Parcial I

Wednesday, September 6, 2023 9:09 PM

(g) **Theoretical**: haga todos los desarrollos teóricos para encontrar los coeficientes de la Ecuación (3.84).

$f(x) \cong f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1).$

$$\cong f(x_0) + f[x_0,x_1]\,x - f[x_0,x_1]\,x_0 + f[x_0,x_1,x_2]\,(x^2 - x x_1 - x x_0 + x_0 x_1)$$

$$\cong f(x_0) + f[x_0,x_1]\,x - f[x_0,x_1]\,x_0 + f[x_0,x_1,x_2]\,x^2 - f[x_0,x_1,x_2]\,x x_1 - f[x_0,x_1,x_2]\,x x_0 + f[x_0,x_1,x_2]\,x_0 x_1$$

$$\cong \underbrace{f[x_0,x_1,x_2]}_{a}\,x^2 + \Big(\underbrace{f[x_0,x_1] - (x_1 + x_0)\,f[x_0,x_1,x_2]}_{b}\Big)x + \underbrace{f[x_0,x_1,x_2]\,x_0 x_1 - f[x_0,x_1]\,x_0 + f(x_0)}_{c}$$

(h) **Theoretical**: Una formula alternativa del método de Müller está dada por:

$$f(x) \cong a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c. \tag{3.88}$$

Demuestre que los coeficientes están dados por:

$$\begin{aligned} a &= (f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1])/(h_2 - h_1) \\ b &= f[x_1, x_2] + a h_2 \\ c &= f(x_2) \end{aligned} \tag{3.89}$$

donde $h_1 = x_1 - x_0$ y $h_2 = x_2 - x_1$. El cero se encuentra en una vecindad de x_2, en este caso, la formula de Bhaskara es:

$$x_3 = x_2 + \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \tag{3.90}$$

$$h_2 + h_1$$

$$x_2 - \cancel{x_1} + \cancel{x_1} - x_0$$

Si $b < 0$ elegir el signo negativo, de otro modo ($b \geq 0$), elegir el signo positivo. El criterio de parada es:

$$\epsilon = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3}\right| < 1 \times 10^{-10}. \tag{3.91}$$

$$f(x) = a(x - x_2)^2 + b(x - x_2) + c$$

$$f(x_2) = a(\underbrace{\cancel{x_2 - x_2}}_{0})^2 + b(\underbrace{\cancel{x_2 - x_2}}_{0}) + c$$

$$f(x_2) = c$$

$$f(x_1) = a(x_1 - x_2)^2 + b(x_1 - x_2) + f(x_2)$$

$$b = \frac{f(x_1) - f(x_2) - a(x_1 - x_2)^2}{x_1 - x_2}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}} - \frac{a\overbrace{(x_1 - x_2)}^{-h_2}{}^{\cancel{2}}}{\cancel{x_1 - x_2}}$$

$$= f[x_1, x_2] + a h_2$$

$$f(x_0) = a(x_0 - x_2)^2 + \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2}\right)(x_0 - x_2) + f(x_2)$$

$$f(x_0) - f(x_2) = a(x_0 - x_2)^2 + \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2}\right)(x_0 - x_2) + a h_2 (x_0 - x_2)$$

$$\Rightarrow x_0 - x_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -h_1 - h_2 \\ -\cancel{x_1} + x_0 - x_2 + \cancel{x_1} \end{array}\right\} -(h_1 + h_2)$$

$$f(x_0) - f(x_2) + \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{h_2}\right)(h_1 + h_2) = a\left((h_1 + h_2)^2 - h_2(h_1 + h_2)\right)$$

$$\frac{h_2 f(x_0) - \cancel{h_2 f(x_2)} + h_1 f(x_2) + \cancel{h_2 f(x_2)} - h_1 f(x_1) - h_2 f(x_1)}{h_2} = \cdots$$

$$\frac{h_2 (f(x_0) - f(x_1)) + h_1 (f(x_2) - f(x_1))}{h_2} = a(h_1 + h_2)(h_1 + \cancel{h_2} - \cancel{h_2})$$

$$\frac{-h_2 h_1 f[x_0, x_1] + h_1 h_2 f[x_1, x_2]}{h_2} = a h_1 (h_1 + h_2)$$

$$\frac{\cancel{h_2}\cancel{h_1}\left(f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]\right)}{\cancel{h_2}} = a \cancel{h_1} (h_1 + h_2)$$

$$a = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{h_1 + h_2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{h_1 + h_2}$$

(i) **Theoretical**: demuestre la afirmación: *Si $b < 0$ elegir el signo negativo, de otro modo ($b \geq 0$), elegir el signo positivo.* Sugerencia: en cada iteración $|x_3 - x_2|$ debe ser lo más pequeña posible.

Para $b < 0$ $\quad x_3 = x_2 + \dfrac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}} \Rightarrow |x_3 - x_2| = \left|\dfrac{-2c}{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}\right|$

$b << \sqrt{b^2 - 4ac}$

- Como la iteracion $|x_3 - x_2|$ debe ser lo mas pequeña posible y tenemos $\underbrace{b < 0}_{\text{Negativo}}$ y $\underbrace{\sqrt{b^2 - 4ac}}_{\text{Positivo}} > 0$

Para que $|x_3 - x_2|$ sea minimo, entonces se tiene que maximizar $\left|b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right|$. Si b es negativo, necesitamos restarle otro valor para maximizar.

- Mismo caso para $b > 0$

Para $b > 0$

$b << \sqrt{b^2 - 4ac}$

- Como la iteracion $|x_3 - x_2|$ debe ser lo mas pequeña posible y tenemos $\underbrace{b > 0}_{\text{positivo}}$ y $\underbrace{\sqrt{b^2 - 4ac}}_{\text{Positivo}} > 0$

Para que $|x_3 - x_2|$ sea minimo, entonces se tiene que

Positivo

Para que $|x_3 - x_1|$ sea mínimo, entonces se tiene que maximizar $\left|b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right|$. Si b es positivo, necesitamos sumarle otro valor para maximizar.