总复习—线性系统部分

郭亚锋

控制科学与工程系

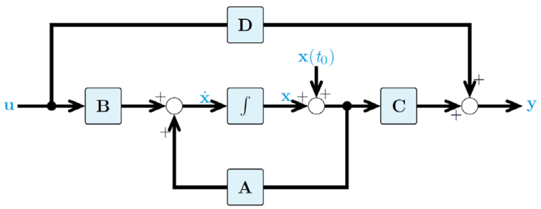
主要内容

1. 状态空间描述
2. 状态方程的解
3. 能控性与能观性
4. 状态反馈控制设计
5. 离散时间系统的状态空间分析

状态空间描述

- **状态方程和输出方程**共同构成可以完整、准确地描述系统的全部动力学特性的状态空间描述。状态变量的**选择不唯一**，**个数唯一**。
- **线性系统**:

$$\begin{cases}\dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u\end{cases}$$



✓ **要求：** 1. 根据机理模型，写出状态空间描述；
2. 根据系统框图，写出状态空间描述；

状态空间描述

- **实现：**由描述系统输入输出动态关系的运动方程或传递函数，建立系统的状态空间表达式的过程称为**实现过程**。

✓ 实现的**维数**

实现的复杂程度由状态向量x的维数n表征。

✓ 实现的**不唯一性**

实现的结果不唯一，维数也不唯一。

✓ **最小实现**

如果实现$\Sigma(A,B,C,D)$在所有的实现中是维数最小的，则称为最小实现。

✓ **最小实现判据**

实现$\Sigma(A,B,C,D)$是**最小实现** $\Longleftrightarrow$ $\Sigma(A,B,C,D)$**能控能观**。

✓ **最小实现的性质**

① 最小实现对应的传递函数没有零极点对消。

② 最小实现之间存在代数等价关系。

状态空间描述

实现

高阶微分方程描述（时域）：

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=b_nu^{(n)}+b_{n-1}u^{(n-1)}+\cdots+b_0u$$

传递函数描述（频域）：

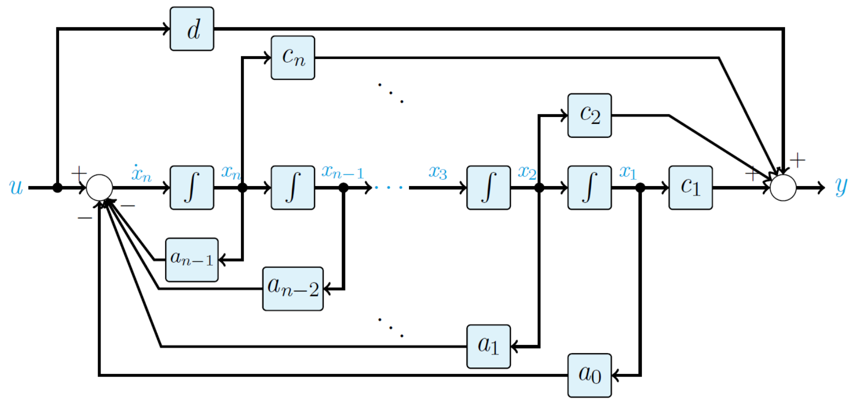
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_0}$$

(1) 可控标准型实现$\boldsymbol{\Sigma(A,B,C,D)}$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}b_0-b_na_0 & b_1-b_na_1 & \cdots & b_{n-1}-b_na_{n-1}\end{bmatrix}x+b_nu$$

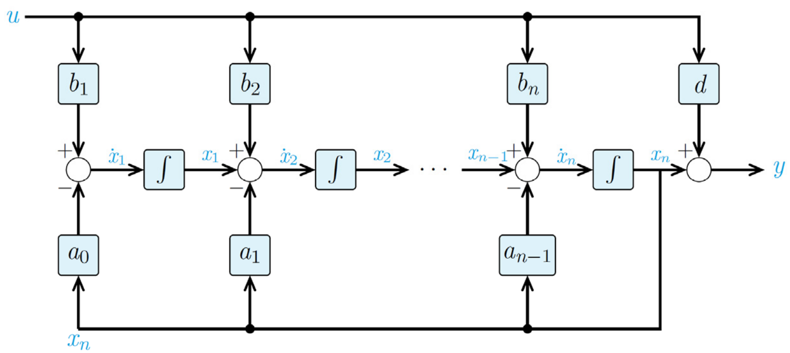
状态空间描述



状态空间描述

(2) 可观标准型实现$\boldsymbol{\Sigma(A^T,C^T,B^T,D)}$

✓ 显然，可观标准型和可控标准型是**对偶关系**



状态空间描述

(3) **若当标准型实现**:

(a) 系统传递函数无重极点时:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_1}{s-\lambda_1}+\frac{k_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{k_n}{s-\lambda_n}$$

$$k_i=\lim_{s\to\lambda_i}(s-\lambda_i)G(s)$$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{bmatrix}x$$

状态空间描述

(3) 若当标准型实现

(b) 系统传递函数有重极点时:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{k_{11}}{(s-\lambda_1)^r}+\frac{k_{12}}{(s-\lambda_1)^{r-1}}+\cdots+\frac{k_{1r}}{(s-\lambda_1)}+\frac{k_2}{s-\lambda_{r+1}}+\cdots+\frac{k_n}{s-\lambda_n}$$

$$k_{1j}=\frac{1}{(j-1)!}\lim_{s\to\lambda_i}\frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}}\left[(s-\lambda_i)^r G(s)\right]$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_r\\ \dot{x}_{r+1}\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 1 & & & & & \\ & \lambda_1 & \ddots & & & 0 & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \lambda_{r+1} & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_r\\ x_{r+1}\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1r} & k_{r+1} & \cdots & k_n\end{bmatrix}x$$

状态空间描述

相似变换及其性质

选择非奇异矩阵P，$\Sigma(A,B,C,D)\overset{x=P\bar{x}}{\Longleftrightarrow}\Sigma(\bar{A},\bar{B},\bar{C},\bar{D})$

$$\bar{A}=P^{-1}AP,\ \bar{B}=P^{-1}B,\ \bar{C}=CP,\ \bar{D}=D$$

✓ 状态维数不变

✓ 系统特征值不变，稳定性不变

$$\begin{aligned}&\det(\lambda I-\bar{A})=\det(\lambda I-P^{-1}AP)\\ &=\det\left[P^{-1}(\lambda I-A)P\right]=\det P^{-1}\det(\lambda I-A)\det P\\ &=\det(\lambda I-A)\end{aligned}$$

✓ 传递函数不变，输入输出关系不变

$$\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D}=C(sI-A)^{-1}B+D$$

✓ 可控性可观性不变

状态空间描述

状态方程转化为若当标准型

- 系统矩阵A**无重特征值**时，则必有非奇异矩阵$P=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$，可将矩阵A化为对角标准型，其中$v_1,v_2,\cdots,v_n$为矩阵A相应于特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$的特征向量。

$$\bar{A}=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

关键在于如何求解矩阵P，具体步骤如下:

通过$\det(A-\lambda I)=0$，求出特征值λ_i；通过$(A-\lambda_i I)v_i=0$，求出v_i；$P=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$，计算P^{-1}，最后求取$\bar{A}=P^{-1}AP,\bar{B}=P^{-1}B,\ \bar{C}=CP,\ \bar{D}=D$。

状态空间描述

状态方程转化为若当标准型

- 特例：当A为相伴型（友矩阵）时，即

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1}\end{bmatrix}$$

那么当矩阵A的特征值两两相异时，P可取范德蒙矩阵:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

1 状态空间描述

☐ 状态方程转化为若当标准型

- 当系统矩阵A**有重特征值**时，当特征值λ_i的几何重数q_i等于其代数重数m_i时，则仍存在n个线性无关的特征向量，此时依旧可以化为对角型；当特征值λ_i的几何重数q_i小于其代数重数m_i，则线性无关的特征向量个数小于n个，此时只能化为若当块形式。

例如，当$q_i=1$，则只有一个线性无关的特征向量v_{i1}与λ_i相对应。其他个线性无关的向量（称为广义特征向量）可以通过求解如下方程得到：

$$\begin{aligned}[A-\lambda_i I]v_{i2}&=v_{i1}\\ [A-\lambda_i I]v_{i3}&=v_{i2}\\ &\vdots\\ [A-\lambda_i I]v_{im_i}&=v_{i(m_i-1)}\end{aligned}$$

2 状态方程的解

☐ 线性定常系统的自由运动

- 自由运动定义：系统在没有外加输入作用下，即$u=0$时，由初始条件引起的运动，又称为零输入响应。
- 齐次状态方程$\dot{x}=Ax$的解：$x(t)=\Phi(t-t_0)x(t_0)$，其中$\Phi(t-t_0)\in R^{n\times n}$，称为状态转移矩阵，并满足：

$$\dot{\Phi}(t-t_0)=A\Phi(t-t_0)$$
$$\Phi(0)=I$$

几点说明：

✓ 物理含义：系统在任意时刻的状态$x(t)$均可由状态转移矩阵$\Phi(t-t_0)$乘以初始状态$x(t_0)$得到，这也是状态转移矩阵得名的原因。

✓ 线性定常系统自由运动的状态由初始状态和状态转移矩阵唯一确定，状态转移矩阵包含了系统自由运动的全部规律。

2 状态方程的解

☐ 线性定常系统的自由运动

- 线性定常系统的状态转移矩阵：

$$\Phi(t-t_0)=e^{A(t-t_0)}$$
$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^nt^n}{n!}$$
$$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$$

- 状态转移矩阵的基本性质：

✓ 可逆性： $\Phi^{-1}(t-t_0)=\Phi(t_0-t)$， 即 $\left[e^{A(t-t_0)}\right]^{-1}=e^{A(t_0-t)}$

✓ 分解性： $\Phi(t_1+t_2)=\Phi(t_1)\Phi(t_2)$， 即 $e^{A(t_1+t_2)}=e^{At_1}\cdot e^{At_2}$

✓ 传递性： $\Phi(t_2-t_1)\cdot\Phi(t_1-t_0)=\Phi(t_2-t_0)$， 即 $e^{A(t_2-t_1)}\cdot e^{A(t_1-t_0)}=e^{A(t_2-t_0)}$

2 状态方程的解

☐ 线性定常系统的自由运动

- 几个特殊的矩阵指数

✓ A为对角矩阵时：

$$A=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{bmatrix}\qquad e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

✓ A为$m\times m$若当矩阵时：

$$A=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & \\ & \lambda & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1\\ & & & & \lambda\end{bmatrix}\qquad e^{At}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1}e^{\lambda t}\\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(m-2)!}t^{m-2}e^{\lambda t}\\ & & \ddots & \ddots & \vdots\\ & & & \ddots & te^{\lambda t}\\ & & & & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

2 状态方程的解

□ **线性定常系统的自由运动**

● 矩阵指数e^{At}的计算方法：

✓ 根据矩阵指数的定义求解：

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^nt^n}{n!}$$

✓ 应用拉式反变换法求解：

$$e^{At}=\mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]$$

✓ 将矩阵A化为对角标准型或约当标准型求解：

经过非奇异变换，可将系统矩阵A变换为对角型或约当型，即

$$\bar{A}=P^{-1}AP$$
$$A=P\bar{A}P^{-1}$$
$$e^{At}=Pe^{\bar{A}t}P^{-1}$$

2 状态方程的解

● 矩阵指数e^{At}的计算方法：

✓ 利用凯莱-哈密尔顿定理求解： $e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$

当矩阵A的特征值两两相异时：

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\ 1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

当λ_i为代数重数m_i的特征值时，可以构造如下m_i个线性独立的方程：

$$e^{\lambda_i t}=a_0(t)+a_1(t)\lambda_i+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1}$$
$$\left.\frac{de^{\lambda t}}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_i}=\frac{d}{d\lambda}\left[a_0(t)+a_1(t)\lambda+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_i}$$
$$\vdots$$
$$\left.\frac{d^{m_i-1}e^{\lambda t}}{d\lambda^{m_i-1}}\right|_{\lambda=\lambda_i}=\frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}}\left[a_0(t)+a_1(t)\lambda+\cdots+a_{n-1}(t)\lambda^{n-1}\right]\Big|_{\lambda=\lambda_i}$$

2 状态方程的解

□ **线性定常系统的强迫运动**

● 线性定常系统状态方程：

$$\dot{x}=Ax+Bu,\ x(t_0)=x_0,\ t\ge t_0$$

● 系统的状态响应：

$$x(t)=\boxed{e^{A(t-t_0)}x_0}+\boxed{\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau,\ t\ge t_0}$$

零输入响应+零状态响应

3 能控性与能观性

□ **背景知识：**能控性和能观性是现代控制理论两个重要的基本概念。1960年由卡尔曼首先提出。卡尔曼是美籍匈牙利人，是现代控制理论的主要奠基人。首先引入状态空间分析法，提出能控能观、卡尔曼滤波、最优控制的问题等。

✓ 能控性是$u(t)$支配$x(t)$的能力；在有限时间内，控制作用能否使系统从初始状态转移到要求的状态。

✓ 能观性是$y(t)$反映$x(t)$的能力；在有限时间内，能否通过对系统输出的测定来估计系统的初始状态。

3 能控性与能观性

□ 线性定常系统的能控性和能观性定义

- 能控性定义:

若存在一分段连续控制向量 $u(t)$,能在有限时间区间$[t_0, t_1]$内将系统从任意初始状态$x(t_0)$转移到任意终端状态$x(t_1)$，那么就称此状态是能控的。若系统任意时刻的状态都是能控的，就称此系统是状态完全能控的，简称能控。

几点说明:

✓ 如果系统状态不能控，则可以把全部状态转化为能控和不能控部分。

✓ 控制作用$u(t)$是无约束的，但是在有限时间区间上平方可积的。

✓ 对线性系统做相似变换，不改变系统的能控性。即代数等价的系统，具有相同的能控性。

3 能控性与能观性

□ 线性定常系统的能控性和能观性定义

- 能观性定义:

在任意给定的输入$u(t)$下，能够根据输出量$y(t)$在有限时间区间$[t_0, t_1]$内的测量值，唯一地确定系统在t_0时刻的初始状态，就称系统在t_0时刻是能观测的。若在任意初始时刻系统所有状态都能观测，则称系统是状态完全能观测的，简称能观测。

几点说明:

✓ 若系统状态不能观，则可以把全部状态转化为能观和不能观两部分。

✓ 若知道了初始状态，就能根据系统的状态方程求得$t \geq t_0$任何时刻系统的状态，从而达到了根据测量值观测到系统状态变量的目的。

✓ 代数等价系统，具有相同的能观测性。

3 能控性与能观性

□ 线性定常系统的能控性判据

- **格拉姆矩阵判据：** 系统(A, B)是完全能控的，当且仅当对于任意的初始时刻t_0和任意的终端时刻$t_1 > t_0$，可控性格拉姆矩阵$W(t_0, t_1)$是非奇异的。

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_0-\tau)}BB^T e^{A^T(t_0-\tau)}d\tau$$

✓ **问题：** 假定系统完全能控，试寻找一个容许控制向量 $u(t)$，在有限时间区间$[t_0, t_1]$内将系统从任意初始状态$x(t_0) = x_0$转移到状态$x(t_1) = x_1$。

解答： 系统完全能控，则可控性格拉姆矩阵可逆，构造如下控制$u(t)$即可满足要求。

$$u(t)=B^T e^{A^T(t_0-t)}W^{-1}(t_0,t_1)(e^{A(t_0-t_1)}x_1-x_0),\ \ t_0 \le t \le t_1$$

代入

$$x(t_1)=e^{A(t_1-t_0)}x_0+\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

即可验证。

3 能控性与能观性

□ 线性定常系统的能控性判据

- **秩判据：** 系统(A, B)是完全能控的，当且仅当能控性矩阵

$$Q_c=\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

的秩为n，即$\mathrm{Rank}(Q_c) = n$ 。

- **PBH判据：** 系统(A, B)是完全能控的，当且仅当状态矩阵A的所有特征值λ_i满足 $\mathrm{Rank}[\lambda_i I - A, B] = n,\ i = 1, 2, \cdots, n$

✓ **推论1：** 如果状态矩阵A为对角阵，且特征值各不相同，则系统(A, B)完全可控的充要条件为B没有全零行。

✓ **推论2：** 如果状态矩阵A为若当矩阵，则系统(A, B)完全可控的充要条件：对于同一个特征值的若当块的最后一行对应的B矩阵的行向量为线性无关的。

3 能控性与能观性

□ 线性定常系统的能观性判据

- **秩判据：** 系统(A,C)是完全能观的，当且仅当能观性矩阵 $Q_o=\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ 的秩为n，即$\mathrm{Rank}(Q_o)=n$ 。

- **PBH判据：** 系统(A,C)是完全能观的，当且仅当状态矩阵A的所有特征值λ_i满足

$$\mathrm{Rank}\begin{bmatrix} \lambda_i I-A \\ C \end{bmatrix}=n,\ i=1,2,\cdots,n$$

✓ **推论1：** 如果状态矩阵A为对角阵，且特征值各不相同，则系统(A,C)完全能观的充要条件为C没有全零行。

✓ **推论2：** 如果状态矩阵A为若当矩阵，则系统(A,C)完全能观的充要条件是，对于同一个特征值的若当块的第一列对应的C矩阵的列向量为线性无关的。

3 能控性与能观性

□ 能控标准型和能观标准型

✓ 如果系统是能控的，则必存在非奇异变换$x=P_c\bar{x}$，将系统变换为**能控标准型**，其中

$$P_c^{-1}=\begin{bmatrix} p_{c1} \\ p_{c1}A \\ p_{c1}A^2 \\ \vdots \\ p_{c1}A^{n-1} \end{bmatrix} \qquad p_{c1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}Q_c^{-1}$$

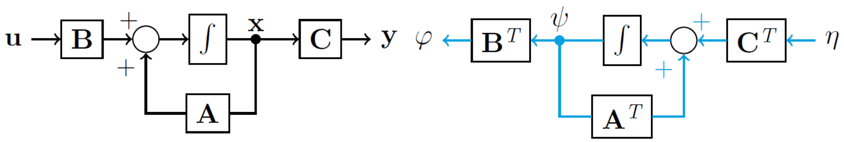
✓ 如果系统是能观的，则必存在非奇异变换$x=P_o\bar{x}$，将系统变换为**能观标准型**，其中

$$P_o=\begin{bmatrix} p_{o1} & Ap_{o1} & A^2p_{o1} & \cdots & A^{n-1}p_{o1} \end{bmatrix} \qquad p_{o1}=Q_o^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3 能控性与能观性

□ 对偶性原理

- **对偶系统：** $\Sigma_1(A,B,C)$与$\Sigma_2(A^T,C^T,B^T)$



- **对偶性原理：** 系统Σ_1的能控性和系统Σ_2的能观性相同；系统Σ_1的能观性和系统Σ_2的能控性相同。

3 能控性与能观性

□ 系统能控能观性分解

✓ 分解方法和步骤。

✓ 系统的传递函数只反映**能控能观子系统**。

✓ 给定具体系统，如果是部分分解的形式，能否识别。

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{co} \\ \dot{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \hdashline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \hdashline \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array}\right] \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\left[\begin{array}{cc:cc} \bar{\mathbf{C}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \end{array}\right]\bar{\mathbf{x}}$$

4 状态反馈控制设计

□ 背景知识

✓ 在经典控制理论中，用传递函数描述系统，只能由系统的输出变量来构成反馈律，即输出反馈。输出变量容易直接测量得到，而且在大多数情况下具有明确的物理意义，所以输出反馈是一种在技术上易于实现的常用的反馈方式。输出反馈只能在一定范围内改变闭环系统极点的位置，因此其能取得的性能受限。

✓ 现代控制理论采用系统内部的状态来描述系统，所以除了可使用输出反馈之外，还可以从系统的状态引出信号作为反馈量，这种反馈方式成为状态反馈。状态反馈可以任意的配置闭环系统极点的位置，因此其功能比输出反馈更强。事实上，输出反馈可视为状态反馈的特例。

4 状态反馈控制设计

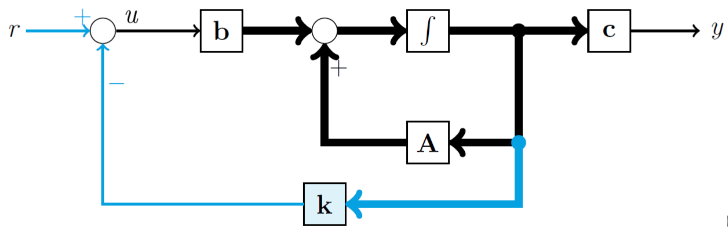
□ 状态反馈

给定系统：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

在系统中引入反馈控制率 $u = r - Kx$，则闭环系统为：

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx$$



4 状态反馈控制设计

□ 状态反馈

$$\dot{x} = (A - BK)x + Br$$
$$y = Cx$$

● **注意：**

✓ 若$K = HC$，则$Kx = Hy$，状态反馈就退化为输出反馈$u = r - Hy = r - HCx$。

✓ 反馈的引入并不增加新的状态变量，也即闭环系统和开环系统具有相同的维数。

✓ 两种反馈闭环系统均不改变系统的能控性。

✓ 状态反馈可以影响系统的能观测性；输出反馈形式不影响系统的能观测性。

✓ 输出反馈不能实现任意的指标要求，状态反馈理论上可实现任意的动态指标要求，具有更好的特性。

4 状态反馈控制设计

□ **极点配置**——指的是使得给定系统的闭环极点处于所希望的位置。

● **极点配置定理：**给定系统Σ，通过状态反馈$u = r - Kx$任意配置极点的充要条件是系统Σ完全能控。

✓ **推论：**当系统Σ不完全能控时，通过状态反馈$u = r - Kx$使其闭环系统稳定的充要条件是系统Σ的不能控极点都具有负实部（称为能稳定或能镇定的Stabilizable）。

镇定问题是极点配置的一种特殊情况，它只要求把闭环极点配置在根平面的左侧，并不要求将极点严格的配置在期望的位置。

4 状态反馈控制设计

- **极点配置的几点说明：**

✓ 对于一个n维控制系统，须给定n个希望的极点；

✓ 所希望的极点可以为实数或复数，当以复数形式给出时，必须以共轭对形式出现，即物理上是可实现的；

✓ 选取所希望极点的位置，需要研究它们对系统品质的影响，以及它们与零点分布状况的关系，从过程实际的角度加以选取；

✓ 状态反馈不会移动系统传递函数的零点；

✓ 必须考虑抗干扰和低灵敏度方面的要求，即有较强的抑制干扰的能力，及较低的对系统参数变动的灵敏度；

✓ 若系统是不完全能控的，可将其状态方程变换成如下形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_c \\ \dot{\tilde{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_c & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_c \\ \tilde{x}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{b}_c \\ 0 \end{bmatrix} u$$

其中$\tilde{A}_{\bar{c}}$的特征值不能被配置。

✓ 系统综合往往需要将不稳定的极点，移到s平面的左半平面，这一过程称为系统镇定。只有$\tilde{A}_{\bar{c}}$的全部特征值都具有负实部时，系统才能镇定。

4 状态反馈控制设计

□ **极点配置方法**

- **按定理证明过程配置（化为能控标准型的方法）**

① 检验系统的能控性。

② 求取系统矩阵A的特征多项式$\Delta(s)$和期望的特征多项式$\Delta^*(s)$。

③ 计算变换矩阵P_c^{-1} 。

④ 计算期望的状态反馈增益 $k=\begin{bmatrix} a_0^*-a_0 & a_1^*-a_1 & \cdots & a_{n-1}^*-a_{n-1} \end{bmatrix} P_c^{-1}$

■ **直接法**

$$\det(sI-A+bk)=(s-\lambda_1^*)(s-\lambda_2^*)\cdots(s-\lambda_n^*)$$

■ **Ackermann公式方法**

$$k=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} Q_c^{-1}\Delta^*(A)$$

✓ **注意：**工程实践中，系统的动态特性往往以时域指标给出，比如超调量，调节时间等指标等。考试直接给出期望极点位置。

4 状态反馈控制设计

□ **状态观测器**

- **背景知识**

由于技术和经济上的原因，许多状态变量往往不是简单易测的物理量，此时如何实现状态反馈？解决这个问题的途径之一就是重构系统的状态。这就是所谓的状态重构问题，而这样的装置通常称为状态估计器或状态观测器。

一种具一般性的观测器设计方法，是由龙博格（Luenberger）提出的。这种观测器运用于系统被测量的物理量未受到噪声污染的情况，即所谓确定性系统情况。

另一种观测器是卡尔曼滤波器，它适用于被测量的物理量受到了噪声污染的情况，这就是通常所说的最优估计或最佳滤波问题。

- **问题实质**

就是构造一个新的系统（或者说装置），利用原系统中可直接测量的输入量u和输出量y作为它的输入信号，并使其输出信号满足$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=\lim_{t\to\infty}x(t)$。

- **状态观测器的存在条件**

若系统是状态完全能观测的，则状态向量$x(t)$可由输入u和输出y构造出来，即存在状态观测器。

4 状态反馈控制设计

□ **状态观测器**

- **全维状态观测器**

给定一个SISO系统$\Sigma(A,b,c)$，设计一个全维状态观测器

$$\dot{\tilde{x}}(t)=(A-fc)\tilde{x}(t)+bu(t)+fy(t)$$

使得观测器的极点，即$\mathrm{eig}(A-fc)$配置在期望的位置$\tilde{\Gamma}=\{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2,\cdots,\tilde{\lambda}_n\}$。

✓ **设计方法：**

① 确定原系统的对偶系统$\Sigma_d(A^T,c^T,b^T)$。

② 针对对偶系统，设计一个状态反馈控制增益k，使得闭环系统$\Sigma_d(A^T-c^Tk,c^T,b^T)$具有期望的极点。

③ 获得状态观测器的增益矩阵$f=k^T$。

4 状态反馈控制设计

☐ 基于状态观测器的状态反馈控制系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+bk\tilde{x}(t)+br(t)\\ \dot{\tilde{x}}(t)=(A-fc)\tilde{x}(t)+bu(t)+fy(t)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-bk & bk\\ 0 & A-fc\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}r(t)$$

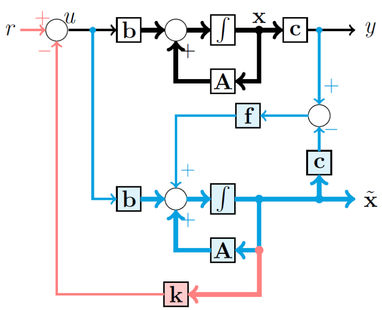
$$y(t)=cx(t) \qquad y(t)=\begin{bmatrix}c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}$$

✓ 整个系统的闭环极点由以下两部分组成:

$A-bk$的特征值对应于状态反馈极点配置;

$A-fc$的特征值对应于状态观测器;

✓ 状态反馈控制器和状态观测器可分别设计，然后合并在一起构成基于状态观测器的状态反馈控制系统。——**分离原理**



4 状态反馈控制设计

☐ 基于状态观测器的状态反馈控制系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{e}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-bk & bk\\ 0 & A-fc\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}r(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ e(t)\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{Y(s)}{R(s)}&=\begin{bmatrix}c & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}sI-A+bk & -bk\\ 0 & sI-A+fc\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}b\\ 0\end{bmatrix}\\ &=c(sI-A+bk)^{-1}b\end{aligned}}$$

✓ 传递函数和直接用状态反馈的闭环系统传递函数相同。

✓ 观测器完全没有出现在从r到y的传递函数中。

✓ 基于观测器的状态反馈闭环系统不是完全能控的。

5 离散时间系统的状态空间分析

☐ 差分方程描述

离散时间系统通常用差分方程或脉冲传递函数来描述，SISO线性定常离散系统差分方程的一般形式为:

n阶前向差分方程:

$$\begin{aligned}&y(k+n)+a_{n-1}y(k+n-1)+\cdots+a_1y(k+1)+a_0y(k)\\ &\quad=b_nu(k+n)+b_{n-1}u(k+n-1)+\cdots+b_1u(k+1)+b_0u(k)\end{aligned}$$

n阶后向差分方程（实际应用比较广泛）:

$$\begin{aligned}&y(k)+a_1y(k-1)+\cdots+a_ny(k-n)\\ &\quad=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\cdots+b_nu(k-n)\end{aligned}$$

其中，k表示第k次采样的kT时刻；T为采样周期；$y(k)$、$u(k)$分别为kT时刻的输出量和输入量；a_i和b_i为表征系统特性的常系数。

5 离散时间系统的状态空间分析

☐ 传递函数描述

考虑初始条件为零时的变换关系

$$z[y(k)]=y(z),\ z[y(k+i)]=z^iy(z)$$

对上述差分方程模型两端取z变换，并加以整理可得z传递函数

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}$$

或

$$\frac{Y(z)}{U(z)}=\frac{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}$$

上述描述的离散时间系统输入输出差分方程、传递函数分别与连续时间系统的输出输出微分方程、传递函数在形式上相同。

5 离散时间系统的状态空间分析

状态空间模型

$$\begin{cases} x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \\ y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \end{cases}$$

为了书写方便，可将离散系统状态空间模型中的T省去，于是有

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

离散系统状态空间模型意义：

① 状态方程为一阶差分方程组，它表示了在$(k+1)T$采样时刻的状态$x(k+1)$与在kT采样时刻的状态$x(k)$和输入$u(k)$之间的关系。描述的是系统动态特性，其决定系统状态变量的动态变化。

② 输出方程为代表的方程组，它表示了在kT采样时刻时，系统输出$y(k)$与状态$x(k)$和输入$u(k)$之间的关系。描述的是输出与系统内部的状态变量的关系。

③ 线性离散系统状态空间模型中的各矩阵的意义与连续系统一致。

5 离散时间系统的状态空间分析

离散系统的标准型、相似变换及其性质、能控能控性判据、极点配置和连续时间系统完全一致

离散动态方程求解

- 迭代法

$$\begin{cases} x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\ x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \\ x(3) &= Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + Hu(2) \\ &\vdots \\ x(k) &= G^kx(0) + \sum_{i=0}^{k-1} G^{k-i-1}Hu(i) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ \vdots \\ x(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G \\ G^2 \\ G^3 \\ \vdots \\ G^k \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} H & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ GH & H & 0 & \cdots & 0 \\ G^2H & GH & H & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ G^{k-1}H & \cdots & G^2H & GH & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix}$$

5 离散时间系统的状态空间分析

离散动态方程求解

- z变换法

对式$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$两边进行z变换，可得 $zx(z) - zx(0) = Gx(z) + Hu(z)$

整理得 $x(z) = (zI-G)^{-1}zx(0) + (zI-G)^{-1}H(z)$

两边进行z反变换，可得

$$\begin{aligned} x(k) &= \mathcal{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}z]x(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}Hu(z)] \\ &= \Phi(k)x(0) + \mathcal{Z}^{-1}[(zI-G)^{-1}Hu(z)] \end{aligned}$$

说明：

① 解的形式与连续系统相似，$x(k)$也是由两部分构成，第1部分是系统自由运动分量，只与系统结构和初始状态有关；第2部分是系统的受控项，与系统结构和u的大小有关。

② 在对控制的转移中，第k时刻的状态与当前的$u(k)$无关，由其前$k-1$时刻的$u(1), u(2), \ldots, u(k-1)$的线性组合构成。

③ z变换法可以得到封闭的解析形式。

5 离散时间系统的状态空间分析

离散系统的脉冲传递函数 $G(z) = C(zI-G)^{-1}H + D$

连续时间状态空间方程的离散化

- **假定条件**

① 假设以常数T为采样周期的等间隔采样

② 保持器采用零阶保持器，其特点是保持器的输出$u(t)$的值在采样瞬时等于离散信号$u(k)$的值，而在两个采样间隔之间则保持为常值且为前一采样瞬时的值，即$u(t) = u(k)$，$kT \le t < (k+1)T$。

- **离散化**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x(k+1) &= G(T)x(k) + H(T)u(k) \\ y &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

$$G(T) = e^{AT} \qquad H(T) = \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda B$$

✓ **注意：**

① 若A为可逆矩阵，则 $H(T) = \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda B = A^{-1}(e^{AT} - I)B = (e^{AT} - I)A^{-1}B$

② 离散化结果和采样周期是有关系的，即$G(T)$和$H(T)$依赖于T。对应的MATLAB命令[G, H]=c2d(A,B,T)。

祝同学们

期末考试取得理想成绩！