrt[6]{8+8i}=$ $2^{7/12}e^{i\pi/12}$; $2^{7/12}e^{i3\pi/8}$; $2^{7/12}e^{i17\pi/24}$; $2^{7/12}e^{i25\pi/24}$; $2^{7/12}e^{-i15\pi/24}$; $2^{7/12}e^{-i7\pi/24}$.

Глава 6

6.1. 1) $M=\{2,4,6,\ldots,100\}$; 2) $2\in M$; если $n\in M$, то $n+2\in M$; $n\le 98$;
3) $M=\{n\,|\,n$ – целое положительное число, не превышающее $100\}$;
4) $M=\left\{n\,|\,n\in N \text{ и } \frac{n}{2}\in N,\ n\le 100\right\}$.

6.2. 1) $M = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$; 2) $7 \in M$; если $n \in M$, то $n + 7 \in M$; $n \le 50$; 3) $M = \{n \mid n = 7k$, где $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

6.3. $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$, $B \cap C = \{2, 4\}$, $A \setminus C = \{7\}$.

6.4. $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4\}$, $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4\}$, $A \cap \overline{B} = \{1, 4\}$, $(B \setminus A) \cup \overline{C} = \{2, 3\}$.

6.5. $A \cup B = [-3; 5]$, $A \cap C = [0; 1]$, $B \setminus C = [-1; 0) \cup (1; 2)$.

6.6. $A \cup C = (-3; 1) \cup (0; 8)$, $A \cap B = (-2; 7]$, $B \setminus C = (-2; 7]$, $A \setminus C = (0; 2] \cup (7; 8)$.

6.7. $\text{пр}_2 a = (3)$, $\text{пр}_2 b = (1)$; $\text{пр}_4 a = (5)$, $\text{пр}_4 b = (4)$; $\text{пр}_{3,4} a = (4, 5)$, $\text{пр}_{3,4} b = (1, 4)$.

6.8. $A \times B = \{(a, 3), (a, 4), (a, 5), (b, 3), (b, 4), (b, 5), (c, 3), (c, 4), (c, 5)\}$,

$B \times A = \{(3, a), (3, b), (3, c), (4, a), (4, b), (4, c), (5, a), (5, b), (5, c)\}$,

$A^2 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

6.9. a = (мужской, 25, есть, 6, свободно, женат), b = (женский, 23, нет, свободно, не замужем), $\text{пр}_{1,2,4} a$ = (мужской, 25, 6), $\text{пр}_{1,2,4} b$ = (женский, 23, 5).

6.10. $V_{\text{комп}} = \{(3, 4, 4, 4)\}$.

6.11. $P_7 = 7! = 5040$ способов.

6.12. $P_6 = 6! = 720$ способов.

6.13. $A_{10}^4 = \dfrac{10!}{6!} = 5040$ исходов.

6.14. $A_7^3 = \dfrac{7!}{4!} = 210$ вариантов.

6.15. $C_8^3 = \dfrac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$ комбинаций.

6.16. $C_6^2 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ соревнований.

Глава 7

7.1. а) да; б) нет.

7.2. а) $X \oplus Y$; б) $X \to (Y \vee Z)$.

7.3. A — «Предприятие продолжает выпуск существующего продукта»; B — «Предприятие ориентировано на сегодняшний рынок»; C — «Следует придерживаться стратегии экономии издержек»; D — «Интенсивный маркетинг не является сильной стороной предприятия»; E — «Интенсивный маркетинг — это сильная сторона предприятия»; F — «Предприятию следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для выпускаемого продукта». Тогда формула $((A \wedge B) \to C) \wedge ((D \to C) \wedge (E \to F))$.

7.4. 9, 14, 13, 16, 27, 10, 11.

7.5. а) $N_{f_1} = \{000, 001, 100, 110\}$, $N_{f_2} = \{010, 011, 101, 110, 111\}$;
б) $N_{f_1} = \{0, 1, 4, 6\}$, $N_{f_2} = \{2, 3, 5, 6, 7\}$.

7.6. а) $x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee xy\overline{z} \vee xyz$, б) $\overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y}z$.

7.7. а) $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})$;
б) $(x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

7.8. а) $1 \oplus xy \oplus xz \oplus yz$; б) $x \oplus z \oplus xyz$.

7.9. а)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{x} \cdot \overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} \vee x\overline{y} \cdot \overline{z} \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$; $(x \vee y \vee z)(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$; $x \oplus y \oplus z \oplus xy \oplus xz$.

б)

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

$\overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z \vee xy\overline{z} \vee xyz$; $(x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)$; $y \oplus xz \oplus xyz$.

7.10. а)

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	+	+	–	–	–
f_2	–	–	+	–	–

Система функций является полной;

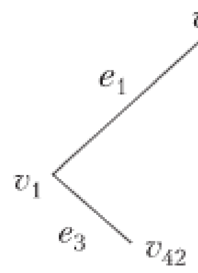
б)

	T_0	T_1	S	M	L
f_1	–	+	–	–	+
f_2	–	–	+	–	–

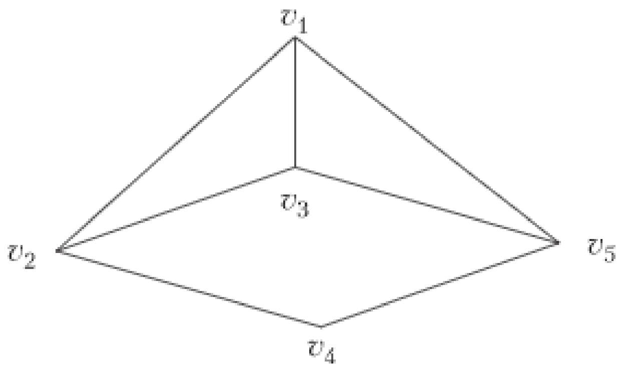
Система функций является полной.

Глава 8

8.1.



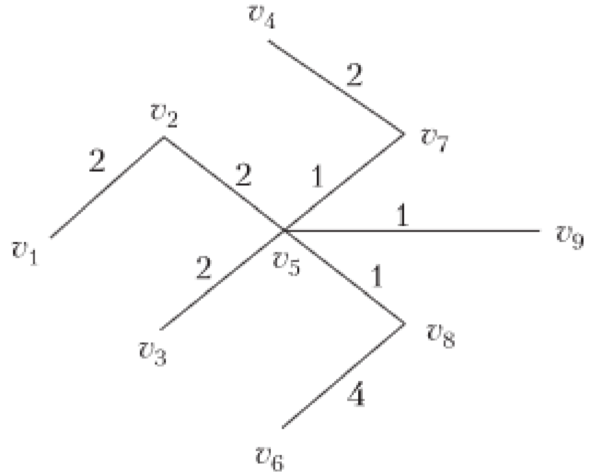
8.2.



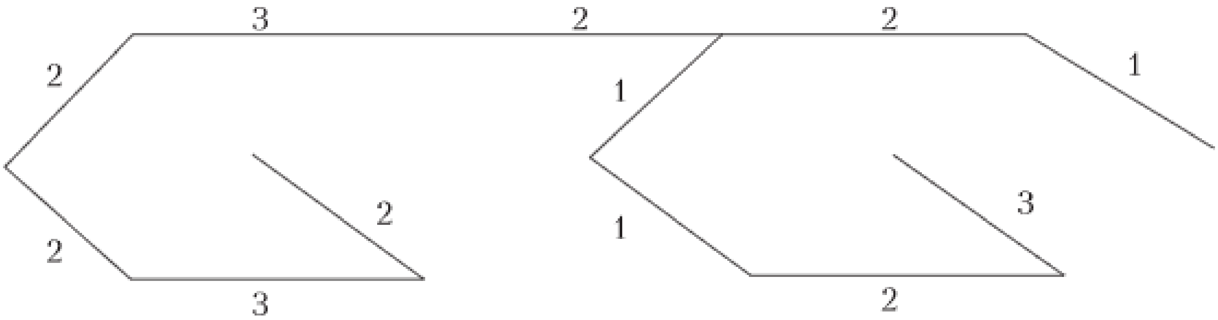
8.3. Матрица инциденций $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, матрица смежности

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

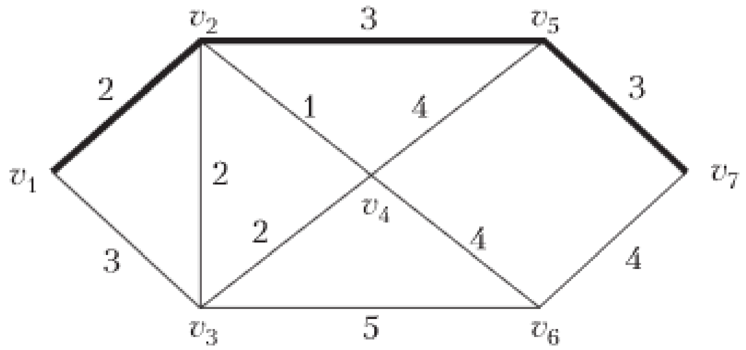
8.4. а) Длина минимального остова равна 15:



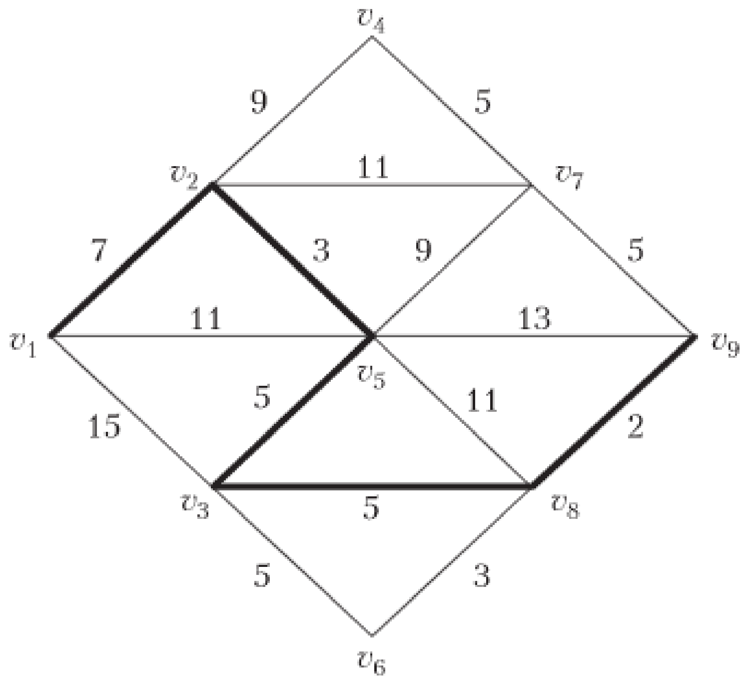
б) длина минимального остова равна 24:



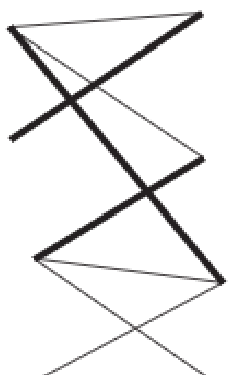
8.5. а) Длина кратчайшего пути равна 8:



б) длина кратчайшего пути равна 22:



8.6.



8.7. а) Сумма эффективностей равна 25; б) сумма эффективностей равна 26.

Глава 9

9.1. а) $x \in [-1; 0) \cup (0; +\infty)$; б) $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; в) $x \in \left(\frac{1}{3}; 2\right)$; г) $x \in \{2\}$; д) $x \in \{\varnothing\}$; е) $x \in \{-1\} \cup (2; 3]$; ж) $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 6\right]$; з) $x \in [-2; 0]$.

9.2. а) $y \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$; б) $y \in [-2\pi; -\pi]$; в) $y \in [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; г) $y \in [-4; 6]$; д) $y \in [0; 2]$; е) $y \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right)$; ж) $y \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right)$.

9.3. а) Четная; б) общего вида; в) нечетная; г) общего вида; д) общего вида; е) общего вида; ж) четная; з) общего вида; и) нечетная.

9.4. а) $T = \frac{\pi}{4}$; б) $T = 4\pi$; в) $T = \pi$; г) $T = 10\pi$.

9.5. $-\frac{4x+7}{7x+6}$.

9.6. $\frac{6x+3}{6x+1}$.

9.7. $f^{-1}(x) = 4 - \sqrt{x-4}$.

Глава 10

10.4. 1) –2,5; 2) 0; 3) ∞; 4) –2 при $x \to +\infty$, 4 при $x \to -\infty$; 5) 0,25; 6) 2 при $x \to +\infty$, –0,2 при $x \to -\infty$; 7) 5 при $x \to +\infty$, –2 при $x \to -\infty$; 8) 0,25; 9) 8; 10) 2; 11) –2,5; 12) ∞; 13) $\frac{1}{9}$; 14) 2; 15) $\frac{1}{108}$; 16) 5; 17) 0; 18) $\frac{1}{6}$; 19) ∞; 20) 0,125; 21) –0,5; 22) –3; 23) ∞; 24) 0; 25) ∞; 26) 0; 27) –2; 28) $\frac{2}{3}$; 29) 1,5 при $x \to +\infty$, –1,5 при $x \to -\infty$; 30) e^{-3}; 31) ∞ при $x \to +\infty$, 0 при $x \to -\infty$; 32) e^{6}; 33) e^{15}; 34) 1; 35) $e^{-4,5}$; 36) e^{9}; 37) e^{-8}; 38) $\frac{1}{15}$; 39) 0,6; 40) ∞; 41) 3; 42) 1,8; 43) 0,5; 44) 2; 45) 1,5; 46) –0,5; 47) 0,8; 48) 3; 49) 1,2.

Глава 11

11.1. а) 3; б) $2e^{2x}$; в) $\frac{2}{\sqrt{2+4x}}$.

11.2. 1) $\frac{12x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^3}$; 2) $x^9\left(10\lg x + \frac{1}{\ln 10}\right)$; 3) $\frac{\sin\ln x - 2\cos\ln x}{2\sqrt{x}\sin^2\ln x}$; 4) $-3^{-x}(\ln 3 \cdot \cos x^3 + 3x^2 \sin x^3)$; 5) $\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\operatorname{arctg} x\left(5\operatorname{arctg} x + \frac{4x}{1+x^2}\right)$; 6) $-2\sin 2x$; 7) $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$; 8) $e^{\sqrt{1-x}}\left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{\operatorname{tg} 3x}{2\sqrt{1-x}}\right)$; 9) $-\frac{4x^3+4^x\ln 4}{1+(x^4+4^x)^2}$;

10) $\dfrac{4\cos x}{3(4-\sin^2 x)}$; 11) $\cos x(\ln\sin x+1)$; 12) $2\operatorname{arctg} x(x\operatorname{arctg} x+1)$;

13) $-\arccos x\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+2\right)$; 14) $\dfrac{7}{4x}+\operatorname{ctg} x+5$; 15) $3\sin 2x$; 16) π;

17) $2xe^{x^2}+4e^{4x}$; 18) $\dfrac{3}{x\ln^2 x}-\dfrac{15}{x^4}$; 19) $\dfrac{\pi}{2\sqrt{1-x^2}\arccos^2 x}$; 20) $\dfrac{\operatorname{arcctg} x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}$;

21) $\dfrac{1}{6\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$; 22) $\dfrac{1}{2x\sqrt{5\ln x}}$; 23) $\dfrac{\operatorname{ctg} x\cdot\ln\cos x+\operatorname{tg} x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$ (перед дифференцированием следует воспользоваться формулой перехода логарифма к другому основанию); 24) 0.

11.3. а) 1; б) 0; в) 8.

11.4. а) $256\sin 8x$; б) $6\ln x+11$; в) $\dfrac{96}{(2x+1)^4}$.

11.5. а) ∞; б) 0; в) $\dfrac{1}{70}$; г) $\dfrac{e^4}{12}$; д) 0; е) 0; ж) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$; з) –0,5; и) 0,4; к) 1; л) 1; м) 1,8; н) 0.

11.6. $y=4x+2$.

11.7. $y=-2x+11$.

11.8. $y=7x+9$, $y=7x+37$.

11.9. $y=x-2$, $y=5x-10$.

11.10. $y=7-x$, $y=-x-1$.

11.11. а) Возрастает на (1; 4), убывает на (–∞; 1) и (4; +∞); б) возрастает на (–1; 0), убывает на (0; 1); в) убывает на (–∞; +∞); г) возрастает на (–0,75; +∞), убывает на (–∞; –1) и (–1; –0,75); д) возрастает на $(e^3;+\infty)$, убывает на $(-\infty;e^3)$; е) возрастает на $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2\pi k;\dfrac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$, убывает на $\left(\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\dfrac{5\pi}{3}+2\pi n\right)$, $n\in Z$; ж) возрастает на $(1;+\infty)$.

11.12. а) Наибольшее $y = 25$, наименьшее $y = -56$; б) наибольшее $y = e^3$, наименьшее $y = 0$; в) наибольшее $y=\dfrac{\pi}{4}$, наименьшее $y = 0$; г) наибольшее $y = 1{,}5$, наименьшее $y = 1$.

11.13. а) 2,06; б) 0,47; в) 0,78; г) 0,03; д) 0,64.

11.14. а) Убывает на (–∞; 0) и (0,5; 1), возрастает на (0; 0,5) и (1; +∞); (0; 0) и (1; 0) — точки минимума, $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{16}\right)$ — точка максимума; вогнута на $\left(-\infty;\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$ и $\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{6};+\infty\right)$, выпукла на $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6};\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$, $x=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ — абсциссы точек перегиба; б) $x = -2$, $x = 2$, $y = 1$ — уравнения асимптот, возрастает на (–∞; –2) и (–2; 0), убывает на (0; 2) и (2; +∞); (0; 0) — точка максимума; в) $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты; убывает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$, возрастает на $(1; +\infty)$; $(1; 3)$ — точка минимума; вогнута на $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$ и $(0; +\infty)$, выпукла на $(-\sqrt[3]{2}; 0)$; $(-\sqrt[3]{2}; 0)$ — точка перегиба; г) $x = 0$, $y = 0$ — уравнения асимптот; возрастает на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$, убывает на $(1; +\infty)$; $(1; 1)$ — точка максимума; вогнута на $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$, выпукла на $\left(0; \frac{4}{3}\right)$; $\left(\frac{4}{3}; \frac{27}{32}\right)$ — точка перегиба; д) $x = 0$ и $y = 0$ — уравнения асимптот; возрастает на $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$, убывает на $(-1; 0)$ и $(0; 1)$; $(-1; -2)$ — точка максимума, $(1; 2)$ — точка минимума; выпукла на $(-\infty; 0)$, вогнута на $(0; +\infty)$; е) $x = -3$, $x = 3$, $y = 1$ — уравнения асимптот; возрастает на $(-\infty; -3)$, $(-3; 1)$, $(9; +\infty)$, убывает на $(1; 3)$ и $(3; 9)$; $(1; -2)$ — точка максимума, $\left(9; \frac{2}{3}\right)$ — точка минимума; ж) область определения функции $x \in [-1; 1]$; асимптот нет; убывает на $\left(-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$, возрастает на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{2}\right)$ — точка минимума, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)$ — точка максимума; вогнута на $(-1; 0)$, выпукла на $(0; 1)$; $(0; 0)$ — точка перегиба; $y(-1) = y(1) = 0$; з) $y = 0$ — уравнение горизонтальной асимптоты; возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$; $(0; 1)$ — точка максимума; вогнута на $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, выпукла на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба; и) $y = 0$ — уравнение правосторонней горизонтальной асимптоты; убывает на $(-\infty; 0)$ и $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$, возрастает на $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; $(0; 0)$ — точка минимума, $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{9e^2}\right)$ — точка максимума; вогнута на $\left(-\infty; \frac{2-\sqrt{2}}{3}\right)$ и $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{3}; +\infty\right)$, выпукла на $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{3}; \frac{2+\sqrt{2}}{3}\right)$; $x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{3}$ — абсциссы точек перегиба; к) $x = 1$ — уравнение вертикальной асимптоты, $y = 0$ — уравнение левосторонней горизонтальной асимптоты; убывает на $(-\infty; 1)$ и $(1; 1{,}5)$, возрастает на $(1{,}5; +\infty)$; $(1{,}5; 2e^3)$ — точка минимума; выпукла на $(-\infty; 0)$, вогнута на $(0; +\infty)$; л) $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты; возрастает на $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$, убывает на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right)$ и $\left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\sqrt{2e}\right)$ — точка максимума, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \sqrt{2e}\right)$ — точка минимума; выпукла на $(-\infty; 0)$, вогнута на $(0; +\infty)$; м) $x = -2$, $x = 2$ — уравнения вертикальных асимптот; возрастает на $(-2; 0)$, убывает на $(0; 2)$; $(0; \ln 4)$ — точка максимума; выпукла на $(-2; 2)$; н) $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты, убывает на $(0; 2)$, возрастает на $(2; +\infty)$; $(2; 2 - \ln 2)$ — точка минимума; вогнута на $(0; +\infty)$; о) $x = 0$ — уравнение вертикальной асимптоты, $y = 0$ — уравнение правосторонней горизонтальной асимптоты; возрастает на $(0; 1)$, убывает на $(1; +\infty)$; $(1; 1)$ — точка максимума; выпукла на $(0; \sqrt{e})$, вогнута на $(\sqrt{e}; +\infty)$; $(\sqrt{e}; 1{,}5\sqrt{e})$ — точка перегиба.

Глава 12

12.1. 1) $\frac{3x-4}{9}e^{3x}+C$; 2) $\frac{3^x}{\ln 3}\left(2x-1-\frac{2}{\ln 3}\right)+C$; 3) $\frac{x^5}{25}(5\ln x-1)+C$;
4) $x^{\frac{4}{5}}\left(\frac{5}{4}\ln x-\frac{25}{16}\right)+C$; 5) $\frac{x^3}{3}-2x^2+3x-6\ln|x-1|+C$;
6) $\ln\left|x+3+\sqrt{(x+3)^2-17}\right|+C$; 7) $\frac{1}{3}e^{x^3+1}+C$; 8) $0{,}5\ln(x^2+\sqrt{x^4+9})+C$;
9) $\operatorname{arctg}(e^x-2)+C$; 10) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C$; 11) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}^3 x+C$;
12) $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-2\ln|x|+C$; 13) $\frac{2}{3}x^{1{,}5}-2x+2\sqrt{x}+C$;
14) $\frac{x}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{x}-\frac{27}{8}+\frac{9}{4}\ln(2\sqrt{x}+3)+C$; 15) $2\sqrt{x-2}-10\ln(\sqrt{x-2}+5)+C$;
16) $0{,}25\sin^4 x+C$; 17) $\frac{1}{\sqrt{10}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}(0{,}5x)+3-\sqrt{10}}{\operatorname{tg}(0{,}5x)+3+\sqrt{10}}\right|+C$;
18) $\frac{1}{28}\sin 14x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$; 19) $C-\frac{1}{3\sin^3(\operatorname{arctg} x)}$; 20) $\arcsin\frac{x-2}{3}+C$;
21) $\ln\frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}+C$.

12.2. 1) $\frac{2}{15}(7^{1{,}5}-2^{1{,}5})$; 2) $5\ln 2-0{,}5$; 3) $-0{,}25\ln 3$; 4) $1+\ln 2$; 5) $24{,}25$;
6) $\frac{1}{5}\ln\frac{8}{3}$; 7) $\frac{3e^4+1}{16}$; 8) $\frac{352}{15}$; 9) $\frac{48}{\ln 3}$; 10) $e-2$; 11) $\frac{\pi}{12}$; 12) 2; 13) $4-2\sqrt{3}$;
14) $e-\sqrt{e}$.

12.3. а) 9 кв. ед.; б) $\left(\frac{16}{3}+8\ln 2\right)$ кв. ед.; в) $\frac{8}{3}$ кв. ед.; г) $\left(4-\frac{1}{\ln 2}\right)$ кв. ед.; д) $\frac{125}{6}$ кв. ед.; е) $\frac{7}{6}$ кв. ед.; ж) 4 кв. ед.; з) $\left(\ln 4-\frac{7}{12}\right)$ кв. ед.; и) 24 кв. ед.

12.4. а) $1{,}5\pi$ куб. ед.; б) $\pi(\ln 2-0{,}5)$ куб. ед.

12.5. а) $\frac{1}{18}$; б) расходится; в) 1; г) расходится; д) 0,5; е) 0.

12.6. Сходится.

Глава 13

13.1. а) Расходится; б) сходится; в) расходится; г) сходится; д) расходится; е) сходится; ж) расходится; з) расходится; и) сходится; к) сходится; л) расходится; м) сходится; н) сходится.

13.2. а) Сходится условно; б) сходится абсолютно; в) сходится абсолютно; г) сходится условно; д) расходится; е) сходится условно; ж) сходится абсолютно; з) сходится абсолютно; и) сходится условно; к) сходится абсолютно.

13.3. а) $[-3;3)$; б) $[-0,5;0,5]$; в) $[-0,25;0,25]$; г) $[-1;1]$; д) $[-1;1)$; е) $(-6;6]$; ж) $(-0,2;0,2]$; з) $(-\infty;+\infty)$; и) $x=0$; к) $[-3;3]$; л) $(-0,25;0,25)$; м) $(1;1)$.

13.4. а) 4,16; б) –0,44; в) 0,183; г) 0,54; д) 0,946.

Глава 14

14.1. а) $z'_x = e^{2x-1}(4xy^2-2x+2y-1)$, $z'_y = e^{2x-1}(x-2xy^2+4xy)$;

б) $z'_x = -\dfrac{\sin(2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y})}{2\sqrt{x}}$, $z'_y = -\dfrac{\sin(2\sqrt{x}+2\sqrt[3]{y})}{3\sqrt[3]{y^2}}$; в) $z'_x = 2^y + y^x\cdot\ln y$,

$z'_y = x\cdot(2^y\ln 2 + y^{x-1})$; г) $z'_x = \dfrac{1}{2(x-y^3)\sqrt{\ln(y^3-x)}}$, $z'_y = \dfrac{3y^2}{2(y^3-x)\sqrt{\ln(y^3-x)}}$;

д) $z'_x = \sin y\cdot x^{\sin y-1}$, $z'_y = x^{\sin y}\cdot\ln x\cdot\cos y$; е) $z'_x = \dfrac{y-\dfrac{1}{y}}{1+\left(xy-\dfrac{x}{y}\right)^2}$, $z'_y = \dfrac{x+\dfrac{x}{y^2}}{1+\left(xy-\dfrac{x}{y}\right)^2}$;

ж) $z'_x = \dfrac{e^{xy}(xy-1)}{x^2y}$, $z'_y = \dfrac{e^{xy}(xy-1)}{xy^2}$; з) $z'_x = -\dfrac{\sin y^3}{2x^3}$, $z'_y = \dfrac{3y^2\cos y^3}{x^2}$;

и) $z'_x = \dfrac{3y\arcsin^2 x}{2\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}}$, $z'_y = \dfrac{3x\arcsin^2 x}{2\sqrt{xy}\sqrt{1-xy}}$.

14.2. а) $z''_{xx} = e^{-x}$, $z''_{yy} = 2x$, $z''_{xy} = 2y$;

б) $z''_{xx} = -\dfrac{4}{(2x-3y)^2}$, $z''_{yy} = -\dfrac{9}{(2x-3y)^2}$, $z''_{xy} = \dfrac{6}{(2x-3y)^2}$;

в) $z''_{xx} = -y^2\sin(xy+1)$, $z''_{yy} = -x^2\sin(xy+1)$, $z''_{xy} = -xy\cdot\sin(xy+1)+\cos(xy+1)$;

г) $z''_{xx} = -\dfrac{2xy}{(1+x^2)^2}$, $z''_{yy} = 0$, $z''_{xy} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14.3. а) (0; 0) — точка максимума; б) (2; –2) — точка максимума; в) (–1; 1) — точка минимума; г) (0,5; –1) — точка минимума; д) (0; 0) — точка минимума, $\left(-\dfrac{5}{3};0\right)$ — точка максимума; е) (0,25; 0,25) — точка минимума; ж) (3; 2) — точка максимума, (–3; 2) — точка минимума; з) (0,5; 1) — точка минимума; и) (2; 2) — точка минимума, (–2; –2) — точка максимума.

14.4. $y = 0,31x + 1,41$ лучше.

14.5. $y = 0,1x + 0,04$ хуже.

14.6. $y = 6,11 - 1,83x$ лучше.

Глава 15

15.1. 1) $y=\dfrac{C}{x^2+\sqrt{1+x^4}}-1$; 2) $3\ln^2 x=\ln(y^3+1)^2+C$, $y=-1$;

3) $y=\dfrac{C}{x+4}$, $x=-4$; 4) $x=C\cdot e^{\sqrt{y^2+1}}$; 5) $\ln|x|=C-\dfrac{y}{x}-\ln\left|\dfrac{y-x}{x}\right|$, $x=0$, $y=x$;

6) $x^2=y^2\ln|x|+Cy^2, y=0$; 7) $\ln|x|=C-\ln\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2}\right|, y=\pm x$; 8) $y+\sqrt{y^2-9x^2}=Cx^2$,

$y=\pm 3x$, $x=0$; 9) $y=(C+x^2)e^{-x^2}$; 10) $y=(C+\ln|x|)e^x$; 11) $y=C\cos x+\sin x$;
12) $xy=C-\ln|x|$; 13) $y=C_1\ln|x|+C_2$; 14) $y=C_2\cdot e^{C_1x}$;
15) $y=C_1e^x+(C_2+C_3x)e^{-x}$; 16) $y=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{-3x}$;
17) $y=C_1e^{-2x}+e^{-x}(C_2\sin\sqrt{3}x+C_3\cos\sqrt{3}x)$; 18) $y=e^{-x}(C_1+C_2x+C_3x^2)$;
19) $y=(C_1+C_2x)\sin x+(C_3+C_4x)\cos x$;
20) $y=e^{-2x}(C_1\sin 3x+C_2\cos 3x)+x^2-\dfrac{8}{13}x+\dfrac{6}{13}$;
21) $y=e^{2x}(C_1\sin x+C_2\cos x)+e^x\left(-\dfrac{2}{15}\sin 2x-\dfrac{1}{15}\cos 2x\right)$;
22) $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+0{,}2e^{4x}$; 23) $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x$;
24) $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+e^x\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{3}\right)$; 25) $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+0{,}1\sin x+0{,}3\cos x$;
26) $y=C_1\sin x+C_2\cos x+3x-\dfrac{1}{3}\sin 2x$; 27) $y=C_1e^{-x}+(C_2+x)e^x+x^2+2$;
28) $0{,}5y^2+y+\ln|y-1|=C-\dfrac{1}{x}$, $y=1$; 29) $y=x(\ln|x|+C)$, $x=0$;
30) $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)$; 31) $y=C_1e^{-2x}+(C_2+C_3x)e^{2x}+C_4\sin 2x+C_5\cos 2x$;
32) $y=\dfrac{C-\cos x}{x}$; 33) $y=\dfrac{x^3}{9}+C_1\ln|x|+C_2$; 34) $y=(C_1x+C_2)^{\frac{2}{3}}$;
35) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-3e^{2x}$; 36) $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-0{,}25e^x(x^2+x)$.

15.2. а) $y=(\ln|1-x^2|+1)^{-1}$; б) $y=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{7x}{6}+1$; в) $y=3e^{-x}-e^{2x}$;

г) $y=x+3-e^x(3x+1)$.

Глава 16

16.1. 0,5.
16.2. 0,25.
16.3. 0,81.
16.4. $\dfrac{1}{12}$.
16.5. 0,03.
16.6. $\dfrac{64}{315}$.

16.7. $\frac{3}{14} = 0{,}214.$

16.8. 0,815.

16.9. 0,25.

16.10. а) 0,384; б) 0,096; в) 0,008.

16.11. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{4}{9}$.

16.12. $\frac{1}{6^5}$.

16.13. $\frac{1}{3}$.

16.14. 0,91.

16.15. $\mu = 0{,}05.$

16.16. 102 попадания.

16.17. $\frac{2}{\pi}$.

16.18. $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$.

16.19. $\frac{53}{70} = 0{,}757.$

16.20. 0,1.

16.21. 0,2797.

16.22. $\frac{67}{315} = 0{,}213.$

16.23. $\frac{1}{13}$.

16.24. 0,9863.

16.25. 0,4552.

16.26. 0,7183.

16.27. $\frac{1}{120}$.

16.28. $\frac{1}{360}$.

16.29. $\frac{1}{40320}$.

16.30. $\frac{1}{60}$.

16.31. а) $\frac{15}{16}$; б) $\frac{2}{3}$.

16.32. 0,5.

16.33. 0,12.

16.34. а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{5}$; в) $\frac{3}{10}$.

16.35. $\frac{13}{28}$.
16.36. 0,44.
16.37. $\frac{7}{18}$.
16.38. 0,6625.
16.39. С картошкой.
16.40. а) $\frac{3}{40}$; б) $\frac{1}{2}$.
16.41. а) 0,825; б) 0,82.
16.42. а) 0,845; б) 0,64.
16.43. а) 0,85; б) 0,28.
16.44. 0,125.
16.45. 0,729.
16.46. $\frac{91}{216}$.
16.47. 0,936.

Глава 17

17.1.

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,5	0,25

17.2.

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

17.3. а) 0,573; б) 0,95; 3.
17.4. 0,005.
17.5. а) $\approx 0{,}008$; б) 0,992.
17.6. 2,6.
17.7. 1/3.
17.8. 1/2.
17.10. 2,2.
17.11. 1,53.
17.12. 2,65.
17.13. 2 детали.
17.14. 12,25 очка.
17.15. 6 билетов.
17.16. $DX = 15{,}21$; $\sigma = 3{,}9$.
17.17. $DX = 0{,}48$.
17.18. $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0, x > 1, \\ 2x, \text{ если } 0 < x \le 1; \end{cases}$ $MX = \frac{2}{3}$, $DX = \frac{1}{9}$, $P\{-1 < X < 0{,}5\} = \frac{1}{4}$.

17.19. $f(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\le 1, x>2,\\ \dfrac{2x-1}{2}, \text{ если } 1<x\le 2;\end{cases}$ $MX=\dfrac{19}{12}, DX=\dfrac{11}{144}, P\{0<X<1{,}5\}=\dfrac{3}{8}.$

17.20. 0,3.

17.21. а) $\dfrac{1}{3}$; б) $MX=2,\ DX=3.$

17.22. а) 0,4392; б) $MX=3,\ DX=3.$

17.23. а) $a=4$; б) 0,0003.

17.24. 0,1359.

17.25. 0,6826.

17.26. $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/8}.$

17.27. $f(x)=\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-(x-3)^2/32}.$

17.28. $MX=1,\ DX=25.$

17.29. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}.$

Глава 18

18.1. $\overline{x}\approx 31{,}74,\ S^2=91{,}6.$

18.2. $\overline{x}\approx 41{,}73,\ S=9{,}92.$

18.3. $\overline{x}\approx -0{,}1,\ S^2=0{,}68.$

18.4. $(49{,}18; 50{,}82).$

18.5.

Вариационный ряд:	–7	–4	–4	3	5	5	9	9	9	9

Статистический ряд

i	1	2	3	4	5
x_i	–7	–4	3	5	9
n_i	1	2	1	2	4

Эмпирическая функция распределения:

i	0	1	2	3	4	5
Диапазон x	$(-\infty; -7]$	$(-7; -4]$	$(-4; 3]$	$(3; 5]$	$(5; 9]$	$(9; +\infty)$
$\sum n_j$	0	1	3	4	6	40
F_i^*	0	0,1	0,3	0,4	0,6	1

18.6. $\overline{x}=0{,}2,\ \tilde{S}^2=2{,}16,\ S^2=2{,}4.$

18.7. $\hat{M}(X)=5\pm 5{,}842; M(X)\in(-0{,}842; 10{,}842); \hat{D}(X)=68;\ D(X)\in(31{,}748;$ $211{,}591).$

18.8.

i	$x_{i-1} \le x \le x_i$	n_i	Δ_i	$w_i = n_i / n$	w_i / Δ
1	10—12	6	2	0,12	0,06
2	12—14	2	2	0,04	0,02
3	14—16	7	2	0,14	0,07
4	16—18	10	2	0,20	0,7
5	18—20	6	2	0,12	0,06
6	20—22	6	2	0,12	0,06

Глава 19

19.1. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

19.2. $P = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 & 0,6 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$

19.3. а) $P(2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{18} & \frac{4}{9} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$; б) $\overline{p}(2) = \left(\frac{7}{18}; \frac{4}{9}; \frac{1}{6}\right)$; в) $\hat{p}_1 = \frac{4}{9}, \hat{p}_2 = \frac{1}{3}, \hat{p}_3 = \frac{2}{9}.$

19.4. $\hat{p}_1 = \frac{1}{14}, \hat{p}_2 = \frac{3}{14}, \hat{p}_3 = \frac{5}{7}.$

19.5. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; а) $\overline{p}(1) = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$; б) $\overline{p}(1) = \left(\frac{1}{12}; \frac{1}{3}; \frac{7}{12}\right)$; $\hat{p}_1 = 0,$ $\hat{p}_2 = 0, \hat{p}_3 = 1.$

19.6. а) $p_5(2) = \frac{1}{48e^3}$; б) $\hat{p}_2 = \frac{1}{41}, \rho = \frac{1}{4}, \hat{p}_0 = \frac{32}{41}$; в) $\hat{p}_2 = \frac{7}{288}, \hat{p}_0 = \frac{7}{9}$;

г) $\hat{p}_{2+4} = \frac{7}{9 \cdot 4^8}$; д) $t_{\text{ожид}} = \frac{1}{252}$ ч.

Приложение

Таблица П1

Значения плотности стандартного нормального распределения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3960	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,013	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081

Окончание табл. П1

x	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,00203	0,00196	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,00115	0,0011	0,00107	0,00108	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00043	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00032	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00022	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00015	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,000097	0,000093

Таблица П2

Значения функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,50	0,19146	1,00	0,34134	1,50	0,43319	2,00	0,47725	3,00	0,49865
0,01	0,00399	0,51	0,19497	1,01	0,34375	1,51	0,43448	2,02	0,47831	3,05	0,49886
0,02	0,00798	0,52	0,19847	1,02	0,34614	1,52	0,43574	2,04	0,47932	3,10	0,49903
0,03	0,01197	0,53	0,20194	1,03	0,34849	1,53	0,43699	2,06	0,48030	3,15	0,49918
0,04	0,01595	0,54	0,20540	1,04	0,35083	1,54	0,43822	2,08	0,48124	3,20	0,49931
0,05	0,01994	0,55	0,20884	1,05	0,35314	1,55	0,43943	2,10	0,48214	3,25	0,49942
0,06	0,02392	0,56	0,21226	1,06	0,35543	1,56	0,44062	2,12	0,48300	3,30	0,49952
0,07	0,02790	0,57	0,21566	1,07	0,35769	1,57	0,44179	2,14	0,48382	3,35	0,49960
0,08	0,03188	0,58	0,21904	1,08	0,35993	1,58	0,44295	2,16	0,48461	3,40	0,49966
0,09	0,03586	0,59	0,22240	1,09	0,36214	1,59	0,44408	2,18	0,48537	3,45	0,49972
0,10	0,03983	0,60	0,22575	1,10	0,36433	1,60	0,44520	2,20	0,48610	3,50	0,49977
0,11	0,04380	0,61	0,22907	1,11	0,36650	1,61	0,44630	2,22	0,48679	3,55	0,49981
0,12	0,04776	0,62	0,23237	1,12	0,36864	1,62	0,44738	2,24	0,48745	3,60	0,49984
0,13	0,05172	0,63	0,23565	1,13	0,37076	1,63	0,44845	2,26	0,48809	3,65	0,49987
0,14	0,05567	0,64	0,23891	1,14	0,37286	1,64	0,44950	2,28	0,48870	3,70	0,49989
0,15	0,05962	0,65	0,24215	1,15	0,37493	1,65	0,45053	2,30	0,48928	3,75	0,49991

Окончание табл. П2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,16	0,06356	0,66	0,24537	1,16	0,37698	1,66	0,45154	2,32	0,48983	3,80	0,49993
0,17	0,06749	0,67	0,24857	1,17	0,37900	1,67	0,45254	2,34	0,49036	3,85	0,49994
0,18	0,07142	0,68	0,25175	1,18	0,38100	1,68	0,45352	2,36	0,49086	3,90	0,49995
0,19	0,07535	0,69	0,25490	1,19	0,38298	1,69	0,45449	2,38	0,49134	3,95	0,49996
0,20	0,07926	0,70	0,25804	1,20	0,38493	1,70	0,45543	2,40	0,49180	4,00	0,49997
0,21	0,08317	0,71	0,26115	1,21	0,38686	1,71	0,45637	2,42	0,49224	4,05	0,49997
0,22	0,08706	0,72	0,26424	1,22	0,38877	1,72	0,45728	2,44	0,49266	4,10	0,49998
0,23	0,09095	0,73	0,26730	1,23	0,39065	1,73	0,45818	2,46	0,49305	4,15	0,49998
0,24	0,09483	0,74	0,27035	1,24	0,39251	1,74	0,45907	2,48	0,49343	4,20	0,49999
0,25	0,09871	0,75	0,27337	1,25	0,39435	1,75	0,45994	2,50	0,49379	4,25	0,49999
0,26	0,10257	0,76	0,27637	1,26	0,39617	1,76	0,46080	2,52	0,49413	4,30	0,49999
0,27	0,10642	0,77	0,27935	1,27	0,39796	1,77	0,46164	2,54	0,49446	4,35	0,49999
0,28	0,11026	0,78	0,28230	1,28	0,39973	1,78	0,46246	2,56	0,49477	4,40	0,49999
0,29	0,11409	0,79	0,28524	1,29	0,40147	1,79	0,46327	2,58	0,49506	4,45	0,50000
0,30	0,11791	0,80	0,28814	1,30	0,40320	1,80	0,46407	2,60	0,49534	4,50	0,50000
0,31	0,12172	0,81	0,29103	1,31	0,40490	1,81	0,46485	2,62	0,49560	4,55	0,50000
0,32	0,12552	0,82	0,29389	1,32	0,40658	1,82	0,46562	2,64	0,49585	4,60	0,50000
0,33	0,12930	0,83	0,29673	1,33	0,40824	1,83	0,46638	2,66	0,49609	4,65	0,50000
0,34	0,13307	0,84	0,29955	1,34	0,40988	1,84	0,46712	2,68	0,49632	4,70	0,50000
0,35	0,13683	0,85	0,30234	1,35	0,41149	1,85	0,46784	2,70	0,49653	4,75	0,50000
0,36	0,14058	0,86	0,30511	1,36	0,41309	1,86	0,46856	2,72	0,49674	4,80	0,50000
0,37	0,14431	0,87	0,30785	1,37	0,41466	1,87	0,46926	2,74	0,49693	4,85	0,50000
0,38	0,14803	0,88	0,31057	1,38	0,41621	1,88	0,46995	2,76	0,49711	4,90	0,50000
0,39	0,15173	0,89	0,31327	1,39	0,41774	1,89	0,47062	2,78	0,49728	4,95	0,50000
0,40	0,15542	0,90	0,31594	1,40	0,41924	1,90	0,47128	2,80	0,49744	5,00	0,50000
0,41	0,15910	0,91	0,31859	1,41	0,42073	1,91	0,47193	2,82	0,49760		
0,42	0,16276	0,92	0,32121	1,42	0,42220	1,92	0,47257	2,84	0,49774		
0,43	0,16640	0,93	0,32381	1,43	0,42364	1,93	0,47320	2,86	0,49788		
0,44	0,17003	0,94	0,32639	1,44	0,42507	1,94	0,47381	2,88	0,49801		
0,45	0,17364	0,95	0,32894	1,45	0,42647	1,95	0,47441	2,90	0,49813		
0,46	0,17724	0,96	0,33147	1,46	0,42785	1,96	0,47500	2,92	0,49825		
0,47	0,18082	0,97	0,33398	1,47	0,42922	1,97	0,47558	2,94	0,49836		
0,48	0,18439	0,98	0,33646	1,48	0,43056	1,98	0,47615	2,96	0,49846		
0,49	0,18793	0,99	0,33891	1,49	0,43189	1,99	0,47670	2,98	0,49856		

Значения квантилей распределения

k	Значения квантилей распределения Стьюдента					
	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920
6	0,131	0,265	0,404	0,543	0,718	0,906
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868
13	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861
20	0,127	0,2a7	0,391	0,533	0,687	0,860
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855
28	0,127	0,256	0,339	0,530	0,683	0,855
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851
60	0,126	0,254	0,387	0,527	0,679	0,848
120	0,126	0,254	0,386	0,526	0,677	0,845
¥	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842

Стьюдента $P(t < t_p) = p$

при уровне доверия $\alpha = 1 - p$						
0,85	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,9995
1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
1,156	1,476	2,015	2.571	3.365	4,032	6,869
1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5.408
1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
1,088	1,363	1.796	2,201	2.718	3,106	4,437
1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,173
1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
1,058	1,315	1,706	2.056	2,479	2,779	3,707
1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
0,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
0,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
0,041	1,289	1,658	1,980	2.358	2,617	3,373
0,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Значения квантилей χ^2- распределения

k	Значения квантилей χ^2-распределения					
	0,01	0,02	0,05	0,1	0,2	0,3
1	0,0157	0,0628	0,0393	0,0158	0,0642	0,148
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195
5	0,554	0,752	1,145	1,160	2,343	3,000
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393
10	2,358	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624
17	6,408	7,255	8,672	10,035	12,002	13,531
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352
20	8,260	9,237	10,851	12,443	14,578	16,266
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,719
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508

$$P(\chi^2 < \chi_p^2) = p$$

при уровне доверия $\alpha = 1 - p$						
0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
4,351	6,064	7,289	9,233	11,070	13,388	15,086
5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
11,340	14,011	15,821	18,549	21,026	24,054	26,217
12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
13,339	16,222	18,151	21,064	23,585	26,873	29,141
14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
15,333	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Наши книги можно приобрести:

Учебным заведениям и библиотекам:
в отделе по работе с вузами
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: vuz@urait.ru

Частным лицам:
список магазинов смотрите на сайте urait.ru
в разделе «Частным лицам»

Магазинам и корпоративным клиентам:
в отделе продаж
тел.: (495) 744-00-12, e-mail: sales@urait.ru

Отзывы об издании присылайте в редакцию
e-mail: gred@urait.ru

Новые издания и дополнительные материалы доступны на образовательной платформе «Юрайт» urait.ru, а также в мобильном приложении «Юрайт.Библиотека»

Учебное издание

Седых Ирина Юрьевна,
Гребенщиков Юрий Борисович,
Шевелев Александр Юрьевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ГУМАНИТАРНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Учебник и практикум для вузов

Формат 70×100 1/16.
Гарнитура «Charter». Печать цифровая.
Усл. печ. л. 34,37

ООО «Издательство Юрайт»
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru