Resolución de Ejercicios - Método Gauss-Jordan

Eddy Kennedy Mamani Hallasi

17 de enero de 2025

Introducción

En este informe se resuelven cinco ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss-Jordan. Para cada ejercicio, se presenta el concepto, la matriz aumentada inicial, el paso a paso con las matrices intermedias, y el resultado final.

Repositorio en GitHub

El código Python utilizado para realizar estos cálculos, junto con las librerías empleadas, está disponible en el siguiente enlace: https://github.com/MetodosDeOptimizacion/GaussJordan.gi

Ejercicio 1

Concepto: Este ejercicio resuelve un sistema de ecuaciones lineales para determinar los valores de los pesos de un modelo de regresión lineal.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2w_1 + 3w_2 - w_3 &= 5, \\ -w_1 + 2w_2 + 4w_3 &= 6, \\ 3w_1 - w_2 + 2w_3 &= 7. \end{aligned}$$

Matriz aumentada inicial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & | & 5 \\ -1 & 2 & 4 & | & 6 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

Paso a paso:

1. Dividir la primera fila entre 2 para hacer el pivote en $(1, 1)$ igual a 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & | & 2{,}5 \\ -1 & 2 & 4 & | & 6 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

2. Sustraer -1 veces la primera fila de la segunda para hacer 0 en $(2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & | & 2{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & 3{,}5 & | & 8{,}5 \\ 3 & -1 & 2 & | & 7 \end{bmatrix}$$

3. Sustraer 3 veces la primera fila de la tercera para hacer 0 en $(3,1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 3{,}5 & 3{,}5 & 8{,}5 \\ 0 & -5{,}5 & 3{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right]$$

4. Dividir la segunda fila entre 3.5 para hacer el pivote $(2,2)$ igual a 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}5 & -0{,}5 & 2{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 2{,}429 \\ 0 & -5{,}5 & 3{,}5 & -0{,}5 \end{array}\right]$$

5. Eliminar los valores en $(1,2)$ y $(3,2)$ usando la segunda fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0{,}857 \\ 0 & 1 & 1 & 2{,}429 \\ 0 & 0 & 9 & 12{,}857 \end{array}\right]$$

6. Dividir la tercera fila para hacer el pivote $(3,3)$ igual a 1:

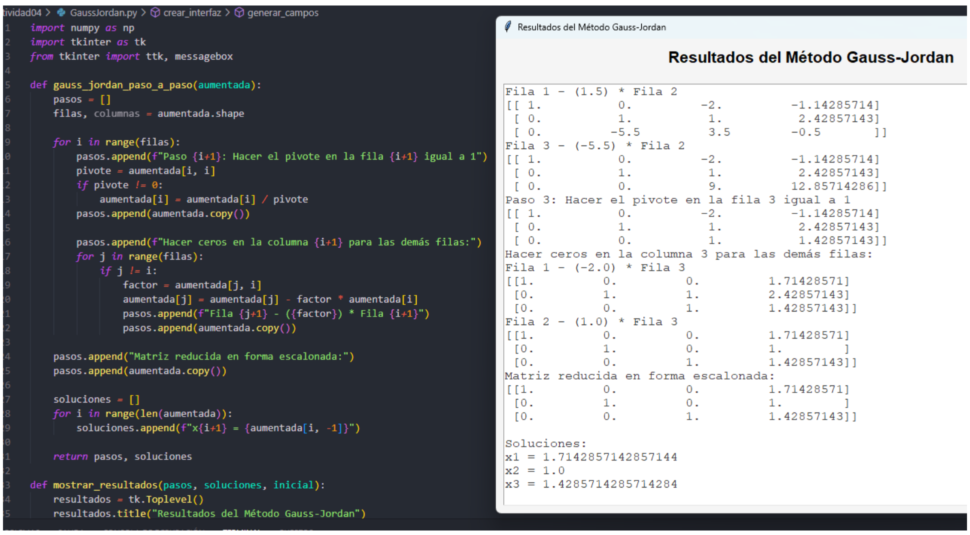
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0{,}857 \\ 0 & 1 & 1 & 2{,}429 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}429 \end{array}\right]$$

7. Eliminar los valores en $(1,3)$ y $(2,3)$ usando la tercera fila:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1{,}714 \\ 0 & 1 & 0 & 1{,}000 \\ 0 & 0 & 1 & 1{,}429 \end{array}\right]$$

Soluciones:

- $w_1 = 1{,}714$
- $w_2 = 1{,}000$
- $w_3 = 1{,}429$



Ejercicio 2

Concepto: Resolver un sistema de ecuaciones para calibrar hiperparámetros en un modelo matemático.

Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 12, \\ 2x - y + z &= 4, \\ -x + 2y - 2z &= 0. \end{aligned}$$

Matriz aumentada inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 2 & -1 & 1 & | & 4 \\ -1 & 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Paso a paso:

1. Dejar el pivote $(1,1)$ como 1 (ya está).
2. Sustraer 2 veces la primera fila de la segunda para hacer 0 en $(2,1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & -5 & -5 & | & -20 \\ -1 & 2 & -2 & | & 0 \end{bmatrix}$$

3. Sumar la primera fila a la tercera para hacer 0 en $(3,1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & -5 & -5 & | & -20 \\ 0 & 4 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}$$

4. Dividir la segunda fila entre -5 para hacer el pivote $(2,2)$ igual a 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 4 & 1 & | & 12 \end{bmatrix}$$

5. Sustraer 4 veces la segunda fila de la tercera para hacer 0 en $(3,2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & -3 & | & -4 \end{bmatrix}$$

6. Dividir la tercera fila entre -3 para hacer el pivote $(3,3)$ igual a 1:

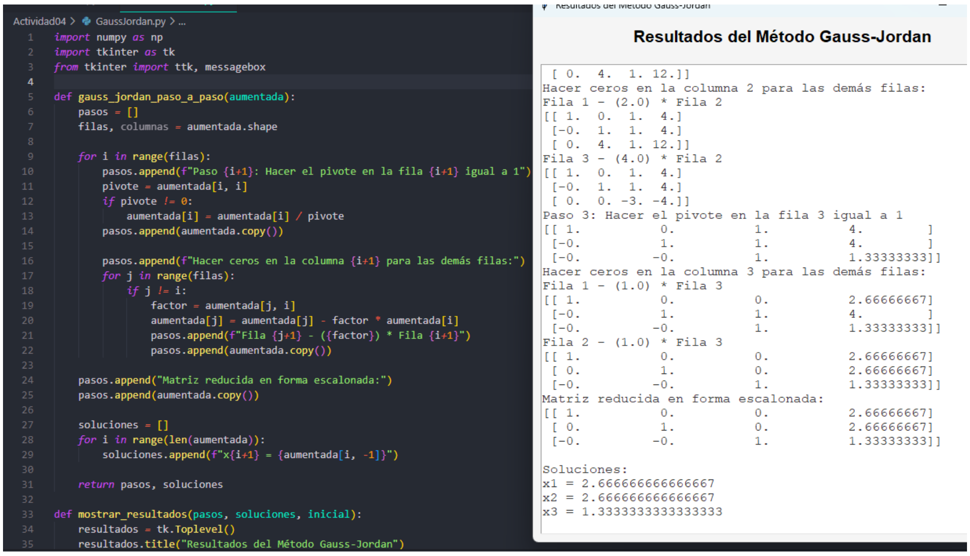
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 12 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1{,}333 \end{bmatrix}$$

7. Eliminar los valores en $(1,3)$ y $(2,3)$ usando la tercera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 8 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2{,}667 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1{,}333 \end{bmatrix}$$

Soluciones:

- $x = 2{,}667$
- $y = 2{,}667$
- $z = 1{,}333$



Ejercicio 3

Concepto: Este sistema busca la asignación óptima de recursos entre módulos.
Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a + b + c &= 6, \\ 2a - b + 3c &= 13, \\ -a + 2b - c &= 2. \end{aligned}$$

Matriz aumentada inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 2 & -1 & 3 & | & 13 \\ -1 & 2 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

Paso a paso:

1. Dejar el pivote $(1,1)$ como 1 (ya está).

2. Sustraer 2 veces la primera fila de la segunda para hacer 0 en $(2,1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 6 \\ 0 & -3 & 1 & | & 1 \\ -1 & 2 & -1 & | & 2 \end{bmatrix}$$

3. Sumar la primera fila a la tercera para hacer 0 en $(3,1)$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

4. Dividir la segunda fila entre -3 para hacer el pivote $(2,2)$ igual a 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -0{,}333 & -0{,}333 \\ 0 & 3 & 0 & 8 \end{array}\right]$$

5. Sustraer 3 veces la segunda fila de la tercera para hacer 0 en $(3,2)$:

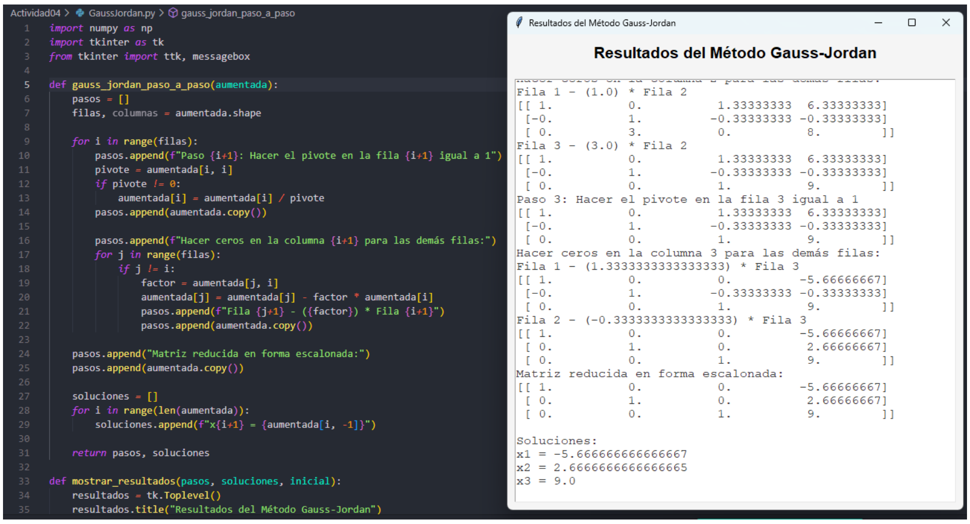
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -0{,}333 & -0{,}333 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

6. Eliminar los valores en $(1,2)$ y $(1,3)$ usando las filas correspondientes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5{,}667 \\ 0 & 1 & 0 & 2{,}667 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

Soluciones:

- $a = -5{,}667$
- $b = 2{,}667$
- $c = 9{,}000$



Ejercicio 4

Concepto: Este ejercicio optimiza los parámetros en un modelo matemático.
Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} p + 2q + 3r &= 10, \\ 2p - q + 4r &= 12, \\ 3p + 3q - r &= 6. \end{aligned}$$

Matriz aumentada inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 2 & -1 & 4 & | & 12 \\ 3 & 3 & -1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

Paso a paso:

1. Dejar el pivote $(1, 1)$ como 1 (ya está).

2. Sustraer 2 veces la primera fila de la segunda para hacer 0 en $(2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -5 & -2 & | & -8 \\ 3 & 3 & -1 & | & 6 \end{bmatrix}$$

3. Sustraer 3 veces la primera fila de la tercera para hacer 0 en $(3, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & -5 & -2 & | & -8 \\ 0 & -3 & -10 & | & -24 \end{bmatrix}$$

4. Dividir la segunda fila entre -5 para hacer el pivote $(2, 2)$ igual a 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & | & 1{,}6 \\ 0 & -3 & -10 & | & -24 \end{bmatrix}$$

5. Sustraer -3 veces la segunda fila de la tercera para hacer 0 en $(3, 2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & | & 1{,}6 \\ 0 & 0 & -8{,}8 & | & -19{,}2 \end{bmatrix}$$

6. Dividir la tercera fila entre $-8{,}8$ para hacer el pivote $(3, 3)$ igual a 1:

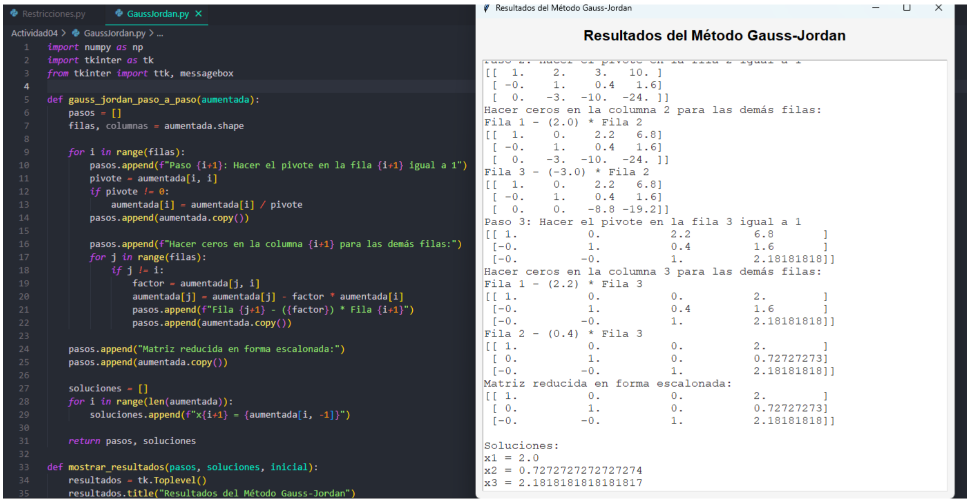
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 10 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & | & 1{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2{,}182 \end{bmatrix}$$

7. Eliminar los valores en $(1, 3)$ y $(2, 3)$ usando la tercera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 3{,}454 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0{,}727 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2{,}182 \end{bmatrix}$$

Soluciones:

- $p = 3{,}454$
- $q = 0{,}727$
- $r = 2{,}182$



Ejercicio 5

Concepto: Este ejercicio estima la demanda de inventario utilizando un modelo lineal.
Sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 9, \\ 2u - 3v + 4w &= 5, \\ u - 2v + w &= 1. \end{aligned}$$

Matriz aumentada inicial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 2 & -3 & 4 & | & 5 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Paso a paso:

1. Dejar el pivote $(1, 1)$ como 1 (ya está).
2. Sustraer 2 veces la primera fila de la segunda para hacer 0 en $(2, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & -5 & 0 & | & -13 \\ 1 & -2 & 1 & | & 1 \end{bmatrix}$$

3. Sustraer la primera fila de la tercera para hacer 0 en $(3, 1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & -5 & 0 & | & -13 \\ 0 & -3 & -1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

4. Dividir la segunda fila entre -5 para hacer el pivote $(2,2)$ igual a 1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2{,}6 \\ 0 & -3 & -1 & | & -8 \end{bmatrix}$$

5. Sumar 3 veces la segunda fila a la tercera para hacer 0 en $(3,2)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2{,}6 \\ 0 & 0 & -1 & | & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

6. Dividir la tercera fila entre -1 para hacer el pivote $(3,3)$ igual a 1:

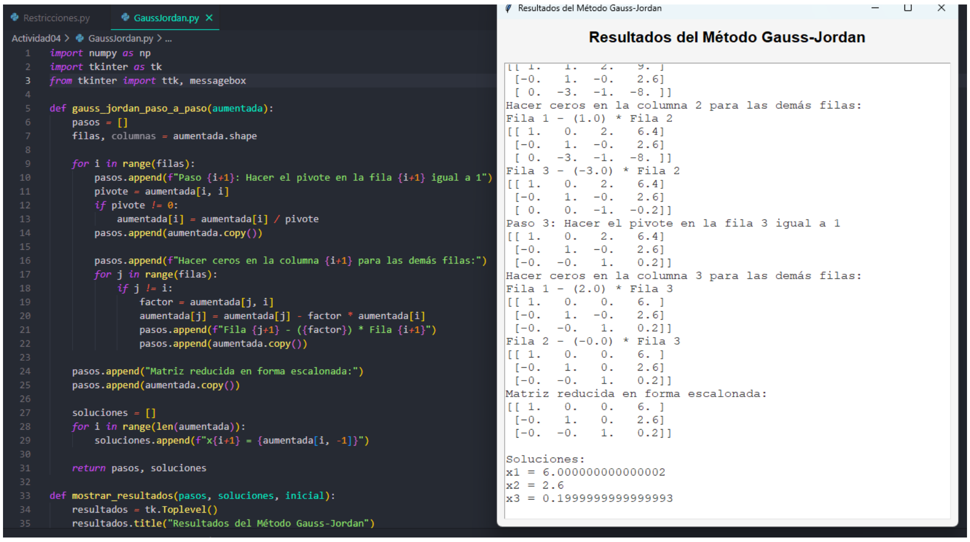
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 9 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

7. Eliminar los valores en $(1,3)$ y $(2,3)$ usando la tercera fila:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 8{,}6 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2{,}6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0{,}2 \end{bmatrix}$$

Soluciones:

- $u = 8{,}6$
- $v = 2{,}6$
- $w = 0{,}2$



Conclusión

El método de Gauss-Jordan fue aplicado para resolver los sistemas de ecuaciones de manera detallada, mostrando paso a paso las transformaciones en las matrices aumentadas. Este enfoque garantiza claridad en la comprensión de cada proceso algebraico.