Mètodes Numèrics
Pràctica 3: Integració numèrica

Albert Rodas Barceló i Marc Seguí Coll
Universitat Autònoma de Barcelona

Maig 2019

Donat un interval $[a, b]$ dividit en n parts iguals definim $x_j = a + j(b - a)/n$ per a $j = 0, 1, \ldots, n$. L'aproximació de la integral d'una funció $f(x)$ en l'interval $[a, b]$ per la regla composta dels trapezis és:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \quad \text{amb error} \quad e_T = -\frac{(b-a)^3 f''(\eta)}{12n^2} \quad \eta \in [a, b] \tag{1}$$

I l'aproximació de la mateixa integral per la regla composta de Simpson:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{(b-a)}{3n}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2}) \quad \text{i} \quad e_S = -\frac{(b-a)^5 f^{(4)}(\xi)}{180n^4} \quad \xi \in [a, b] \tag{2}$$

1 Exercici 4

En aquest exercici calcularem el valor de la integral $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ mitjançant la regla composta dels trapezis i de Simpson. Dividirem l'interval d'integració en 4 parts.

Com que no sabem quins valor de η i ξ hem d'emprar, fitarem l'error pel màxim del valor absolut de les derivades corresponents a l'interval $[0, 1]$ (en exercicis posteriors farem el mateix). Degut que la fórmula de l'error en la regla composta empra el teorema del valor mitjà, si es calcula l'error obtingut emprant la fórmula de l'error simple en cada interval i es sumen els resultats, s'obté un error més precís (ja que en general en intervals més curts tindrem millors fites de la derivada que en el total). A la taula següent s'expressa el valor absolut de l'error simple, el que acabem d'explicar (sense emprar el valor mig, calculant l'error entre x_j i x_{j+1}) i el valor absolut de l'error compost que trobem amb les equacions (1) i (2) (amb el valor mitjà, només importa l'interval total i el nombre de divisions)).

	Valor integral	$e_{\text{màx}}$ (simple)	$e_{\text{màx}}$ (compost)
Trapezis	0.78279412	0.0054885691	0.010416667
Simpson	0.78539216	0.00037027995	0.00052083333

Queda reflectit en els resultats que el mètode de Simpson proporciona major precisió a l'hora de calcular el valor d'integrals ja que els *splines* són de grau 2 o menors (pels trapezis són de grau 1 o menors) i per tant l'aproximació és millor.

2 Exercici 5

Calcularem el valor de la integral $I = \int_1^5 f(x)dx = \int_1^5 \frac{e^x}{x}dx$ emprant el mètode dels trapezis compost amb n intervals de la mateixa longitud per a $n = 4, 8, 16, 32, 64$.

n	4	8	16	32	64
I	40.239701	38.782928	38.413711	38.321069	38.297887
$e_{\text{màx}}$(simple)	2.9294147	0.60648757	0.13704735	0.032554295	0.0079317812
$e_{\text{màx}}$(compost)	6.7280632	1.6820158	0.42050395	0.10512599	0.026281497

Notem que quants més nodes es consideren, es troba un valor de la integral amb menys error.

3 Exercici 6

Mitjançant el mateix procediment que als exercicis anteriors, pel mètode de Simpson calcularem el valor de $\int_1^2 \log(x)dx$ dividint l'interval $[1, 2]$ en n trossos, on n és un nombre parell que anirem augmentant fins obtenir el valor de la integral amb precisió major a 10^{-2}. A partir del programa `p6.c` es troba el valor de la integral amb 3 nodes, de forma que

$$\int_1^2 \log(x)dx \approx 0.3858346 \quad \text{i} \quad e_{\text{màx}} = 0.0020833333.$$

4 Exercici 7

Sabent que la velocitat és la derivada de la posició respecte el temps tenim que

$$L = \int_a^b v(t)dt \tag{3}$$

Com que no coneixem exactament $v(t)$ (en sabem els valors instantanis en temps concrets) hem d'aproximar la integral. Així doncs amb la taula de valors proporcionada obtenim $L \approx 2920.5$ m mitjançant el mètode dels trapezis (suposició que l'acceleració és constant a cada interval) i $L \approx 2983.2$ m amb el mètode de Simpson.

5 Conclusions

En primer lloc, notem que partint l'interval en el mateix nombre de trossos, el mètode de Simpson, que utilitza polinomis interpoladors de segon grau, és més precís que el dels trapezis. Tanmateix, si la partició no és prou fina, el mètode dels trapezis pot donar millors resultats que el de Simpson.

És interessant també notar que en integració, augmentar el nombre de nodes sí que millora la precisió del resultat. Això es pot veure en la fòrmula ja que el terme $h = (b - a)/n$ disminueix en fer més gran la partició. Això és així ja que en augmentar els nodes no estem obtenint polinomis interpoladors de grau més elevat, sinó que estem fent un procés semblant al d'un *spline*, enganxant polinomis del mateix grau en intervals més petits de manera que l'aproximació és millor.