第 6 章习题参考答案

1. Given the matrix

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

(1) Compute its inverse using Cayley-Hamilton Theorem.

(2) Compute A^6.

解：(1) 矩阵 A 的特征方程为：

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda+1 & -2 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -2 & 1 & \lambda-2\end{pmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-3)=0$$

求的特征值为：$\lambda_1=2$， $\lambda_2=\sqrt{3}$， $\lambda_3=-\sqrt{3}$

根据 Cayley-Hamilton 定理，可设

$$A^{-1}=a_0I+a_1A+a_2A^2 \qquad \text{即 } \lambda^{-1}=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$$

将三个特征值代入上式可得：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}=a_0+2a_1+4a_2\\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}=a_0+\sqrt{3}a_1+3a_2\\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}=a_0-\sqrt{3}a_1+3a_2\end{cases} \qquad \text{解得：}\begin{cases}a_0=\dfrac{1}{2}\\ a_1=\dfrac{1}{3}\\ a_2=-\dfrac{1}{6}\end{cases}$$

将解的 a_0,a_1,a_2 代入上式，得

$$A^{-1}=a_0I+a_1A+a_2A^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(2) 求 A^6

根据 Cayley-Hamilton 定理，可设

$$A^6=a_0I+a_1A+a_2A^2 \quad \text{即} \ \lambda^6=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2$$

将三个特征值代入上式可得：

$$\begin{cases} 64=a_0+2a_1+4a_2 \\ 27=a_0+\sqrt{3}a_1+3a_2 \\ 27=a_0-\sqrt{3}a_1+3a_2 \end{cases} \qquad \text{解得：} \begin{cases} a_0=-84 \\ a_1=0 \\ a_2=37 \end{cases}$$

将解的a_0,a_1,a_2代入上式，得

$$A^6=a_0I+a_1A+a_2A^2=\begin{pmatrix} -84 & 0 & 0 \\ 0 & -84 & 0 \\ 0 & 0 & -84 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 111 & 0 & 0 \\ 0 & 111 & 0 \\ 37 & 37 & 148 \end{pmatrix}$$

$$A^6=\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 37 & 37 & 64 \end{pmatrix}$$

2. Use the following methods to find the unit-step response of

$$\dot{x}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}x+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u$$
$$y=\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}x$$

(1) The Laplace transform method;

(2) The eigenvalue method;

(3) The Cayley-Hamilton method.

解：(1) The Laplace transform method

求传递函数 G(s)

$$G(s)=C(Is-A)^{-1}B+D$$

$$=\frac{1}{s^2+2s+2}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s+2 & 1\\ -2 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{5s}{s^2+2s+2}$$

$G(s)=\dfrac{Y(s)}{U(s)}$， $U(s)=\dfrac{1}{s}$， $Y(s)=G(s)U(s)=\dfrac{5s}{s^2+2s+2}\dfrac{1}{s}=\dfrac{5}{s^2+2s+2}$

取反拉氏变换得： $y(t)=5e^{-t}\sin t$

(2) The eigenvalue method

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 2 & \lambda+2\end{pmatrix}=\lambda^2+2\lambda+2=0$$

求得特征值为： $\lambda_1=-1+i$， $\lambda_2=-1-i$

求得 $\lambda_1=-1+i$ 对应的特征向量为： $p_1=\begin{pmatrix}1\\ -1+i\end{pmatrix}$

$\lambda_2=-1-i$ 对应的特征向量为： $p_2=\begin{pmatrix}1\\ -1-i\end{pmatrix}$

因此， $P=(p_1,p_2)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+i & -1-i\end{pmatrix}$， $P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i & -\frac{1}{2}i\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & \frac{1}{2}i\end{pmatrix}$

$$e^{At}=P\begin{pmatrix}e^{(-1+i)t} & 0\\ 0 & e^{(-1-i)t}\end{pmatrix}P^{-1}=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t & \sin t\\ -2\sin t & \cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

因为 $x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=e^{At}\int_0^t e^{\tau}\begin{pmatrix}\cos\tau-\sin\tau & -\sin\tau\\ 2\sin\tau & \cos\tau+\sin\tau\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}d\tau$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{3}{2}-\frac{3}{2}e^{-t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-t}\sin t \\ -1+2e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

且 $e^{At}x(0)=0$

因此， $y(t)=Ce^{At}x(0)+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=5e^{-t}\sin t$

(3) The Cayley-Hamilton method

根据(2)中的求出得特征值，可求 e^{At}

根据 Cayley-Hamilton 定理， $e^{At}=a_0 I+a_1 A$，即 $e^{\lambda t}=a_0+a_1\lambda$

将两个特征值代入上式可得：

$$\begin{cases} e^{(-1+i)t}=a_0+(-1+i)a_1 \\ e^{(-1-i)t}=a_0+(-1-i)a_1 \end{cases} \qquad \text{解得：} \begin{cases} a_0=e^{-t}(\sin t+\cos t) \\ a_1=e^{-t}\sin t \end{cases}$$

将解的 a_0,a_1 代入，得 $e^{At}=a_0 I+a_1 A=e^{-t}\begin{pmatrix} \cos t+\sin t & \sin t \\ -2\sin t & \cos t-\sin t \end{pmatrix}$

由(2)可知，可求得结果为 $y(t)=Ce^{At}x(0)+C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=5e^{-t}\sin t$

3．Given the following system

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}u, \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t\geq 0$$

(1) Work out the time response when the input is a unit step signal;

(2) Plot the unit step response of the system by using Matlab.

解：

(1) 矩阵 A 的特征方程为：

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix} \lambda\text{-}1 & 0 \\ \text{-}1 & \lambda\text{-}1 \end{pmatrix}=(\lambda-1)^2=0$$

求的特征值为： $\lambda_1=\lambda_2=1$

根据 Cayley-Hamilton 定理，可设

$$e^{At}=a_0 I+a_1 A \qquad \text{即} \quad e^{\lambda t}=a_0+a_1\lambda$$

将特征值代入上式可得：

$$\begin{cases} e^t=a_0+a_1 \\ te^t=a_1 \end{cases} \qquad \text{解得：} \quad \begin{cases} a_0=e^t-te^t \\ a_1=te^t \end{cases}$$

将解的a_0,a_1代入上式，得

$$e^{At}=a_0 I+a_1 A=\begin{pmatrix} e^t-te^t & 0 \\ 0 & e^t-te^t \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} te^t & 0 \\ te^t & te^t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

由 $x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$， u(t)=1 得：

$$e^{At}x(0)=\begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}$$

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau=e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}Bd\tau=e^{At}\int_0^t\begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ -\tau e^{-\tau} & e^{-\tau} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}d\tau=\begin{pmatrix} e^t-1 \\ te^t \end{pmatrix}$$

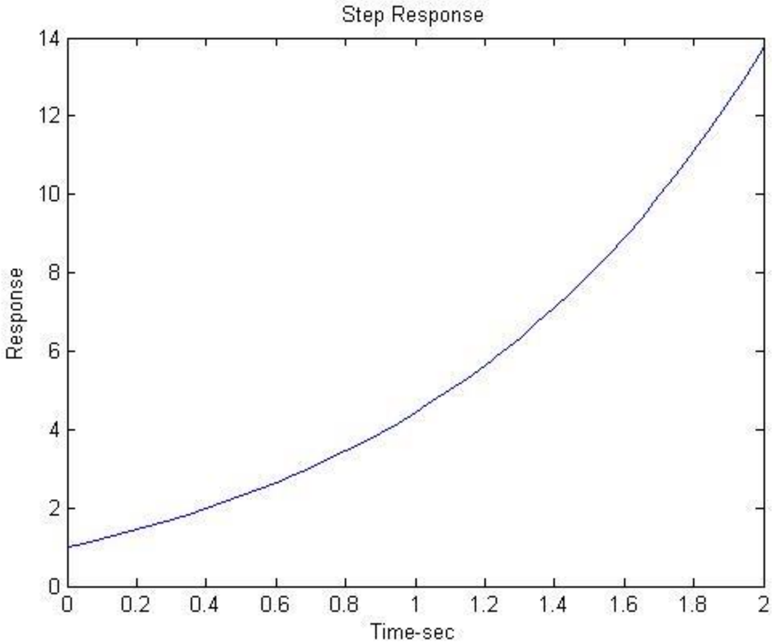
解得： $x(t)=\begin{pmatrix} 2e^t-1 \\ 2te^t \end{pmatrix}$

(2) 取 $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$

程序如下：

```
a = [1 0;1 1];
b = [1;1];
c = [1 0];
sys = ss(a,b,c,0);
t=0:0.05:2;
u=zeros(size(t))+1;
x0=[1;0];
[y,x]=lsim(sys,u,t,x0);
plot(t,y) ;
title('Step Response');
xlabel('Time-sec');
ylabel('Response');
```

所得单位阶跃响应图如下所示：



图示为该系统的单位阶跃响应

4． Given the second-order system

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -4 & -5\end{pmatrix}x,\quad x(0)=x_0$$

find the condition on the initial state vector x_0 such that only the mode corresponding to the smaller (in absolute value) eigenvalue is excited.

解：矩阵 A 的特征方程为：

$$(\lambda I-A)=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 4 & \lambda+5\end{pmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+4)=0$$

求的特征值为：$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-4$

根据 Cayley-Hamilton 定理，可设$e^{At}=a_0I+a_1A$　即 $e^{\lambda t}=a_0+a_1\lambda$

将两个特征值代入上式可得：

$$\begin{cases}e^{-t}=a_0-a_1\\ e^{-4t}=a_0-4a_1\end{cases}\quad \text{解得：}\quad \begin{cases}a_0=\dfrac{1}{3}(e^{-t}-4e^{-t})\\ a_1=\dfrac{1}{3}(4e^{-t}-e^{-4t})\end{cases}$$

将解的a_0,a_1代入上式，得

$$e^{At}=a_0I+a_1A=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\\ -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\end{pmatrix}$$

又因为$x(t)=e^{At}x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$

因此， $x(t)=e^{At}x(0)=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t} & \frac{1}{3}e^{-t}-\frac{1}{3}e^{-4t}\\ -\frac{4}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t} & -\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{4}{3}e^{-4t}\end{pmatrix}x_0$

要取x_0使该系统中只有最小的特征值被激励

因此，取$x_0=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$