PROGRAMACION NO LINEAL: Convexidad de Funciones

Eddy Kennedy Mamani Hallasi

January 30, 2025

Repositorio

Los recursos utilizados en este informe se encuentran disponibles en el siguiente repositorio de GitHub:

`https://github.com/MetodosDeOptimizacion/Programacion-No-Lineal.git`

Introducción

Este informe describe el desarrollo de una aplicación interactiva para graficar funciones matemáticas y verificar su convexidad. La aplicación fue desarrollada usando **Streamlit**, un marco de trabajo para crear aplicaciones web interactivas en Python.

Puedes acceder a la aplicación y probarla en el siguiente enlace:

https://programacion-no-lineal-u9hejdxkk7dzp4skfby6wc.streamlit.app/

La aplicación permite ingresar una función matemática en términos de x, y graficarla mientras se verifica si la función es convexa o no. Además, la aplicación calcula las derivadas de la función e informa si la función es convexa en $x = 0$.

1 Combinación Convexa de Funciones Convexas

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones convexas en un intervalo I, entonces cualquier combinación lineal no negativa de ellas también es convexa. Esto se demuestra matemáticamente mediante la siguiente desigualdad:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

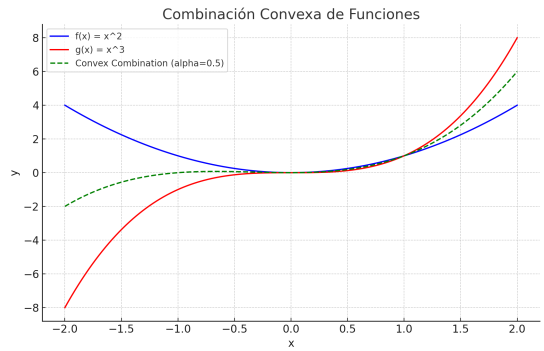

Figure 1: Gráfica de la combinación convexa de funciones

2 Efecto de Multiplicar una Función Convexa por un Escalar Positivo

Si $f(x)$ es convexa y $\gamma \geq 0$, entonces la función $h(x) = \gamma f(x)$ también es convexa.

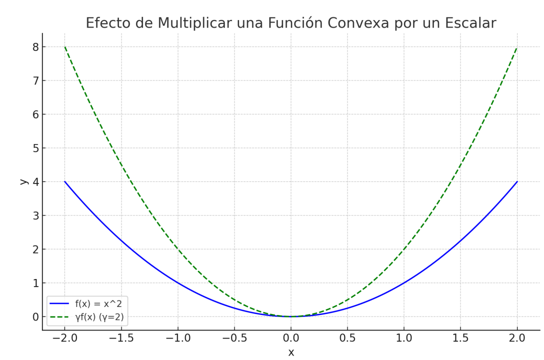

Figure 2: Efecto de multiplicar una función convexa por un escalar positivo

3 Criterio de la Segunda Derivada

Si una función $f(x)$ es dos veces diferenciable y su segunda derivada es no negativa en un intervalo I, es decir, $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces la función es convexa.

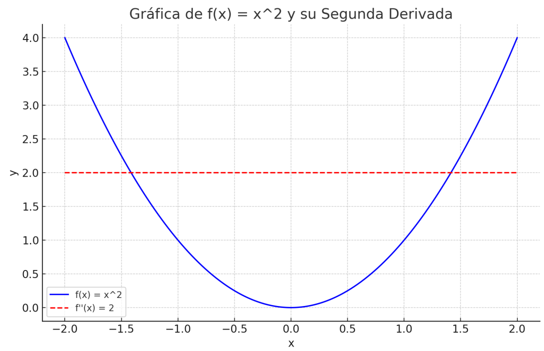

Figure 3: Gráfica de la función $f(x) = x^2$ y su Segunda Derivada

4 Funciones Lineales

Toda función lineal de la forma $f(x) = ax + b$ es tanto convexa como cóncava.

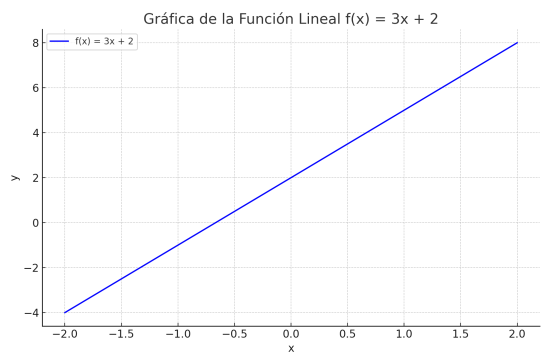

Figure 4: Gráfica de la función lineal $f(x) = 3x + 2$

5 Epígrafe de una Función Convexa

El conjunto de puntos por encima de la gráfica de una función convexa, conocido como epígrafe, es un conjunto convexo.

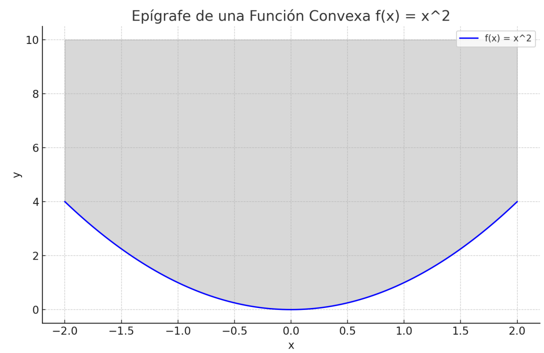

Figure 5: Epígrafe de una función convexa

6 Mínimos Locales y Globales

En una función convexa definida en un conjunto convexo, cualquier mínimo local es también un mínimo global.

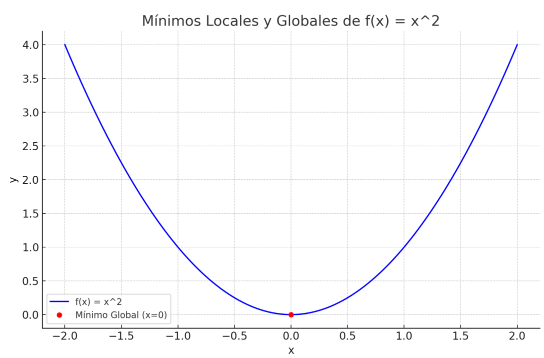

Figure 6: Mínimos locales y globales de $f(x) = x^2$

Conclusión

La convexidad es una propiedad fundamental en el análisis de funciones y la optimización. A lo largo de este informe, hemos demostrado cómo varias propiedades de las funciones convexas, como la combinación convexa de funciones y el impacto de la multiplicación por un escalar positivo, se pueden verificar tanto mediante análisis matemáticos como gráficos. Además, hemos verificado que la función cuadrática $f(x) = x^2$ es convexa en todo su dominio, utilizando criterios como la segunda derivada. Estas propiedades son esenciales para resolver problemas de optimización, ya que garantizan que los mínimos locales también son globales.