同 济 大 学

实验报告

模型预测控制

课程名称 最优化原理

学生姓名 姚 天 亮

学　　号 2150248

学　　院 电子与信息工程学院

一、作业要求

假设天问一号降速过程中的部分所需控制模型如下：

$$x_1(k+1)=2x_1(k)+2x_2(k)$$
$$x_2(k+1)=-2x_1(k)-x_2(k)+x_3(k)$$
$$x_3(k+1)=2x_2(k)+1.5x_3(k)+u(k)$$

状态及输入的约束条件：

$$-20\leqslant x_1\leqslant 20,\quad -10\leqslant x_2\leqslant 10$$
$$-20\leqslant x_3\leqslant 20,\quad -10\leqslant u\leqslant 10$$

预测步数：

$$N=10$$

初值：

$$x_0=[2;1;1]$$

代价函数系数矩阵：

$$Q=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ R=1$$

问题：

结合课堂内容所学，请将其整理成状态空间的形式并采用模型预测控制方法求解最优解。请使用 Matlab 编程实现，其中 QP 求解器用加速梯度投影法。

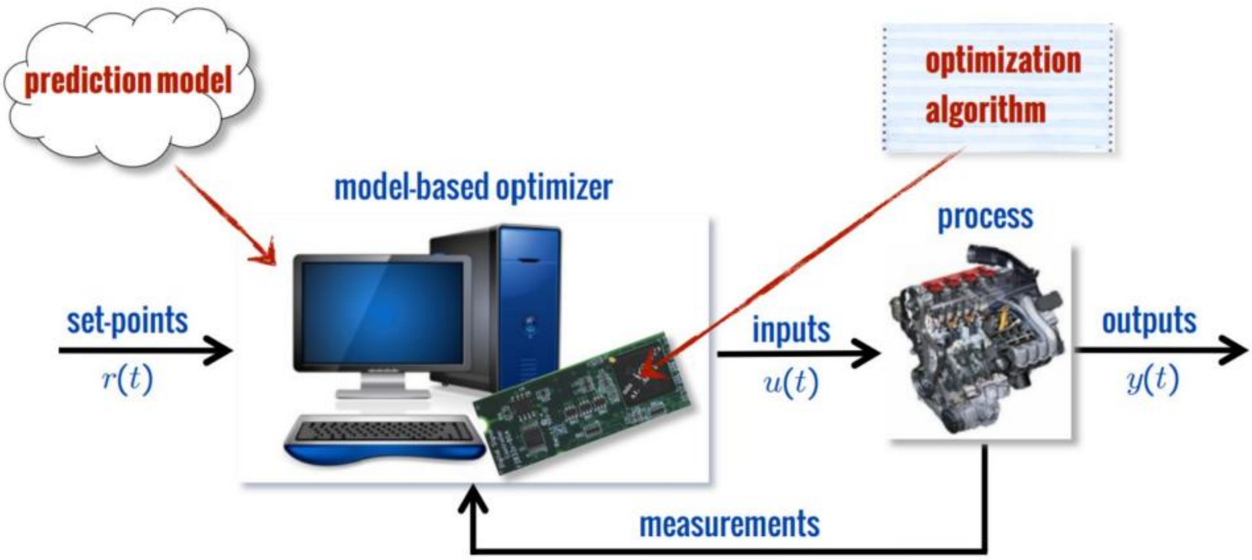
二、理论推导

本作业题的目的将控制模型整理为状态空间的形式，并采用模型预测控制方法进行最优解的求解。

模型整理成的状态空间如下：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 1.5\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

要求使用的模型控制，使用过程的动态模型预测其未来的发展并选择“最佳”控制措施。本质上模型预测控制是求解一个开环最优的控制问题。



具有：预测模型 滚动优化 反馈校正的三要素。

预测模型是根据系统的现时刻的控制输入以及过程的历史信息，预测过程输出的未来值。因此，需要一个描述系统动态行为的模型作为预测模型。

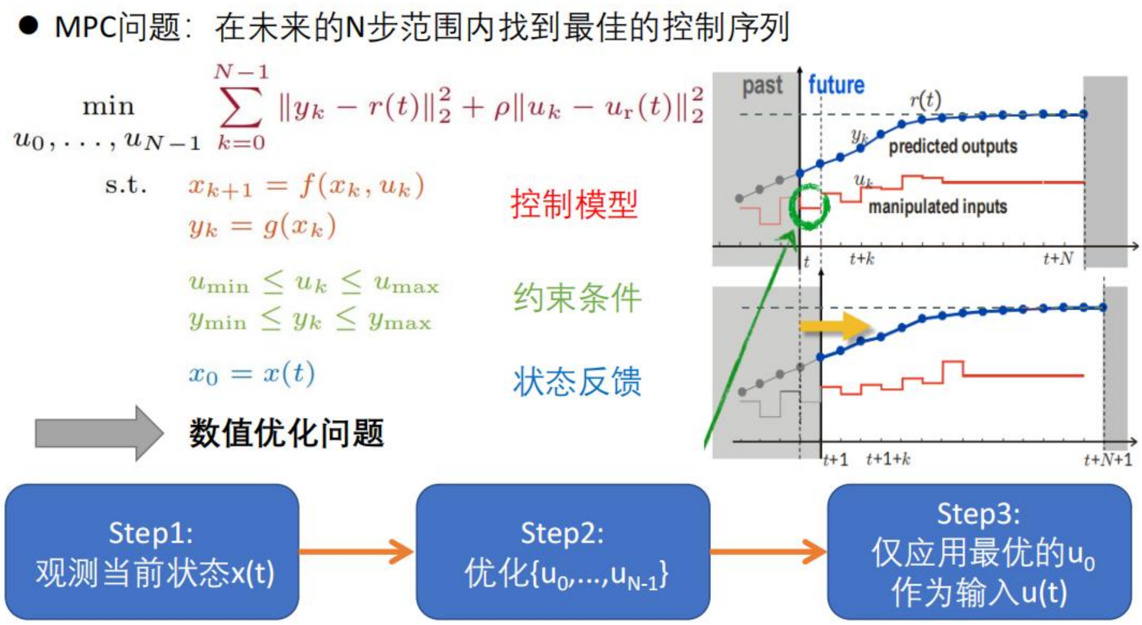
模型预测控制采用滚动式的有限时域优化策略。即优化过程不是一次离线完成的，而是反复在线进行的。某一时刻计算得到的控制序列只实施第一个控制作用，在下一个采样时刻重新求取最优控制率。

在预测控制中，通过输出测量值与模型预估值进行比较，得出模型预测误差，再利用模型预测误差来对模型的预测值进行修正。

对模型施加了反馈校正的过程，使预测控制具有很强的抗扰动和克服系

统不确定性的能力。 预测控制中利用了反馈信息，因此这是一种闭环优化控制算法。

MPC问题的数学描述：



使用加速梯度投影法的QP求解器是一种基于牛顿法的学习算法，它可以近似损失函数为一个简单的抛物线，并通过计算抛物线的最小值来更新权重。具体的实现原理与步骤如下：

首先，对损失函数L进行二阶泰勒展开，得到一个抛物线的近似。

然后，根据权重差定义权重的更新规则，并用差商线性近似L的二阶导数1。

最后，利用当前和之前的权重、权重差和损失斜率，计算新的权重，并重复这个过程直到收敛。

4.MPC实验

- ADMM子程序求解QP

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}z'Qz + c'z \\ \text{s.t.} \quad & \ell \le Az \le u \end{aligned}$$

```
function [z]=admmqp(Q,c,A,u,l)
% H为二次项Q
% f为一次项c'
%A, l, u为约束条件
n = size(Q,1);
z = ones(n,1);
s = ones(n,1);
v = ones(n,1);
maxiter = 1000;
rho = 1.0;
iM = inv(Q+rho*A'*A);
k=0;
```

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= -(Q+\rho A'A)^{-1}(\rho A'(v^k - s^k) + c) \\ s^{k+1} &= \min\{\max\{Az^{k+1} + v^k, \ell\}, u\} \\ v^{k+1} &= v^k + Az^{k+1} - s^{k+1} \end{aligned}$$

```
while k<maxiter
    k=k+1;
    z=-iM*(c+A'*(rho*(v-s)));
    Az=A*z;
    s=min(max(Az+v,l),u);
    v=v+Az-s;
end
```

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= -(Q+\rho A'A)^{-1}(\rho A'(v^k - s^k) + c) \\ s^{k+1} &= \min\{\max\{Az^{k+1} + v^k, \ell\}, u\} \\ v^{k+1} &= v^k + Az^{k+1} - s^{k+1} \end{aligned}$$

3. QP的（快速）梯度法

采用快速梯度法求解对偶QP问题

$$\begin{aligned} \min \quad & \tfrac{1}{2}y'Hy + (Dx+W)'y \\ \text{s.t.} \quad & y \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_z \quad & \frac{1}{2}z'Qz + x'F'z \\ \text{s.t.} \quad & \boxed{Gz \le W + Sx} \end{aligned}$$

$H = GQ^{-1}G', D = S + GQ^{-1}F.$

原始-对偶变量关系 $z = -Q^{-1}(Fx + G^T y)$

$$\begin{aligned} K &= Q^{-1}G' \\ J &= Q^{-1}F \\ L &\ge \lambda_{\max}(GQ^{-1}G') \\ \beta_k &= \max\{\tfrac{k-1}{k+2}, 0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w^k &= y^k + \beta_k(y^k - y^{k-1}) \\ z^k &= -Kw^k - Jx \\ s^k &= \tfrac{1}{L}Gz^k - \tfrac{1}{L}(W + Sx) \\ y^{k+1} &= \max\{w^k + s^k, 0\} \end{aligned}$$

$$s^k = -\frac{1}{L}(GQ^{-1}G^T w^k + GQ^{-1}Fx + Sx + W) = \frac{1}{L}Gz^k - \frac{1}{L}(Sx + W)$$

对上述的更新，主要是对在w,z,s,y更新。

$$\boxed{\begin{aligned} w^k &= y^k + \beta_k(y^k - y^{k-1}) \\ z^k &= -Kw^k - Jx \\ s^k &= \tfrac{1}{L}Gz^k - \tfrac{1}{L}(W + Sx) \\ y^{k+1} &= \max\left\{w^k + s^k, 0\right\} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} K &= Q^{-1}G' \\ J &= Q^{-1}F \\ L &\geq \lambda_{\max}(GQ^{-1}G') \end{aligned}$$

$$\beta_k = \max\{\tfrac{k-1}{k+2}, 0\}$$

$$\boxed{Gz \leq W + Sx}$$

- 线性预测模型

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \\ y_k = Cx_k \end{cases} \qquad \begin{aligned} x &\in \mathbb{R}^n \\ u &\in \mathbb{R}^m \\ y &\in \mathbb{R}^p \end{aligned}$$

Notation:

$x_0 = x(t)$

$x_k = x(t+k|t)$

$u_k = u(t+k|t)$

- **线性预测模型**

$$x_k = A^k x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^j B u_{k-1-j}$$

- 约束最优控制问题（二次性能指标）

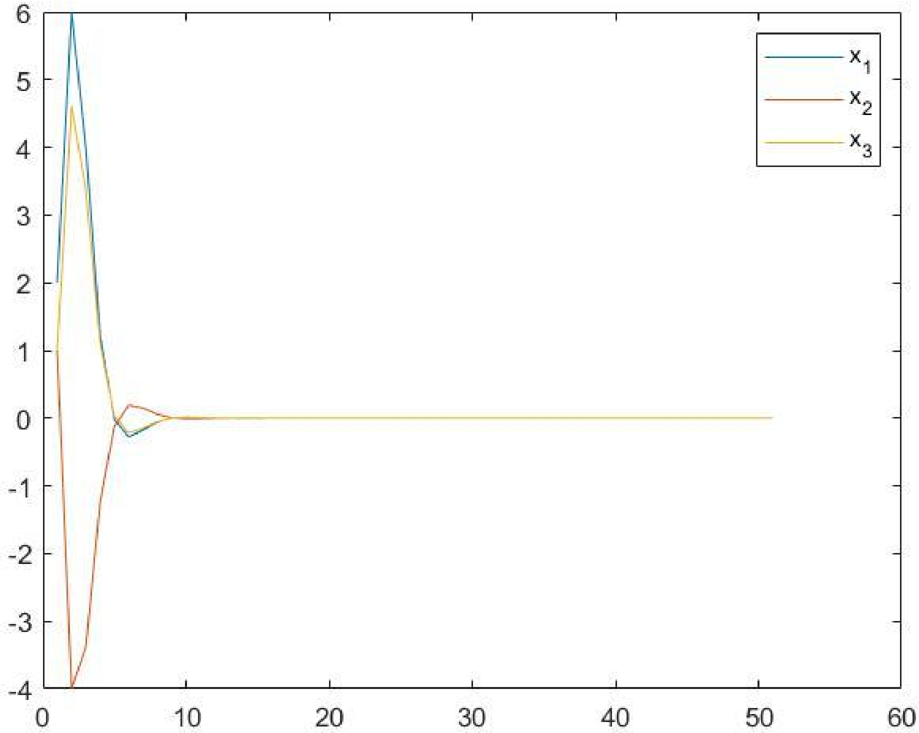
$$\min_z \quad x_N' P x_N + \sum_{k=0}^{N-1} x_k' Q x_k + u_k' R u_k$$

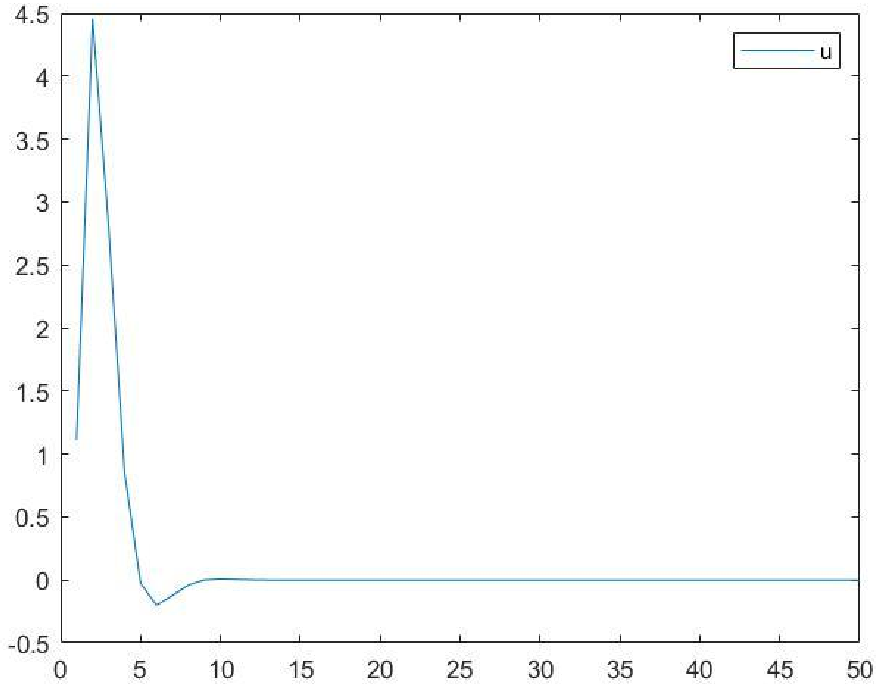
$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & u_{\min} \leq u_k \leq u_{\max},\ k = 0, \ldots, N-1 \\ & y_{\min} \leq y_k \leq y_{\max},\ k = 1, \ldots, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= R' \succ 0 \\ Q &= Q' \succeq 0 \\ P &= P' \succeq 0 \end{aligned}$$

第18页

三、实验结果





附录

A. main.m

```
%2150248 姚天亮 自动化


%MPC：QP 加速梯度投影法

% 线性系统系数矩阵
A=[2 2 0; -2 -1 1;0 2 1.5];
B=[0;0;1];
% 初始状态量-如果不能在下一步回到约束范围内，则会造成无解
x0=[2;1;1];
% 预测步长
Np=10;
% 优化目标参数，加权矩阵
Q=eye(3); R=1;
% 转化为用控制量 ut 表示的，关于状态量的推导方程的矩阵
At=[]; Bt=[]; temp=[];
% 转换后的加权矩阵
Qt=[]; Rt=[];
% 加权矩阵的计算过程，以及推导方程矩阵的叠加过程
for i=1:Np
    At=[At; A^i];
    Bt=[Bt zeros(size(Bt,1), size(B,2));A^(i-1)*B
temp];
    temp=[A^(i-1)*B temp];
    Qt=[Qt
zeros(size(Qt,1),size(Q,1));zeros(size(Q,1),size(Qt,1)
) Q];
    Rt=[Rt
zeros(size(Rt,1),size(R,1));zeros(size(R,1),size(Rt,1)
) R];
end
```

```
% 控制量ut的上下限
lb=-10*ones(Np,1);
ub=10*ones(Np,1);
% 转换后的优化目标函数矩阵，循环优化函数中H后的表达式为优化目标的另一项
H=2*(Bt'*Qt*Bt + Rt);
% 转换后的优化中的不等式约束左边系数矩阵，后面循环中的bi为不等式右边
Ai= eye(Np);
u=[]; % u用来保存每一步采用的控制量
x=x0; % x用来保存状态变量
xk=x0; % 保存当前时刻的状态

%此处为增加的梯度投影下降法使用到的矩阵
G=zeros(Np);
W=[20;10;20;zeros(7,1)];%此处的含义是为了满足Gz<=W+Sx，但是为了补足可乘，所以为10*1，多余补零
S=[eye(3);zeros(7,3)];%注意此处为了配合S*x，需要补成10*3的矩阵

for k=1:50

    % 进行二次优化
    C=(2*At'*Qt*Bt)';%与之前不同的是，本处因为采用到一阶系数矩阵，所以不能有xk，故不乘xk（测试过程中如果加上xk结果会出错）
    [ut]=quickqp2(H,C,xk,G,W,S);
    %此处为QP以加速梯度投影法写成的求解器
```

```
    % 采用优化得到的控制量的第一个元素作为实际作用的控制量，代入到原系统中得到下一个时刻的状态量
    u(k) = ut(1);
    x(:, k+1) = A*x(:, k) + B*u(k);
    xk = x(:, k+1);
end

%打出图像
figure();
plot(x');
legend('x_1','x_2','x_3');

figure();
plot(u);
legend('u');
```

B. quickqp.m

```
%2150248 姚天亮 自动化

function [z]=quickqp(Q,c,x,G,W,S)
% H 为二次项 Q

% f 为一次项 c’

%A, l, u 为约束条件 H 即是 Q
n = size(Q,1);
% w = ones(n,1);
% z = ones(n,1);
% s = ones(n,1);
y=ones(n,1);

maxiter = 10000;


k=0;     %迭代计数


K=inv(Q)*G';
J=inv(Q)*c;
L=max(eig(G*inv(Q)*G'));
y_1=y;  %记录上一次 y

while k<maxiter
beta=max((k-1)/k+2,0);
w=y+beta*(y-y_1);
z=-K*w-J*x;
s=(1/L)*G*z-(1/L)*(W+S*x);
y_1=y;
y=max(w+s,0);
k=k+1;
end
```