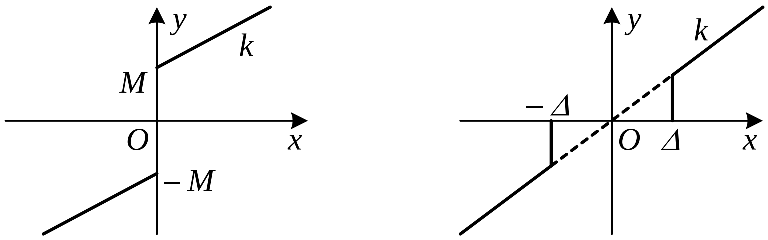
第六章习题参考答案

1. Calculate the describing functions $N(X)$ of nonlinearities as shown in Fig. 1, and sketch the plots of $N(X)$ and $-1/N(X)$.

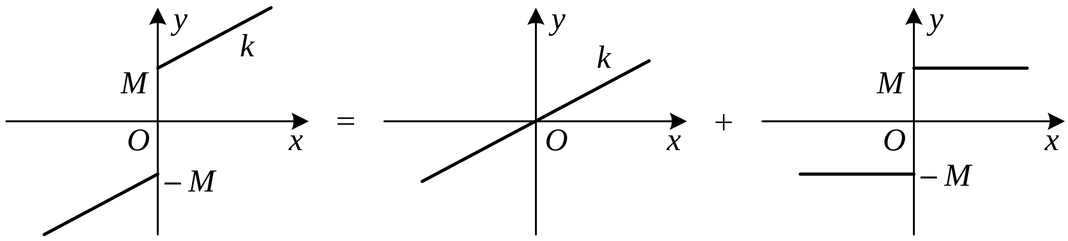


(a)　　　　　　　　(b)

Fig. 1　Nonlinearity in Problem 1

解：

(a)



$$N(x) = N_1 + N_2 = k + \frac{4M}{\pi X}$$

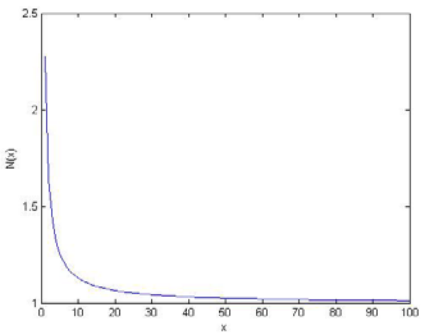


图 1.　N(x)

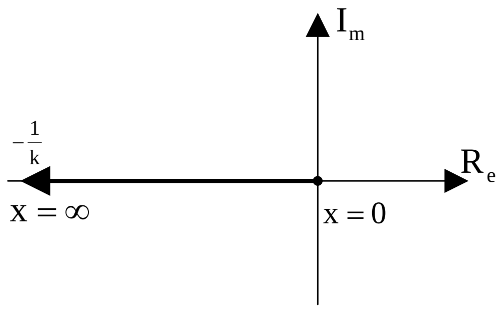
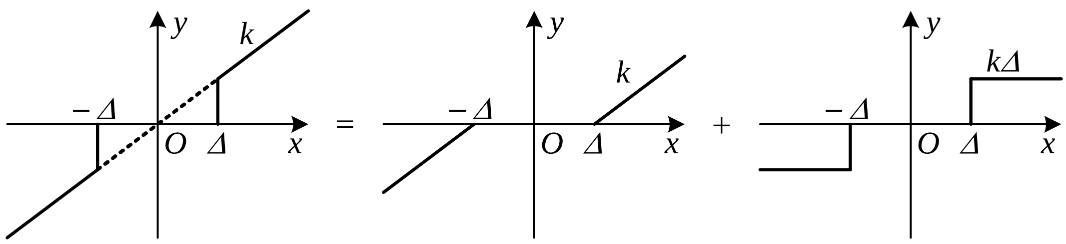


图 2.　-1/N(x)

（b）



$$N(x)=N_1+N_2=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\Delta}{X}+\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]+\frac{4M}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

$$=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\Delta}{X}+\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]+\frac{4k\Delta}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

$$=k-\frac{2k}{\pi}\arcsin\frac{\Delta}{X}-\frac{2k}{\pi}\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}+\frac{4k\Delta}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

$$=k-\frac{2k}{\pi}\arcsin\frac{\Delta}{X}+\frac{2k}{\pi}\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}$$

$$=k-\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{\Delta}{X}-\frac{\Delta}{X}\sqrt{1-\left(\frac{\Delta}{X}\right)^2}\right]$$

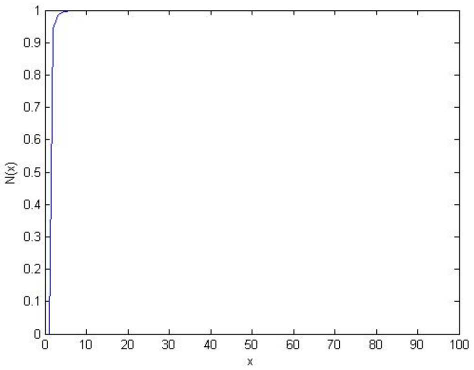


图 3.　N(x)

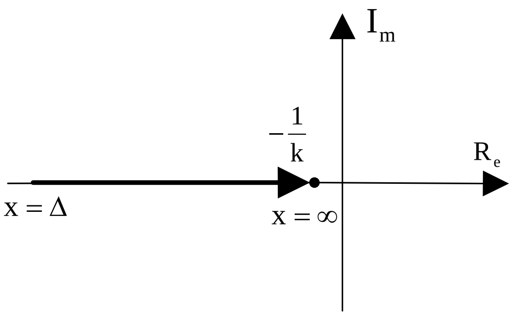


图 4.　-1/N(x)

2. Given a nonlinear system as shown in Fig. 2, where $K>0$. Solve the following problems with describing function method:

(1) To discuss the motion of the system when $K=5$;

(2) To analyze the frequency and amplitude of the sustained oscillation in the output $c(t)$ when $K=5$.

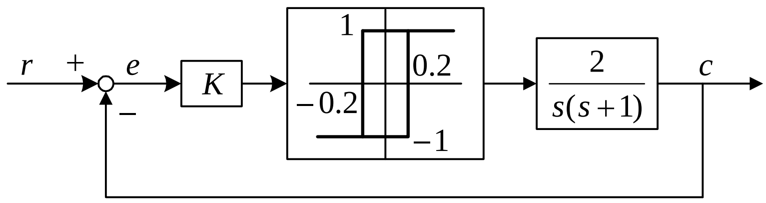


Fig. 2　The system of Problem 2

解：

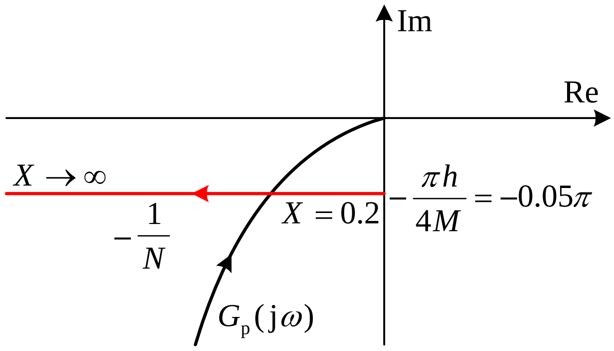
（1）判断稳定性。从研究稳定性的角度讲，可以将线性部分合并成为

$$G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{2K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)}\text{。}$$

设非线性特性的输入信号幅值为 X，则其描述函数为

$$N(X)=\frac{4M}{\pi X}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arcsin\frac{h}{X}}=\frac{4}{\pi X}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arcsin\frac{0.2}{X}}\text{。}$$

在复平面上，两条曲线相交，故而闭环系统不稳定，存在极限环，且该极限环稳定。



（2）$K=5$时，$G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{2K}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}\omega)}=-\dfrac{10}{1+\omega^2}-\mathrm{j}\dfrac{10}{\omega(1+\omega^2)}$。而

$$-\frac{1}{N(X)}=-\frac{\pi X}{4M}\sqrt{1-\left(\frac{h}{X}\right)^2}-\mathrm{j}\frac{\pi h}{4M}=-\frac{\pi X}{4}\sqrt{1-\left(\frac{0.2}{X}\right)^2}-\mathrm{j}\,0.05\pi\text{。}$$

令 $G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-\dfrac{1}{N}$ 虚部相等，可得

$$-\frac{10}{\omega(1+\omega^2)}=0.05\pi\text{，}\quad \omega^3+\omega=63.6620\text{，}\quad \omega=3.9095$$

此时，$|G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)|=0.6339$。令 $G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N$ 的模相等，可得

$$0.6339=\frac{\pi X}{4M}=\frac{\pi X}{4}\text{，}\quad X=0.8071\text{。}$$

输出幅值等于误差的幅值，即

$$C=\frac{X}{5}=0.1614\text{。}$$

说明：存在另一种计算方法。将增益与滞环继电器考虑成一个非线性，它仍是一个滞环继电器，但此时 $M=1$，$h=0.04$。故

$$-\frac{1}{N(E)}=-\frac{\pi E}{4}\sqrt{1-\left(\frac{0.04}{E}\right)^2}-\mathrm{j}\,0.01\pi\text{。}$$

按照与上述相同的步骤，由虚部方程可得

$$-\frac{2}{\omega(1+\omega^2)}=0.01\pi\text{，}\quad \omega=3.9095$$

由实部方程可得

$$-\frac{2}{1+\omega^2}=-\frac{\pi E}{4}\sqrt{1-\left(\frac{0.04}{X}\right)^2}\text{，}\quad E=0.1614\text{。}$$

3. Given a system as shown in Fig. 3, where $K>0$, $k=1$. Solve the following problems with the describing function method:

(1) To discuss the motion of the system when $K=5$;

(2) To analyze the frequency and amplitude of the sustained oscillation in the output $c(t)$ when $K=5$.

(3) Determine the stability boundary of gain K.

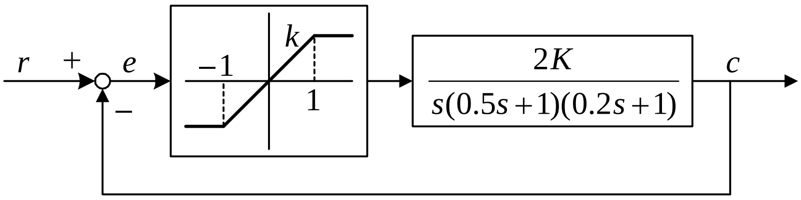


Fig. 3　The system of Problem 3

解：

（1）判断稳定性。线性对象的频率特性为

$$G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)=\frac{10}{\mathrm{j}\omega(1+\mathrm{j}0.5\omega)(1+\mathrm{j}0.2\omega)}\text{。}$$

由 $-90°-\arctan 0.5\omega-\arctan 0.2\omega=-180°$，可得 $\omega=\sqrt{10}$ rad/s，$\left|G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\sqrt{10})\right|=1.4286$。

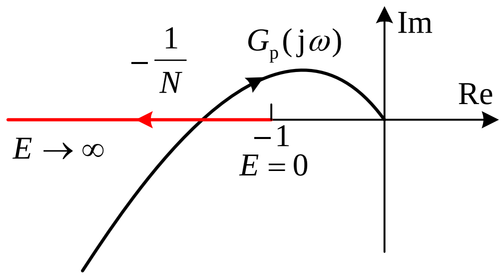
非线性特性的描述函数为

$$N(E)=\frac{2k}{\pi}\left[\arcsin\frac{S}{E}+\frac{S}{E}\sqrt{1-\left(\frac{S}{E}\right)^2}\right]\text{。}$$

故

$$-\frac{1}{N(E)}=-\frac{\pi}{2\left[\arcsin\frac{S}{E}+\frac{S}{E}\sqrt{1-\left(\frac{S}{E}\right)^2}\right]}\text{，}$$

当 $E=1$ 时，$-1/N=-1$；而 $E=\infty$ 时，$-1/N=-\infty$。作出 $G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N$ 的图象如下：



$G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N$ 相交，所以闭环系统不稳定，操作极限环，该极限环稳定。

（2）求极限环。$G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)$ 与 $-1/N$ 的交点对应 $\omega=\sqrt{10}$ rad/s。再由

$$-\frac{1}{N(E)}=-\frac{\pi}{2\left[\arcsin\dfrac{1}{E}+\dfrac{1}{E}\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{E}\right)^2}\right]}=-1.4286,$$

可以试算得 $E=1.709$。

（2）求增益的稳定性边界。$\left|G_{\mathrm{p}}(\mathrm{j}\omega)\right|=1$ 为临界状态。所以

$$K=-\frac{5}{1.4286}=3.50。$$