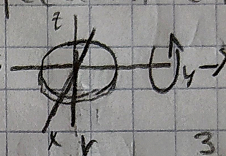
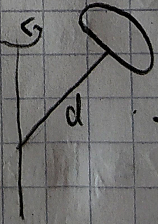
3) a- Se puede ver que el disco rota pero su precesión está dada por una rotación en un eje paralelo al disco. →  → Primero calcularemos I_z

$\Rightarrow I_z = \int r'^2 dm \rightarrow$ donde $dm = \rho dA = \rho 2\pi r' dr' \Rightarrow I_z = \int_0^r 2\pi\rho r'^3 dr'$

$\Rightarrow$ pero $\rho = \frac{M}{A} = \frac{M}{\pi r^2} \Rightarrow I_z = \frac{2M}{r^2}\int_0^r r'^3 dr' = \frac{mr^2}{2} \rightarrow I_z = I_x + I_y ; I_y = I_x$

$\Rightarrow I_0 = I_{xy} = \frac{I_z}{2} = \frac{mr^2}{4}$ // → sabiendo el momento de inercia del disco sabemos que su eje de giro está desplazado al eje x o y

Por ende usamos Teorema de ejes paralelos:  $\rightarrow I_{Total} = I_0 + md^2$

$I_0 = \frac{mr^2}{4} + md^2$ //

b- ya hemos calculado el momento de inercia del disco con el eje z;

$$I_z = \frac{1}{2} m r^2 \;//$$

c- $\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_0(\dot\theta^2 + \dot\phi^2 \sin^2\theta) + \frac{1}{2} I_z(\dot\phi\cos\theta + \dot\psi)^2 - mgd\cos\theta$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\theta} = I_0\dot\phi^2 \sin\theta\cos\theta - I_z(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\dot\phi\sin\theta + mgd\sin\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\theta} = I_0\dot\theta \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\theta}\right] = I_0\ddot\theta$$

$$\Rightarrow I_0\ddot\theta - I_0\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta + I_z\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta + I_z\dot\phi\dot\psi\sin\theta - mgd\sin\theta = 0$$

$$\Rightarrow I_0\ddot\theta = \dot\phi^2\sin\theta\cos\theta(I_0 - I_z) - I_z\dot\phi\dot\psi\sin\theta + mgd\sin\theta \;//$$

→ note que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi}=0$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\phi}=0$ $\therefore \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\psi}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\phi}\right]=0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\psi}=cte, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\phi}=cte$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = I_z(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi) = cte \;//$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\dot\phi} = I_0\dot\phi\sin^2\theta + I_z(\dot\phi\cos\theta+\dot\psi)\cos\theta = \dot\phi(I_0 \sin^2\theta + I_z\cos^2\theta) + I_z\dot\psi\cos\theta \;//$$