

# AST2000 Del 1B

## Interaktive forelesningsnotater: forelesning 2 av 2

### VIKTIG

Dette er et alternativ til forelesningen i emnet. Har du gått skikkelig gjennom disse interaktive forelesningsnotatene så trenger du ikke å lese de fulle forelesningsnotatene (med unntak av oppgavene bak). All informasjonen du trenger, får du her. Du kommer til å få mange grublespørsmål og diskusjonsoppgaver, det er meningen at disse skal gjøres i grupper av minst 2, maks 4 studenter. **Det er derfor sterkt anbefalt at dere sitter sammen i grupper når dere går gjennom disse interaktive forelesningsnotatene, du vil få betydelig mer utbytte av dem på den måten.** Hvis du har kommentarer ris/ros til disse forelesningsnotatene eller til emnet, trykk på 😊 😞 knappen som du finner på alle sider.

Trykk denne knappen for å begynne

- HUSK at du får mer ut av de interaktive forelesningsnotatene når du gjør de sammen med noen. Diskusjonene med andre er svært viktige.
- Det er mange spørsmål/grubliser underveis, sett dere selv en tidsgrense, 1 minutt på de korte, maks 4-5 minutter på de lenger. Ha en alarm ved siden av, ellers kommer dere til å bruke alt for langt tid. Har dere ikke fått det til etter kort tid, gå videre, se svaret og lær!
- Er du i det minste tvil om noe, så finnes det en **FORUM** knapp, trykk det og still spørsmål med en gang mens du enda husker spørsmålet!

Trykk denne knappen for å begynne

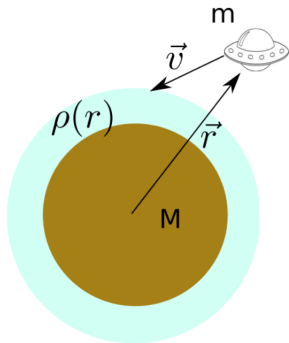
## Forrige side

Hvis du allerede har begynt på denne forelesningen og vil hoppe rett inn til et annet kapittel, kan du trykke her:

- Kjeglesnitt
- Keplers 2. og 3.lov
- Massesenter
- Energi og type kjeglesnitt
- Tips til koding

Neste side

## Forrige side



Velkommen til andre forelesning i del 1B! Under er det noen punkter til repetisjon. Kun når du har **full kontroll** på alt dette kan du gå videre. Hvis ikke, gå tilbake til forrige forelesning for å repetere litt eller spør foreleser og/eller gruppelærer hvis det er ting som er uklare. Dette forelesningsnotatet tilsvarer en og en halv fysisk dobbelttime, kanskje litt mindre.

Er du klar?

Neste side

- 1 Kan du prøve å tenke gjennom hvordan du ville utledet tolegemeproblemet hvis du skal gjøre det igjen uten hjelp av forelesningsnotater? Du trenger ikke å gjøre alle stegene i detalj, men tenke gjennom, steg for steg, hva vi gjorde. Hvis du er usikker på noen av stegene kikk tilbake.
- 2 Klarer du å bruke Newtons lover på vektorform, inkludert derivasjoner og bruk av enhetsvektorer i polarkoordinater?
- 3 Kjenner du til alle begrepene og egenskapene til ellipser som du skal kjenne i kurset?



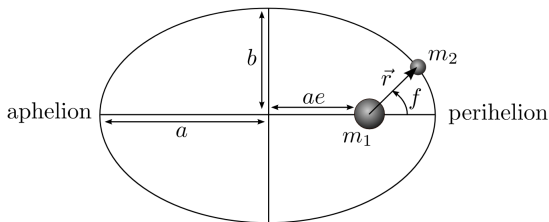
Vi utledet at løsningen av tolegemeproblemet kan skrives som:

$$r(f) = \frac{p}{1 - e \cos f}$$

der  $p$  og  $e$  er positive integrasjonskonstanter. Hvis  $e < 1$  så er dette formelen for en ellipse:

$$r(f) = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos f}$$

der det ene objektet er i brennpunktet:





Men det store spørsmålet i forrige forelesning var:

Hva hvis  $e \geq 1$ ????

Da har vi ikke lenger en ellipsebane...

Men hva har vi da...???



Likningen vi har kommet frem til er tilfeldigvis likningen for *kjeglesnitt* (*conic sections*) i polarkoordinater. Vet du hvilke 3 typer kurver som inngår i kjeglesnittene? Den ene er ellipser ja, men de andre to?

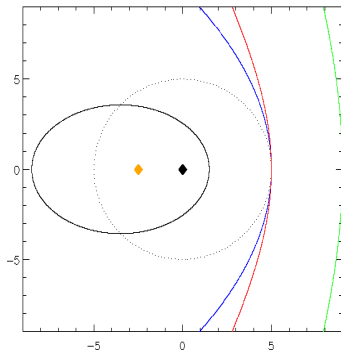
[Trykk her når du har funnet ut av det](#)



Likningen vi har kommet frem til er tilfeldigvis likningen for *kjeglesnitt* (*conic sections*) i polarkoordinater. Vet du hvilke 3 typer kurver som inngår i kjeglesnittene? Den ene er ellipser ja, men de andre to?

Trykk her når du har funnet ut av det

Ganske riktig, *parabler* og *hyperbler*:



De sorte linjene er ellipser, den blå er en parabel mens den røde og grønne er hyperbler. Den sorte prikkete ellipsen har  $e = 0$  og er dermed en sirkel. Den heltrukne sorte linja er en ellipse med eksentrisitet  $e = 0.7$ . Den sorte prikken er brennpunktet i sirkelen (og dermed sentrum siden det er sirkel), den oransje prikken er brennpunktet i ellipsen.

Neste side



Forrige side

# Nytt tema:

## Kjeglesnitt

Dette temaet fortsetter frem til side ?? av 42.

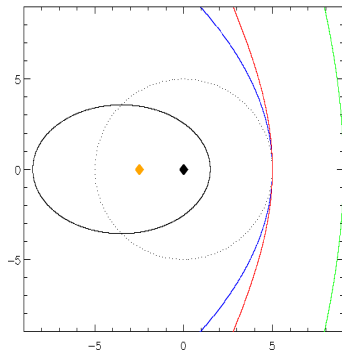
La oss repetere litt om kjeglesnitt og se mer på uttrykket i polarkoordinater.

Ja, hvordan var nå det igjen...



men for

- parabler er  $e = 1$  og  $p = 2a$
- hyperbler er  $e > 1$  og  $p = -a(1 - e^2)$
- mens vi husker at ellipser hadde  $e < 1$  og  $p = a(1 - e^2)$



Hyperbler og parabler har også formel

$$r(f) = \frac{p}{1 - e \cos f}$$

Merk at for ellipser og hyperbler så er det kun et minustegn som skiller uttrykket for  $p$ . Årsaken til minustegnet er for å holde  $p$  positiv ( $r$  må jo være en positiv størrelse) når  $e$  plutselig har blitt større enn 1. I figuren til venstre så har alle kurvene  $a = 5$  mens de to hyperblene har  $e = 2$  (rød) og  $e = 2.8$  (grønn).

Neste side



Så ja, Kepler fant faktisk ikke hele sannheten! Hvorfor ikke?

Fordi, som du ser fra figuren, objekter som går i parabelbaner og hyperbelbaner ikke er bundet til sola, de kommer bare innom men aldri tilbake igjen!

Slike objekter vil dermed ikke være fra vårt solsystem men være besøk fra det interstellare rom.



Det er først nå i det siste at man har oppdaget slike objekter. Det aller første ble oppdaget i 2017 og ble kalt *Oumuamua*. Her er en kunstisk fremstilling av hvordan objektet kan se ut (credit: ESO/M. Kornmesser)





Vi skal snart se litt på hva betingelsene er for at et objekt får en elliptisk, parabel eller hyperbelbane. Dette er jo spesielt viktig for satellitter. Hvis vi ønsker å ha en satellitt i bane rundt jorda så bør vi helst sørge for at den går i en ellipsebane. Ellers vil vi jo miste satellitten! Men før vi gjør det la oss kikke litt på ukeoppgavene.

Vi har her utledet Keplers 1.lov. Men hva med Keplers 2. og 3. lov? De skal du få lov til å utlede selv i oppgave 1B.1 og 1B.2.

Forrige side

# Nytt tema:

## Keplers 2. og 3.lov

Dette temaet fortsetter frem til side ?? av 42.

Nå skal du få tyvtitte litt på oppgavene der du skal utlede Keplers 2. og 3. lov. Nå som vi har utledet Keplers første lov, så er det **mye** enklere å utlede de to siste, lover!

Virkelig?



## Keplers 2. og 3. lov

Tenk **fort** gjennom hvordan du kan gå frem for å løse oppgave 1B.1 under her (prosjektstudenter har en liknende oppgave i utfordring B1, del 2):

**Deretter**, velg om du enten vil gå videre til neste side og heller se mer på oppgaven etter forelesningen **eller** om du vil bruke litt tid på oppgaven nå. Hvis du vil se litt mer på oppgaven nå: tenk litt til og hvis du sitter helt fast, ta gjerne en titt på [denne videoen](#) for noen tips. **Merk at det ikke er meningen at du skal løse oppgaven nå men finne din egen ide om hvordan du ville startet på hver av deloppgavene. Ikke se på videoen før du har egne forslag.**

**Exercise 1B.1** You need to read all sections from 1 to 5 to be able to solve this exercise. The scope of this problem is to deduce Kepler's second law. Kepler's second law can be written mathematically as

$$\frac{dA}{dt} = \text{constant},$$

i.e. that the area  $A$  swept out by the vector  $\vec{r}$  per time interval is constant. We will now show this step by step:

1. Show that the infinitesimal area  $dA$  swept out by the radius vector  $\vec{r}$  for an infinitesimal movement  $dr$  and  $d\theta$  is  $dA = \frac{1}{2}r^2d\theta$ . (hint: draw a figure: can you approximate the area in the figure as a triangle?)
2. Divide this expression by  $dt$  and you obtain an expression for  $dA/dt$  in terms of the radius  $r$  and the tangential velocity  $v_\theta$ .
3. By looking back at the above derivations, you will see that the tangential velocity can be expressed as  $v_\theta = h/r$ .
4. Show Kepler's second law.

Neste side



## Keplers 2. og 3.lov

Tenk **fort** gjennom hvordan du kan gå frem for å løse deloppgave 1 og 3 fra oppgave 1B.2 under her (prosjektstudenter har en liknende oppgave i utfordring B1, del 2): Etter at du har tenkt, ta gjerne en titt på [denne videoen](#) for noen tips. Merk at det ikke er meningen at du skal løse oppgaven nå men finne din egen ide om hvordan du ville startet på hver av deloppgavene. Ikke se på videoen før du har egne forslag.

**Exercise 1B.2** The scope of this problem is to deduce Kepler's third law. Again we will solve this problem step by step:

1. In the previous problem we found an expression for  $dA/dt$  in terms of a constant. Integrate this equation over a full period  $P$  and show that

$$P = \frac{2\pi ab}{h}$$

(Hint: the area of an ellipse is given by  $\pi ab$ ).

2. Use expressions for  $h$  and  $b$  found in the text to show that

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3 \quad (26)$$

3. This expression obtained from Newtonian dynamics differs in an important way from the original expression obtained empirically by Kepler (equation 4). How? Why didn't Kepler discover it?

Neste side





Spesielt den siste oppgaven her er **svært** viktig!

## Keplers 3.lov

Du utledet i oppgaven at Keplers versjon av sin 3.lov er noe gal. Det er svært viktig å bruke den riktige formelen i alt som vi gjør i dette kurset her. Den riktige formelen (som også er i SI-enheter) er gitt ved

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)} a^3$$

Vi ser at begge massene er med på å bestemme forholdet mellom omløpsperiode og store halvakse i en ellipsebane!



Før vi går videre, ta en nøye titt på første deloppgave av oppgave 1B.3:

### Exercise 1B.3

1. How can you measure the mass of a planet in the solar system by observing the motion of one of its satellites? Assume that we know only the semimajor axis and orbital period for the elliptical orbit of the satellite around the planet. **Hint 1:** Kepler's third law (the exact version that you deduce in exercise 1B.2). **Hint 2:** You are allowed to make reasonable approximations.

Tenk i maks 2-3 minutter om du ser en måte å løse den på? Hvis ikke, ta det etter forelesningen.

Neste side

[Forrige side](#)[side 12 av 42](#)[2-legemeproblemet igjen](#)[FORUM](#)

Men stopp en hal! Har vi egentlig løst 2-legemeproblemet? Vi har løst problemet i tilfellet hvor vi setter oss på  $m_1$  og ser på bevegelsen til  $m_2$  som da blir en ellipsebane med  $m_1$  i det ene brennpunktet. Men hva hvis vi setter oss på  $m_2$ ? Likningene vi får blir jo de samme, så løsningen blir den samme med massene byttet om,  $m_2$  står i et brennpunkt til ellipsebanen som  $m_1$  følger. Men hva hvis vi nå befinner oss et punkt langt vekk og ser legemene på avstand mens vi ikke befinner oss i referansesystemet til noen av dem? Hvordan vil da  $m_1$  og  $m_2$  bevege seg? Tenk deg godt om før du går til neste side...

[Neste side](#)

Forrige side

# Nytt tema:

## Massesenter

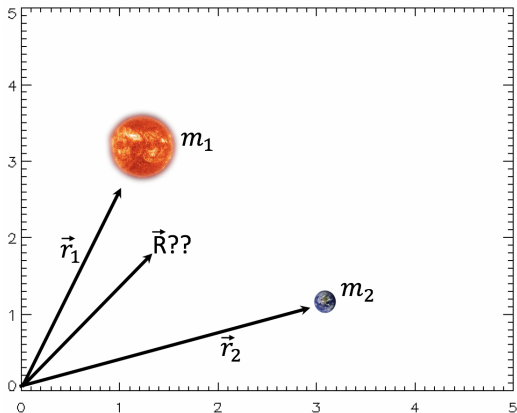
Dette temaet fortsetter frem til side ?? av 42.

Vi skal repetere noe du kjenner godt, og bruke dette til å gjøre det fulle 2-legeme-problemet litt enklere å løse.

Massesenter, kan godt trenge en kjapp repetisjon ja...



For å finne svaret, må vi repetere et uttrykk som du allerede kjenner: *massesenter*.



Hvis vi kjenner posisjonene  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  på figuren, hvordan kan vi da finne posisjonen  $\vec{R}$  til massesenteret? Du kan bruke massene  $m_1$  og  $m_2$ . Hva er formelen?

Trykk her når du har frisket opp massesenterdefinisjonen!



Stemmer! Vi må rett og slett ta midlet mellom de to posisjonene, vektet med massene:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Men hva hvis vi nå skal finne massesenteret  $\vec{R}$  til en galakse og vi kjenner posisjonene  $\vec{r}_i$  til alle  $N$  stjernene med masse  $m_i$  i galaksen? (anta at det ikke finnes annen masse i galaksen). Hvordan kan vi generalisere uttrykket vårt??

Diskuter og trykk her når du har funnet ut av det



Stemmer! Vi må rett og slett ta midlet mellom de to posisjonene, vektet med massene:

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Men hva hvis vi nå skal finne massesenteret  $\vec{R}$  til en galakse og vi kjenner posisjonene  $\vec{r}_i$  til alle  $N$  stjernene med masse  $m_i$  i galaksen? (anta at det ikke finnes annen masse i galaksen). Hvordan kan vi generalisere uttrykket vårt??

Diskuter og trykk her når du har funnet ut av det

Vi bare midler på samme måte over alle objekter:

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

Her er  $M$  summen over alle massene. Pass på at du har denne friskt i minne videre...

Neste side



For å kunne finne bevegelsen til både  $m_1$  og  $m_2$  skal vi nå utlede en utvidelse av Newtons 2.lov som gjelder for et mangelegemesystem. Anta igjen at vi har galaksen vår med  $N$  stjerner og at det mellom disse kun virker gravitasjonskrefter  $\vec{f}_{ij}$  (krafta på legeme  $i$  fra legeme  $j$ ). I tillegg kan det virke en ekstern kraft  $\vec{F}_{\text{ext}}$  som virker likt på hele systemet, dvs. på alle objektene, f.eks. en annen galakse som trekker på galaksen. I

[denne videoen](#) blir du satt igang med utledningen av Newtons 2.lov på mangelegemesystemer.

Etter å ha sett videoen skal du nå se om du kan komme frem til et uttrykk av typen:

$$\vec{F} = \Sigma \Sigma \vec{f} + \vec{F}_{\text{ext}} = \Sigma m \vec{r}$$

og sett inn riktige indekser på krefter, masser, posisjonsvektorer og tidsderiverte. Pass spesielt på at summegrensene blir riktige! Bruk maks 5 minutter.





**Vi skal nå forenkle dette uttrykket:** Ved å bruke

- en av Newtons lover som sier noe om krefter som er lik hverandre, dette skal gi deg at et av leddene er 0
- massesenterdefinisjonen  $\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$

skal du vise at

$$\vec{F}_{\text{ext}} = M \ddot{\vec{R}}$$

som er Newtons 2.lov for mangelegemesystemer. Fikk du det til?

Hvis du er usikker, se på [denne videoen](#).

Før du går til neste side, prøv å si til hverandre med ord hva denne likningen sier. Ser du hva essensen er? **Neste side**



Hva hvis de eksterne kreftene på systemet er null?

Da er  $\ddot{\vec{R}} = 0$  og massesenteret har ingen akselerasjon! Massesenteret vil da kun bevege seg med konstant hastighet. Vi kan da dele bevegelsen til en stjerne i galaksen opp i

- bevegelsen til stjerna i forhold til massesenteret PLUSS
- bevegelsen til massesenteret

Hvis det ikke er noen ytre krefter så vil massesenterbevegelsen være enkel, konstant hastighet. Da trenger vi kun å finne bevegelsen til stjerna om massesenteret.

Dette hjelper oss med tolegemeproblemet vårt: vi trenger dermed kun å finne bevegelsen til de to legemene omkring deres felles massesenter.

Forrige side

# TID FOR KAFFEPAUSE!!!



Ut å strekke på bena. Inn med litt koffein...

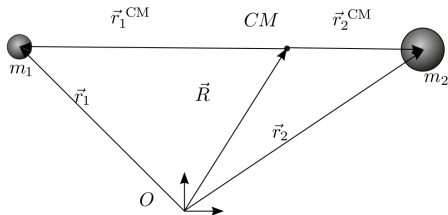
Ihvertfall 10 min...

I den fysiske forelesningen kommer vi noen få sider til før den andre dobbelttimen er over. Hvis du følger anbefalingene mine og idag begynte der du slapp på forrige forelesningsnotat, så tar du noen få sider til og gir deg for idag. Etter det skal det stå igjen ca. en halv dobbelttime fysisk forelesning.

Jeg lover, jeg har tatt pause og er klart til å fortsette



Her har vi situasjonen:



Fra et gitt origo  $O$  utenfor systemet så har vi posisjonsvektorene  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  som peker på de to legemene, samt  $\vec{R}$  som peker på massesenteret (CM, Center of Mass) til de to legemene. Vi er interessert i disse legemenes bevegelse i forhold til massesenteret (se forrige side hvis du er usikker på hvorfor!).

Da velger vi å flytte origo til massesenteret. Dette nye koordinatsystemet kaller vi massesentersystemet.

Posisjonsvektorene  $\vec{r}_1^{CM}$  og  $\vec{r}_2^{CM}$  fra det nye origo er tegnet inn i figuren.

Men hva med  $\vec{R}^{CM}$ . Hva er posisjonsvektoren til massesenteret fra dette nye origo?

Diskuter og tenk deg nøye om (1-2 min) før du ser på svaret på neste side. Svaret er kanskje enklere enn du tror...

Neste side



Siden posisjonen til massesenteret i massesenteret er i origo selv:  $\vec{R}^{CM} = 0!$

Nå til litt regning. Finn frem papir og blyant og forbered deg på å leke litt med likninger (ikke mye, gjør du det riktig så er dette fort gjort).

## Legemenes bevegelse om massesenteret

Bruk nå massesentersystemet (sjekk forrige side hvis du har glemt ...), og **sett inn i definisjonen av massesenteret for  $\vec{R}$** . Gjør følgende substitusjoner:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \text{og} \quad \hat{\mu} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

MERK at vi har fjernet CM fra symbolene, i fortsettelsen så betyr  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  egentlig alltid  $\vec{r}_1^{CM}$  og  $\vec{r}_2^{CM}$ ! Den første likningen her har vi brukt helt fra starten av:  $\vec{r}$  var vektoren som pekte fra  $m_1$  til  $m_2$ . Den andre er definisjonen av *reduisert masse*. Den er mest for å gjøre likningene pene, men vi skal snart se at det også har en tolkning. Fra dette skal du komme frem til et uttrykk for  $\vec{r}_1$ . Altså: (1) du skal ta utgangspunkt i definisjon av massesenteret som nå er i origo, og (2) deretter bli kvitt  $\vec{r}_2$  ved hjelp av uttrykket over og få inn  $\mu$ . Hva får du?

$$\vec{r}_1 = \hat{\mu} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1}{\hat{\mu}} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1}{\hat{\mu}} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{\hat{\mu}} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{\hat{\mu}}{m_1} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = -\frac{\hat{\mu}}{m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_1}{m_2} \hat{\mu} \vec{r}$$



Det ble galt! Prøv igjen. Husk at  $\vec{R} = 0$  i massesentersystemet. Og du kan bli kvitt  $\vec{r}_2$  med uttrykket for  $\vec{r}$ . Da står du igjen med en likning med kun  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}$  som du løser for  $\vec{r}_1$ . Og til slutt erstatter du  $m_1$  eller  $m_2$  med  $\hat{\mu}$ , du vil nå ganske greit se hvordan  $\hat{\mu}$  kommer inn her.

Hjelper det deg? Prøv igjen med dette som utgangspunkt!

(HUSK at vi nå har fjernet CM fra alle symbolene for å gjøre skrivingen lettere, alle vektorer har nå origo i massesenteret.)



**STEMMER!** Nå som du har funnet  $\vec{r}_1$ , så kan du se om du klarer å vise at

$$\vec{r}_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2} \vec{r}$$

Vi har dermed banene til de to legemene om massesenteret:

$$\vec{r}_1 = -\frac{\hat{\mu}}{m_1} \vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2} \vec{r} \quad (2)$$

Men vi ser enda ikke hva slags form banen har. La oss ta absoluttverdiene til disse likningene. Bruk deretter det du vet om  $r = |\vec{r}|$  (Jepp, dette er den samme som vi utledet i forrige forelesning, det er jo avstanden mellom de to objektene). Ser du nå hva slags baner de to legemene får om

massesenteret (anta at det er bundet)?

JA, kult, nå ser jeg det!

Kanskje det, men jeg er litt usikker



La oss først se hvordan likningene blir hvis vi tar absoluttverdi:

$$|\vec{r}_1| = r_1 = \frac{\hat{\mu}}{m_1} |\vec{r}| = \frac{\hat{\mu}}{m_1} r \quad (3)$$

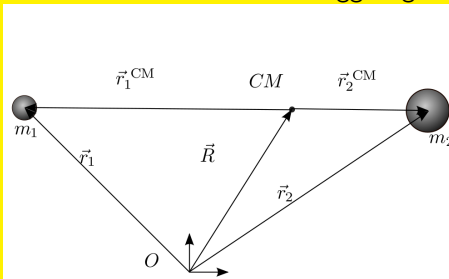
$$|\vec{r}_2| = r_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2} |\vec{r}| = \frac{\hat{\mu}}{m_2} r \quad (4)$$

Her er  $r_1$  og  $r_2$  avstanden til de to legemene fra massesenteret, ser du det? Disse avhenger jo av en vinkel  $f$  ettersom de går i bane rundt massesenteret. I tillegg så fant vi jo i forrige forelesning et uttrykk for  $r$  som inneholder en vinkel  $f$ . Da skulle du få uttrykk for  $r_1$  og  $r_2$  som inneholder vinklen  $f$ . Hjelper det deg?





Fant du det? Innser du at begge legemene går i ellipser omkring massesenteret?



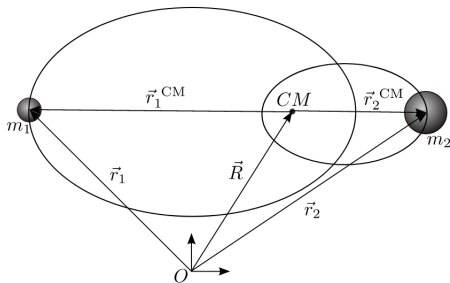
$$\vec{r}_1 = -\frac{\hat{\mu}}{m_1} \vec{r} \quad (5)$$

$$\vec{r}_2 = \frac{\hat{\mu}}{m_2} \vec{r} \quad (6)$$

**(MINNER IGJEN OM at vi nå har fjernet CM fra alle symbolene for å gjøre skrivingen lettere, alle vektorer har nå origo i massesenteret slik at  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$  tilsvarer  $\vec{r}_1^{CM}$  og  $\vec{r}_2^{CM}$  på figuren.)** Ser du at ved å ta absoluttverdien på begge sider her, så har du likningene for  $r_1(f)$  og  $r_2(f)$  som altså er lengdene av vektorene  $\vec{r}_1$  og  $\vec{r}_2$ . Disse viser altså banene til  $m_1$  og  $m_2$  som funksjon av en gitt vinkel  $f$ . Mens  $r$  (eller egentlig  $r(f)$ ) som står på høyre side i likningen er lengden  $\vec{r}$  som vi utledet i forrige forelesning, altså banen til  $m_2$  omkring  $m_1$ . Hvis denne er en ellipsebane ser du da at også  $r_1(f)$  og  $r_2(f)$  blir likninger for ellipser med massesenteret som brennpunkt?



Hva er de store halvaksene  $a_1$  og  $a_2$  til disse to ellipsene? Og hva er eksentrisiteten  $e$ ?? Uttrykk svaret ved hjelp av massene og egenskapene til ellipsen som vi så på tidligere: nemlig ellipsebanen som det ene objektet har rundt det andre. Ved å sammenlikne uttrykkene for  $r_1$  og  $r_2$  som funksjon av  $f$  som du nå har funnet, og sammenlikner med formelen for ellipse, så bør dette falle rett ut.



Jeg har tenkt og tror jeg har svaret

Hvis du ikke har svaret, må du spørre foreleser/gruppelærer før du går videre. Det er veldig viktig at du har dette klart for deg nå!



La oss først klare opp i begreper her, viktig at du har oversikt:

- Vektoren  $\vec{r}$  peker fra det ene legemet til det andre. Lengden  $r(f)$  av denne vektoren som avhenger av vinkelen  $f$  som definert tidligere utgjør ellipsebanen til det ene legemet omkring det andre. Denne ellipsebanen har store halvakse lik  $a$  og eksentrisitet  $e$ . **Merk at sett fra referansesystemet til et av legemene (systemet der det ene legemet står i ro), vil man se at det andre legemet går i ellipsebane rundt det første. Mens sett fra massesentersystemet vil man se at begge legemene går i ellipsebaner omkring massesenteret som vist på figur på forrige side. Klarer du å se dette for deg?**
- Vektoren  $\vec{r}_1$  peker fra massesenteret ut til legeme  $m_1$ . Lengden  $r_1(f)$  av denne gir oss ellipsebanen omkring massesenteret med store halvakse  $a_1$  og samme eksentrisitet  $e$  som banen til et legeme om det andre.
- Vektoren  $\vec{r}_2$  peker fra massesenteret ut til legeme  $m_2$ . Lengden  $r_2(f)$  av denne gir oss ellipsebanen omkring massesenteret med store halvakse  $a_2$  og samme eksentrisitet  $e$  som banen til et legeme om det andre.

Jeg har tenkt og tror jeg har svaret



Når vi setter inn for  $r$  i uttrykket for  $r_1$  fikk vi

$$r_1 = \frac{\hat{\mu}}{m_1} \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} = \frac{\hat{\mu}a}{m_1} \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

Hvis vi kaller  $a_1 = \frac{\hat{\mu}a}{m_1}$  så får vi

$$r_1 = \frac{a_1(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

som er en ellipse med store halvakse  $a_1$  og eksentrisitet  $e$  (som var samme eksentrisitet som vi hadde i uttrykket for  $r$ ). Det blir helt tilsvarende for  $r_2$ :

$$r_2 = \frac{a_2(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

med  $a_2 = \frac{\hat{\mu}a}{m_2}$

Neste side



En siste lite utfordring før vi går over til siste tema på del 1B. Klarer du å vise at

$$a_1 + a_2 = a?$$

Her kommer du til å trenge definisjonen av  $\hat{\mu}$  (ikke bruk mer enn 2-3 min her, spør hvis du sitter fast) Før du går over til siste tema, ta en liten pause, jogg en tur rundt Blindern, stup kråke 10 ganger på gressplenene ved Frederikke. Ikke gå videre før du har gjort alt det!

Forrige side

# Nytt tema:

**Energi og type kjeglesnitt**

Dette temaet fortsetter frem til side ?? av 42.

Vi skal gjøre noen energibetraktninger og finne noen svært viktige resultater.

Å ja?



Så var vi kommet til siste tema her. Vi hintet allerede om det tidligere:

Hva avgjør om et objekt følger en ellipsebane, parabelbane eller hyperbelbane? Og hva avgjør parameterene  $a$  og  $e$  til denne banen?

Vi har allerede innsett at ellipsebaner betyr at objektet er gravitasjonelt bundet siden det holder seg i bane rundt det andre objektet, mens for parabel- og hyperbelbaner så er det ikke lenger gravitasjonelt bundet, objektet bare 'sneier forbi'. Det må vel bety at totalenergien er viktig her: er den potensielle gravitasjonsenergien større eller mindre enn den kinetiske energien? La oss sette opp energien til systemet vårt. Vi tar igjen perspektivet fra  $m_1$  og ser på banen som  $m_2$  lager rundt  $m_1$ :

$$E = \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 - G\frac{m_1m_2}{r}$$

der  $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ , altså den relative hastigheten til  $m_2$  i forhold til  $m_1$  siden  $\vec{v}$  er den deriverte av posisjonsvektoren  $\vec{r}$  som peker fra  $m_1$  til  $m_2$ . Er du enig i at dette er uttrykket for energien til systemet?

YES, absolutt, sånn må det være!

Njaaa, jeg er litt usikker



Er du **HELT** sikker på at dette er riktig uttrykk for energien?

$$E = \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 - G\frac{m_1m_2}{r}$$

JA, jeg sa jo det jo!

Njaaa, nå ble jeg litt i tvil her likevel





Det er **FEIL**

$$~~E = \frac{1}{2}m_2\vec{v}^2 - G\frac{m_1m_2}{r}~~$$

Tenk deg godt om her...kan du se hva som er feil?

( du trenger ikke finne hva som er riktig, bare innse hva som er feil)



Du hadde god grunn til å tvile, det er nemlig **FEIL**

~~$$E = \frac{1}{2} m_2 \vec{v}^2 - G \frac{m_1 m_2}{r}$$~~

Tenk deg godt om her...kan du se hva som er feil?

( du trenger ikke finne hva som er riktig, bare innse hva som er feil)



Har du virkelig tenkt deg godt om (2 min) og innsett hva som er feilen med uttrykket vårt?

Ja

Tja



Har du virkelig tenkt deg godt om (2 min) og innsett hva som er feilen med uttrykket vårt? **Ja** **Tja**

I uttrykket på forrige side, brukte vi referansesystemet til legeme  $m_1$ . Vi kunne dermed (ganske riktig) anta at  $m_1$  står i ro og kun se på hastigheten til  $m_2$  i forhold til  $m_1$ . **MEN** legeme  $m_1$  er ikke et inertialsystem! Systemet er akselerert (pga. gravitasjonspåvirkning fra  $m_2$ ). Vi vet jo at  $m_1$  går i ellipsebane omkring massesenteret og dermed blir akselerert. Uttrykket vårt for energi er dermed ikke en bevart størrelse! Dette gjelder kun i inertialsystemer. Vi må derfor finne oss et inertialsystem å regne fra. **Hvilket referansesystem bør vi bruke når vi beregner energien? (svaret står noen sider tilbake)**

**Trykk her når du har funnet svaret!**



Har du virkelig tenkt deg godt om og innsett hva som er feilen med uttrykket vårt?

Ja

Tja

I uttrykket på forrige side, brukte vi referansesystemet til legeme  $m_1$ . Vi kunne dermed (ganske riktig) anta at  $m_1$  står i ro og kun se på hastigheten til  $m_2$  i forhold til  $m_1$ . **MEN** legeme  $m_1$  er ikke et inertialsystem! Systemet er akselerert (pga. gravitasjonspåvirkning fra  $m_2$ ). Vi vet jo at  $m_1$  går i ellipsebane omkring massesenteret og dermed blir akselerert. Uttrykket vårt for energi er dermed ikke en bevart størrelse! Dette gjelder kun i inertialsystemer. Vi må derfor finne oss et inertialsystem å regne fra. **Hvilket refereansesystem bør vi bruke når vi beregner energien? (svaret står noen sider tilbake)**

Trykk her når du har funnet svaret!

Akkurat ja, massesentersystemet!

Hvis vi bruker Newtons 2.lov på mangelegemesystemer og antar at vi ikke har eksterne krefter, så er massesenteret ikke akselerert, det er et inertialsystem.

Neste side

[Forrige side](#)



[side 29 av 42](#)

[Energi og type kjeglesnitt](#)

[FORUM](#)

Skriv opp uttrykket for total energi i massesentersystemet.

Sånn, da var det gjort!

Forrige side



side 29 av 42

Energi og type kjeglesnitt

FORUM

Skriv opp uttrykket for total energi i massesentersystemet.

Sånn, da var det gjort!

Var det dette du fikk:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\vec{v}_1^{\text{CM}})^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{v}_2^{\text{CM}})^2 - G\frac{m_1m_2}{r}$$

Isåfall var det riktig!

Neste side



Da har du allerede fått god hjelp til første deloppgave av oppgave 1B4:

**Exercise 1B.4** You need to have read also section 6 in order to solve this problem.

1. Show that the total energy of the two-body system in the center of mass frame can be written as

$$E = \frac{1}{2}\hat{\mu}v^2 - \frac{GM\hat{\mu}}{r},$$

where  $v = |d\vec{r}/dt|$  is the relative velocity between the two objects,  $r = |\vec{r}|$  is their relative distance,  $\hat{\mu}$  is the reduced mass and  $M \equiv m_1 + m_2$  is the total mass. **Hint:** make the calculation in the center of mass frame and use equation (24) and (25).

Ser du hvordan den kan løses? Hvis ikke kan du få hjelp på gruppene. Du trenger ikke gjøre det nå, men ta en titt på de neste to deloppgavene

2. Show that the total angular momentum of the system in the center of mass frame can be written

$$\vec{P} = \hat{\mu}\vec{r} \times \vec{v},$$

3. Looking at the two expressions you have found for energy and angular momentum of the system seen from the center of mass frame: Can you find an equivalent two-body

problem with two masses  $m'_1$  and  $m'_2$  where the equations for energy and momentum will be of the same form as the two equations which you have just derived? What are  $m'_1$  and  $m'_2$ ? If you didn't understand the question, here is a rephrasing: If you were given these two equations without knowing anything else, which physical system would you say that they describe?

Hvis du sliter med å se hva som er svaret på tredje deloppgave, ta en titt på [denne videoen](#).





Men det vi var interessert i nå var å se hvordan energien kan avgjøre hvordan banen blir. For å gjøre det trenger vi først å repetere et par ting. Husker du hvordan vi fant hastighetsvektoren  $\vec{v}$ ? Og husker du hva svaret var? (det bør du). Merk igjen, hastighetsvektoren  $\vec{v}$  er den deriverte av posisjonsvektoren  $\vec{r}$  som peker fra det ene legemet til det andre. Hastighetsvektoren  $\vec{v}$  er dermed hastigheten til det ene legemet i forhold til det andre. Hvordan gjorde man nå det igjen?

Jeg husker/har repetert hvordan det var



Men det vi var interessert i nå var å se hvordan energien kan avgjøre hvordan banen blir. For å gjøre det trenger vi først å repetere et par ting. Husker du hvordan vi fant hastighetsvektoren  $\vec{v}$ ? Og husker du hva svaret var? (det bør du). Merk igjen, hastighetsvektoren  $\vec{v}$  er den deriverte av posisjonsvektoren  $\vec{r}$  som peker fra det ene legemet til det andre. Hastighetsvektoren  $\vec{v}$  er dermed hastigheten til det ene legemet i forhold til det andre. Hvordan gjorde man nå det igjen?

Jeg husker/har repetert hvordan det var

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

Husker du hvorfor  $v_\theta$  ser slik ut rent geometrisk? (**frisk opp!**). Og så trenger vi en ting til, nemlig posisjonen  $r(f)$  som funksjon av vinkel  $f$  (hvordan var nå vinkelen  $f$  definert?, det bør du repetere nå!).

$$r = \frac{p}{1 + e \cos f}$$

hvor formen på  $p$  og verdien på  $e$  avgjør formen på banen.

Neste side



Kjapp repetisjon før vi setter igang med utledningen som gir oss sammenheng mellom energi og baneformen:

Vi har

$$r(f) = \frac{p}{1 - e \cos f}$$

der

- parabler har  $e = 1$  og  $p = 2a$
- hyperbler har  $e > 1$  og  $p = -a(1 - e^2)$
- ellipser har  $e < 1$  og  $p = a(1 - e^2)$



Da har du alt du trenger for neste utledning som du finner [i denne videoen her](#). I videoen så kommer vi frem til følgende sammenheng mellom energi og  $p$ -en i uttrykket for  $r$ :

$$E = \frac{\hat{\mu}m}{2p}(e^2 - 1)$$

og husk igjen at  $m = G(m_1 + m_2)$ . Her ser vi at hvis totalenergien er  $E = 0$ , dvs. at den potensielle og kinetiske er like store med motsatt rettet fortegn, så **må**  $e = 1$  på høyresiden. Dette tilsvarer en parabelbane (se forrige side). Hvis vi nå skriver om så har vi at:

$$p = \frac{\hat{\mu}m}{2E}(e^2 - 1)$$

Vi vet at  $p$  må være en positiv størrelse (slik at  $r$  er en positiv størrelse, se uttrykket for  $r(f)$ ). Hvis energien  $E$  her er positiv (kinetisk energi større enn potensiell), hva slags verdier kan  $e$  ta for at  $p$  blir positiv? Og hvis energien  $E$  er negativ? (mer potensiell enn kinetisk) Hva slags verdier må  $e$  da ta?

Tenk deg nøye om før du...

... går videre til neste side



Vi hadde

$$p = \frac{\hat{\mu}m}{2E}(e^2 - 1)$$

**slik at hvis  $E > 0$  så må  $e > 1$  for at  $p$  skal være positiv. Da får vi en hyperbelbane. Og hvis  $E < 0$  så få vi helt tilsvarende  $e < 1$  og vi har en ellipsebane.** Det gir mening siden ellipsebanen er bundet, og negativ energi betyr at potensiell gravitasjonsenergi 'vinner' over kinetisk energi. Og omvendt for hyperbelbane, der 'vinner' den kinetiske energien og objektene er dermed ikke bundet som i hyperbelbanen. Vi ser også at parabelbanen er akkurat grensetilfellet mellom disse to. **Hvordan finner vi så  $a$  og  $e$  til banen? Anta her en ellipsebane,** da har vi  $p = a(1 - e^2)$ .

Insatt i likningen gir det oss

$$a = -\frac{\hat{\mu}m}{2E}$$

At energien bestemmer hvor stor ellipsen er, har mening. Men hva med  $e$ ? Det må vel ha noe med hastighetskomponentene å gjøre? Hvor mye hastighetene er rettet radielt eller tangensielt? Kan spinnet ha en rolle her? **Neste side**



I videoen på forrige side utledet vi et viktig mellomresultat:

$$h = \sqrt{mp}$$

en sammenheng mellom spinnet og  $p$ . Men her avhenger  $p$  av  $a$  som vi finner fra energien, samt eksentrisiteten  $e$ . Her overlates du til deg selv for å finne uttrykket for  $e$  gitt at du kjenner spinnet til objektet.

Da har vi kommet til veis enda i dette kapittelet. Hvis du nå har en satelitt sin posisjon og hastighetskomponenter samt massen til satelitten og planeten så kan du øyeblikkelig beregne både formen på banen samt baneparameterene og fullstendig bestemme hvordan banen blir seende ut. Dette kommer du til å få bruk for i en del oppgaver, spesielt dere som tar prosjekt!

Forrige side



side 35 av 42

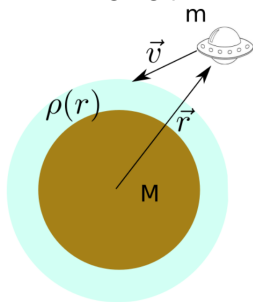
Før vi avslutter med litt tips og hjelp til koding av innleveringsoppgaven, må du teste/repetere at du har forstått stoffet vi har gått gjennom. Det gjør du på [dette skjemaet her](#).

Ikke trykk her før skjemaet har blitt sendt inn



## Energi og type kjeglesnitt

Men det blir også mye **numerisk baneberegning** som vi snakket om helt i starten av forrige forelesning mens **de analytiske uttrykkene vi har utledet skal hjelpe oss med det numeriske**. Vi går tilbake til utgangspunktet vårt:



Vi skal

lande satellitten trygt. Her er det klart at du i den numeriske baneberegningen

også trenger å ta med friksjonskreftene når du kommer inn i atmosfæren. Dette er forklart nærmere i oppgave 1B8. Men når du å skal velge hvilken hastighet og retning du vil sende ut landersonden din ut fra modersonden med, gitt posisjonen din i banen, så har du nå fått god hjelp: ved å beregne energien og spinnet du får ved en gitt utgangshastighet så vet du nøyaktig hva slags bane du får. Kanskje strategien din er å lage en veldig avlang (eksentrisk) ellipsebane som sneier atmosfæren din ved hver nærpasering? Isåfall vet du nå hva du må gjøre med spinnet for å få en store  $e$ . Eller hvis du har en helt annen strategi: nå kan du forutsi hva slags bane du får frem til du begynner å treffe atmosfæren.

Neste side



Forrige side

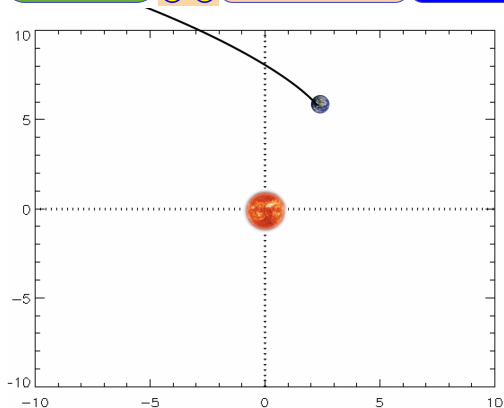
# Nytt tema:

## Tips til koding

Dette temaet fortsetter frem til side ?? av 42.

Som du nok har oppdaget så blir det alltid noen feil når man koder. Og det kan ta innmari lang tid å finne feilen. Dermed kommer igjen noen tips til feilsøking...

Ja, kjekt å ha!



La oss helt til slutt snakke litt om debugging. Det kommer helt sikkert til å gå galt når du programmerer banen første gang. Her ser du et veldig typisk resultat (jordkloden indikerer startposisjon).

**Spørsmålet er, hva gjør du nå???**

Stirrer på koden til du finner feilen

Får noen andre til å stirre på koden

Bruker fysikk til å finne i hvilken del av koden feilen befinner seg.

[Forrige side](#)



side 38 av 42

[Tips til koding](#)

[FORUM](#)

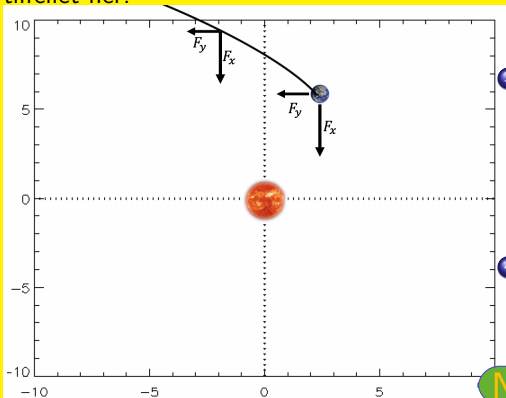
Det er en veldig god ide hvis du har masse fritid og liker å bruke laaaaaaaaang tid til å løse oppgaver.

Rådene på neste side er nok da ikke for deg, men [Trykk her](#) hvis du likevel har lyst til å få noen tips til hvordan du kan spare masse tid, så kan du jo bruke all tiden du har til overs på andre oppgaver?

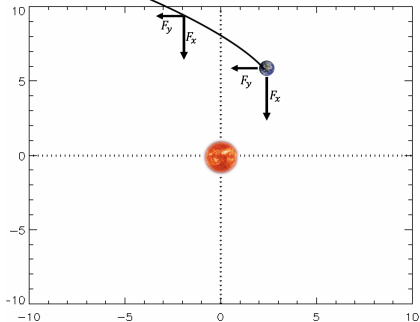


## Tips til koding

Det er en utmerket ide å bruke litt fysikk når man gjør debugging, husk dette også for de kommende delene i kurset. Du kan spare **masse** tid på debugging hvis du bare finner ut hvor feilen ligger. La oss se på noen mulige strategier i dette tilfellet her.



- 1 Hva er energien din i initialposisjonen? Er  $E > 0$ ? Da er det enten noe feil med initialhastigheten din, eller du skal ha en hyperbelbane.
- 2 Lag en liste med energien i hvert tidssteg. Endrer energien seg? (det skal den ikke hvis du kun har gravitasjonskraft)
- 3 Hvis energien endrer seg må kraften være gal. Sjekk komponentene  $F_x$  og  $F_y$ . Peker de riktig, dvs. har de riktig fortegn? (se figur)
- 4 Sjekk kraft-komponentene både i initialposisjonen og noen tidssteg senere (se figur)



**Og sist, men ikke minst:** Sjekk størrelsen på kraftvektoren. **Bruk kalkulator** (dette er viktig slik at du bruker noe helt annet en koden din) til å beregne totalkrafta i initialposisjonen. Beregn først lengden av initialposisjonsvektoren  $\vec{r}$  (også med kalkulator) og så størrelsen på krafta.

Sammenlikn krafta med det du finner i koden (absoluttverdi av kraftvektoren). Er den feil, sjekk også om du har beregnet lengden av posisjonsvektoren riktig. Hvis alt er riktig, gjenta dette en del tidssteg senere, er krafta enda riktig? Her vil du veldig ofte finne at du beregner krafta feil i koden. Ibland kan det være vanskelig å oversette formler riktig til python, derfor er denne uavhengige kontrollen på papir/kalkulator veldig viktig.

**Følger du prosedyren på denne og foregående side så er det nesten helt sikkert at du klarer å finne feilen selv!**

Forrige side 😊 😞 Gratulerer, da er del 1B overstått! Du bør nå kunne:

- beskrive de forskjellige banene som er løsninger av to-legeme-problemet
- kunne beregne slike baner både analytisk og numerisk
- vite hvilke parametere som beskriver slike baner og vite hvordan finne slike parametere
- kunne regne med Newtons lover på vektorform
- og dermed kunne regne med posisjonsvektorer, hastighetsvektorer og kraftvektorer dekomponert både i kartesiske enhetsvektorer men også i radielle og tangensielle enhetsvektorer
- kunne beskrive og beregne på baner i et tolegemesystem sett fra massesentersystemet
- kunne beregne anguklærmoment og energi i et slikt to-legemesystem

Det anbefales nå at du sjekker **kortvarsoppgavene** til del 1B for å kontrollere at du har forstått stoffet. Kan du svare på disse, blir det lettere å bruke kunnskapen din i oppgavene/prosjektet. Noen av disse kommer på eksamen. Trykk nå gjerne på smilefjesene og si meninga di om dette interaktive forelesningsnotatet. Spesielt er jeg interessert i å vite hvor lang tid du brukte og da hva du brukte mest tid på! All ris og ros mottaes med takk.