Modern Control Theory

Li Yan (1st-9th week) & Liu Chengju (10th-17th week)

Department of Control Science & Engineering

School of Electronic & Information Engineering

Tongji University

https://rail.tongji.edu.cn/

liyan_tongji@tongji.edu.cn, 15201614174

Course Information

Part I: State Space Control of Linear Systems

Chap 1: State Space Description
Chap 2: Solution of State Equations
Chap 3: Controllability and Observability
Chap 4: Design of State Feedback Control
Chap 5: State Space analysis of Discrete-Time Control System

Part II: Nonlinear Control

Chap 6: Introduction to Nonlinear Control Systems
Chap 7: Describing Functions Analysis
Chap 8 : Phase Plane Analysis
Chap 9: Lyapunov Stability Theory

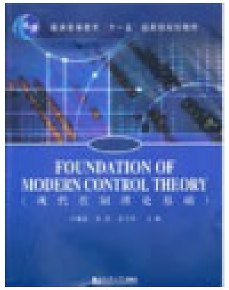
Course Information(con.)

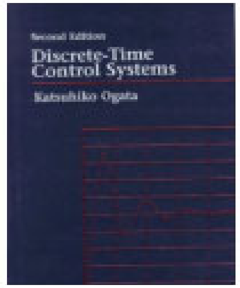
Grading Policy

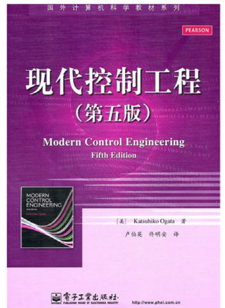
- Attendance & classroom performance — 10%
- Homework assignments — 15%
- Laboratory assignments — 15%
- midterm examination— 20%
- Final examination — 40%

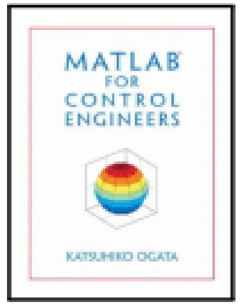
Course Information(con.)

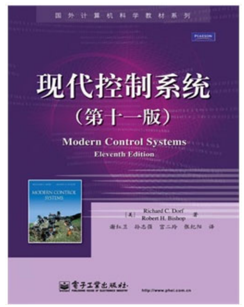
- **Textbooks**
  - 许维胜, 朱劲, 王中杰. Foundation of Modern Control Theory. Tongji Univ Press, 2011.
  - K Ogata(尾形克彦). Modern Control Engineering. Fifth Edition.2011
  - K Ogata. Discrete-Time Control Systems. Prentice Hall, 1995.
- **Supplement**
  - K Ogata. MATLAB for Control Engineers. Prentice Hall, 2007.
  - 王诗宓,王峻. 控制理论MATLAB教程, 电子工业出版社, 2012.
  - RC Dorf and RH Bishop. Modern Control Systems. Prentice Hall, 201
  - 刘豹, 唐万生. 现代控制理论,机械工业出版社, 2006









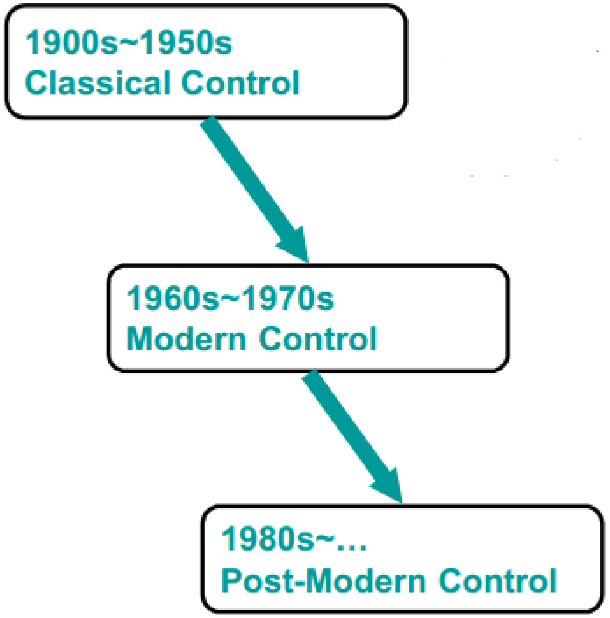


Outline of Introduction

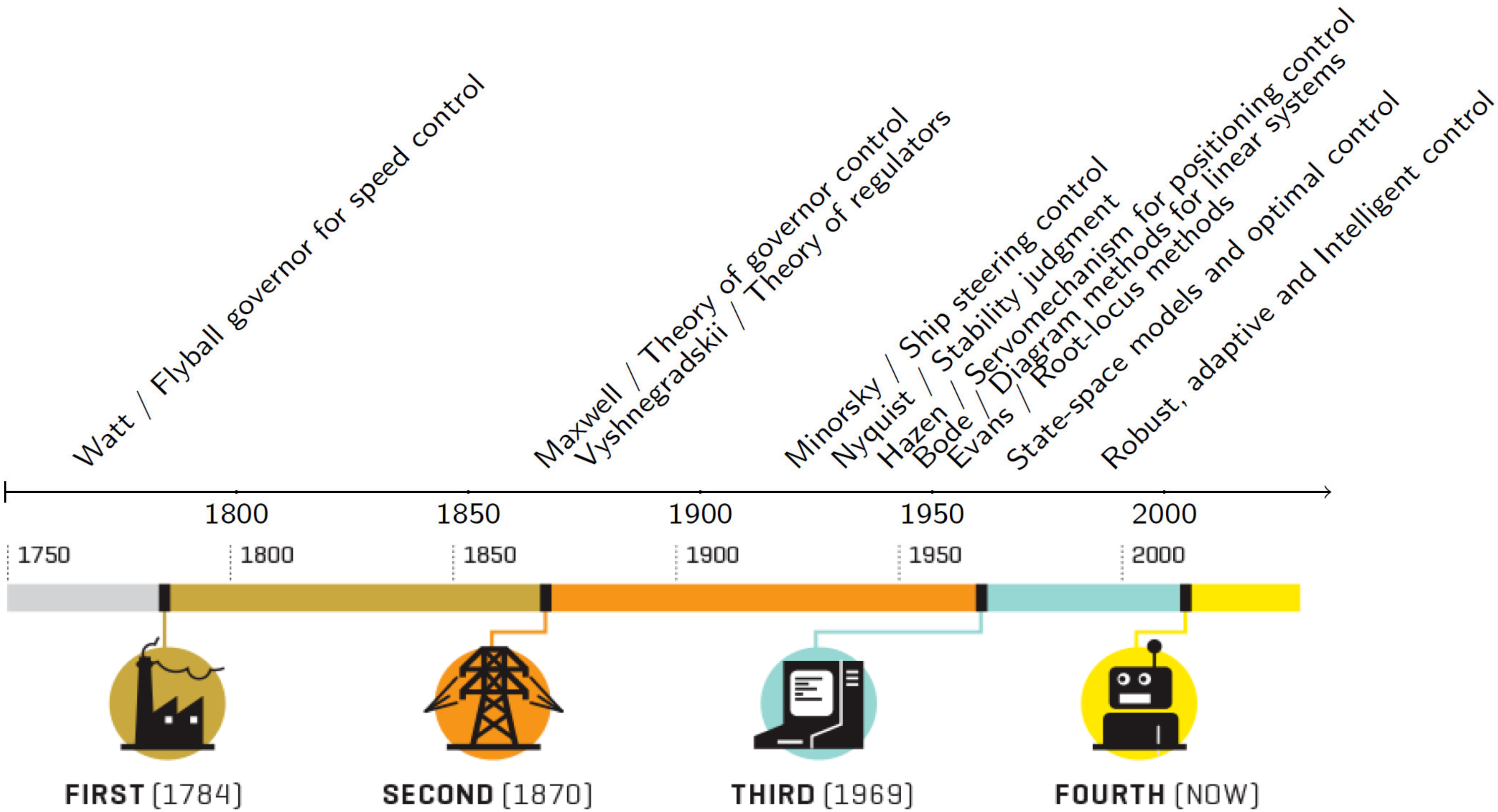
- Brief history of control
- The content of modern control theory
- The difference between the modern control theory and classical control theory
- The application of modern control theory

Brief history of control

- Classical control theory
- Modern control theory
- Intelligent control theory



Brief history of control



09:4

Bode

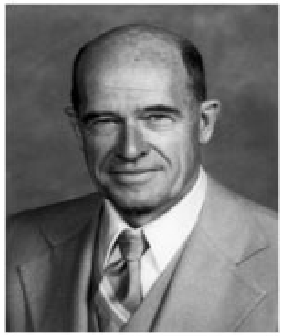
Nyquist

Nichols

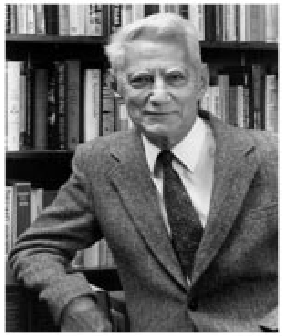
Lyapunov

Routh

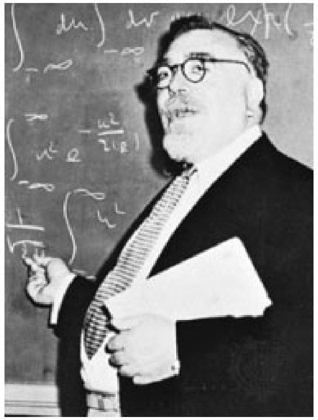
Hurwitz



Evans



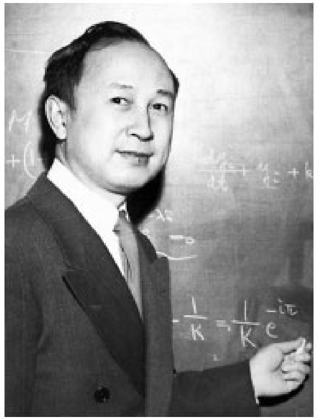
Shannon



Wiener Norbert

(1894-1964)

PhD in Harvard (1912), American mathematician and philosopher, Professor of Mathematics at MIT, the originator of cybernetics.



Xuesen Qian

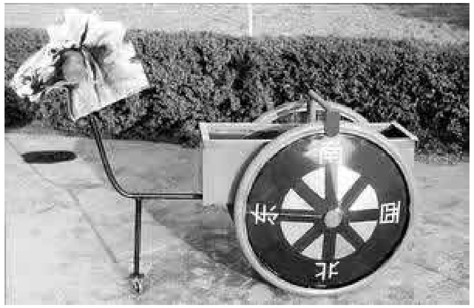
(1911-2009)

PhD in Cal Tech

Aerodynamicist and cyberneticist, the originator of engineering cybernetics

The classical control theory

- ✓两千年前我国发明的指南车就是一种开环自动调节系统



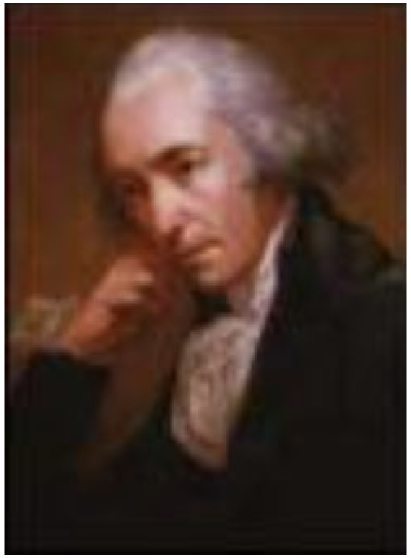
指南车

- ✓ 公元1086-1089年,我国发明的水运仪象台，一种闭环自动调节系统.

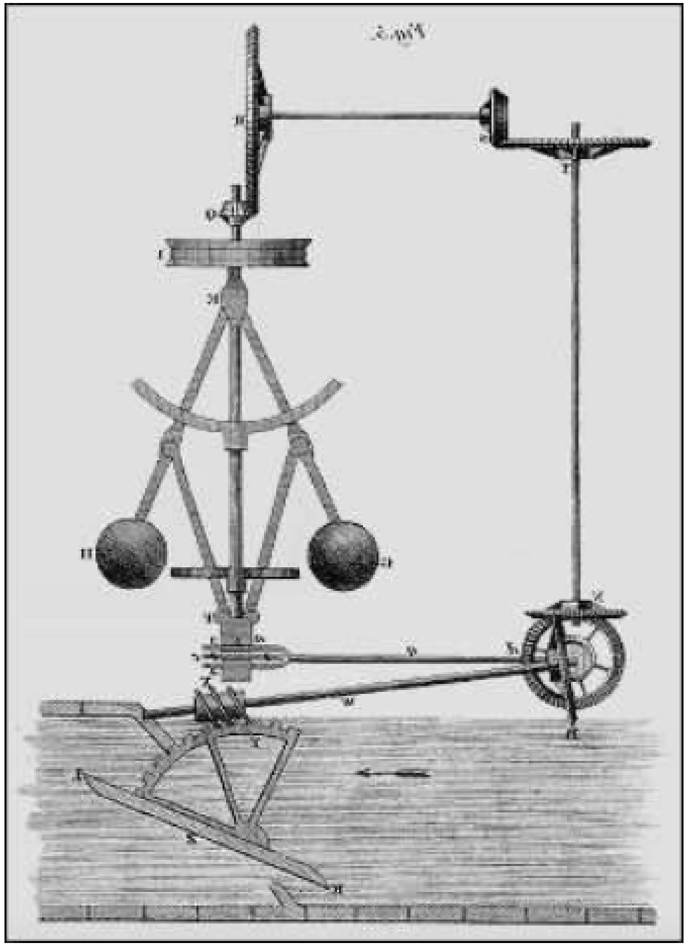
水运仪象台

The classical control theory

随着科学技术与工业生产的发展,到十八世纪,自动控制技术逐渐应用到现代工业中.其中最卓越的代表是瓦特(**J. Watt)**发明的蒸汽机离心调速器,加速了第一次工业革命的步伐.



James Watt



The classical control theory

1868年马克斯韦尔**(J. C. Maxwell)**解决了蒸汽机调速系统中出现的剧烈振荡的不稳定问题,提出了简单的稳定性代数判据.

J. C. Maxwell

The classical control theory

1895年**劳斯(Routh)**与**赫尔维茨(Hurwitz)**把马克斯韦尔的思想扩展到高阶微分方程描述的更复杂的系统中,各自提出了两个著名的稳定性判据**—劳斯判据**和**赫尔维茨判据**.基本上满足了二十世纪初期控制工程师的需要.

Routh Hurwitz

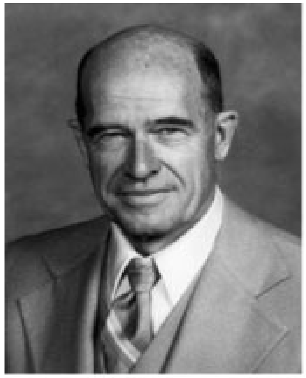
The classical control theory

由于第二次世界大战需要控制系统具有准确跟踪与补偿能力,1932年奈奎斯特 **(H. Nyquist)**提出了频域内研究系统的**频率响应法**,为具有高质量的动态品质和静态 准确度的军用控制系统提供了所需的分析工具.

H. Nyquist

The classical control theory

1948年伊万斯**(W. R. Ewans)**提出了复数域内研究系统的**根轨迹法**.



Evans

建立在奈奎斯特的频率响应法和伊万斯的根轨迹法基础上的理论，称为**经典（古典）控制理论（或自动控制理论）**.

The classical control theory

1947年控制论的奠基人美国数学家韦纳（N. Weiner）把控制论引起的自动化同第二次产业革命联系起来,并与1948年出版了**《控制论—关于在动物和机器中控制与通讯的科学》**,书中论述了控制理论的一般方法,推广了反馈的概念,为控制理论这门学科奠定了基础.

控制论之父—韦纳

The classical control theory

我国著名科学家钱学森将控制理论应用于工程实践,并与1954年出版了《工程控制论》.

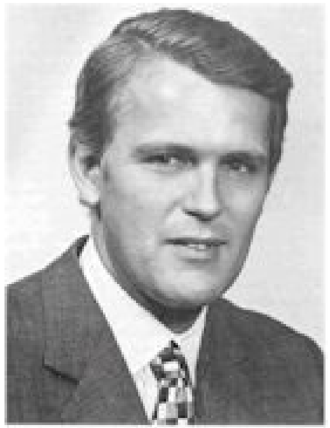
钱学森
(1911-2009)

The classical control theory

1. 俄国数学家李雅普诺夫1892年创立的稳定性理论被引入到控制中.

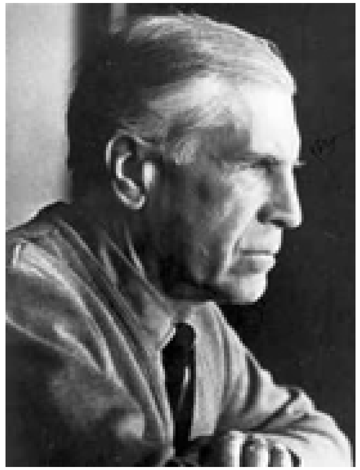
2.五十年代后期，贝尔曼(Bellman)等人提出了状态分析法；在1957年提出了动态规划.

3.1959年卡尔曼(Kalman)和布西创建了卡尔曼滤波理论；1960年在控制系统的研究中成功地应用了状态空间法,并提出了可控性和可观测性的新概念.



The classical control theory

4．1961年庞特里亚金提出了极大值原理. 极大值原理和动态规划为解决最优控制问题提供了理论工具.



5．罗森布洛克(H．H．Rosenbrock)、欧文斯(D．H．Owens)和麦克法轮(G．J．MacFarlane)研究了使用于计算机辅助控制系统设计的现代频域法理论,将经典控制理论传递函数的概念推广到多变量系统,并探讨了传递函数矩阵与状态方程之间的等价转换关系,为进一步建立统一的线性系统理论奠定了基础.

The classical control theory

6. 20世纪70年代**奥斯特隆姆**（瑞典）和**朗道**（法国，L. D. Landau）在**自适应控制理论**和应用方面作出了贡献.

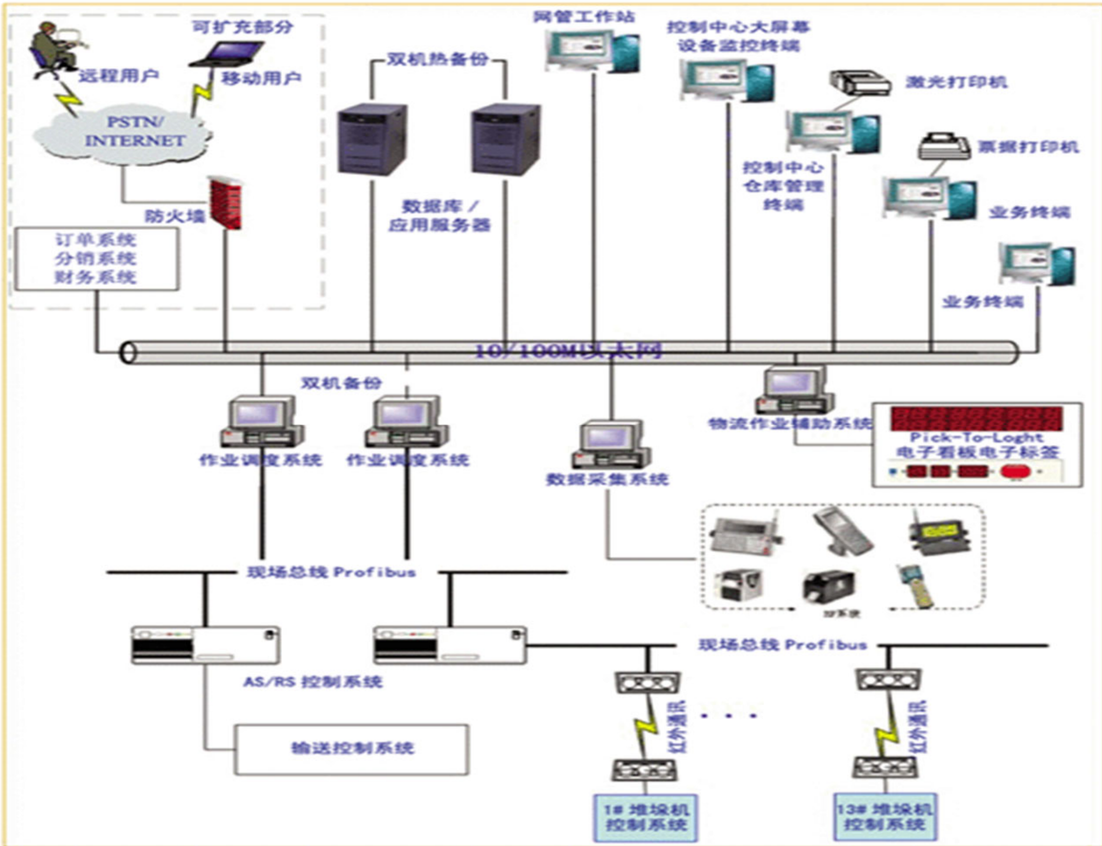
与此同时，关于**系统辨识**、**最优控制**、**离散时间系统**和**自适应控制**的发展大大丰富了现代控制理论的内容.

Intelligent (robust) control theory

1. 由于现代数学的发展,结合着H2和H∞等范数而出现了H2和H∞控 制，还有逆系统控制等方法.

2. 20世纪70年代末，控制理论向着 "大系统理论”、“智能控制理论”和“复杂系统理论”的方向发展.

大系统理论：用控制和信息的观点，研究各种大系的结构方案、总体设计中的分解方法和协调等问题的技术基础理论.



智能控制理论：研究与模拟人类智能活动及其控制与信息传递过程的规律，研制具有某些拟人智能的工程控制与信息处理系统的理论.

复杂系统理论：把系统的研究拓广到开放复杂巨系统的范筹, 以解决复杂系统的控制为目标.

复杂航天器控制

回顾控制理论的发展历程可以看出, 它的发展过程反映了人类由机械化时代进入电气化时代, 并走向自动化、信息化、智能化时代.

Outline of Introduction

- Brief history of control
- The content of modern control theory
- The difference between the modern control theory and classical control theory
- The application of modern control theory

The content of modern control theory

线性系统理论 (linear system theory)

最优控制理论 (optimal control theory)

最优估计理论 (optimal estimation theory)

系统辨识理论 (system identification theory)

自适应控制理论 (Adaptive control theory)

智能控制理论 (Intelligent control theory)

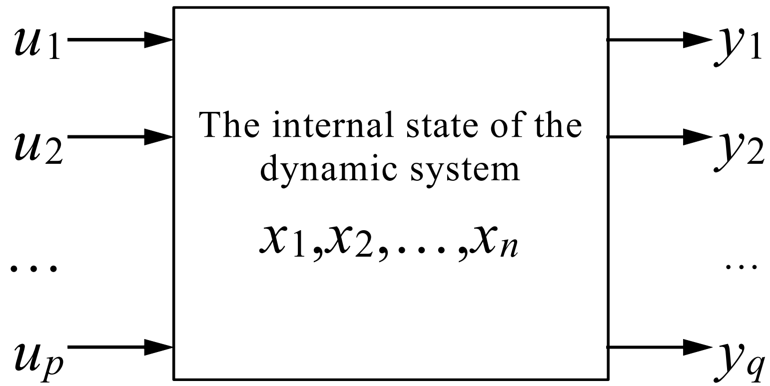
Outline

- Brief history of control
- The content of modern control theory
- The difference between the modern control theory and classical control theory
- The application of modern control theory

	Classical Control	Modern Control
Plant	SISO High order differential equation	MIMO The first-order differential equation
Model	Transfer functions (external description)	State-space models (internal description)
Methods	Frequency response	Time domain methods
Math tool	Mathematical analysis Complex variable function	Linear algebra Matrix analysis Functional analysis
Design method	PID control and correction network	State feedback and output feedback
other	Frequency method with intuitive and practical physical meaning, however, it is difficult to realize optimal control	Easy to achieve real-time control and optimal control

Advantages of the state-space control:

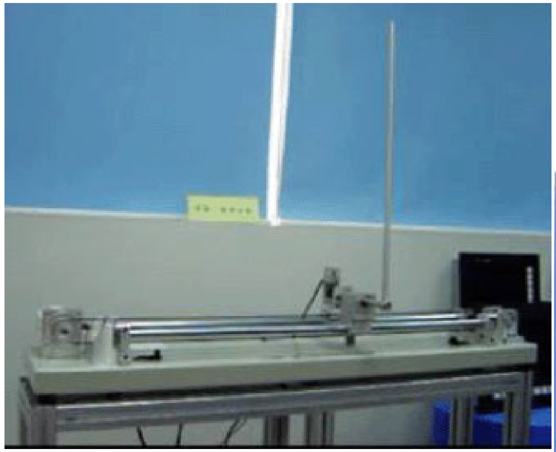
- ✓ It can easily manipulate MIMO systems.
- ✓ It can provide additional insights into system behaviors.
- ✓ It can handle linear time-varying systems and even nonlinear systems.
- ✓ It can be easily implemented in a digital computer.

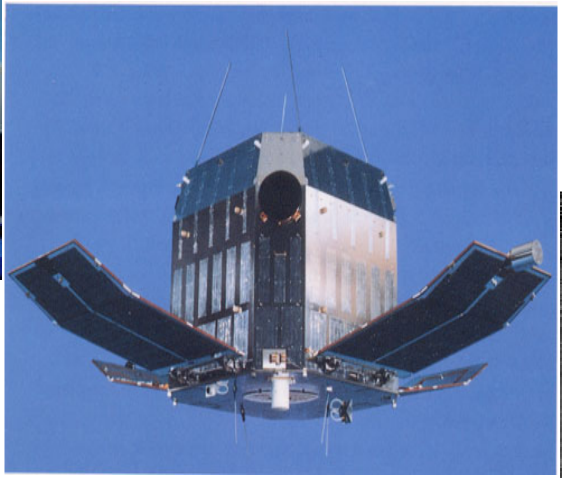


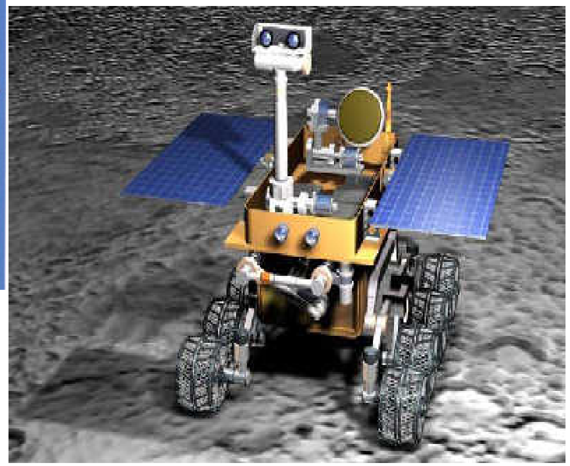
Outline of Introduction

- Brief history of control
- The content of modern control theory
- The difference between the modern control theory and classical control theory
- The application of modern control theory

比起经典控制理论，现代控制理论考虑问题更全面、更复杂，主要表现在考虑系统内部之间的耦合，系统外部的干扰，但符合从简单到复杂的规律. 现代控制理论已经应用在工业、农业、交通运输及国防建设等各个领域.







09:45

Preliminaries

Linear Control Systems

- Linear Algebra
- Control Theory
- System Modeling and Analysis

Linear Algebra

A vector

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A transformation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

WHY? & HOW?

Linear Algebra

A transformation

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

Also a basis

Linear transformation

The transformation is linear if it meets these requirements for all v and w

(a) $T(v+w) = T(v) + T(w)$

(b) $T(cv) = cT(v), \forall c$

注意:

- 线性变换是线性空间到它自身的映射
- 线性变换前后原点位置固定不变

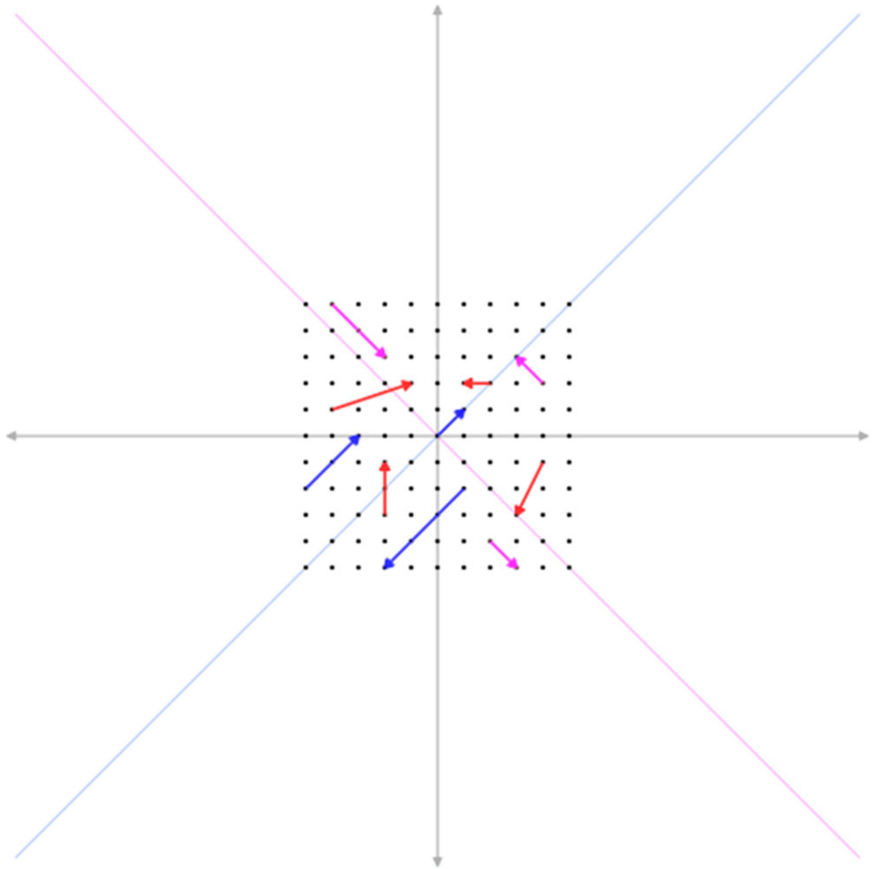
Linear Algebra

Eigenvector

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Eigenvalue

An eigenvector or characteristic vector of a linear transformation is a nonzero vector that changes at most by a scalar factor when that linear transformation is applied to it. The corresponding eigenvalue is the factor by which the eigenvector is scaled.



$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = 3, x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = 1, x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Linear Algebra

Linearly independent

A basis

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A sequence of vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ is said to be *linearly independent* if it is not linearly dependent, that is, if the equation

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0},$$

can only be satisfied by $a_i = 0$ for $i = 1, \ldots, n$. This implies that no vector in the sequence can be represented as a linear combination of the remaining vectors in the sequence. In other words, a sequence of vectors is linearly independent if the only representation of $\mathbf{0}$ as a linear combination of its vectors is the trivial representation in which all the scalars a_i are zero.

The rank of a matrix A is the dimension of the vector space generated (or spanned) by its columns. This corresponds to the maximal number of linearly independent columns of A.

Linear Algebra

From transformation to differential equation

$$\dot{x} = Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$a_{ij}, x_i \in \mathbb{R} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

如未特殊说明，有如下符号定义

$\mathbb{R}$： 实数域

$\mathbb{R}^n$： n维欧几里得空间

$\mathbb{R}^{n\times n}$： $n\times n$维实数矩阵集

*拓展内容：

群 vs 环 vs 域

实数集 vs 实数域

向量集 vs 向量空间 vs 欧几里得空间

Preliminaries

Linear Control Systems

- Linear Algebra
- Control Theory
- System Modeling and Analysis

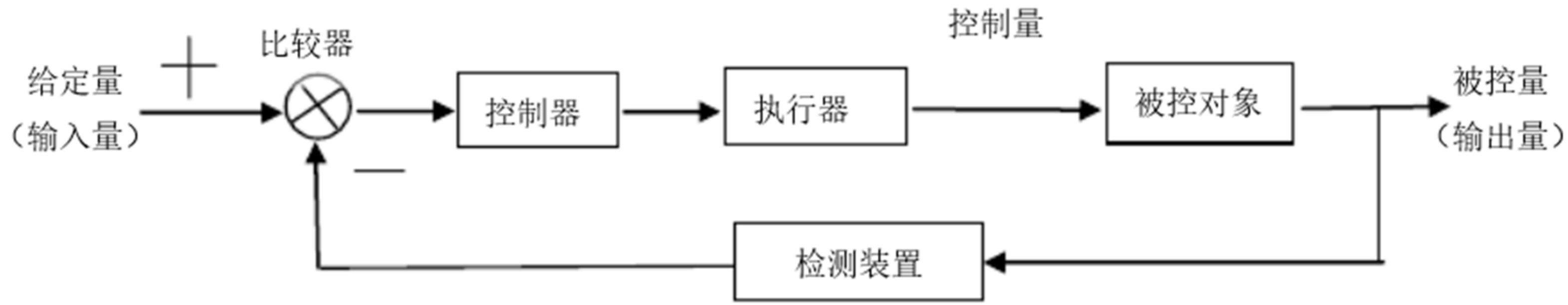
The classical control (Automatic)

Outline of Principles of Automatic Control

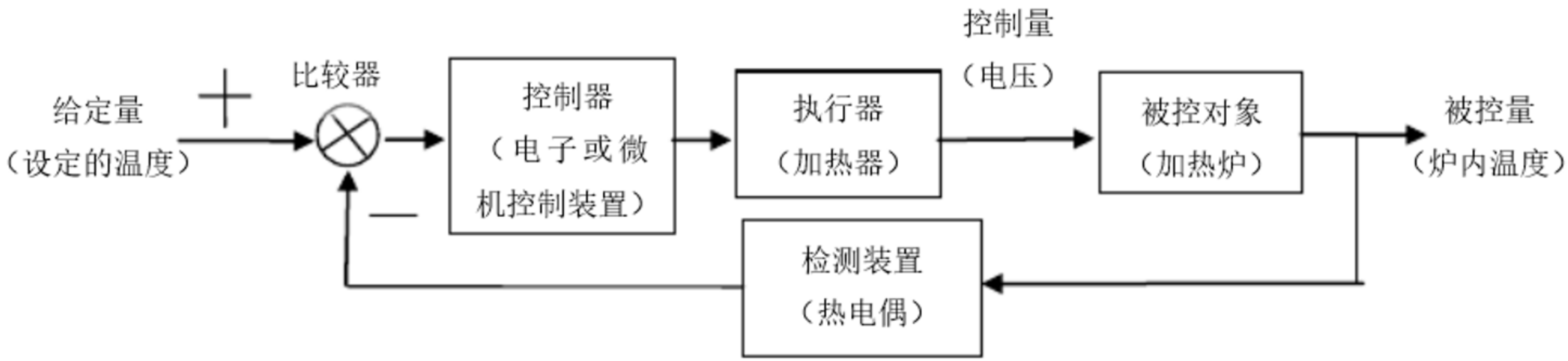
Chapter 1	Introduction of control system	
Chapter 2	Mathematical models of system	→ Modeling
Chapter 3	The stability of linear feedback systems	Stability
Chapter 4	The root locus method	
Chapter 5	Frequency response method	
Chapter 6	Stability in the Frequency domain	
Chapter 7	Feedback control system characteristics	Design
Chapter 8	The performance of feedback control system	
Chapter 9	The design of feedback control system	

- 传递函数：比例环节，惯性环节，二阶系统，纯滞后环节
- Laplace变换，时域响应，频域响应
- 稳定性
- Routh-Hurwitz判据
- 根轨迹
- Nyquist 判据，频率响应，频率特性，Bode图，Nyquist曲线
- 超前校正，滞后校正，超前-滞后校正
- PID调节器

闭环控制系统框图



加热炉的温度自动控制系统



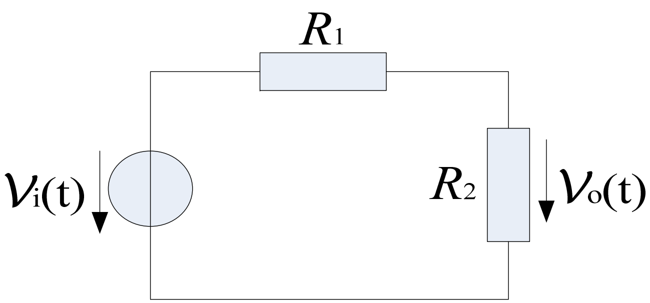
Preliminaries

Linear Control Systems

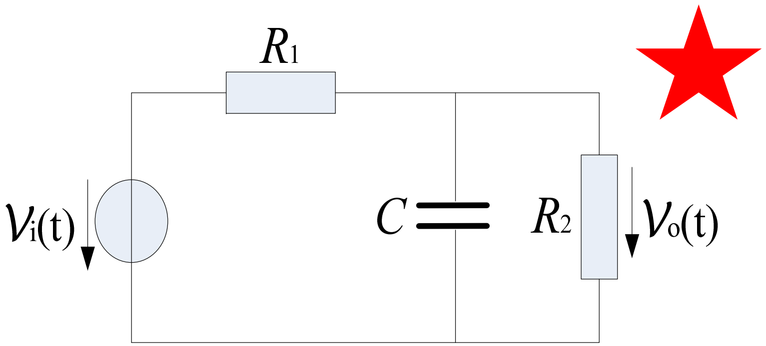
- Linear Algebra
- Control Theory
- System Modeling and Analysis

System Modeling and Analysis

A system is a group of interacting or interrelated elements that act according to a set of rules to form a unified whole.



Static system



Dynamical system

System Modeling and Analysis

Linear system

Mathematically, for a continuous-time system, given two arbitrary inputs

$$x_1(t)$$
$$x_2(t)$$

as well as their respective zero-state outputs

$$y_1(t) = H\{x_1(t)\}$$
$$y_2(t) = H\{x_2(t)\}$$

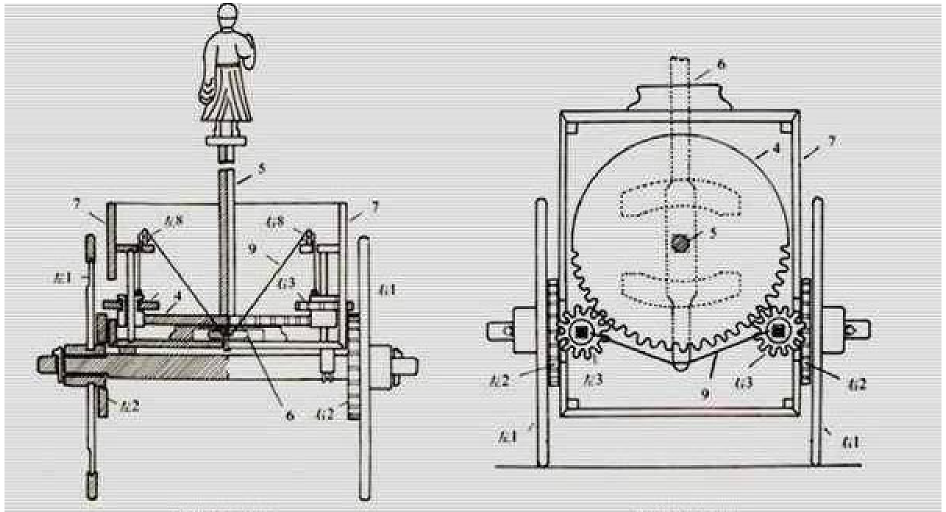
满足叠加原理

then a linear system must satisfy

$$\alpha y_1(t) + \beta y_2(t) = H\{\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)\}$$

指南车

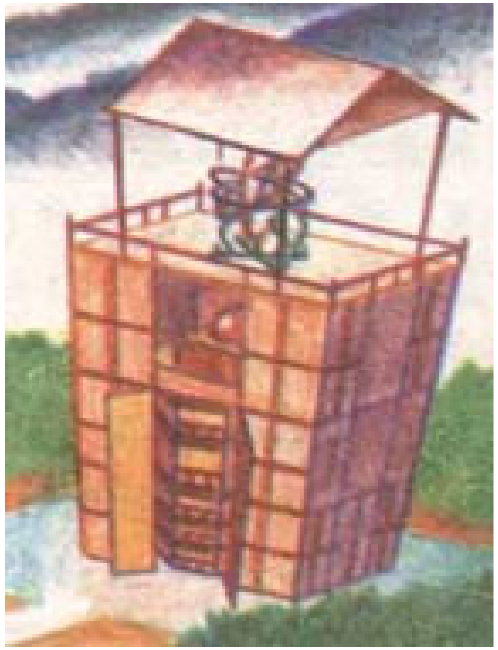
指南车是我国古代伟大的发明之一，也是世界上最早的控制论机械之一。用英国著名科学史专家李约瑟的话说，中国古代的指南车“可以说是人类历史上迈向控制论机器的第一步”，是人类“第一架体内稳定机”。


指南车后视图　指南车俯视图

指南车与司南、指南针等相比在指南的原理上截然不同。它的车箱里装着非常巧妙而复杂的机械。是一种双轮独辕车。它的中央有一个大平轮，木头人就竖立在上面。在大平轮两旁，装着很多小齿轮。如果车子向左转，右边的车轮就会带动小齿轮，小齿轮再带动大平轮，使大平轮相反地向右转。如果车子向右转，同样地，大平轮则向左转。因此，只要指南车开动以前，先让木头人的右手指向南方，以后车子不论是向左转还是向右转，木头人的右手就总是指向南方。指南车是利用齿轮的原理造成的。这种齿轮传动类似现代汽车用的差动齿轮，相当于汽车中差动齿轮的逆向使用原理。这种指南车，可以说是世界上最早的自动化设备。

水运仪象台

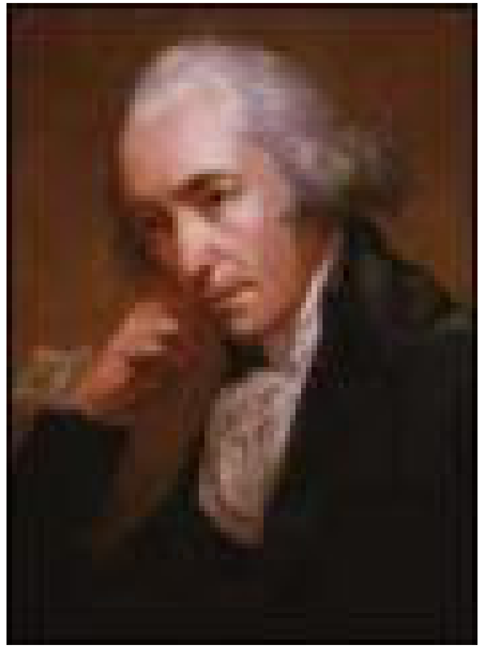
水运仪象台是我国古代一种大型的天文仪器，由宋朝天文学家苏颂等人创建。它是集观测天象的浑仪、演示天象的浑象、计量时间的漏刻和报告时刻的机械装置于一体的综合性观测仪器，实际上是一座小型的天文台.。



整个水运仪象台高12米，宽7米，共分3层，相当于一幢四层楼的建筑物。最上层的板屋内放置着1台浑仪， 屋的顶板可以自由开启，平时关闭屋顶，以防雨淋，这已经具有现代天文观测室的雏型了；中层放置着一架浑象；下层又可分成五小层木阁，每小层木阁内均安排了若干个木人，5层共有162个木人，它们各司其职：每到一定的时刻，就会有木人自行出来打钟、击鼓或敲打乐器、报告时刻、指示时辰等。在木阁的后面放置着精度很高的两级漏刻和一套机械传动装置，可以说这里是整个水运仪象台的“心脏”部分，用漏壶的水冲动机轮，驱动传动装置，浑仪、浑象和报时装置便会按部就班地动作起来。

这台仪器的制造水平堪称一绝，充分体现了我国古代人民的聪明才智和富于创造的精神。

瓦特 JamesWatt



（JamesWatt,1736～1819）英国发明家、工程师。1736年1月19日生于苏格兰的一个小镇格里诺克。1753年他在家钟表店学手艺。15岁学完了《物理学原理》并获得了丰富的木工、金属冶炼和加工等工艺技术。1753年他在一家钟表店学手艺。 1753年又跟有名的机械师摩尔根当学徒。经过刻苦学习，努力实践，他已能制造难度较高的象限仪、罗盘、经纬仪等。1756年在格拉斯哥大学当了仪器修理员。1765年发明了把冷凝过程从汽缸中分离出来的分离式冷凝器。冷凝器的发明在蒸汽机的发展中起了关键性的作用。1768年他制成了一台单动作蒸汽机 。1781年，他发明了行星式齿轮，将蒸汽机活塞的往运动变为旋转运动 1782年他发明了大动力的“双动作蒸汽机”并获得专利 1784年他发明了平行运动连杆机构，解决了双动作蒸汽机的结构问题。1788年他发明了离心式调速器和节气阀，用来自动控制蒸汽机的运转速度。1790年发明了蒸汽机配套用压力计。

到此为止，瓦特完成了对蒸汽机的整套发明过程。经过他的一系列重大的发明和改进，使蒸汽机的效率提高到原来纽科门机的3倍多，而且配套齐全、性能优良、切合实用。瓦特由此博得了第一部现代蒸汽机——高效率瓦特蒸汽机的发明者称号。

奈奎斯特

奈奎斯特，美国物理学家，1889年出生在瑞典。1976年在德克萨斯逝世。奈奎斯特对信息论做出了重大的贡献。奈奎斯特1907年移民到美国并于1912年进入北达克塔大学学习。1917年在耶鲁大学获得物理学博士学位。1917年～1934年在AT&T公司工作，后转入贝尔电话实验室工作。

为贝尔电话实验室的工程师，在热噪声(Johnson-Nyquist noise)和反馈放大器稳定性方面做出了很大的贡献他早期的理论性工作关于确定传输信息的需满足的带宽要求，在《贝尔系统技术》期刊上发表了《影响电报速度传输速度的因素》文章，为后来香农的信息论奠定了基础。

1927年，奈奎斯特确定了如果对某一带宽的有限时间连续信号（模拟信号）进行抽样，且在抽样率达到一定数值时，根据这些抽样值可以在接收端准确地恢复原信号。为不使原波形产生“半波损失”，采样率至少应为信号最高频率的两倍，这就是著名的奈奎斯特采样定理。奈奎斯特1928年发表了《电报传输理论的一定论题》。

1954年，他从贝尔实验室退休。

维纳

维纳生于哥伦比亚市一个犹太人家里。维纳4岁开始读书。9岁时读中学，11岁进人大学学习．他的数学知识已超过大学一年级学生的水平，所以转而热衷于研究化学、物理、电学了。他18岁时取得了哈佛大学数学和哲学两个博士学位，后来又到德国、英国学习，拜著名哲学家罗素、数学家希尔伯特为师，进一步深造。

维纳已是一个很有名的数学家了，但他对其他学科也很有兴趣。在第二次世界大战末期，有两个大问题特别引起了他的兴趣，一个是电子计算机，另一个是火炮命中率问题。

维纳和一位年轻工程师合作，从驾驶汽车这种简单的动作中发现，人是采用了一种叫“反馈”的控制方法，使汽车按要求行驶。维纳又请来了神经专家进行共同研究，发现机器和人的控制机能有相似之处。后来，维纳又和许多有名科学家进行讨论，听取对方的批评意见，甚至是“攻击”意见，终于于1948年把自己的研究成果发表了出来，叫《控制论》。

钱学森

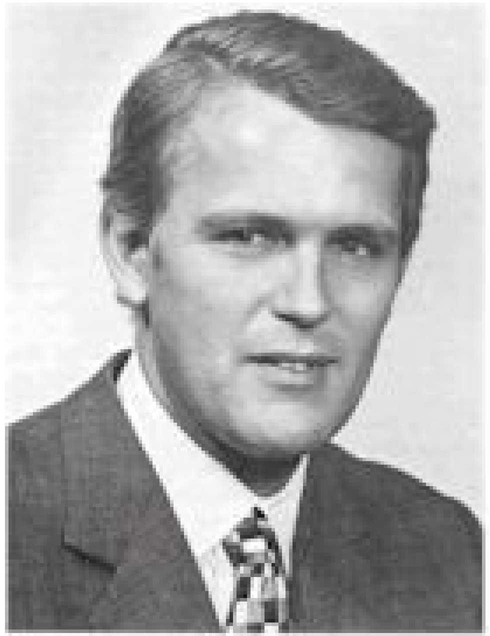
钱学森，1911年12月11日生，浙江杭州人，1959年8月加入中国共产党，博士学位。

1929年至1934年在上海交通大学机械工程系学习。1935年至1939年在美国麻省理工学院航空工程系学习，获硕士学位。1936年至1939年在美国加州理工学院航空与数学系学习，获博士学位。1939年至1943年任美国加州理工学院航空系研究员。1943年至1945年任美国加州理工学院航空系助理教授（其间：1940年至1945年为四川成都航空研究所通信研究员）。1945年至1946年任美国加州理工学院航空系副教授。1946年至1949年任美国麻省理工学院航空系副教授、空气动力学教授。1949年至1955年任美国加州理工学院喷气推进中心主任、教授。

1955年回国。1955年至1946年任中国科学院力学研究所所长、研究员，国防部第五研究院院长。1965年至1970年任第七机械工业部副部长。1970年至1982年任国防科工委科学技术委员会副主任，中国科协副主席。还历任中国自动化学会第一、二届理事长，中国宇航学会、中国力学学会、中国系统工程学会名誉会长，中科院主席团执行主任、数学物理学部委员。1986年至1991年5月任中国科协第三届全委会主席。1991年5月在中国科协第四次全国代表大会上当选为科协名誉主席。1992年4月被聘为中科院学部主席团名誉主席。1994年6月当选为中国工程院院士。

卡尔曼

卡尔曼全名Rudolf Emil Kalman，匈牙利数学家，1930年出生于匈牙利首都布达佩斯。1953、1954年于麻省理工学院分别获得电机工程学士及硕士学位。



1957年于哥伦比亚大学获得博士学位。在现代控制理论中的卡尔曼滤波器，正是源于他的博士论文和1960年发表的论文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》（线性滤波与预测问题的新方法）。

单输入单输出系统 (SISO)
高阶微分方程

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=bu$$

多输入多输出系统 (MIMO)
一阶微分方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

传递函数法(外部描述)

$$G(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{b_{n-1}s^{n-1}+\cdots b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots a_1 s+a_0}$$

状态空间法(内部描述)

$$\dot{\mathrm{x}} = \mathrm{Ax} + \mathrm{Bu} \qquad \mathrm{y} = \mathrm{Cx} + \mathrm{Du}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q11} & \cdots & d_{qp} \end{bmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{11} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & \cdots & c_{qn} \end{bmatrix}$$

PID控制和校正网络

$$u = -k_p - k_I/\mathrm{s} - k_d\mathrm{s}$$

$$u = \frac{T_1 s+1}{T_2 s+1} \ (T_1 > T_2)$$

超前、滞后校正

状态反馈与输出反馈

$$u = -kx$$

$$u = -ky$$

Linear Algebra

域是个集合 F 且带有加法和乘法两种运算，这里“运算”可以想成是种映射，对$\forall a, b \in F$，这映射将此两元素对应到某元素，且这些运算满足如下性质：

在加法和乘法两种运算上封闭

$\forall a, b \in F$，$a+b$和$a*b\in F$（另一种说法：加法和乘法是F上的二元运算）。

加法和乘法符合结合律

$\forall a, b, c \in F$，$(a+b)+c=a+(b+c)$，$(a*b)*c=a*(b*c)$

加法和乘法符合交换律

$\forall a, b \in F$，$a+b=b+a$，$a*b=b*a$

符合乘法对加法的分配律

$\forall a, b, c \in F$，$a*(b+c)=(a*b)+(a*c)$

存在加法单位

在F中有元素0，使得$\forall a \in F$，$a+0=a$

存在乘法单位

在F中有不等于0的元素1，使得$\forall a \in F$，$a*1=a$

存在加法逆元

$\forall a \in F$，$\exists -a$使得$a+(-a)=0$

非零元素存在乘法逆元

$\forall a \in F$, $a \neq 0$，$\exists a^{-1}$使得$a*a^{-1}=1$

其中“元素0不同于元素1”的要求排除了平凡的只由一个元素组成的域。

非空集合(存在单位元/零元、逆元/负元) + 封闭运算(满足结合律) = 群

群 + 封闭运算(满足交换律) = Abelian群/交换群

Abelian群 + 封闭运算为加法运算 = 加法群/Abelian加法群

加法群 + 加法、乘法二元运算(满足左右分配律) = 环

环 + 乘法满足交换律 = 交换环

交换环 + 单位元不为零元 + 非零逆元 = 域

域 + 实数集 = 实数域

Linear Algebra

数域(标量) + n元组 = 向量(矢量)

向量集 + 公理 = 向量空间

公理	说明
向量加法的结合律	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
向量加法的交换律	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
向量加法的单位元	存在一个叫做零向量的元素$\mathbf{0} \in V$，使得对任意$\mathbf{u} \in V$都满足$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
向量加法的逆元素	对任意$\mathbf{v} \in V$都存在其逆元素$-\mathbf{v} \in V$使得$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$
标量乘法与标量的域乘法相容	$a(b\mathbf{v}) = (ab)\mathbf{v}$
标量乘法的单位元	域F存在乘法单位元1满足$1\mathbf{v} = \mathbf{v}$
标量乘法对向量加法的分配律	$a(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = a\mathbf{u} + a\mathbf{v}$
标量乘法对域加法的分配律	$(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$

向量空间 + 内积 + 长度/欧氏范数 + 距离/度量 = 欧几里得空间

$$<\mathbf{x},\mathbf{y}>=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

内积

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{<\mathbf{x},\mathbf{x}>} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2}$$

欧氏范数/2范数

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

度量