

УДК 51(083)

Алгоритм восстановления поврежденных пикселей на зашумленных изображениях на основе метода анализа иерархий

Белим С. В.^{1,*}, Селиверстов С. А.¹

[*sbelim@mail.ru](mailto:sbelim@mail.ru)

¹Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского,
Москва, Россия

В статье предложен алгоритм восстановления поврежденных пикселей в изображениях со статическими пропусками. Предложенный алгоритм основывается на методе анализа иерархий теории поддержки принятия решений. Выбор цвета поврежденного пикселя происходит на основе ближайших соседей и соседей, следующих за ближайшими. Анализируются три параметра, присущих каждому ближайшему соседу. Во-первых, количество соседей имеющих тот же цвет, что и данный ближайший сосед. Во-вторых, отклонение цвета данного пикселя от среднего значения его соседей. В-третьих, отличие пикселей, расположенных по разную сторону от испорченного. На основе этих трех критериев для каждого ближайшего соседа поврежденного пикселя определяется весовой коэффициент. В качестве цвета поврежденного пикселя выбирается цвет его соседа, имеющего наибольший вес. Проведен компьютерный эксперимент по определению эффективности предложенного метода. Исследована зависимость эффективности предложенного алгоритма от величины повреждения изображения.

Ключевые слова: восстановление данных, зашумленные изображения, импульсный шум

Введение

Проблема восстановления поврежденных пикселей тесно связана с задачей устранения шумов на изображениях. Испорченные пиксели могут возникать на изображениях по нескольким причинам. Во-первых, при хранении графических объектах может происходить повреждение носителей изображения. Во-вторых, поврежденные пиксели могут возникать по причине недостатков средств получения изображений: порча или засвечивание матрицы. В-третьих, повреждения могут быть следствием импульсного шума в каналах передачи данных.

Проблема устранения шумов как правило решается двумя методами. Первый связан с построением фильтров подавления шумов. Данный метод дает хорошие визуальные результаты, однако приводит к размытию изображения, так как преобразовываются не только поврежденные пиксели, но и все изображение целиком. Второй подход основывается на выделении поврежденных пикселей и их восстановлении. Этот подход

обладает меньшим быстродействием по сравнению с фильтрами, но обладает значительно большим потенциалом. При поиске и восстановлении поврежденных пикселей преобразуются только испорченные части изображения, тогда как не поврежденные остаются неизменными. Следует указать, что все методы поиска импульсных шумов характеризуются ненулевым процентом ложных срабатываний, но он составляет не более 10%, что значительно лучше, чем все изображение.

В дальнейшем в данной работе предполагается, что известна матрица поврежденных пикселей. Данная матрица может быть получена различными способами в зависимости от постановки задачи. При повреждении изображения на этапе хранения список испорченных областей может быть получен из журналов копирования поврежденных файлов. При повреждении матрицы, пропуски будут носить статический характер и могут быть выявлены последовательным наложением изображений [1]. Значительно сложнее ситуация с проявлениями импульсного шума в каналах передачи информации. Импульсный шум проявляет себя как множество случайно расположенных на изображении пикселей случайного цвета [2,3]. В этом случае основные успехи связаны с выявлением шума типа "соль и перец". Достаточно хорошие результаты в получении матрицы поврежденных демонстрируют медианный фильтр [4], фильтр на основе масштабного параметра [5] и фильтр на основе приближения локальной непрерывности [6].

Проблема восстановления поврежденных пикселей с известным расположением, как правило, решается с помощью алгоритмов восстановления таблиц с пропусками. Самым очевидным по построению и быстрым по скорости работы является метод восстановления по среднему значению ближайших соседей [7]. Данный подход может приводить к появлению больших областей одного цвета, делающих изображение неестественным. Несколько лучшие результаты могут быть получены с помощью построения регрессионной модели [8]. Достаточно хорошие результаты демонстрирует интерполяция сплайнами [9], основывающаяся на предположении о возможности представления изображения в виде непрерывной функции с последующей дискретизацией. Наиболее правдоподобные результаты восстановления могут быть получены при использовании факторного анализа [10], однако основанные на нем алгоритмы работают достаточно медленно, вследствие высокой трудоемкости. Применение кластерного анализа [11] позволяет детектировать случаи не допускающие восстановления. Для восстановления поврежденных пикселей могут быть использованы алгоритмы обработки экспериментальных данных, представленных в виде таблиц с пропусками семейства ZET [12,13], которые основаны на гипотезе об избыточности табличных данных. Также для восстановления пропущенных пикселей могут применяться искусственные нейронные сети [14,15]. В работе [16] предложен метод восстановления поврежденных пикселей с помощью построения ассоциативных правил.

Целью данной статьи ставится разработка алгоритма восстановления поврежденных пикселей на основе метода анализа иерархий при принятии решений. Метод анализа иерархий [17] применяется в теории поддержки принятия решений при необходимости выбора одной из нескольких альтернатив. В традиционном подходе

использование этого метода ограничено необходимостью получения экспертных оценок, которые носят субъективный характер. Однако, как показано в работах [18,19], формирование экспертных оценок на основе объективных показателей решаемой задачи без привлечения экспертов позволяет получать хорошие результаты.

1. Постановка задачи

Пусть исходное изображение A задано в виде матрицы цветов A_{ij} . В случае цветного изображения необходимо рассматривать три матрицы, согласно модели RGB. Будем считать, что диапазон значений элементов матрицы имеет вид $[0,m]$. Пусть поврежденное изображение задается матрицей цветов B_{ij} . Будем считать, что поврежденные пиксели заданы матрицей R . Каждый элемент матрицы повреждений R_{ij} с вероятностью p отличен от нуля и с вероятностью $1-p$ нулевой. Значение ненулевых элементов матрицы повреждений также задается случайным образом в интервале $[0,m]$. Значение матрицы поврежденного изображения задается соотношением:

$$B_{ij} = \begin{cases} R_{ij}, & R_{ij} > 0, \\ A_{ij}, & R_{ij} = 0. \end{cases}$$

Задачей ставится построение матрицы C_{ij} максимально близкой к матрице A_{ij} по известным матрицам R_{ij} и B_{ij} .

Для сравнения близости матриц изображений использовалась метрика Минковского [20], согласно которой расстояние между изображениями находится по формуле:

$$d(A, C) = \max_{n,m} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} |A_{nm}^{(k)} - C_{nm}^{(k)}|.$$

где A_{mn} и C_{mn} - значения цветов пикселей изображения A и C , N - количество пикселей.

Результаты работы алгоритма будем оценивать величиной относительного улучшения изображения, вычисленное на основе расстояния от восстановленного изображения до исходного $d(orig_fig, r_fig)$ и расстояния от испорченного изображения до исходного $d(orig_fig, p_fig)$:

$$\delta = \frac{d(orig_fig, p_fig) - d(orig_fig, r_fig)}{d(orig_fig, p_fig)} \cdot 100\%.$$

2. Алгоритм принятия решения о цвете поврежденного пикселя

Будем рассматривать пиксели, окружающие поврежденный. Причем будем анализировать как ближайшие пиксели, так и следующие за ним, как показано на рисунке 1.

$d1$	$d2$	$d3$	$d4$	$d5$
$d6$	$c1$	$c2$	$c3$	$d7$
$d8$	$c4$	x	$c5$	$d9$
$d10$	$c6$	$c7$	$c8$	$d11$
$d12$	$d13$	$d14$	$d15$	$d16$

Рисунок 1. Анализируемая карта пикселей.

Цвет поврежденного пикселя c будем выбирать из восьми цветов ближайших соседей. Применим для этого метод анализа иерархий, используемый для принятия решений [21]. Введем три критерия, характеризующие ближайших соседей $c1, ..., c8$, которые позволят выбрать только один из них.

$K1$ - отличие цвета данного пикселя от среднего цвета ближайших соседей, без учета поврежденного пикселя. Так, например, для пикселя $c5$ необходимо проанализировать пиксели $c2, c3, c7, c8, d7, d9, d11$. Данный критерий позволяет выявлять резкие перепады цвета.

$K2$ - количество соседних пикселей, имеющих тот же цвет. Рассматривается тот же набор соседей, что и в предыдущем критерии. Данный критерий позволяет выявлять области сплошной заливки.

$K3$ - отличие цвета данного пикселя от пикселя, расположенного с другой стороны от поврежденного. Например, для пикселя $c4$ противоположным будет $c5$, а для $c6$ противоположный - $c3$. Данный критерий позволяет выявлять случаи, когда поврежденный пиксель находится на границе двух цветовых областей.

Будем считать, что все эти критерии равнозначны и, как следствие, имеют одинаковые весовые коэффициенты. Тогда иерархическое дерево, представленное на рисунке 2, будет двухуровневым.

Определим весовые коэффициенты каждого из решений в рамках одного критерия. Для этого введем характеристики каждого из пикселей и построим матрицу парных сравнений из отношения соответствующих характеристик.

Для критерия $K1$ будем характеризовать каждый пиксель c_i величиной:

$$x_i = 1 - \frac{\Delta c_i}{m},$$

где Δc_i - среднее значение цвета пикселей, окружающих c_i . m - максимальное значение цвета в палитре. Например, для пикселя $c2$ получим значение:

$$\Delta c_2 = \frac{c_1 + c_3 + c_4 + c_5 + d_2 + d_3 + d_4}{7}.$$

Элементы матрицы парных сравнений будут находиться как

$$A_{ij} = \frac{x_i}{x_j}.$$

Полная матрица будет иметь вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1/x_2 & x_1/x_3 & x_1/x_4 & x_1/x_5 & x_1/x_6 & x_1/x_7 & x_1/x_8 \\ x_2/x_1 & 1 & x_2/x_3 & x_2/x_4 & x_2/x_5 & x_2/x_6 & x_2/x_7 & x_2/x_8 \\ x_3/x_1 & x_3/x_2 & 1 & x_3/x_4 & x_3/x_5 & x_3/x_6 & x_3/x_7 & x_3/x_8 \\ x_4/x_1 & x_4/x_2 & x_4/x_3 & 1 & x_4/x_5 & x_4/x_6 & x_4/x_7 & x_4/x_8 \\ x_5/x_1 & x_5/x_2 & x_5/x_3 & x_5/x_4 & 1 & x_5/x_6 & x_5/x_7 & x_5/x_8 \\ x_6/x_1 & x_6/x_2 & x_6/x_3 & x_6/x_4 & x_6/x_5 & 1 & x_6/x_7 & x_6/x_8 \\ x_7/x_1 & x_7/x_2 & x_7/x_3 & x_7/x_4 & x_7/x_5 & x_7/x_6 & 1 & x_7/x_8 \\ x_8/x_1 & x_8/x_2 & x_8/x_3 & x_8/x_4 & x_8/x_5 & x_8/x_6 & x_8/x_7 & 1 \end{bmatrix}.$$

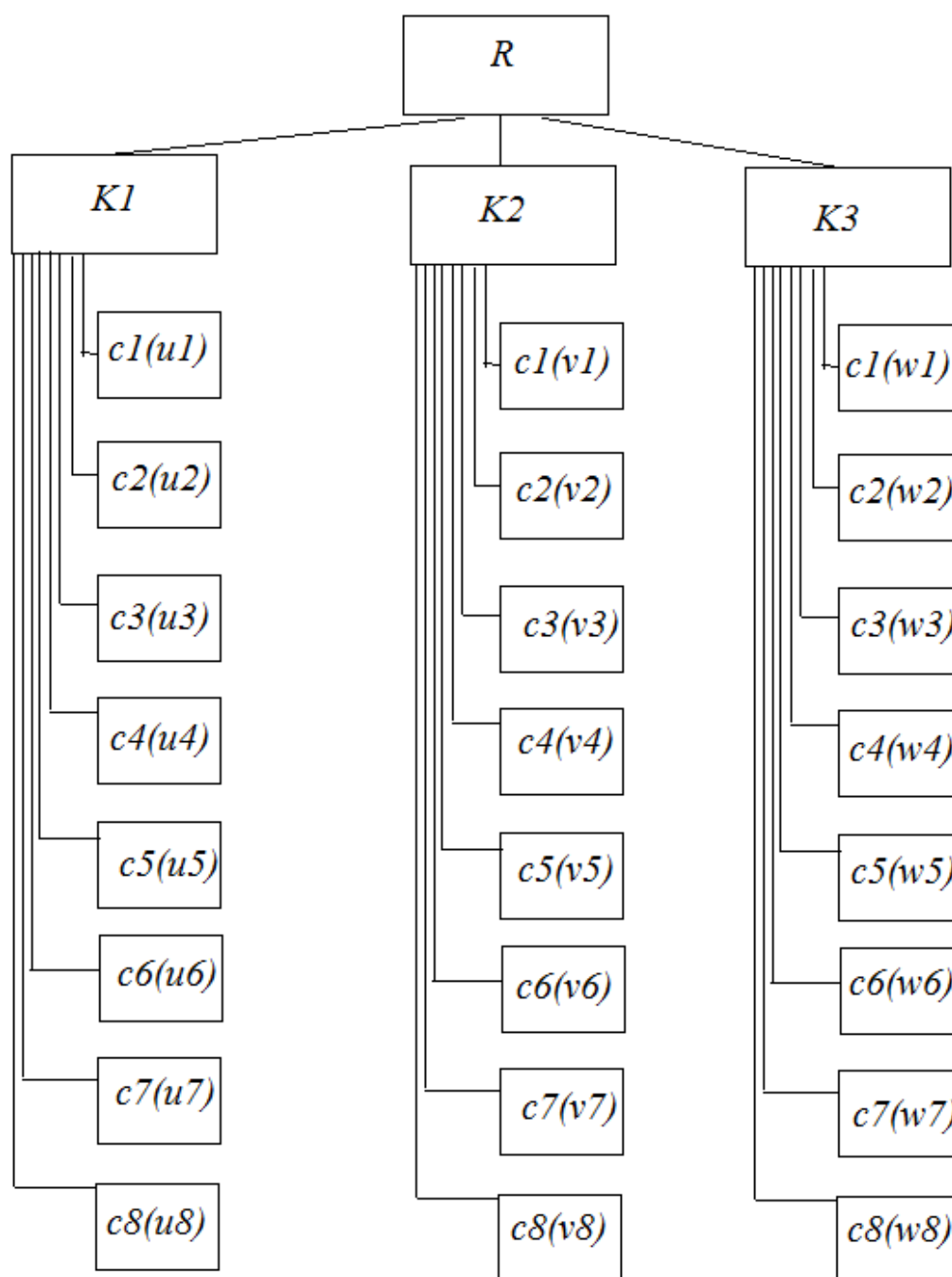


Рисунок 2. Иерархия критериев.

Из матрицы парных сравнений могут быть найдены весовые коэффициенты различных решений в рамках первого критерия:

$$u_i = \frac{x_i}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8} \quad (i=1, \dots, 8).$$

Перейдем к критерию $K2$. Будем рассматривать пиксели, которые соседствуют с данным, их всего семь. Припишем каждому пикселю c_i величину y_i , показывающую сколько из семи соседей имеют тот же цвет. Элементы матрицы парных сравнений будут иметь вид:

$$B_{ij} = \frac{y_i}{y_j} \cdot (i, j=1, \dots, 8).$$

Весовые коэффициенты будут иметь вид:

$$v_i = \frac{y_i}{y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8} \quad (i=1, \dots, 8).$$

В рамках критерия $K3$ будем рассматривать для каждого пикселя c_i его отличие от противоположного пикселя dc_i . Тогда каждый пиксель будет характеризоваться величиной

$$z_i = 1 - \frac{dc_i}{m} \quad (i=1, \dots, 8).$$

Элементы матрицы парных сравнений будут иметь вид:

$$C_{ij} = \frac{z_i}{z_j} \cdot (i, j=1, \dots, 8).$$

Весовые коэффициенты:

$$w_i = \frac{z_i}{z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 + z_6 + z_7 + z_8} \quad (i=1, \dots, 8).$$

Согласно методу анализа иерархий для каждого решения, а в данном случае это цвет какого пикселя будет использован для заполнения пропущенного пикселя, необходимо рассчитать величины:

$$P(c_i) = u_i + v_i + w_i, \quad (i=1, \dots, 8).$$

Далее возможен один из двух подходов:

1. Пропущенный пиксель заполняется тем цветом $c=c_i$, для которого $P(c_i)$ максимально.
2. Для заполнения пропущенного пикселя в качестве цвета выбирается взвешенная сумма:

$$c = \sum_{i=1}^8 c_i P(c_i).$$

Первый подход позволяет более четко восстанавливать границы цветовых областей, а второй делать более плавные переходы.

3. Компьютерный эксперимент.

Для определения эффективности предложенного алгоритма был проведен компьютерный эксперимент с использованием изображений размером 256×256 пикселей с глубиной цвета 8 бит. Эксперимент состоял в том, что на изображении генерировался случайный импульсный шум с интенсивностью p и случайным расположением поврежденных пикселей. Положение испорченных пикселей фиксировалось в матрице повреждений и считалось известным. Затем производилось восстановление поврежденных

пикселей предложенным методом, а также, для сравнения, методом нахождения среднего арифметического цветов пикселя, окружающих поврежденный [22]. Оба алгоритма обладают линейной сложностью.

В первом эксперименте в качестве исходного объекта было выбрано изображение "Lena", традиционно используемое для исследования методов преобразования изображений. Визуально эксперимент показал приемлемые результаты, представленные на рисунке 3.



Рисунок 3. Результат работы алгоритма по восстановлению пропущенных пикселей с известной матрицей повреждений: а) изображение, зашумленное на 10%, б) изображение, восстановленное предложенным алгоритмом, в) изображение, восстановленное методом среднего арифметического.

Как видно оба метода дают сходные результаты, однако применение предложенного нами метода позволяет значительно лучше восстанавливать границы областей на изображении, в результате чего изображения получаются более четкими. Тогда как для областей сплошной заливки оба метода дают одинаковые результаты.

Для демонстрации более успешной работы предложенного нами метода были проведены компьютерные эксперименты на искусственных изображениях представленных на рисунках 4 и 5.

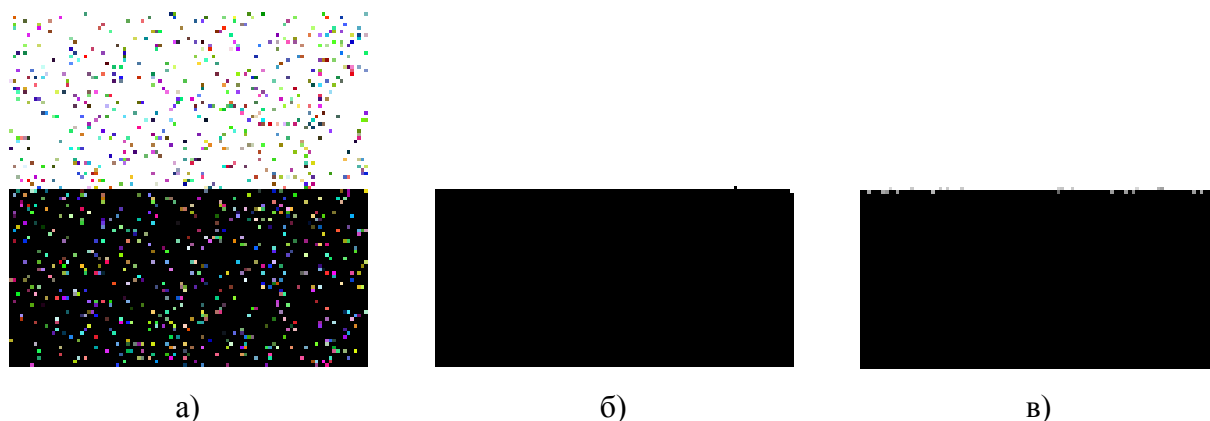


Рисунок 4. Результат работы алгоритма по восстановлению пропущенных пикселей для изображения для одной четкой границы: а) изображение, зашумленное на 10%, б) изображение, восстановленное предложенным методом, в) изображение, восстановленное методом среднего арифметического.

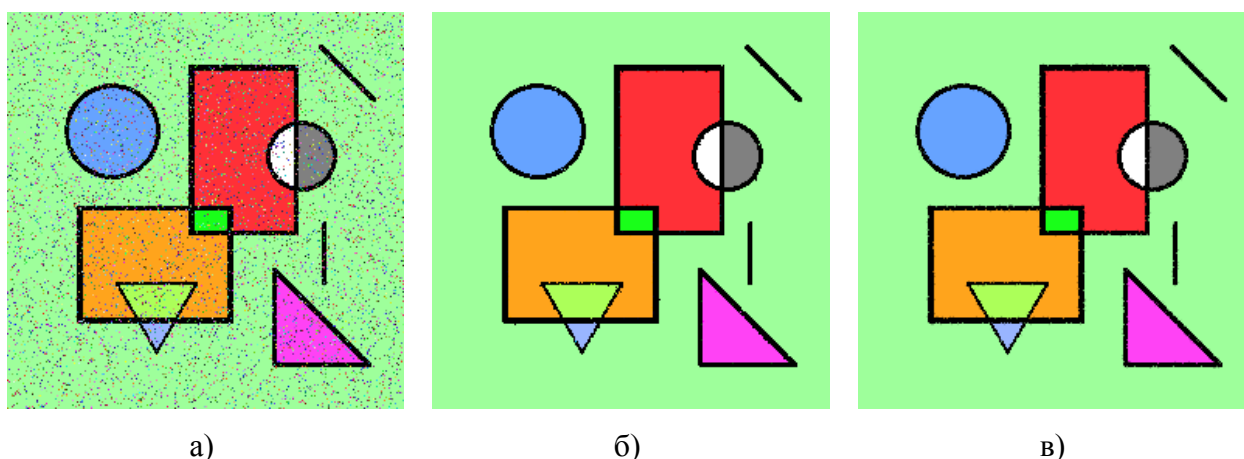


Рисунок 5. Результат работы алгоритма по восстановлению пропущенных пикселей для искусственного изображения: а) изображение, зашумленное на 10%, б) изображение, восстановленное предложенным методом, в) изображение, восстановленное методом среднего арифметического.

Как видно из рисунка 4 предложенный метод восстановления дает практически идеальные результаты. Ровно одна присутствующая погрешность обусловлена непосредственным соседством сразу трех испорченных пикселей на зашумленном изображении вблизи границы областей. Тогда как метод среднего арифметического, правильно восстанавливая области сплошной заливки, приводит к значительному размытию границы двух областей.

Из рисунка 5 видно, что метод арифметического среднего приводит к заметному размытию протяженных узких линий, имеющих две резкие границы, расположенные близко друг от друга. Причем результат практически не зависит от толщины линии. Предложенный же нами метод дает заметные погрешности для линий толщиной в один или два пикселя, но утолщение линии до трех пикселей значительно улучшает результаты восстановления.

Исследуем эффективность работы метода при различных уровнях зашумления изображения. Для этого будем сравнивать восстановленное изображение с исходным не зашумленным изображением. В качестве меры близости изображений будем использовать величину δ , введенную во втором разделе. На рисунке 6 представлена зависимость относительного улучшения изображения δ от уровня повреждения.

Как видно из рисунка 6 эффективность предложенного метода восстановления изображений убывает достаточно быстро с ростом числа испорченных пикселей. Однако даже при достаточно больших $p > 50\%$ применение предложенного метода дает вполне приемлемые результаты и позволяет восстановить изображение до уровня, при котором различимы все основные детали.

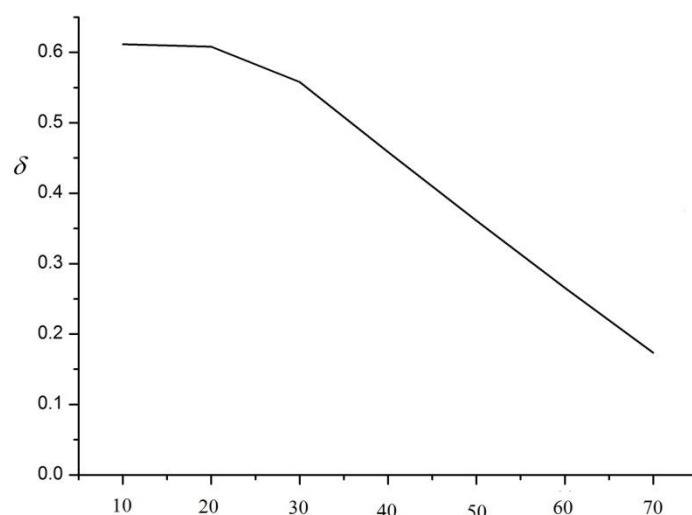


Рисунок 6. Зависимость относительного улучшения изображения δ от уровня повреждения p .

Заключение

Таким образом, алгоритм восстановления поврежденных пикселей, предложенный в данной статье, на основе метода анализа иерархий не уступает в эффективности уже существующим методам на областях изображения с однородной заливкой. Преимущества предложенного метода становятся заметными при восстановлении изображений, имеющих четкие границы. А именно, удастся избежать эффекта размытия границ, присущего всем современным фильтрам, устраняющим импульсный шум. Следует отметить, что предложенный алгоритм имеет линейную сложность и, следовательно, не уступает по времени выполнения другим фильтрам.

Работа проведена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, в рамках государственного задания ВУЗам в части проведения научно-исследовательских работ на 2014-2016 гг., проект № 2314.

Список литературы

1. Ларионов И.Б. Алгоритм автоматизированного восстановления поврежденных графических файлов // Вестник Омского университета. 2011. № 2. С. 176-177.
2. Pitas I., Venetsanopoulos A. Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications. Springer US, 1990. DOI: [10.1007/978-1-4757-6017-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6017-0)
3. Хуанг Т.С., Эклунд Дж.О., Нуссбаумер Г.Дж., Зохар Ш. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений: преобразования и медианные фильтры / под ред. Т.С. Хуанга; пер. с англ. под ред. Л.П. Ярославского. М.: Радио и Связь, 1984. 224 с.
4. Chan R., Ho C., Nikolova M. Salt-and-pepper noise removal by median-type noise detectors and detail-preserving regularization // IEEE Trans. Image Proc. 2005. Vol. 14, no. 10. P. 1479 -1485. DOI: [10.1109/TIP.2005.852196](https://doi.org/10.1109/TIP.2005.852196)

5. Kam H.S., Tan W.H. Noise detection fuzzy (NDF) filter for removing salt and pepper noise // In: Zaman H.B., Robinson P., Petrou M., Olivier P., Schröder H., Shih T.K., eds. Visual Informatics: Bridging Research and Practice. 2009. P. 479-486. (Ser. Lecture Notes in Computer Science; vol. 5857). DOI: [10.1007/978-3-642-05036-7_45](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05036-7_45)
6. Ahamed J.N., Rajamani V. Design of hybrid filter for denoising images using fuzzy network and edge detecting // American Journal of Scientific Research. 2009. Iss. 3. P. 5-14.
7. Литл Р.Дж.А., Рубин Д.Б. Статистический анализ данных с пропусками: пер. с англ. М.: Финансы и статистика, 1990. 290 с.
8. Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
9. Ларионов И.Б. Восстановление изображений при помощи многомерных линейных многообразий // Проблемы обработки и защиты информации. Книга 2. Анализ графической и текстовой информации: коллективная монография / Под общей ред. д. ф.-м. н. С.В. Белима. Омск: ООО «Полиграфический центр КАН», 2010. С. 43-57.
10. Россиев А.А. Моделирование данных при помощи кривых для восстановления пробелов в таблицах // Методы нейроинформатики: сб. ст. / под ред. А.Н. Горбаня. Красноярск: КГТУ, 1998. С. 6-22 с.
11. Двоенко С.Д. Неиерархический дивизионный алгоритм кластеризации // Автоматика и телемеханика. 1999. № 4. С. 117-124.
12. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Издательство института математики, 1999. 270 с.
13. Загоруйко Н.Г., Елкина В.Н., Тимеркаев В.С. Алгоритм заполнения пропусков в эмпирических таблицах (алгоритм Zet) // Вычислительные системы: сб. тр. Вып. 61. Эмпирическое предсказание и распознавание образов. Новосибирск, 1975. С. 3-27.
14. Круглов В.В., Борисов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. М.: Горячая линия - Телеком, 2002. 382 с.
15. Ларионов И.Б. Карты Кохонена как способ восстановления мультимедийной информации // Журнал радиоэлектроники. 2010. № 10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct10/3/text.html> (дата обращения 01.10.2014).
16. Белим С.В., Селиверстов С.А., Майоров-Зильбернагель А.О. Использование ассоциативных правил для восстановления зашумленных изображений // Вестник Омского университета. 2013. № 4. С. 197-200.
17. Saaty T.L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process // Review of the Royal Spanish Academy of Sciences. Series A. Mathematics. 2008. Vol.102, no. 2. P. 251-318. DOI: [10.1007/BF03191825](https://doi.org/10.1007/BF03191825)
18. Белим С.В., Богаченко Н.Ф. Применение метода анализа иерархий для оценки рисков утечки полномочий в системах с ролевым разграничением доступа // Информационно-управляющие системы. 2013. № 6. С. 67-72.

19. Белим С.В., Бречка Д.М. Применение метода анализа иерархий для выбора записи в списке контроля доступа // Вопросы защиты информации. 2013. № 3. С. 11-16.
20. DiGesù V., Staravoirov V.V. Distance-based Functions for Image Comparison // Pattern Recognition Letters. 1999. Vol. 20, no. 2. P. 207-213. DOI: [10.1016/S0167-8655\(98\)00115-9](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(98)00115-9)
21. Saaty T.L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process // Review of the Royal Spanish Academy of Sciences. Series A. Mathematics. 2008. Vol. 102, no. 2. P. 251-318. DOI: [10.1007/BF03191825](https://doi.org/10.1007/BF03191825)
22. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений: пер. с англ. М.: Техносфера, 2005. 1072 с.

The Analytic Hierarchy Method-Based Algorithm for Restoring Broken Pixels on the Noisy Images

S.V. Belim^{1,*}, S.A. Seliverstov¹

[*sbelim@mail.ru](mailto:sbelim@mail.ru)

¹Omsk F.M. Dostoevskiy State University, Omsk, Russia

Keywords: data recovery, noisy images, impulse noise

This article presents an algorithm for restoring broken pixels, which can appear in graphic files with statistical gaps. The suggested algorithm is based on the method of hierarchical analysis of the decision support theory. The choice of the broken pixel color depends on the nearest neighbors and their next neighbors. Three parameters inherent in each nearest neighbor are analysed. Firstly, it is the number of neighbors, which have the same color as the given nearest neighbor. Secondly, it is a deviation of the given pixel from the average value of its neighbors. Thirdly, it is a difference between the pixels being on the opposite sides of the broken pixel. Based on these three criteria, for each nearest neighbor of the broken pixel, a weight coefficient is defined. A hierarchical two-level tree for making decision is constructed. As a color of the broken pixel, its neighbor color with the maximum weight is chosen.

A computer experiment to determine the effectiveness of the proposed method is conducted. The effectiveness of the proposed method was determined by comparing the similarity degree of the broken and restored images to the source image. To compare images Minkowski metric was used. To conduct experiments photographic and artificial images were used. The paper investigates a dependence of the proposed algorithm efficiency on the broken image amount. It was found out that the proposed algorithm has the advantage over the known algorithms for restoring broken pixels near the sharp edges. An image restored by our method has more sharply defined edges as compared to what the smoothing filters provide. The proposed method can be iteratively applied. As the experiments have shown, the first five iterations provide image enhancement.

The proposed method together with the algorithms for detecting the broken pixels can be used to design filters of noisy images. The method efficiency enhancement can be achieved in case of taking into account the large number of neighbors in making decision. This method can be also developed using the increased number of criteria when making decisions.

References

1. Larionov I.B. Algorithm of self-organizing maps restoration of corrupted graphic data. *Vestnik Omskogo universiteta*, 2011, no. 2, pp. 176-177. (in Russian).
2. Pitas I., Venetsanopoulos A. *Nonlinear Digital Filters: Principles and Applications*. Springer US, 1990. DOI: [10.1007/978-1-4757-6017-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6017-0)
3. Huang T.S., ed.; Eklundh J.-O., Huang T.C., Justusson B.I., Nussbaumer H.J., Tyan S.G., Zohar S. *Two-Dimensional Digital Signal Processing II. Transforms and Median Filters*. Springer Berlin Heidelberg, 1981. DOI: [10.1007/BFb0057592](https://doi.org/10.1007/BFb0057592) (Russ. ed.: Huang T.S., ed.; Eklundh J.-O., Nussbaumer H.J., Zohar S. *Bystrye algoritmy v tsifrovoy obrabotke izobrazheniy: preobrazovaniya i mediannye fil'try*. Moscow, Radio i Svyaz' Publ., 1984. 224 p.).
4. Chan R., Ho C., Nikolova M. Salt-and-pepper noise removal by median-type noise detectors and detail-preserving regularization. *IEEE Trans. Image Proc.*, 2005, vol. 14, no. 10, pp. 1479-1485. DOI: [10.1109/TIP.2005.852196](https://doi.org/10.1109/TIP.2005.852196)
5. Kam H.S., Tan W.H. Noise detection fuzzy (NDF) filter for removing salt and pepper noise. In: Zaman H.B., Robinson P., Petrou M., Olivier P., Schröder H., Shih T.K., eds. *Visual Informatics: Bridging Research and Practice*. 2009, pp. 479-486. (Ser. *Lecture Notes in Computer Science*; vol. 5857). DOI: [10.1007/978-3-642-05036-7_45](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05036-7_45)
6. Ahamed J.N., Rajamani V. Design of hybrid filter for denoising images using fuzzy network and edge detecting. *American Journal of Scientific Research*, 2009, iss. 3, pp. 5-14.
7. Little R.J.A., Rubin D.B. *Statistical Analysis with Missing Data*. New York, John Wiley and Sons, 1987. (Russ. ed.: Little R.J.A., Rubin D.B. *Statisticheskii analiz dannykh s propuskami*. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1990. 290 p.).
8. Demidenko E.Z. *Lineynaya i nelineynaya regressiya* [Linear and nonlinear regression]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1981. 302 p. (in Russian).
9. Larionov I.B. Image restoration using multivariate linear manifolds. In: Belim S.V., ed. *Problemy obrabotki i zashchity informatsii. Kniga 2. Analiz graficheskoy i tekstovoy informatsii* [Problems of processing and protection of information. Book 2. Analysis of graphical and textual information]. Omsk, Publishing Center KAN, 2010, pp. 43-57. (in Russian).
10. Rossiev A.A. Data simulation using curves to fill the gaps in the tables. In: Gorban' A.N., ed. *Metody neyroinformatiki: sb. st.* [Methods of neuroinformatics: coll. art.]. Krasnoyarsk, KSTU Publ., 1998, pp. 6-22. (in Russian).
11. Dvoenko S.D. A nonhierarchical divisive clustering algorithm. *Avtomatika i telemekhanika*, 1999, no. 4, pp. 117-124. (English translation: *Automation and Remote Control*, 1999, no. 4, part 2, pp. 586-591.).
12. Zagoruyko N.G. *Prikladnye metody analiza dannykh i znaniy* [Applied methods of analysis of data and knowledge]. Novosibirsk, Publishing house of Institute of Mathematics, 1999. 270 p. (in Russian).

13. Zagoruyko N.G., Elkina V.N., Timerkaev V.S. Algorithm for filling gaps in empirical tables (algorithm Zet). *Vychislitel'nye sistemy: sb. tr. Vyp. 61. Empiricheskoe predskazanie i raspoznavanie obrazov* [Computing systems: coll. papers. Vol. 61. Empirical prediction and pattern recognition]. Novosibirsk, 1975, pp. 3-27. (in Russian).
14. Kruglov V.V., Borisov V.V. *Iskusstvennye neyronnye seti. Teoriya i praktika* [Artificial neural networks. Theory and practice]. Moscow, Goryachaya liniya – Telekom Publ., 2002. 382 p. (in Russian).
15. Larionov I.B. Kohonen maps as a way to restore the multimedia information. *Zhurnal radioelektroniki*, 2010, no. 10. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/oct10/3/text.html> , accessed 01.10.2014. (in Russian).
16. Belim S.V., Seliverstov S.A., Mayorov-Zil'bernagel' A.O. Using Association rules for restoration of noisy images. *Vestnik Omskogo universiteta*, 2013, no. 4, pp. 197-200. (in Russian).
17. Saaty T.L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process. *Review of the Royal Spanish Academy of Sciences. Series A. Mathematics*, 2008, vol.102, no. 2, pp. 251-318. DOI: [10.1007/BF03191825](https://doi.org/10.1007/BF03191825)
18. Belim S.V., Bogachenko N.F. Using a Hierarchy Analysis Method to Assess Permission Leakage Risks in Systems with a Role Based Access Control. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy = Information and Control Systems*, 2013, no. 6, pp. 67-72. (in Russian).
19. Belim S.V., Brechka D.M. Using the analytic hierarchy process to select an entry in the access control list. *Voprosy zashchity informatsii*, 2013, no. 3, pp. 11-16. (in Russian).
20. DiGesù V., Staravoitov V.V. Distance-based Functions for Image Comparison. *Pattern Recognition Letters*, 1999, vol. 20, no. 2, pp. 207-213. DOI: [10.1016/S0167-8655\(98\)00115-9](https://doi.org/10.1016/S0167-8655(98)00115-9)
21. Saaty T.L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors - The Analytic Hierarchy/Network Process. *Review of the Royal Spanish Academy of Sciences. Series A. Mathematics*, 2008, vol. 102, no. 2, pp. 251-318. DOI: [10.1007/BF03191825](https://doi.org/10.1007/BF03191825)
22. Gonzalez R.C., Woods R.E. *Digital Image Processing*. 2nd ed. Prentice Hall, 2001. (Russ ed.: Gonzalez R.C., Woods R.E. *Tsifrovaia obrabotka izobrazhenii*. Moscow, Tekhnosfera Publ., 2005. 1072 p.).