第 8 章习题参考答案

1. Given a nonlinear system described below

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1 - x_2\end{cases}$$

try to determine the stability of the system by the Lyapunov's first method.

解:系统的平衡状态满足

$$\begin{cases}x_2 = 0 \\ -\sin x_1 - x_2 = 0\end{cases}$$

解出平衡点为

$$\begin{cases}x_1 = k\pi; k = 0,1,2 \\ x_2 = 0\end{cases}$$

Jacobi 矩阵为：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}$$

当 k=0,2,…时，线性化矩阵为

$$A_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}_{\substack{x_1=0 \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

特征值为：$\left|\lambda I - A_1\right| = \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

解得特征根有负实部，因此系统是稳定的。
当 k=1,3,…时，线性化矩阵为

$$A_2 = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\cos x_1 & -1\end{bmatrix}_{\substack{x_1=\pi \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

特征值为：$\left|\lambda I - A_2\right| = \lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

解得特征根 $\lambda_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

特征根一正一负。因此系统是不稳定的。

注:此题除了用雅克比矩阵的方法外,也可用坐标变换的方法将平衡点移到原点,进行分析，结果相同。

2. Given a nonlinear system described below

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta(1+x_2)^2 x_2 - x_1\end{cases}$$

try to determine the stability of the system by the Lyapunov's direct method.

解: 显然 $x_e = 0$ 是系统的平衡状态。选择 Lyapunov 函数为:

$$v(x) = x_1^2 + x_2^2 > 0$$

则 $\dot{v}(x) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 ;= -2\beta(1+x_2)^2 x_2^2$

显然，仅当 $x_2 = 0$ 或 $x_2 = -1$ 以及任意的 x_1 有 $\dot{v}(x) = 0$，而对其他非零 x_2 的以及任意的 x_1 都有 $\dot{v}(x) < 0$。所以，$\dot{v}(x)$ 是负半定的。

且当 $\|x\| \to \infty$ 时，$\|v(x)\| \to \infty$。

因此，由该 Lyapunov 函数可以判断，系统是大范围 Lyaponov 稳定的。

3. Given a linear system described below

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2\end{cases}$$

try to determine the stability of the system by the Lyapunov's direct method.

解法一：选择 Lyapunov 函数为:

$$v(x) = \frac{1}{2}\left[(x_1 + x_2)^2 + 2x_1^2 + x_2^2\right]$$

它是正定的。而 $\dot{v}(x) = (x_1 + x_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 ;= -(x_1^2 + x_2^2)$

$\dot{v}(x)$ 是负定的。又因为当 $\|X\| \to \infty$，有 $v(x) \to \infty$，所以是大范围渐近稳定的。

解法二：该系统为线性系统。由微分方程组，系统矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

令 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，且设 Lyapunov 矩阵 $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$

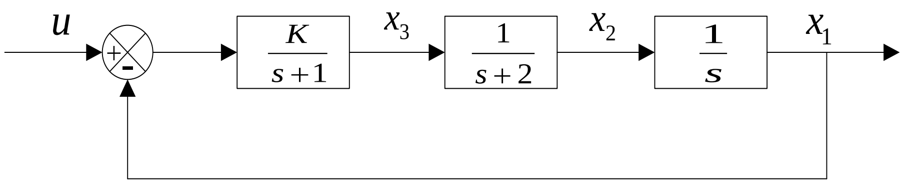
由 Lyapunov 定理可知

$$-Q = A^T P + PA$$

即 $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

求解可得 $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$，该矩阵为正定矩阵，因此系统是全局渐近稳定的。

4. Given a system shown in the following diagram



try to determine the globally asymptotic stability boundary of the gain K by the Lyapunov's direct method.

解: 由图可写出系统的状态方程：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -K & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ K\end{bmatrix}u$$

由于在研究系统的稳定性时，可令 u=0，且$|A|\neq 0$，故原点是系统的平衡点。

假设选取正半定的是对称矩阵 Q 为：$Q=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & 1\end{bmatrix}$

则 $\dot{v}(x)=-x^TQx=-x_3^2$

若取$\dot{v}(x)\equiv 0$，则有 $x_3\equiv 0$，从而 x_1 和 x_2 都恒等于零。可见，$\dot{v}(x)$ 只是在原点处才恒等于零，故可取 Q 为正半定。

由下式解出矩阵 P：

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & -K\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & p_{13}\\ p_{12} & p_{22} & p_{23}\\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ -K & 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & & \\ & 0 & \\ & & -1\end{bmatrix}$$

解得：

$$P=\begin{bmatrix}\dfrac{K^2+12K}{12-2K} & \dfrac{6K}{12-2K} & 0\\ \dfrac{6K}{12-2K} & \dfrac{3K}{12-2K} & \dfrac{K}{12-2K}\\ 0 & \dfrac{K}{12-2K} & \dfrac{6}{12-2K}\end{bmatrix}$$

使 P 成为正定矩阵的充要条件为 12-2K>0 和 K>0，即 0<K<6。因此，当 0<K<6 时，系统是大范围渐近稳定的。

注：本题的常规解法是令$Q=I$为正定矩阵，然后求解矩阵P，从而判断K取何值时P正定。但求解过程稍复杂。