Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 7 luglio 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tempo: 2 ore e 10 minuti. È richiesto di giustificare tutti i passaggi.
La prova è sufficiente se e solo se le seguenti tre soglie sono tutte raggiunte: esercizi 12 punti, teoria 4 punti, punteggio totale 18.

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(5 punti)* Calcolare il volume di

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 0\,, \; x \geq 0\}\,.$$

Svolgimento. Ω è una regione z-semplice dello spazio: ponendo $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ si ha

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; f(x, y) \leq z \leq 0\,, \; (x, y) \in D\}\,,$$

dove D è un'opportuna regione semplice del piano. Il volume richiesto può quindi essere calcolato per fili:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_\Omega 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^0 1\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D -f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Per determinare D, iniziamo ad individuarne il bordo. In particolare consideriamo l'insieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; f(x, y) = 0, \; x \geq 0\}.$$

Per risolvere $f(x, y) = 0$, passiamo in coordinate polari:

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^2 - 2r, \qquad g(r, \theta) = 0 \text{ per } r = 0, 2.$$

Quindi

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \geq 0\,, \; 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\} = \{(r, \theta) : \; r \in [0, 2], \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}.$$

Passando a coordinate polari:

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\int_0^2 (2r - r^2) \cdot r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_0^2 (2r^2 - r^3)\mathrm{d}r = \pi \cdot \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}\,.$$

Esercizio 2 *(7,5 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x,y) = y^2\left(x^2+y^2-1\right)$.

2.1 (1 punto) Studiare il segno di f.

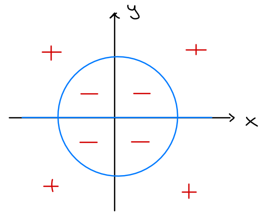
2.2 (1,5 punti) Determinare tutti i punti critici liberi di f.

2.3 (3 punti) Se esistono, determinare i valori di massimo e di minimo assoluto di f nel quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$.

2.4 (2 punti) Determinare la direzione tangente alla curva di livello $f(1,1) = 1$, nel punto $(1,1)$. Calcolare inoltre la massima derivata direzionale di f in $(1,1)$.

Svolgimento.

2.1 Si ha che $f(x,y) = 0$ se e solo se $y = 0$ oppure $x^2+y^2 = 1$; $f(x,y) > 0$ se e solo se $x^2+y^2 > 1$, con $y \neq 0$;$f(x,y) < 0$ nella regione complementare.



2.2 Si ha $f_x(x,y) = 2xy^2$ e $f_y(x,y) = 2x^2y + 4y^3 - 2y$. I punti critici sono $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e tutti i punti dell'asse x, cioé $(x,0)$, $x \in \mathbb{R}$.

2.3 I punti di estremo assoluto esistono per il teorema di Weierstrass, dato che Q è chiuso e limitato ed f continua.

Considerato il segno di f, i punti di minimo assoluto possono essere solo all'interno di Q ma fuori dall'asse x; perciò non possono essere che i punti critici $\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, in cui la funzione assume lo stesso valore (negativo): $f\left(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{4}$.

Dal segno segue anche che i punti di massimo assoluto devono trovarsi su ∂Q.
Si nota che $f(\pm1, y) = y^4$ e $f(x, \pm1) = x^2$, perciò su ciascuno dei lati del quadrato ci sono massimi ai vertici; inoltre, nei 4 vertici la funzione assume lo stesso valore (infatti f è pari sia rispetto a x che rispetto a y). Si conclude che il massimo assoluto di f su Q è: $f(\pm1,\pm1) = 1$.

2.4 Poiché $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, il gradiente, in un punto in cui non si annulla, individua la direzione ortogonale alla linea di livello di f passante dal punto; la direzione del gradiente è anche quella in cui la derivata direzionale è massima (sempre considerando un punto in cui il gradiente non è nullo, ovvero un punto non critico).

Il punto considerato non è uno dei punti critici di f e quindi non è un punto dove il gradiente è nullo; più precisamente vediamo che risulta $\nabla f(1,1) = (2,4)$.
Un vettore ortogonale a $\nabla f(1,1)$ è allora, ad esempio, $(2,-1)$; la retta tangente si può scrivere (in forma parametrica) come:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t\,. \end{cases}$$

La derivata direzionale $D_{\mathbf{v}}f(1,1)$ è massima se $\mathbf{v} = \frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{20}}, \frac{4}{\sqrt{20}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; il valore corrispondente è:

$$D_{\mathbf{v}}f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\,.$$

Esercizio 3 *(6 punti)* Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita su $(-\pi,\pi]$ come

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x\in[0,\pi], \\ -x^2 & \text{per } x\in(-\pi,0). \end{cases}$$

3.1 (2,5 punti) In riferimento alla serie di Fourier di f, discutere: convergenza in media quadratica, convergenza puntuale (specificando sia l'insieme di convergenza che la somma della serie), convergenza totale (sull'insieme di convergenza puntuale).

3.2 (3,5 punti) Calcolare la serie di Fourier di f.

Svolgimento.

3.1 Essendo f regolare a tratti, la serie di Fourier di f converge in media quadratica e puntualmente in tutto $\mathbb{R}$.

Detta $F(x)$ la somma della serie, ed osservato che f è continua per $x\neq\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, per teorema risulterà:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x\neq\pi+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z}) \\ \dfrac{f(\pi^-)+f(\pi^+)}{2} = \dfrac{\pi^2-\pi^2}{2} = 0 & \text{per } x=\pi+2k\pi \ (k\in\mathbb{Z})\,. \end{cases}$$

Infine, la convergenza non è totale su $\mathbb{R}$, in quanto la funzione F è discontinua; infatti, poiché le somme parziali sono funzioni continue, se la convergenza fosse totale (su $\mathbb{R}$) la funzione somma $F(x)$ sarebbe a sua volta una funzione continua.

3.2 Essendo la funzione 2π–periodica, la sua serie di Fourier sarà del tipo:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right)\ .$$

Essendo f dispari, sarà $a_n=0\ \forall n\geq 0$. Calcoliamo b_n $(n\geq 1)$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[-x^2\,\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x\frac{\cos(nx)}{n}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\pi^2\,\frac{(-1)^n}{n} + 0 + \left[2x\,\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\,\frac{\sin(nx)}{n^2}\,\mathrm{d}x\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + 0 - 0 + \left[2\,\frac{\cos(nx)}{n^3}\right]_0^{\pi}\right\} = \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + 2\,\frac{(-1)^n-1}{n^3}\right\}\ .
\end{aligned}$$

Esercizio 4 *(5,5 punti)*

4.1 (1,5 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = 0$.

4.2 (2 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = \sin t$. Esistono soluzioni periodiche? In caso affermativo, individuarle tutte.

4.3 (2 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = \sin t - 2$. Esistono soluzioni limitate in $(-\infty, 0)$? In caso affermativo, individuarle tutte.

Svolgimento.

4.1 L'equazione differenziale è del secondo ordine lineare, a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$, avente zeri $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$. L'integrale generale è quindi $y_o(t) = c_1 + c_2 e^{2t}$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

4.2 Per il teorema di struttura, l'integrale generale ha la forma $y(t) = y_o(t) + y_p(t)$ per una opportuna soluzione particolare y_p. Cerchiamo una soluzione particolare della forma $z(t) = A\cos t + B\sin t$:

$$z'(t) = -A\sin t + B\cos t \qquad z''(t) = -A\cos t - B\sin t,$$

da cui

$$z''(t) - 2z'(t) = -(A + 2B)\cos t + (2A - B)\sin t$$

e si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} A + 2B = -0 \\ 2A - B = 1. \end{cases}$$

La soluzione è $A = 2/5$, $B = -1/5$, per cui $y_p(t) = \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t$ e l'integrale generale è

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t.$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ci sono infinite soluzioni periodiche: tutte quelle con $c_2 = 0$.

4.3 Essendo $y(t) = t$ soluzione particolare di $y''(t) - 2y'(t) = -2$, per il principio di sovrapposizione l'integrale generale richiesto è

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + \frac{2}{5}\cos t - \frac{1}{5}\sin t + t,$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Non esistono soluzioni limitate.

TEORIA: 8 punti.

Risolvere i quesiti **T.1-5** *(nota bene: ogni quesito a crocette ammette una e una sola risposta corretta).*

T.1 (1 punto) Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(t) = (\log t)^{1/3} y(t) \\ y(1) = 1 \,. \end{cases}$

1. Non è possibile dire se il problema ha soluzione.
2. Il problema ammette un'unica soluzione, costante.
3. Il problema ammette un'unica soluzione, non costante. V
4. Il problema ammette più di una soluzione.

T.2 (1 punto) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, continua.

1. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è punto di minimo di f.
2. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ e $H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$ con $c \neq 0$, allora (x_0, y_0) è punto di sella di f. V
3. Se f ammette estremi assoluti su $A \subset \mathbb{R}^2$, allora A è chiuso e limitato.
4. Se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di estremo libero per f, allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

T.3 (1 punto) Sia $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare a tratti avente sostegno γ; sia poi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

1. Se la curva $\underline{r}$ è regolare, l'integrale curvilineo di f lungo γ è nullo.
2. L'integrale curvilineo di f lungo γ potrebbe non essere definito.
3. L'integrale curvilineo di f lungo γ è definito come $\displaystyle\int_a^b f(\underline{r}(t))\, \mathrm{d}t$.
4. Se $\underline{v}$ è una parametrizzazione equivalente, avente sostegno δ, allora lunghezza(γ)=lunghezza(δ). V

T.4 (2 punti) Data una funzione f di due variabili derivabile due volte nel suo dominio, si fornisca la definizione di matrice Hessiana di f in un punto di tale dominio e si enunci il teorema relativo alla formula di Taylor al secondo ordine.

T.5 (3 punti) Sia A una matrice $n \times n$ costante (cioè indipendente da t) e diagonalizzabile. Come si scrive l'integrale generale del sistema $\underline{y}'(t) = A\, \underline{y}(t)$? Dimostrare.