Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT
Journal of Functional Analysis 236 (2006) 369–394
JOURNAL OF Functional Analysis
www.elsevier.com/locate/jfa

# Estimation optimale du gradient du semi-groupe de la chaleur sur le groupe de Heisenberg

Hong-Quan Li *

*SFB 611, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn, Poppelsdorfer Allee 82, D-53115 Bonn, Germany*

Reçu le 6 juillet 2005 ; accepté le 21 février 2006

Disponible sur Internet le 18 avril 2006

Communiqué par G. Pisier

**Résumé**

En utilisant l'inégalité de Poincaré et la formule de représentation, on montre que sur le groupe de Heisenberg de dimension réelle 3, $\mathbb{H}^1$, il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C e^{t\Delta}\big(|\nabla f|\big)(g), \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty\big(\mathbb{H}^1\big).$$

Ce résultat répond par l'affirmation à la question ouverte de [B.K. Driver, T. Melcher, Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group, J. Funct. Anal. 221 (2005) 340–365]. Aussi, le résultat principal de [B.K. Driver, T. Melcher, Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group, J. Funct. Anal. 221 (2005) 340–365] peut être considéré comme une conséquence immédiate de l'inégalité précédente.


*Mots-clés :* Groupe de Heisenberg ; Semi-groupe de la chaleur ; Inégalité de Poincaré ; Formule de représentation ; Noyau de la chaleur ; Structure sous-riemannienne

## 1. Introduction

Sur $\mathbb{R}^n$, notons $\nabla$ le gradient, et $e^{t\Delta}$ $(t > 0)$ le semi-groupe de la chaleur. On voit que $\nabla$ et $e^{t\Delta}$ commutent, i.e.

* Nouvelle adresse : Department of Mathematics, Fudan University, 220 Handan Road, Shanghai 200433, People's Republic of China.

*Adresse e-mail :* li-hq@wiener.iam.uni-bonn.de.

0022-1236/$ – see front matter 
doi:10.1016/j.jfa.2006.02.016

$$\nabla e^{t\Delta} f(g) = e^{t\Delta}(\nabla f)(g), \quad \forall g \in \mathbb{R}^n,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n).$$

En général, cette propriété ne reste plus valable dans le cadre des variétés riemanniennes complètes, $(M, g_M)$. Cependant, si la courbure de Ricci sur $M$, $\mathrm{Ric}(M)$, est minorée par $k$ ($k \in \mathbb{R}$), alors D. Bakry a montré dans [4] que :

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f(g)\right| \leqslant e^{-kt} e^{t\Delta}\big(|\nabla f|\big)(g), \quad \forall g \in M,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty(M). \tag{1.1}$$

Lorsque la courbure de Ricci sur $M$ est minorée, $M$ est stochastiquement complète, i.e. $e^{t\Delta}1 = 1$ pour tout $t > 0$. Une conséquence immédiate de (1.1) est que pour tout $1 \leqslant w < +\infty$, on a

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f(g)\right| \leqslant e^{-kt}\left[e^{t\Delta}\big(|\nabla f|^w\big)(g)\right]^{1/w}, \quad \forall g \in M,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty(M), \tag{1.2}$$

ou bien, plus faiblement,

$$\left\|\nabla e^{t\Delta} f\right\|_{L^\infty} \leqslant e^{-kt}\|\nabla f\|_{L^\infty}, \quad \forall t > 0,\ f \in C_o^\infty(M). \tag{1.3}$$

Les estimations de type (1.2) ou bien sous une forme affaiblie (ou plus forte) ont beaucoup d'applications, par exemple, dans l'étude des inégalités de Poincaré et de Sobolev logarithmique pour le semi-groupe de la chaleur, dans l'étude du critère $\Gamma_2$ et aussi dans l'étude des transformées de Riesz, voir par exemple [1–3,7] ainsi que leurs références.

Récemment, von Renesse et Sturm ont montré que dans le cadre des variétés riemanniennes complètes, l'estimation (1.3) avec $k \in \mathbb{R}$ implique que $\mathrm{Ric}(M) \geqslant k$, voir [24]. Pour d'autres résultats équivalents à l'estimation (1.1), voir par exemple [1,24] ainsi que leurs références.

Et dans [17] (voir aussi [18]), on a montré que les estimations (1.3) ou bien (1.2) ne restent plus valables sur les variétés coniques. Plus précisement, sur le cône $C(S_\vartheta)$ avec $\vartheta > 2\pi$, qui est une variété riemannienne à courbure sectionnelle nulle mais pas complète, il existe une fonction lisse à support compact définie sur $C(S_\vartheta)$, $f_o$, telle que $\|\nabla e^{t\Delta} f_o\|_{L^\infty} = +\infty$ pour tout $t > 0$.

Dans [9], Driver et Melcher ont étudié les estimations de type (1.2) dans le cadre du groupe de Heisenberg de dimension réelle 3, $\mathbb{H}^1$, qui peut être considéré comme une variété munie d'un Laplacien dégénéré.

Rappelons, voir par exemple [12, p. 98], que $\mathbb{H}^1 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ est un groupe de Lie stratifié pour la loi

$$(x_1, x_2, t) \cdot (x_1', x_2', t') = \big(x_1 + x_1', x_2 + x_2', t_1 + t_1' + 2(x_1' x_2 - x_1 x_2')\big).$$

Et le sous-Laplacien sur $\mathbb{H}^1$ s'écrit comme

$$\Delta = \mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2,$$

où les deux champs de vecteurs invariants à gauche sur $\mathbb{H}^1$, $\mathrm{X}_1$ et $\mathrm{X}_2$, sont définis par

$$\mathrm{X}_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \mathrm{X}_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1\frac{\partial}{\partial t}.$$

Notons $\nabla = (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2)$ le gradient, et $e^{t\Delta}$ ($t > 0$) le semi-groupe de la chaleur sur $\mathbb{H}^1$.

Par une méthode probabiliste, Driver et Melcher ont montré que pour tout $1 < w < +\infty$, il existe une constante $C_w > 0$ (et de plus, on doit avoir $C_w > 1$) telle que :

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C_w\left[e^{t\Delta}\left(|\nabla f|^w\right)(g)\right]^{1/w}, \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty\left(\mathbb{H}^1\right). \tag{1.4}$$

Ils ont montré aussi que leur méthode ne marche pas pour le cas où $w = 1$, qui reste ouvert. De plus, Melcher a donné dans [23] quelques familles des fonctions sur lesquelles l'estimation précédente avec $w = 1$ est satisfaite.

On remarque aussi que Lust-Piquard et Villani ont montré dans [21] les estimations (1.4) (avec $1 < w < +\infty$) par une méthode analytique. Plus précisement, ils ont utilisé les estimations classiques du noyau de la chaleur et aussi de son gradient.

Le but de cet article est de donner une réponse positive à la question ouverte de [9]. Autrement dit, on a :

**Théorème 1.1.** *Sur $\mathbb{H}^1$, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :*

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C_1 e^{t\Delta}\left(|\nabla f|\right)(g), \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty\left(\mathbb{H}^1\right).$$

Par le Théorème 1.1, on obtient immédiatement l'inégalité de Sobolev logarithmique pour le semi-groupe de la chaleur comme suit :

**Corollaire 1.2.** *Soit $C_1 > 1$ comme dans le Théorème 1.1. Alors, pour tout $t > 0$ et toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{H}^1)$, on a :*

$$e^{t\Delta}\left(f^2 \log f^2\right)(g) - e^{t\Delta}\left(f^2\right)(g) \log e^{t\Delta}\left(f^2\right)(g) \leqslant C_1^2 t e^{t\Delta}\left(|\nabla f|^2\right)(g), \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,$$

*et aussi*

$$e^{t\Delta}\left(f^2 \log f^2\right)(g) - e^{t\Delta}\left(f^2\right)(g) \log e^{t\Delta}\left(f^2\right)(g) \geqslant C_1^2 t \frac{|\nabla e^{t\Delta} f^2|^2(g)}{e^{t\Delta} f^2(g)}, \quad \forall g \in \mathbb{H}^1.$$

Pour montrer ce corollaire, il suffit de modifier un peu la preuve de la partie (i) $\Rightarrow$ (ii) du Théorème 5.4.7 de [1, pp. 85–86].

L'idée de la démonstration du Théorème 1.1 est d'utiliser l'inégalité de Poincaré et la formule de représentation qu'on rappelle dans la Section 2 (les lecteurs attentifs trouveront qu'en fait, la propriété du doublement du volume localement et la formule de représentation localement sont suffisantes). Cette idée provient d'une observation dans le cadre des espaces euclidiens et c'est très facile à comprendre. Cependant, la démonstration du Théorème 1.1 est relativement difficile : on doit utiliser la structure sous-riemannienne de $\mathbb{H}^1$ (i.e. l'expression explicite de la distance de Carnot–Carathéodory et de la géodésique) ainsi que les estimations optimales du noyau de la chaleur et de son gradient, qu'on rappelle ou donne dans la Section 3.

### *1.1. Quelques remarques sur notre méthode*

1. En général, dans le cadre des variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci minorée, les estimations (1.2) n'offrent des informations précises que pour $t \to 0^+$, et elles deviennent

très faibles lorsque $t \to +\infty$. Dans certains cas, la méthode de cet article nous permet d'obtenir des estimations optimales de type (1.2) lorsque $t \to +\infty$.

Pour mieux comprendre les avantages de notre méthode (qui consiste à utiliser directement des estimations du noyau de la chaleur et de son gradient, plutôt que la formule de Bochner-Lichnerowicz, comme [4]), considérons une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension $n$, $N$.

Notons $p_t$ le noyau de la chaleur sur $N$, $\lambda_1 > 0$ la première valeur propre non nulle du Laplacien et $|N|$ son volume. Alors pour $t \gg 1$, on a d'une part :

$$\begin{aligned}
\left|\nabla e^{t\Delta} f(g)\right| &= \left|\nabla \int_N p_t(g,g')\left(f(g') - \frac{1}{|N|}\int_N f(g_*)\,d\mu(g_*)\right)d\mu(g')\right| \\
&\leqslant \int_N \left|\nabla p_t(g,g')\right| \cdot \left|f(g') - \frac{1}{|N|}\int_N f(g_*)\,d\mu(g_*)\right| d\mu(g') \\
&\leqslant C_1 e^{-\lambda_1 t}\int_N \left|f(g') - \frac{1}{|N|}\int_N f(g_*)\,d\mu(g_*)\right| d\mu(g') \\
&\quad \text{par le fait que } \left|\nabla p_t(g,g')\right| \leqslant C_1 e^{-\lambda_1 t} \text{ pour tout } t \gg 1 \text{ et } g, g' \in N \\
&\leqslant C_2 e^{-\lambda_1 t}\operatorname{diam}(N)\int_N |\nabla f|(g')\,d\mu(g') \\
&\quad \text{par l'inégalité de Poincaré} \\
&\leqslant C e^{-\lambda_1 t}\operatorname{diam}(N)|N|\int_N p_t(g,g')|\nabla f|(g')\,d\mu(g') \\
&\quad \text{par le fait que } p_t(g,g') \geqslant 2^{-1}|N|^{-1} \text{ pour tout } t \gg 1 \text{ et } g, g' \in N \\
&\leqslant C e^{-\lambda_1 t}\operatorname{diam}(N)|N|\left[e^{t\Delta}\left(|\nabla f|^w\right)(g)\right]^{1/w},
\end{aligned}$$

pour tout $g \in N$, $f \in C^\infty(N)$ et $1 \leqslant w < +\infty$.

D'autre part, soit $\upsilon_1$ une fonction propre normalisée associée à $\lambda_1$, alors pour tout $1 \leqslant w < +\infty$, lorsque $t \gg 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{g\in N}\frac{|\nabla e^{t\Delta}\upsilon_1(g)|}{[e^{t\Delta}(|\nabla \upsilon_1|^w)(g)]^{1/w}} &= \sup_{g\in N}\frac{e^{-\lambda_1 t}|\nabla \upsilon_1|(g)}{\left[\int_N p_t(g,g')|\nabla \upsilon_1|^w(g')\,d\mu(g')\right]^{1/w}} \\
&> e^{-\lambda_1 t}\frac{\|\nabla \upsilon_1\|_{L^\infty}}{\|\nabla \upsilon_1\|_{L^w}}\left[\frac{2}{|N|}\right]^{-1/w},
\end{aligned}$$

puisque $p_t(g,g') \leqslant 2|N|^{-1}$ pour tout $t \gg 1$ et $g, g' \in N$.

Autrement dit, dans le cadre des variétés riemanniennes compactes, sans bord, on a

$$\sup_{g\in N,\, f\in C^\infty(N)}\frac{|\nabla e^{t\Delta} f(g)|}{[e^{t\Delta}(|\nabla f|^w)(g)]^{1/w}} \sim e^{-\lambda_1 t}.$$

Et on remarque que lorsque $t \to +\infty$, le facteur $e^{-\lambda_1 t}$ est décroissant beaucoup plus vite que $e^{-\max(0,k_o)t}$ avec $k_o = \sup\{k \in \mathbb{R}; \mathrm{Ric}(N) \geqslant k\}$, en rappelant que le théorème de Lichnerowicz nous dit que $\lambda_1 \geqslant \frac{n}{n-1} k_o$ pour $k_o > 0$.

2. Dans [21,23], les estimations (1.4) avec $1 < w < +\infty$ ont été obtenues dans le cadre des groupes nilpotents par une méthode probabiliste et par une méthode analytique respectivement. Cependant, dans leurs preuves (indépendantes), ils ont tous utilisé des propriétés spéciales du système de Hörmander des champs de vecteurs invariants à gauche sur les groupes de Lie. Notre méthode nous permet aussi de donner une démonstration simple et indépendante à leur résultat. Pour réobtenir leur résultat, il suffit d'utiliser la propriété du doublement du volume, l'inégalité de Poincaré (localement), la formule de représentation (localement), et d'utiliser les estimations classiques supérieures et inférieures du noyau de la chaleur ainsi que de son gradient dans le cadre des groupes nilpotents (voir par exemple [25, Theorem IV.4.2, p. 61]). L'avantage de cette méthode est ce qu'on n'utilise aucune propriété spéciale du groupe nilpotent et on peut adapter cette méthode dans d'autres situations, par exemple, dans le cadre des variétés riemanniennes complètes à $C^1$-géométrie bornée au sens de [6] (cependant, on aurait une estimation beaucoup plus faible que celle obtenue par Bakry).

3. On remarque que dans [2], une estimation de type

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C_w \left[e^{\epsilon t\Delta}\left(|\nabla f|^w\right)(g)\right]^{1/w}, \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty,\ 1 \leqslant w < +\infty,$$

a été obtenue dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynomiale de volume et aussi dans d'autres situations, par l'inégalité de Poincaré ainsi que les estimations du noyau de la chaleur et de son gradient. Ce serait intéressant de savoir si une petite modification de leur méthode nous permet de réobtenir les estimations (1.4) avec $1 < w < +\infty$ dans le cadre des groupes nilpotents.

### *1.2. Notations*

Dans la suite, on note $o = (0, 0)$, l'origine de $\mathbb{H}^1$, $d$ la distance de Carnot–Carathéodory et $p_h$ ($h > 0$) le noyau de la chaleur sur $\mathbb{H}^1$, et $g = (x, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ désignera un point de $\mathbb{H}^1$. Et par convention, on note

$$d(g) = d(g, o), \qquad p(g) = p_1(g, o).$$

Si $E$ est un ensemble mesurable, alors on note $|E|$ son volume et $\chi_E$ sa fonction caractéristique.

Dans toute la suite, $C$, $C_*$, $C^*$, etc. désigneront des constantes universelles qui dépendent peut-être des propriétés de $\mathbb{H}^1$. Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre.

## 2. Rappel sur l'inégalité de Poincaré et la formule de représentation

Il y a beaucoup de travaux sur l'inégalité de Poincaré et la représentation intégrale d'une fonction en termes de son gradient, voir par exemple [19,22] et leurs références. En particulier, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{H}^1)$, tout $g \in \mathbb{H}^1$ et tout $r > 0$, on a :

$$\int_{B(g,r)} \left|f(g') - f_r(g)\right| dg' \leqslant Cr \int_{B(g,r)} \left|\nabla f(g')\right| dg', \tag{2.1}$$

$$\left|f(g') - f_r(g)\right| \leqslant C \int\limits_{B(g,r)} \left|\nabla f(g_*)\right| \frac{d(g', g_*)}{|B(g', d(g', g_*))|} \, dg_*, \quad \forall g' \in B(g,r), \tag{2.2}$$

où

$$f_r(g) = \left|B(g,r)\right|^{-1} \int\limits_{B(g,r)} f(g') \, dg'.$$

On remarque aussi que sur $\mathbb{H}^1$, l'inégalité de Poincaré (2.1) et la formule de représentation (2.2) sont équivalentes, voir [19] (ou bien voir [10,11] pour des résultats un peu faibles mais suffisants pour montrer notre résultat).

## 3. Quelques résultats sur $\mathbb{H}^1$

### *3.1. Rappel sur la structure sous-riemannienne de* $\mathbb{H}^1$

On rappelle dans cette partie l'expression explicite de la distance de Carnot–Carathéodory et de la géodésique minimale entre l'origine $o$ et $(x,t) \in \mathbb{H}^1$. Presque tous les résultats de cette partie proviennent de [5, pp. 635–644] et [12].

Dans la suite, pour simplifier les notations, on suppose que

$$x = (x_1, x_2) \neq (0,0).$$

Posons

$$\mu(\varphi) = \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi} : ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Alors

$$\psi(x,\varphi) = \left(x, \mu(\varphi)\|x\|^2\right) : \left\{(x,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi[;\ x \neq (0,0)\right\} \to \left\{(x,t) \in \mathbb{H}^1;\ x \neq (0,0)\right\} \tag{3.2}$$

est un $C^1$-difféomorphisme.

Notons $\mu^{-1}$ et $\psi^{-1}$ la fonction réciproque de $\mu$ et de $\psi$ respectivement, alors

$$d^2(x,t) = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 \|x\|^2 \quad \text{avec } \theta = \mu^{-1}\left(\frac{t}{\|x\|^2}\right) \tag{3.3}$$

(voir (1.40) et (1.30) de [5], et on a posé $a = \tau = 1$ et remplacé $2\theta$ par $\theta$ dans (1.30)), et la géodésique minimale unique entre l'origine et $(x,t)$,

$$\gamma(s) = \left(x_1(s), x_2(s), t(s)\right) : [0,1] \to \mathbb{H}^1,$$

s'écrit comme (il suffit de poser $a = \tau = 1$ et de remplacer $2\theta$ par $\theta$ dans le Theorem 1.21 de [5])

$$x(s) = \begin{pmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{pmatrix} = \frac{\sin s\theta}{\sin\theta} \begin{pmatrix} \cos(s-1)\theta & \sin(s-1)\theta \\ -\sin(s-1)\theta & \cos(s-1)\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} t(s) &= t - (1-s)\frac{\theta}{\sin^2\theta}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta - \sin 2s\theta}{\sin^2\theta}\|x\|^2 \\ &= \frac{2s\theta - \sin 2s\theta}{2\sin^2\theta}\|x\|^2 = \frac{2s\theta - \sin 2s\theta}{2\sin^2 s\theta}\big\|x(s)\big\|^2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

autrement dit, on a

$$\mu^{-1}\left(\frac{t(s)}{\|x(s)\|^2}\right) = s\mu^{-1}\left(\frac{t}{\|x\|^2}\right), \quad \forall 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{3.6}$$

### *3.2. Estimations optimales du noyau de la chaleur et de son gradient*

Par [12,14] ou [20], on a l'expression explicite de $p_h$ comme suit :

$$p_h(x,t) = \frac{1}{2(4\pi h)^2}\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{\lambda}{4h}\big(t\imath - \|x\|^2\coth\lambda\big)\right)\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\,d\lambda. \tag{3.7}$$

Pour montrer le Théorème 1.1, on aura besoin des estimations optimales de $p(x,t)$ et de $|\nabla p(x,t)|$ comme suit :

**Lemme 3.1.** *Il existe une constante $L_1 > 1$ telle que pour tout $(x,t) \in \mathbb{H}^1$, on a* :

$$L_1^{-1}e^{-d^2(x,t)/4}\big(1 + \|x\|d(x,t)\big)^{-1/2} \leqslant p(x,t) \leqslant L_1 e^{-d^2(x,t)/4}\big(1 + \|x\|d(x,t)\big)^{-1/2}. \tag{3.8}$$

**Lemme 3.2.** *Il existe une constante $L_2 > 1$ telle que* :

$$\big|\nabla p(x,t)\big| \leqslant L_2 d(x,t)p(x,t), \quad \forall (x,t) \in \mathbb{H}^1. \tag{3.9}$$

**Preuve du Lemme 3.1.** L'estimation (3.8) est une conséquence immédiate de l'expression explicite de la distance de Carnot–Carathéodory (3.3) et des Theorems 1.1, 1.3 et Remark 1.5 de [13] (voir aussi [5,12] pour des résultats partiels). □

**Preuve du Lemme 3.2.** Observons que

$$\big|\nabla p(x,t)\big|^2 = |\mathrm{X}_1 p|^2(x,t) + |\mathrm{X}_2 p|^2(x,t),$$

et

$$\mathrm{X}_1 p(x,t) = \frac{1}{4(4\pi)^2}\int_{\mathbb{R}} \lambda(-x_1\coth\lambda + x_2\imath)\exp\left(\frac{\lambda}{4}\big(t\imath - \|x\|^2\coth\lambda\big)\right)\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\,d\lambda,$$

$$\mathrm{X}_2 p(x,t) = -\frac{1}{4(4\pi)^2}\int_{\mathbb{R}} \lambda(x_2\coth\lambda + x_1\imath)\exp\left(\frac{\lambda}{4}\big(t\imath - \|x\|^2\coth\lambda\big)\right)\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\,d\lambda.$$

Soient

$$W_1 = \int_{\mathbb{R}} \lambda \exp\left(\frac{\lambda}{4}\left(t\imath - \|x\|^2 \coth\lambda\right)\right) \frac{\lambda}{\sinh\lambda}\, d\lambda,$$

$$W_2 = \int_{\mathbb{R}} \cosh\lambda \exp\left(\frac{\lambda}{4}\left(t\imath - \|x\|^2 \coth\lambda\right)\right) \left(\frac{\lambda}{\sinh\lambda}\right)^2 d\lambda.$$

Alors

$$\left|\nabla p(x,t)\right| \leqslant \frac{1}{4(4\pi)^2}\left(|x_1| + |x_2|\right)\left(|W_1| + |W_2|\right).$$

Comme $|x_1| + |x_2| \leqslant 2\|x\| \leqslant 2d(x,t)$ (voir (3.3)), par (3.8), pour terminer la preuve de (3.9), il nous reste à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $(x \neq (0,0), t) \in \mathbb{H}^1$, on a :

$$|W_1| \leqslant Ce^{-\frac{d^2(x,t)}{4}}\left(1 + \|x\| d(x,t)\right)^{-1/2}, \tag{3.10}$$

$$|W_2| \leqslant C\frac{d(x,t)}{\|x\|} e^{-\frac{d^2(x,t)}{4}}\left(1 + \|x\| d(x,t)\right)^{-1/2}. \tag{3.11}$$

En comparant l'expression intégrale de $W_1$ (resp. $W_2$) avec celle de $p$ (resp. $p_*(\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}, t) = p_{*1}(x_1, x_2, x_3, x_4, t)$, le noyau de la chaleur en temps $h = 1$ sur le groupe de Heisenberg de dimension réelle 5, $\mathbb{H}^2$), on trouve qu'il y a dans l'intégrale qu'une différence d'un facteur, la fonction analytique sur le plan complexe, $(2\pi)^{-2}\lambda$ (resp. $(2\pi)^{-3}\cosh\lambda$). On observe aussi que l'estimation $W_1$ est analogue à celle de $p$ obtenue dans le Theorem 2.17 de [5] et que l'estimation $W_2$ est plus faible que celle de $p_{*1}$ obtenue dans le Theorem 4.6 de [5]. Donc, il suffit de répéter mot par mot la preuve du Theorem 2.17 (resp. Theorem 4.6 avec $n = 2$) de [5] pour montrer (3.10) (resp. (3.11)). □

## 4. Preuve du Théorème 1.1

Dans la suite, $V(r) = |B(o,r)|$ $(r > 0)$. On rappelle que

$$\left|B(g,r)\right| = V(r) \sim r^4, \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ r > 0. \tag{4.1}$$

Par l'invariance à gauche de $\nabla$ et de $p_h$ ainsi que la dilatation sur $\mathbb{H}^1$, on remarque que pour montrer le Théorème 1.1, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 1$ telle que (voir aussi Lemma 2.3 et Proposition 2.6 de [9] pour l'explication détaillée) :

$$\left|\nabla e^{\Delta} f\right|(o) \leqslant Ce^{\Delta}\left(|\nabla f|\right)(o), \quad \forall f \in C_o^{\infty}. \tag{4.2}$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations, on pose

$$f_o = \frac{1}{|B(o,1)|} \int\limits_{B(o,1)} f(g)\,dg, \qquad \mathrm{A}_\infty = e^{1000}(L_1 + L_2)^8,$$

où $L_1, L_2 > 1$ proviennent de (3.8) et (3.9) respectivement.

**L'idée principale de la preuve de (4.2).** On explique brièvement l'idée principale de la preuve de (4.2) :

Comme $\mathbb{H}^1$ est stochastiquement complète, on a

$$\left|\nabla e^{\Delta} f\right|(o) = \left| \int\limits_{\mathbb{H}^1} \nabla p\big(g^{-1}\big)\big(f(g) - f_o\big)\,dg \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla p\big(g^{-1}\big)\right| \cdot \left|f(g) - f_o\right|\,dg.$$

On écrit formellement

$$\begin{aligned}
\left|\nabla e^{\Delta} f\right|(o) &\leqslant \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla p\big(g^{-1}\big)\right| \cdot \left|f(g) - f_o\right|\,dg \\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla p\big(g^{-1}\big)\right| \left[ \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla f(g')\right| K(g,g')\,dg' \right] dg \\
&= \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla f(g')\right| \left[ \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla p\big(g^{-1}\big)\right| K(g,g')\,dg \right] dg' \\
&\leqslant C \int\limits_{\mathbb{H}^1} p(g') \left|\nabla f(g')\right|\,dg'.
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour démontrer l'estimation (4.2), il suffit de trouver une fonction $K$ définie sur $\mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

$$\left|f(g) - f_o\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla f(g')\right| K(g,g')\,dg', \quad \forall g \in \mathbb{H}^1,\ f \in C_o^\infty\big(\mathbb{H}^1\big), \tag{4.3}$$

$$\int\limits_{\mathbb{H}^1} \left|\nabla p\big(g^{-1}\big)\right| K(g,g')\,dg \leqslant C p(g'), \quad \forall g' \in \mathbb{H}^1. \qquad \square \tag{4.4}$$

La condition (4.3) nous conduit naturellement à utiliser l'inégalité de Poincaré (localement) et la formule de représentation (localement). La difficulté se trouve à remplir la condition (4.4) : on doit choisir $K$ à partir de (4.3) le mieux possible, et doit utiliser les estimations optimales du noyau de la chaleur et de son gradient ainsi que la structure sous-riemannienne de $\mathbb{H}^1$. On verra aussi que la difficulté pour contrôler $K(g,g')$ se trouve dans le cas où $d(g,g') \ll 1$ avec $d(g) \to +\infty$.

**Preuve de (4.2).** Soient

$$J_1 = \int\limits_{\{g\in\mathbb{H}^1; d(g)\leqslant \mathrm{A}_\infty\}} d(g)p(g)\cdot \left|f(g)-f_o\right| dg,$$

$$J_2 = \int\limits_{\{g\in\mathbb{H}^1; d(g)> \mathrm{A}_\infty\}} d(g)p(g)\cdot \left|f(g)-f_o\right| dg.$$

Par le fait que

$$\left|\nabla p\left(g^{-1}\right)\right| \leqslant L_2 d\left(g^{-1}\right) p\left(g^{-1}\right) = L_2 d(g)p(g),$$

on a

$$\left|\nabla e^{\Delta} f\right|(o) \leqslant L_2(J_1+J_2).$$

Comme

$$e^{\Delta}\left(|\nabla f|\right)(o) = \int\limits_{\mathbb{H}^1} p\left(g^{-1}\right)|\nabla f|(g)\, dg = \int\limits_{\mathbb{H}^1} p(g)|\nabla f|(g)\, dg,$$

pour démontrer (4.2), il nous reste à montrer qu'il existe une constante $C>0$, qui ne dépend pas de $f$, telle que

$$J_1+J_2 \leqslant C\int\limits_{\mathbb{H}^1} p(g)|\nabla f|(g)\, dg. \qquad \square$$

*4.1. Estimation de $J_1$*

On voit que

$$\left|f(g)-f_o\right| \leqslant \left|f_1(g)-f_o\right| + \left|f(g)-f_1(g)\right|.$$

La formule de représentation (voir (2.2)) nous dit que

$$\begin{aligned} J_{11*} = \left|f(g)-f_1(g)\right| &\leqslant C_1 \int\limits_{B(g,1)} \left|\nabla f(g')\right| \frac{d(g,g')}{|B(g,d(g,g'))|}\, dg' \\ &= C_1 \int\limits_{B(g,1)} \left|\nabla f(g')\right| \frac{d(g',g)}{|B(g',d(g',g))|}\, dg', \quad \text{par (4.1)}. \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$J_{12*} = \left|f_o - f_1(g)\right| \leqslant \left|f_o - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\right| + \left|f_1(g) - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\right|.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (voir (2.1)), on a

$$\begin{aligned}\left|f_o - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\right| &= \frac{1}{|B(o,1)|}\left|\int\limits_{B(o,1)} \big(f(g') - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\big)\,dg'\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|B(o,1)|}\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} \left|f(g') - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\right|dg' \\ &\leqslant C(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} |\nabla f|(g')\,dg',\end{aligned}$$

et de la même façon,

$$\left|f_1(g) - f_{\mathrm{A}_\infty+2}(o)\right| \leqslant C(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} |\nabla f|(g')\,dg'.$$

Par les estimations supérieures de $p$, (3.8), on a donc

$$\begin{aligned}J_1 &\leqslant C'(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+1)}\left[\int\limits_{B(g,1)} \left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g',g)}{|B(g',d(g',g))|}\,dg' + \int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} |\nabla f|(g')\,dg'\right]dg \\ &\leqslant C_*(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} |\nabla f|(g')\left[1 + \int\limits_{B(g',1)} \frac{d(g',g)}{|B(g',d(g',g))|}\,dg\right]dg' \\ &\leqslant C(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} |\nabla f|(g')\,dg' \quad \text{par (4.1)} \\ &\leqslant C^*(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{B(o,\mathrm{A}_\infty+2)} p(g')|\nabla f|(g')\,dg' \quad \text{par (3.8)} \\ &\leqslant C^*(\mathrm{A}_\infty)\int\limits_{\mathbb{H}^1} p(g')|\nabla f|(g')\,dg'.\end{aligned}$$

### 4.2. *Estimation de $J_2$*

Puisque

$$J_2 = \int\limits_{\{g=(x,t)\in\mathbb{H}^1;\, d(g)>\mathrm{A}_\infty,\, x\neq(0,0)\}} d(g)p(g)\left|f(g) - f_o\right|dg,$$

on peut supposer dans toute la suite

$$g = (x,t) \in \Sigma = \big\{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\setminus\big\{(0,0,t);\, t\in\mathbb{R}\big\};\ d(g) > \mathrm{A}_\infty\big\}.$$

Notons $\gamma$ la géodésique minimale (unique) d'origine à $g = (x, t)$, qui est définie par (3.4) et (3.5).

Soit

$$N(g) = \left[100 d^{3/2}(g) \ln d(g)\right] + 1,$$

où $[h]$ ($h \in \mathbb{R}$) désigne la partie entière de $h$, et soit

$$g\big(N(g)\big) = \gamma\big(1 - N(g) d^{-7/2}(g)\big).$$

On doit dire au lecteur que le choix de $N(g)$ et $\{g(i) = \gamma(1 - i d^{-7/2}(g))\}_{0 \leqslant i \leqslant d(g)N(g)}$ défini dans la Section 4.2.2 n'est pas unique mais très délicat, ça dépend non seulement des estimations optimales du noyau de la chaleur et de son gradient et aussi de la structure sous-riemannienne de $\mathbb{H}^1$ (plus précisment, on aura besoin des résultats analogues aux Lemmes 4.2 et 4.3 de cet article).

Alors

$$\left|f(g) - f_o\right| \leqslant \left|f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big) - f_o\right| + \left|f(g) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right|.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré (voir (2.1)) et l'estimation du volume des boules dans $\mathbb{H}^1$ (voir (4.1)), on a

$$\begin{aligned}
\left|f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big) - f_o\right| &\leqslant \left|f_o - f_{d(g(N(g)))+4d^{-5/2}(g)}(o)\right| \\
&\quad + \left|f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big) - f_{d(g(N(g)))+4d^{-5/2}(g)}(o)\right| \\
&\leqslant C d^{11}(g) \int\limits_{B(o, d(g) - 90 \frac{\ln d(g)}{d(g)})} \left|\nabla f(g')\right| dg'.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\left|f(g) - f_o\right| \leqslant C d^{11}(g) \int\limits_{B(o, d(g) - 90 \frac{\ln d(g)}{d(g)})} \left|\nabla f(g')\right| dg' + \left|f(g) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right|.$$

Soient

$$J_{21} = \int\limits_{\{g \in \mathbb{H}^1;\, d(g) > \mathrm{A}_\infty\}} d^{12}(g) p(g) \Bigg[\int\limits_{B(o, d(g) - 90 \frac{\ln d(g)}{d(g)})} \left|\nabla f(g')\right| dg'\Bigg] dg,$$

$$J_{22} = \int\limits_{\Sigma} d(g) p(g) \left|f(g) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right| dg.$$

On constate que

$$J_2 \leqslant C(J_{21} + J_{22}).$$

Pour achever la preuve du Théorème 1.1, il suffit de montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{H}^1)$, on a

$$J_{21} + J_{22} \leqslant C \int_{\mathbb{H}^1} p(g) \left| \nabla f(g) \right| dg.$$

*4.2.1. Estimation de $J_{21}$*

Par un calcul simple, on observe que

$$\begin{aligned}
&\left\{(g, g') \in \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1; d(g) > \mathrm{A}_\infty, d(g') < d(g) - 90 \frac{\ln d(g)}{d(g)}\right\} \\
&\quad \subset \left\{(g, g') \in \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1; d(g) > \mathrm{A}_\infty, d(g') \leqslant \mathrm{A}_\infty - 1\right\} \\
&\quad\quad \cup \left\{(g, g') \in \mathbb{H}^1 \times \mathbb{H}^1; d(g') > \mathrm{A}_\infty - 1, d(g) > d(g') + 46 \frac{\ln d(g')}{d(g')}\right\}.
\end{aligned}$$

Donc, en utilisant les estimations supérieures de $p(g)$ (voir (3.8)), on a

$$\begin{aligned}
J_{21} \leqslant{}& C \int_{d(g') \leqslant \mathrm{A}_\infty - 1} \left| \nabla f(g') \right| dg' \int_{d(g) > \mathrm{A}_\infty} d^{12}(g) e^{-d^2(g)/4} \, dg \\
&+ C \int_{d(g') > \mathrm{A}_\infty - 1} \left| \nabla f(g') \right| \left[ \int_{d(g) > d(g') + 46 \frac{\ln d(g')}{d(g')}} d^{12}(g) e^{-d^2(g)/4} \, dg \right] dg'.
\end{aligned}$$

Par l'estimation du volume des boules dans $\mathbb{H}^1$ (voir (4.1)), on a

$$\int_{d(g) > \mathrm{A}_\infty} d^{12}(g) e^{-d^2(g)/4} \, dg \leqslant C \mathrm{A}_\infty^{14} e^{-\mathrm{A}_\infty^2/4} \leqslant C \left(1 + \mathrm{A}_\infty^2\right)^{-1/2} e^{-(\mathrm{A}_\infty - 1)^2/4},$$

et lorsque $d(g') > \mathrm{A}_\infty - 1$, on a

$$\int_{d(g) > d(g') + 46 \frac{\ln d(g')}{d(g')}} d^{12}(g) e^{-\frac{d^2(g)}{4}} \, dg \leqslant C d^{-1}(g') e^{-\frac{d^2(g')}{4}}.$$

Par conséquent, les estimations inférieures de $p$ (voir (3.8)) nous disent que

$$J_{21} \leqslant C \int_{\mathbb{H}^1} \left| \nabla f(g') \right| p(g') \, dg'.$$

*4.2.2. Estimation de $J_{22}$*

Rappelons que

$$\mathrm{A}_\infty = e^{1000}(L_1 + L_2)^8,$$

où les deux constantes $L_1, L_2 > 1$ proviennent de (3.8) et (3.9) respectivement.

Rappelons aussi que

$$J_{22} = \int_\Sigma d(g)p(g)\left|f(g) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right| dg,$$

où

$$\Sigma = \big\{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \setminus \big\{(0,0,t); t \in \mathbb{R}\big\}; d(g) > \mathrm{A}_\infty\big\},$$
$$N(g) = \big[100 d^{3/2}(g) \ln d(g)\big] + 1, \quad g\big(N(g)\big) = \gamma\big(1 - N(g)d^{-7/2}(g)\big),$$

et $\gamma$ désigne la géodésique minimale (unique) d'origine à $g = (x,t)$, qui est définie par (3.4)–(3.6).

La difficulté de la preuve du Théorème 1.1 se trouve à montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in C_o^\infty(\mathbb{H}^1)$, on a

$$J_{22} \leqslant C \int_{\mathbb{H}^1} p(g)\left|\nabla f(g)\right| dg. \tag{4.5}$$

Dans la suite, pour simplifier les notations, on note

$$g = (x,t) \in \Sigma,$$
$$s(i) = 1 - i d^{-7/2}(g), \quad \text{pour } 0 \leqslant i \leqslant d(g)N(g),$$
$$g(i) = \big(x(i), t(i)\big) = \big(x_1(i), x_2(i), t(i)\big) = \gamma\big(s(i)\big).$$

Et on remarque que

$$d\big(g(i), g(j)\big) = |i - j| d^{-5/2}(g), \quad \forall 0 \leqslant i, j \leqslant d(g)N(g).$$

On estime maintenant

$$J_{22*} = \left|f(g) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right|.$$

Observons que

$$J_{22*} \leqslant \sum_{i=0}^{N(g)-1} \left|f\big(g(i)\big) - f\big(g(i+1)\big)\right| + \left|f\big(g\big(N(g)\big)\big) - f_{2d^{-5/2}(g)}\big(g\big(N(g)\big)\big)\right|.$$

Par la formule de représentation (voir (2.2)), on a

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(g\left(N(g)\right)\right)-f_{2d^{-5/2}(g)}\left(g\left(N(g)\right)\right)\right|\\
&\quad\leqslant C\int\limits_{B(g(N(g)),4d^{-5/2}(g))}\left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g(N(g)),g')}{|B(g(N(g)),d(g(N(g)),g'))|}\,dg',
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|f\left(g(i)\right)-f\left(g(i+1)\right)\right|\\
&\quad\leqslant\left|f\left(g(i)\right)-f_{2d^{-5/2}(g)}\left(g(i)\right)\right|+\left|f\left(g(i+1)\right)-f_{2d^{-5/2}(g)}\left(g(i)\right)\right|\\
&\quad\leqslant C\int\limits_{B(g(i),4d^{-5/2}(g))}\left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g(i),g')}{|B(g(i),d(g(i),g'))|}\,dg'\\
&\qquad+C\int\limits_{B(g(i+1),4d^{-5/2}(g))}\left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g(i+1),g')}{|B(g(i+1),d(g(i+1),g'))|}\,dg'.
\end{aligned}$$

Donc,

$$J_{22*}\leqslant C\sum_{i=0}^{N(g)}\int\limits_{B(g(i),4d^{-5/2}(g))}\left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g(i),g')}{|B(g(i),d(g(i),g'))|}\,dg',\tag{4.6}$$

et

$$J_{22}\leqslant C\int\limits_{\Sigma}d(g)p(g)\sum_{i=0}^{N(g)}\left[\int\limits_{B(g(i),4d^{-5/2}(g))}\left|\nabla f(g')\right|\frac{d(g(i),g')}{|B(g(i),d(g(i),g'))|}\,dg'\right]dg.$$

Avant de continuer la preuve de (4.5), on doit dire au lecteur que l'étape crucial pour démontrer (4.5) (et donc le Théorème 1.1) se trouve à obtenir l'estimation (4.6) et que le choix de $\{g(i)\}_{0\leqslant i\leqslant g(N)}$ et $d^{-5/2}(g)$ dans l'estimation (4.6) n'est pas unique mais très délicat (il dépend des estimations optimales du noyau de la chaleur et de son gradient ainsi que la structure sous-riemannienne de $\mathbb{H}^1$).

Notons $\chi$ la fonction caractéristique,

$$Q=Q(g,g')=d(g)\sum_{i=0}^{N(g)}\frac{d(g',g(i))}{|B(g(i),d(g',g(i)))|}\chi\left\{(g,g')\in\Sigma\times\mathbb{H}^1;\,d\left(g',g(i)\right)<\frac{4}{d^{5/2}(g)}\right\},$$

$$J_{22}^*=\int\limits_{\Sigma}p(g)Q\,dg.$$

Alors, en utilisant le théorème de Fubini, on a

$$J_{22}\leqslant C\int\limits_{d(g')>\mathrm{A}_\infty-100(\ln\mathrm{A}_\infty)/\mathrm{A}_\infty-5\mathrm{A}_\infty^{-5/2}}\left|\nabla f(g')\right|J_{22}^*\,dg'.$$

Donc, pour montrer (4.5), il nous reste à montrer le résultat suivant :

**Proposition 4.1.** *Il existe une constante $C > 0$ telle qu'on a*

$$J_{22}^* \leqslant Cp(g'), \quad \forall d(g') > \mathrm{A}_\infty - 100\frac{\ln \mathrm{A}_\infty}{\mathrm{A}_\infty} - 5\mathrm{A}_\infty^{-5/2}. \tag{4.7}$$

**Preuve.** Observons que

$$\begin{aligned} Q \neq 0 \quad &\Rightarrow \quad d\big(g', g(i)\big) < \frac{4}{d^{5/2}(g)} \quad \text{pour un certain } 0 \leqslant i \leqslant N(g)+1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{d(g') + 4/d^{5/2}(g)}{1 - 200(\ln d(g))/d^2(g)} \geqslant d(g) = \frac{d(g(i))}{s(i)} \geqslant d(g') - \frac{4}{d^{5/2}(g)} \\ &\Rightarrow \quad \frac{d(g')/d(g) + 4/d^{7/2}(g)}{1 - 200(\ln d(g))/d^2(g)} \geqslant 1 \geqslant \frac{d(g')}{d(g)} - \frac{4}{d^{7/2}(g)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

En particulier, on a

$$N(g') - 1 \leqslant N(g) \leqslant N(g') + 1, \quad \text{et} \quad \frac{2}{\sqrt{5}} d(g) \leqslant d(g') \leqslant \frac{\sqrt{5}}{2} d(g). \tag{4.9}$$

En utilisant (4.1), on a donc

$$Q \leqslant 2d(g') \sum_{i=0}^{N(g')+1} \frac{d(g', g(i))}{|B(g', d(g', g(i)))|} \chi\left\{(g, g') \in \Sigma \times \mathbb{H}^1; d\big(g', g(i)\big) < \frac{4}{d^{5/2}(g)}\right\}.$$

Par conséquent,

$$J_{22}^* \leqslant 2d(g') \sum_{i=0}^{N(g')+1} \int\limits_{\{g \in \Sigma; d(g', g(i)) < 4d^{-5/2}(g)\}} p(g) \frac{d(g', g(i))}{|B(g', d(g', g(i)))|}\, dg. \tag{4.10}$$

Rappelons que

$$s(j) = 1 - jd^{-7/2}(g), \quad 0 \leqslant j \leqslant d(g)N(g),$$

et que $\mu^{-1}$ désigne la fonction réciproque de $\mu$,

$$\mu(\varphi) = \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{\sin^2 \varphi} : ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{R}.$$

Et on a besoin des deux lemmes suivants dont la preuve sera donnée à la fin de cette section.

**Lemme 4.2.** *Soit $L_1 > 1$ comme dans* (3.8) *et soit* $(g = (x,t), g') \in \Sigma \times \mathbb{H}^1$ *satisfaisant*

$$d\big(g', g(i)\big) < 4d^{-5/2}(g) \quad \textit{pour un certain } 0 \leqslant i \leqslant N(g') + 1,$$

*alors*

$$p(g) \leqslant 400 L_1^2 p(g') e^{-i/(5d^{3/2}(g'))} \left( \frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)} \right)^{1/2}. \tag{4.11}$$

**Lemme 4.3.** *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $g' \in \mathbb{H}^1$ et tout $0 \leqslant i \leqslant N(g') + 1$, on a*

$$\int\limits_{\{g=(x,t)\in\Sigma;\, d(g',g(i)) < \frac{4}{d^{5/2}(g)}\}} \left( \frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)} \right)^{1/2} \frac{d(g', g(i))}{|B(g', d(g', g(i)))|}\, dg \leqslant C d^{-5/2}(g'). \tag{4.12}$$

On admet les deux lemmes pour l'instant et on continue avec la démonstration de la Proposition 4.1.

*Fin de la preuve de la Proposition* 4.1. Par (4.10)–(4.12), on a

$$J_{22}^* \leqslant C d^{-3/2}(g') p(g') \sum_{i=0}^{N(g')+1} e^{-\frac{i}{5} d^{-3/2}(g')} \leqslant C p(g') \left[ 1 + \int_0^{+\infty} e^{-h/5}\, dh \right] = 6Cp(g').$$

D'où la Proposition 4.1. □

**Preuve du Lemme 4.2.** Par les estimations supérieures et inférieures de $p$ (voir (3.8)), on a

$$p(g) = p\big(g(i)\big) \frac{p(g)}{p(g(i))} \leqslant L_1^2 p\big(g(i)\big) e^{\frac{d^2(g(i)) - d^2(g)}{4}} \left( \frac{1 + \|x(s(i))\| d(g(s(i)))}{1 + \|x\| d(g)} \right)^{1/2}.$$

Et par la définition de $g(i)$ et (3.5), on a

$$d\big(g(i)\big) \leqslant d(g), \qquad \big\|x\big(s(i)\big)\big\| = \frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)} \|x\|,$$

et

$$e^{\frac{d^2(g(i)) - d^2(g)}{4}} = e^{-\frac{d^2(g)}{4}(1 - s(i)^2)} < e^{-\frac{i}{4} d^{-3/2}(g)} < e^{-\frac{i}{5} d^{-3/2}(g')}, \quad \text{par (4.9)}.$$

De plus, par (4.9), on a

$$1 \geqslant s(i) \geqslant \frac{1}{2}, \quad \text{lorsque } 0 \leqslant i \leqslant N(g') + 1 < 2N(g),$$

donc,

$$p(g) \leqslant 100L_1^2 p\big(g(i)\big)e^{-\frac{i}{5}d^{-3/2}(g')}\left(\frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)}\right)^{1/2}.$$

Et pour terminer la preuve du Lemme 4.2, il nous reste à montrer que

$$p\big(g(i)\big) \leqslant 4p(g').$$

En fait, on va montrer que

$$\left|\frac{p(g(i))}{p(g')} - 1\right| \leqslant 1. \tag{4.13}$$

*Preuve de* (4.13). On observe que

$$\left|\frac{p(g(i))}{p(g')} - 1\right| = \frac{d(g', g(i))}{p(g')}\big|\nabla p(g_*)\big| \quad \text{avec } g_* \in B\big(g', 4d^{-5/2}(g)\big).$$

Mais, par les estimations de $p$ et de $|\nabla p|$ (voir (3.8) et (3.9)), on a

$$\frac{1}{p(g')} \leqslant L_1\big(1 + d^2(g')\big)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{d^2(g')}{4}} \leqslant 2L_1 d(g') e^{\frac{d^2(g')}{4}},$$

$$\begin{aligned}\big|\nabla p(g_*)\big| &\leqslant L_2 d(g_*) p(g_*) \leqslant L_1 L_2\big(d(g') + 4d^{-5/2}(g)\big)e^{-\frac{(d(g')-4d^{-5/2}(g))^2}{4}} \\ &\leqslant 4L_1L_2 d(g') e^{-\frac{d^2(g')}{4}},\end{aligned}$$

par (4.9) et le fait que $d(g) > 1000$.
D'ailleurs, (4.9) et le fait que $g \in \Sigma$ nous disent que

$$d\big(g', g(i)\big) < 4d^{-5/2}(g) < 5d^{-2}(g)\mathrm{A}_\infty^{-1/2} < \big(8L_1^2L_2\big)^{-1} d^{-2}(g').$$

On a donc (4.13). □

**Preuve du Lemme 4.3.** Par (4.9), on peut supposer que $d(g') > \frac{1}{2}\mathrm{A}_\infty$.
Rappelons que

$$\mu(\varphi) = \frac{2\varphi - \sin 2\varphi}{2\sin^2\varphi} : ]-\pi, \pi[ \to \mathbb{R},$$

et que

$$\psi(x, \varphi) = \big(x, \mu(\varphi)\|x\|^2\big) : \big\{(x, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \times ]-\pi, \pi[;\ x \neq (0,0)\big\} \to \big\{(x, t) \in \mathbb{H}^1; x \neq 0\big\}$$

est un $C^1$-difféomorphisme. Notons $D\psi(x, \theta)$ la matrice jacobienne de $\psi$ en $(x, \theta)$, on a

$$\det D\psi(x,\theta) = \frac{2\sin\theta - 2\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}\|x\|^2.$$

Posons

$$\Omega_{g'} = \left\{ g = (x,t) \in \mathbb{H}^1;\, x \neq (0,0),\, d(g) > \frac{1}{2} d(g') \right\}.$$

Pour $0 \leqslant i \leqslant N(g') + 1$, définissons

$$\Theta_i(g) = g(i) : \Omega_{g'} \to \mathbb{H}^1 \setminus \left\{ (0,0,t) \in \mathbb{H}^1;\, t \in \mathbb{R} \right\},$$

et

$$\begin{gathered} \Phi_i : \psi^{-1}(\Omega_{g'}) \to \left(\mathbb{R}^2 \setminus \left\{(0,0)\right\}\right) \times \left]-\pi, \pi\right[, \\ (x,\theta) = \psi^{-1}\big(g = (x,t)\big) \mapsto \psi^{-1}\big(g(i)\big) = \big(x(i), s(i)\theta\big), \end{gathered}$$

où (voir la définition de $s(i)$, (3.3) et (3.4))

$$s(i) = s(i)(g) = 1 - \frac{i}{d^{7/2}(g)} \quad \text{avec } d(g) = \frac{\theta}{\sin\theta}\|x\|,\ \theta = \mu^{-1}\left(\frac{t}{\|x\|^2}\right), \tag{4.14}$$

$$x_1(i) = \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\big(x_1 \cos\big(s(i)-1\big)\theta + x_2 \sin\big(s(i)-1\big)\theta\big), \tag{4.15}$$

$$x_2(i) = \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\big(-x_1 \sin\big(s(i)-1\big)\theta + x_2 \cos\big(s(i)-1\big)\theta\big). \tag{4.16}$$

Observons que $\Phi_i$ et $\Theta_i$ sont de classe $C^1$, et que

$$\Theta_i = \psi \circ \Phi_i \circ \psi^{-1}.$$

Et on a besoin des deux résultats suivants dont la preuve sera donnée plus tard :

(i) $\Phi_i$ est injective sur $\psi^{-1}(\Omega_{g'})$ ;
(ii) on a

$$\det D\Phi_i\big((x,\theta)\big) = \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 \left[1 + \frac{5}{2} i d^{-7/2}(g)\right]. \tag{4.17}$$

Les deux résultats précédents nous disent que $\Theta_i$ est aussi injective sur $\Omega_{g'}$, et pour tout $g = \psi(x,\theta) \in \Omega_{g'}$, on a

$$\begin{aligned} \det D\Theta_i(g) &= \det D\psi\big(x(i), s(i)\theta\big) \cdot \det D\Phi_i(x,\theta) \cdot \big[\det D\psi(x,\theta)\big]^{-1} \\ &= \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^4 \left[\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin^3\theta}\right]^{-1} \frac{\sin s(i)\theta - s(i)\theta\cos s(i)\theta}{\sin^3 s(i)\theta}\left[1 + \frac{5}{2}\frac{i}{d^{7/2}(g)}\right] \neq 0, \end{aligned}$$

donc, en distinguant les deux cas, $|\theta| = \mu^{-1}(|t|/\|x\|^2) \leqslant \pi/2$ et $\pi/2 < |\theta| < \pi$, on voit facilement que

$$\left(\frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)}\right)^{1/2}\big[\det D\Theta_i(g)\big]^{-1} \leqslant 1000.$$

Par conséquent, par le théorème d'inversion globale, la formule de changement de variables, et (4.9), on a

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\{g=(x,t)\in\Sigma;\, d(g',g(i))<4d^{-5/2}(g)\}} \left(\frac{\sin s(i)\mu^{-1}(t/\|x\|^2)}{\sin \mu^{-1}(t/\|x\|^2)}\right)^{1/2} \frac{d(g',g(i))}{|B(g',d(g',g(i)))|}\,dg \\
&\quad \leqslant 1000 \int\limits_{g(i)\in B(g',10d^{-5/2}(g'))} \frac{d(g',g(i))}{|B(g',d(g',g(i)))|}\,dg(i) \\
&\quad < Cd^{-5/2}(g'),
\end{aligned}$$

grâce à la propriété du doublement du volume ou bien (4.1).

*$\Phi_i$ est injective sur $\psi^{-1}(\Omega_{g'})$.* Soient

$$\psi^{-1}(g_*) = (x_*, \theta_*),\ \psi^{-1}(g^*) = (x^*, \theta^*) \in \psi^{-1}(\Omega_{g'}),$$

satisfaisant

$$\big(x_*(i), s_*(i)\theta_*\big) = \Phi_i(x_*, \theta_*) = \Phi_i(x^*, \theta^*) = \big(x^*(i), s^*(i)\theta^*\big).$$

Puisque

$$\begin{aligned}
d\big(\psi\big(x_*(i), s_*(i)\theta_*\big)\big) &= s_*(i)d(g_*) = \left(1 - \frac{i}{d^{7/2}(g_*)}\right)d(g_*) \\
&= d\big(\psi\big(x^*(i), s^*(i)\theta^*\big)\big) = s^*(i)d(g^*) = \left(1 - \frac{i}{d^{7/2}(g^*)}\right)d(g^*),
\end{aligned}$$

et la fonction $\tau(h) = h - ih^{-5/2}$ est strictement croissante, on a $d(g_*) = d(g^*)$. Donc, $s_*(i) = s^*(i)$ et $\theta_* = \theta^*$. Et (3.4) implique que $x_* = x^*$.

On a donc montré que $\Phi_i$ est injective sur $\psi^{-1}(\Omega_{g'})$.

*Preuve de* (4.17). Dans la suite, pour simplifier les notations, on pose

$$K_1 = \cos\big(s(i) - 1\big)\theta, \qquad K_2 = \sin\big(s(i) - 1\big)\theta.$$

Alors, par la définition de $\Phi_i$ (voir (4.14)–(4.16)), on a l'expression explicite de $D\Phi_i(x, \theta)$ comme suit

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} + \frac{dx_1(i)}{d\theta} \\ -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} + \frac{dx_2(i)}{d\theta} \\ \theta\frac{\partial s(i)}{\partial x_1} & \theta\frac{\partial s(i)}{\partial x_2} & s(i) + \theta\frac{\partial s(i)}{\partial\theta} \end{pmatrix}$$

où le sens de $dx_1(i)/ds(i)$, $dx_1(i)/d\theta$, $dx_2(i)/ds(i)$, $dx_2(i)/d\theta$ est claire.

Soient

$$R_1^* = \begin{vmatrix} \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} \\ -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} \end{vmatrix},$$

$$R_2^* = \begin{vmatrix} \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 & \frac{dx_1(i)}{d\theta} \\ -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 & \frac{dx_2(i)}{d\theta} \\ \frac{\partial s(i)}{\partial x_1} & \frac{\partial s(i)}{\partial x_2} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta} \end{vmatrix},$$

$$R_1 = s(i)R_1^*, \qquad R_2 = \theta R_2^*.$$

Par le fait que

$$\left(\theta\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}, \theta\frac{\partial s(i)}{\partial x_2}, s(i) + \theta\frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\right) = \big(0, 0, s(i)\big) + \theta\left(\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}, \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}, \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\right),$$

on peut donc écrire

$$\det D\Phi_i(x,\theta) = s(i)R_1^* + \theta R_{**},$$

où on a noté

$$R_{**} = \begin{vmatrix} \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} + \frac{dx_1(i)}{d\theta} \\ -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} & \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1 + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} + \frac{dx_2(i)}{d\theta} \\ \frac{\partial s(i)}{\partial x_1} & \frac{\partial s(i)}{\partial x_2} & \frac{\partial s(i)}{\partial\theta} \end{vmatrix}.$$

Or, la première ligne de $R_{**}$ peut s'écrire comme

$$\left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1, \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2, \frac{dx_1(i)}{d\theta}\right) + \frac{dx_1(i)}{ds(i)}\left(\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}, \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}, \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\right),$$

et la seconde ligne de $R_{**}$ peut s'écrire comme

$$\left(-\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_2, \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}K_1, \frac{dx_2(i)}{d\theta}\right) + \frac{dx_2(i)}{ds(i)}\left(\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}, \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}, \frac{\partial s(i)}{\partial\theta}\right),$$

on a $R_{**} = R_2^*$, donc

$$\det D\Phi_i(x,\theta) = R_1 + R_2. \tag{4.18}$$

*Calcul de* $R_1$. Puisque la première colonne de $R_1^*$ peut s'écrire comme

$$\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\begin{pmatrix} K_1 \\ -K_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\begin{pmatrix} dx_1(i)/ds(i) \\ dx_2(i)/ds(i) \end{pmatrix},$$

et la seconde colonne de $R_1^*$ peut s'écrire comme

$$\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\begin{pmatrix} K_2 \\ K_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\begin{pmatrix} dx_1(i)/ds(i) \\ dx_2(i)/ds(i) \end{pmatrix},$$

on a

$$\begin{aligned} R_1^* &= \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 \begin{vmatrix} K_1 & K_2 \\ -K_2 & K_1 \end{vmatrix} \\ &\quad + \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\left\{\frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\begin{vmatrix} K_1 & dx_1(i)/ds(i) \\ -K_2 & dx_2(i)/ds(i) \end{vmatrix} + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\begin{vmatrix} dx_1(i)/ds(i) & K_2 \\ dx_2(i)/ds(i) & K_1 \end{vmatrix}\right\} \\ &= \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 + \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\left(K_1 R_{11}^* + K_2 R_{12}^*\right), \end{aligned}$$

où on a noté

$$R_{11}^* = \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_2(i)}{ds(i)} + \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_1(i)}{ds(i)}, \qquad R_{12}^* = \frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\frac{dx_1(i)}{ds(i)} - \frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\frac{dx_2(i)}{ds(i)}. \tag{4.19}$$

Il nous reste à calculer $\partial s(i)/\partial x_1$, $\partial s(i)/\partial x_2$, $dx_1(i)/ds(i)$ et $dx_2(i)/ds(i)$.

Dans la suite, pour simplifier les notations, on pose

$$s'(i) = \frac{d}{d(d(g))}s(i) = \frac{7}{2}id^{-9/2}(g).$$

On commence par calculer $\partial s(i)/\partial x_1$ et $\partial s(i)/\partial x_2$. Par le fait que (voir (3.3))

$$d^2(g) = \left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\left(x_1^2 + x_2^2\right),$$

on a

$$\frac{\partial s(i)}{\partial x_1} = s'(i)\frac{1}{2d(g)}\frac{\partial d^2(g)}{\partial x_1} = s'(i)\frac{1}{d(g)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 x_1, \tag{4.20}$$

$$\frac{\partial s(i)}{\partial x_2} = s'(i)\frac{1}{2d(g)}\frac{\partial d^2(g)}{\partial x_2} = s'(i)\frac{1}{d(g)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2 x_2. \tag{4.21}$$

On calcule maintenant $dx_1(i)/ds(i)$ et $dx_2(i)/ds(i)$. Par (4.15), (4.16) et des formules élémentaires liant les fonctions trigonométriques, on peut écrire

$$x_1(i) = \frac{1}{2\sin\theta}\left\{x_1\left[\sin\theta + \sin\left(2s(i)-1\right)\theta\right] + x_2\left[\cos\theta - \cos\left(2s(i)-1\right)\theta\right]\right\}, \tag{4.22}$$

$$x_2(i) = \frac{1}{2\sin\theta}\left\{-x_1\left[\cos\theta - \cos\left(2s(i)-1\right)\theta\right] + x_2\left[\sin\theta + \sin\left(2s(i)-1\right)\theta\right]\right\}. \tag{4.23}$$

Donc,

$$\frac{dx_1(i)}{ds(i)} = \frac{\theta}{\sin\theta}\left[x_1\cos\left(2s(i)-1\right)\theta + x_2\sin\left(2s(i)-1\right)\theta\right], \tag{4.24}$$

$$\frac{dx_2(i)}{ds(i)} = \frac{\theta}{\sin\theta}\left[-x_1\sin\left(2s(i)-1\right)\theta + x_2\cos\left(2s(i)-1\right)\theta\right]. \tag{4.25}$$

Par (4.19)–(4.21), (4.24) et (4.25), on constate d'abord que

$$R_{11}^* = s'(i)\frac{1}{d(g)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\|x\|^2\cos\left(2s(i)-1\right)\theta,$$

$$R_{12}^* = s'(i)\frac{1}{d(g)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\|x\|^2\sin\left(2s(i)-1\right)\theta,$$

puis, en utilisant le fait que $d^2(g) = (\frac{\theta}{\sin\theta})^2\|x\|^2$ (voir (3.3)), que

$$R_{11}^* = s'(i)d(g)\frac{\theta}{\sin\theta}\cos\left(2s(i)-1\right)\theta,$$

$$R_{12}^* = s'(i)d(g)\frac{\theta}{\sin\theta}\sin\left(2s(i)-1\right)\theta.$$

Donc,

$$\begin{aligned}
&K_1R_{11}^* + K_2R_{12}^* \\
&\quad = s'(i)d(g)\frac{\theta}{\sin\theta}\left[\cos\left(s(i)-1\right)\theta\cos\left(2s(i)-1\right)\theta + \sin\left(s(i)-1\right)\theta\sin\left(2s(i)-1\right)\theta\right] \\
&\quad = s'(i)d(g)\frac{\theta}{\sin\theta}\cos s(i)\theta.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$R_1 = s(i)\left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 + s(i)\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}s'(i)d(g)\frac{\theta}{\sin\theta}\cos s(i)\theta. \tag{4.26}$$

*Calcul de* $R_2$. Soient

$$R_{21}^* = \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2\frac{\partial s(i)}{\partial\theta},$$

$$\begin{aligned}
R_{22}^* &= \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\left\{\frac{dx_1(i)}{d\theta}\left[-K_2\frac{\partial s(i)}{\partial x_2} - K_1\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\right] - \frac{dx_2(i)}{d\theta}\left[K_1\frac{\partial s(i)}{\partial x_2} - K_2\frac{\partial s(i)}{\partial x_1}\right]\right\}\\
&= \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\left\{K_2\left[\frac{dx_2(i)}{d\theta}\frac{\partial s(i)}{\partial x_1} - \frac{dx_1(i)}{d\theta}\frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\right] - K_1\left[\frac{dx_1(i)}{d\theta}\frac{\partial s(i)}{\partial x_1} + \frac{dx_2(i)}{d\theta}\frac{\partial s(i)}{\partial x_2}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

On développe suivant la troisième colonne de $R_2^*$, et on constate que $R_2^* = R_{21}^* + R_{22}^*$ et donc $R_2 = \theta R_{21}^* + \theta R_{22}^*$.

En rappelant que $d(g) = \frac{\theta}{\sin\theta}\|x\|$, on a

$$\frac{\partial s(i)}{\partial\theta} = s'(i)\frac{\partial d(g)}{\partial\theta} = s'(i)\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin^2\theta}\|x\| = s'(i)d(g)\frac{1}{\theta}\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin\theta},$$

donc,

$$R_{21}^* = \left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 s'(i)d(g)\frac{1}{\theta}\frac{\sin\theta - \theta\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Pour calculer $R_{22}^*$, on aura besoin de l'expression explicite de $\frac{dx_1(i)}{d\theta}$ et de $\frac{dx_2(i)}{d\theta}$. Notons

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{d}{d\theta}\frac{\sin\theta + \sin(2s(i)-1)\theta}{2\sin\theta} = \frac{2s(i)\sin\theta\cos(2s(i)-1)\theta - \sin 2s(i)\theta}{2\sin^2\theta},\\
U_2 &= \frac{d}{d\theta}\frac{\cos\theta - \cos(2s(i)-1)\theta}{2\sin\theta} = \frac{-1 + 2s(i)\sin\theta\sin(2s(i)-1)\theta + \cos 2s(i)\theta}{2\sin^2\theta}.
\end{aligned}$$

Alors, par (4.22) et (4.23),

$$\frac{dx_1(i)}{d\theta} = x_1U_1 + x_2U_2, \qquad \frac{dx_2(i)}{d\theta} = -x_1U_2 + x_2U_1.$$

En utilisant (4.20) et (4.21), on constate que

$$\begin{aligned}
R_{22}^* &= \frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}s'(i)\frac{1}{d(g)}\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^2\|x\|^2(-K_2U_2 - K_1U_1)\\
&= -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}s'(i)d(g)(K_1U_1 + K_2U_2) \quad \text{par (3.3)}\\
&= -\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}s'(i)d(g)\frac{s(i)\sin\theta\cos s(i)\theta - \cos\theta\sin s(i)\theta}{\sin^2\theta},
\end{aligned}$$

où on a utilisé trois fois les formules élémentaires liant les fonctions trigonométriques dans la dernière égalité.

On a donc

$$R_2 = \theta R_{21}^* + \theta R_{22}^* = s'(i)d(g)\left\{\left(\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\right)^2 - \theta\frac{\sin s(i)\theta}{\sin\theta}\frac{s(i)\cos s(i)\theta}{\sin\theta}\right\}. \tag{4.27}$$

Par (4.18), (4.26) et (4.27), on obtient (4.17). □

## 5. Quelques problèmes ouverts

Pour terminer cet article, on donne quelques questions intéressantes.

1. J'espère que le lecteur peut suivre la méthode de la preuve du Théorème 1.1 pour obtenir un résultat analogue au Théorème 1.1 dans le cadre des groupes de Heisenberg de dimension réelle $\geqslant 5$ et aussi dans le cadre des cônes classiques, $C(S_\varpi)$ avec $0 < \varpi < 2\pi$.
2. Dans le cadre des variétés riemanniennes complètes, non compacte, $M$, ce serait très intéressant de trouver une condition suffisante ou (et) nécessaire telle qu'il existe une constante $C > 0$ satisfaisant

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C e^{t\Delta}\left(|\nabla f|\right)(g), \quad \forall g \in M,\ t > 0,\ f \in C_o^\infty(M).$$

   En particulier, on s'intéressait à obtenir des estimations du noyau de la chaleur et de son gradient à partir d'une telle inégalité.
3. Sur les variétés coniques, $C(N)$, à cause de la singularité conique, on trouve qu'ils ont beaucoup de propriétés spéciales par rapport aux variétés riemanniennes complètes à courbure de Ricci minorée, voir par exemple [8,15–17] ou [18]. Lorsque la première valeur propre non nulle du Laplacien sur $N$, $\lambda_1 \geqslant \dim N$, ce sera très intéressant de savoir pour quels $1 \leqslant w < +\infty$ les estimations suivantes sont satisfaites :

$$\left|\nabla e^{t\Delta} f\right|(g) \leqslant C_w\left[e^{t\Delta}\left(|\nabla f|^w\right)(g)\right]^{1/w}, \quad \forall g \in C(N),\ t > 0,\ f \in C_o^\infty.$$

   Remarquons que dans cette situation, la courbure de Ricci sur $C(N)$ peut être non minorée. Et on rappelle aussi que pour $\lambda_1 < \dim N$, les estimations précédentes ne sont pas valables (voir [17] ou [18]).
4. Dans l'étude de la formule de représentation, ce sera très intéressant de savoir si la condition technique (H2) dans [19], i.e. en supposant que le volume des boules est au moins à croissance linéaire, est nécessaire. En tout cas, cette condition est faible.

## Remerciements

L'auteur est soutenu par le DFG (SFB 611). Je tiens à remercier T. Coulhon et L. Saloff-Coste pour des discutions et de nombreuses suggestions, F. Lust-Piquard et M. Villani pour m'avoir communiqué [21]. Je voudrais remercier aussi le référé pour m'avoir indiqué une faute dans la version originaire de cet article et des suggestions.

## Références

[1] C. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques, in : Panoramas et Synthèses, vol. 10, Soc. Math. France, Paris, 2000.
[2] P. Auscher, T. Coulhon, X.T. Duong, S. Hofmann, Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 37 (2004) 911–957.
[3] D. Bakry, Transformations de Riesz pour les semi-groupes symétriques. II. Étude sous la condition $\Gamma_2 \geqslant 0$, in : Séminaire de probabilités, XIX, 1983/84, in : Lecture Notes in Math., vol. 1123, Springer, Berlin, 1985, pp. 145–174.
[4] D. Bakry, Un critère de non-explosion pour certaines diffusions sur une variété riemannienne complète, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986) 23–26.

[5] R. Beals, B. Gaveau, P.C. Greiner, Hamilton–Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups, J. Math. Pures Appl. (9) 79 (2000) 633–689.
[6] J. Cheeger, M. Gromov, M. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, J. Differential Geom. 17 (1982) 15–53.
[7] T. Coulhon, X.-T. Duong, Riesz transform and related inequalities on noncompact Riemannian manifolds, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003) 1728–1751.
[8] T. Coulhon, H.-Q. Li, Estimations inférieures du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et transformées de Riesz, Arch. Math. 83 (2004) 229–242.
[9] B.K. Driver, T. Melcher, Hypoelliptic heat kernel inequalities on the Heisenberg group, J. Funct. Anal. 221 (2005) 340–365.
[10] B. Franchi, G. Lu, R.L. Wheeden, Representation formulas and weighted Poincaré inequalities for Hörmander vector fields, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995) 577–604.
[11] B. Franchi, G. Lu, R.L. Wheeden, A relationship between Poincaré-type inequalities and representation formulas in spaces of homogeneous type, Int. Math. Res. Not. (1996) 1–14.
[12] B. Gaveau, Principe de moindre action, propagation de la chaleur et estimées sous-elliptiques sur certains groupes nilpotents, Acta Math. 139 (1977) 95–153.
[13] H. Hueber, D. Müller, Asymptotics for some Green kernels on the Heisenberg group and the Martin boundary, Math. Ann. 283 (1989) 97–119.
[14] A. Hulanicki, The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group, Studia Math. 56 (1976) 165–173.
[15] H.-Q. Li, La transformation de Riesz sur les variétés coniques, J. Funct. Anal. 168 (1999) 145–238.
[16] H.-Q. Li, Estimations du noyau de la chaleur sur les variétés coniques et ses applications, Bull. Sci. Math. 124 (2000) 365–384.
[17] H.-Q. Li, Sur la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003) 283–286.
[18] H.-Q. Li, Sur la continuité de Hölder du semi-groupe de la chaleur sur les variétés coniques, soumis.
[19] G.Z. Lu, R.L. Wheeden, An optimal representation formula for Carnot–Carathéodory vector fields, Bull. London Math. Soc. 30 (1998) 578–584.
[20] F. Lust-Piquard, A simple-minded computation of heat kernels on Heisenberg groups, Colloq. Math. 97 (2003) 233–249.
[21] F. Lust-Piquard, M. Villani, Heat inequalities on the Heisenberg group: An analytic proof of a result by Driver–Melcher, prépublication.
[22] P. Maheux, L. Saloff-Coste, Analyse sur les boules d'un opérateur sous-elliptique, Math. Ann. 303 (1995) 713–740.
[23] T. Melcher, Hypoelliptic heat kernel inequalities on Lie groups, PhD thesis, 2004.
[24] M.-K. von Renesse, K.-T. Sturm, Transport inequalities, gradient estimates, entropy and Ricci curvature, Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005) 923–940.
[25] N.T. Varopoulos, L. Saloff-Coste, T. Coulhon, Analysis and Geometry on Groups, Cambridge Tracts in Math., vol. 100, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.