- La risposta corretta è la (c). In particolare, questa può essere fatta derivare dalla Legge di Stevino:
$$p = p_0 + \int \rho(z)\, g\, dz$$
considerando molto piccola la densità ρ del gas (essendo *rarefatto*) e considerando che esso si estenda per un'altezza limitata (essendo *prossimo alla superficie terrestre*) per cui l'integrale è svolto su un intervallo di z limitato. Infatti, in tali condizioni il valore dell'integrale è trascurabile e $p \simeq p_0$.

8. Una particella percorre un'orbita circolare con un moto circolare con momento angolare L. Se la frequenza del moto raddoppia e l'energia cinetica viene dimezzata, il modulo del momento angolare diventa: ... `[1 pt]`

   - Il momento angolare della particella è in modulo:
   $$L = mR^2\omega$$
   dove m è la massa della particella, R è il raggio dell'orbita circolare, ω la velocità angolare.
   - L'energia cinetica è invece:
   $$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 = \frac{1}{2}mR^2\omega^2$$
   da cui:
   $$L = \frac{2E_K}{\omega}$$
   - Se consideriamo, come scritto nel testo della domanda:
   $$\omega' = 2\omega \qquad\qquad E'_K = \frac{1}{2}E_K$$
   allora:
   $$L' = \frac{2E'_K}{\omega} = \frac{2\cdot\frac{1}{2}E_K}{2\omega} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2E'_K}{\omega} = \frac{1}{4}L$$

Form 3 - Domande a risposta aperta `[tot. 8 pt]`

Una massa $m = 0.5$ kg legata ad una fune ideale può ruotare su un piano orizzontale privo di attrito descrivendo una circonferenza di raggio $R = 10$ cm. La massa viene posta in rotazione da ferma all'istante $t = 0$ con accelerazione angolare costante $\alpha = 3$ rad/s^2.

1. Sapendo che la fune può sopportare una tensione massima $T_{\mathrm{MAX}} = 10$ N prima di spezzarsi, si calcoli l'istante in cui la fune si spezza. `[4 pt]`

   - In presenza di un'accelerazione angolare α costante e se $\omega = 0$ in $t = 0$, la velocità angolare in funzione del tempo è descritta da:
   $$\omega(t) = \alpha\, t$$
   - L'accelerazione centripeta della massa m è:
   $$a_C = \omega^2 R = \alpha^2 t^2 R$$

- La tensione T della fune svolge il ruolo di forza centripeta:

$$T \equiv F_c = m a_C = m\alpha^2 t^2 R$$

- La tensione T_{MAX} è raggiunta perciò in un istante t_r che soddisfa:

$$T_{\text{MAX}} = m\alpha^2 t_r^2 R$$

$$t_r = \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{T_{\text{MAX}}}{mR}} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{10}{0.5 \cdot 0.1}} \text{ s} = 4.71 \text{ s}$$

È questo l'istante in cui la fune si spezza.

2. Si calcoli il modulo della velocità in tale istante. `[2 pt]`

- Il modulo della velocità della massa m, che sta compiendo un moto circolare, è:

$$|\vec{v}| = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega(t_r) \cdot R = \alpha t_r \cdot R = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{T_{\text{MAX}}}{mR}} \cdot R$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{T_{\text{MAX}} R}{m}} = \sqrt{\frac{10 \cdot 0.1}{0.5}} \text{ m/s} \simeq 1.4 \text{ m/s}$$

3. Si calcoli il modulo dell'accelerazione in tale istante. `[2 pt]`

- Per calcolare il modulo dell'accelerazione dobbiamo ricordare che, poiché la massa in moto non uniforme, il vettore accelerazione è la somma di una componente normale (centripeta) e di una componente tangenziale. L'accelerazione centripeta è stata calcolata al punto precedente e all'istante t_r vale:

$$a_C = \alpha^2 t_r^2 R = \alpha^2 \cdot \frac{T_{\text{MAX}}}{\alpha^2 m R} \cdot R = \frac{T_{\text{MAX}}}{m}$$

L'accelerazione tangenziale è pari a:

$$a_T = \alpha R$$

Perciò:

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_C|^2 + |\vec{a}_T|^2} = \sqrt{\frac{T_{\text{MAX}}^2}{m^2} + \alpha^2 R^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\frac{10^2}{0.5^2} + 3^2 \cdot 0.01^2} \text{ m/s}^2 \simeq 20 \text{ m/s}^2$$

Form 4 - Domande a risposta aperta `[tot. 8 pt]`

Una mole di gas perfetto monoatomico viene riscaldato a volume costante da uno stato iniziale di equilibrio (A) fino alla temperatura $T(\text{B}) = 300$ K. In seguito a tale trasformazione l'entropia del gas aumenta di $\Delta S = 0.5$ J/K. Successivamente, tramite una trasformazione isoterma reversibile, il gas torna alla pressione iniziale $p(\text{A})$ nello stato di equilibrio finale C.

1. Si calcoli il valore assunto dalla temperatura del gas nello stato iniziale A. `[4 pt]`

- La variazione di entropia nella trasformazione A→B può essere calcolata come integrale di Clausius su una isocora reversibile che congiunga gli stessi stati iniziale e finale:

$$\Delta S = \int_{rev} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{n\, c_V\, dT}{T} = \int_{T_A}^{T_B} \frac{3}{2} nR \frac{dT}{T} = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_B}{T_A}$$

- Dall'equazione precedente si ricava perciò:

$$\frac{T_B}{T_A} = e^{\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta S}{nR}}$$

$$T_A = T_B \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta S}{nR}}$$

$$T_A = 300 \text{ K} \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{0.5}{1 \cdot 8.31}} \simeq 288 \text{ K}$$

2. Si ricavi l'espressione del lavoro compiuto dal gas durante l'espansione, in funzione delle variabili di stato del gas negli stati A e B. `[2 pt]`

   - Il lavoro termodinamico in una trasformazione quasistatica da B a C è pari a:

   $$\mathcal{L} = \int_{V_B}^{V_C} p\, dV$$

   Ora $p = nRT/V$ dove T è costante essendo la trasformazione isoterma:

   $$\mathcal{L} = \int_{V_B}^{V_C} nRT \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_C}{V_B}$$

   - La temperatura a cui avviene l'isoterma è la temperatura dello stato B, cioè $T = T_B$. Inoltre, dalla legge di Boyle, $V_C/V_B = p_B/p_C$. Possiamo scrivere perciò:

   $$\mathcal{L} = nRT_B \ln \frac{p_B}{p_C}$$

   - Sappiamo poi che la pressione nello state finale C è uguale a quella dello stato iniziale A:

   $$\mathcal{L} = nRT_B \ln \frac{p_B}{p_A}$$

3. Si calcoli il valore di tale lavoro espresso in joule. `[2 pt]`

   - Applicando la legge di Gay-Lussac alla trasformazione isocora tra A e B:

   $$\frac{p_B}{p_A} = \frac{T_B}{T_A}$$

   da cui:

   $$\mathcal{L} = nRT_B \ln \frac{T_B}{T_A}$$

   - Possiamo osservare dai passaggi svolti nel punto 1 che:

   $$\Delta S = \frac{3}{2} nR \ln \frac{T_B}{T_A} \qquad \rightarrow \qquad \ln \frac{T_B}{T_A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta S}{nR}$$

   Concludiamo allora:

   $$\mathcal{L} = nRT_B \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\Delta S}{nR} = \frac{2}{3} T_B\, \Delta S$$

   $$\mathcal{L} = \frac{2}{3} \cdot 300 \cdot 0.5 \text{ J} = 100 \text{ J}$$