Informazione e stima – 31/01/2022

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cercare di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si estraggono 13 carte da un mazzo di 52 ben mescolato. Si considerino gli eventi
$A = \{4 \text{ di picche, } 4 \text{ di cuori, } 3 \text{ di quadri, } 2 \text{ di fiori}\}$, $B = \{\text{estrarre } 4, 4, 3, 2 \text{ carte nei diversi semi}\}$.

   (a) Senza fare calcoli, dire quale tra A e B è l'evento più probabile. Giustificare la risposta.

   (b) Calcolare le probabilità degli eventi A e B.

   Le estrazioni sono senza reinserimento. Nel mazzo ci sono 13 *carte di ogni seme.*

2. Si consideri una moneta ben bilanciata. Sia X il numero di teste e Y il numero di croci in n lanci?

   (a) Senza fare calcoli, dire qual è il segno del coefficiente di correlazione lineare tra X e Y. Giustificare la risposta.

   (b) Calcolare la covarianza tra X e Y.

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$ e $Y = \frac{1}{X}$. Si calcoli la legge di probabilità di Y.
Si presti attenzione ai valori assunti da Y.

4. Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Si considerino le successioni di v.a. $\{Y_n\}$ e $\{Z_n\}$ con $Y_n = X^n$ e $Z_n = \frac{1}{Y_n+1}$ per $n \in \mathbb{N}$. Determinare se le successioni convergono in probabilità e, se sì, a quale valore.

5. Partendo da campioni uniformemente distribuiti in $[0, 1]$, usare il metodo acceptance-rejection per campionare una v.a. X con legge

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{32}(4 - (x + 2)^2) & -4 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{1}$$

   Scrivere l'algoritmo acceptance-rejection con la miglior efficienza possibile. Mediamente quanti campioni uniformi bisogna generare per vedere un campione X accettato?

6. Una moneta non bilanciata ha $\Pr(\text{Testa}) = \frac{3}{4}$. Qual è il numero medio minimo di bit per lancio che serve per rapprentare il risultato di:

   (a) 1 lancio di moneta

   (b) 2 lanci di moneta

   (c) un miliardo di lanci di moneta

Soluzioni

Problema 1

1. Siccome $A \subset B$, abbiamo $\Pr(A) < \Pr(B)$.

2. La prima è una probabilità ipergeometrica:

$$\Pr(A) = \frac{\binom{13}{4}^2 \binom{13}{3} \binom{13}{2}}{\binom{52}{13}} \approx 0.0179 \tag{2}$$

   L'evento B si può interpretare come l'unione di $4!/2!$ eventi di tipo A, dunque:

$$\Pr(B) = 12P(A) \approx 0.2155 \tag{3}$$

Problema 2

1. Fissato il numero di lanci n di moneta, più si osserveranno teste, meno croci si otterranno. Dunque X e Y sono correlate negativamente.

2. Notando che $Y = n - X$, la covarianza si può calcolare come:

$$\begin{aligned}
\mathsf{Cov}[X, Y] &= \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(Y - \mathsf{E}[Y])] && (4)\\
&= \mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(n - X - \mathsf{E}[n - X])] && (5)\\
&= -\mathsf{E}[(X - \mathsf{E}[X])(X - \mathsf{E}[X])] && (6)\\
&= -\mathsf{Var}[X] && (7)\\
&= -\frac{n}{4}, && (8)
\end{aligned}$$

   dove nell'ultimo passaggio usiamo il fatto che $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$.

Problema 3

Innanzitutto notiamo che $Y \in [1, \infty)$. Applichiamo il metodo della cumulata:

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = \Pr(Y \leq y) &= \Pr\left(\frac{1}{X} \leq y\right) && (9)\\
&= \Pr\left(X \geq \frac{1}{y}\right) && (10)\\
&= 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right) && (11)\\
&= \begin{cases} 1 - \frac{1}{y} & y \geq 1 \\ 0, & y < 1 \end{cases} && (12)
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato $F_X(x) = x$ per $x \in [0, 1]$, $F_X(x) = 0$ per $x \leq 0$, e $F_X(x) = 1$ per $x \geq 1$.

La densità di probabilità si ottiene derivando:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{1}{y^2}, \qquad y \geq 1 \tag{13}$$

e $f_Y(y) = 0$ altrove.

Problema 4

La v.a. X^n tende a concentrarsi attorno al valore $x = 0$ all'aumentare di n. Testiamo la convergenza in probabilità al valore $x = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|X^n - 0| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \Pr(X > \varepsilon^{\frac{1}{n}}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \varepsilon^{\frac{1}{n}} = 0 \tag{14}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui segue che $Y_n \to 0$ in probabilità.

La v.a. $\frac{1}{X^n+1}$ tende a concentrarsi attorno al valore $x = 1$ all'aumentare di n. Testiamo la convergenza in probabilità al valore $x = 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\left|\frac{1}{X^n+1} - 1\right| > \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{1}{X^n+1} - 1 < -\varepsilon\right) + \Pr\left(\frac{1}{X^n+1} - 1 > \varepsilon\right) \tag{15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Pr\left(X^n + 1 > \frac{1}{1-\varepsilon}\right) + \Pr\left(X^n + 1 < \frac{1}{1+\varepsilon}\right) \tag{16}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Pr\left(X > \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}\right) + \Pr\left(X^n < -\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right) \tag{17}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \Pr\left(X > \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}\right) \tag{18}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 1 - \left(\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}} = 0 \tag{19}$$

per ogni $\varepsilon > 0$, da cui segue che $Z_n \to 0$ in probabilità. Da notare che il passaggio (18) segue dal fatto che X^n è una v.a. positiva, mentre $-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ è una quantità negativa.

Problema 5

Il massimo della funzione f_X nell'intervallo $-4 \leq x \leq 0$ si ha per $x = -2$. In tal punto la funzione vale $f_X(-2) = 3/8$.

L'algoritmo é il seguente:

1. Genero $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ e $U' \sim \mathcal{U}[0,1]$ in maniera indipendente. Siccome $-4 \leq x \leq 0$, trasformo $Y = -4U$ e pongo $mf_Y(x) \stackrel{!}{=} 3/8 \to m = 3/2$ per ottenere massima efficienza
2. Accetto e pongo $X = Y$ se $U' \leq \frac{f_X(Y)}{mf_Y(Y)} = \frac{\frac{3}{32}(4-(Y+2)^2)}{\frac{3}{2}\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}(4 - (Y+2)^2)$, altrimenti torno al punto 1.

Il numero di prove medie per avere un campione accettato é pari a $m = 3/2$.

Problema 6

1. Con un lancio di moneta c'è solo un assegnamento possibile di parole codice: 0 per rappresentare testa, e 1 per rappresentare croce. Dunque ci vuole 1 bit.
2. Per rappresentare una coppia di lanci si può usare il seguente codice:
   - 0 per rappresentare TT, con $\Pr(TT) = \left(\frac{3}{4}\right)^2$
   - 10 per rappresentare TC, con $\Pr(TC) = \frac{3}{4}\frac{1}{4}$
   - 110 per rappresentare CT, con $\Pr(CT) = \frac{3}{4}\frac{1}{4}$
   - 111 per rappresentare CC, con $\Pr(CC) = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

   Non esistono codici disambigui più corti di questo. La lunghezza media per lancio di questo codice è:

$$\frac{1}{2}\left(1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{3}{4}\frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) \approx 0.84 \text{ bit/lancio} \tag{20}$$

3. Per un numero molto grande di lanci sappiamo che per il teorema di codifica di sorgente esiste un codice la cui lunghezza media per lancio è molto vicina all'entropia della sorgente. Dunque la lunghezze media per lancio del codice è:

$$\mathsf{H}(X) = -\frac{3}{4}\log\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log\frac{1}{4} \approx 0.81 \text{ bit/lancio} \tag{21}$$