Aproximación.

(1).

- $f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\vec{a})}{\partial x_i}(x_i - a_i)$ • $f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})$

• $\vec{a} = (1,1)$ • $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$

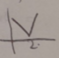
Polinomio de Taylor grado #1.

$1^2 - 1^2 + 2(1) + \left((2x+2)|_{\vec{a}} (x - a_1) + (-2y)|_{\vec{a}} (y - a_1) \right)$

$2 + [4(x-1) + (-2)(y-1)]$ $\quad z = 2 + 4x - 4 - 2y + 2$

$2 + [4(x-1) - 2(y-1)]$ $\quad$ Plano tangente. $= 4x - 2y$

(2)

Para el método de descenso al gradiente asumimos que $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y que es diferenciable y la función $f(x) = |x-2|$ es una función del tipo. 

que si bien es "diferenciable" no es una función suave y presenta problemas en le punto por su cambio tan abrupto por lo que no es posible usar el método del descenso al gradiente para minimizar la función.

lineal.

(1) • $x_{n+1} = 4x_n - x_n^2$ $\quad x_1 = 4x_0 - x_0^2 = 16\,sen^2\theta - 16\,sen^4\theta$

• $x_0 = 4\,sen^2\theta$.

$= 16\,sen^2\theta\,(1 - sen^2\theta)$

$= 16\,sen^2\theta\cos^2\theta$.

$= (4\,sen\theta\cos\theta)^2$. $= (2\,sen 2\theta)^2 = 4\,sen^2 2\theta$

$x_2 = 4x_1 - x_1^2 = 4(4\,sen^2 2\theta) - (4\,sen^2 2\theta)^2 = 16\,sen^2 2\theta - 16\,sen^4 2\theta$.

$= 16\,sen^2 2\theta\cos^2 2\theta = (4\,sen 2\theta\cos 2\theta)^2 = (2\,sen 4\theta)^2 = 4\,sen^2 4\theta$

Entonces x_n tiene la forma $4\,sen^2(2^n\theta)$ de modo que

$x_{n+1} = 4(4\,sen^2(2^n\theta)) - 16\,sen^4(2^n\theta)$ $\quad$ de la id trig. $sen\theta\cos\theta = \frac{1}{2} sen 2\theta$

$= [4\,sen(2^n\theta)\cos(2^n\theta)]^2 = 4\,sen^2(2^{n+1}\theta)$

donde $\theta \in [0, \pi/2]$ para cubrir el intervalo completo

• $x_{n+1} = 4x_n - 4x_n^2$ $\quad x_0 = sen^2\theta$.

$x_1 = 4x_0 - 4x_0^2 = 4\,sen^2\theta - 4\,sen^4\theta = 4\,sen^2\theta(1 - sen^2\theta) = 4\,sen^2\theta\cos^2\theta = (2\,sen\theta\cos\theta)^2$

$= sen^2 2\theta$

$x_2 = 4x_1 - 4x_1^2 = 4\,sen^2 2\theta - 4\,sen^4 2\theta = 4\,sen^2 2\theta\cos^2 2\theta = sen^2(4\theta)$

Entonces x_n toma la forma $sen^2 2^n\theta$ de modo que. $\quad$ de la id trig. $sen\theta\cos\theta = \frac{1}{2} sen 2\theta$

$x_{n+1} = 4\,sen^2 2^n\theta - 4\,sen^4 2^n\theta = 4\,sen^2 2^n\theta\cos^2 2^n\theta = sen^2 2^{n+1}\theta$

---

(5). $x_i = \dfrac{b_i - \sum_{j=0}^{i-1} A_{ij} x_j}{A_{ii}}$ $\quad$ sustitución hacia adelante.

Para hacer sustitución hacia adelante. tenemos un sistema del tipo $Ax = b$ donde A puede expresarse como LU la multiplicación de una matriz triangular superior y una matriz triangular inferior.

[0 0 0 ... u_{nn}]

Por lo que primero resolvemos $Ly = b$ y luego $Ux = y$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix}$ Si A es una matriz de $n \times n$ y además es invertible tenemos que por consecuencia existirán n pivotes.

Si supongo $A = LU$ entonces el sistema $Lx = 0$

[1 ... 0 ... 0] [x_1] [0]

$$\begin{bmatrix} a_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n1} & \cdots & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo que L es invertible, en particular las matrices L y U son únicas. Supongamos que si existen otras L_2 y U_2

$$U_1U_2^{-1} = (L_1^{-1}L_1)(U_1U_2^{-1}) = L_1^{-1}(L_1U_1)U_2^{-1} = L_1^{-1}(L_2U_2)U_2^{-1} = (L_1^{-1}L_2)(U_2U_2^{-1}) = L_1^{-1}L_2$$

tal que $U_1U_2^{-1} = L_1^{-1}L_2 = I$ de lo que se deduce que $U_1 = U_2$ y $L_1 = L_2$. Por lo que se demuestra que LU es único.

Para el sistema $Ax = b$ como L es invertible existe un vector único tal que $Ly = b$ y con U como también es invertible existe un vector único x tal que $Ux = y$

Entonces

$$Ax = L(Ux) = Ly = b.$$

De la sustitución hacia ~~adelante~~ atrás tenemos que $Ux = b$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & \end{array}\right]$$ matriz aumentada.

~~Entonces en la fila n la...~~

En la sustitución hacia adelante encontramos.

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ l_{21} & l_{22} & \vdots & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & & & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} & b_n \end{array}\right]$$ } matriz aumentada

De la matriz aumentada tenemos que la fila depende de b_1

$l_{11}x = b_1$ y con ello procedemos de abajo en adelante

$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$

- $l_{21}x + l_{22}x_2 = b_2$

$$x_2 = \frac{b_2 - l_{21}x_1}{l_{22}}$$

de estas 2 tenemos que el proceso siempre será

$$l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 \cdots l_{ni}x_i = b_i$$

$$x_i = \frac{b_i - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots\cdots l_{ni-1}x_{i-1}}{l_{ni}}$$

- $n = i$ entonces

$$x_i = \frac{b_n - l_{n1}x_1 - l_nx_2 - \cdots - l_{ni-1}x_{i-1}}{l_{ii}}$$

$$x_i = \frac{b_n - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}x_k}{l_{jj}}$$

En el caso de la sustitución hacia atrás $Ux = b$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \cdots & u_{nn} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & \end{array}\right]$$

- $u_{nn}x_n = b_n$

$x_n = b_n / u_{nn}$

- $u_{nn-1}x_{n-1} + u_{nn}x_n = b_{n-1}$

$$x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - u_{n-1}x_n}{u_{nn-1}}$$

Deducimos que para b_i

~~$x_j u_{jj} + u_{jk}x_k$~~

$$x_i u_{ii} + u_{in} x_n + u_{in-1} x_{n-1} \cdots\cdots = b_j$$

$$x_i = \frac{b_j - u_{in} \overbrace{x_n - u_{in-1}}^{\Sigma} x_{n-1} \cdots}{u_{ii}}$$

$$x_i = \frac{b_j - \sum_{k=n}^{j-1} u_{jk} x_k}{u_{jj}}$$