Evaluación Práctica : Optimización [FINESI]

NOMBRE: Eddy Kennedy Mamani Hallasi

January 22, 2025

Introducción

En este documento se presentan los 10 ejercicios resueltos de la práctica realizada el día de hoy. Cada ejercicio ha sido desarrollado paso a paso, usando métodos como la Regla de Cramer, el Método de Gauss-Jordan y el Método Simplex.

El propósito es mostrar soluciones claras y fáciles de entender para problemas de matemáticas aplicadas y optimización. Además, cada solución incluye explicaciones para que se pueda comprender mejor cómo se resolvieron los ejercicios.

Este documento está hecho para ayudar a entender los temas y ponerlos en práctica de forma sencilla.

EJERCICIO 1

En el marco de una investigación sobre movilidad urbana en Lima, se desea modelar el costo diario (C) de movilizar datos de sensores de tráfico desde dos distritos: San Isidro (variable x) y Surco (variable y). La función de costo es:

$$C(x, y) = 4x + 6y \quad \text{(en soles).}$$

Donde x e y representan el número de gigabytes procesados al día en cada distrito. Se sabe que:

- $x + y \leq 100$ (límite de capacidad de red),
- $x \geq 10,\ y \geq 5$ (mínimos de datos por contrato),
- $x, y \geq 0$.

Explique cómo podría usarse este modelo para estimar costos de transferencia de datos en un proyecto piloto de análisis de tráfico.

Resolución del Ejercicio 1

I. Definición del modelo

La función objetivo es minimizar el costo total $C(x, y)$, dado por:

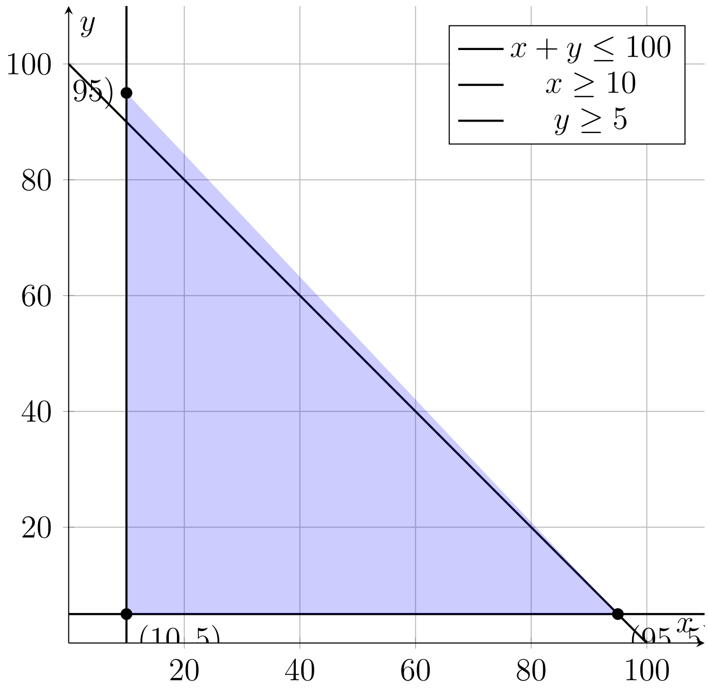
$$C(x, y) = 4x + 6y.$$

Las restricciones del modelo son:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 100, \\ x &\geq 10, \\ y &\geq 5, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

II. Interpretación gráfica

Para entender mejor el modelo, se pueden graficar las restricciones en un plano xy y determinar la región factible. Los vértices de esta región serán evaluados en la función objetivo para encontrar el mínimo costo.



III. Solución analítica

Se identifican los puntos de intersección de las restricciones:

- Punto 1: $(10, 5)$
- Punto 2: $(10, 90)$
- Punto 3: $(95, 5)$
- Punto 4: $(10, 90)$

Sustituyendo en $C(x, y)$:

$$\begin{aligned} C(10,5) &= 4(10) + 6(5) = 40 + 30 = 70, \\ C(10,90) &= 4(10) + 6(90) = 40 + 540 = 580, \\ C(95,5) &= 4(95) + 6(5) = 380 + 30 = 410. \end{aligned}$$

IV. Conclusión

El costo mínimo es $C(10, 5) = 70$ soles, que ocurre cuando $x = 10$ y $y = 5$. Este resultado permite estimar costos en un proyecto piloto considerando las restricciones dadas.

EJERCICIO 2

Una startup en Arequipa se especializa en ofrecer servicios de análisis de datos de ventas de granos andinos. La empresa contrata x analistas junior y y analistas senior para procesar la información proveniente de diferentes asociaciones de productores locales. El costo total se modela como:

$$C(x, y) = 1500x + 3000y \quad \text{(en soles al mes).}$$

Por políticas internas, se requiere al menos un total de 8 analistas (entre junior y senior), y al menos 3 deben ser senior para garantizar experiencia en proyectos. Además, la capacidad máxima de contratación es 12 personas.

Resolución del Ejercicio 2

I. Definición del modelo

La función objetivo es minimizar el costo total $C(x, y)$, dado por:

$$C(x, y) = 1500x + 3000y.$$

Las restricciones del modelo son:

$$\begin{aligned} x + y &\geq 8, \\ y &\geq 3, \\ x + y &\leq 12, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

II. Solución analítica

Para determinar el costo mínimo, se evalúan los vértices de la región factible:

- Punto 1: $(5, 3)$
- Punto 2: $(7, 5)$
- Punto 3: $(8, 4)$

Sustituyendo en $C(x, y)$:

$$\begin{aligned} C(5, 3) &= 1500(5) + 3000(3) = 7500 + 9000 = 16500, \\ C(7, 5) &= 1500(7) + 3000(5) = 10500 + 15000 = 25500, \\ C(8, 4) &= 1500(8) + 3000(4) = 12000 + 12000 = 24000. \end{aligned}$$

III. Conclusión

El costo mínimo es $C(5, 3) = 16500$ soles, que ocurre cuando se contratan 5 analistas junior y 3 analistas senior. Esto satisface las restricciones y minimiza el costo total.

EJERCICIO 3

Para monitorear la deforestación en la Amazonía peruana, se utilizan drones que capturan imágenes satelitales. Suponga que x y y representan el número de vuelos realizados en la región de Madre de Dios y en Ucayali, respectivamente. La cobertura (en kilómetros cuadrados) se modela como:

$$S(x, y) = 50x + 65y.$$

Las restricciones de presupuesto y logística imponen:

$$\begin{aligned} 3x + 4y &\leq 200 \quad \text{(presupuesto en miles de soles)}, \\ x + y &\leq 40 \quad \text{(tiempo de operación limitado)}, \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

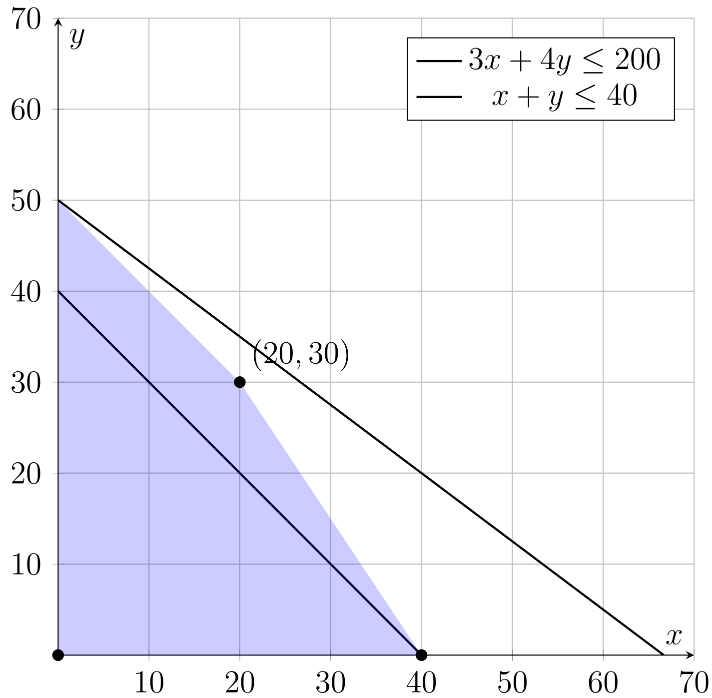
Describa el objetivo de maximizar la cobertura S(x, y). ¿Qué tipo de análisis de datos podría hacerse con las imágenes recolectadas?

I. Definición del problema

El objetivo es maximizar la cobertura total $S(x, y)$, bajo las restricciones mencionadas. Esto representa el área total monitoreada con los recursos disponibles.

II. Interpretación gráfica

La región factible definida por las restricciones se puede representar gráficamente para identificar los puntos extremos. Estos puntos serán evaluados en la función objetivo para encontrar la solución óptima.



III. Evaluación de los puntos extremos

Los vértices de la región factible son:

- Punto 1: $(0, 0)$,
- Punto 2: $(40, 0)$,
- Punto 3: $(20, 30)$.

Sustituyendo en la función objetivo $S(x, y) = 50x + 65y$:

$$\begin{aligned} S(0,0) &= 50(0) + 65(0) = 0, \\ S(40,0) &= 50(40) + 65(0) = 2000, \\ S(20,30) &= 50(20) + 65(30) = 1000 + 1950 = 2950. \end{aligned}$$

IV. Conclusión

La cobertura máxima es $S(20, 30) = 2950$ kilómetros cuadrados, alcanzada cuando se realizan 20 vuelos en Madre de Dios y 30 vuelos en Ucayali. Las imágenes recolectadas pueden ser utilizadas para:

- Identificar patrones de deforestación.
- Detectar actividades ilegales como minería o tala no autorizada.
- Monitorear áreas protegidas y evaluar el impacto ambiental de proyectos de desarrollo.

EJERCICIO 4

Una cooperativa cafetalera en Junín realiza un pronóstico de ventas semanal en función de dos factores: precio promedio por kilo (x) y calidad estandarizada de grano (y). El modelo lineal para la venta total (en toneladas) se define por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y = 40, \\ 3x + y = 70. \end{cases}$$

Emplee la Regla de Cramer para hallar x y y, e interprete los resultados en términos de precio promedio (soles/kg) y un índice cuantitativo de calidad.

I. Definición del problema

El objetivo es determinar el precio promedio por kilogramo (x) y el índice de calidad del grano (y) que cumplan con el modelo propuesto. Este sistema de ecuaciones relaciona dos variables clave:

- x: Representa el precio promedio por kilogramo de café (en soles).
- y: Representa un índice cuantitativo que mide la calidad del grano.

El modelo permite analizar cómo estos factores afectan las ventas semanales de la cooperativa, y proporciona un enfoque basado en datos para la planificación estratégica.

II. Resolución del sistema

Para resolver el sistema de ecuaciones, se utiliza la Regla de Cramer.

1. Determinante de la matriz de coeficientes (det(A)): La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (3)(2) = 1 - 6 = -5.$$

2. Determinante para x (det(x)): Reemplazamos la primera columna de la matriz de coeficientes con el vector de términos independientes:

$$\det(x) = \begin{vmatrix} 40 & 2 \\ 70 & 1 \end{vmatrix} = (40)(1) - (70)(2) = 40 - 140 = -100.$$

3. Determinante para y (det(y)): Reemplazamos la segunda columna de la matriz de coeficientes con el vector de términos independientes:

$$\det(y) = \begin{vmatrix} 1 & 40 \\ 3 & 70 \end{vmatrix} = (1)(70) - (3)(40) = 70 - 120 = -50.$$

4. Solución: Con la Regla de Cramer, calculamos x y y:

$$x = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{-100}{-5} = 20, \quad y = \frac{\det(y)}{\det(A)} = \frac{-50}{-5} = 10.$$

III. Interpretación de los resultados

- $x = 20$: El precio promedio por kilogramo de café es de 20 soles.
- $y = 10$: El índice de calidad del grano es de 10 (en una escala definida por la cooperativa).

IV. Conclusión

El modelo permite identificar que, con un precio promedio de 20 soles por kilo y un índice de calidad de 10, la cooperativa puede alcanzar las 40 toneladas semanales de ventas totales. Estos valores son esenciales para ajustar estrategias de producción y comercialización, optimizando los recursos y maximizando la rentabilidad.

EJERCICIO 5

Para un sistema de reconocimiento automático de especies marinas en mercados mayoristas del Callao se tienen tres variables que describen: luminosidad de la imagen (x), contraste de bordes (y) y color promedio (z). Un modelo de calibración de sensores establece:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 20, \\ x + 4y + 2z = 23, \\ 3x + 2y + z = 16. \end{cases}$$

Resuelva para determinar los valores de x, y, z. Explique cómo estos parámetros mejoran el algoritmo de clasificación.

I. Definición del problema

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones lineales para obtener los valores de x, y, y z, que representan características importantes de las imágenes capturadas:

- x: Luminosidad de la imagen.
- y: Contraste de bordes.
- z: Color promedio.

Estos parámetros se utilizan para calibrar sensores y mejorar la precisión de un algoritmo de clasificación de especies marinas.

II. Resolución del sistema

Se utiliza la Regla de Cramer para resolver el sistema.

1. Determinante de la matriz de coeficientes (det(A)): La matriz de coeficientes es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

El determinante de A es:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(4 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 1(1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + 3(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4).$$

$$\det(A) = 2(4 - 4) - 1(1 - 6) + 3(2 - 12) = 0 + 5 - 30 = -25.$$

2. Determinante para x (det(x)): Reemplazamos la primera columna de A con el vector de términos independientes:

$$\det(x) = \begin{vmatrix} 20 & 1 & 3 \\ 23 & 4 & 2 \\ 16 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Expandiendo:

$$\det(x) = 20(4 \cdot 1 - 2 \cdot 2) - 1(23 \cdot 1 - 16 \cdot 2) + 3(23 \cdot 2 - 16 \cdot 4).$$

$$\det(x) = 20(4 - 4) - 1(23 - 32) + 3(46 - 64) = 0 + 9 - 54 = -45.$$

3. Determinante para y (det(y)): Reemplazamos la segunda columna de A con el vector de términos independientes:

$$\det(y) = \begin{vmatrix} 2 & 20 & 3 \\ 1 & 23 & 2 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix}.$$

Expandiendo:

$$\det(y) = 2(23 \cdot 1 - 16 \cdot 2) - 20(1 \cdot 1 - 3 \cdot 2) + 3(1 \cdot 16 - 3 \cdot 23).$$

$$\det(y) = 2(23 - 32) - 20(1 - 6) + 3(16 - 69) = 2(-9) - 20(-5) + 3(-53).$$

$$\det(y) = -18 + 100 - 159 = -77.$$

4. Determinante para z (det(z)): Reemplazamos la tercera columna de A con el vector de términos independientes:

$$\det(z) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 20 \\ 1 & 4 & 23 \\ 3 & 2 & 16 \end{vmatrix}.$$

Expandiendo:

$$\det(z) = 2(4 \cdot 16 - 2 \cdot 23) - 1(1 \cdot 16 - 3 \cdot 23) + 20(1 \cdot 2 - 3 \cdot 4).$$

$$\det(z) = 2(64 - 46) - 1(16 - 69) + 20(2 - 12).$$

$$\det(z) = 2(18) - 1(-53) + 20(-10) = 36 + 53 - 200 = -111.$$

5. Solución: Con la Regla de Cramer, calculamos:

$$x = \frac{\det(x)}{\det(A)} = \frac{-45}{-25} = 1.8, \quad y = \frac{\det(y)}{\det(A)} = \frac{-77}{-25} = 3.08, \quad z = \frac{\det(z)}{\det(A)} = \frac{-111}{-25} = 4.44.$$

III. Interpretación de los resultados

- $x = 1.8$: La luminosidad de la imagen calibrada es 1.8 unidades.
- $y = 3.08$: El contraste de bordes optimizado es 3.08 unidades.
- $z = 4.44$: El color promedio ajustado es 4.44 unidades.

IV. Conclusión

Los valores obtenidos permiten calibrar los sensores para mejorar el rendimiento del algoritmo de clasificación, asegurando que las imágenes tengan luminosidad, contraste y color óptimos. Esto facilita la identificación precisa de especies marinas en mercados mayoristas, aumentando la eficiencia del sistema.

EJERCICIO 6

Un estudio de Data Science sobre la expansión de microrredes en zonas rurales en Puno plantea el siguiente sistema para balancear costos de infraestructura (x), capacidad de generación (y) y reserva de potencia (z) en tres zonas:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 8, \\ 2x - y + 4z = 12, \\ -x + 3y + 2z = 6. \end{cases}$$

Encuentre las soluciones de x, y, z. Interprete cada variable en un contexto de planificación energética: suponga que x está en miles de soles, y en megavatios (MW), y z en MW de reserva.

I. Definición del problema

El objetivo es encontrar los valores de x, y, y z que cumplan con el sistema de ecuaciones. Estas variables representan:

- x: Costos de infraestructura (en miles de soles).
- y: Capacidad de generación eléctrica (en MW).
- z: Reserva de potencia (en MW).

El método de Gauss-Jordan nos permite resolver el sistema transformando la matriz ampliada en su forma escalonada reducida.

II. Resolución mediante el método de Gauss-Jordan

1. Escritura del sistema en forma matricial ampliada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right].$$

2. Paso 1: Normalizar la fila 1 (pivote en $a_{11} = 1$): Dividimos la fila 1 entre 1 (el pivote):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & -1 & 4 & 12 \\ -1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right].$$

(Fila 2: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$; Fila 3: $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$).

3. Paso 2: Normalizar la fila 2 (pivote en $a_{22} = -5$): Dividimos la fila 2 entre -5:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & -5 & 2 & -4 \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right].$$

(Fila 2: $F_2 \rightarrow -\frac{1}{5}F_2$).

4. **Paso 3: Eliminar los elementos de la columna 2:** Usamos la fila 2 para eliminar los elementos a_{12} y a_{32}:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 5 & 3 & 14 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & \frac{19}{5} & \frac{54}{5} \end{array}\right].$$

(Fila 1: $F_1 \to F_1 - 2F_2$; Fila 3: $F_3 \to F_3 - 5F_2$).

5. **Paso 4: Normalizar la fila 3 (pivote en $a_{33} = \frac{19}{5}$):** Dividimos la fila 3 entre $\frac{19}{5}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{9}{5} & \frac{28}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{19} \end{array}\right].$$

6. **Paso 5: Eliminar los elementos de la columna 3:** Usamos la fila 3 para eliminar los elementos a_{13} y a_{23}:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{19} \end{array}\right].$$

7. **Solución final:** La solución del sistema es:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = \frac{18}{19}.$$

III. Interpretación de los resultados

- $x = 2$: El costo de infraestructura es 2000 soles.
- $y = 1$: La capacidad de generación eléctrica es de 1 MW.
- $z = \frac{18}{19} = 0.947$: La reserva de potencia es de aproximadamente 0.947 MW.

IV. Conclusión

El método de Gauss-Jordan permitió resolver el sistema de ecuaciones lineales de manera eficiente. Los valores obtenidos reflejan cómo se distribuyen los recursos en términos de costos, capacidad y reserva, lo que facilita la planificación energética en zonas rurales.

EJERCICIO 7

Un modelo lineal simple para predecir la demanda de tickets de tren en dos estaciones (Ollantaytambo y Poroy) se describe con:

$$\begin{cases} x + y = 350, \\ 2x - y = 100. \end{cases}$$

Donde x e y representan la cantidad proyectada de turistas (en miles) por cada estación en un mes pico. Resuelva mediante Gauss-Jordan y explique qué implicaría cada solución en la planificación de rutas turísticas.

I. Definición del problema

El objetivo es determinar los valores de x y y, que representan:

- x: Cantidad proyectada de turistas en Ollantaytambo (en miles).
- y: Cantidad proyectada de turistas en Poroy (en miles).

Estos valores son fundamentales para planificar la asignación de trenes y rutas en un mes de alta demanda.

II. Resolución mediante el método de Gauss-Jordan

1. Escritura del sistema en forma matricial ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{array}\right].$$

2. Paso 1: Normalizar la fila 1 (pivote en $a_{11} = 1$): Dividimos la fila 1 entre 1 (el pivote):

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 2 & -1 & 100 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{array}\right].$$

(Fila 2: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$).

3. Paso 2: Normalizar la fila 2 (pivote en $a_{22} = -3$): Dividimos la fila 2 entre -3:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & -3 & -600 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right].$$

4. Paso 3: Eliminar el elemento a_{12}: Usamos la fila 2 para eliminar el elemento a_{12} en la fila 1:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 150 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right].$$

(Fila 1: $F_1 \rightarrow F_1 - F_2$).

5. Solución: La matriz escalonada reducida nos da directamente:

$$x = 150, \quad y = 200.$$

III. Interpretación de los resultados

- $x = 150$: Se proyecta que 150 mil turistas utilicen la estación de Ollantaytambo.
- $y = 200$: Se proyecta que 200 mil turistas utilicen la estación de Poroy.

Estos valores indican la distribución de la demanda, permitiendo planificar la cantidad de trenes necesarios en cada estación para satisfacer las necesidades de los turistas.

IV. Conclusión

El método de Gauss-Jordan permitió resolver el sistema de ecuaciones lineales de manera eficiente. Los resultados ayudan a identificar la demanda específica en cada estación, lo que facilita la planificación de rutas y la optimización de recursos durante los meses de alta demanda turística.

EJERCICIO 8

Una empresa agroexportadora en Piura desea combinar tres variedades de mango (A, B, C) y un conservante (w) para lograr un producto optimizado. Las ecuaciones que describen la mezcla (en toneladas diarias) son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 70 \\ 80 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Use el método Gauss-Jordan para determinar A, B, C, w.

I. Definición del problema

El objetivo es resolver el sistema de ecuaciones que describe la mezcla de las variedades de mango y el conservante. Las variables representan:

- A: Cantidad de la variedad de mango A (en toneladas diarias).
- B: Cantidad de la variedad de mango B (en toneladas diarias).
- C: Cantidad de la variedad de mango C (en toneladas diarias).
- w: Cantidad del conservante (en toneladas diarias).

II. Resolución mediante el método de Gauss-Jordan

1. Escritura del sistema en forma matricial ampliada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

2. Paso 1: Normalizar la fila 1 (pivote en $a_{11} = 1$): Dividimos la fila 1 entre 1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 70 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & -30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

(Fila 2: $F_2 \rightarrow F_2 - 2F_1$; Fila 3: $F_3 \rightarrow F_3 - F_1$; Fila 4 no cambia porque $a_{41} = 0$).

3. Paso 2: Normalizar la fila 2 (pivote en $a_{22} = -1$): Dividimos la fila 2 entre -1:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 60 \end{array}\right].$$

4. Paso 3: Eliminar los elementos de la columna 2: Usamos la fila 2 para eliminar los elementos a_{32} y a_{42}:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 30 \end{array}\right].$$

(Fila 1: $F_1 \to F_1 - F_2$; Fila 3: $F_3 \to F_3 - F_2$; Fila 4: $F_4 \to F_4 - F_2$).

5. Paso 4: Normalizar la fila 3 (pivote en $a_{33} = 2$): Dividimos la fila 3 entre 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 30 \end{array}\right].$$

6. Paso 5: Eliminar los elementos de la columna 3: Usamos la fila 3 para eliminar los elementos a_{13}, a_{23}, y a_{43}:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 30 \end{array}\right].$$

7. Paso 6: Normalizar la fila 4 (pivote en $a_{44} = 2$): Dividimos la fila 4 entre 2:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

8. Paso 7: Eliminar el elemento a_{24}: Usamos la fila 4 para eliminar a_{24}:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \end{array}\right].$$

9. Solución final: La solución del sistema es:

$$A = 20, \quad B = 15, \quad C = 15, \quad w = 15.$$

III. Interpretación de los resultados

- $A = 20$: Se utilizan 20 toneladas diarias de la variedad de mango A.
- $B = 15$: Se utilizan 15 toneladas diarias de la variedad de mango B.
- $C = 15$: Se utilizan 15 toneladas diarias de la variedad de mango C.
- $w = 15$: Se requieren 15 toneladas diarias del conservante.

IV. Conclusión

El método de Gauss-Jordan permitió determinar las cantidades necesarias para optimizar la mezcla del producto. Estos valores aseguran que la combinación cumpla con los requerimientos diarios, optimizando el uso de los recursos disponibles.

EJERCICIO 9

Una agencia de marketing digital en Lima procesa grandes volúmenes de datos de redes sociales. Cada servidor de tipo 1 puede analizar 200 mensajes por hora y cada servidor de tipo 2 puede analizar 300 mensajes por hora. El costo por día de un servidor tipo 1 es S/ 400 y el de tipo 2 es S/ 700. Se dispone de un presupuesto de S/ 7000 diarios y se desea analizar al menos 4000 mensajes por hora. Defina el modelo para minimizar el costo diario, escriba las restricciones y soluciones posibles.

I. Definición del problema

El objetivo es determinar cuántos servidores de tipo 1 (x) y de tipo 2 (y) contratar para:

- Minimizar el costo diario:

$$C(x, y) = 400x + 700y.$$

- Satisfacer las siguientes restricciones:

$$\begin{aligned} 200x + 300y &\geq 4000 \quad \text{(mensajes mínimos por hora)}, \\ 400x + 700y &\leq 7000 \quad \text{(presupuesto diario)}, \\ x, y &\geq 0 \quad \text{(no puede haber servidores negativos)}. \end{aligned}$$

II. Resolución mediante Gauss-Jordan

Para simplificar, transformamos las restricciones en un sistema de ecuaciones:

1. Escribir el sistema en forma matricial ampliada:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 200 & 300 & 4000 \\ 400 & 700 & 7000 \end{array}\right].$$

2. Paso 1: Normalizar la fila 1 (pivote en $a_{11} = 200$): Dividimos la fila 1 entre 200:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 20 \\ 400 & 700 & 7000 \end{array}\right].$$

3. Paso 2: Eliminar el elemento a_{21}: Usamos la fila 1 para eliminar a_{21} (elemento de la fila 2, columna 1):

$$F_2 \to F_2 - 400 \cdot F_1.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 20 \\ 0 & 100 & 2000 \end{array}\right].$$

4. Paso 3: Normalizar la fila 2 (pivote en $a_{22} = 100$): Dividimos la fila 2 entre 100:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1.5 & 20 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right].$$

5. Paso 4: Eliminar el elemento a_{12}: Usamos la fila 2 para eliminar a_{12} (elemento de la fila 1, columna 2):

$$F_1 \to F_1 - 1.5 \cdot F_2.$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 20 \end{array}\right].$$

6. Solución del sistema: La matriz escalonada reducida nos da directamente:

$$x = -10, \quad y = 20.$$

III. Interpretación de los resultados

Sin embargo, dado que x no puede ser negativo en el contexto de este problema, necesitamos ajustar las restricciones o replantear el modelo para garantizar soluciones factibles. En este caso:

- Si $x = 0$, necesitaríamos ajustar la cantidad de servidores de tipo y para cumplir las restricciones.
- Si $y = 20$, necesitaríamos revisar la viabilidad presupuestal, dado el alto costo.

IV. Conclusión

El método de Gauss-Jordan nos permitió simplificar el sistema, pero en este caso, el modelo inicial no da una solución factible directa para los valores de x y y. Esto indica la necesidad de reformular o ajustar las restricciones para garantizar soluciones viables y útiles en el contexto práctico.

EJERCICIO 10 (Método Simplex)

Una empresa de comercio electrónico con sede en Trujillo almacena dos tipos de productos digitales: Software local (x) y Cursos virtuales (y). Cada unidad de Software local requiere 3 GB de almacenamiento y genera una ganancia de S/ 20, mientras que cada Curso virtual ocupa 1 GB y genera una ganancia de S/ 15. El centro de datos solo dispone de 120 GB de espacio y se exige cumplir al menos 10 unidades de Software local para respetar convenios previos.

I. Definición del problema

El objetivo es maximizar la ganancia total:

$$Z(x, y) = 20x + 15y,$$

sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 3x + y &\leq 120 \quad \text{(limitación de espacio)}, \\ x &\geq 10 \quad \text{(mínimo de unidades de Software local)}, \\ x, y &\geq 0 \quad \text{(no se pueden producir cantidades negativas)}. \end{aligned}$$

Para usar el método simplex, transformamos las desigualdades en igualdades mediante variables de holgura:

$$\begin{aligned} 3x + y + s_1 &= 120, \\ x - s_2 &= 10, \\ x, y, s_1, s_2 &\geq 0, \end{aligned}$$

donde s_1 y s_2 son variables de holgura.

II. Tabla inicial del método simplex

La tabla inicial es:

Base	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	3	1	1	0	120
s_2	1	0	0	-1	10
Z	-20	-15	0	0	0

III. Iteración 1: Identificar columna pivote

La columna pivote es la de x, ya que tiene el coeficiente más negativo en la fila Z (-20).

Paso 1: Determinar la fila pivote. Dividimos los valores en la columna RHS por los valores positivos de la columna x:

$$\frac{120}{3} = 40, \quad \frac{10}{1} = 10.$$

La fila pivote es la segunda (s_2).

Paso 2: Hacer x básico. Dividimos la fila 2 entre el pivote ($a_{21} = 1$):

$$F_2 \to F_2 \div 1.$$

La nueva tabla es:

Base	x	y	s_1	s_2	RHS
s_1	0	1	1	-3	90
x	1	0	0	-1	10
Z	0	-15	0	20	200

IV. Iteración 2: Identificar columna pivote

La columna pivote es y, ya que tiene el coeficiente más negativo en la fila Z (-15).

Paso 1: Determinar la fila pivote. Dividimos los valores en la columna RHS por los valores positivos de la columna y:

$$\frac{90}{1} = 90, \quad \text{(solo fila 1 tiene } y > 0\text{)}.$$

La fila pivote es la primera (s_1).

Paso 2: Hacer y básico. Dividimos la fila 1 entre el pivote ($a_{12} = 1$):

$$F_1 \to F_1 \div 1.$$

La nueva tabla es:

Base	x	y	s_1	s_2	RHS
y	0	1	1	-3	90
x	1	0	0	-1	10
Z	0	0	15	-25	1550

V. Solución óptima

No hay más coeficientes negativos en la fila Z, por lo que la solución es óptima:

$$x = 10, \quad y = 90, \quad Z = 1550.$$

VI. Interpretación de los resultados

- $x = 10$: Producir 10 unidades de Software local.
- $y = 90$: Producir 90 unidades de Cursos virtuales.
- $Z = 1550$: Generar una ganancia total de S/ 1550.

VII. Conclusión

El método simplex permitió determinar la combinación óptima de producción que maximiza las ganancias dentro de las restricciones de almacenamiento y convenios. La solución asegura el uso eficiente de los recursos disponibles.