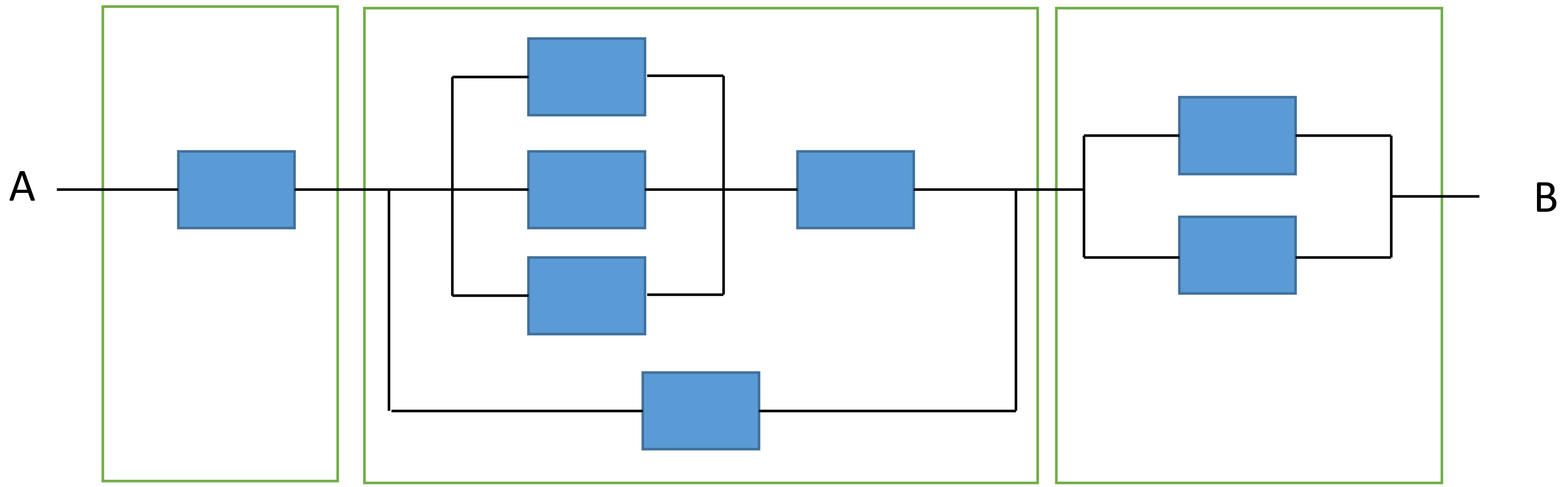
Esercizi di riepilogo
Prima parte

Es1: Eventi indipendenti

- Siano A e B eventi tali che $A \subset B$
- Gli eventi possono essere indipendenti?

Es2: Funzionamento di un circuito

- Ogni componente di un circuito funziona con probabilità p, indipendentemente dagli altri componenti.
- Ci sono 3 sottocircuiti, come in figura. Il circuito funziona se esiste un percorso che unisce il punto A al punto B.
- Qual è la probabilità che i 3 sottocircuiti funzionino. E il circuito totale?



Es3: Torneo di scacchi

- I giocatori A e B prendono parte ad un torneo di scacchi per sfidare il campione C.
- A e B si sfidano in due partite. Se uno di loro le vince entrambe, allora può sfidare il campione C.
- Il campione viene sfidato in due partite e cede il titolo solo se viene sconfitto in entrambe.
- Si sa che
  - A batte B in una partita qualsiasi con prob. 0.6
  - C batte A in una partita qualsiasi con prob. 0.5
  - C batte B in una partita qualsiasi con prob. 0.7
- Le partite non possono finire in parità e sono tutte indipendenti

a) Determinare la prob. che C venga sfidato, che A sfidi C, e che C rimanga campione

b) Dato che C venga sfidato, calcolare la prob. che A sia lo sfidante, e che C rimanga campione

c) Dato che C venga sfidato e che rimanga campione vincendo subito la prima partita, qual è la prob. che A abbia sfidato C?

Es4: Mazzo di carte

- Un giocatore riceve 13 carte da un mazzo di 52

a) Qual è la prob. che la 13-esima carta ricevuta sia un re?

b) Qual è la prob. che la 13-esima carta ricevuta sia il primo re ricevuto?

Es5: V.a. discreta

- Si consideri la v.a. X tale che

  $$p_X(x) = \frac{x^2}{a} \text{ per } x \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}, \quad p_X(x) = 0 \text{ altrimenti}$$

  dove a è un parametro reale.

a) Determinare a

b) Qual è la ddp della v.a. $Z = X^2$

Es6: Classi

- 90 studenti, inclusi gli studenti Tom e Jerry, devono essere suddivisi in 3 classi della stessa grandezza, in modo casuale.
- Qual è la probabilità che Tom e Jerry finiscano nella stessa classe?

Es7: Mazzo di carte

- Si estraggano 7 carte dalla cima di un mazzo (ben mescolato) di 52 carte
- Trovare la probabilità che le 7 carte includano esattamente 3 assi

Es8: Media e varianza

- Siano X e Y due v.a. indipendenti.
- Sia $Z = 2X - 3Y$
- Trovare media e varianza di Z in funzione di medie e varianze di X e Y.

Es9: Dado

- Si consideri un dado ben bilanciato a 6 facce
- Quanti lanci del dado ci si aspetta di fare prima di osservare ogni faccia almeno una volta?

Es10: V.a. congiunte

- La ddp congiunta delle v.a. X e Y è data in tabella

y=3	*c*	*c*	*2c*
y=2	*2c*	*0*	*4c*
y=1	*3c*	*c*	*6c*
	x=1	**x=2**	**x=3**

a) Trovare il valore della costante c
b) Trovare P(Y=2)
c) Si consideri la v.a. $Z = YX^2$. Trovare $\mathsf{E}[Z|Y=2]$
d) Dato che $X \neq 2$, X e Y sono indip.? Dare una breve giustificazione
e) Trovare la varianza di Y sapendo che X=2

Es11: V.a. Gaussiane

- Siano X e Y due v.a. Gaussiane, con $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(1,4)$

a) Trovare $\Pr(X \leq 1.5)$, $\Pr(X \leq -1)$

b) Qual è la ddp di (Y-1)/2 ?

c) Trovare $\Pr(-1 \leq Y \leq 1)$

Es12: Freccette

- Marco gioca a freccette su un bersaglio circolare di raggio r.
- Assumendo che Marco colpisca sempre il bersaglio, e che colpisca tutti i punti (x,y) con la stessa probabilità, determinare

a) La ddp congiunta $f_{X,Y}(x,y)$

b) La ddp condizionata $f_{X|Y}(x|y)$

Es13: Ricevimento studenti

- Al ricevimento si presentano due studenti. Uno arriva in orario, e l'altro arriva dopo 5 minuti.
- I colloqui durano un tempo casuale distribuito esponenzialmente con media di 30 minuti, e sono indipendenti da studente a studente.
- Qual è il valore atteso del lasso di tempo tra l'arrivo del primo studente e l'uscita del secondo studente?

Es14: Aspettativa di vita di un macchinario

- Sia Q una v.a. uniformemente distribuita in [0,1]. Sapendo che Q=q, una macchina funziona con probabilità q. Inoltre, dato il valore di Q, lo stato della macchina in giorni diversi è indipendente.

a) Trovare la probabilità che la macchina sia funzionante in un giorno pescato a caso

b) Sappiamo che la macchina ha funzionato in m degli ultimi n giorni. Trovare la ddp condizionata di Q. Suggerimento: usare l'identità

$$\int_0^1 p^k(1-p)^{n-k}dp = \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}$$

Es15: Funzione di v.a.

- Sia X una v.a. con ddp f_X. Trovare la ddp della v.a. Y=|X|

a) Quando

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/3 & -2 < x \leq 1, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

b) Quando

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x > 0, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c) Per una f_X generica

Es16: v.a. di Cauchy

- Sia X una v.a. uniformemente distribuita tra -1/2 e ½

a) Mostrare che la ddp di Y=tan(X) è

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}, \quad y \in (-\infty, \infty)$$

b) Trovare la ddp della v.a. Z definita come l'angolo (compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$) la cui tangente è Y.

Es 17: Differenza tra v.a. continue

- Le v.a. X e Y sono indipendenti e distribuite uniformemente tra 0 e a.
- Trovare la ddp della v.a. $Z=|X-Y|$

Es18: Somme di v.a.

- Sia X una v.a. discreta con legge p_X e sia Y una v.a. continua, indipendente da X, con legge f_Y
- Si derivi una formula per la legge della v.a. X+Y

Es19: Variazione totale della somma

- Le v.a. X e Y sono descritte da una ddp congiunta che è uniforme nel quadrilatero di vertici (0,0), (0,1), (1,2), e (1,1).
- Si usi la legge della variazione totale per trovare la varianza di X+Y

Es20: Dadi e monete

- Si lancia un dado ben bilanciato a 6 facce, dopodichè si lancia una moneta bilanciata un numero di volte pari al risultato del lancio del dado

a) Si trovi valore atteso e varianza del numero di teste così ottenute

b) Si ripeta la parte a) nel caso in cui si lancino due dadi

Es21: Convergenze

- Sia $\{X_n\}$ una sequenza di v.a. indipendenti che assumono valori in [0, 0.5]. Quali delle seguenti affermazioni è sempre vera?

a) Se E$[X_n^2]$ converge a 0 per $n \to \infty$, allora $\{X_n\}$converge a 0 in probabilità

b) Se tutte le $\{X_n\}$ hanno E$[X_n] = 0.2$ e Var$[X_n] \to 0,\ n \to \infty$, allora $\{X_n\}$ converge a 0.2 in probabilità

c) La sequenza $\{Z_n\}$, definita da $Z_n = X_1 \cdot X_2 \cdots X_n$ converge a 0 in probabilità

Es22: Convergenze

- Siano $\{X_i\}$ v.a. iid con media 0 e varianza 2; siano $\{Y_i\}$ delle v.a. iid con media 2. Si assuma che X e Y siano indipendenti. Quali delle seguenti affermazioni è sempre vera?

a) $\frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ converge a 0 in probabilità

b) $\frac{X_1^2+\ldots+X_n^2}{n}$ converge a 2 in probabilità

c) $\frac{X_1Y_1+\ldots+X_nY_n}{n}$ converge a 0 in probabilità