第七章习题参考答案

1. Discuss the singular points for the given nonlinear system $\ddot{x}+\dot{x}+|x|=0$, and sketch the phase plane portrait with the isocline method. Compare the sketched phase plane portrait with the computer simulation results by using MATLAB.

解：

（i）系统方程可以被写成

$$\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+x=0 & (x>0)\\ \ddot{x}+\dot{x}-x=0 & (x<0)\end{cases}$$

故而相平面被分为两个区域。

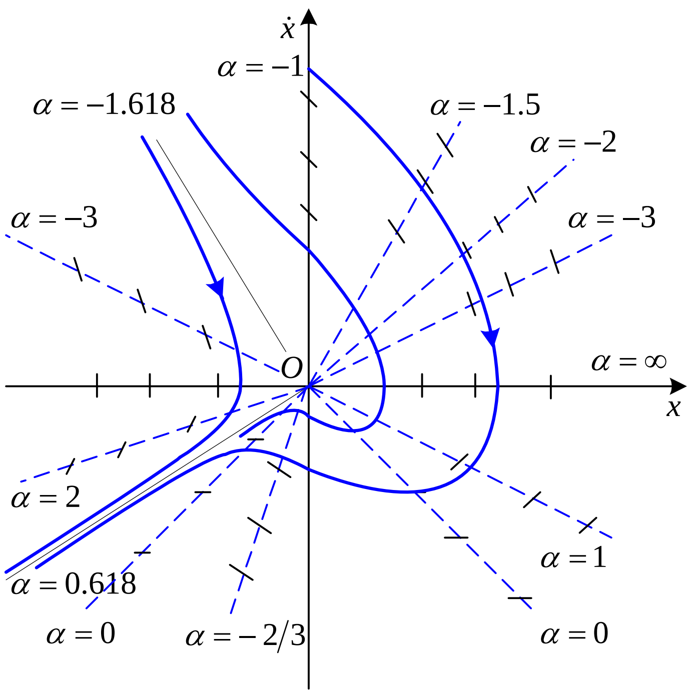
（ii）奇点及其性质。先看右半平面，根据 $\ddot{x}+\dot{x}+x=0$ 可知奇点为原点。由特征方程 $\lambda^2+\lambda+1=0$ 可知，$\lambda=(-1\pm \mathrm{j}\sqrt{3})/2$，该奇点为稳定焦点。再看左半平面，根据 $\ddot{x}+\dot{x}-x=0$ 可知奇点为原点。由特征方程 $\lambda^2+\lambda-1=0$ 可知，$\lambda=(-1\pm\sqrt{5})/2=1.618,\ -1.618$，该奇点为鞍点。

（iii）用等倾线法画出相平面图。右半平面：

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}+\dot{x}+x=0,\quad \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dot{x}-x}{\dot{x}}=\alpha,\quad \frac{\dot{x}}{x}=\frac{-1}{1+\alpha};$$

左半平面：

$$\dot{x}\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}+\dot{x}-x=0,\quad \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x}=-\frac{\dot{x}+x}{\dot{x}}=\alpha,\quad \frac{\dot{x}}{x}=\frac{1}{1+\alpha}。$$



MATLAB 验证如下：

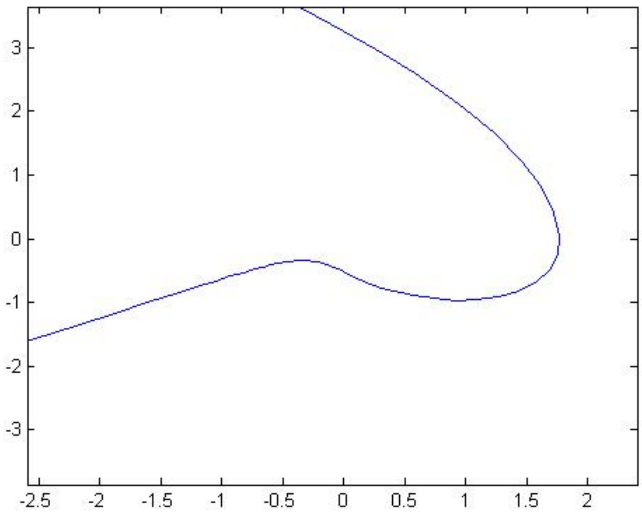
函数定义：

```
function sys=myFcn(t,x)
sys=[x(2);-x(2)-abs(x(1))];
```

主程序为：

```
>>[t,x2]=ode45(' myFcn ',[0,10],[-5;10]);
>>plot(x2(:,1),x2(:,2))
```

求得相平面图为：



2. Given the system as shown in Fig 2. Assume that the input $r=0$, the system is subject only to the initial conditions. Sketch the phase plane portraits in the e-$\dot{e}$ plane for cases $K=0$ and $K=1$, respectively.

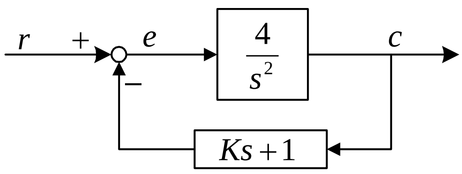


Fig. 2 The system of Problem 2

解：

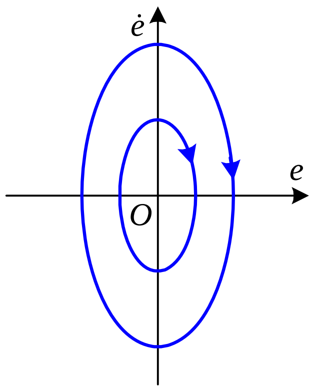
输入到误差的传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1}{1+\dfrac{4(Ks+1)}{s^2}}=\frac{s^2}{s^2+4Ks+4}\text{。}$$

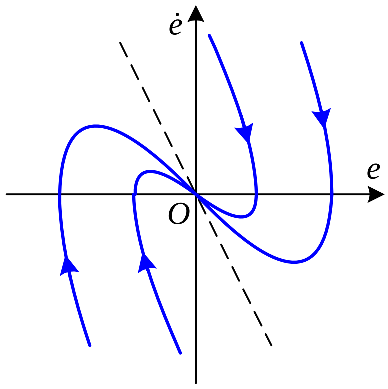
所以误差的微分方程为$\ddot{e}+4K\dot{e}+4e=\ddot{r}$。又因为系统只受初始条件的作用，故不考虑输

入信号，方程被改写为$\ddot{e}+4K\dot{e}+4e=0$

（1）$K=0$的情形。微分方程为$\ddot{e}+4e=0$，所以奇点为原点，由特征方程$\lambda^2+4=0$可知$\lambda_{1,2}=\pm \mathrm{j}2$，所以原点为中心点。注：$\ddot{e}+4e=0$的解为椭圆$\dot{e}^2+(2e)^2=A^2$，其中$A$由初始条件确定。



（2）$K=1$的情形。微分方程为$\ddot{e}+4\dot{e}+4e=0$，所以奇点为原点，由特征方程$\lambda^2+4\lambda+4=0$可知$\lambda_{1,2}=-2$，所以原点为稳定节点。



3. Fig 3 illustrates a second-order system with nonlinear feedback gain, where $K=5$, $J=1$ and $a=1$.

(1) By assuming $r=0$, sketch the typical phase trajectories in the e-$\dot{e}$ plane for different initial conditions;

(2) Let a ramp input $r=Vt$ be applied to the system when the system is in the static condition, sketch the phase plane portrait of the system in the e-$\dot{e}$ plane.

(3) Select suitable values of V in $r=Vt$ and plot the ramp responses of the system by using Simulink models.

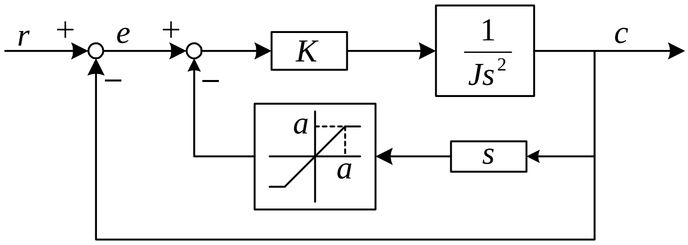


Fig. 3　The nonlinear system of Problem 3

解：

（1）阶跃输入情况： $r = R \cdot 1(t)$ 。

（a）基本运动方程。

$$e = r - c\text{，}\quad \dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = -\dot{c}\text{，}\quad \ddot{e} = -\ddot{c}\text{，}\quad \ddot{c} = 5p = 5e - 5q\text{，}$$

所以 $\ddot{e} + 5e = 5q$ 。又

$$q = \begin{cases} 1 & \dot{c} \geq 1 \\ \dot{c} & -1 \leq \dot{c} < 1 \\ -1 & \dot{c} < -1 \end{cases}\text{，即}\quad q = \begin{cases} 1 & \dot{e} \leq -1 \\ -\dot{e} & -1 < \dot{e} \leq 1 \\ -1 & \dot{e} > 1 \end{cases}$$

（b）分区运动方程。e - $\dot{e}$ 平面分三个区域。

区域 I： $\dot{e} > 1$ 。

$$\ddot{e} + 5e = 5q = -5\text{，}\quad \ddot{e} + 5(e + 1) = 0$$

所以 $(-1,0)$ 为奇点，中心点。运动方程为 $\dot{e}^2 + 5(e+1)^2 = C_1$ 。

区域 II： $-1 < \dot{e} \leq 1$ 。

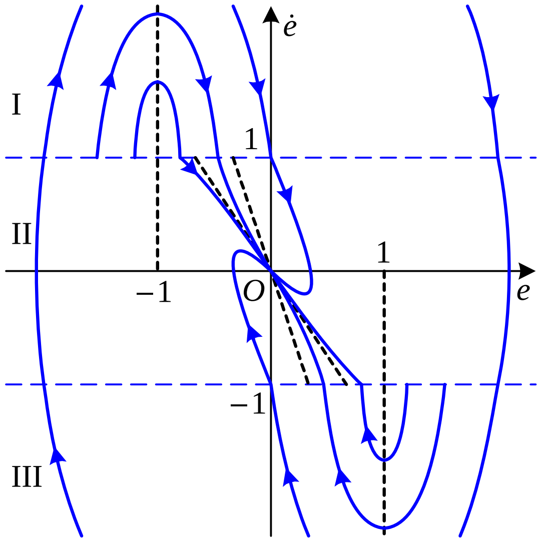
$$\ddot{e} + 5e = 5q = -5\dot{e}\text{，}\quad \ddot{e} + 5\dot{e} + 5e = 0$$

所以原点为奇点， $\lambda^2 + 5\lambda + 5 = 0$ 。特征根为 $\lambda = -1.382, -3.618$ ，奇点为稳定节点。

区域 III： $\dot{e} \leq -1$ 。

$$\ddot{e} + 5e = 5q = 5\text{，}\quad \ddot{e} + 5(e - 1) = 0$$

所以 $(1,0)$ 为奇点，中心点。运动方程为 $\dot{e}^2 + 5(e-1)^2 = C_2$ 。



（2）斜坡输入情况下的讨论：$r = R + Vt$ 。

（a）基本运动方程。

$$e = r - c = R + Vt - c\text{，}\quad \dot{e} = \dot{r} - \dot{c} = V - \dot{c}\text{，}\quad \ddot{e} = -\ddot{c}$$

同样有 $\ddot{e} + 5e = 5q$，但

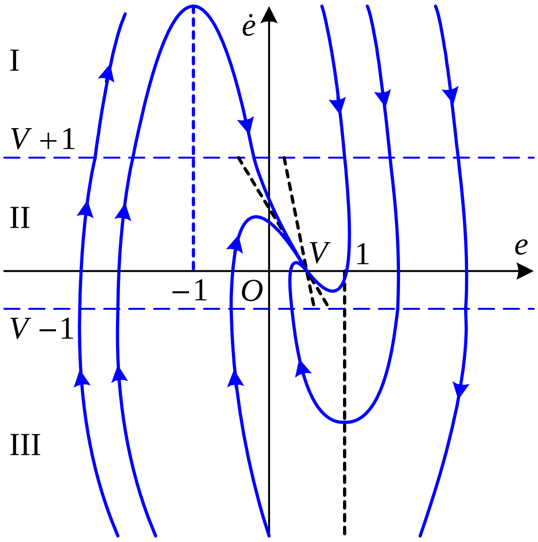
$$q = \begin{cases} 1 & \dot{c} \geq 1 \\ \dot{c} & -1 \leq \dot{c} < 1 \\ -1 & \dot{c} < -1 \end{cases} \text{将给出}\; q = \begin{cases} 1 & \dot{e} \leq V - 1 \\ V - \dot{e} & V - 1 < \dot{e} \leq V + 1 \\ -1 & \dot{e} > V + 1 \end{cases}$$

（b）分区运动方程。e-$\dot{e}$ 平面分三个区域。

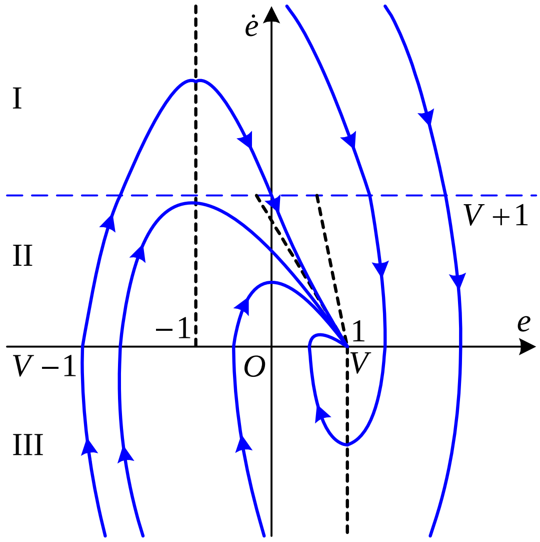
区域 I：$\dot{e} > V + 1$ 。$\ddot{e} + 5e = 5q = -5$ 。$(-1,0)$ 为奇点，中心点。运动方程为 $\dot{e}^2 + 5(e+1)^2 = C_1$ 。

区域 II：$V - 1 < \dot{e} \leq V + 1$ 。$\ddot{e} + 5e = 5q = 5V - 5\dot{e}$，$\ddot{e} + 5\dot{e} + 5(e - V) = 0$，$(V,0)$ 为奇点，稳定节点，特征值为 $\lambda = -1.382, -3.618$ 。

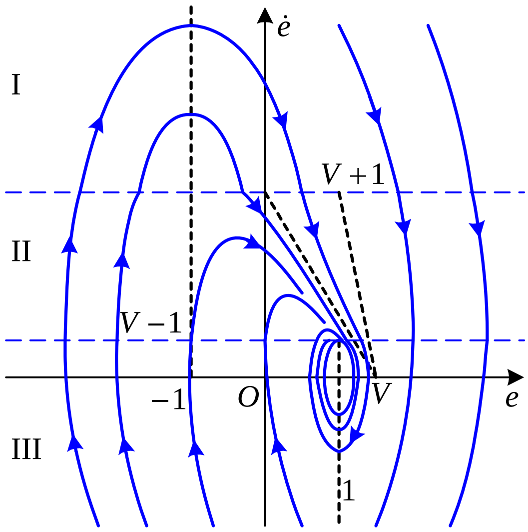
区域 III：$\dot{e} \leq V - 1$ 。$\ddot{e} + 5e = 5q = 5$，$(1,0)$ 为奇点，中心点。运动方程为 $\dot{e}^2 + 5(e-1)^2 = C_2$ 。



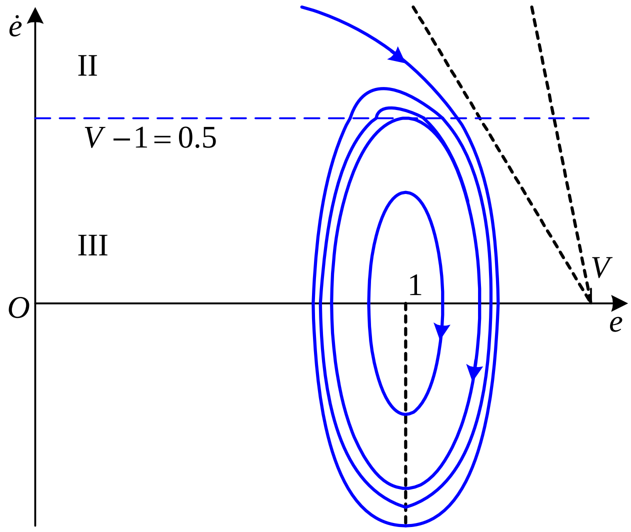
$V = 0.5 < 1$



$V = 1$



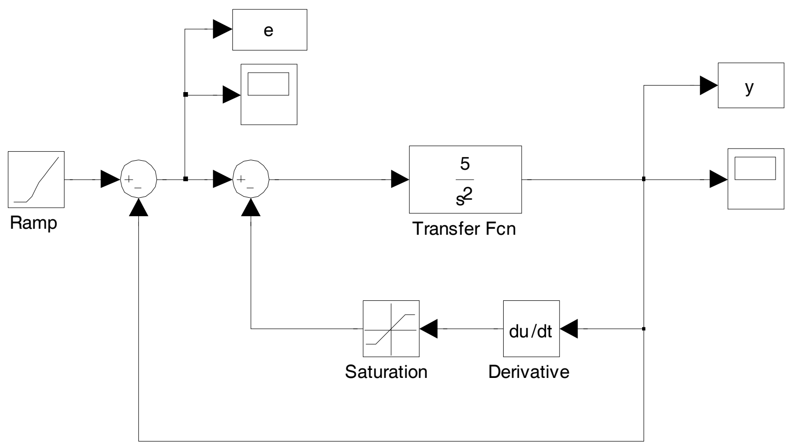
$V = 1.5 > 1$



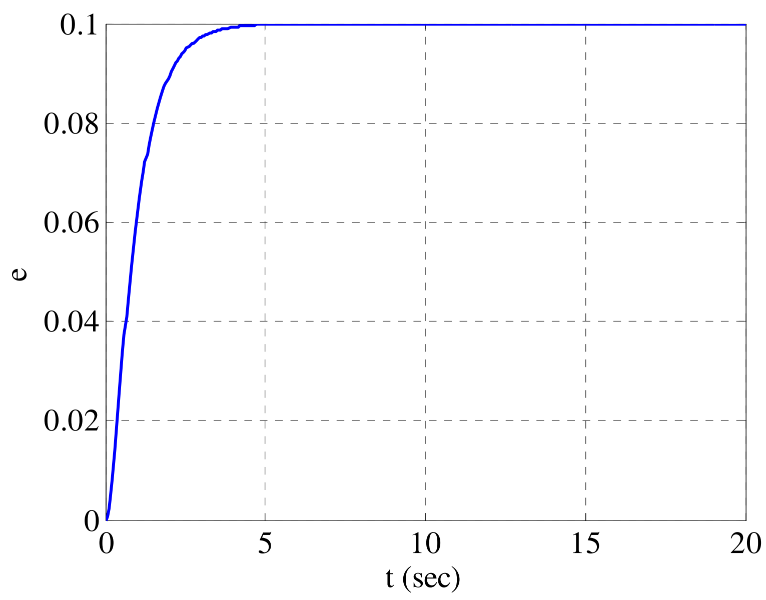
$V = 1.5 > 1$（局部）

(3) Matlab 仿真的阶跃响应图如下所示：

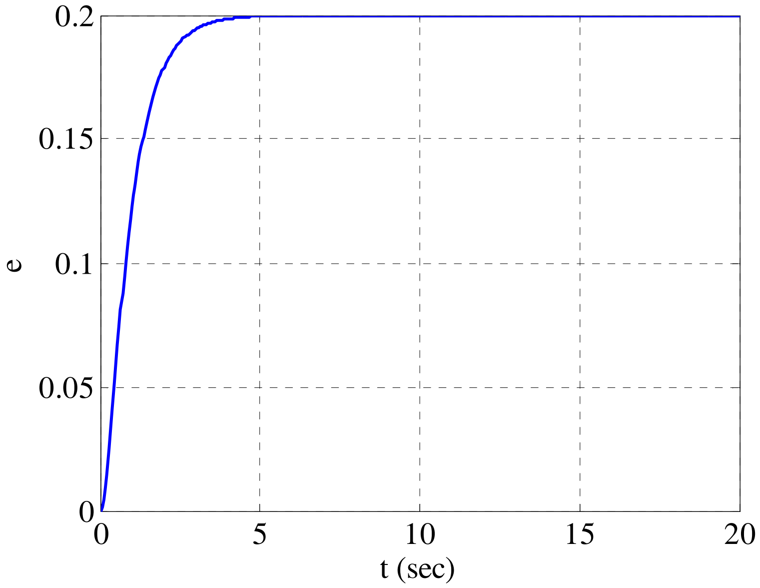
(a) Simulink 仿真模型：



(b) $r = Vt$ 取 V=0.5<1 的响应曲线为：



(c) $r = Vt$ 取 V=1 的响应曲线为：



(d) $r = Vt$ 取 V=5>1 的响应曲线为：