COGNOME - NOME CODICE PERSONA

1] $f(0,y) = f(x,0) = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$ -

$$\left|\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{\sin |x^3y^5|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|x^3y^5|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\le x^2|y|^5 \to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$ f differenziabile in $(0,0)$

2] f certamente differenziabile per $x \neq 0, y \neq 0$

in $U(1,-1) = f(x,y) = -\sin x^3 y^5$

$\nabla f(1,-1) = (+3\cos 1, -5\cos 1)$ $\quad \underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$

$D_{\underline{v}} f(1,-1) = \cos 1\,(3\cos\vartheta - 5\sin\vartheta)$

3] $f(x,y) = \log(1+x^2+3xy) + x^{10}y^8$ da $\log(1+t) =$

$= t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ per $t \to 0$ si ha

$T_2(f,(0,0),(x,y)) = x^2 + 3xy$ (gli altri termini sono di grado superiore al secondo).

4] $\underline{r}(0) = (0,0) \neq (8,4) = \underline{r}(2)$ non chiusa

$0 \le t_1 < t_2 \le 2 \Rightarrow t_1^3 < t_2^3 \Rightarrow \underline{r}(t_1) \neq \underline{r}(t_2)$ semplice

$$\ell(\gamma) = \int_0^2 \sqrt{9t^4+4t^2}\,dt = \int_0^2 t\sqrt{9t^2+4}\,dt = 3\left[(9t^2+4)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 =$$

$$= 24\left(10^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

5|

$$\mathrm{rot}\,\underline{F} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & xyz \end{vmatrix} = xz\,\underline{i} - yz\,\underline{j} + y\,\underline{k}$$

$$\mathrm{div}\,\underline{F} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial xy}{\partial y} + \frac{\partial xyz}{\partial z} = 1 + x + xy$$

6|

$$V = \int_\Omega x^2 y \, dx\, dy = \int_1^2 \left(\int_0^{\frac{1}{x}} x^2 y \, dy \right) dx = \int_1^2 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{x}} dx = \frac{1}{2}$$

7|

$x^2+y^2-4x-4y = 10$ circ. centro $(2,2)$ $r = 3\sqrt{2}$

$$\begin{cases} x(t) = 2 + 3\sqrt{2}\cos t \\ y(t) = 2 + 3\sqrt{2}\sin t \end{cases} \qquad \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{26 + 3\sqrt{2}(\cos t + \sin t)}}$$

$\min \tilde{f} = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ $\max \tilde{f} = \tilde{f}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2\sqrt{5}}$

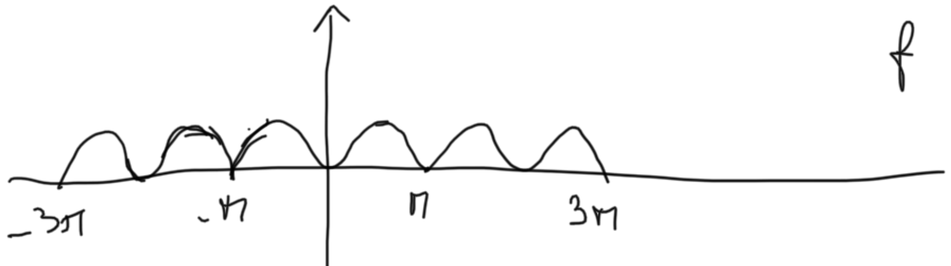
8|

per $|x| < 1$ $\frac{1}{1-t^4} = \sum_0^{+\infty} t^{4k}$ conv totalmente in $(0, x^2)$

quindi

$$\int_0^{x^2} \sum_0^{+\infty} t^{4k} = \sum_0^{+\infty} \frac{x^{8k+2}}{4k+1} \qquad R = 1$$

9|



f pari $b_k = 0$ $\forall k$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x \, dx = -\frac{1}{2}$$

10| f 2π-periodica integrabile su $(-\pi,\pi]$ - la sua serie di Fourier converge ad f in media quadratica.

- - -

$\bar{f}$ regolare (derivabile tranne che in $x = \pi + 2k\pi$ dove ha punti angolosi) - la sua serie di Fourier converge puntualmente, ad f perché f è continua.

11| $\lambda^2 - 10\alpha\lambda + 16\lambda^2 = 0 \qquad \lambda = 8\alpha \ \wedge \ \lambda = 2\alpha$

$\alpha \neq 0 \qquad \varphi(t) = c_1 e^{8\alpha t} + c_2 e^{2\alpha t}$

$\alpha = 0 \qquad \varphi(t) = c_1 t + c_2$

12| int omogenea associata $\varphi(t) = c_1 e^{24t} + c_2 e^{6t}$

poiché $\varphi(t) = e^{6t}$ è soluz dell'omogenea, cerco

$\psi_0(t) = Ate^{6t} + B = -\frac{1}{18} t e^{6t} + \frac{5}{144}$

$\psi(t) = \varphi(t) + \psi_0(t)$

13| Es.

$\begin{cases} y' = t(1+y^2) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Teor. data l'eq. $y' = f(t)g(y)$, se $f \in \mathcal{C}(I)$, $g \in \mathcal{C}'(J)$, I, J intervalli, $\forall (t_0, y_0) \in I \times J$, esiste unica φ soluz del problema di Cauchy

---

*| $\begin{cases} y' = f(t)g(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$, e φ è definita almeno

in un intorno di t_0, $I_0 \subseteq I$.