Прикладной статистический анализ данных

Анализ зависимостей

Андрей Грабовой

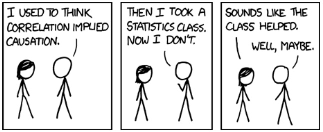
Задача исследования взаимосвязи между признаками

Дано: значения признаков X_1, X_2 измерены на объектах $1, \dots, n$.
Эквивалентная формулировка: имеются связанные выборки $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ и $X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$.

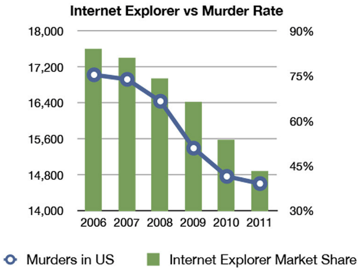
Насколько сильно признаки X_1, X_2 связаны между собой?

Статистическая взаимосвязь между случайными величинами — **корреляция**.

Корреляция и причинность



Корреляция — статистическая взаимосвязь между случайными величинами; не является достаточным условием причинно-следственной:



Другие примеры: `http://www.tylervigen.com/`

Корреляция Пирсона

Коэффициент корреляции Пирсона $r_{X_1X_2}$ случайных величин X_1 и X_2 — мера силы **линейной** корреляции между ними:

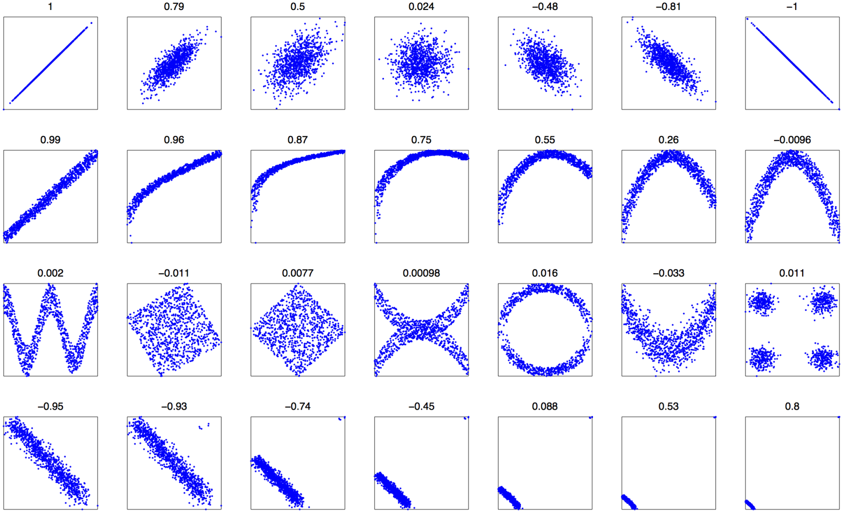
$$r_{X_1X_2} = \frac{\mathbb{E}\left(\left(X_1 - \mathbb{E}X_1\right)\left(X_2 - \mathbb{E}X_2\right)\right)}{\sqrt{\mathbb{D}X_1\mathbb{D}X_2}}.$$

$r_{X_1X_2} \in [-1, 1]$.

Пусть имеется простая выборка пар $\left(X_{1i}, X_{2i}\right), i = 1, \ldots, n$.
Выборочный коэффициент корреляции Пирсона:

$$\hat{r}_{X_1X_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)^2}}.$$

Корреляция Пирсона

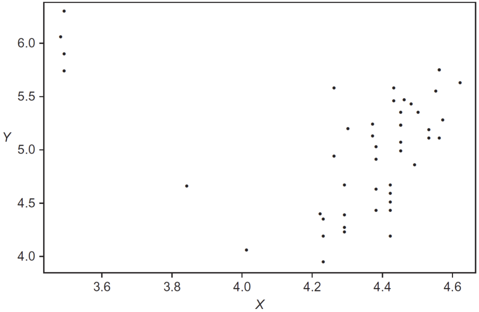


http://guessthecorrelation.com/

Корреляция Пирсона

Недостатки выборочного коэффициента Пирсона:

- для распределений, отличных от нормального, перестаёт быть эффективной оценкой популяционного коэффициента корреляции;
- служит мерой только линейной взаимосвязи;
- неустойчив к выбросам.



Корреляция между логарифмами эффективной температуры на поверхности звезды (X) и интенсивности её света (Y) получается отрицательной $(\hat{r}_{XY} = -0.21)$ из-за наличия в выборке красных гигантов.

Критерий Стьюдента

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$

$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$

выборки связанные

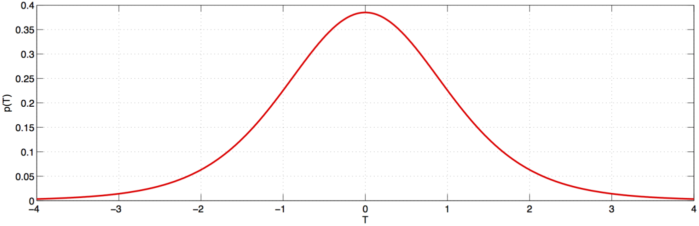
$(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon r_{X_1X_2} = 0$

альтернатива: $H_1\colon r_{X_1X_2} <\neq> 0$

статистика: $T(X_1^n, X_2^n) = \frac{\hat{r}_{X_1X_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2_{X_1X_2}}}$

нулевое распределение: $St(n-2)$



Преобразование Фишера

Стандартная ошибка:

$$\text{SE} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

для t-критерия:

$$\text{SE} = \frac{1 - \hat{r}^2_{X_1 X_2}}{\sqrt{n-2}}.$$

Преобразование Фишера:

$$z = \text{arctanh}(\hat{r}_{X_1 X_2}), \quad z \sim \mathcal{N}$$

$$\text{SE} = \frac{1}{\sqrt{n-3}}.$$

Преобразование Фишера

Доверительный интервал для коэффициента корреляции Пирсона:

$$\left[\hat{r}_{X_1X_2} + \frac{t_{n-2,\alpha/2}\left(1-\hat{r}^2_{X_1X_2}\right)}{\sqrt{n}}, \hat{r}_{X_1X_2} - \frac{t_{n-2,\alpha/2}\left(1-\hat{r}^2_{X_1X_2}\right)}{\sqrt{n}}\right].$$

С использованием преобразования Фишера:

$$\left[\tanh\left(\operatorname{arctanh}\hat{r}_{X_1X_2} + \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right), \tanh\left(\operatorname{arctanh}\hat{r}_{X_1X_2} - \frac{z_{\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}\right)\right].$$

Пример, Kanji, критерий 12

Для двух марок зубной пасты, одна из которых рекламируется по телевизору, а другая нет, участники опроса (30 человек) выставляют оценки в баллах от 1 до 20 в соответствии со своими предпочтениями. Коэффициент корреляции Пирсона между оценками двух марок составляет 0.32, значимо ли эта величина отличается от нуля?

$H_0\colon r_{X_1X_2} = 0$
$H_1\colon r_{X_1X_2} \neq 0$
Критерий Стьюдента: $p = 0.0847$.

Доверительный интервал: $[-0.0157, 0.6557]$.
С использованием преобразования Фишера: $[-0.0455, 0.6100]$.

Перестановочный критерий

выборки:	$X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$
	$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})$
	выборки связанные
нулевая гипотеза:	$H_0\colon r_{X_1X_2} = 0$
альтернатива:	$H_1\colon r_{X_1X_2} <\neq> 0$
статистика:	$T\left(X_1^n, X_2^n\right) = \hat{r}_{X_1X_2}$
нулевое распределение:	порождается перебором $n!$ перестановок индексов одной из выборок

Достигаемый уровень значимости — доля перестановок, на которых получилось такое же или ещё более экстремальное значение статистики.

Пример, Kanji, критерий 12

Для двух марок зубной пасты, одна из которых рекламируется по телевизору, а другая нет, участники опроса (30 человек) выставляют оценки в баллах от 1 до 20 в соответствии со своими предпочтениями. Коэффициент корреляции Пирсона между оценками двух марок составляет 0.32, значимо ли эта величина отличается от нуля?

$\hat{r}_{X_1X_2} = 0.32$
$H_0\colon r_{X_1X_2} = 0$
$H_1\colon r_{X_1X_2} \neq 0$
Критерий Стьюдента: $p = 0.0847$.
Перестановочный критерий: $p = 0.0564$.

Корреляция Спирмена

Коэффициент корреляции Спирмена $\rho_{X_1X_2}$ случайных величин X_1 и X_2 — мера силы **монотонной** корреляции между ними; равен коэффициенту корреляции Пирсона между рангами наблюдений.

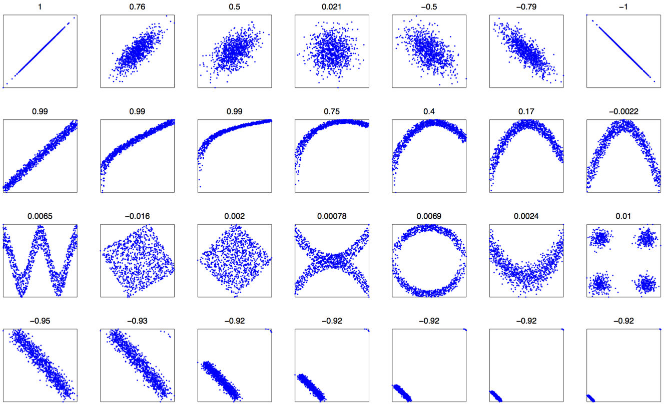
Выборочный коэффициент корреляции Спирмена:

$$\hat{\rho}_{X_1X_2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\operatorname{rank}(X_{1i}) - \frac{n+1}{2}\right)\left(\operatorname{rank}(X_{2i}) - \frac{n+1}{2}\right)}{\frac{1}{12}\left(n^3 - n\right)} =$$

$$= 1 - \frac{6}{n^3 - n}\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{rank}(X_{1i}) - \operatorname{rank}(X_{2i})\right)^2,$$

$\operatorname{rank}(X_{1i}), \operatorname{rank}(X_{2i})$ — ранги i-х наблюдений в соответствующих выборках.

Корреляция Спирмена



Критерий Стьюдента

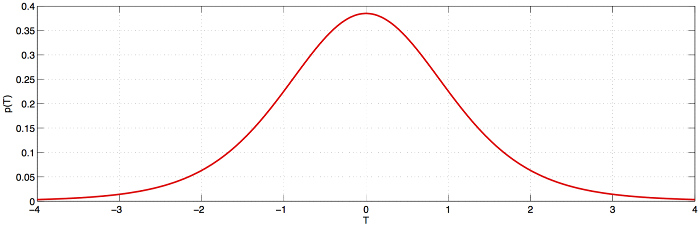
выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon \rho_{X_1 X_2} = 0$

альтернатива: $H_1\colon \rho_{X_1 X_2} <\neq> 0$

статистика: $T\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{\hat{\rho}_{X_1 X_2}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-\rho^2_{X_1 X_2}}}$

нулевое распределение: $St(n-2)$



Критерий Стьюдента

Пример,Kanji, критерий 58

Выборка из 11 потребителей вегетариантских сосисок оценивает качество двух брендов. Если целевая аудитория двух брендов совпадает, то их рекламу можно давать совместно. Корреляция Спирмена оценок потребителей равна -0.854

$H_0: \rho_{X_1 X_2} = 0$
$H_1: \rho_{X_1 X_2} \neq 0$
Критерий Стьюдента: $p = 0.0024$.

Корреляция Кендалла

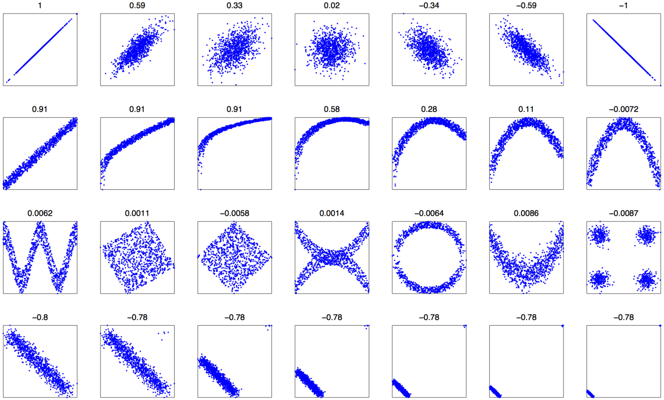
Коэффициент корреляции Кендалла $\tau_{X_1X_2}$ случайных величин X_1 и X_2 — мера их взаимной неупорядоченности; также оценивает силу **монотонной** корреляции между величинами.

Выборочный коэффициент корреляции Кендалла:

$$\hat{\tau}_{X_1X_2} = 1 - \frac{4}{n\left(n-1\right)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left[\left[X_{1i} < X_{1j}\right] \neq \left[X_{2i} < X_{2j}\right]\right] = \frac{C-D}{C+D},$$

где C — число согласованных пар, D — число несогласованных пар.

Корреляция Кендалла



Критерий без названия

выборки:	$X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$
	$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$
	выборки связанные
нулевая гипотеза:	$H_0\colon \tau_{X_1X_2} = 0$
альтернатива:	$H_1\colon \tau_{X_1X_2} <\neq> 0$
статистика:	$\hat{\tau}_{X_1X_2}$
нулевое распределение:	табличное

При справедливости H_0

$$\mathbb{E}\hat{\tau}_{X_1X_2} = 0, \;\; \mathbb{D}\hat{\tau}_{X_1X_2} = \frac{2\,(2n+5)}{9n\,(n-1)}.$$

Для $n > 10$ справедлива аппроксимация нормальным распределением.

Пример,Kanji, критерий 59

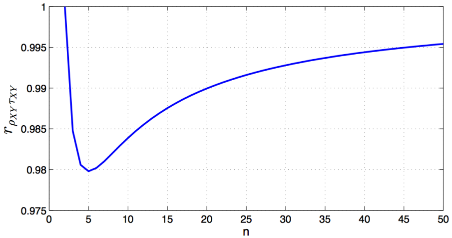
Налоговый инспектор хочет проверить наличие взаимосвязи между величинами общего дохода от инвестиций и общего объёма дополнительных доходов. На выборке из 10 налоговых деклараций он получил $D = 5,\ C = 38,\ \hat{\tau}_{X_1X_2} = 0.7821.$

$H_0\colon \tau_{X_1X_2} = 0.$
$H_1\colon \tau_{X_1X_2} \neq 0 \Rightarrow p = 0.0027.$

Связь между коэффициентами корреляции

При справедливости H_0 (отсутствии монотонной зависимости):

$$r_{\rho_{X_1X_2}\tau_{X_1X_2}} = \frac{2n+2}{\sqrt{4n^2+10n}}$$



http://youtu.be/D56dvoVrBBE: по сравнению с корреляцией Спирмена, корреляция Кендалла

- менее чувствительна к большим различиям между рангами наблюдений;
- точнее оценивается по выборке небольших объёмов;
- обычно меньше по модулю.

$$(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma) \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\tau_{X_1X_2} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\rho_{X_1X_2} = \frac{2}{\pi}\arcsin r_{X_1X_2}.$$

Частная корреляция

Если мы подозреваем, что наблюдаемая линейная взаимосвязь между признаками X_1 и X_2 вызвана влиянием третьего признака X_3, можно попытаться его снять.
Частная корреляция:

$$r_{X_1X_2|X_3} = \frac{r_{X_1X_2} - r_{X_1X_3}r_{X_2X_3}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{X_1X_3}\right)\left(1 - r^2_{X_2X_3}\right)}}.$$

Если нужно снять влияние нескольких признаков, можно пользоваться рекуррентной формулой:

$$r_{X_1X_2|X_3X_4} = \frac{r_{X_1X_2|X_4} - r_{X_1X_3|X_4}r_{X_2X_3|X_4}}{\sqrt{\left(1 - r^2_{X_1X_3|X_4}\right)\left(1 - r^2_{X_2X_3|X_4}\right)}}.$$

Другой вариант: если M — множество признаков, Ω — обратимая матрица их выборочных корреляций, $R = \Omega^{-1}$, то

$$r_{X_iX_j|M\setminus\{X_i,X_j\}} = -\frac{r_{ij}}{\sqrt{r_{ii}r_{jj}}}.$$

Критерий Стьюдента

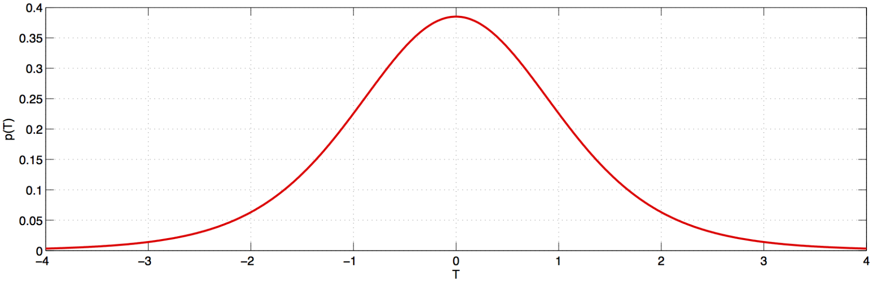
выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$
$X_3^n = (X_{31}, \ldots, X_{3n}), X_3 \in \mathbb{R}^M$
$(X_1, X_2, X_3) \sim N(\mu, \Sigma)$

нулевая гипотеза: $H_0\colon r_{X_1X_2|X_3} = 0$

альтернатива: $H_1\colon r_{X_1X_2|X_3} <\neq> 0$

статистика: $T(X_1^n, X_2^n, X_3^n) = \frac{\hat{r}_{X_1X_2|X_3}\sqrt{n-M-2}}{\sqrt{1-\hat{r}^2_{X_1X_2|X_3}}}$

нулевое распределение: $St(n-M-2)$



Множественная корреляция

Для того, чтобы оценить силу линейной взаимосвязи одной переменной (X_1) с несколькими другими (X_2, X_3), используется множественная корреляция:

$$r_{X_1,X_2,X_3} = \frac{r^2_{X_1X_2} + r^2_{X_1X_3} - 2r_{X_1X_2}r_{X_1X_3}r_{X_2X_3}}{1 - r^2_{X_2X_3}}.$$

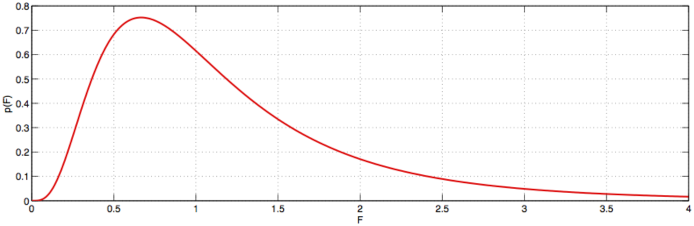
Для большего числа признаков: пусть M — множество дополнительных признаков, Ω — обратимая матрица их выборочных корреляций, $R = \Omega^{-1}$, c — вектор корреляций основного признака X с дополнительными; тогда

$$r^2_{X,M} = c^T Rc.$$

$r_{X,M} \in [0, 1].$

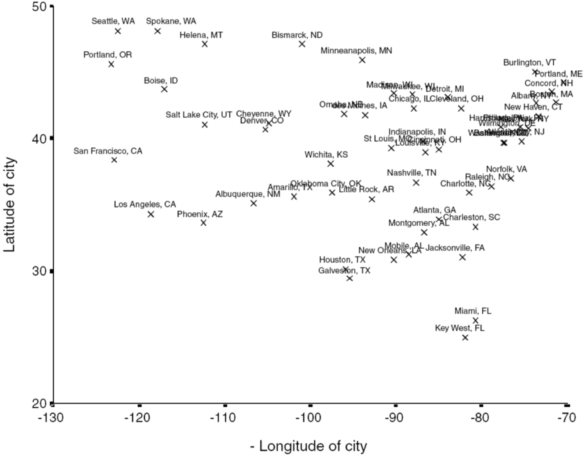
Критерий Фишера

выборки:	$X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n})$
	$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n})\,, X_2 \in \mathbb{R}^M$
	$(X_1, X_2) \sim N(\mu, \Sigma)$
нулевая гипотеза:	$H_0\colon r_{X_1,X_2} = 0$
альтернатива:	$H_1\colon r_{X_1,X_2} > 0$
статистика:	$F\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{\hat{r}^2_{X_1,X_2}}{1-\hat{r}^2_{X_1,X_2}} \frac{n-M-1}{M-2}$
нулевое распределение:	$F(M-2, n-M-1)$

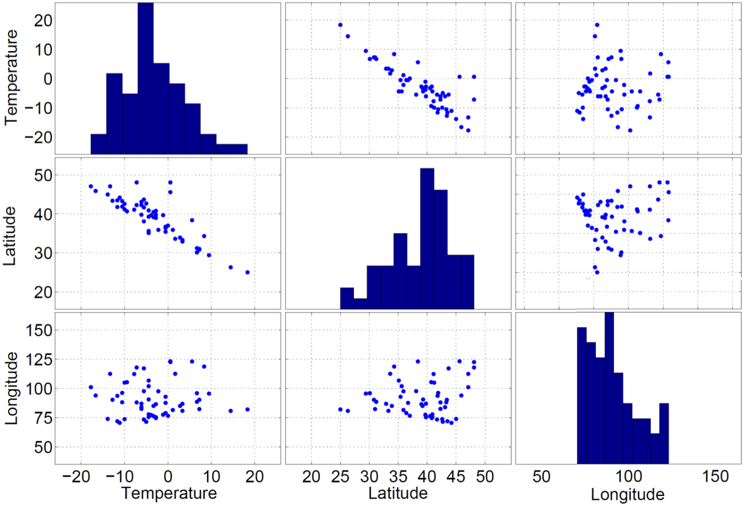


Температура воздуха и географическое положение

По 56 городам США известны средняя минимальная температура января и географические координаты (широта, долгота). Требуется исследовать характер зависимости между переменными.



Температура воздуха и географическое положение



Температура воздуха и географическое положение

T — температура, λ — долгота, ϕ — широта;
r — корреляция Пирсона, ρ — Спирмена, τ — Кендалла.

Коэффициенты корреляции:

r	T	ϕ	λ
T	–	$\mathbf{-0.848}$	0.024
ϕ	$\mathbf{-0.848}$	–	0.145
λ	0.024	0.145	–

τ	T	ϕ	λ
T	–	$\mathbf{-0.683}$	0.030
ϕ	$\mathbf{-0.683}$	–	−0.011
λ	0.030	−0.011	–

ρ	T	ϕ	λ
T	–	$\mathbf{-0.815}$	0.030
ϕ	$\mathbf{-0.815}$	–	0.023
λ	0.030	0.023	–

Достигаемые уровни значимости:

r	T	ϕ	λ
T	–	**0.000**	0.861
ϕ	**0.000**	–	0.287
λ	0.861	0.287	–

τ	T	ϕ	λ
T	–	**0.000**	0.756
ϕ	**0.000**	–	0.910
λ	0.756	0.910	–

ρ	T	ϕ	λ
T	–	**0.000**	0.829
ϕ	**0.000**	–	0.865
λ	0.829	0.865	–

Температура воздуха и географическое положение

T — температура, λ — долгота, ϕ — широта;
r — частная корреляция Пирсона, ρ — Спирмена.

Коэффициенты частной корреляции:

r	T	ϕ	λ
T	–	**−0.861**	**0.280**
ϕ	**−0.861**	–	**0.312**
λ	**0.280**	**0.312**	–

ρ	T	ϕ	λ
T	–	**−0.817**	0.084
ϕ	**−0.817**	–	0.082
λ	0.084	0.082	–

Достигаемые уровни значимости:

r	T	ϕ	λ
T	–	**0.000**	**0.039**
ϕ	**0.000**	–	**0.021**
λ	**0.039**	**0.021**	–

ρ	T	ϕ	λ
T	–	**0.000**	0.543
ϕ	**0.000**	–	0.552
λ	0.543	0.552	–

Температура воздуха и географическое положение

T — температура, λ — долгота, ϕ — широта;
R — множественная корреляция.

Коэффициенты множественной корреляции:

	T	ϕ	λ
R	0.659	0.667	0.312
p	6.0347×10^{-8}	3.6481×10^{-8}	0.0216
with	$0.235 \cdot \lambda - 0.638 \cdot \phi$	$0.397 \cdot \lambda - 0.678 \cdot T$	$1.542 \cdot T + 2.450 \cdot \phi$

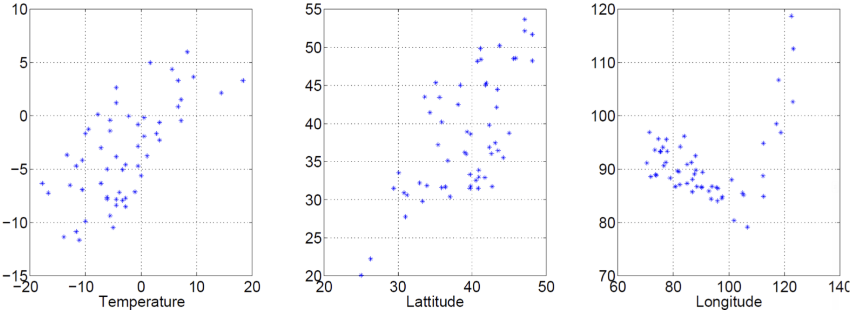


Таблица сопряжённости $K_1 \times K_2$

Имеются связанные выборки $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})$ и $X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})$, $X_1 \in \{1, \ldots, K_1\}$, $X_2 \in \{1, \ldots, K_2\}$.

Таблица сопряжённости:

$X_1 \backslash X_2$	1	$\ldots$	j	$\ldots$	K_2	$\sum$
1						
$\vdots$						
i			n_{ij}			n_{i+}
$\vdots$						
K_1						
$\sum$			n_{+j}			n

Два случайных признака

Пусть π_{ij} — вероятность реализации пары (X_1, X_2) в ячейке (i, j).
$\{\pi_{ij}\}$ — совместное распределение (X_1, X_2);
$\{\pi_{i+}\}, \{\pi_{+j}\}$ — маргинальные распределения:

$$\{\pi_{i+}\} = \sum_{j=1}^{K_2} \pi_{ij},$$

$$\{\pi_{+j}\} = \sum_{i=1}^{K_1} \pi_{ij}.$$

X_1 и X_2 независимы, если

$$\pi_{ij} = \pi_{i+}\pi_{+j} \quad \forall i = 1, \ldots, K_1, j = 1, \ldots, K_2.$$

Один случайный признак

Пусть X_1 — не случайная величина, а фиксированный признак. Тогда $\{\pi_{ij}\}$ не имеет смысла, вместо него рассматриваются $\left\{\pi_{1|i}, \dots, \pi_{K_1|i}\right\}$ — условные распределения X_2 при $X_1 = i$.

X_1 и X_2 независимы, если

$$\pi_{j|1} = \dots = \pi_{j|K_1} \;\; \forall j = 1, \dots, K_2.$$

Порождающие модели

1. Если все ячейки таблицы случайны, то распределение n_{ij} может быть, например, пуассоновским со средними μ_{ij}; совместная функция вероятности таблицы:
$$\prod_i \prod_j \frac{e^{-\mu_{ij}} \mu_{ij}^{n_{ij}}}{n_{ij}!}.$$
2. Если суммарный объём выборки n фиксирован, данные описываются мультиномиальной моделью:
$$\frac{n!}{n_{11}! \cdot \ldots \cdot n_{K_1 K_2}!} \prod_i \prod_j \pi_{ij}^{n_{ij}}.$$
3. Если X_1 не случайна, то фиксированы суммы по строкам n_{i+}, и каждая строка i порождается отдельной мультиномиальной моделью:
$$\frac{n_{i+}!}{\prod_j n_{ij}!} \prod_j \pi_{i|j}^{n_{ij}}.$$

Порождающие модели

Исследование: как исход автомобильной аварии на заданной магистрали X_1 (смертельный, несмертельный) зависит от использования ремня безопасности X_2 (был использован, не был использован)?

Ремень / Исход	использован	не использован
смертельный		
несмертельный		

1. Исследователи собираются учесть все автомобильные аварии, которые произойдут на магистрали в течение года.
2. Исследователи запросят 200 случайных полицейских рапортов об авариях за последние годы.
3. Исследователи запросят 200 случайных полицейских рапортов об авариях за последние годы: 100 об авариях со смертельным исходом и 100 об авариях без смертельного исхода.

Таблица сопряжённости 2×2

Пусть X_1 и X_2 принимают значения 0 и 1.

$X_1 \backslash X_2$	0	1	$\sum$
0	a	b	$a+b$
1	c	d	$c+d$
$\sum$	$a+c$	$b+d$	n

Критерий хи-квадрат

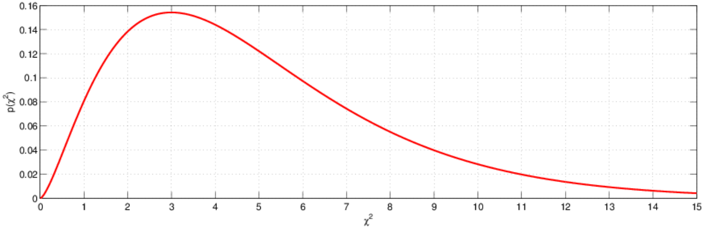
выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}),\ X_1 \in \{1, \dots, K_1\}$
$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}),\ X_2 \in \{1, \dots, K_2\}$
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_1$ и X_2 независимы

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна

статистика: $\chi^2(X_1^n, X_2^n) = \sum\limits_{i=1}^{K_1}\sum\limits_{j=1}^{K_2} \frac{\left(n_{ij} - \frac{n_{i+}n_{+j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i+}n_{+j}}{n}} = n\left(\sum\limits_{i=1}^{K_1}\sum\limits_{j=1}^{K_2} \frac{n_{ij}^2}{n_{i+}n_{+j}} - 1\right)$

нулевое распределение: $\chi^2_{(K_1-1)(K_2-1)}$



Условия применимости критерия:

- $n \geqslant 40$;
- $\frac{n_{i+}n_{+j}}{n} < 5$ не более, чем в 20% ячеек.

Пример

Исследуется влияние препарата на некоторое заболевание. Часть испытуемых принимает препарат, часть — плацебо; по окончании курса определяется, произошло ли выздоровление.

	Выздоровели	Нет
Препарат	850	870
Плацебо	380	410

H_0: препарат неотличим от плацебо.
H_1: эффект препарата отличается от эффекта плацебо $\Rightarrow p = 0.5398$.

G-критерий

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \dots, X_{1n}), X_1 \in \{1, \dots, K_1\}$

$X_2^n = (X_{21}, \dots, X_{2n}), \quad X_2 \in \{1, \dots, K_2\}$

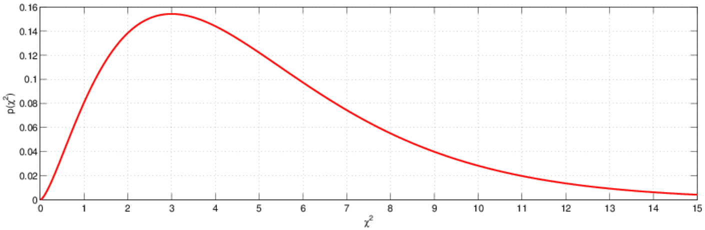
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_1$ и X_2 независимы

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна

статистика: $G^2(X_1^n, X_2^n) = 2\sum_{i=1}^{K_1}\sum_{j=1}^{K_2} n_{ij} \ln \frac{n_{ij} n}{n_{i+} n_{+j}}$

нулевое распределение: $\chi^2_{(K_1-1)(K_2-1)}$



Точный критерий Фишера

выборки: $X_1^n = (X_{11}, \ldots, X_{1n})\,, X_1 \in \{0, 1\}$
$X_2^n = (X_{21}, \ldots, X_{2n})\,, X_2 \in \{0, 1\}$
выборки связанные

нулевая гипотеза: $H_0\colon X_1$ и X_2 независимы

альтернатива: $H_1\colon H_0$ неверна

Пусть в таблице сопряжённости суммы по строкам и столбцам фиксированы, тогда вероятность появления наблюдаемой таблицы равна

$$P\left(X_1^n, X_2^n\right) = \frac{(a+b)!\,(c+d)!\,(a+c)!\,(b+d)!}{a!b!c!d!n!}.$$

Достигаемый уровень значимости определяется как сумма по всем возможным вариантам таблицы с такими же суммами по строкам и столбцам, имеющим вероятность не более $P\left(X_1^n, X_2^n\right)$.

Для односторонней альтернативы $(ad \ll bc)$ достигаемый уровень значимости можно определить через гипергеометрическое распределение:

$$p = \sum_{i=0}^{a} \frac{C_{a+b}^{i} C_{c+d}^{a+c-i}}{C_n^{a+c}}.$$

Пример

Для 26 опрошенных известен пол и сидят ли они на диете. Есть ли связь между этими признаками?

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$H_0:$ связи нет.
$H_1:$ признаки связаны.
Точный критерий Фишера: $p = 0.0008$.

Перестановочный критерий

Представим выборку в виде таблицы $n \times 2$:

	М	Ж
На диете	1	9
Не на диете	13	3

$\Rightarrow$

Строка	Столбец
1	1
1	2
...	
1	2
2	1
...	
2	1
2	2
2	2
2	2

Используем статистику критерия хи-квадрат, но её нулевое распределение будем оценивать по $n!$ перестановок второй колонки.

H_0: связи нет.
H_1: признаки связаны.
Точный критерий Фишера: $p = 0.0008$.
Критерий хи-квадрат: $p = 0.0004$.
Перестановочный критерий со статистикой хи-квадрат: $p = 0.0014$.

Коэффициент V Крамера

Мера взаимосвязи между двумя категориальными переменными — коэффициент V Крамера:

$$\phi_c\left(X_1^n, X_2^n\right) = \sqrt{\frac{\chi^2\left(X_1^n, X_2^n\right)}{n\left(\min\left(K_1, K_2\right) - 1\right)}}.$$

$\phi_c\left(X_1^n, X_2^n\right) \in [0, 1]$;
0 соответствует полному отсутствию взаимосвязи, 1 — совпадению переменных.

Корреляция между порядковыми переменными

Мера взаимосвязи между двумя порядковыми переменными — коэффициент γ:

$$\hat{\gamma} = \frac{p_C - p_D}{n^2 - p_t},$$

где $p_C = \frac{C}{n}$ — частота появления согласованных пар элементов выборки, т. е., таких, что $i_1 > i_2,\ j_1 > j_2$ или $i_1 < i_2,\ j_1 < j_2$;
$p_D = \frac{D}{n}$ — частота несогласованных пар;
$p_t = \frac{T}{n}$ — частота таких пар, что $i_1 = i_2$ или $j_1 = j_2$.
$\gamma \in [-1, 1]$; -1 соответствует полному отсутствию согласованных пар, 1 — отсутствию несогласованных.

Пример

Политические взгляды	Счастье		
	Не слишком счастлив	Вполне счастлив	Очень счастлив
Либеральные	13	29	15
Умеренные	23	59	47
Консервативные	14	67	54

$\chi^2 = 7.07, p = 0.1322, \phi_c = 0.0742;$
$\hat{\gamma} = 0.185,\ 95\%$ доверительный интервал — $[0.032, 0.338]$.

Корреляция Мэтьюса

Мера взаимосвязи между двумя бинарными переменными — коэффициент корреляции Мэтьюса:

$$MCC = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}.$$

$MCC \in [-1, 1]$; 0 соответствует полному отсутствию взаимосвязи, 1 — нулям на побочной диагонали, -1 — нулям на главной диагонали.

Пары переменных разных типов

Между категориальными и непрерывными признаками корреляции считать не нужно!

Пусть $X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \{0, 1\}$;
X_1 и X_2 положительно коррелированы, если $\mathbb{E}\left(X_1 \mid X_2 = 1\right) > \mathbb{E}\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$.

Мера взаимосвязи X_1 и X_2 — разность $\mathbb{E}\left(X_1 \mid X_2 = 1\right) - \mathbb{E}\left(X_1 \mid X_2 = 0\right)$.

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Эксперимент: пациенты принимают препарат или плацебо, по окончании курса определяется, выздоровели они или нет.
Есть ли связь между выздоровлением и приёмом препарата?

Мужчины	Выздоровели	Нет
Препарат	700	800
Плацебо	80	130

Женщины	Выздоровели	Нет
Препарат	150	70
Плацебо	300	280

Для мужчин: $\chi^2 = 5.456,\ p = 0.0195.$
Для женщин: $\chi^2 = 17.555,\ p = 2.8 \times 10^{-5}.$

М+Ж	Выздоровели	Нет
Препарат	850	870
Плацебо	380	410

Суммарно: $\chi^2 = 0.376,\ p = 0.5398.$

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Причины несогласованности выводов — большие отличия в размерах групп пациентов, принимающих плацебо и препарат: основной вклад в выводы вносят женщины, принимавшие плацебо, и мужчины, принимавшие препарат.

Чтобы такого не происходило, плацебо и препарат должны поровну распределяться по всем анализируемым подгруппам.

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

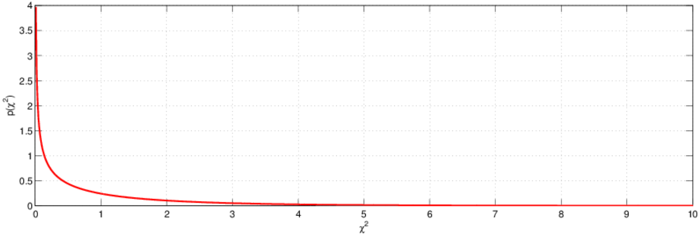
Пример, Bikel at el., 1975

В 1973 году на университет Беркли, Калифорния, подали в суд: доля поступивших абитуриентов мужского пола была выше, чем доля поступивших женского пола.

	Не поступили	Поступили	Доля поступивших
Мужчины	4704	3738	44.3%
Женщины	2827	1494	34.6%

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Критерий хи-квадрат: $\chi^2 = 108.1,\ p \approx 0.$



	Наблюдаемые		Ожидаемые		Разности	
	-	+	-	+	-	+
Мужчины	4704	3738	4981.3	3460.7	-227.3	227.3
Женщины	2827	1494	2549.7	1771.3	227.3	-227.3

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Будем искать виноватых: посмотрим детализированную статистику по 85 факультетам.

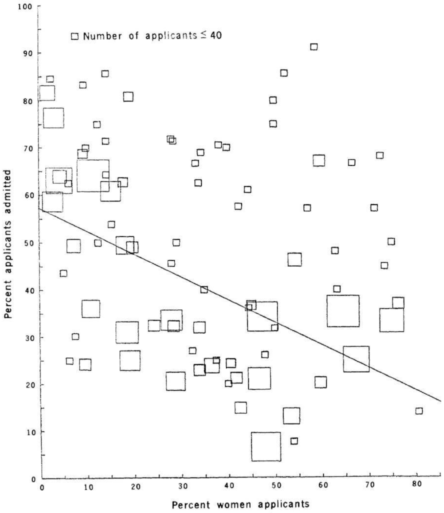
Значимо (при $\alpha = 0.05$) меньше женщин прошли отбор на 4 факультета, суммарный дефицит по ним — 26.
На 6 факультетов поступило значимо меньше мужчин, суммарный дефицит — 64.

Данные по 6 крупнейшим факультетам:

	Мужчины		Женщины	
	$\sum$	$+$	$\sum$	$+$
1	825	62%	108	**82**%
2	560	63%	25	**68**%
3	325	**37**%	593	34%
4	417	33%	375	**35**%
5	191	**28**%	393	24%
6	272	6%	341	**7**%

Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

Ответ: женщины чаще пытались поступить на факультеты с большим конкурсом.



Парадокс хи-квадрат (Симпсона)

"Like fire, the chi-square statistic is an excellent servant and a bad master." (Austin Bradford Hill)

Литература

- непрерывные признаки — Лагутин, гл. 20;
- категориальные признаки — Agresti, гл. 2 и 3, Bilder, разделы 3.1, 3.2, 6.2.1, 6.2.2;
- значимость корреляции Пирсона — Kanji, №12, Good, 3.8;
- значимость корреляции Кендалла и Спирмена — Кобзарь, 5.2.2.2.1, 5.2.2.2.2;
- значимость частной и множественной корреляций — Кобзарь, 5.2.1.3.

Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.

Лагутин М.Б. *Наглядная математическая статистика*, 2007.

Agresti A. *Categorical Data Analysis*, 2013.

Bickel P.J., Hammel E.A., O'connell J.W. (1975). *Sex bias in graduate admissions: data from Berkeley*. Science, 187(4175), 398–404.

Bilder C.R., Loughin T.M. *Analysis of Categorical Data with R*, 2013.

Good P. *Permutation, Parametric and Bootstrap Tests of Hypotheses: A Practical Guide to Resampling Methods for Testing Hypotheses*, 2005.

Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.