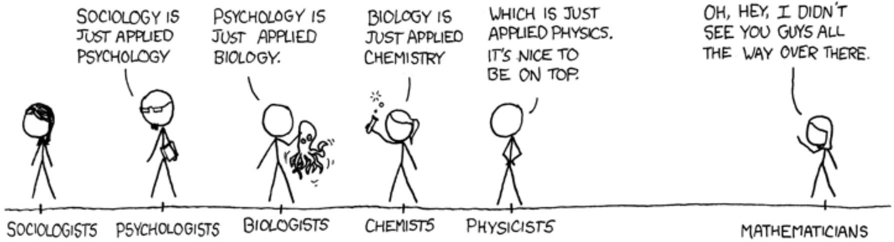
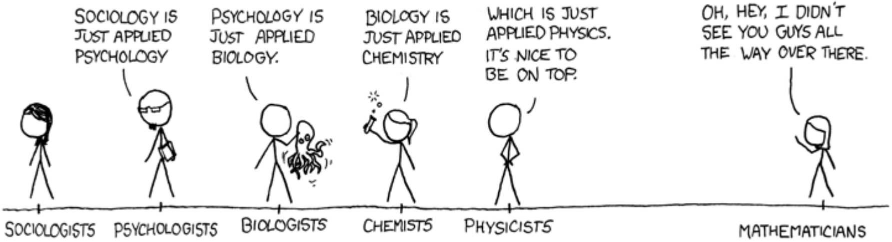

Flujo de inferencia

Ciencias con datos — Ciencias formales

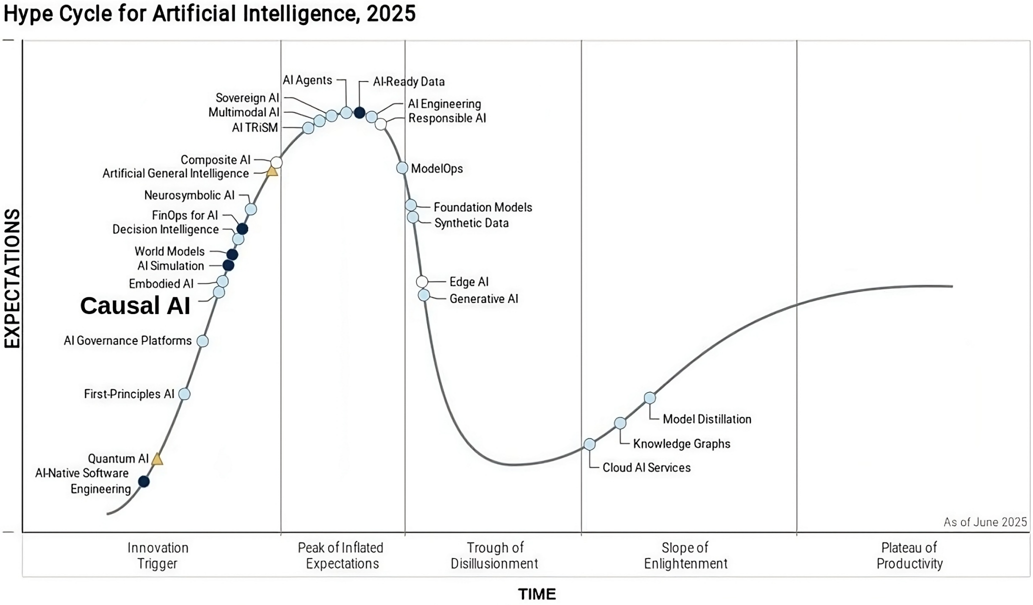


Ciencias con datos Ciencias formales



Todas las ciencias con datos desarrollan **teorías causales** para comprender el mundo

Industrias con datos



La ventaja de las teorías causales

$$-\overbrace{\log \lim_{T\to\infty} P(\text{Datos}_T|\text{Modelo Causal})^{1/T}}^{\substack{\text{Tasa de predicción en} \\ \text{órdenes de magnitud}}}$$

$$\overbrace{-\log \lim_{T\to\infty} P(\textsf{Datos}_T|\textsf{Modelo Causal})^{1/T}}^{\substack{\textsf{Tasa de predicción en}\\ \textsf{órdenes de magnitud}}}$$

$$=$$

$$\underbrace{\sum_{c,s,r} \underbrace{P(c,s,r|\textsf{Realidad Causal})}_{\substack{\textsf{Probabilidad de que}\\ \textsf{se genere el dato}}} \cdot \underbrace{\big(-\log P(c,s,r|\textsf{Modelo Causal})\big)}_{\substack{\textsf{Información en}\\ \textsf{órdenes de magnitud}}}}_{\textsf{Entropía cruzada}}$$

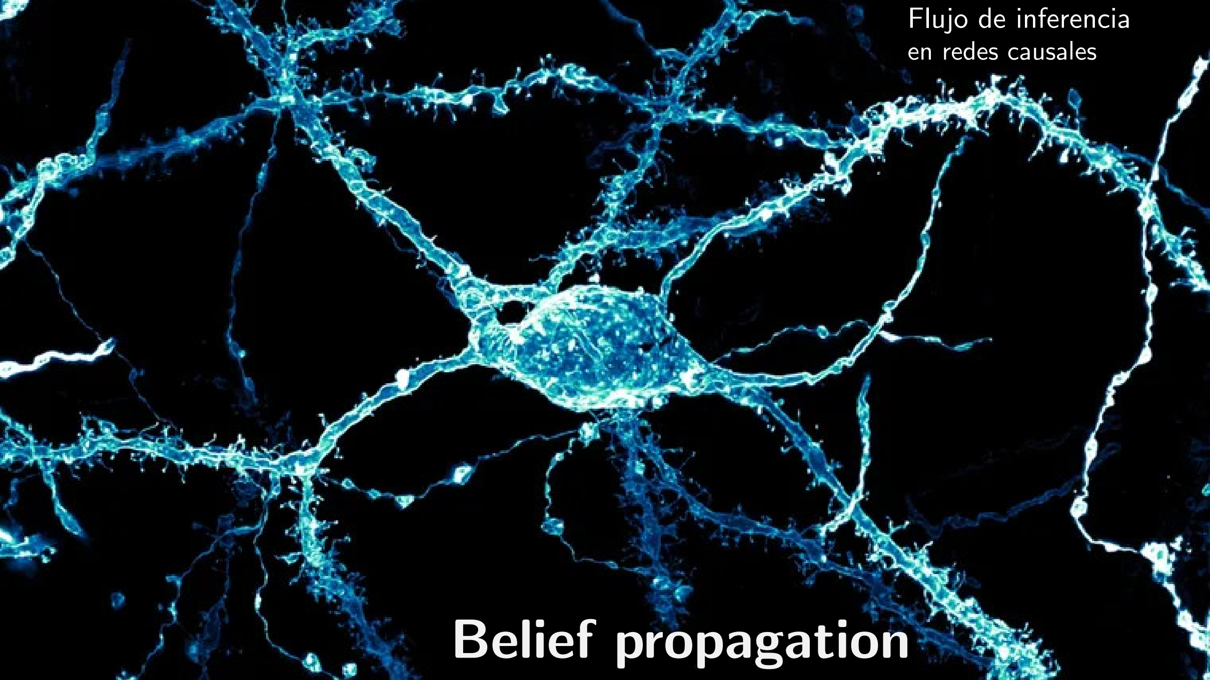
$$\overbrace{-\log \lim_{T\to\infty} P(\text{Datos}_T|\text{Modelo Causal})^{1/T}}^{\substack{\text{Tasa de predicción en}\\ \text{órdenes de magnitud}}}$$

$$=$$

$$\underbrace{\sum_{c,s,r} \underbrace{P(c,s,r|\text{Realidad Causal})}_{\substack{\text{Probabilidad de que}\\ \text{se genere el dato}}} \cdot \underbrace{\big(-\log P(c,s,r|\text{Modelo Causal})\big)}_{\substack{\text{Información en}\\ \text{órdenes de magnitud}}}}_{\text{Entropía cruzada}}$$

No hay mejor predicción que la del modelo causal

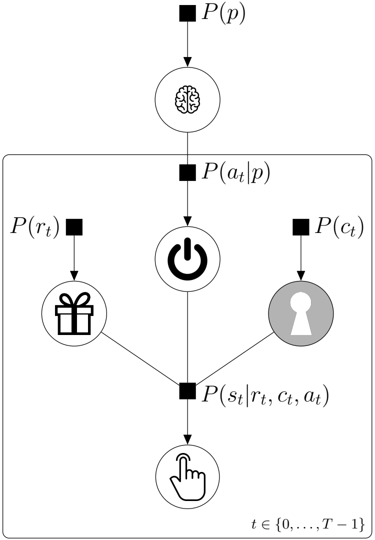
que se corresponde con la realidad causal subyacente



Belief propagation

Flujo de inferencia

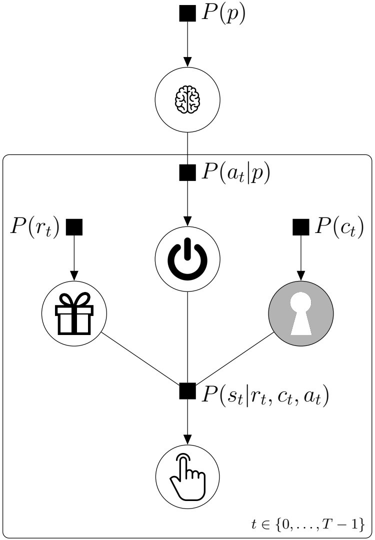
sum-product algorithm



Algoritmo para calcular cualquier marginal
mediante pasaje de mensajes entre nodos

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



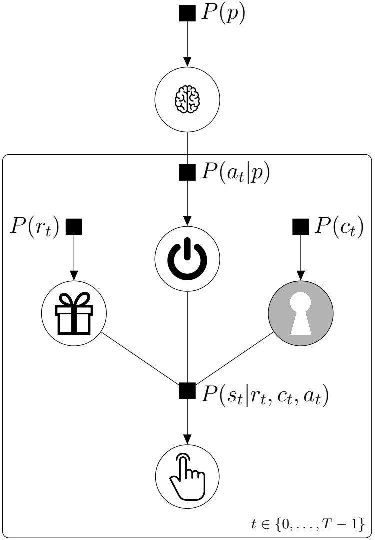
Algoritmo para calcular cualquier marginal mediante pasaje de mensajes entre nodos

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



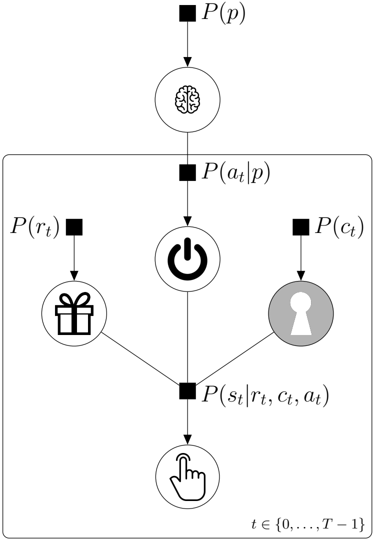
Algoritmo para calcular cualquier marginal mediante pasaje de mensajes entre nodos

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

Flujo de inferencia
sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

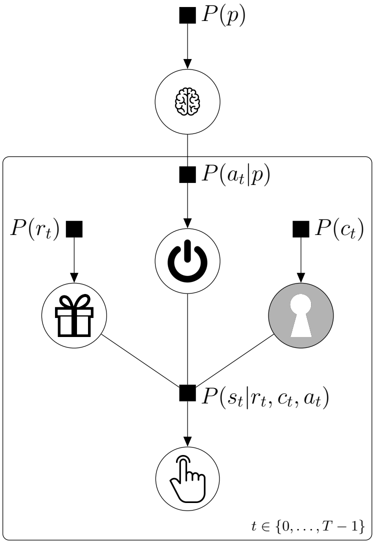
$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

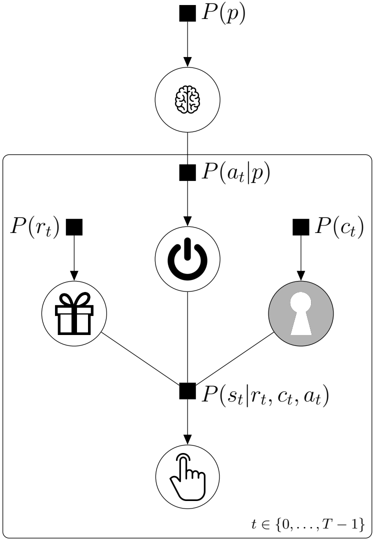
$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

$$m_{x \to f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \to x}(x)$$

Flujo de inferencia
sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

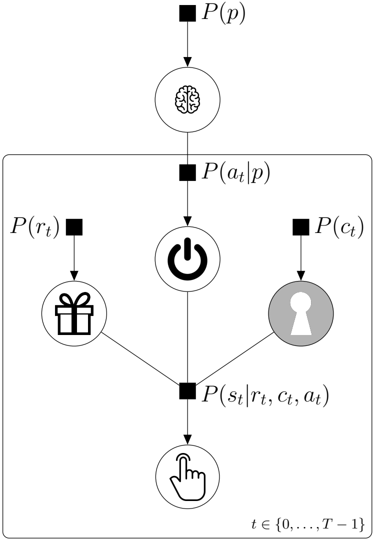
$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

$$m_{x \to f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \to x}(x)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

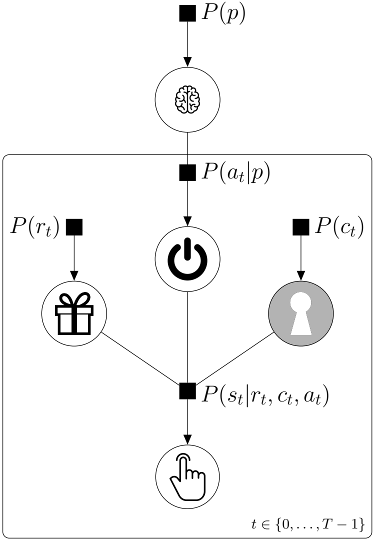
$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

$$m_{x \to f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \to x}(x)$$

$$m_{f \to x}(x) = \qquad f(\boldsymbol{h}, x) \prod_{h \in v(f) \setminus \{x\}} m_{h \to f}(h)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

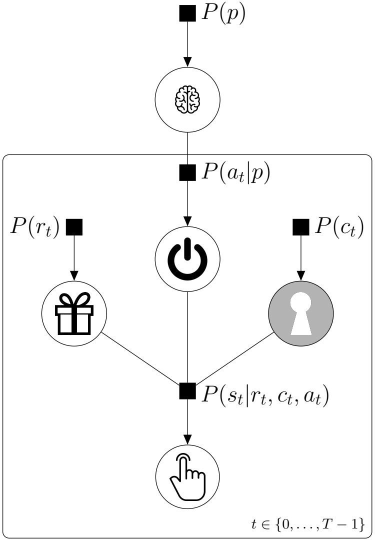
$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

$$m_{x \to f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \to x}(x)$$

$$m_{f \to x}(x) = \sum_{\boldsymbol{h}} \Big(f(\boldsymbol{h}, x) \prod_{h \in v(f) \setminus \{x\}} m_{h \to f}(h) \Big)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \to x}(x)$$

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

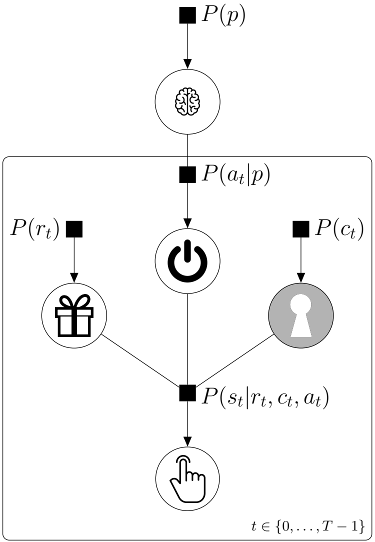
$m_{x \to f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \to x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

$$m_{x \to f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \to x}(x)$$

$$m_{f \to x}(x) = \sum_{\boldsymbol{h}} \Big(f(\boldsymbol{h}, x) \prod_{h \in v(f) \setminus \{x\}} m_{h \to f}(h) \Big)$$

Flujo de inferencia
sum-product algorithm



$$P(x) = \prod_{f \in v(x)} m_{f \rightarrow x}(x)$$

$v(n)$ **:** Vecinos del nodo n

$m_{x \rightarrow f}(x)$ **:** Mensaje de variable x a factor f

$m_{f \rightarrow x}(x)$ **:** Mensaje de factor f a variable x

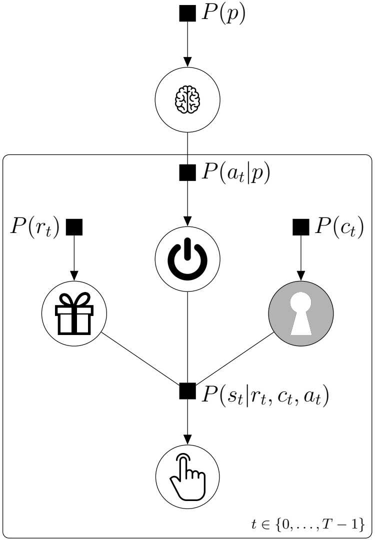
$$m_{x \rightarrow f}(x) = \prod_{h \in v(x) \setminus \{f\}} m_{h \rightarrow x}(x)$$

$$m_{f \rightarrow x}(x) = \sum_{\boldsymbol{h}} \Big(f(\boldsymbol{h}, x) \prod_{h \in v(f) \setminus \{x\}} m_{h \rightarrow f}(h) \Big)$$

Kschischang FR, Frey BJ, Loeliger HA. Factor graphs and the sum-product algorithm. 2001

Flujo de inferencia

sum-product algorithm

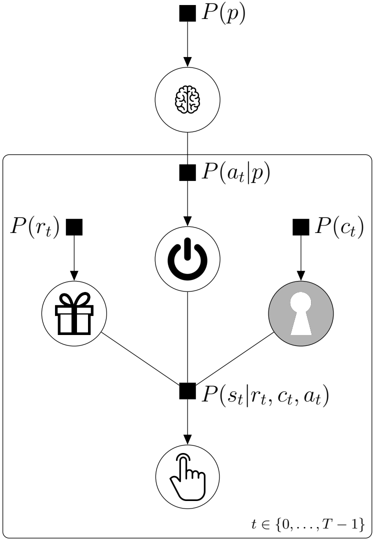


¿Cuál es el posterior de p?

$$P(p|\underbrace{r_1, c_1, s_1, \dots}_{\text{Datos}})$$

Flujo de inferencia

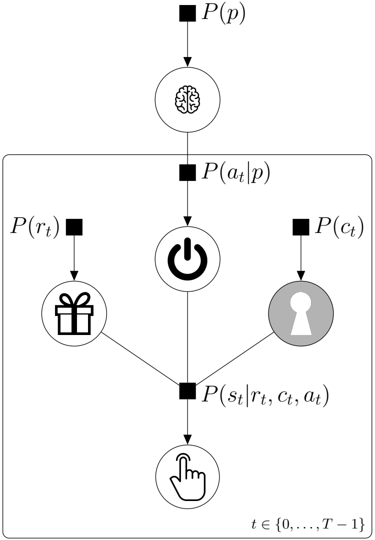
sum-product algorithm



$$P(p|\underbrace{r_1, c_1, s_1, \dots}_{\text{Datos}}) \propto P(p, r_1, c_1, s_1, \dots)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm

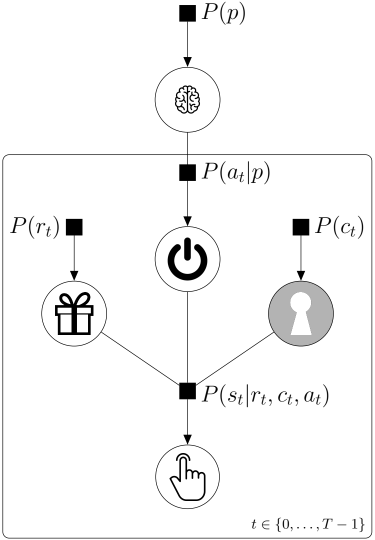


$$P(p|\underbrace{r_1, c_1, s_1, \dots}_{\text{Datos}}) \propto P(p, r_1, c_1, s_1, \dots)$$

$$= \sum_{a_1,\dots,a_T} P(p, r_1, c_1, s_1, a_1 \dots)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(p|\underbrace{r_1, c_1, s_1, \ldots}_{\text{Datos}}) \propto P(p, r_1, c_1, s_1, \ldots)$$

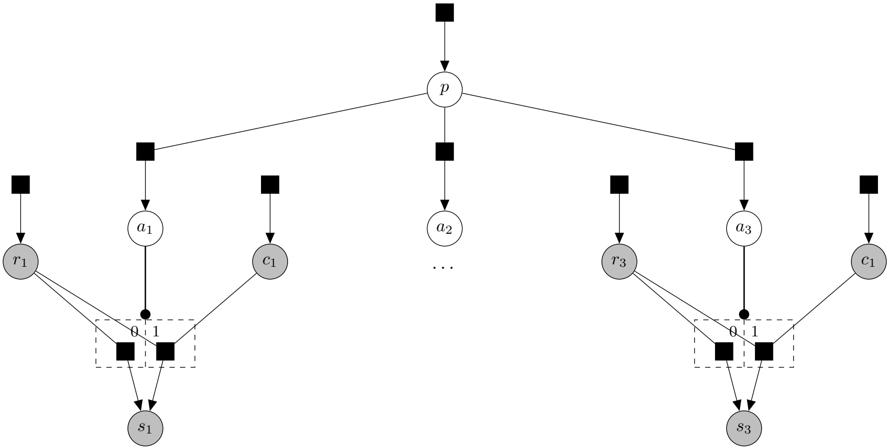
$$= \sum_{a_1, \ldots, a_T} P(p, r_1, c_1, s_1, a_1 \ldots)$$

Son T sumatorias anidadas!

(las combinaciones crecen como 2^T)

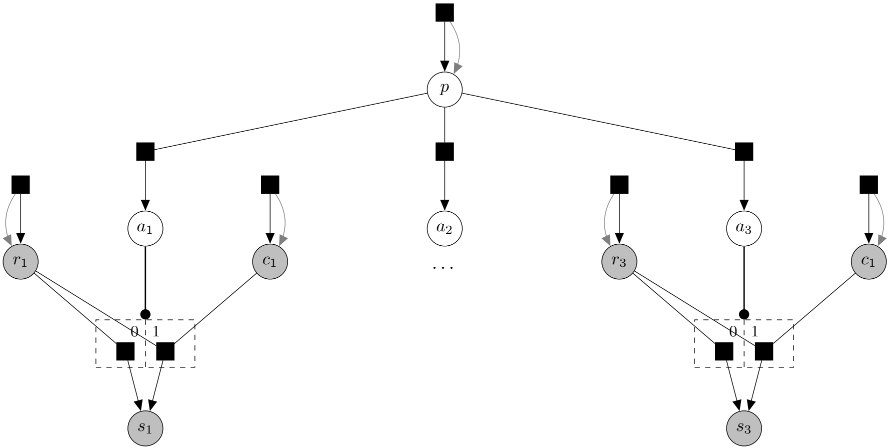
Flujo de inferencia

sum-product algorithm



Flujo de inferencia

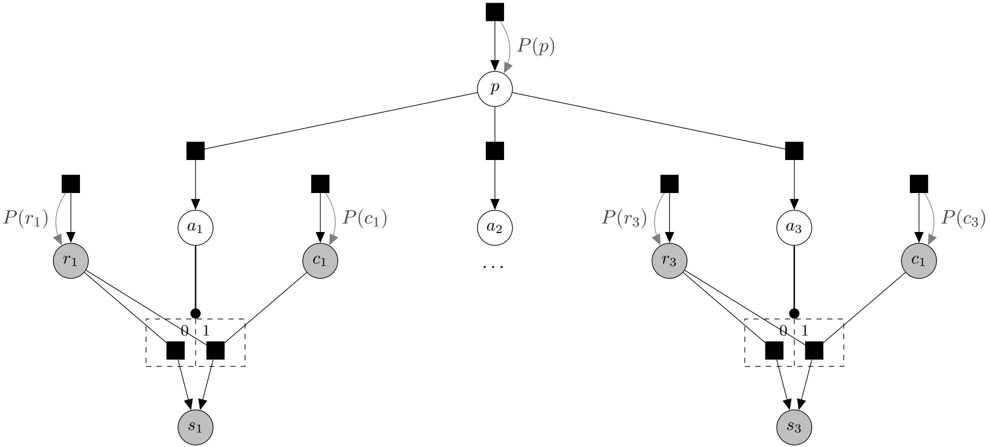
sum-product algorithm



$m_{f_r \to r}(r) =$ $\quad$ $m_{f_p \to p}(p) =$ $\quad$ $m_{f_c \to c}(c) =$

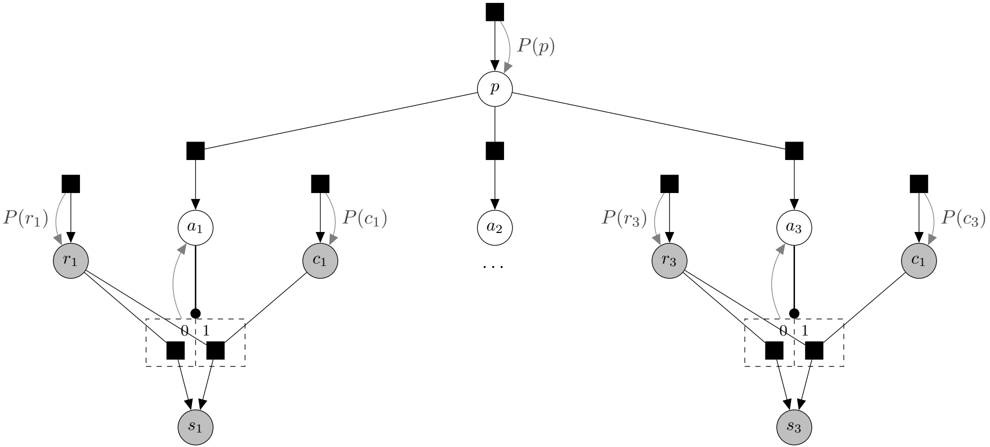
Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$m_{f_r \to r}(r) = P(r) \qquad m_{f_p \to p}(p) = P(p) \qquad m_{f_c \to c}(c) = P(c)$$

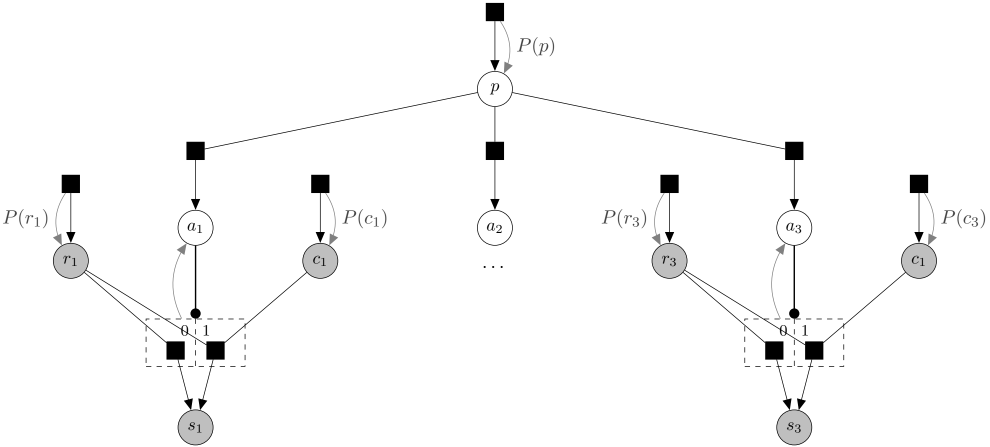
Flujo de inferencia
sum-product algorithm



$$m_{f_s \to a}(a) =$$

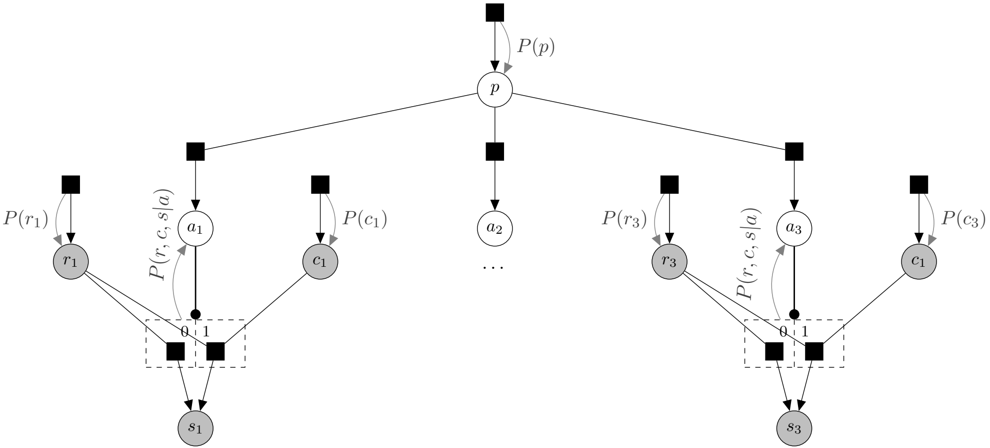
Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$m_{f_s \to a}(a) = P(r)P(c)P(s|r)^{\mathbb{I}(a=0)}P(s|r,c)^{\mathbb{I}(a=1)}$$

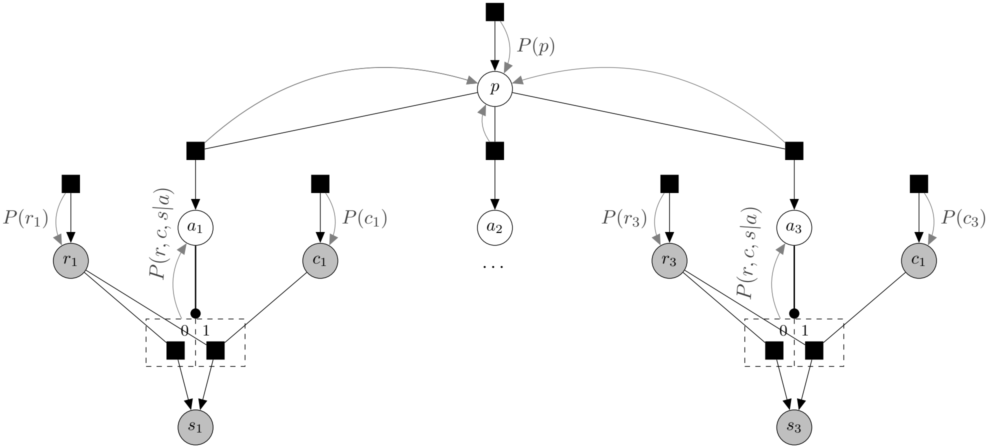
Flujo de inferencia
sum-product algorithm



$$m_{f_s \to a}(a) = P(r)P(c)P(s|r)^{\mathbb{I}(a=0)}P(s|r,c)^{\mathbb{I}(a=1)} = P(r,c,s|a)$$

Flujo de inferencia

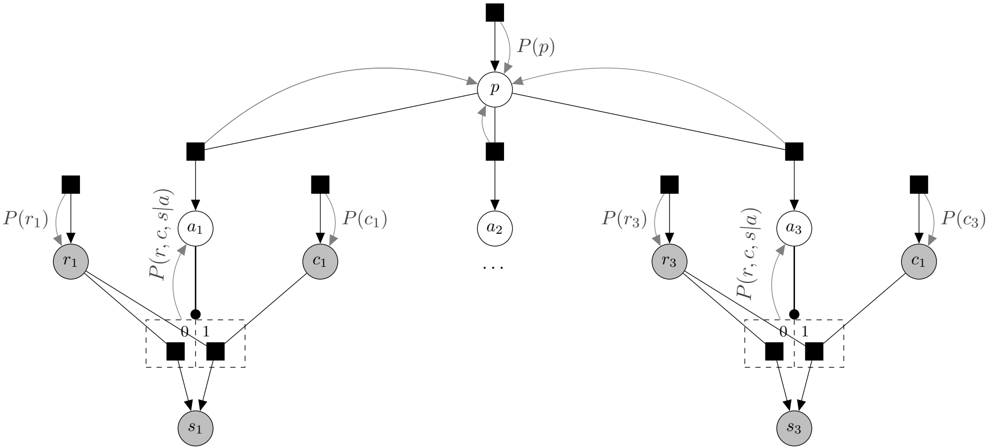
sum-product algorithm



$$m_{f_a \to p}(p) =$$

Flujo de inferencia

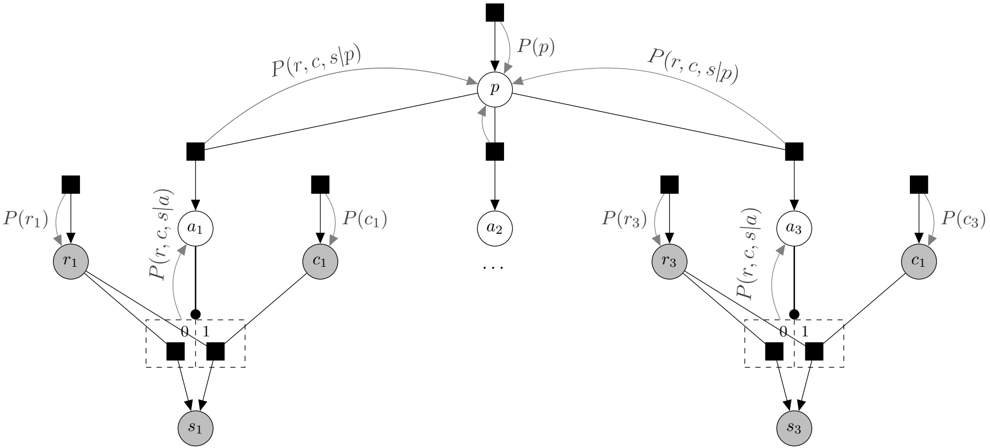
sum-product algorithm



$$m_{f_a \to p}(p) = \sum_a P(r,c,s|a)P(a|p)$$

Flujo de inferencia

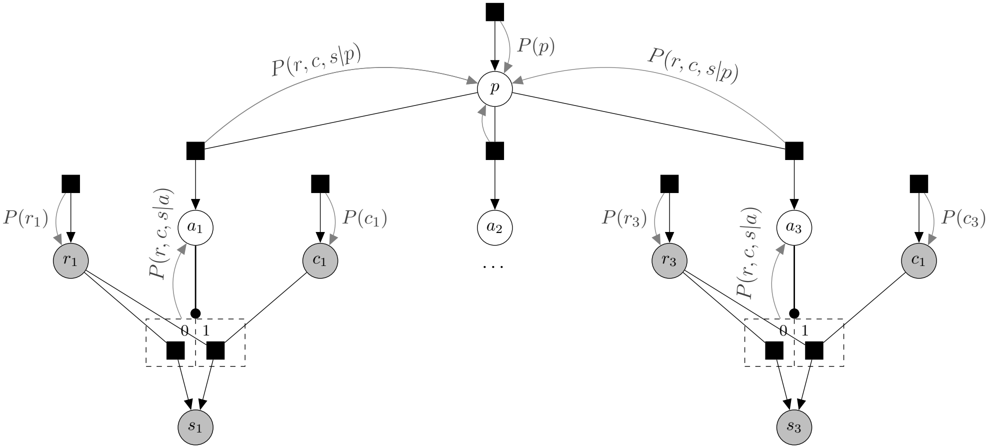
sum-product algorithm



$$m_{f_a \to p}(p) = \sum_a P(r,c,s|a)P(a|p) = P(r,c,s|p)$$

Flujo de inferencia

sum-product algorithm



$$P(p1, \overbrace{r_1, \dots, s_3}^{\text{Datos}}) = P(p) \prod_{i=1}^{T} P(r_i, c_i, s_i | p)$$

Predecir el impacto de las acciones

a partir de datos observados

$P(Y|X)$

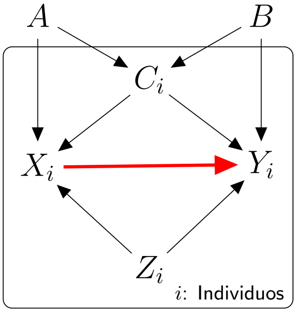
Predecir el impacto de las acciones
a partir de datos observados

$$P(Y|X) \neq P(Y|\text{do}(X))$$

Predecir el impacto de las acciones
a partir de datos observados

Observaciones

$P(Y|X)$ $\neq$ $P(Y|\text{do}(X))$

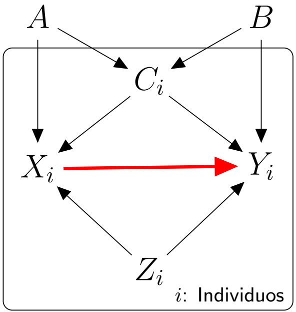


Predecir el impacto de las acciones

a partir de datos observados

Observaciones

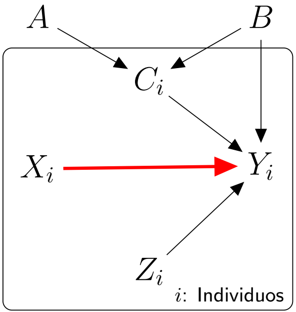
$P(Y|X)$



$\neq$

Intervenciones

$P(Y|\text{do}(X))$

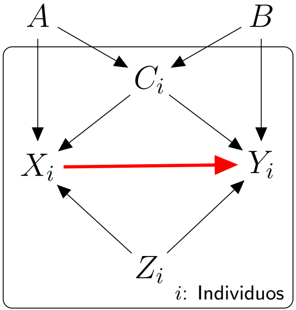


Predecir el impacto de las acciones
a partir de datos observados

Entrenamos

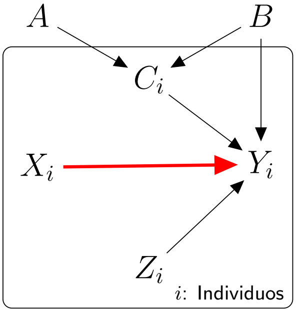
In-sample

Observaciones
$P(Y|X)$



$\neq$

Intervenciones
$P(Y|\text{do}(X))$



Predecir el impacto de las acciones

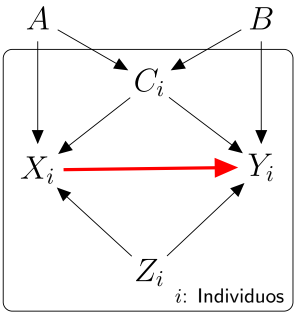
a partir de datos observados

Entrenamos

In-sample

Observaciones

$P(Y|X)$



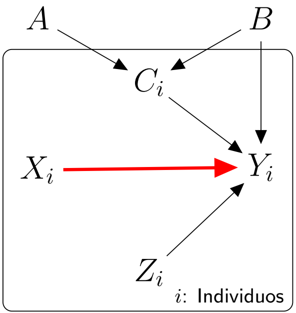
$\neq$

Predecimos

Out-of-sample

Intervenciones

$P(Y|\text{do}(X))$



Predecir el impacto de las acciones

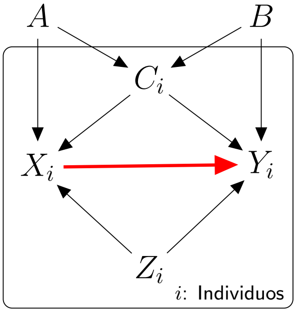
a partir de datos observados

Entrenamos

In-sample

Observaciones

$P(Y|X)$



$\neq$

Predecimos

Out-of-sample

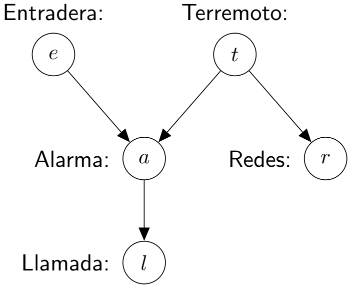
Intervenciones

$P(Y|\text{do}(X))$

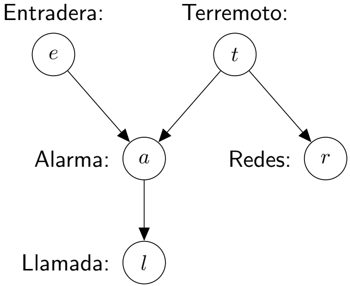
Para predecir el impacto de las acciones **necesitamos eliminar el flujo no causal**

Flujo de inferencia

Estructuras básicas

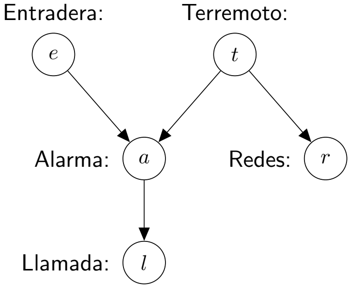


Flujo de inferencia
Estructuras básicas



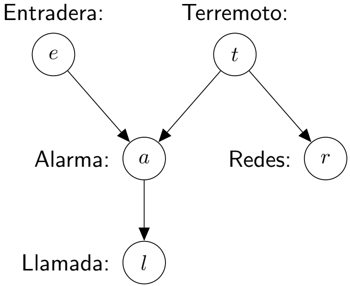
Pipe: $\quad e \rightarrow a \rightarrow l$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



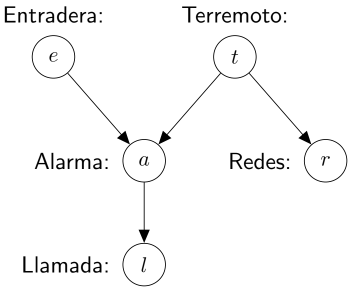
Pipe: $e \to a \to l \qquad P(l) \stackrel{?}{=} P(l|e)$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



Pipe: $e \rightarrow a \rightarrow l \qquad P(l) \stackrel{?}{=} P(l|e) \qquad P(l|a) \stackrel{?}{=} P(l|e, a)$

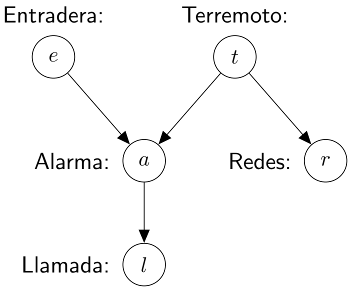
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \stackrel{?}{=} P(l\|e)$	$P(l\|a) \stackrel{?}{=} P(l\|e,a)$

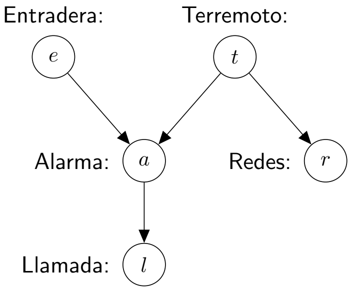
Flujo de inferencia

Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \stackrel{?}{=} P(l \vert e)$	$P(l \vert a) \stackrel{?}{=} P(l \vert e, a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$		

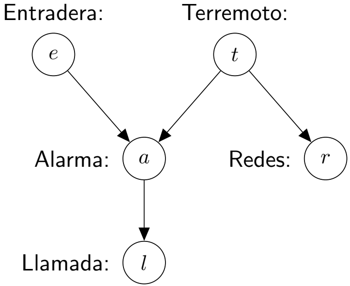
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \overset{?}{=} P(l \mid e)$	$P(l \mid a) \overset{?}{=} P(l \mid e, a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \overset{?}{=} P(r \mid a)$	$P(r \mid t) \overset{?}{=} P(r \mid t, a)$

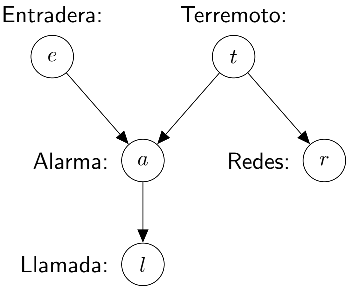
Flujo de inferencia

Estructuras básicas



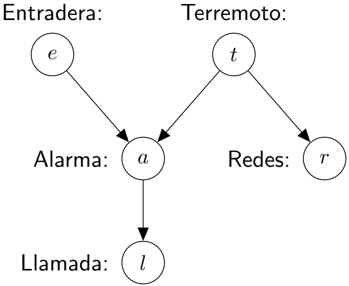
		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \stackrel{?}{=} P(l\|e)$	$P(l\|a) \stackrel{?}{=} P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \stackrel{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$e \to a \leftarrow t$		

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \stackrel{?}{=} P(l\|e)$	$P(l\|a) \stackrel{?}{=} P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \stackrel{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$e \to a \leftarrow t$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$

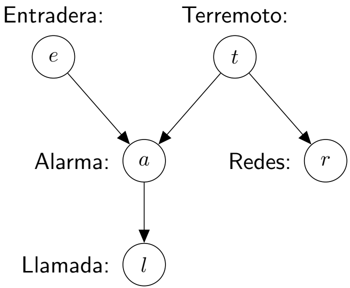
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \overset{?}{=} P(l\|e)$	$P(l\|a) \overset{?}{=} P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \overset{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \overset{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \to a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \overset{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \overset{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \overset{?}{=} P(t\|e,l)$

Flujo de inferencia

Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \overset{?}{=} P(l\|e)$	$P(l\|a) \overset{?}{=} P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \overset{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \overset{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \overset{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \overset{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \overset{?}{=} P(t\|e,l)$

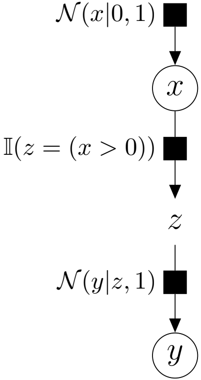
Flujo de inferencia

Pipe

$$x \longrightarrow z \longrightarrow y$$

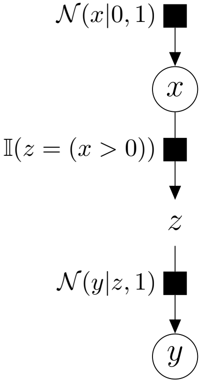
Flujo de inferencia

Pipe



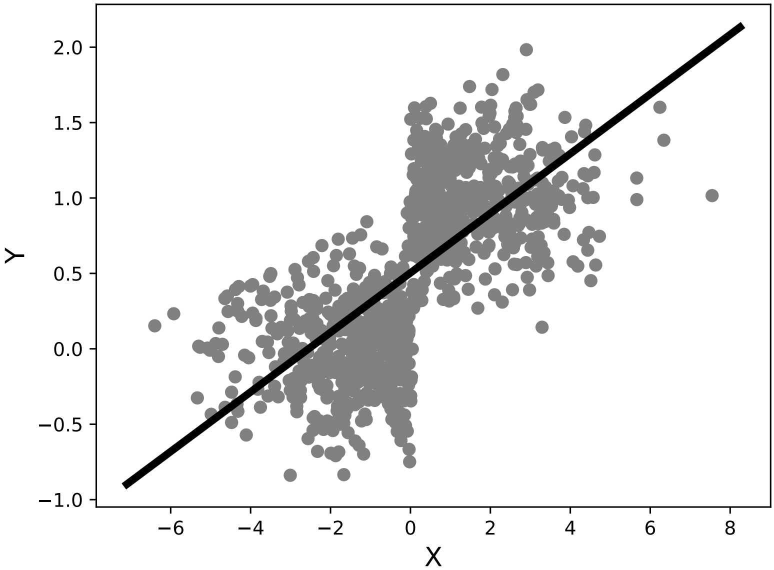
$$x \longrightarrow z \longrightarrow y$$

Flujo de inferencia

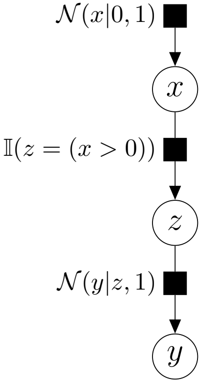


$$X \not\!\perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

Pipe

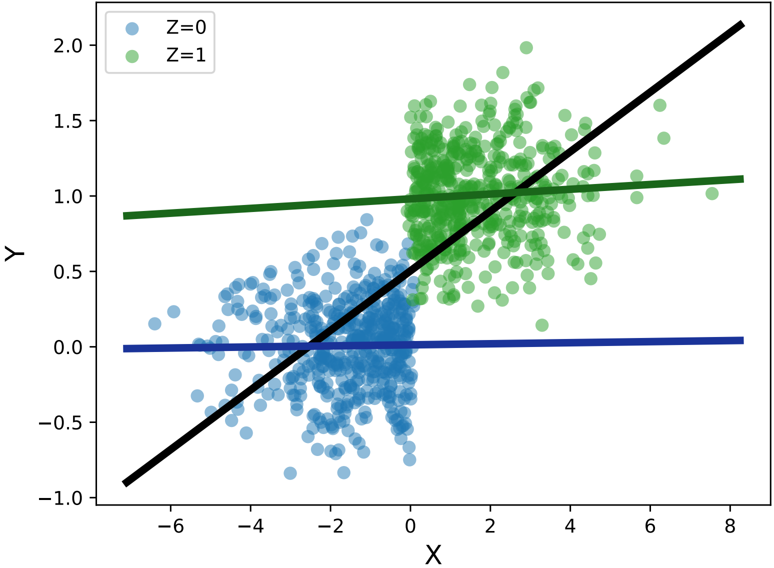


Flujo de inferencia



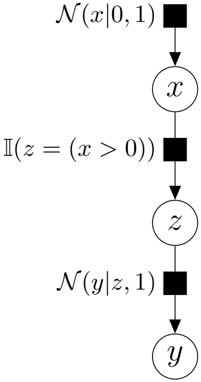
$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

Pipe



Flujo de inferencia

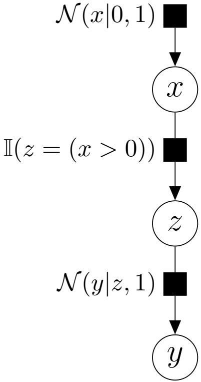
Pipe



$$P(x, y|z) =$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

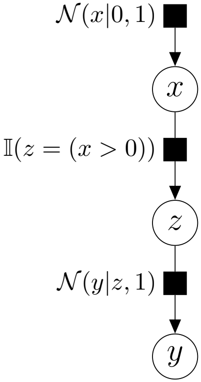
Flujo de inferencia
Pipe



$$P(x, y|z) = \frac{P(x, y, z)}{P(z)}$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z$$

Flujo de inferencia
Pipe

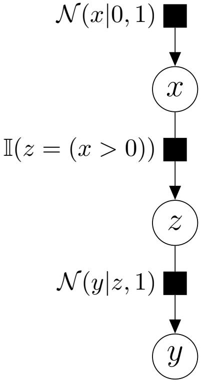


$$P(x,y|z) = \frac{P(x)P(z|x)P(y|z)}{P(z)}$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z$$

Flujo de inferencia

Pipe

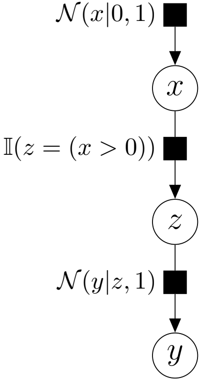


$$P(x,y|z) = \frac{P(x)P(z|x)P(y|z)}{P(z)} = \frac{P(x)P(z|x)}{P(z)}P(y|z)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|Z$$

Flujo de inferencia

Pipe

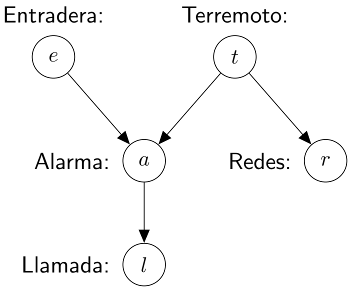


$$P(x,y|z) = \frac{P(x)P(z|x)P(y|z)}{P(z)} = \frac{P(x)P(z|x)}{P(z)}P(y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

Flujo de inferencia

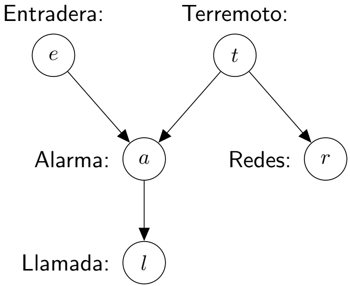
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe :	$e \to a \to l$	$P(l) \overset{?}{=} P(l\vert e)$	$P(l\vert a) \overset{?}{=} P(l\vert e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \overset{?}{=} P(r\vert a)$	$P(r\vert t) \overset{?}{=} P(r\vert t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \to a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \overset{?}{=} P(t\vert e)$	$P(t\vert a) \overset{?}{=} P(t\vert e,a)$ $P(t\vert l) \overset{?}{=} P(t\vert e,l)$

Flujo de inferencia

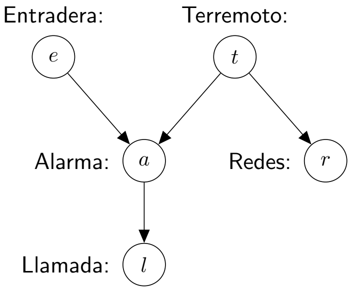
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe :	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) \stackrel{?}{=} P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \stackrel{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

$$E \not\perp\!\!\!\perp L | \emptyset$$

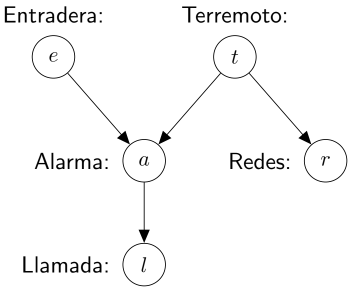
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe :	$e \to a \to l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \stackrel{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \to a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

$$E \not\perp\!\!\!\perp L|\emptyset \qquad\qquad E \perp\!\!\!\perp L|A$$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe :	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \stackrel{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

Flujo de inferencia

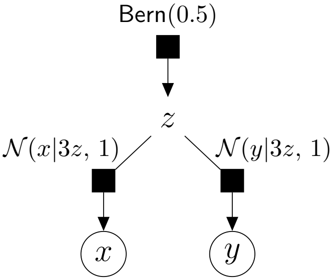
Fork

$$x \longleftarrow z \longrightarrow y$$

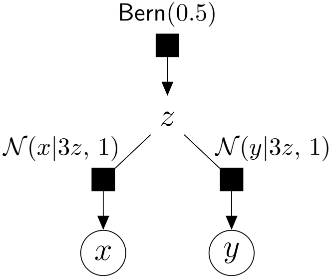
Flujo de inferencia

Fork

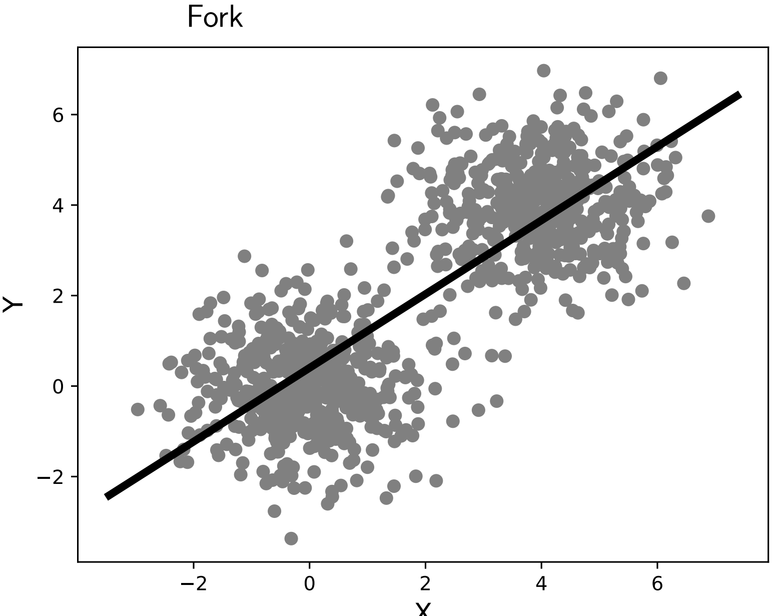
$$x \longleftarrow z \longrightarrow y$$



Flujo de inferencia

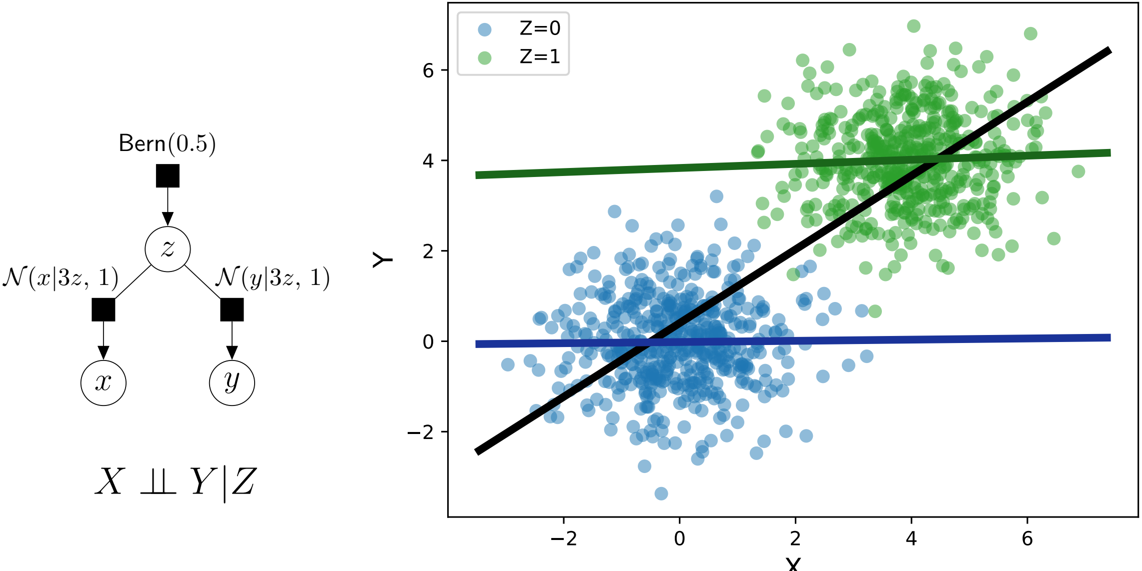


$$X \not\perp\!\!\!\perp Y|\emptyset$$



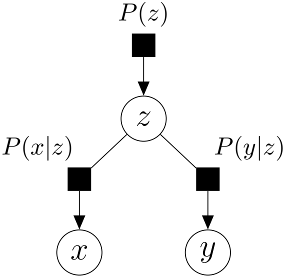
Flujo de inferencia

Fork



Flujo de inferencia

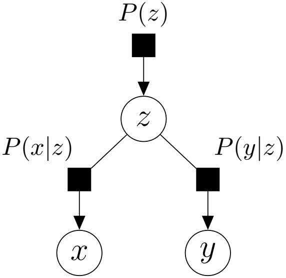
Fork



$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z \iff P(x, y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

Flujo de inferencia

Fork

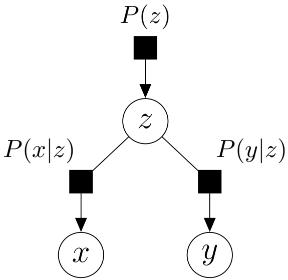


$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

$$P(x, y|z) =$$

Flujo de inferencia

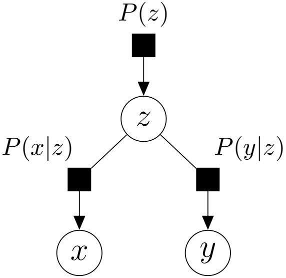
Fork



$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

$$P(x, y|z) = \frac{P(x, y, z)}{P(z)}$$

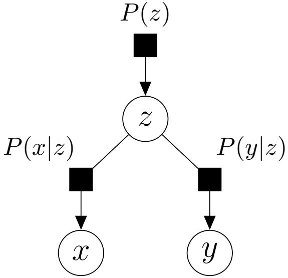
Flujo de inferencia
Fork



$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

$$P(x, y|z) = \frac{P(x|z)P(y|z)P(z)}{P(z)}$$

Flujo de inferencia
Fork

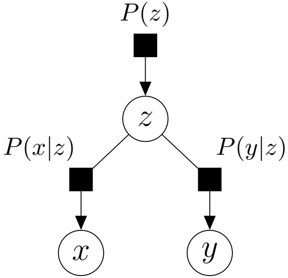


$$P(x,y|z) = \frac{P(x|z)P(y|z)\cancel{P(z)}}{\cancel{P(z)}}$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

Flujo de inferencia

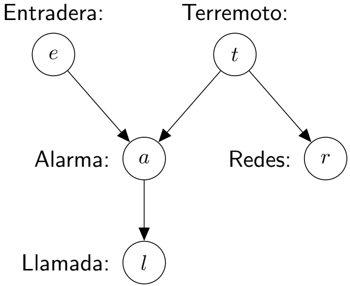
Fork



$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z$$

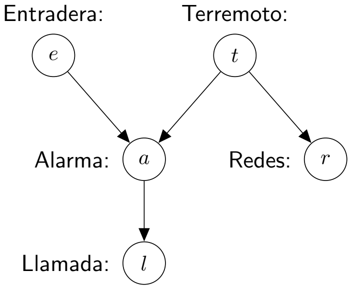
$$P(x, y|z) = \frac{P(x|z)P(y|z)\cancel{P(z)}}{\cancel{P(z)}} = P(x|z)P(y|z)$$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \overset{?}{=} P(r\|a)$	$P(r\|t) \overset{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \overset{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \overset{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \overset{?}{=} P(t\|e,l)$

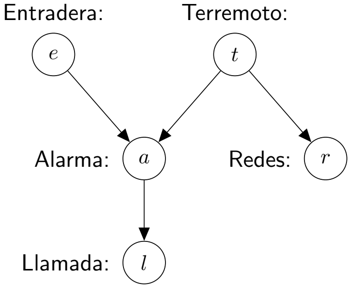
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) \stackrel{?}{=} P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \to a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

$$A \not\perp R \,|\, \emptyset$$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas

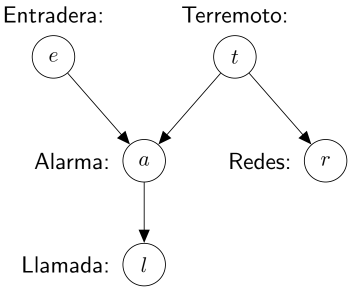


		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) = P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

$$A \not\perp\!\!\!\perp R|\emptyset \qquad\qquad A \perp\!\!\!\perp R|T$$

Flujo de inferencia

Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \neq P(l \mid e)$	$P(l \mid a) = P(l \mid e, a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \neq P(r \mid a)$	$P(r \mid t) = P(r \mid t, a)$
Collider:	$\begin{array}{ccccc} e & \to & a & \leftarrow & t \\ & & \downarrow & & \\ & & l & & \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t \mid e)$	$P(t \mid a) \stackrel{?}{=} P(t \mid e, a)$ $P(t \mid l) \stackrel{?}{=} P(t \mid e, l)$

Flujo de inferencia

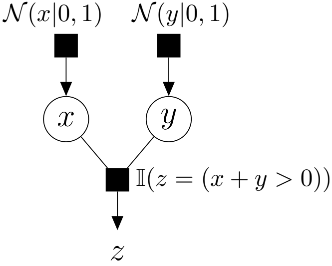
Collider

$$x \longrightarrow z \longleftarrow y$$

Flujo de inferencia

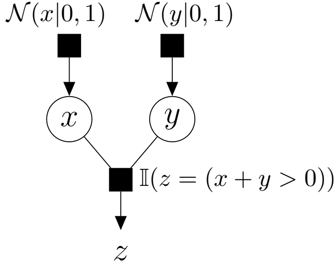
Collider

$$x \longrightarrow z \longleftarrow y$$

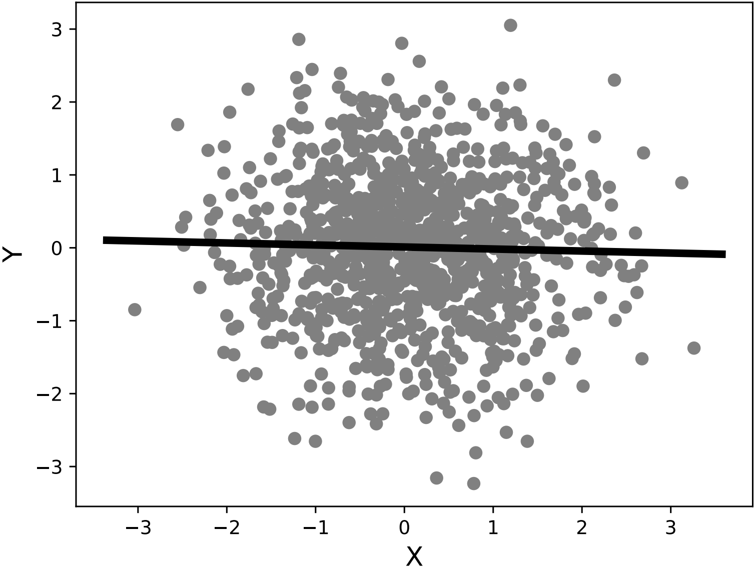


Flujo de inferencia

Collider

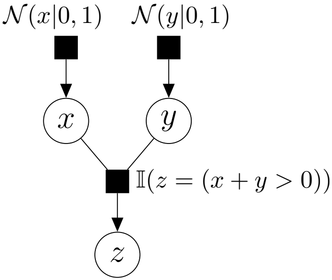


$$X \perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

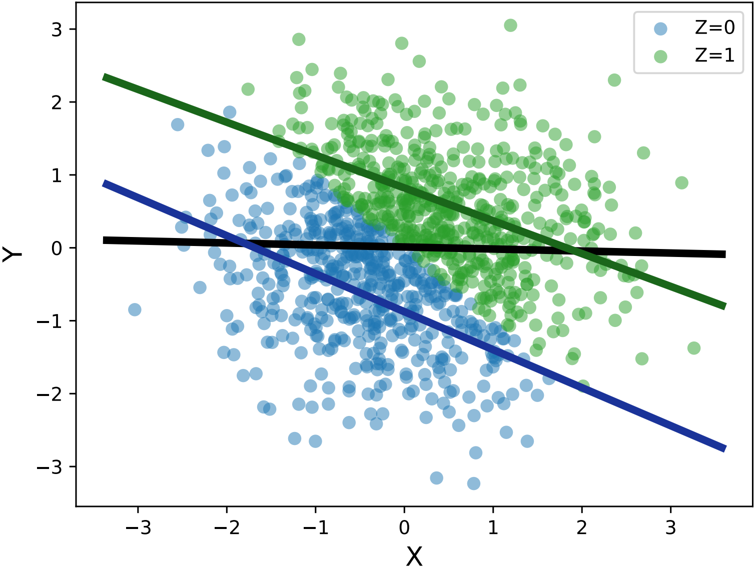


Flujo de inferencia

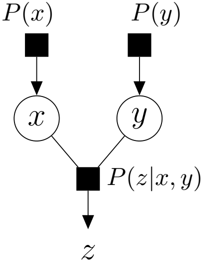
Collider



$$X \not\perp\!\!\!\perp Y | Z$$



Flujo de inferencia
Collider

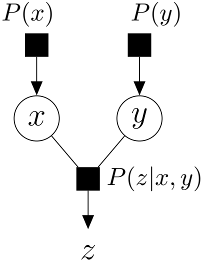


$$P(x,y) =$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

Flujo de inferencia

Collider

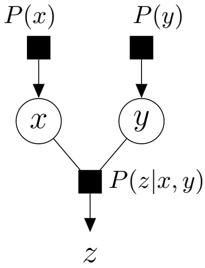


$$P(x,y) = \sum_z P(x,y,z)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

Flujo de inferencia

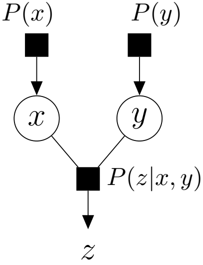
Collider



$$P(x,y) = \sum_z P(x)P(y)P(z|x,y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

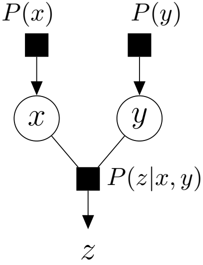
Flujo de inferencia
Collider



$$P(x,y) = \sum_z P(x)P(y)P(z|x,y) = P(x)P(y)\sum_z P(z|x,y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|\emptyset$$

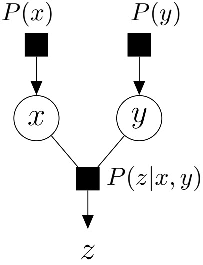
Flujo de inferencia
Collider



$$P(x,y) = \sum_z P(x)P(y)P(z|x,y) = P(x)P(y)\cancel{\sum_z P(z|x,y)}$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y|\emptyset$$

Flujo de inferencia
Collider

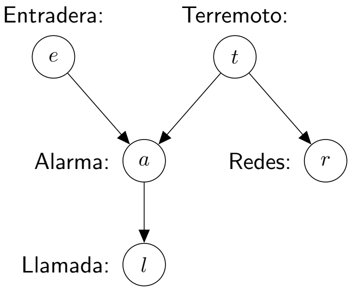


$$P(x,y) = \sum_z P(x)P(y)P(z|x,y) = P(x)P(y)$$

$$X \perp\!\!\!\perp Y | \emptyset$$

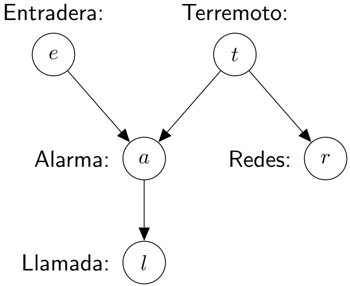
Flujo de inferencia

Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \to a \to l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \to r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) = P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \to a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) \stackrel{?}{=} P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

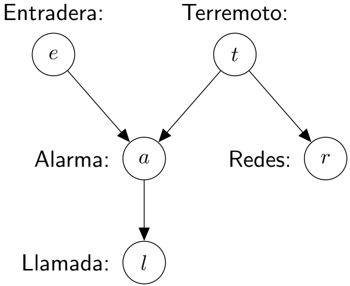
Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) = P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{ccccc} e & \rightarrow & a & \leftarrow & t \\ & & \downarrow & & \\ & & l & & \end{array}$	$P(t) = P(t\|e)$	$P(t\|a) \stackrel{?}{=} P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$

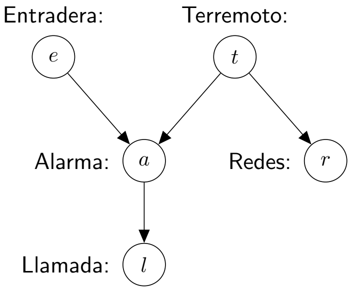
$$T \perp\!\!\!\perp E | \emptyset$$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) = P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) = P(t\|e)$	$P(t\|a) \neq P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \stackrel{?}{=} P(t\|e,l)$
		$T \perp\!\!\!\perp E \| \emptyset$	$T \not\!\perp\!\!\!\perp E \| A$

Flujo de inferencia
Estructuras básicas



		Intermedio no observable	Intermedio observable
Pipe:	$e \rightarrow a \rightarrow l$	$P(l) \neq P(l\|e)$	$P(l\|a) = P(l\|e,a)$
Fork:	$a \leftarrow t \rightarrow r$	$P(r) \neq P(r\|a)$	$P(r\|t) = P(r\|t,a)$
Collider:	$\begin{array}{c} e \rightarrow a \leftarrow t \\ \downarrow \\ l \end{array}$	$P(t) = P(t\|e)$	$P(t\|a) \neq P(t\|e,a)$ $P(t\|l) \neq P(t\|e,l)$
		$T \perp\!\!\!\perp E \| \emptyset$	$T \not\!\perp\!\!\!\perp E \| L$

Flujo de inferencia
Estructuras complejas (caminos)

Hay flujo de inferencia entre los extremos de una cadena si:
(camino *d-conectado*)

- Todas las consecuencias comunes (o sus descendientes) son observables
- Ninguna otra variable es observable

Flujo de inferencia

Estructuras complejas (caminos)

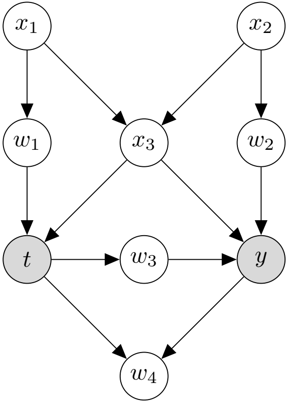
Hay flujo de inferencia entre los extremos de una cadena si:
(camino *d-conectado*)

- Todas las consecuencias comunes (o sus descendientes) son observables
- Ninguna otra variable es observable

Se cierra el flujo si está $\underbrace{\text{no } d\text{-conectado}}_{\text{d-separado}}$

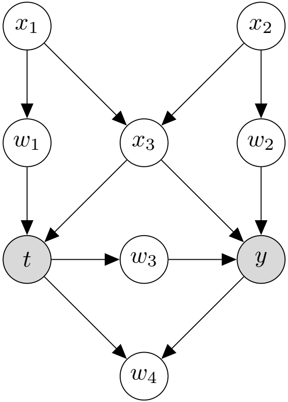
Flujo de inferencia

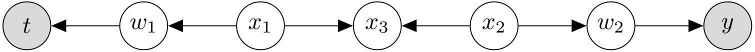
Estructuras complejas (caminos)



Flujo de inferencia

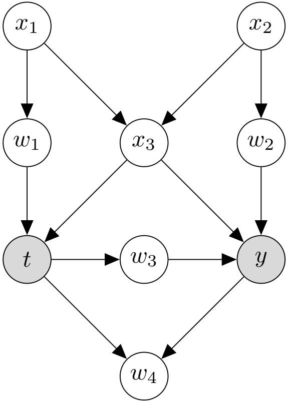
Estructuras complejas (caminos)

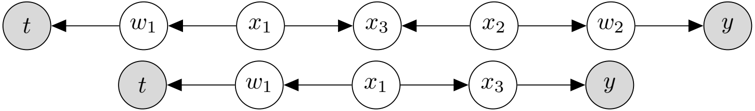




Flujo de inferencia

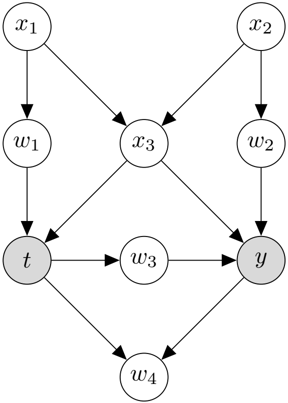
Estructuras complejas (caminos)

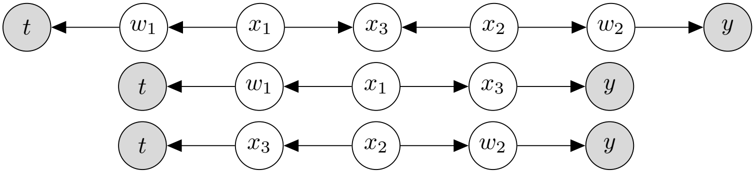




Flujo de inferencia

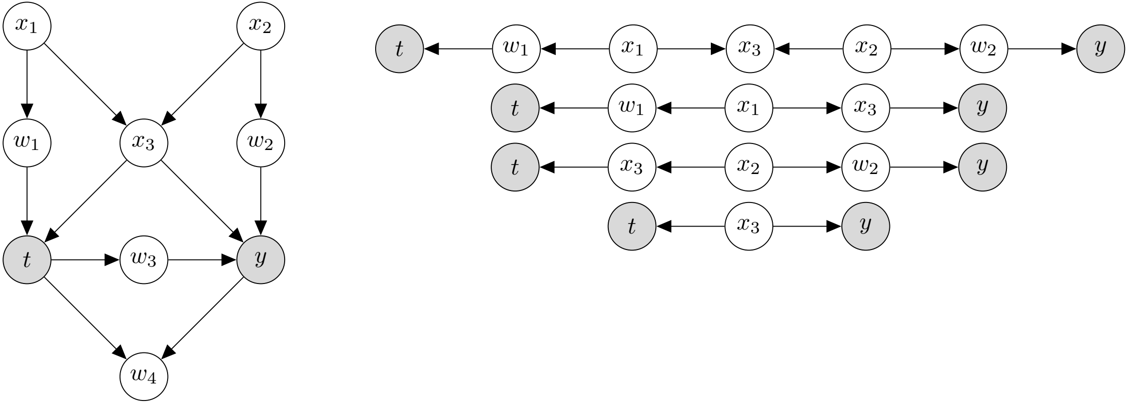
Estructuras complejas (caminos)





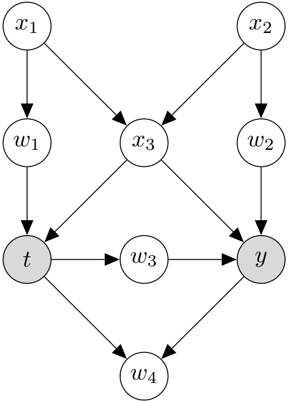
Flujo de inferencia

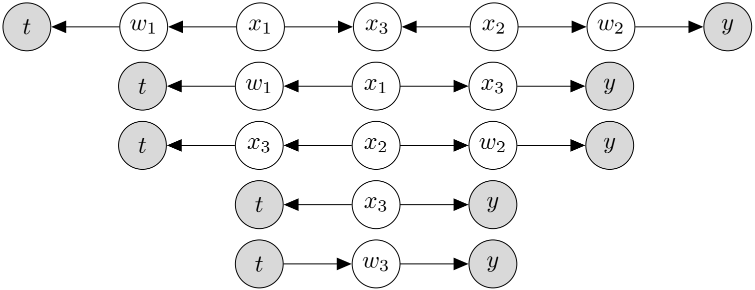
Estructuras complejas (caminos)



Flujo de inferencia

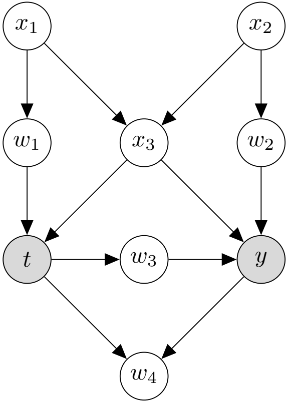
Estructuras complejas (caminos)

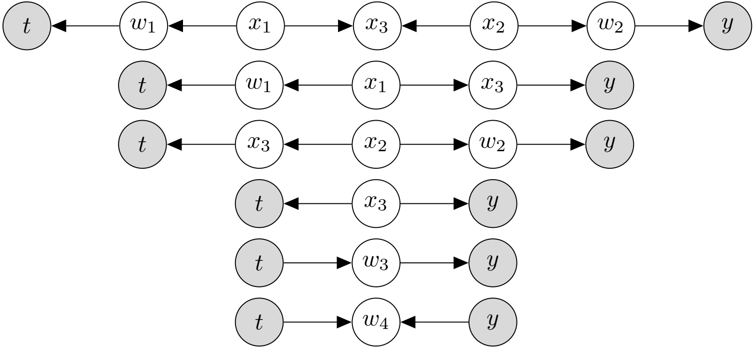




Flujo de inferencia

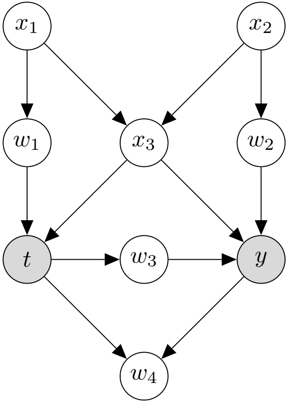
Estructuras complejas (caminos)

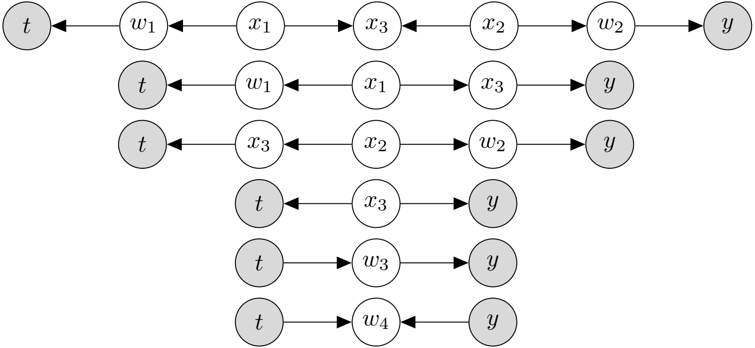




Flujo de inferencia

Estructuras complejas (caminos)

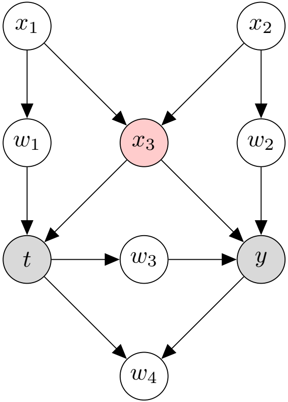


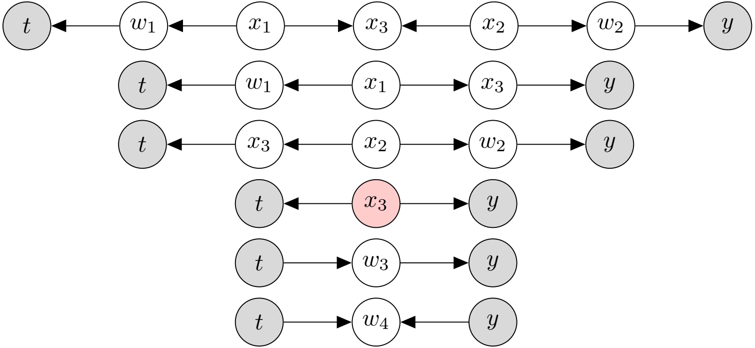


Para hacer predicciones "causales" necesitamos
eliminar el flujo de inferencia que circula por los caminos no causales

Flujo de inferencia

Estructuras complejas (caminos)

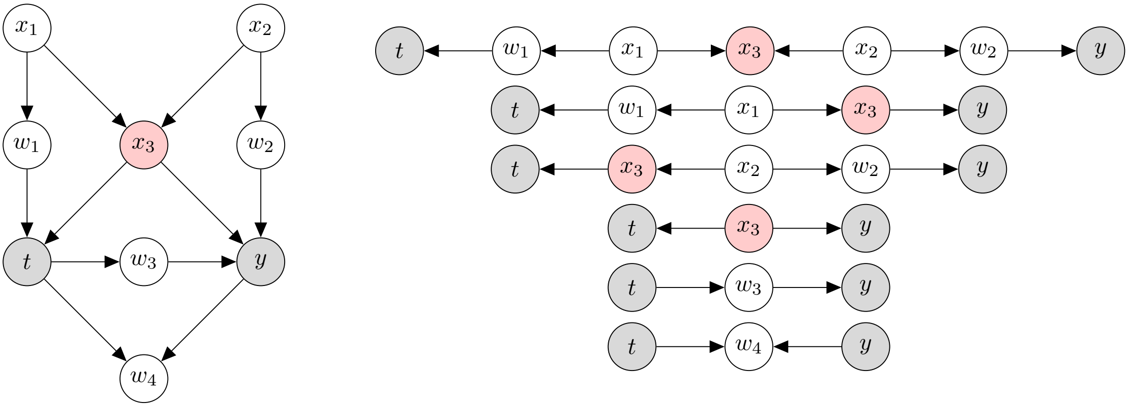




Para hacer predicciones "causales" necesitamos
eliminar el flujo de inferencia que circula por los caminos no causales

Flujo de inferencia

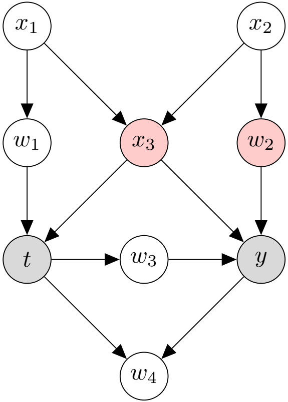
Estructuras complejas (caminos)

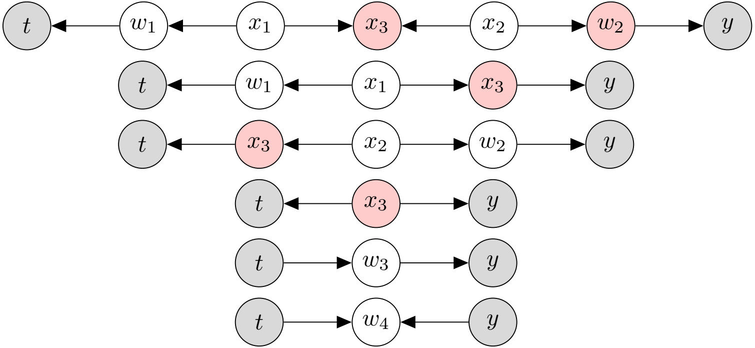


Para hacer predicciones “causales” necesitamos
eliminar el flujo de inferencia que circula por los caminos no causales

Flujo de inferencia

Estructuras complejas (caminos)





Para hacer predicciones "causales" necesitamos
eliminar el flujo de inferencia que circula por los caminos no causales

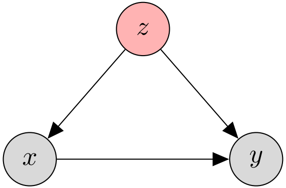
Flujo de inferencia
Variables de control

Backdoor criterion

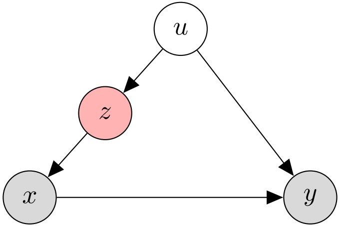
Dado un conjunto de variable $\boldsymbol{Q}$ tal que:

1. $\boldsymbol{Q}$ cierra todos los caminos traseros de T a Y
2. $\boldsymbol{Q}$ no contiene ningún descendiente de T

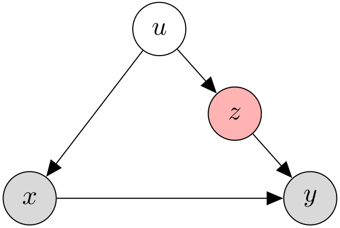
Controles buenos



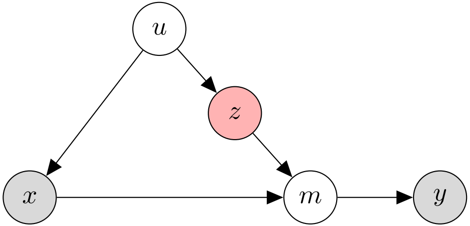
Controles buenos



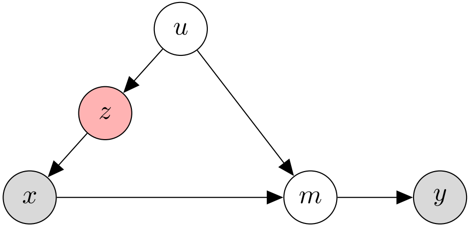
Controles buenos



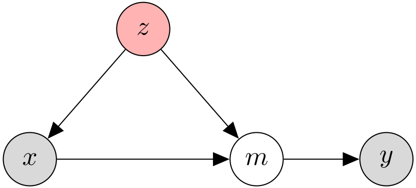
Controles buenos



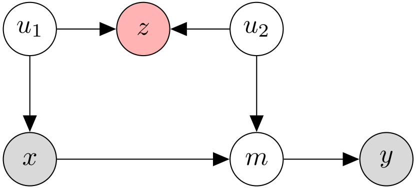
Controles buenos



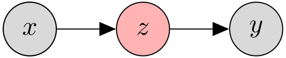
Controles buenos



Controles malos

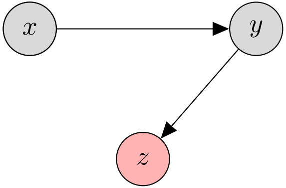


Controles malos



Controles malos

Sesgo de selección

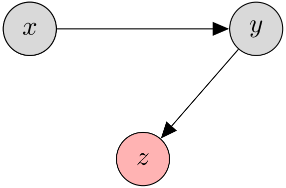


Controles malos

Sesgo de selección

Caso borde $Y = Z$.

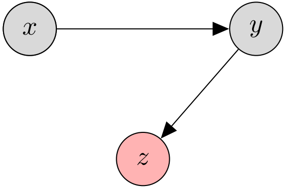
$$\mathbb{E}[Y|T, Z] = \mathbb{E}[Y|T, Y]$$



Controles malos
Sesgo de selección

Caso borde $Y = Z$. T se hace independiente de Y.

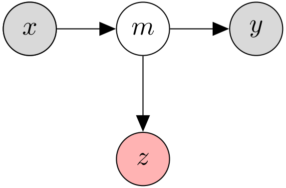
$$\mathbb{E}[Y|T,Z] = \mathbb{E}[Y|T,Y] = \mathbb{E}[Y|Y] = Y$$



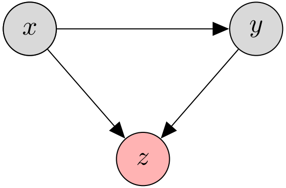
Controles malos
Sesgo de selección

Caso borde $M = Z$. T se hace independiente de Y.

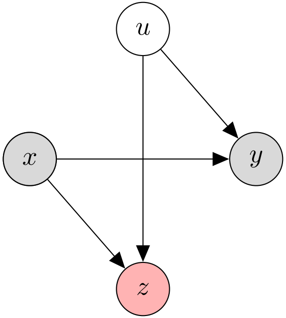
$$\mathbb{E}[Y|T, Z] = \mathbb{E}[Y|T, M]$$



Controles malos

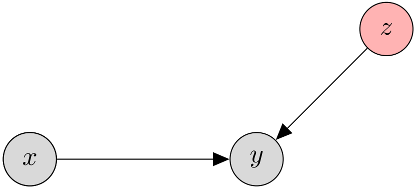


Controles malos



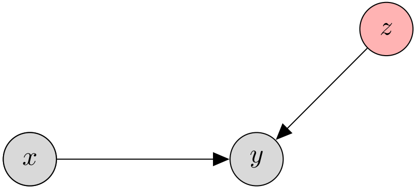
Controles neutrales

Mejoran precisión



Controles neutrales

Mejoran precisión

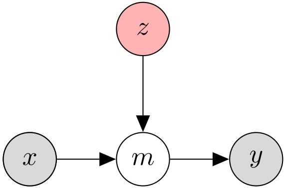


Efectos causales heterogéneos

Distintos en función de las características de las personas

Controles neutrales

Mejoran precisión

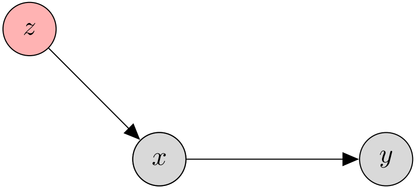


Efectos causales heterogéneos

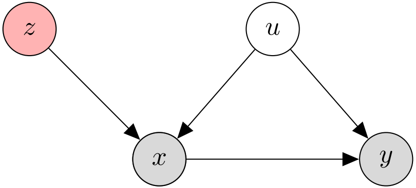
Distintos en función de las características de las personas

Controles

Reducen precisión



Controles malos



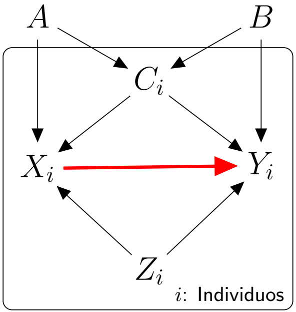
Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente

Los modelos causales son buenos para predecir porque se adaptan al contexto

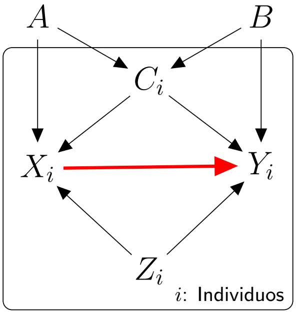
Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente



Para predecir el impacto de las acciones

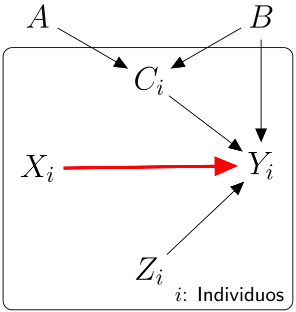
necesitamos conocer la estructura causal subyacente



En los experimentos *aleatorizados* (y en las intervenciones determinísticas) el tratamiento se asigna independientemente de sus causas naturales.

Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente

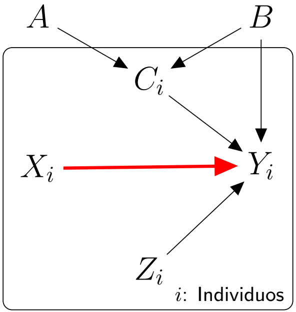


$$\text{do}(X_i)$$

La intervención modifica el mecanismo causal de X: $P(\text{do}(X_i = x)) = \mathbb{I}(X_i = x)$

Para predecir el impacto de las acciones

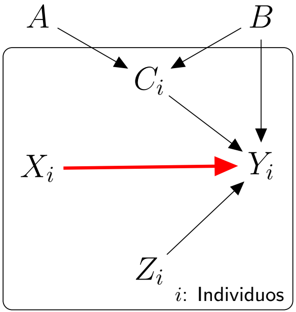
necesitamos conocer la estructura causal subyacente



$$\underbrace{P(y_i|\mathsf{do}(x_i), M)}_{\substack{\text{El impacto de} \\ \text{la intervención}}} \underbrace{=}_{\text{es}} \underbrace{P(y_i|x_i, M_x)}_{\substack{\text{la distribución condicional} \\ \text{en el modelo intervenido}}}$$

Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente

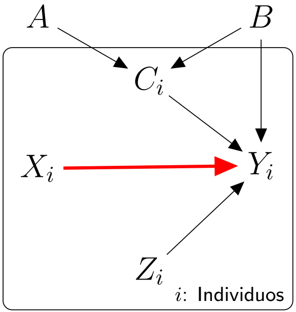


$$P(y_i|\text{do}(x_i)) \quad = \quad P_{M_x}(y_i|x_i)$$

otra notación común

Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente

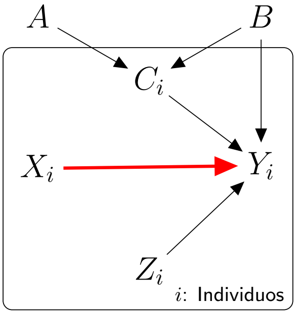


$$P(y_i|\text{do}(x_i)) \quad = \quad P_{M_x}(y_i|x_i)$$

el operador do() modifica la realidad causal subyacente

Para predecir el impacto de las acciones

necesitamos conocer la estructura causal subyacente



$$P(y_i|\text{do}(x_i)) \quad = \quad P_{M_x}(y_i|x_i)$$

en el modelo intervenido toda la asociación es causal (no hay asociación espuria)

¿Cómo **predecir el impacto causal**
a partir de **datos observados sin intervenciones**?

Predicción/estimación de impacto causal
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{\text{Leve } (0), \text{ Severo } (1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{\text{Básico } (0), \text{ Especial } (1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{\text{Leve } (0), \text{ Severo } (1)\}$

¿El Tratamiento es efectivo para mejorar el estado del paciente?

Predicción/estimación de impacto causal
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$			
$T = 1$			

Predicción/estimación de impacto causal
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{\text{Leve } (0), \text{ Severo } (1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{\text{Básico } (0), \text{ Especial } (1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{\text{Leve } (0), \text{ Severo } (1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \vert T = 0, E_0 = 0)$		
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \vert T = 1, E_0 = 0)$		

Predicción/estimación de impacto causal
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \vert T = 0, E_0 = 0)$		
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \vert T = 1, E_0 = 0)$		
	$P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}0)$ $-P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}0)$		

Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 1)$	
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 1)$	
	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}0)$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}0)$		

Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \vert T = 0, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \vert T = 0, E_0 = 1)$	
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \vert T = 1, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \vert T = 1, E_0 = 1)$	
	$P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}0)$ $-P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}0)$	$P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}1)$ $-P(E_1{=}1 \vert \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}1)$	

Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 1)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0)$
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 1)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1)$
	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}0)$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}0)$	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}1)$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}1)$	

Predicción/estimación de impacto causal
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0, E_0 = 1)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 0)$
$T = 1$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 0)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1, E_0 = 1)$	$P(E_1 = 1 \mid T = 1)$
	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}0)$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}0)$	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0}, E_0{=}1)$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1}, E_0{=}1)$	$P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}0})$ $-P(E_1{=}1 \mid \boldsymbol{T{=}1})$

Predicción/estimación de impacto causal

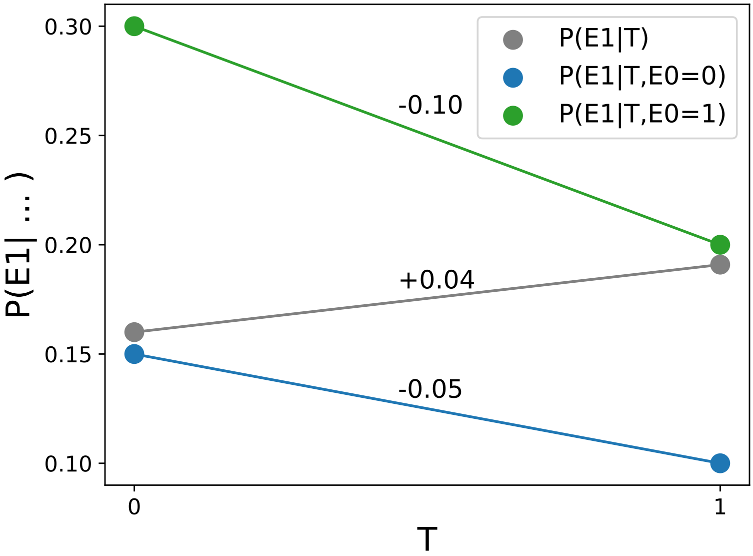
con datos observados sin intervenciones

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	15% 210/1400	30% 30/100	16% 240/1500
$T = 1$	10% 5/50	20% 100/500	19% 105/550
	-5%	-10%	$+4\%$

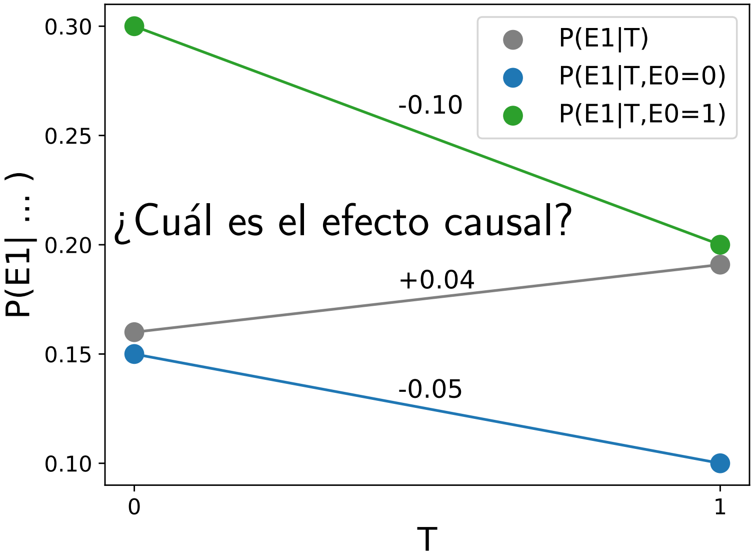
Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones



Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones



Predicción/estimación de impacto causal

con datos observados sin intervenciones

Para predecir el impacto causal de las acciones
necesitamos conocer la estructura causal subyacente

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

- Estado inicial: $E_0 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$
- Tratamiento: $T \in \{$Básico (0), Especial $(1)\}$
- Estado final: $E_1 \in \{$Leve (0), Severo $(1)\}$

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

$$
\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T \arrow[rr] & & E_1
\end{tikzcd}
$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

$$
\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
T \arrow[rr] & & E_1
\end{tikzcd}
$$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	15% 210/1400	30% 30/100	16% 240/1500
$T = 1$	10% 5/50	20% 100/500	19% 105/550

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

$P(E_0)$

$E_0 = 0$	$E_0 = 1$
1450/2050	600/2050

$$\begin{tikzcd} & E_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T \arrow[rr] & & E_1 \end{tikzcd}$$

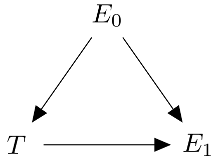
	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	15% 210/1400	30% 30/100	16% 240/1500
$T = 1$	10% 5/50	20% 100/500	19% 105/550

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

$P(E_0)$

$E_0 = 0$	$E_0 = 1$
1450/2050	600/2050



$P(T|E_0)$

	$T = 0$	$T = 1$
$E_0 = 0$	1400/1450	50/1450
$E_0 = 1$	100/600	500/600

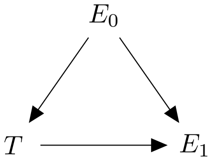
	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	15% 210/1400	30% 30/100	16% 240/1500
$T = 1$	10% 5/50	20% 100/500	19% 105/550

Estimación de efecto causal

Modelo causal (M)

$P(E_0)$

$E_0 = 0$	$E_0 = 1$
1450/2050	600/2050



$P(T|E_0)$

	$T = 0$	$T = 1$
$E_0 = 0$	1400/1450	50/1450
$E_0 = 1$	100/600	500/600

$P(E_1|T, E_0)$

$(E_0 = 0)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.85	$\mathbf{0.15}$
$T = 1$	0.90	$\mathbf{0.10}$

$(E_0 = 1)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.70	$\mathbf{0.30}$
$T = 1$	0.80	$\mathbf{0.20}$

	$E_0 = 0$	$E_0 = 1$	
$T = 0$	15% 210/1400	30% 30/100	16% 240/1500
$T = 1$	10% 5/50	20% 100/500	19% 105/550

Estimación de efecto causal

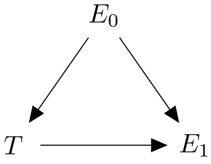
Modelo causal (M)

$P(E_0)$

$E_0 = 0$	$E_0 = 1$
1450/2050	600/2050

$P(T|E_0)$

	$T = 0$	$T = 1$
$E_0 = 0$	1400/1450	50/1450
$E_0 = 1$	100/600	500/600



$P(E_1|T, E_0)$

$(E_0 = 0)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.85	**0.15**
$T = 1$	0.90	**0.10**

$(E_0 = 1)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.70	**0.30**
$T = 1$	0.80	**0.20**

$P(E_1|T, E_0)$ es una predicción sin asociación espuria

un efecto causal *heterogéneo*, específico a cada estado inicial E_0

Estimación de efecto causal

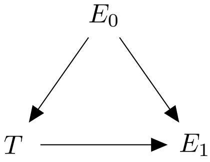
Modelo causal (M)

$P(E_0)$

$E_0 = 0$	$E_0 = 1$
1450/2050	600/2050

$P(T|E_0)$

	$T = 0$	$T = 1$
$E_0 = 0$	1400/1450	50/1450
$E_0 = 1$	100/600	500/600



$P(E_1|T, E_0)$

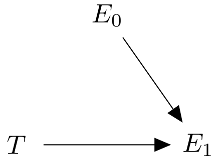
$(E_0 = 0)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.85	**0.15**
$T = 1$	0.90	**0.10**

$(E_0 = 1)$	$E_1 = 0$	$E_1 = 1$
$T = 0$	0.70	**0.30**
$T = 1$	0.80	**0.20**

$$P(E_1|\mathsf{do}(T))?$$

Estimación de efecto causal

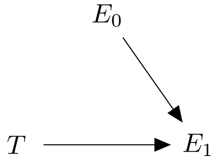
Modelo causal intervenido (M_T)



Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \text{Bern}(0.5)$$



Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$

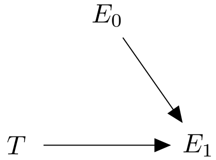
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[d] \\
T \arrow[r] & E_1
\end{tikzcd}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

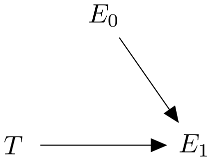
$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T,E_0) = P(E_1|T,E_0)$$



Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$



$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t)$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$

$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$

$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$

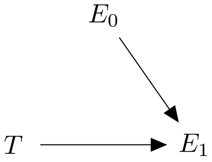
$$\begin{tikzcd} & E_0 \arrow[d] \\ T \arrow[r] & E_1 \end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1, t)}{P_{M_T}(t)}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$



$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1, t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0, t, e_1)}{P_{M_T}(t)}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$

$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$

$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[d] \\
T \arrow[r] & E_1
\end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1, t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\, P_{M_T}(t)\, P_{M_T}(e_1|t, e_0)}{P_{M_T}(t)}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T,E_0) = P(E_1|T,E_0)$$

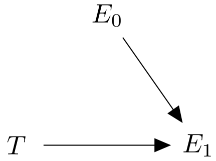
$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[d] \\
T \arrow[r] & E_1
\end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1,t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t,e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \textsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T,E_0) = P(E_1|T,E_0)$$



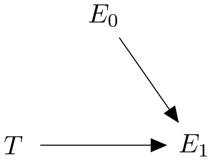
$$P(e_1|\textsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1,t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t,e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

$$= \sum_{e0} P_{M_T}(e_0)P_{M_T}(e_1|t,e_0)$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T,E_0) = P(E_1|T,E_0)$$



$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1,t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t,e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

$$= \sum_{e0} P(e_0)P(e_1|t,e_0)$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$

$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$

$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$

$$\begin{tikzcd}
 & E_0 \arrow[d] \\
T \arrow[r] & E_1
\end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1, t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t, e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

$$= \underbrace{\sum_{e0} P(e_0)P(e_1|t, e_0)}_{\substack{\text{Distribuciones} \\ \text{observadas!}}}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T, E_0) = P(E_1|T, E_0)$$

$$\begin{tikzcd} & E_0 \arrow[d] \\ T \arrow[r] & E_1 \end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1, t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t, e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

$$= \underbrace{\sum_{e0} P(e_0)P(e_1|t, e_0)}_{\text{Distribuciones observadas!}}$$

- Encontramos los efectos causales en cada subgrupo $P(e_1|t, \boldsymbol{e_0})$
- Y los ponderamos por el tamaño de cada subgrupo $P(\boldsymbol{e_0})$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$P_{M_T}(T) = \mathsf{Bern}(0.5)$$
$$P_{M_T}(E_0) = P(E_0)$$
$$P_{M_T}(E_1|T,E_0) = P(E_1|T,E_0)$$

$$\begin{tikzcd} & E_0 \arrow[d] \\ T \arrow[r] & E_1 \end{tikzcd}$$

$$P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1,t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t,e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}$$

$$= \sum_{e0} P(e_0)P(e_1|t,e_0)$$

$$\underbrace{P(E_1=1|\mathsf{do}(T=1)) - P(E_1=1|\mathsf{do}(T=0))}_{\text{Efecto causal general}}$$

Estimación de efecto causal

Modelo causal intervenido (M_T)

$$
\begin{aligned}
P_{M_T}(T) &= \mathsf{Bern}(0.5) \\
P_{M_T}(E_0) &= P(E_0) \\
P_{M_T}(E_1|T,E_0) &= P(E_1|T,E_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & E_0 \arrow[d] \\
T \arrow[rr] & & E_1
\end{tikzcd}
$$

$$
P(e_1|\mathsf{do}(t)) = P_{M_T}(e_1|t) = \frac{P_{M_T}(e_1,t)}{P_{M_T}(t)} = \frac{\sum_{e0} P_{M_T}(e_0)\cancel{P_{M_T}(t)}P_{M_T}(e_1|t,e_0)}{\cancel{P_{M_T}(t)}}
$$

$$
= \sum_{e0} P(e_0)P(e_1|t,e_0)
$$

$$
\underbrace{P(E_1=1|\mathsf{do}(T=1)) - P(E_1=1|\mathsf{do}(T=0))}_{\text{Efecto causal general}} = -0.0646
$$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. Especificar la estructura causal subyacente.

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. Especificar la estructura causal subyacente.
2. Definir el estimando (variables de control y modelo)

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. Especificar la estructura causal subyacente.
2. Definir el estimando (variables de control y modelo)
3. Computar las estimaciones de impacto causal

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. Especificar la estructura causal subyacente.
2. Definir el estimando (variables de control y modelo)
3. Computar las estimaciones de impacto causal
4. Validar los resultados

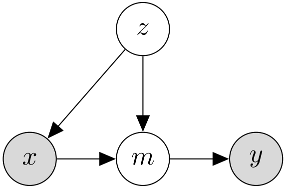
Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. Definir el estimando (variables de control y modelo)
3. Computar las estimaciones de impacto causal
4. Validar los resultados

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Especificar la estructura causal subyacente

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x, 1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2, 1)$$



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. Definir el estimando (variables de control y modelo)
3. Computar las estimaciones de impacto causal
4. Validar los resultados

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

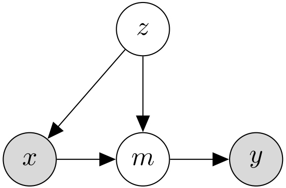
Definir el estimando (variables de control y modelo)

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. Computar las estimaciones de impacto causal
4. Validar los resultados

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

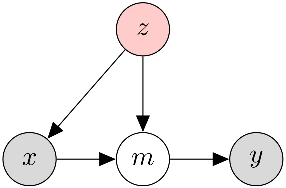
$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2,1)$$



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

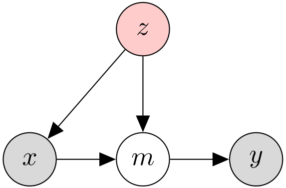
$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x, 1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2, 1)$$



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2+10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$

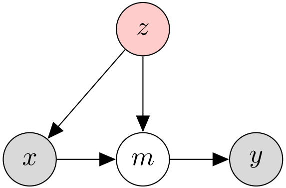


¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$



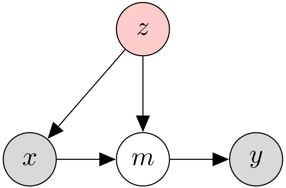
¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

Siempre podemos evaluar modelos alternativos en base a la evidencia

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2+10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$



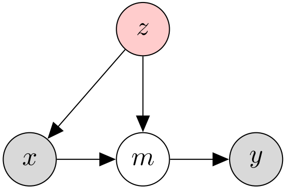
¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

Pero acá conocemos la función.

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x, 1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2, 1)$$



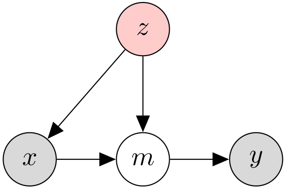
¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

$\mathbb{E}[y|m] = -1 + 2m^2$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x, 1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$



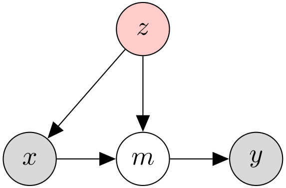
¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

$$\mathbb{E}[y|m] = -1 + 2m^2 = -1 + 2(2z^2 + 10x)^2$$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2+10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$



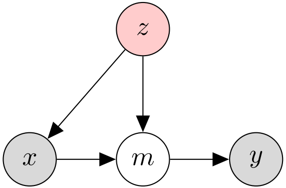
¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[y|m] &= -1+2m^2 = -1+2(2z^2+10x)^2 \\ &\boldsymbol{= -1 + 200x^2 + 80xz^2 + 8z^4 = \mathbb{E}[y|x,z]}\end{aligned}$$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Definir el estimando (variables de control y modelo)

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2+10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1+2m^2,1)$$



¿Qué polinomio debemos usar para modelar la regresión lineal?

$$y \sim x^2 + xz^2 + z^4$$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. Computar las estimaciones de impacto causal
4. Validar los resultados

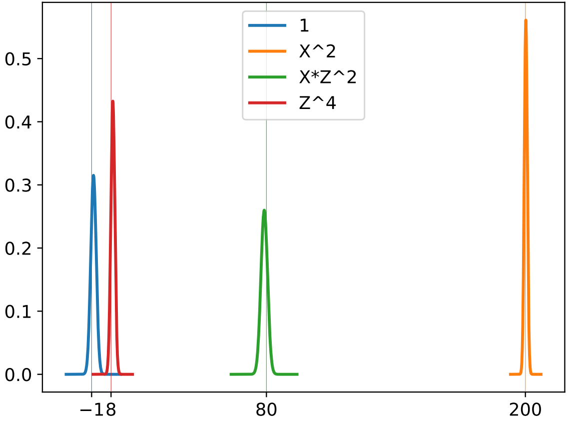
Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Computar las estimaciones de impacto causal

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. **Computar las estimaciones de impacto causal**
4. Validar los resultados

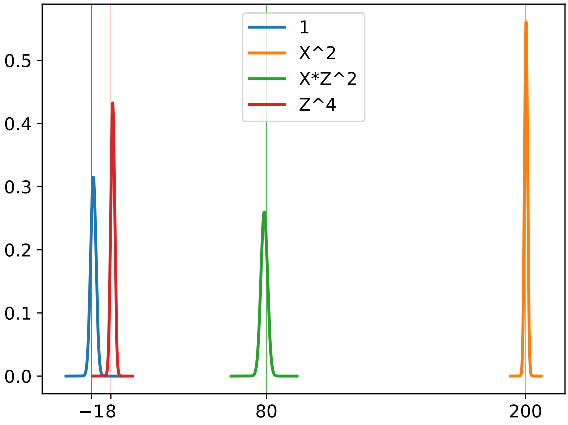
Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Computar las estimaciones de impacto causal



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Computar las estimaciones de impacto causal



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Validar los resultados

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. **Computar las estimaciones de impacto causal**
4. **Validar los resultados**

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Validar los resultados

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. **Computar las estimaciones de impacto causal**
4. **Validar los resultados**

Estimamos correctamente los efectos causales heterogéneos

$$P(y|x, z)$$

Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

Validar los resultados

1. **Especificar la estructura causal subyacente**.
2. **Definir el estimando (variables de control y modelo)**
3. **Computar las estimaciones de impacto causal**
4. **Validar los resultados**

Estimamos correctamente los efectos causales heterogéneos

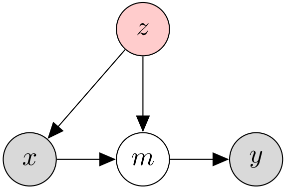
$$P(y|x, z)$$

pero todavía no estimamos el efecto causal general

$$P(y|\text{do}(x)) = P_{M_x}(y|x)$$

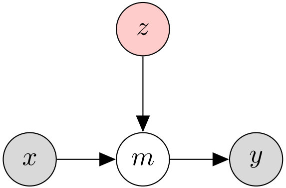
Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(x|z) = \mathcal{N}(x|z^2,1)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x,1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2,1)$$



Los 4 pasos de la estimación de efecto causales

$$P(z) = \mathcal{N}(z|0,1)$$
$$P(\mathsf{do}(x)) = \mathbb{I}(X = x)$$
$$P(m|x,z) = \mathcal{N}(m|2z^2 + 10x, 1)$$
$$P(y|m) = \mathcal{N}(y|-1 + 2m^2, 1)$$



¿ $P(y|\mathsf{do}(x)) = P_{M_x}(y|x)$?

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

Adjustment formula

Si un conjunto de variables Q cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$P(Y = y|\mathsf{do}(X = x)) = P_{M_x}(Y = y|X = x)$$

Estimador del efecto causal general
Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned} P(Y = y|\mathsf{do}(X = x)) &= P_{M_x}(Y = y|X = x) \\ &= \sum_{q} P_{M_x}(Y = y, Q = q|X = x) \end{aligned}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
P(Y=y|\mathsf{do}(X=x)) &= P_{M_x}(Y=y|X=x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Y=y,Q=q|X=x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Q=q|X=x)P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q)
\end{aligned}
$$

Estimador del efecto causal general
Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
P(Y=y|\mathsf{do}(X=x)) &= P_{M_x}(Y=y|X=x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Y=y, Q=q|X=x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Q=q|X=x) P_{M_x}(Y=y|X=x, Q=q) \\
&\overset{*}{=} \sum_{\boldsymbol{q}} P(Q=q)\, P(Y=y|X=x, Q=q)
\end{aligned}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
P(Y = y|\mathsf{do}(X = x)) &= P_{M_x}(Y = y|X = x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Y = y, Q = q|X = x) \\
&= \sum_{\boldsymbol{q}} P_{M_x}(Q = q|X = x) P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_{\boldsymbol{q}} P(Q = q) \underbrace{P(Y = y|X = x, Q = q)}_{\substack{\text{Estimación del efecto} \\ \text{causal específico a } q}}
\end{aligned}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$\begin{aligned}
P(Y=y|\mathsf{do}(X=x)) &= P_{M_x}(Y=y|X=x) \\
&= \sum_q P_{M_x}(Y=y, Q=q|X=x) \\
&= \sum_q P_{M_x}(Q=q|X=x) P_{M_x}(Y=y|X=x, Q=q) \\
&\stackrel{*}{=} \sum_q \underbrace{P(Q=q)}_{\text{Peso de } q} \underbrace{P(Y=y|X=x, Q=q)}_{\substack{\text{Estimación del efecto} \\ \text{causal específico a } q}}
\end{aligned}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Estimador del efecto causal general
Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) \stackrel{?}{=} P(Y = y|X = x, Q = q)$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) \stackrel{?}{=} P(Y = y|X = x, Q = q)$

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) \stackrel{?}{=} P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) \stackrel{?}{=} P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) \stackrel{?}{=} P(Q=q)$

Estimador del efecto causal general
Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos.

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) \overset{?}{=} P(Q=q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q)$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X).

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q) \stackrel{?}{=} P(Q=q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = \sum_{W,X,Y} P(Q,W,X,Y)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = \sum_{W,X,Y} P(Q)P(W, X, Y|Q)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \stackrel{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,X,Y} P(W, X, Y|Q)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q) \stackrel{?}{=} P(Q=q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \underbrace{\sum_{W,X,Y} P(W,X,Y|Q)}_{1}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \overset{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,X,Y} P(W, Y|Q)P(X|Q, W, Y)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.

$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q) \overset{?}{=} P(Q=q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,Y} P(W,Y|Q) \sum_{X} P(X|Q,W,Y)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \overset{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,Y} P(W, Y|Q) \underbrace{\sum_{X} P(X|Q, W, Y)}_{1}$$

Estimador del efecto causal general
Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y=y|X=x,Q=q) = P(Y=y|X=x,Q=q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q) \stackrel{?}{=} P(Q=q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q=q|X=x) = P_{M_x}(Q=q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,Y} P(W,Y|Q)$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) \overset{?}{=} P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,Y} P(W, Y|Q) \quad \text{la condicional de } X \text{ no afecta la marginal}$$

Estimador del efecto causal general

Adjustment formula

Demostración

Parte 1. $P_{M_x}(Y = y|X = x, Q = q) = P(Y = y|X = x, Q = q)$

$1.a$ Del lado izquierdo toda la asociación es causal porque X no recibe flechas.
$1.b$ Del lado derecho toda la asociación es causal porque Q corta el flujo trasero.

Parte 2. $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q) = P(Q = q)$

$2.a$ En el lado izquierdo X no recibe flechas, se conecta con Q solo por caminos con collider ocultos. Luego, $P_{M_x}(Q = q|X = x) = P_{M_x}(Q = q)$

$2.b$ Ambas marginales se obtienen integrando sus conjuntas respectivas (la única diferencia es la condicional de X). Sea W el resto de las variables.

$$P(Q) = P(Q) \sum_{W,Y} P(W, Y|Q) \quad \text{la condicional de } X \text{ no afecta la marginal}$$

Adjustment formula

Si un conjunto de variables $\boldsymbol{Q}$ cumple con el criterio *backdoor* de X a Y, entonces el efecto causal de X en Y es estimable (identificable) a través de la siguiente fórmula:

$$\underbrace{P(y|\mathsf{do}(x)) = P_{M_x}(y|x)}_{\text{Realidad intervenida}} = \sum_q \underbrace{\overbrace{P(q)}^{\text{Peso del efecto}} \; \overbrace{P(y|x,q)}^{\text{Efecto heterogéneo}}}_{\text{Realidad sin intervenir}}$$

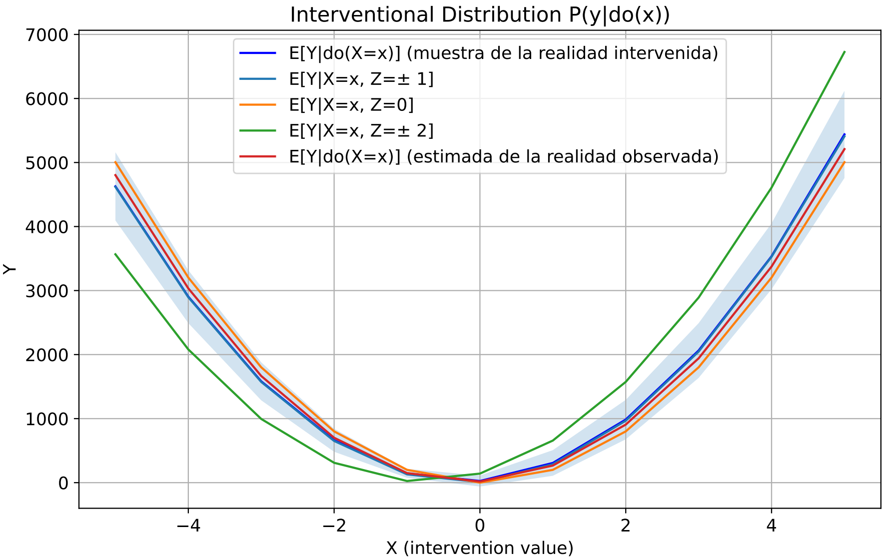
Estimación de efecto causal general

Modelo polinomial

```
def p_Y_doX(y,x):
    res = 0
    for z in z_grilla:
        pz = normal(0,1).pdf(z)
        mu_y_xz = regression(y,x,z)
        py_xz = norm(loc=mu_y_xz, scale=sigma).pdf(y)
        res += (pz*py_xz)*dz
    return res
```

Estimación de efecto causal general

Modelo polinomial



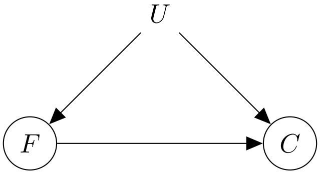
Casos especiales

La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables



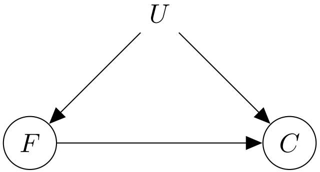
Casos especiales

La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables



No podemos eliminar la asociación espuria entre F y C!

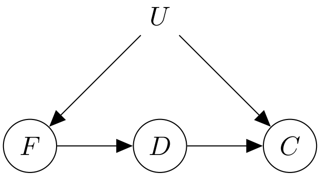
Casos especiales
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Casos especiales

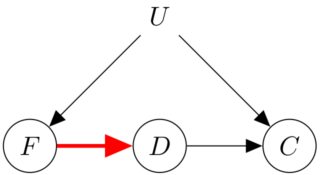
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Casos especiales

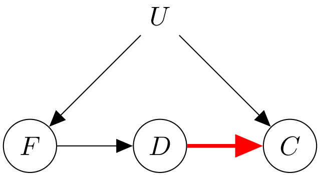
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Casos especiales

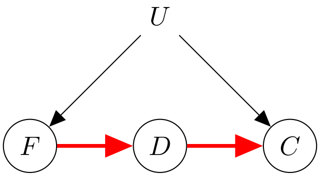
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Casos especiales

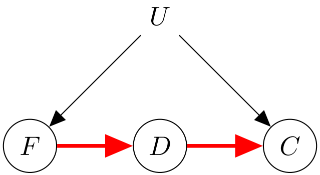
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Ajuste frontdoor.

Casos especiales

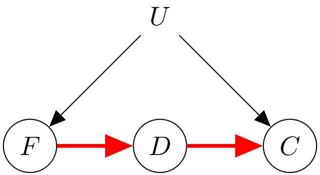
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Ajuste frontdoor.

$$P(c|\text{do}(f)) = \sum_d P(c|\text{do}(d))P(d|\text{do}(f))$$

Casos especiales

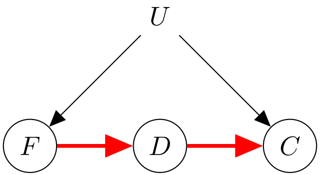
La disputa contra la industria del tabaco

F : Fumar

C : Cancer

U : Otras variables

D : Depósitos en pulmones



Ajuste frontdoor.

Condición: hay una sola variable mediadora.

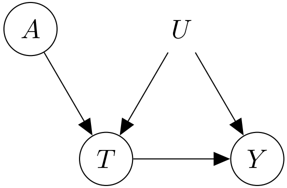
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



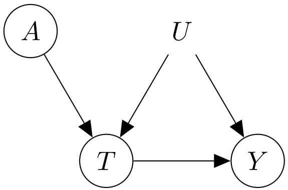
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



No podemos eliminar la asociación espuria entre T e Y!

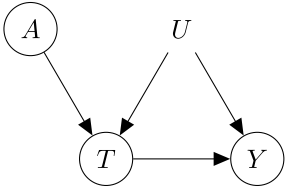
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Casos especiales

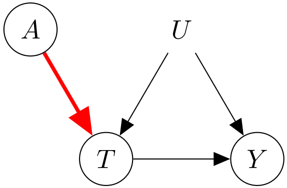
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



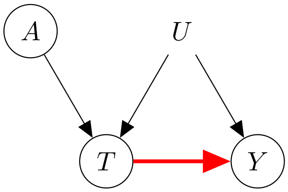
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Casos especiales

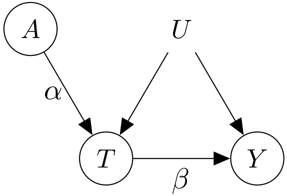
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Casos especiales

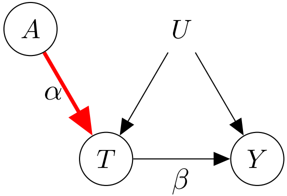
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Instrumental variable

$$\mathbb{E}[t|\mathsf{do}(a)] = \alpha\, a$$

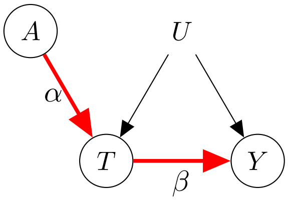
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Instrumental variable

$$\mathbb{E}[t|\text{do}(a)] = \alpha\, a$$
$$\mathbb{E}[y|\text{do}(a)] = \alpha\, \beta\, a$$

Casos especiales

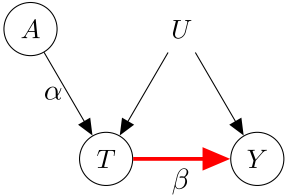
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo



Instrumental variable

$$\mathbb{E}[t|\text{do}(a)] = \alpha\, a$$

$$\mathbb{E}[y|\text{do}(a)] = \alpha\, \beta\, a$$

$$\mathbb{E}[y|\text{do}(x)] = \mathbb{E}[y|\text{do}(a)]/\mathbb{E}[t|\text{do}(a)]$$

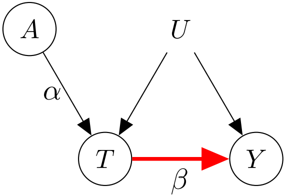
Casos especiales
Experimentos imperfectos

A : Asignación aleatoria

T : Tratamiento

U : Otras variables

Y : Objetivo

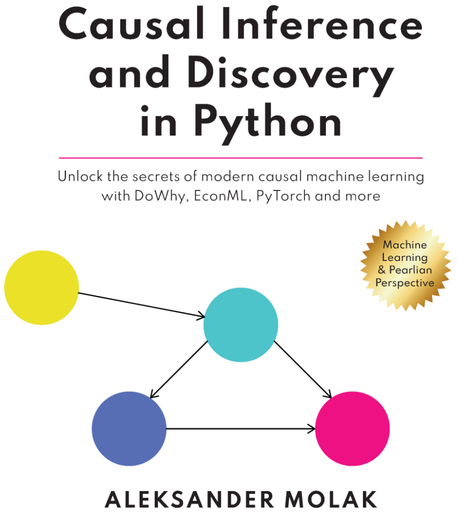


Instrumental variable

Condición: T es la única variable mediadora.

El ecosistema causal de Python

DoWhy, EconML, PyTorch y más



Resumen de inferencia causal

Los **niveles** del razonamiento causal

1. **Asociacional**: $P(y \,|\, x, \text{Modelo Causal})$ y $P(\text{Modelo Causal} \,|\, x)$
   Permite evaluar el efecto y el modelo causal sólo si se cumplen ciertas condiciones

Resumen de inferencia causal

Los **niveles** del razonamiento causal

1. **Asociacional**: $P(y \,|\, x, \text{Modelo Causal})$ y $P(\text{Modelo Causal} \,|\, x)$
   Permite evaluar el efecto y el modelo causal sólo si se cumplen ciertas condiciones

2. **Intervencional**: $P(y \,|\, \text{do}(x), \text{Modelo Causal})$ y $P(\text{Modelo Causal} \,|\, y, \text{do}(x))$
   Permite evaluar tanto el efecto causal y el modelo causal

Resumen de inferencia causal

Los **niveles** del razonamiento causal

1. **Asociacional**: $P(y \,|\, x, \text{Modelo Causal})$ y $P(\text{Modelo Causal} \,|\, x)$

   Permite evaluar el efecto y el modelo causal sólo si se cumplen ciertas condiciones

2. **Intervencional**: $P(y \,|\, \text{do}(x), \text{Modelo Causal})$ y $P(\text{Modelo Causal} \,|\, y, \text{do}(x))$

   Permite evaluar tanto el efecto causal y el modelo causal

3. **Contrafactual**: $P(\overbrace{y \,|\, \text{do}(x),}^{\text{Contrafactual}} \overbrace{y', \text{do}(x'),}^{\text{Factual}} \text{Modelo Causal})$

   Permite predecir el contrafactual (dado un modelo causal completo)

Resumen de inferencia causal

Los **niveles** del razonamiento causal

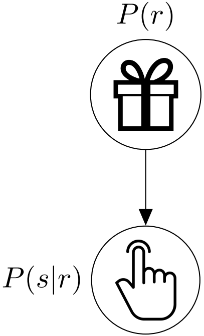
Estos niveles surgen naturalmente
del proceso generativo de lo datos

Monty Hall Causal

Los **niveles** del razonamiento causal

Monty Hall Causal

Asociación

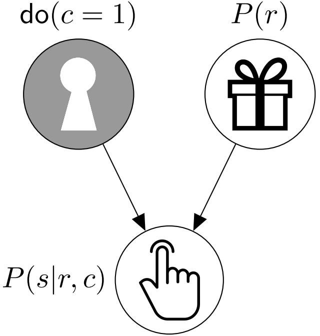


Asociación

$$P(r, s)$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	$1/6$	$1/6$
$s2$	$1/6$	0	$1/6$
$s3$	$1/6$	$1/6$	0

Monty Hall Causal
Intervención



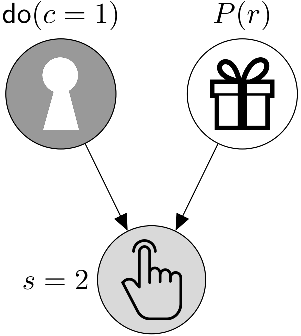
Intervención

$$P(r, s|\text{do}(c = 1))$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	0	0
$s2$	$1/6$	0	$1/3$
$s3$	$1/6$	$1/3$	0

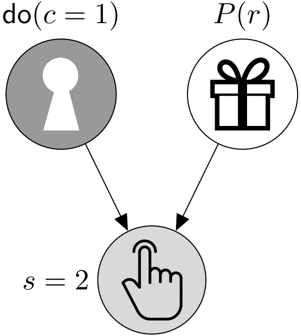
Monty Hall Causal

Contrafáctico



¿Que caja hubiera señalado si hubieramos elegido la caja 2,
dado que elegimos la caja 1 y señaló la caja 2?

Monty Hall Causal
Contrafáctico



Factual

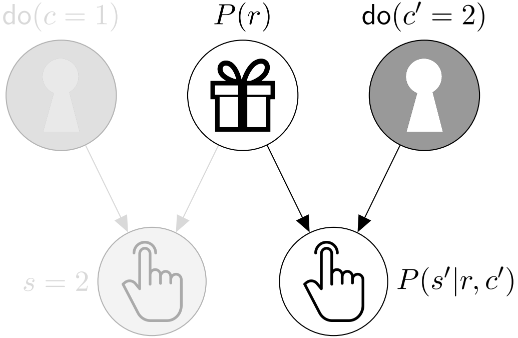
$$P(r|\text{do}(c = 1), s = 2)$$

$r1$	$r2$	$r3$
$1/3$	0	$2/3$

¿Que caja hubiera señalado si hubieramos elegido la caja 2, dado que elegimos la caja 1 y señaló la caja 2?

Monty Hall Causal

Contrafáctico



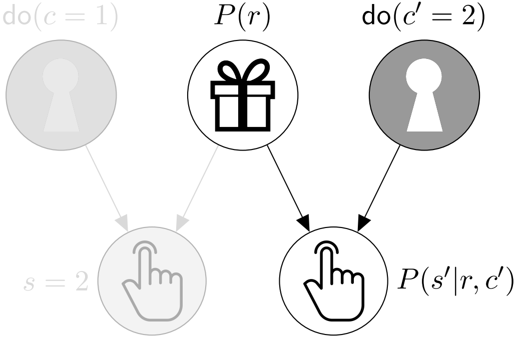
Contra factual

$$P(s', r | \text{do}(c=1), s=2, \text{do}(c'=2))$$

¿Que caja hubiera señalado si hubieramos elegido la caja 2, dado que elegimos la caja 1 y señaló la caja 2?

Monty Hall Causal

Contrafáctico



Contra factual

$$P(s', r | \text{do}(c = 1), s = 2, \text{do}(c' = 2))$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s'1$	0	0	2/3
$s'2$	0	0	0
$s'3$	1/3	0	0

¿Que caja hubiera señalado si hubieramos elegido la caja 2, dado que elegimos la caja 1 y señaló la caja 2?

Monty Hall Causal

Los **niveles** del razonamiento causal

Asociación

$$P(r, s)$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	$1/6$	$1/6$
$s2$	$1/6$	0	$1/6$
$s3$	$1/6$	$1/6$	0

Monty Hall Causal

Los **niveles** del razonamiento causal

Asociación

$$P(r, s)$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	$1/6$	$1/6$
$s2$	$1/6$	0	$1/6$
$s3$	$1/6$	$1/6$	0

Intervención

$$P(r, s|\mathsf{do}(c = 1))$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	0	0
$s2$	$1/6$	0	$1/3$
$s3$	$1/6$	$1/3$	0

Monty Hall Causal

Los **niveles** del razonamiento causal

Asociación

$$P(r,s)$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	$1/6$	$1/6$
$s2$	$1/6$	0	$1/6$
$s3$	$1/6$	$1/6$	0

Intervención

$$P(r,s|\mathsf{do}(c=1))$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s1$	0	0	0
$s2$	$1/6$	0	$1/3$
$s3$	$1/6$	$1/3$	0

Contra factual

$$P(s',r|\mathsf{do}(c'=2),\mathsf{do}(c=1),s=2)$$

	$r1$	$r2$	$r3$
$s'1$	0	0	$2/3$
$s'2$	0	0	0
$s'3$	$1/3$	0	0

$p = b$

Laboratorios de
Métodos Bayesianos