

AST2000 Del 1E

Interaktive forelesningsnotater

VIKTIG

Dette er et alternativ til forelesningen i emnet. Har du gått skikkelig gjennom disse interaktive forelesningsnotatene så trenger du ikke å lese de fulle forelesningsnotatene (med unntak av oppgavene bak). All informasjonen du trenger, får du her. Du kommer til å få mange grublespørsmål og diskusjonsoppgaver, det er meningen at disse skal gjøres i grupper av minst 2, maks 4 studenter. **Det er derfor sterkt anbefalt at dere sitter sammen i grupper når dere går gjennom disse interaktive forelesningsnotatene, du vil få betydelig mer utbytte av dem på den måten.** Hvis du har kommentarer ris/ros til disse forelesningsnotatene eller til emnet, trykk på 😊 😞 knappen som du finner på alle sider.

Trykk denne knappen for å begynne

- HUSK at du får mer ut av de interaktive forelesningsnotatene når du gjør de sammen med noen. Diskusjonene med andre er svært viktige.
- Det er mange spørsmål/grubliser underveis, sett dere selv en tidsgrense, 1 minutt på de korte, maks 4-5 minutter på de lenger. Ha en alarm ved siden av, ellers kommer dere til å bruke alt for langt tid. Har dere ikke fått det til etter kort tid, gå videre, se svaret og lær!
- Er du i det minste tvil om noe, så finnes det en **FORUM** knapp, trykk det og still spørsmål med en gang mens du enda husker spørsmålet!

Trykk denne knappen for å begynne

Forrige side

Hvis du allerede har begynt på denne forelesningen og vil hoppe rett inn til et annet kapittel, kan du trykke her:

- Hydrostatisk likevekt
- Utledning: hydrostatisk likevekt
- Likningen for hydrostatisk likevekt

Neste side



Forrige side

Velkommen til del 1E! Her skal vi bruke litt termodynamikk igjen; nå kombinert med gravitasjonskrefter. Både i planetatmosfærer og inne i en stjerne så har vi gass som blir trukket på av tyngdekraften. Men for stabile stjerner og stabile atmosfærer så er det noe som trykker tilbake og gjør at disse ikke kollapser. Vi skal her utlede en kraftfull likning som gjør at vi kan lære mye om et slikt system (som atmosfærer eller en stjernes oppbygging) utifra det enkle faktum at det er stabilt. Dette interaktive forelesningsnotatet tilsvarer litt mindre enn en dobbeltime fysisk forelesning.

Er du klar?

Neste side

[Forrige side](#)



side 1 av 42

[Introduksjon](#)

[FORUM](#)

Vi begynner som vanlig...

...med litt brainstorming. Som det er **svært viktig** at du gjør før du går videre.

[Trykk her for å varme opp](#)

Er du klar og har sendt inn skjemaet?

Nei

Ja

Forrige side

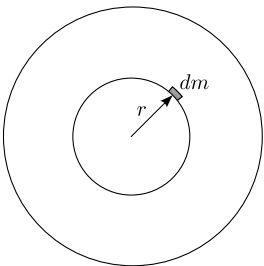
Nytt tema:

Hydrostatisk likevekt

Dette temaet fortsetter frem til side 9 av 42.

Nå er jeg nysjerrig her!

Fant du svar på spørsmålene på skjemaet? Innså du at trykket kan ha en rolle i å gi motkraft til gravitasjon?



Her ser vi et bittelite element av gassen med masse dm . Gravitasjonskrafta prøver å trekke gaselementet nedover mens trykket virker oppover og motvirker krafta? Er det slik det fungerer? Altså siden

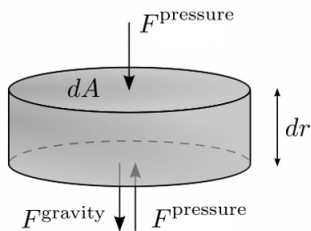
$$P = \frac{F}{A}$$

så får vi en bitteliten kraft $dF = PdA$ der dA er arealet av det bittelille gaselementet?

Tja, noe sånt må det vel være

Mjaaaa, må tenke litt på'n

Vi zoomer nå inn på dette gaselementet som vi har valgt her til å være sylindrisk med sideflateareal dA og høyde dr .



Her ser vi kreftene tegnet inn. Enig i at gravitasjon virker kun nedover? Også enig i at trykket ikke kun virker oppover, gasstrykk virker jo fra alle kanter, ikke sant? Dermed vil vel gasstrykket ovenfra kanselere gasstrykket nedenfra? Og vi er like langt...? Gravitasjon vinner igjen fordi kreftene fra gass-trykket kanselerer hverandre? Og dermed faller solen sammen til et sort hull og atmosfæren vår faller ned! Ikke det som skjer i virkeligheten sier du? Hvorfor ikke det da???

Nåde deg hvis du trykker her uten å ha tenkt deg om først!

Forrige side



side 5 av 42

Hydrostatisk likevekt

FORUM

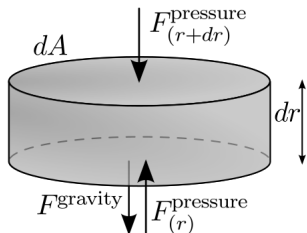
Jeg vet svaret!!!

Jeg klarer ikke å se det

Jeg tenkte egentlig ikke så nøye gjennom...

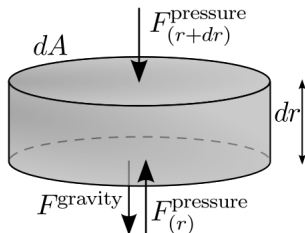


OK da! Så kanskje gasstrykket ikke er det samme i alle høyder r ?
Jammen det stemmer jo i atmosfæren vår ihvertfall. Der minker jo trykket med høyden slik at trykket er en funksjon av avstand r fra jordas sentrum. Siden gass-elementet vårt er infinitesimalt lite så er høydeforskjellen over og under infinitesimalt liten, den er dr , men da blir vel også trykkforskjellen dP mellom trykket ovenfra og trykket nedenfra infinitesimalt liten? La oss illustrere det her:





Javel! Den bittelitte trykkforskjellen dP må altså være slik at trykk-krafta er større undenfra enn ovenfra. Men en infinitesimal liten trykkforskjell dP må vel gi opphav til en infinitesimal liten kraft undenfra. **Hvordan kan denne infinitesimalt lille krafta klare å veie opp mot tyngdekrafta som trekker nedover???**



Jeg tror kanskje jeg vet det...

Jeg har tenkt og tenkte, men denne var litt vrien...



AHA! Javisst ja, massen dm er jo også infinitesimalt lite. Og tyngdekrafta er proporsjonalt med massen, dermed blir også tyngdekrafta infinitesimalt liten. Og da er det ikke så rart at en bitteliten trykk-kraft kan stå imot.

Hydrostatisk likevekt

Hvis trykkendringene oppover i atmosfæren eller oppover i stjerna er slik at trykk-krafta undenfra på ethvert område inne i gassen nøyaktig oppveier tyngdekrafta, så vil stjerna eller atmosfæren være stabil. Dette kaller vi **hydrostatisk likevekt**. Når en stjerne (eller atmosfære) dannes så er den i begynnelsen ikke i en slik likevekt, men siden dette er en energetisk fordelaktig tilstand så vil stjerna med tiden nå en slik likevekt.

Vi skal nå bruke Newtons 2.lov på et slikt masselement inne i gassen til å utlede en likning som beskriver hvordan et slik gaselement vil akselerere hvis en av kreftene er større enn det andre. Til slutt krever vi at elementet ikke akselererer, altså at vi har hydrostatisk likevekt. Da får vi **likningen for hydrostatisk likevekt**. Denne likningen skal vi bruke til bl.a. å modellere atmosfærer og stjerners indre.

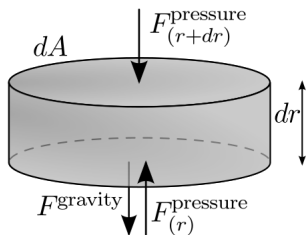
Forrige side

Nytt tema:

Likningen for hydrostatisk likevekt

Siste tema i denne forelesningen!

Sett igang med utledningene!



Så lenge trykk er $P = F/A$ og krafta undenfra er gitt ved gasstrykket $P(r)$ i denne høyden, så blir vel kraften undenfra gitt ved

$$dF_{\text{oppover}} = P(r)dA$$

Og tilsvarende blir vel kraften fra gasstrykket $P(r + dr)$ ovenfra (merk $r + dr$ siden vi er dr høyere opp)

$$dF_{\text{nedover}} = P(r + dr)dA$$

Får du det til å stemme?

Soleklart!

Dette tror jeg ikke kan stemme!

[Forrige side](#)



side 10 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

[FORUM](#)

Hva er det du ikke synes stemmer? Mistenker at du kanskje ikke henger helt med. Ta kontakt med foreleser!

[Neste side](#)

[Forrige side](#)



side 10 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

FORUM

Det er bra vi er enig!

[Neste side](#)

[Forrige side](#)



side 11 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

[FORUM](#)

Hva så med gravitasjonskrafta da? Hvis massen av gaselementet er dm , så bli vel det...

[Trykk her når du har skrevet ned et forslag!](#)



Hva så med gravitasjonskrafta da? Hvis massen av gasselementet er dm , så bli vel det...

Trykk her når du har skrevet ned et forslag!

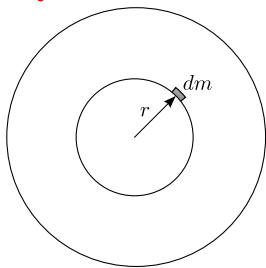
$$dF = -G \frac{M(r)dm}{r^2}$$

der $M(r)$ er massen av alt som er under høyden r . Når vi modellerer en atmosfære så vil jo massen til planeten utgjør i praksis hele $M(r)$ slik at $M(r) = M$ der M er massen til planeten. Den lille ekstra massen fra atmosfæren som vi får ettersom vi kommer høyere og høyere opp er forsvinnende liten i forhold til den totale massen M av planeten.

MEN, situasjonen er derimot en helt annen hvis...



Situasjonen er derimot en helt annen
hvis vi for eksempel holder på å
modellere en stjernes indre:

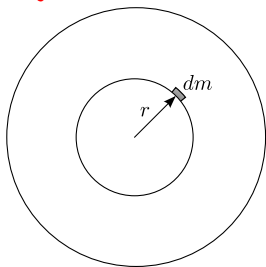


Trykk her når du har et forslag!

Her blir den totale massen under
posisjonen r tydelig større og større fra
 $r = 0$ i sentrum til $r = R$ på overflaten
av stjerna. Her må vi ta med
 r -variasjonen av $M(r)$. Men hvis du ser
på figuren, nøyaktig hvilken del av denne
stjerna bidrar til massen $M(r)$ som virker
med tyngdekraft på dm ??



Situasjonen er derimot en helt annen hvis vi for eksempel holder på å modellere en stjernes indre:



Her blir den totale massen under posisjonen r tydelig større og større fra $r = 0$ i sentrum til $r = R$ på overflaten av stjerna. Her må vi ta med r -variasjonen av $M(r)$. Men hvis du ser på figuren, nøyaktig hvilken del av denne stjerna bidrar til massen $M(r)$ som virker med tyngdekraft på dm ??

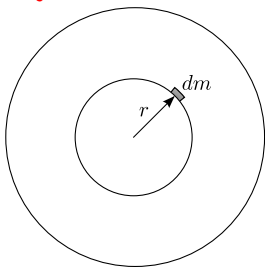
Trykk her når du har et forslag!

Svaret er at kun massen innenfor sirkelen som er avtegnet rett under elementet dm bidrar! Altså all masse innenfor radiusen r i figuren bidrar til tyngdekraften på dm , men ingenting mer! Hva så med all massen som ligger i skallet rundt denne sirkelen? Hvorfor bidrar det ikke???

Tenk 2 ganger før du trykker her!



Situasjonen er derimot en helt annen hvis vi for eksempel holder på å modellere en stjernes indre:



Her blir den totale massen under posisjonen r tydelig større og større fra $r = 0$ i sentrum til $r = R$ på overflaten av stjerna. Her må vi ta med r -variasjonen av $M(r)$. Men hvis du ser på figuren, nøyaktig hvilken del av denne stjerna bidrar til massen $M(r)$ som virker med tyngdekraft på dm ??

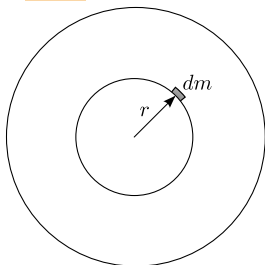
Trykk her når du har et forslag!

Svaret er at kun massen innenfor sirkelen som er avtegnet rett under elementet dm bidrar! Altså all masse innenfor radiusen r i figuren bidrar til tyngdekraften på dm , men ingenting mer! Hva så med all massen som ligger i skallet rundt denne sirkelen? Hvorfor bidrar det ikke???

Tenk 2 ganger før du trykker her!

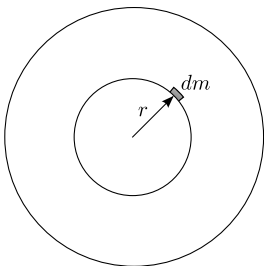
Du tenkte bare 1 gang! Tenk en gang til!

Trykk her når du er ferdigtenkt



Man kan vise at hvis du har et skall med kulesymmetrisk massefordeling så vil den totale gravitasjonskrafta på alt det som er innenfor skallet være 0! Vi skal ikke vise det her, men det finnes en helt analog utledning i elektromagnetisme: den elektriske krafta innenfor et elektrisk ladd kuleskall er 0. Gravitasjonskreftene fra de forskjellige sidene av skallet nuller hverandre ut. **Dermed får vi ingen gravitasjonskrefter på dm fra alt som ligger i avstand større enn r fra sentrum.**

Neste side



Nå er det vel slik at tyngdeakselerasjonen ved overflaten av en planet med masse M er gitt ved

$$g = -G \frac{M}{r^2}$$

Tyngdeakselerasjonen ved gaselementet vårt dm i en avstand r fra sentrum må vel dermed bli

$$g(r) = -G \frac{M(r)}{r^2}$$

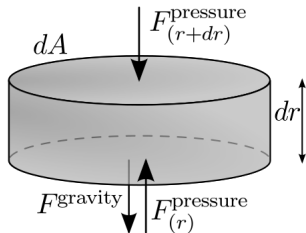
som insatt gir at kraften på dm kan skrives ved hjelp av $g(r)$ i avstand r fra sentrum som

$$dF = g(r)dm$$

Vi får altså en total tyngdekraft

$$dF = -G \frac{M(r)dm}{r^2}$$

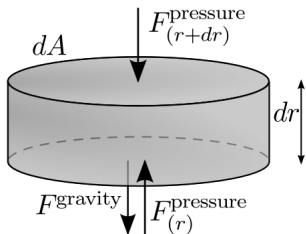
på gaselementet med masse dm der $M(r)$ altså er den totale massen av stjerna innenfor radius r .



Oppsummert så har vi vel kommet frem til at vi har en tyngdekraft $F = g(r)dm$ som virker nedover, en trykk-kraft $P(r)dA$ som virker oppover og en trykk-kraft $P(r + dr)dA$ som virker nedover. La oss da skrive ned Newtons 2.lov på gass-elementet $dF_{\text{tot}} = dm a$ som gir oss

$$-dF^{\text{grav}} - dF^{\text{pressure}}(r + dr) + dF^{\text{pressure}}(r) = dm \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Hvor vi har skrevet posisjonen (høyden) av gaselementet som r og dermed akselerasjonen til gaselementet som den dobbelt tidsderivate av r .



Vi setter nå inn det som vi kjenner i

$$-dF^{\text{grav}} - dF^{\text{pressure}}(r + dr) + dF^{\text{pressure}}(r) = dm \frac{d^2 r}{dt^2}$$

og får

$$-g(r)dm - P(r + dr)dA + P(r)dA = dm \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Henger du med?? Hvis ikke spør foreleser!

Det neste vi skal gjøre nå er å skrive ut massen av dm ved hjelp av tettheten. Vi antar at gassettheten er kulesymmetrisk, dvs. at all gass i avstand r fra sentrum har samme massetetthet $\rho(r)$.

Neste side



Kan du se hvordan vi kan skrive dm uttrykt ved hjelp av dr , dA og $\rho(r)$??

Ja, det er rett frem

Nei, det var ikke helt rett frem...



Kan du se hvordan vi kan skrive dm uttrykt ved hjelp av dr , dA og $\rho(r)$??

Ja, det er rett frem

Nei, det var ikke helt rett frem...

Det bør være rett frem! Du kjenner tetthet og du kan finne volum, hva blir da massen? Vi hadde kommet til:

$$-g(r)dm - P(r + dr)dA + P(r)dA = dm \frac{d^2 r}{dt^2}$$

Ta et stykke papir, skriv ned denne likningen, sett inn for uttrykket ditt for dm . **Deretter:** Er du enig i at $P(r + dr) - P(r)$ kan skrives som en liten trykkendring dP ? Hvis du nå forkorter bort felles faktorer og deler hele likningen på dr , hvordan blir likningen din seendes ut?

Neste side

Forrige side

Beklager du kan ikke gå videre før du faktisk har gjort jobben. Frem med papir og blyant! Hvis du ikke fullførte utledningen på forrige side, gå tilbake nå. Dette er regning som du bør kunne!

Neste side

Forrige side



side 28 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

FORUM

Er du helt sikker på at du har kommet frem til noe?

Slutt å mase!



Er du helt sikker på at du har kommet frem til noe?

Slutt å mase!

Fikk du:

$$-g(r)\rho(r) - \frac{dP}{dr} = \rho \frac{d^2r}{dt^2}$$

?????

Hvis du ikke får til å komme frem til dette uttrykket, spør foreleser!

Men vi er ikke fremme ved likningen for hydrostatisk likevekt! I likevekt så faller ikke atmosfæren ned! Stjerna holder konstant radius! Dermed endrer ikke gassen i atmosfæren eller inne i stjerna høyde. Da blir vel den tidsderiverte av r lik 0?

Neste side



Nettopp ja! Setter vi den tidsderiverte til 0, så få vi

likningen for hydrostatisk likevekt...

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Dette er en meget kraftfull likning! **Det veldig enkle faktum at en atmosfære ikke faller ned eller at radiusen til en stjerne er konstant gjør at vi vet at denne likningen er oppfylt!** Og hvis vi vet at denne likningen er oppfylt, så kan vi dermed løse den for å finne f.eks. trykk, tetthet og temperatur som funksjon av høyde!. Nesten alt vi vet om stjerners oppbygning er basert på denne likningen, kombinert med andre gasslikninger.

Neste side



Vi hadde:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

På venstre side har vi trykkendring dP per skritt dr som du tar oppover i atmosfæren/stjerna. På høyre side ser vi massetettheten ganger tyngdeakselerasjonen i høyden r . Likningen sier at trykkenndringen når du går oppover må avhenge av dette produktet som jo er nært knyttet til tyngdekrafta (masse ganger tyngdeakselerasjon er jo tyngdekraft!). Den må avhenge av tyngdekrafta slik at denne blir nøyaktig oppveid. **Det gir mening!**

Hvordan løser vi noe sånt da???

Neste side



Vi hadde:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r)$$

Numerisk er dette ganske rett frem. Vi har en første ordens differensial-likning. Dette har vi allerede vært borti! Eulers metode. Gang opp dr til høyre side og vi har:

$$dP = -\rho(r)g(r)dr \quad \text{eller} \quad \Delta P = -\rho(r)g(r)\Delta r$$

Altså hvis du kjenner trykket P_0 på f.eks overflaten av planeten, så kan du nå skritt for skritt gå oppover i atmosfæren og benytte denne likningen til å finne den lille trykkendringen ΔP og dermed oppdatere trykket i neste skritt osv.

Analytisk benytter vi oss igjen av den nederste likningen her med differensialer. Vi har dP på venstre side og dr på høyre side. Da kan vi sette på et integral på begge sider, og integrere trykket fra en høyde r til en annen.

Neste side



I del 1E skal du løse en oppgave som går ut på å modellere en atmosfære. Husk at likningen for ideel gass

$$P = nkT$$

gir oss en sammenheng mellom trykk, tetthet og temperatur. Hvis det er slik at trykket må variere oppover for at vi skal ha hydrostatisk likevekt, så sier vel denne likningen at også temperatur og/eller tetthet må variere? Dermed kan vi kanskje skrive denne likningen slik:

$$P(r) = n(r)kT(r)$$

der vi har fått med avhengighet av posisjonen r . Merk at vi ofte skriver ut antall-tettheten $n(r)$ ved hjelp av massetettheten $\rho(r)$ på denne måten:

$$n(r) = \frac{\rho(r)}{\mu m_H}$$

der μ er det vi kaller **midlere molekylvekt** og m_H er massen til hydrogenatomet. Det er veldig viktig at du forstår hva denne midlere molekylvekta er for noe.



Midlere molekylvekt μ er...

den gjennomsnittlige vekta til atomene/molekylene i en gass delt på massen til hydrogenatomet. Det er altså gjennomsnittlig/midlere vekt av et molekyl i gassen målt i hydrogenmasser!

$$\mu = \sum_{i=1}^N f_i \frac{m_i}{m_H}$$

der summen går over alle *typer* molekyler i gassen, m_i er massen til denne typen molekyl og f_i er andelen av denne typen molekyler i gassen.

La oss regne ut den midlere molekylvekta til jordas atmosfære. Den består av ca. 78% **nitrogen**, 21% **oksygen** og 1% **argon**. Andelene av disse er altså **0.78, 0.21 og 0.01**. Nitrogen (den mest vanlige isotopen) har 7 protoner og 7 nøytroner i kjernen. Målt i hydrogenatomer som har kun 1 proton så er dermed **vekta av nitrogen lik ca. 14 hydrogenatomer** (protonets og nøytronets vekt er så like at vi med rimelig god nøyaktighet kan sette disse like her). Gjør vi tilsvarende for de andre grunnstoffene så har vi:

$$\mu = 14 \times 0.78 + 16 \times 0.21 + 40 \times 0.01 = 14.68$$



Vi kan altså skrive ideel gasslov som

$$P(r) = \frac{\rho(r)kT(r)}{\mu m_H}$$

som er formen vi skal bruke når vi skal regne på stjernenes indre senere, men også når vi skal modellere atmosfærer. Du skal f.eks. løse for et tilfelle der atmosfæren er isotherm, dvs. vi antar at temperaturen er konstant, dvs. $T(r) = T$, for en del av atmosfæren. **Klarer du å vise at likningen for hydrostatisk likevekt i dette tilfelle kan skrives som**

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = -\frac{\mu m_H \rho(r) g(r)}{kT}$$

???

Neste side



Når vi kommer til del 3 der vi skal se på stjernenes indre, kommer du også til å se på **strålingstrykket**. Inne i stjernene er det så mye stråling at fotonene oppfører seg som partikler i en gass og dermed gir opphav til et “gasstrykk” fra fotonene. Trykket fra en slik fotongass er $P = \frac{1}{3}aT^4$ der a er *strålingskonstanten* $a = 7.56 \times 10^{-16} \text{ J/m}^3\text{K}^4$. Dette kommer du til å utlede i senere kurs. For å se på hydrostatisk likevekt i tilfeller der strålingstrykket dominerer over gasstrykket, så kan man altså trenge å kombinere denne likningen (isteden for ideel gasslov) med likningen for hydrostatisk likevekt.

Forresten... Hvorfor er det riktig å skrive at

$$n(r) = \frac{\rho(r)}{\mu m_H}$$

??? Hvis du har forstått betydningen av antalltetthet $n(r)$, massetetthet $\rho(r)$, samt midlere molekylvekt μ , bør det være klart for deg nå. Hvis du sliter med å se det, ta f.eks. en gass med kun hydrogen. Får du det til å stemme i dette tilfelle? Er du usikker, **spør!** Dette må du ha kontroll på.



Vi avslutter denne delen med en liten test:

Hva er...

den midlere molekylvekta i en gass som består av 50% hydrogen og 50% helium (typisk i en aldrende stjerne)? Klarer du å svare i løpet av 30 sekunder?

0.1

0.5

1.0

1.5

2.0

2.5

3.0

4.0

Forrige side



side 41 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

FORUM

Det ble nok galt. Ta deg litt mer tid til å tenke, kanskje det gikk litt for fort? Hvis du sliter, gå tilbake til eksemplet! Prøv igjen!

Forrige side



side 41 av 42

Likningen for hydrostatisk likevekt

FORUM

Flott, du forstår det! Skulle du likevel tvile, gå tilbake til eksemplet!

Neste side

Forrige side



Gratulerer, del 1E er overstått! Du bør nå kunne

- forstå hvorfor atmosfæren ikke faller ned
- forstå hva hydrostatisk likevekt betyr
- forstå utledningen av likningen for hydrostatisk likevekt (dette har kommet på eksamen! Med litt hjelp da!)
- vite utgangspunktet for å løse likningen numerisk og analytisk
- kombinere ideel gasslov med likningen for hydrostatisk likevekt
- huske hva midlere molekylvekt er og kunne regne den ut for en gass

Hvis du ikke har gjort det allerede, trykk på smiley-ene og si din mening om dette interaktive forelesningsnotatet. Var det for tørt? Var det for vanskelig? Var det for spennende? Nøyaktig hva kan jeg gjøre for at det skal bli bedre? **Takk!** Det anbefales nå at du sjekker

kortsvarsoppgavene til del 1E for å kontrollere at du har forstått stoffet. Kan du svare på disse, blir det lettere å bruke kunnskapen din i oppgavene/prosjektet. Noen av disse kommer på eksamen.