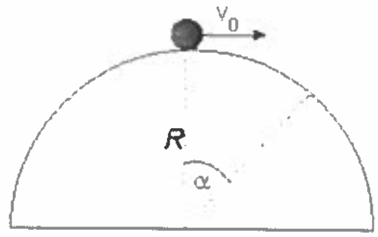
15/4/2019
ore 15:00

FISICA (prima prova in itinere)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1.
Un corpo di massa $m = 10$ kg è in quiete su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.5$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.4$. Al corpo viene applicata una forza parallela al piano, di intensità $F = k\,t$, dove $k = 50$ N/s e t è il tempo. Assumendo approssimativamente $g = 10$ m/s^2, si calcoli la velocità del corpo all'istante $t = 3$ s.

2.
Un corpo puntiforme di massa m si trova sulla cima di una calotta sferica liscia di raggio R. Il corpo viene lanciato orizzontalmente con velocità v_0 e inizia a scendere lungo la calotta, distaccandosi da essa all'angolo α (vedi figura). Si calcoli la velocità di lancio v_0 del corpo (esprimendo il risultato in funzione di g, R e α).



3.
a) Si dia la definizione di forza conservativa e di energia potenziale.
b) Si dimostri che la forza $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\,k\,r^3\,\mathbf{u}_r$, con k costante positiva, $r = |\mathbf{r}|$ (modulo del vettore posizione $\mathbf{r}$) e $\mathbf{u}_r$ il versore radiale, è conservativa, e si ricavi la sua energia potenziale.

Si ricorda di:
- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

1.

Fintanto che $F \leq \mu_s N$ con N reazione normale del piano, il corpo resta in quiete.
La reazione normale N è t.c. $\vec{N} + \vec{W} = 0$ con $\vec{N} = N\,\hat{u}_y$ e $\vec{W} = -mg\,\hat{u}_y$ essendo $\hat{u}_y$ il versore dell'asse verticale y diretto verso l'alto. Risulta quindi $\vec{N} = -\vec{W} = mg\,\hat{u}_y$.
La condizione di equilibrio per il moto lungo il piano orizzontale è quindi $F \leq \mu_s mg$ e $F = F(t) = Kt$. Allora $Kt \leq \mu_s mg$ e il corpo è in quiete fino all'istante $t = \frac{\mu_s mg}{K} =$
$= 0.5 \frac{10Kg \cdot 10m/s^2}{50\,N/s} = \frac{50\ N}{50 N/s} = 1s \triangleq t_0$.
Dall'istante t_0 in poi agirà la forza di attrito dinamico (radente) $\vec{F}_{att} = -\mu_d mg\,\hat{u}_x$, essendo $\hat{u}_x$ il versore dell'asse orizzontale x diretto in verso concordemente alla forza attiva $\vec{F}$.
La forza risultante per $t > t_0$ è quindi $\vec{F} + \vec{F}_{att} = (Kt - \mu_d mg)\,\hat{u}_x$, cui corrisponde (in base al II PD Newtoniano) l'accelerazione $\vec{a} = (\vec{F} + \vec{F}_{att})/m = \left(\frac{K}{m}t - \mu_d g\right)\hat{u}_x$. Essendo per definizione $\vec{a} = d\vec{v}/dt$, risulta

$$\Delta\vec{v}(t_0, \bar{t} = 3s) = \int_{t_0}^{\bar{t}} \vec{a}(t')\,dt' = \int_{t_0}^{\bar{t}} \left(\frac{K}{m}t' - \mu_d g\right)dt'\,\hat{u}_x$$

$$\vec{v}(\bar{t}) = \vec{v}(t_0) + \int_{t_0}^{\bar{t}} \left(\frac{k}{m}t' - \mu_d g\right) dt' \, \hat{u}_x =$$

$$= 0 + \left[\frac{1}{2}\frac{k}{m}\left(\bar{t}^2 - t_0^2\right) - \mu_d g\left(\bar{t} - t_0\right)\right] \hat{u}_x$$

$$v_x(\bar{t} = 3s) = \frac{1}{2}\,\frac{50\,N/s}{10\,kg}\left(9s^2 - 1s^2\right) - 0.4 \cdot 10\,m/s^2 \cdot (3-1)\,s$$

$$= 20\,m/s - 8\,m/s = 12\,m/s.$$

$$\vec{v}(\bar{t} = 3s) = 12\,m/s \;\; \hat{u}_x.$$

2.

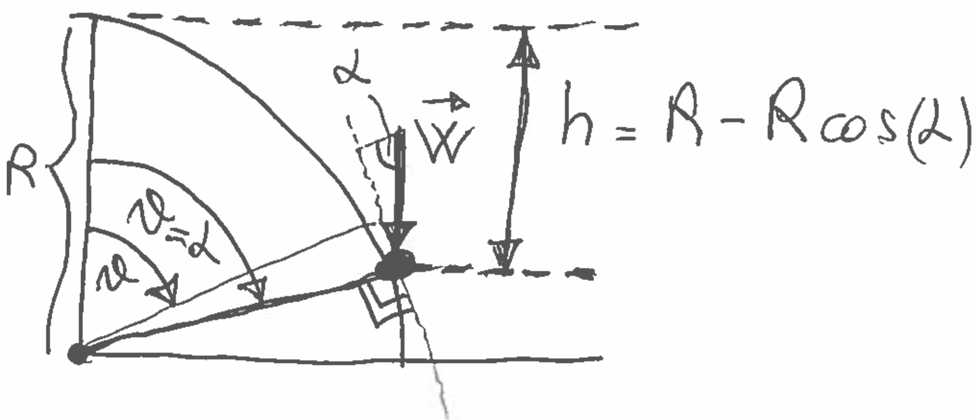
Poichè il corpo si distacca dalla calotta solo all'angolo α, il suo moto, fino a quell'istante, è un moto circolare con raggio R il raggio della calotta.

Durante il moto lungo la calotta sul corpo agiscono la forza peso, conservativa e la reazione normale della calotta stessa. Poichè la reazione normale è ortogonale alla traiettoria del moto essa non compie lavoro. Si conserva quindi l'energia meccanica (poichè tutte e sole le forze che lavorano sono conservative). Abbiamo

$$E_i = \frac{1}{2} m v_0^2 + mgh$$

$$E_f = \frac{1}{2} m v_f^2$$

ove si è posta nulla l'energia potenziale della forza peso alla quota corrispondente alla posizione angolare $\vartheta = \alpha$!



Ponendo $E_i = E_F$ ricaviamo la velocità v_F al momento del distacco

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gR(1-\cos(\alpha)) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_F^2$$

$$v_F = \sqrt{v_0^2 + 2gR(1-\cos(\alpha))}.$$

Nel momento in cui il corpo si distacca dalla calotta cessa la reazione normale N della calotta stessa. In quell'istante dunque la forza risultante coincide con la sola forza peso, di componenti tangenziale e normale rispettivamente $W_T = mg\sin(\alpha)$ e $W_N = mg\cos(\alpha)$. Le equazioni del moto in componenti tangenziale e normale sono (in base all II PD Newtoniana)

$$W_T = ma_T, \quad W_N - N = m a_N$$

con $a_N = v^2/\rho$ e $\rho = R$.

Nel punto di distacco $v^2 = v_F^2$ e $N = 0$.

Allora dalla equazione del moto lungo la direzione normale abbiamo

$$W_N = m a_N \implies \cancel{m}g\cos(\alpha) = \cancel{m}\frac{v_F^2}{R}$$

$$Rg\cos(\alpha) = v_0^2 + 2gR - 2gR\cos(\alpha)$$

Ricaviamo così la velocità iniziale necessaria perchè il distacco avvenga all'angolo α:

$$v_0 = \sqrt{gR\left(3\cos(\alpha) - 2\right)}$$

3.

Si vedano le risposte del docente.

Brevemente:

a) Una forza è conservativa quando il suo integrale di linea su un qualunque percorso chiuso è sempre nullo, ovvero, il lavoro di una forza $\vec{F}$ conservativa è, fissati gli estremi A e B, indipendente dal cammino che congiunge tali estremi.

Per ogni forza conservativa è quindi possibile definire un campo scalare detto Energia Potenziale $E_p(\vec{r})$ tale che

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_p(A) - E_p(B).$$

b) La forza $\vec{F}(\vec{r}) = -Kr^3 \hat{u}_r$ è di tipo centrale, quindi risulta conservativa, come si dimostra immediatamente in base a quanto segue

$$\int_{A,\gamma}^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_A,\gamma}^{\vec{r}_B} -Kr^3 \hat{u}_r \cdot d\vec{r} =$$

$$= \int_{\vec{r}_A,\gamma}^{\vec{r}_B} -Kr^3 \hat{u}_r \cdot (dr\hat{u}_r + r d\vartheta \hat{u}_\vartheta + r\sin\vartheta d\varphi \hat{u}_\varphi) =$$

$$= \int_{\vec{r}_A,\gamma}^{\vec{r}_B} -Kr^3 dr = \int_{r_A}^{r_B} -Kr^3 dr \quad \text{indipendente da } \gamma.$$

Svolgendo l'integrale si ricava l'espressione della variazione di energia potenziale associata a tale forza.

$$\int_{r_A}^{r_B} -Kr^3 dr = \left[-\frac{1}{4}Kr^4\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{1}{4}Kr_A^4 - \frac{1}{4}Kr_B^4$$

Dunque $E_p(A) - E_p(B) = \frac{1}{4}Kr_A^4 - \frac{1}{4}Kr_B^4$.

Si evince quindi la seguente espressione per l'energia potenziale

$$E_p(\vec{r}) = \frac{1}{4}Kr^4 + C$$

con C costante arbitraria, che possiamo porre a zero, assumendo quindi il punto nell'origine come riferimento per l'energia potenziale.