Condiciones de Optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

Eddy Kennedy Mamani Hallasi

February 4, 2025

Repositorio GitHub

Puedes acceder al repositorio GitHub con el siguiente enlace:

`https://github.com/MetodosDeOptimizacion/-Karush-Kuhn-Tucker.git`

1 Introducción

Las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) son un conjunto de reglas que nos ayudan a encontrar soluciones óptimas en problemas de optimización con restricciones. Estas reglas son muy útiles porque, en algunos casos, nos aseguran que una solución que cumple con ellas es la mejor posible. Son una extensión del método de los multiplicadores de Lagrange, que se usaba para problemas con restricciones de igualdad, pero KKT está diseñado para trabajar también con restricciones de desigualdad, lo que lo hace aún más versátil en optimización no lineal.

Para un problema de optimización en la forma estándar:

$$\min_{x \in R^n} f(x)$$

sujeto a

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m, \quad h_j(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Donde:

- $f(x)$ es la función objetivo a minimizar.
- $g_i(x) \leq 0$ son restricciones de desigualdad.
- $h_j(x) = 0$ son restricciones de igualdad.

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x).$$

Las condiciones de KKT incluyen:

- Condición de Estacionariedad:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x^*) = 0.$$

- Condición de Factibilidad Primal:

$$g_i(x^*) \leq 0, \quad h_j(x^*) = 0.$$

- Condición de Factibilidad Dual:

$$\lambda_i \geq 0, \quad \forall i.$$

- Condición de Complementariedad:

$$\lambda_i g_i(x^*) = 0, \quad \forall i.$$

En problemas convexos, estas condiciones son suficientes para garantizar optimalidad global.

Ejercicio 1

Resolver las condiciones de KKT para el siguiente problema:

$$\min_{x_1, x_2} f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$$

sujeto a la restricción:

$$x_1 + 2x_2 - 3 \leq 0.$$

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(x_1 + 2x_2 - 3).$$

Las condiciones de KKT son las siguientes:

- **Estacionariedad:**

$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g(x^*) = 0$$

- **Factibilidad primal:**

$$g(x^*) \leq 0, \quad h(x^*) = 0.$$

- **Factibilidad dual:**
$$\lambda \geq 0.$$

- **Condición de complementariedad:**
$$\lambda g(x^*) = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + 2\lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + 2x_2 - 3.$$

Para que la estacionariedad se cumpla, resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$2x_1 + \lambda = 0, \quad 4x_2 + 2\lambda = 0, \quad x_1 + 2x_2 - 3 = 0.$$

Al resolver este sistema, obtenemos los valores óptimos de x_1, x_2 y λ.

Ejercicio 2

Considerar el problema de minimización:

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2$$

sujeto a las restricciones:

$$x_1 + x_2 - 2 \leq 0, \quad x_1 \geq 0.$$

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x_1, x_2, \lambda, \mu) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2) + \mu x_1.$$

Las condiciones de KKT son:

- **Estacionariedad:**
$$\nabla f(x^*) + \lambda \nabla g_1(x^*) + \mu \nabla g_2(x^*) = 0$$

- **Factibilidad primal:**
$$g_1(x^*) \leq 0, \quad g_2(x^*) \leq 0.$$

- **Factibilidad dual:**
$$\lambda \geq 0, \quad \mu \geq 0.$$

- **Condición de complementariedad:**
$$\lambda g_1(x^*) = 0, \quad \mu g_2(x^*) = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda + \mu, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2, \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = x_1.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener los valores óptimos de x_1, x_2, λ y μ.

Ejercicio 3

Se tiene un problema de maximización:

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$$

sujeto a las restricciones:

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

El Lagrangiano del problema es:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 3x_1 + 4x_2 + \lambda_1(9 - x_1^2 - x_2^2) + \lambda_2 x_1 + \lambda_3 x_2.$$

Las condiciones de KKT son:

- **Estacionariedad:**

$$\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \lambda_2 \nabla g_2(x^*) + \lambda_3 \nabla g_3(x^*) = 0$$

- **Factibilidad primal:**

$$g_1(x^*) \leq 0, \quad g_2(x^*) \leq 0, \quad g_3(x^*) \leq 0.$$

- **Factibilidad dual:**

$$\lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0.$$

- **Condición de complementariedad:**

$$\lambda_1 g_1(x^*) = 0, \quad \lambda_2 g_2(x^*) = 0, \quad \lambda_3 g_3(x^*) = 0.$$

Calculamos las derivadas parciales del Lagrangiano:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 3 - 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 2\lambda_1 x_2 + \lambda_3.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones para obtener los valores óptimos.