Esercitazioni di Analisi 2

ESTREMI LIBERI

1. Determina i punti critici (cioè quelli che annullano il gradiente) della funzione $f(x,y) = x^2 \cos(xy)$.
   $[x = 0]$

2. Determina i punti critici della funzione $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 - xy^2 + x$ e la loro natura.
   $[A(0,1)$ e $B(0,-1)$ sono punti di sella, $B(-1,0)$ è punto di minimo.]

3. Stabilisci se la forma quadratica q definita da $q(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$ è definita positiva (o negativa), semidefinita o indefinita. [Semidefinita positiva]

4. Determina i punti di massimo locale (M) e minimo locale (m) delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = x^3 + 6xy + 3xy^2$ $[\mathrm{m} = (1,-1);\ \mathrm{M} = (-1,-1)]$
   (b) $f(x,y) = x^4 + y^4$ $[\mathrm{m} = (0,0)]$
   (c) $f(x,y) = x^4 - y^4$ $[\varnothing]$
   (d) $f(x,y) = \log(xy)$ $[\varnothing]$
   (e) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ $\left[\mathrm{M} = (0,0); \mathrm{m} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\}\right]$
   (f) $f(x,y) = y^3 + 2xy^2 - x^2y^2$ $\left[\mathrm{M} = (1, -\frac{2}{3});\ \mathrm{m} = (\alpha, 0) \text{ con } 0 < \alpha < 2;\ \mathrm{M} = (\alpha, 0) \text{ con } \alpha < 0 \text{ e } \alpha > 2\right]$

5. Determina i punti critici della funzione $f(x,y) = \frac{y^2}{4} - (y+1)\cos x$ e studiane la natura. Calcola poi la derivata direzionale nel punto $P = (\frac{\pi}{4}, 0)$ rispetto a $v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
   $\left[s = (\frac{2\pi}{3}, -1);\ s = (\frac{4\pi}{3}, -1);\ m = (0,2);\ m = (\pi, -2);\ D = -\frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

6. Determina tutti i punti stazionari della funzione $f(x,y) = x^8 - 2x^4 - y^2$ e la loro natura.
   [$A(-1,0)$ e $B(1,0)$ sono punti di sella. L'origine $(0,0)$ è punto di massimo locale.
   (Il determinante della matrice Hessiana nell'origine è nullo: per determinare la natura dell'origine confrontiamo $f(x,y)$ con $f(0,0)$. Risulta che esistono intorni di $(0,0)$ in cui $f(x,y) \leq f(0,0)$, infatti $f(x,y) - f(0,0) = x^8 - 2x^4 - y^2 = -x^4\left(2 - x^4\right) - y^2 \leq 0\ \forall x \in \left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}\right)$.]

7. Determina i punti di massimo locale (M), minimo locale (m) o sella (s) delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ $[\mathrm{m} = (1,0)]$
   (b) $f(x,y) = (x-1)^2 - y^2$ $[\mathrm{s} = (1,0)]$
   (c) $f(x,y) = e^{1-x^2-y^2}$ $[\mathrm{M} = (0,0)]$=0
   (d) $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + x + y$ $[\mathrm{s} = (-1,-2)]$
   (e) $f(x,y) = \frac{1}{xy-1}$ $[\mathrm{s} = (0,0)]$

Individua, se esistono, gli estremi locali delle sequenti funzioni nel loro dominio (nelle soluzioni $\det H$ sta per determinante della matrice Hessiana, s per *punto di sella*, m per *punto di minimo*, M per *punto di massimo*).

1. $f(x,y) = x^3 + y^2 - x$ $\quad \left[s\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right); \, m\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \right]$

2. $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ $\quad [s(0,0); \, m(1,1)]$

3. $f(x,y) = \ln\left(y^2 - 1\right) + x^2 - 3y^2$ $\quad \left[s\left(0, \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \right]$

4. $f(x,y) = e^x (x-1)(y-1) + (y-1)^2$ $\quad \left[s(1,1); \, m\left(0, \frac{3}{2}\right) \right]$

5. $f(x,y) = x^2 - 2x + y^4 + y^2$ $\quad [m(1,0)]$

6. $f(x,y) = x^2(x+y) - y^2 - 4y$ $\quad \left[s\left(1, -\frac{3}{2}\right); \, s(-4,6); \, M(0,-2) \right]$

7. $f(x,y) = y^3 + x^2 y - 2y^2 x + xy$ $\quad \left[s(0,0); \, s(-1,0); \, m\left(-\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right) \right]$

8. $f(x,y) = e^{\frac{1}{3}\left(y^3 - x^3\right) + x - y}$ $\quad [s(\pm 1, \pm 1); \, M(1,-1); \, m(-1,1)]$

9. $f(x,y) = x\left((y+1)e^{y+2} + x\right)$ $\quad \left[s(0,-1); \, m\left(\frac{1}{2}, -2\right) \right]$

10. $f(x,y) = xye^{-\dfrac{x^2+y^2}{2}}$ $\quad [s(0,0); \, M(\pm 1, \pm 1); \, m(\pm 1, \mp 1)]$

11. $f(x,y) = (x-y)^2 - x^2 y^2$
    [$\det H(0,0) = 0$: dall'analisi di $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ sulle rette $y = x$ e $y = -x \Longrightarrow s(0,0)$; $s\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right)$]

12. $f(x,y) = x^4 - 6x^2 y^2 + y^4$
    [$\det H(0,0) = 0$: $f(0,0) = 0$, per $x \neq 0$ $f(x,0) > 0$, $f(x,x) < 0 \Longrightarrow s(0,0)$]

13. $f(x,y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$
    [$\det H(0,0) = 0$: scrivendo f nella forma fattorizzata $f(x,y) = \left(2x - y^2\right)\left(x - y^2\right)$ è facile stabilire che $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ non è costante in ogni intorno di $(0,0) \Longrightarrow s(0,0)$]

14. $f(x,y) = x^2 e^{1-x^2-y^2}$

15. $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2 - x^3 - 4y^3$
    [$\det H(0,0) = 0$: dall'analisi di $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ sulla retta $y = -x \Longrightarrow s(0,0)$; $s\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$; $M\left(1, \frac{1}{2}\right)$]

16. $f(x,y) = \sin(x+y)$

    [$\det H(x,y) = 0$: i punti $x + y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ sono di *Massimo se* k è pari, di *minimo se* k è dispari]

17. $f(x,y) = \sin^2 x + \cos y$

18. $f(x,y) = (xy-1)^2$ $\quad$ [$s(0,0)$; $\det H(xy-1=0) = 0$, $m(xy-1=0)$]

19. $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 + 2y^4$

20. [$\det H(0,0) = 0$: scrivendo f nella forma fattorizzata $f(x,y) = \left(x+y^2\right)\left(x+2y^2\right)$ è facile stabilire che $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ non è costante in ogni intorno di $(0,0) \Longrightarrow s(0,0)$]

21. $f(x,y) = -16x^4 - y^4 + 16x^2 + 16xy + 4y^2 + 3$

    [$\det H(0,0) = 0$: dall'analisi di $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ sulle rette $y = -2x$ e $y = 0 \Longrightarrow s(0,0)$; $M(\pm 1; \pm 2)$]

22. $f(x,y) = xy(x-1)^2$ $\quad$ [$s(0,0)$; $\det H(1,y) = 0$: se $y > 0$ $m(1,y)$, se $y < 0$ $M(1,y)$, $s(1,0)$]

23. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2$

    [$\det H(0,0) = 0$: dall'analisi di $Sgn(f(x,y) - f(0,0))$ sulle rette $y = x$ e $y = 0 \Longrightarrow s(0,0)$; $m\left(\pm\sqrt{2}, \mp\sqrt{2}\right)$]

24. $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

25. $f(x,y) = 4(x+1)y^3 - 3y^4 + 27x^4 + 1$ $\quad$ $\left[\det H(0,0) = 0,\ s(0,0);\ s\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right)\right]$

26. $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $\quad$ $\left[M(0,0);\ m\left(x^2 + y^2 - 4 = 0\right)\right]$

27. $f(x,y) = e^{x^2 - y^2 - 1} - x^2 + y^2$

28. $f(x,y) = \left(x^2 + y^2 - 1\right)^2$ $\quad$ $\left[M(0,0);\ m\left(x^2 + y^2 - 1 = 0\right)\right]$

29. $f(x,y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$

30. $f(x,y) = xe^y - ye^x$ $\quad$ [$s(1,1)$]

31. $f(x,y) = x^2 \ln(1+y) + x^2 y^2$

32. $f(x,y) = xy(x+y)^2$ $\quad$ [$s(0,0)$; $M(1,1)$; $M(y = -x)$]

33. $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 + y^4$

34. $f(x,y) = x|x|y$ $\quad$ [$s(x = 0)$]

35. $f(x,y) = 2x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y$ $\quad$ [$s(0,1)$; $m(1,1)$; $s(1,-1)$; $M(0,-1)$]

36. $f(x,y) = \left(x^2 - 2y\right)\left(x - y^2 + y\right)$

37. $f(x,y) = \left(x^2 - 1\right)\left(y^2 - 1\right)$ $\quad$ [$s(\pm 1, \pm 1)$; $M(0,0)$]

38. $f(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$