Informazione e stima – 28/06/2021 – Compito B

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, codice persona, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Sia X il numero di 3 e Y il numero di 5 ottenuti in 10 lanci di dado (a 6 facce, onesto) e sia $Z = X + Y$. Si calcolino le varianze di X, Y e Z.
Suggerimento: chiedersi se X e Y sono indipendenti o meno.

2. La variabile aleatoria X, Gaussiana, ha valore medio 0 e varianza 1. La variabile aletoria Y, indipendente da X, vale 1 o 3 con uguale probabilità. Si calcoli la legge di probabilità di $Z = XY$.

3. Si estraggono 100 variabili casuali X_i Gaussiane indipendenti con valore medio $m = 0$ e varianza $\sigma^2 = 1$, e sia $Y = \sum_{i=1}^{100} |X_i|$. Usando la diseguaglianza di Markov, dare un'approssimazione di $\Pr(Y > 200)$.

4. ~~Alla cassa di un supermercato arrivano clienti paganti in contanti secondo un $PP(\lambda = 10$ clienti/ora) e clienti con pagamenti elettronici secondo un $PP(\lambda = 5$ clienti/ora). Qual è la probabilità che tra i primi 10 clienti ci siano stati più pagamenti elettronici che in contanti?~~

5. ~~Partendo da un generatore di campioni indipendenti U_i distribuiti come $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$, descrivere un algoritmo per campionare da una distribuzione $X \sim \mathrm{Geom}(p)$. Mediamente quanti campioni uniformi bisogna generare per avere un campione geometrico?~~

6. ~~Si lancia 20 volte una moneta con $P(T) = 0.2$ e 80 volte una moneta con $P(T) = 0.8$. Tutti i lanci sono indipendenti. Quanti bit di entropia vengono generati?~~

Soluzioni

Problema 1

Il dado è onesto, per cui la probabilità di ottenere in un lancio uno dei possibili 6 numeri corrispondenti alle 6 facce del dado è $p = \frac{1}{6}$.
X che Y sono v.a. Binomiali identiche, e la loro varianza è pari a

$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}[Y] = np\,(1-p) = \frac{50}{36} = \frac{25}{18},$$

con $n = 10$ (numero di lanci) e $p = \frac{1}{6}$.
Per calcolare la varianza di Z conviene considerare un nuovo evento successo dato dall'unione delle facce 3 e 5. Z è una v.a. Binomiale con probabilità di successo $q = 2/6 = 1/3$, dunque:

$$\mathsf{Var}[Z] = nq(1-q) = \frac{20}{9}.$$

Problema 2

Conviene studiare separatamente il caso $Y = 1$ e quello $Y = 3$, ricordandosi che sono equiprobabili ($p = \frac{1}{2}$).

- *caso 1*: $Y = 1$. In questo caso $\{Z|Y = 1\} \sim \{X|Y = 1\} \sim X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, per cui

$$f_{Z|Y=1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$$

- *caso 2*: $Y = 3$. Qui $\{Z|Y = 3\} \sim \{3X|Y = 3\} \sim 3X \sim \mathcal{N}(0, 9)$, da cui

$$f_{Z|Y=3}(z) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\frac{z^2}{9}}{2}\right).$$

Essendo i due casi equiprobabili, dalla legge delle probabilità totali si ottiene

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{3\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\frac{z^2}{9}}{2}\right).$$

Problema 3

Innanzitutto notiamo che Y è una v.a. positiva. La diseguaglianza di Markov dice che

$$\Pr(Y > 200) \le \frac{\mathsf{E}[Y]}{200} = \frac{\sum_{i=1}^{100} \mathsf{E}[|X_i|]}{200} = \frac{\mathsf{E}[|X_1|]}{2}. \tag{1}$$

Il valore atteso si può calcolare come segue

$$\mathsf{E}[|X_1|] = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \tag{2}$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} d(e^{-\frac{x^2}{2}}) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} [e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{\infty} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{3}$$

Dunque, si ha:

$$\Pr(Y > 200) \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \tag{4}$$

Problema 4

Si consideri il processo unione dei clienti. I tipi di cliente dei primi 10 arrivi sono indipendenti tra loro. La prob di avere un cliente pagante in contanti è $\frac{10}{10+5} = \frac{2}{3}$. Sia C il numero di clienti paganti con contante tra i primi 10 clienti, allora la probabilità cercata è:

$$\Pr(C < 5) = \sum_{i=0}^{4} \binom{10}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{10-i}. \tag{5}$$

Problema 5

I campioni geometrici possono essere interpretati come tempi di interarrivo di un processo di Bernoulli BP(p). I campioni uniformi possono essere usati per generare successi e insuccessi del processo di Bernoulli. Un possibile algoritmo per generare un campione X Geometrico è il seguente:

1. Inizializzo $i = 1$
2. Genero un campione $U_i \sim \mathcal{U}[0, 1]$
3. Se $U_i < p$ allora $X = i$, altrimenti $i \leftarrow i + 1$ e torno al punto 1.

Il numero medio di campioni U_i generati per avere un valore valido di X è proprio pari alla media di una v.a. Geometrica di parametro p, cioè $1/p$.

Problema 6

Siano X_i i risultati dei lanci della prima moneta, e Y_i i risultati dei lanci della seconda moneta. Allora si ha che

$$\begin{aligned}
H(X_1, X_2, \ldots, X_{20}, Y_1, Y_2, \ldots, Y_{80}) &= \sum_{i=1}^{20} H(X_i) + \sum_{i=1}^{80} H(Y_i) && (6)\\
\text{(identic. distr.)} &= 20H(X_1) + 80H(Y_1) && (7)\\
\text{(Siccome } X_1, Y_1 \text{ sono v.a. binarie)} &= 20H_2(0.2) + 80H_2(0.8) && (8)\\
\text{(Siccome } H_2(x) = H_2(1-x)\text{)} &= 100H_2(0.2) && (9)\\
&= 100 \left(0.2 \log_2(\frac{1}{0.2}) + 0.8 \log_2(\frac{1}{0.8}) \right) && (10)\\
&\approx 72.19 \text{ bit} && (11)
\end{aligned}$$

dove il primo passaggio è dovuto all'indipendenza di tutte le v.a.