Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 15/02/2020

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e numero di matricola su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si consideri il risultato X del lancio di un dado bilanciato a 6 facce. Successivamente, si lanci una moneta bilanciata X volte. Qual è la probabilità di ottenere esattamente una testa
   (a) dopo aver osservato X,
   (b) prima di conoscere X.

2. Sia $Z = (X + Y)^2$, con $X \sim Y \sim \mathcal{U}[-1, 1]$ e X e Y indipendenti. Calcolare la legge di probabilità di Z.
   Suggerimento: calcolare prima la legge di $X + Y$.

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $Y_n = nX^n$ per $n \in \mathbb{N}$. Determinare se la successione $\{Y_n\}_n$ converge in probabilità, e, in caso affermativo, a quale numero.

4. Si hanno due monete A e B le cui probabilità di dare testa sono p_A e p_B, rispettivamente. Ad ogni istante di tempo si lanciano le monete contemporaneamente, e se si ottengono due teste si decide di continuare a lanciare solamente una delle due monete, scelta a caso. La moneta rimanente viene lanciata finché non si ottiene un'altra testa. Qual è il numero medio di turni di durata del gioco?

5. Partendo da un generatore di variabili aleatorie $U_n \sim \mathcal{U}[0, 1]$, proporre un algoritmo di Importance Sampling per calcolare $I = \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$.
   Suggerimento: fare attenzione al dominio di integrazione.

6. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabili aleatorie discrete e indipendenti tra loro e identicamente distribuite con $X_i \sim \mathcal{U}\{1, 2, \ldots, M\}$. Calcolare l'entropia $\mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Soluzioni

Problema 1

Sia N_x il numero di teste ottenute dopo aver osservato $X = x$. Si ha che $N_x \sim \mathrm{Bin}(x, 0.5)$, dunque

$$p_{N_x}(1) = \frac{x}{2^x}, \qquad x = 1, \ldots, 6.$$

La probabilità di osservare una testa prima di conoscere X si calcola tramite la legge delle probabilità totali:

$$p_N(1) = \sum_{x=1}^{6} p_X(x) p_{N_x}(1) = \sum_{x=1}^{6} \frac{1}{6} \frac{x}{2^x} = 0.3125.$$

Problema 2

La legge di probabilità di $W = X + Y$ si ottiene effettuando l'integrale di convoluzione delle leggi di X e Y. Sfruttando l'identicità delle distribuzioni di X e Y, si ottiene che la legge di W ha una forma di triangolo isoscele con base in $[-2, 2]$ e altezza $1/2$.

Ora si ha $Z = W^2 = |W|^2$. Si può notare che $T = |W|$ ha una legge a forma di triangolo rettangolo con base l'intervallo $[0, 2]$ e altezza di misura 1:

$$f_T(t) = 1 - \frac{t}{2}, \qquad 0 \leq t \leq 2.$$

Usando l'approccio della funzione cumulativa si ha:

$$F_Z(z) = \Pr(Z \leq z) = \Pr(T^2 \leq z) = \Pr(T \leq \sqrt{z}) = F_T(\sqrt{z}), \qquad 0 \leq z \leq 4, \tag{1}$$

e dunque

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_T(\sqrt{z}) = f_T(\sqrt{z}) \frac{d}{dz}\sqrt{z} = (1 - \frac{\sqrt{z}}{2}) \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{4}, \qquad 0 \leq z \leq 4.$$

Problema 3

Il sospetto è che per n grandi i valori di Y_n si concentrino attorno al valore 0. Testiamo la convergenza a 0 della successione calcolando, per un arbitrario $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\Pr(|Y_n| > \epsilon) &= \Pr(Y_n > \epsilon) && (2)\\
&= \Pr\left(X^n > \frac{\epsilon}{n}\right) && (3)\\
&= \Pr\left(X > \left(\frac{\epsilon}{n}\right)^{1/n}\right) && (4)\\
&= 1 - \left(\frac{\epsilon}{n}\right)^{1/n} && (5)
\end{aligned}$$

da cui segue che $\lim_{n\to\infty} \Pr(|Y_n| > \epsilon) = 0$, dunque confermando che $Y_n \to 0$ in probabilità.

Problema 4

La probabilità di ottenere due teste durante un turno di gioco è $p_A p_B$. Il numero di turni per osservare questa combinazione è una variabile aleatoria $X \sim \mathrm{Geom}(p_A p_B)$, quindi il numero medio di turni di questa prima fase è $\mathsf{E}[X] = \frac{1}{p_A p_B}$. Ragionando analogamente, la durata media seconda fase sarà p_A^{-1} o p_B^{-1} a seconda che sia stata lanciata la moneta A o B, rispettivamente. Mediando su questi due casi si ottiene:

$$\text{Turni medi totali} = \frac{1}{p_A p_B} + \frac{1}{2p_A} + \frac{1}{2p_B}.$$

Problema 5

Siccome $f_X(x) = e^{-x}$ è la legge di probabilità di una v.a. esponenziale, l'integrale si può reinterpretare come segue:

$$I = \int_1^\infty e^{-x} \frac{1}{x} dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{1}{x} 1_{\{x>1\}} dx = \mathsf{E}\left[\frac{1}{X} 1_{\{X>1\}}\right]$$

dove $X \sim \mathrm{Exp}(1)$, e $1_{\{X>1\}}$ vale 1 se l'evento $\{X > 1\}$ è verificato, e 0 altrimenti. Un possibile algoritmo per generare i campioni esponenziali e per stimare l'integrale è il seguente:

1. Genero n campioni indipendenti $U_i \sim \mathcal{U}[0,1]$ per $i = 1, \ldots, n$.
2. Genero i campioni esponenziali come $X_i = -\log(U_i)$ per $i = 1, \ldots, n$.
3. Stimo numericamente l'integrale come $\widehat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i} 1_{\{X_i > 1\}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{\log(U_i)} 1_{\{U_i < e^{-1}\}}$.

Problema 6

Siccome l'entropia congiunta di due variabili aleatorie indipendenti è la somma delle entropie marginali, si ottiene

$$\mathsf{H}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{H}(X_i) = n \log(M),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato il fatto che tutti i termini di entropia sono uguali a $\log(M)$, grazie alle distribuzioni uniformi.