Macroeconometría
Laboratorio 0

Febrero 10, 2023

1. Obtén el estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios del modelo de regresión lineal múltiple $Y = X\beta + \varepsilon$

$$Y = X\beta + \varepsilon$$

$$\varepsilon = Y - X\beta$$

$$\varepsilon'\varepsilon = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$
$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - Y'X\beta - \beta'X'Y + \beta'X'X\beta \longrightarrow$$
$$\varepsilon'\varepsilon = Y'Y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta$$

$Y'X\beta$ y $X'\beta'Y$ son escalares:
$Y'X\beta = X'\beta'Y$

Dadas las propiedades:

$$\frac{\partial D\beta'}{\partial\beta} = D \qquad \frac{\partial \beta' C \beta}{\partial \beta} = (C' + C)\beta$$

Entonces:

$$\frac{\partial \varepsilon'\varepsilon}{\partial\beta} = -2X'Y + [(X'X)' + (X'X)]\hat{\beta}_{MCO} = 0$$

$$-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_{MCO} = 0$$

$$2X'X\hat{\beta}_{MCO} = 2X'Y$$

$$X'X\hat{\beta}_{MCO} = X'Y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$I_K\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\hat{\beta}_{MCO} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

b) Obtén el estimador por Máxima Verosimilitud del modelo de regresión lineal múltiple: $y = X\beta + \varepsilon$

$$y = X\beta + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

$$p(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-\varepsilon_i^2}{\sigma^2}}$$

$$L(\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{-\frac{\sum \varepsilon_i^2}{\sigma^2}}$$

$$L(\beta) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{\frac{-\varepsilon'\varepsilon}{\sigma^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^n e^{\frac{-(y-X\beta)'(y-X\beta)}{\sigma^2}}$$

$$\mathcal{L}(\beta) = \ln L(\beta) = n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{(y-X\beta)'(y-X\beta)}{\sigma^2}$$

$$= n \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) - \frac{y'y - 2\beta'X'Y + \beta'X'X\beta}{\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\beta)}{\partial \beta} = \frac{-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_{MV}}{\sigma^2} = 0$$

$$-2X'Y + 2X'X\hat{\beta}_{MV} = 0$$

$$2X'X\hat{\beta}_{MV} = 2X'Y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$I_K \hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\hat{\beta}_{MV} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

c) Obten el estimador por el método de momentos del modelo de regresion lineal múltiple: $Y = X\beta + \varepsilon$

Del supuesto de exogeneidad: $E(X'\varepsilon) = 0$

$$X'(Y - X\beta) = 0$$

$$X'Y - X'X\hat{\beta}_{MM} = 0$$

$$X'X\hat{\beta}_{MM} = X'Y$$

$$(X'X)^{-1}(X'X)\hat{\beta}_{MM} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$I_K \hat{\beta}_{MM} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

$$\hat{\beta}_{MM} = (X'X)^{-1}(X'Y)$$

d) Explica los supuestos que se deben cumplir para que el estimador $\hat{\beta}$ de MCO sea insesgado, consistente y eficiente.

1. Linealidad: $y = X\beta + \varepsilon$
   La relación entre X y Y se da de forma lineal, la Y se explica por una combinación lineal de variables independientes X

2. Exogeneidad

$$E[\varepsilon | X] = 0$$

$$V(X, \varepsilon) = 0$$

$$E[\varepsilon' X] = 0$$

No hay relación entre las variables independientes y el error.

3. No multicolinealidad. No hay autocorrelación entre las variables independientes

4. Esfericidad en los no observables

* Homoscedasticidad:

$$Var(\varepsilon_i | X_i) = \sigma^2 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}$$

La varianza del error es constante y la misma para todos los errores.

* No autocorrelación

$$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad \forall i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$$

Los errores no están correlacionados, son independientes uno de otro.

c) Demuestra que el estimador $\hat{\beta}$ es insesgado, es consistente y eficiente

* Insesgado

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y \qquad E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'Y\right]$$

$$E(\hat{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)\right] = E\left[(X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}(X'\varepsilon)\right]$$

$$E(\hat{\beta}) = E\left[I_K \beta\right] + (X'X)^{-1}X'\cancel{E(\varepsilon)}^{0} \leftarrow \text{Por exogeneidad}$$

$$E(\hat{\beta}) = I_K E[\beta] = I_K \beta = \beta \therefore$$

* Consistencia

$$plim(\hat{\beta}) = plim\left((X'X)^{-1}(X'Y)\right) = plim\left((X'X)^{-1}X'(X\beta + \varepsilon)\right)$$

$$= plim\left((X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)$$

$$= plim(I_K \beta) + plim\left((X'X)^{-1}X'\varepsilon\right)$$

$$= \beta + plim\left((X'X)^{-1}\right) plim(X'\varepsilon) = \beta + plim\left(\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\right) plim\left(\frac{X'\varepsilon}{n}\right)$$

$$= \beta + plim\left(\left(\frac{X'X}{n}\right)^{-1}\right) \underbrace{\cancel{E(X'\varepsilon)}^{0}}_{\text{Por exogeneidad}} = \beta \therefore$$

* Eficiencia

Partiendo del estimador:

$$\tilde{\beta} = \left[(X'X)^{-1}X' + D\right]Y = (X'X)^{-1}X'Y + DY$$

$$E(\tilde{\beta}) = E\left[(X'X)^{-1}X'Y + DY\right] = E\left[(X'X)^{-1}X'(X\beta+\varepsilon) + D(X\beta+\varepsilon)\right]$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}(X'X)\beta + (X'X)^{-1}X'\varepsilon + DX\beta + D\varepsilon\right]$$

$$= (X'X)^{-1}(X'X)E(\beta) + (X'X)^{-1}X'\cancel{E(\varepsilon)}^{0} + DXE(\beta) + D\cancel{E(\varepsilon)}^{0}$$

$$E(\tilde{\beta}) = I_k\beta + DX\beta = \beta + DX\beta$$

$$Var(\tilde{\beta}) = E\left[(\tilde{\beta}-\beta)(\tilde{\beta}-\beta)'\right] = E\left[\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + D\varepsilon\right]\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon + D\varepsilon\right]'\right]$$

$$Var(\tilde{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1} + \sigma^2 DD'$$

$\therefore$ $\tilde{\beta}$ no tiene varianza mínima, portanto el estimador $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}(X'Y)$ es eficiente

f) Obten la matriz varianza-covarianza de $\hat{\beta}$

$$V(\hat{\beta}) = E\left((\hat{\beta}-\beta)(\hat{\beta}-\beta)'\right)$$

$$= E\left((X'X)^{-1}(X'\varepsilon)\left[(X'X)^{-1}(X'\varepsilon)\right]'\right)$$

$$= E\left[(X'X)^{-1}X'\varepsilon\varepsilon'X(X'X)^{-1}\right]$$

$$= (X'X)^{-1}X'E(\varepsilon\varepsilon')X(X'X)^{-1}$$

$$= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 I_n X(X'X)^{-1}$$

$$= \sigma^2(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}$$

$$V(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$