Esercizio 1

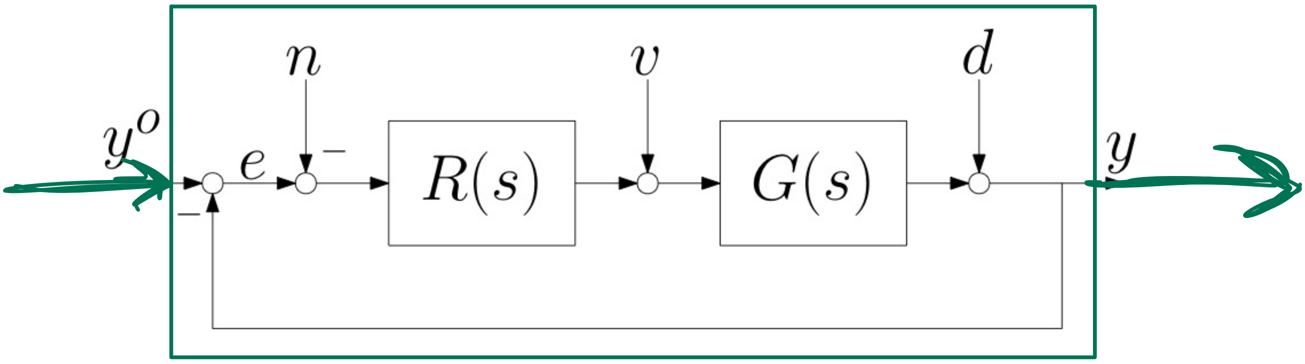


Figura 1: Schema di controllo.

Si consideri lo schema di controllo in figura, in cui $G(s) = 10\frac{s+1}{(1+10s)(1+0.1s)}$ e $n(t) = v(t) = 0$.

1.1. Dire che caratteristiche deve avere $R(s)$ affinchè l'errore di regime sia nullo per $y^o(t) = \pm 17\text{sca}(t)$ e $d(t) = -15\text{sca}(t)$

1.2. Posto $R(s) = 0.01\frac{1+10s}{s}$, verificare l'asintotica stabilità del sistema retroazionato

1.3. Dire quanto vale l'ampiezza a regime di $y(t)$ quando $y^o(t) = 0$ e

- $d(t) = 2\text{sca}(t)$
- $d(t) = \sin(0.001t)$
- $d(t) = \sin(1000t)$

1.4. Posto ora $d(t) = 0$, tracciare l'andamento qualitativo dell'uscita quando $y^o(t) = \text{sca}(t)$, precisando $y(0)$, y_∞, T_{ass}, $S_\%$.

1)

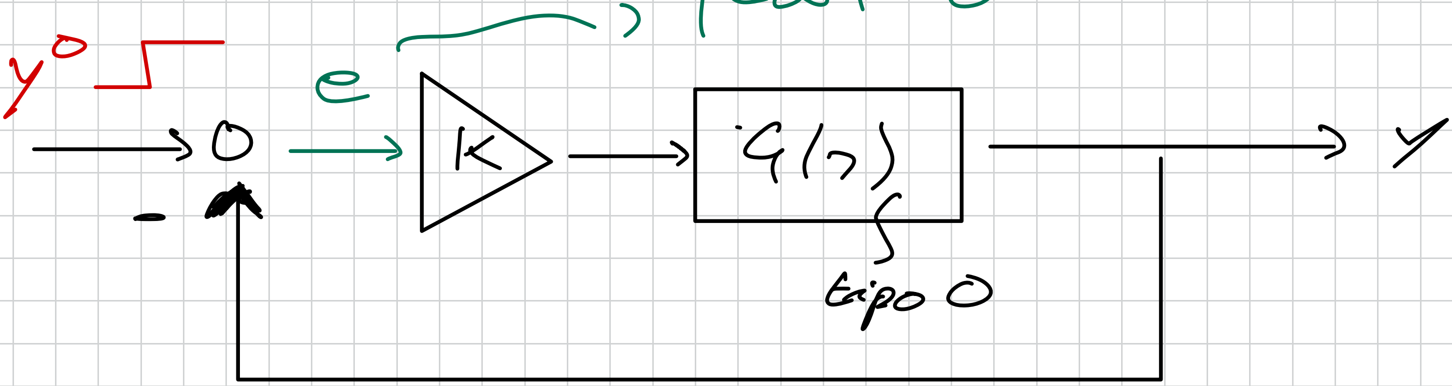
$\boxed{G(s)}$ TIPO : $g = 0$

POLI : $p_1 = -10$ $\quad p_2 = -0,1$

ZERI : $z_1 = -1$

$\Rightarrow$ SIST. E' A. STABILE

$|e_\infty| > 0$



perché $\frac{E(s)}{Y^o(s)} = S(s)$ $\quad \frac{E(s)}{D(s)} = -S(s)$

per avere $\left| e_\infty^{y_o} \right| = 0$ $\quad \left| e_\infty^{d} \right| = 0$ $\rightarrow L(s)$ tipo 1

$$R(s) = \underbrace{\frac{K}{s}}_{\text{tipo } 1} \underbrace{R'(s)}_{\text{tipo } 0}$$

$\Rightarrow L(s) = R(s) \cdot G(s)$ deve essere stabile

2) $R(s) = 0.01 \dfrac{1+10s}{s}$

$G(s) = 10 \dfrac{s+1}{(1+10s)(1+0,1s)}$

$$\underset{R(s)\cdot G(s)}{\overset{\shortparallel}{L(s)}} = \frac{0.1}{s} \frac{(s+1)\cancel{(1+10s)}}{\cancel{(1+10s)}(1+0,1s)}$$

$\downarrow$

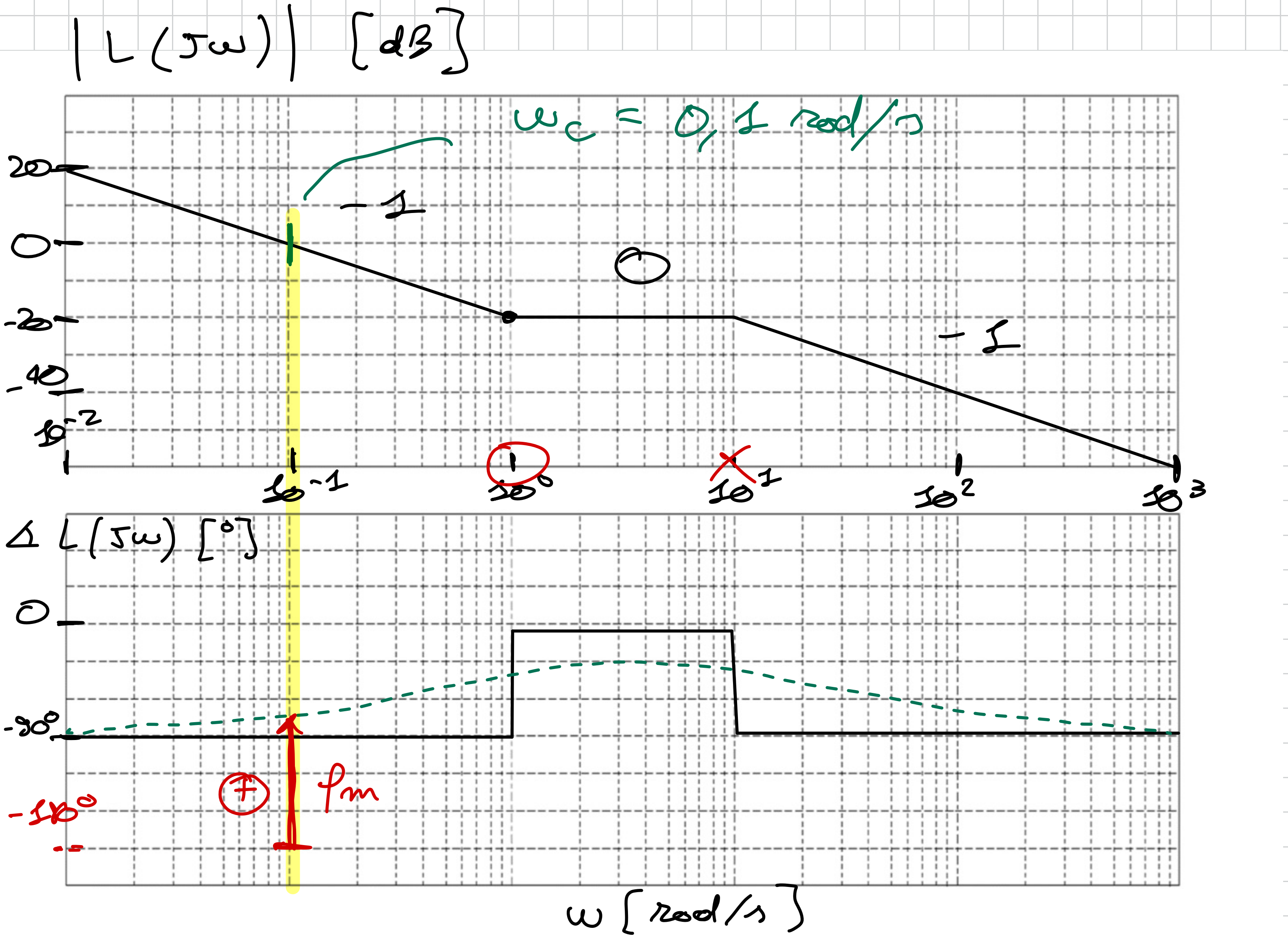
CANCELLAZ. VALIDA (elimina un polo stabile)

$$L(s) = \frac{0,1}{s} \frac{(s+1)}{(1+0,1s)} \qquad \mu_L = -20dB$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} \quad \begin{matrix} \leftarrow num \\ \leftarrow den \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= 0,1(s+1) + s(1+0,1s) \\ &= 0,1s + 0,1 + s + 0,1s^2 \\ &= \underbrace{0,1}_{>0}s^2 + \underbrace{1,1}_{>0}s + \underbrace{0,1}_{>0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ SIST. A. STAB IN ANELLO CHIUSO



$$\begin{cases} \mu_L > 0 \\ \varphi_m > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

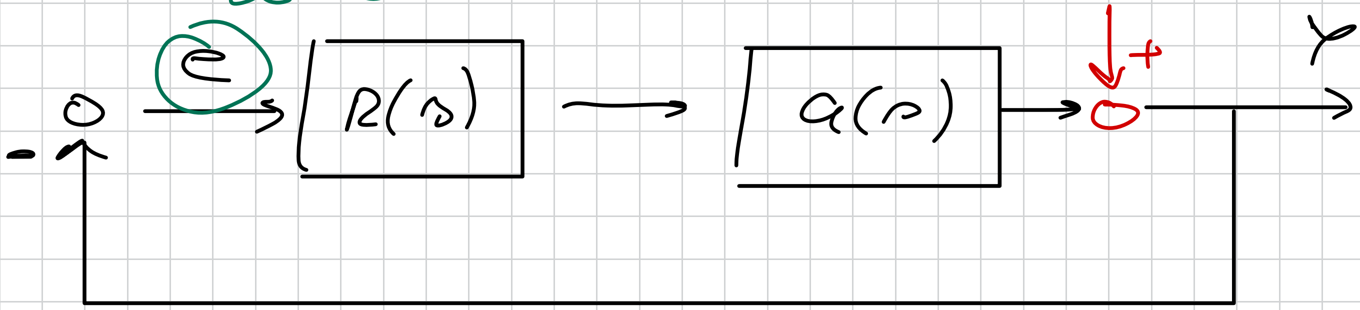
SIST. IN ANELLO CHIUSO È A. STAB PER IL CRITERIO DI BODE
(applicabile: ✓ ω_c ben definita
✓ no poli inst. in $G(s)$)

OSS: Avremmo potuto utilizzare il COROLLARIO DELLA PICCOLA FASE per concludere l'asintotica stabilità in anello chiuso.

3) $y^o(t) = 0$, calcola y_∞ con:

■ $d(t) = 2\,\mathrm{sca}(t)$

$e_\infty = 0$



$$\Rightarrow \left| y_\infty^d \right| = 0 \quad \left(\lim_{s \to 0} s\, \underset{\uparrow\; S(s)\cdot\frac{2}{s}}{Y(s)} \right)$$

(ANELLO DI TIPO 1 da design)

■ $d(t) = 1 \cdot \sin(0{,}001\, t)$

$$\bar{\omega}_1 = 0{,}001 \ll \overset{0{,}1}{\omega_c} \quad [\mathrm{rad/s}]$$

$$|Y(s)| = |-S(s) \cdot D(s)| = \left| -\frac{1}{1 + L(s)} \right| \cdot \underset{\uparrow\; 1}{|D(s)|}$$

$$S(s) \simeq \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|} = \boxed{\frac{1}{100}} \quad \left(\text{dal diagramma di Bode: } +40\,dB\right)$$

$\bar{\omega}$: 0,001

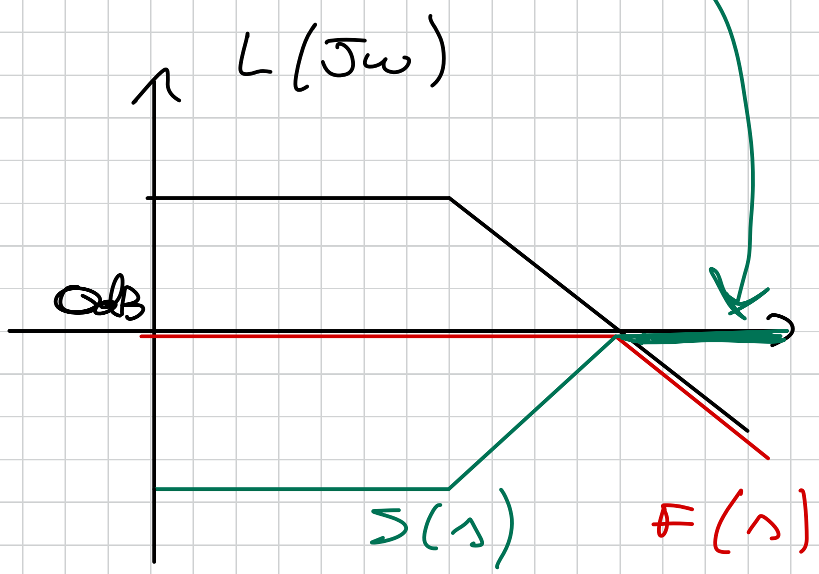
$$\Rightarrow \quad |y_\infty^d| = \frac{1}{100} \cdot 1 = 0{,}01$$

$$d(t) = 1 \cdot \sin(\underbrace{1000}_{\bar{\omega}_2}\, t)$$

$\bar{\omega}_2 \gg \omega_c$

$$|S(s)| = \left| \frac{1}{1 + L(s)} \right| \simeq 1$$

$$\Rightarrow \quad |y_\infty^d| \leq 1$$



4) con $d(t) = 0$, tracciare $y(t)$ per

$$\boxed{y^o(t) = sca(t)}$$

$y(0)$, y_∞, T_{ass}, $S\%$

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} Y^o(s)$$

$$\varphi_m = 90^\circ \quad \boxed{> 75^\circ}$$

$\Rightarrow$ RISPOSTA DI ANELLO CHIUSO DEL PRIM'ORDINE (POLO REALE DOMINANTE)

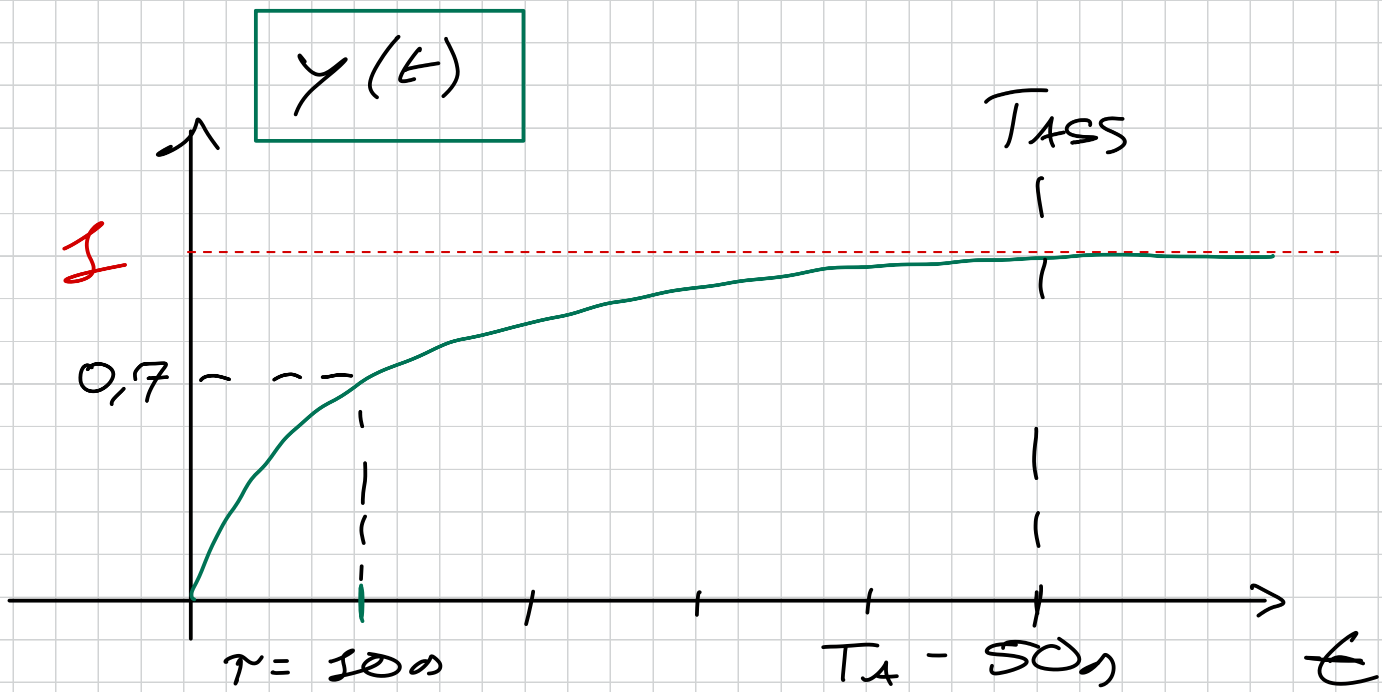
$$\frac{L(s)}{1+L(s)} \approx \frac{\omega_c}{s + \omega_c} = \frac{0,1}{s + 0,1}$$

$S\% = 0$ (prim ordine, no oscillaz.)

$\tau = 10\,s$

$T_{ASS} = 5\tau = 50\,s$

$\mu = 1$ ($L(s)$ di tipo 1)



Esercizio 2

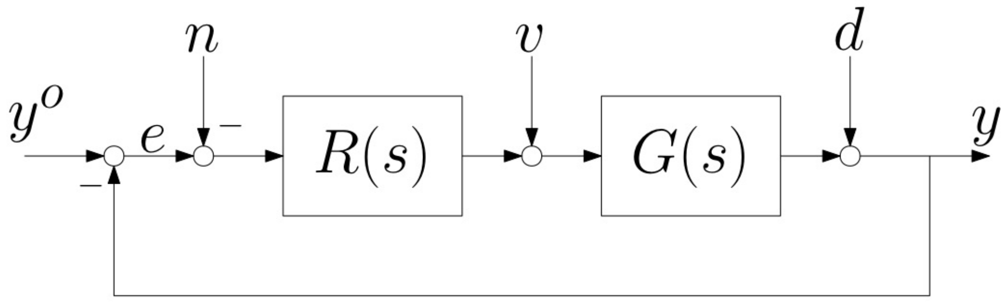


Figura 2: Schema di controllo.

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove $G(s) = \frac{10(1+0.02s)}{1+20s}$.

2.1. Progettare $R(s)$ in modo che

- $|e_{\infty y^o}| = 0$ per $y^o(t) = \mathrm{sca}(t)$
- $|e_{\infty d}| \leq 0.1$ per $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ con $\bar{\omega} \in [0.05, 1]\, rad/s$
- $\omega_c \geq 10\, rad/s$
- $\varphi_m \geq 60°$

STATICHE

DINAMICHE

2.2. Dire quanto vale l'ampiezza di regime di $y(t)$ quando $y^o(t) = 2 + 10\sin(t) + 5\sin(100t)$

1)

SPECIFICHE STATICHE

- $|e_\infty^{y^o}| = 0$ per $y^o(t) = sca(t)$

$\Rightarrow L(s)$ tipo 1

$\Rightarrow R(s) = \frac{R'(s)}{s}$ ($G(s)$ è di tipo 0)

- $|e_\infty^d| < 0,1$ $\quad \bar{\omega} \in [0.05, 1]$ rad/s

$\omega_c \geq 10$ rad/s $\quad \bar{\omega} \ll \omega_c$

$$\left| e_\infty^d \right| = \left| S(j\omega) \right| \simeq \frac{1}{\left| L(j\omega) \right|} \le 0{,}1$$

$$\boxed{\left| L(j\omega) \right| \ge 10 = 20\,dB}$$

$$G(s) = 10 \, \frac{1 + 0{,}02\,s}{1 + 20\,s}$$

$$R^1(s) = \frac{1}{s}$$

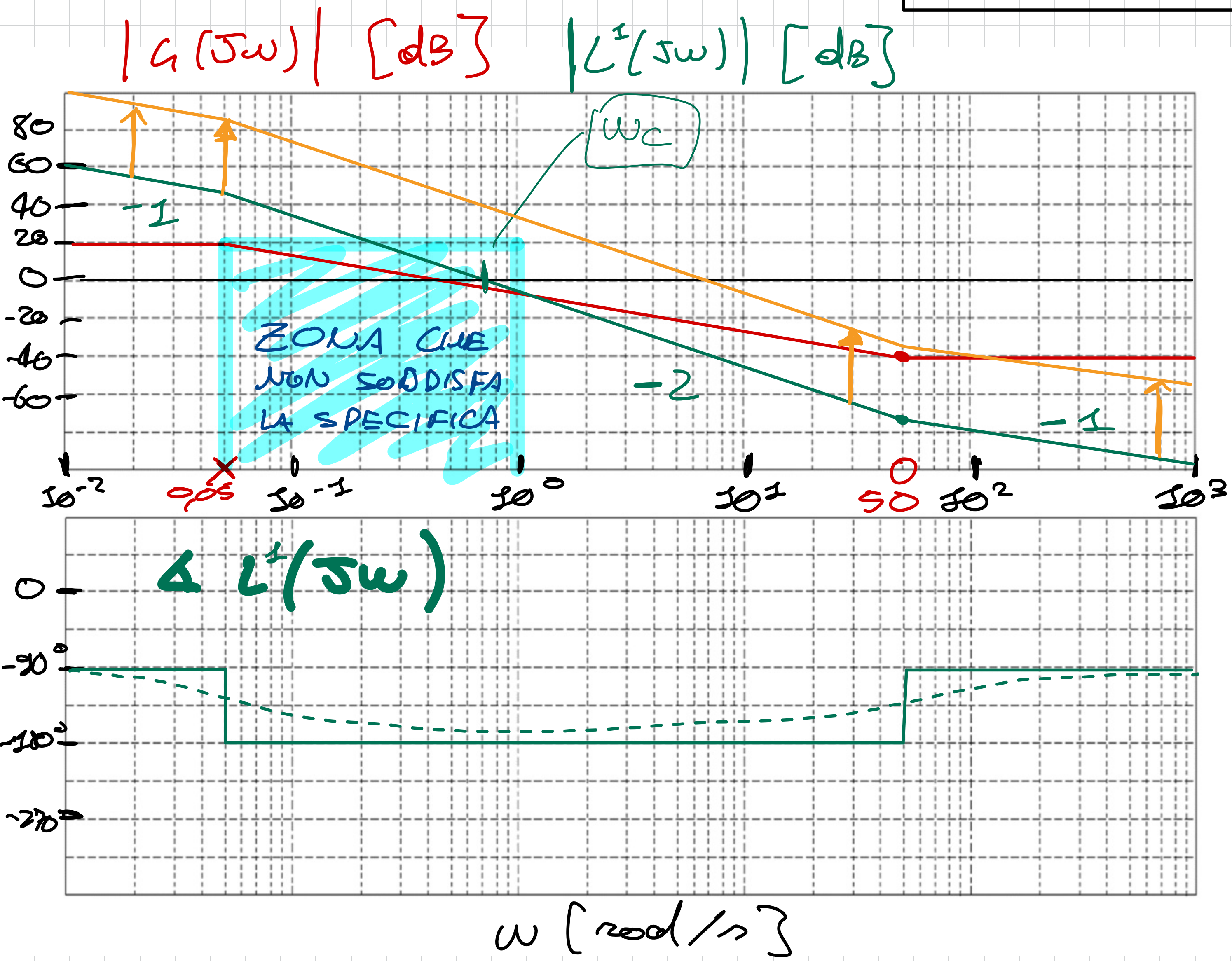
$$L^1(s) = \frac{10}{s} \, \frac{1 + 0{,}02\,s}{1 + 20\,s} \rightarrow$$

TIPO $g = 1$

$\mu = 10 = 20dB$

$p_1 = -0{,}05$

$z_1 = -50$

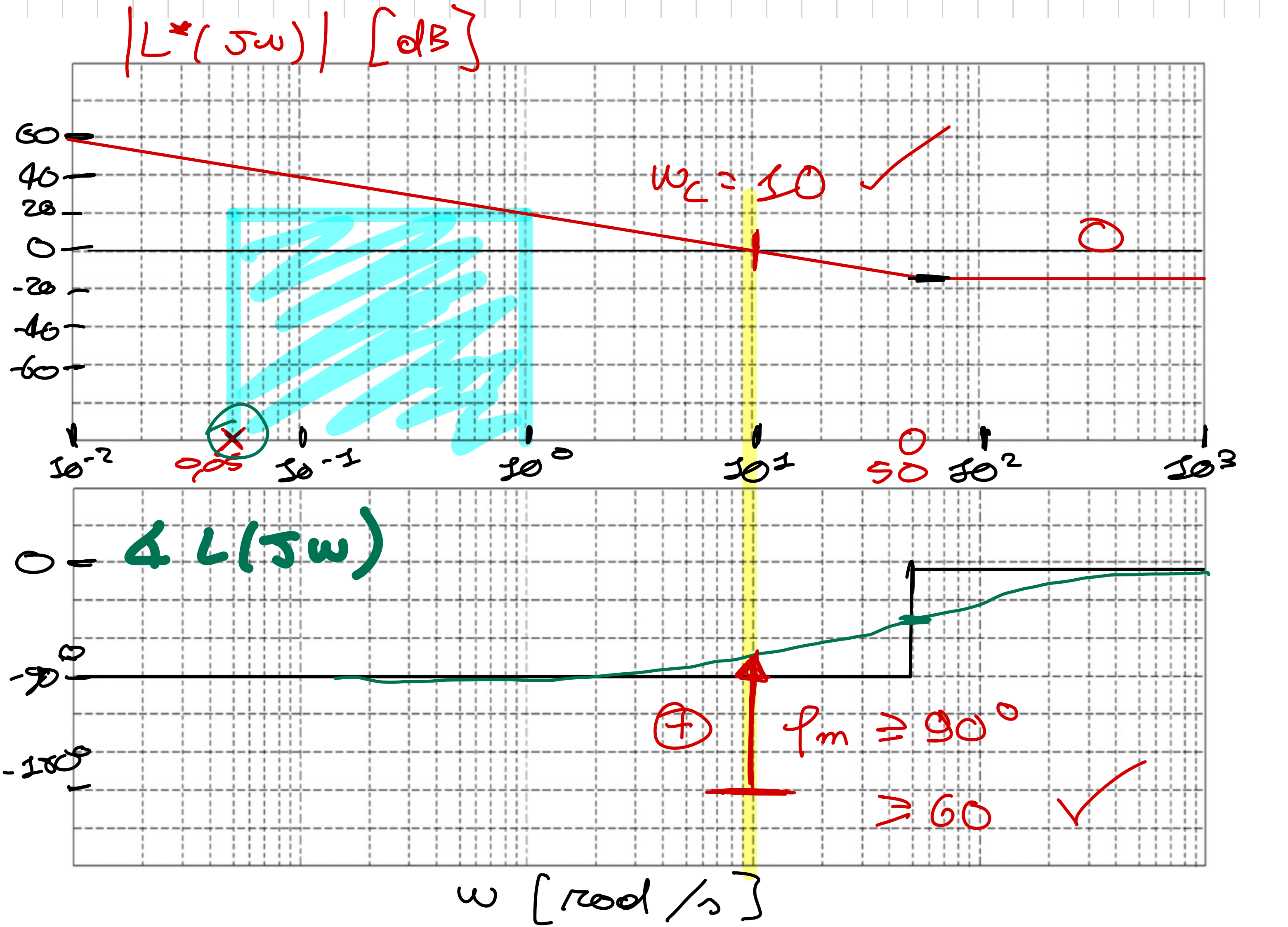


OSS: Notiamo che con la sola azione integrale non è sufficiente per soddisfare le specifiche. Aumentando il guadagno ↑ possiamo migliorare l'attenuazione nel disturbo d, ma il margine di fase non è soddisfatto!

$$R(s) = 100/s \rightarrow \varphi_m \text{ di } L(s) = 8{,}5^\circ$$
$$R(s) = 10^3/s \rightarrow \varphi_m \text{ di } L(s) = 25{,}3^\circ$$
$$R(s) = 10^4/s \rightarrow \varphi_m \text{ di } L(s) = 65{,}6^\circ$$

→ Questo potrebbe anche essere OK, ma avere un guadagno troppo alto può influire sul comportamento nei confronti del disturbo di misura n

PROGETTO MIGLIORE CANCELLANDO LA DINAMICA LENTA → $L(s)^* = \frac{10}{s}(1+0{,}02s)$



⇒ A. STAB. IN ANELLO CHIUSO e SODDISFA SPECIFICHE STATICHE e DINAMICHE

$$L^* = R(s) \cdot G(s)$$

$$\frac{10}{s}(1+0{,}02s) = \underline{R(s)} \cdot 10 \frac{1+0{,}02s}{1+200s}$$

$$\boxed{R(s) = \frac{1}{s}(1+200s)}$$

2) y_∞ $\qquad y^\circ(t) = \underset{a}{2} + \underset{b}{10\sin(t)} + \underset{c}{5\sin(100t)}$

$2\,sca(t)$

$$\boxed{Y^\circ \to Y} \equiv F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

$$Y = F(s) \cdot Y^\circ$$

a $\quad y_\infty^{(a)} = 2 \to$ perché $e_\infty = 0$ per $Y^\circ = A \cdot sca(t)$ da design

b $\quad \bar{\omega} = 1\ rad/s \quad [\omega_c = 10\ rad/s]$

$$|F(s)| = \left| \frac{L(s)}{\cancel{1} + L(s)} \right| \simeq 1$$

$$\bar{\omega} << \omega_c$$

c $\bar{\omega} = 100$ rad/s $\quad \bar{\omega} >> \omega_c$

$$|F(s)| = \left|\frac{L(s)}{1+L(s)}\right| \approx |L(s)|$$

$$|L(j \cdot \overset{\bar{\omega}}{100})| = -13\,dB \simeq 0{,}22$$

$$y_\infty = a + b + c$$

$\measuredangle F(j)$

$$= 2 + 10 \cdot 1 \cdot \sin(t + \varphi^1)$$

$$+ 5 \cdot 0{,}22 \sin(100t + \varphi^2)$$

$\measuredangle F(100j)$

Esercizio 3

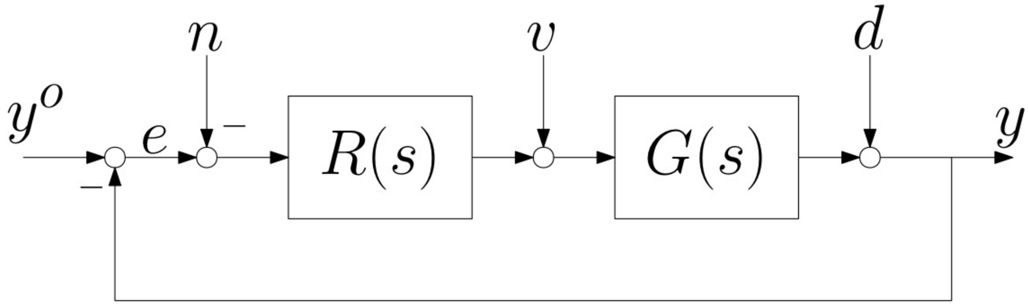


Figura 3: Schema di controllo.

RITARDO

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove $G(s) = \frac{e^{-0.1s}}{(1+0.1s)(1+s)}$ Progettare $R(s)$ in modo che

- $|e_{\infty y^o}| \leq 0.1$ per $y^o(t) = \text{sca}(t)$
- $|e_{\infty d}| \leq 0.1$ per $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$ con $\bar{\omega} \in [0.05, 0.1]\, rad/s$

SPEC. STATICHE

- $\omega_c \geq 1\, rad/s$
- $\varphi_m \geq 60°$

SPEC. DINAMICHE

posso valutarla SENZA ritardo e^{-st}

$G(s)$ tipo : $g = 0$

poli : $p_1 = -10$, $p_2 = -1$

$\mu = G(0) = 1 = 0dB$

$\Rightarrow$ A. STAB

TRADUZIONE SPECIFICHE:

- $|e_\infty^{y^o}| \leq 0,1$ per $y^o(t) = sca(t)$

$\Rightarrow L(s)$ tipo 0

$\Rightarrow R_1(s) = K$

(OSS: un tipo 1 introdurrebbe uno sfasamento ulteriore. Avendo un ritardo renderebbe più difficile controllare il sistema)

$$\left| e_{\infty}^{\,y_0} \right| = \frac{1}{1+L(0)} = \frac{1}{1+K\cdot G(0)} =$$

$$= \frac{1}{1+K_{\mu}} = \frac{1}{1+K} \leq 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad K \geq 9 \qquad \boxed{K = 10}$$

- $$\left| e_{\infty}^{\,d} \right| \leq 0{,}1 \qquad \text{per } d(t) = \sin(\bar{\omega} t)$$

$$\bar{\omega} = [0.05 \, , \, 0.1] \, rad/s$$

$$\frac{E(s)}{D(s)} = -S(s) = \frac{-1}{1+L(s)}$$

$$\text{per } \bar{\omega} << \omega_c \qquad [\omega_c \geq 1 \, rad/s]$$

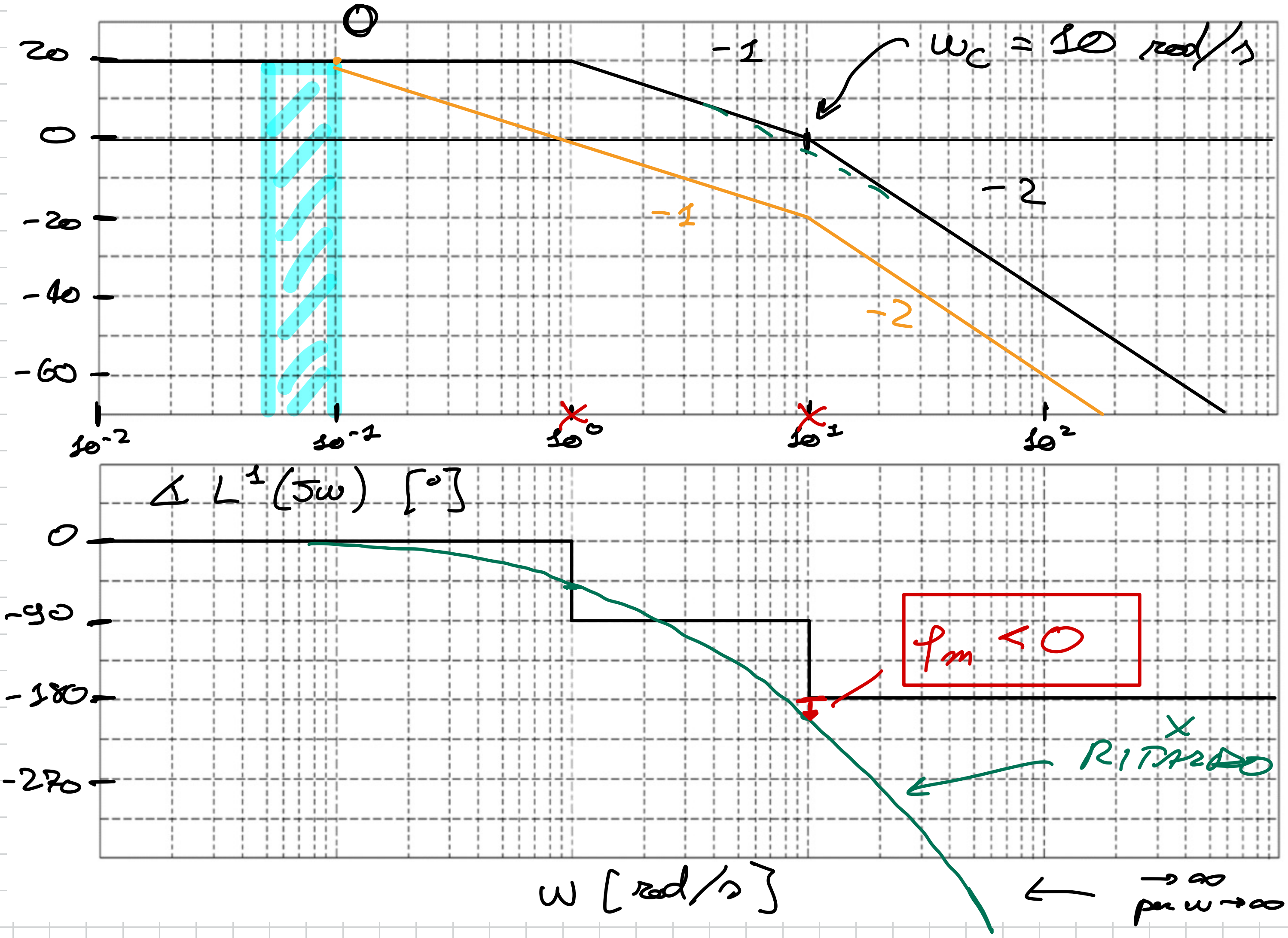
$$|S(j\omega)| \simeq \frac{1}{|L(j\omega)|}$$

$$\left| \frac{E(s)}{D(s)} \right| \simeq \frac{1}{|L(j\omega)|} \leq 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad L(j\omega) \geq \underset{20\,dB}{\overset{\parallel}{10}}$$

PROGETTO SU PRESTAZIONI STATICHE

$$L^1(s) = \underbrace{10}_{R^1(s)} \cdot G(s) = \frac{10\, e^{-0{,}1 s}}{(1+0{,}1 s)(1+s)}$$



In presenza di ritardo studiamo e disegnamo i diagrammi di BODE tralasciando il ritardo. Successivamente si torna conto tracciando la fase reale

IMPATTO DEL RITARDO:

$$e^{-\tau s} \Rightarrow \Delta\varphi = -\omega\tau \rightarrow \begin{cases}\text{retta in } \omega \\ \text{esponenziale in } \log[\omega]\end{cases}$$

per $\omega = 1$ $\quad \Delta\varphi^{1} = -0{,}1 \text{ rad} = -5{,}7^\circ$

per $\omega = 10$ $\quad \Delta\varphi^{10} = -1 \text{ rad} = -57^\circ$

$\omega_c \simeq 10$ rad/s

$$\varphi_c = \angle(j\omega_c) = -\angle(1 + \cancel{0{,}1}s \cdot \cancel{10}) - \angle(1 + j10) - 57^\circ$$

$$= -\operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}(10) - 57^\circ$$

$$= -45^\circ - 84{,}3^\circ - 57^\circ$$

$$= -129{,}3 - 57^\circ = -186{,}3^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = -6{,}3^\circ$$

$\Rightarrow$ SISTEMA RETROAZIONATO È INSTABILE

[calcolo vero $\quad \omega_c = 7{,}82$ rad/s $\quad \rightarrow$ OK MA NON ROBUSTO

$\varphi_m = 14{,}5^\circ$]

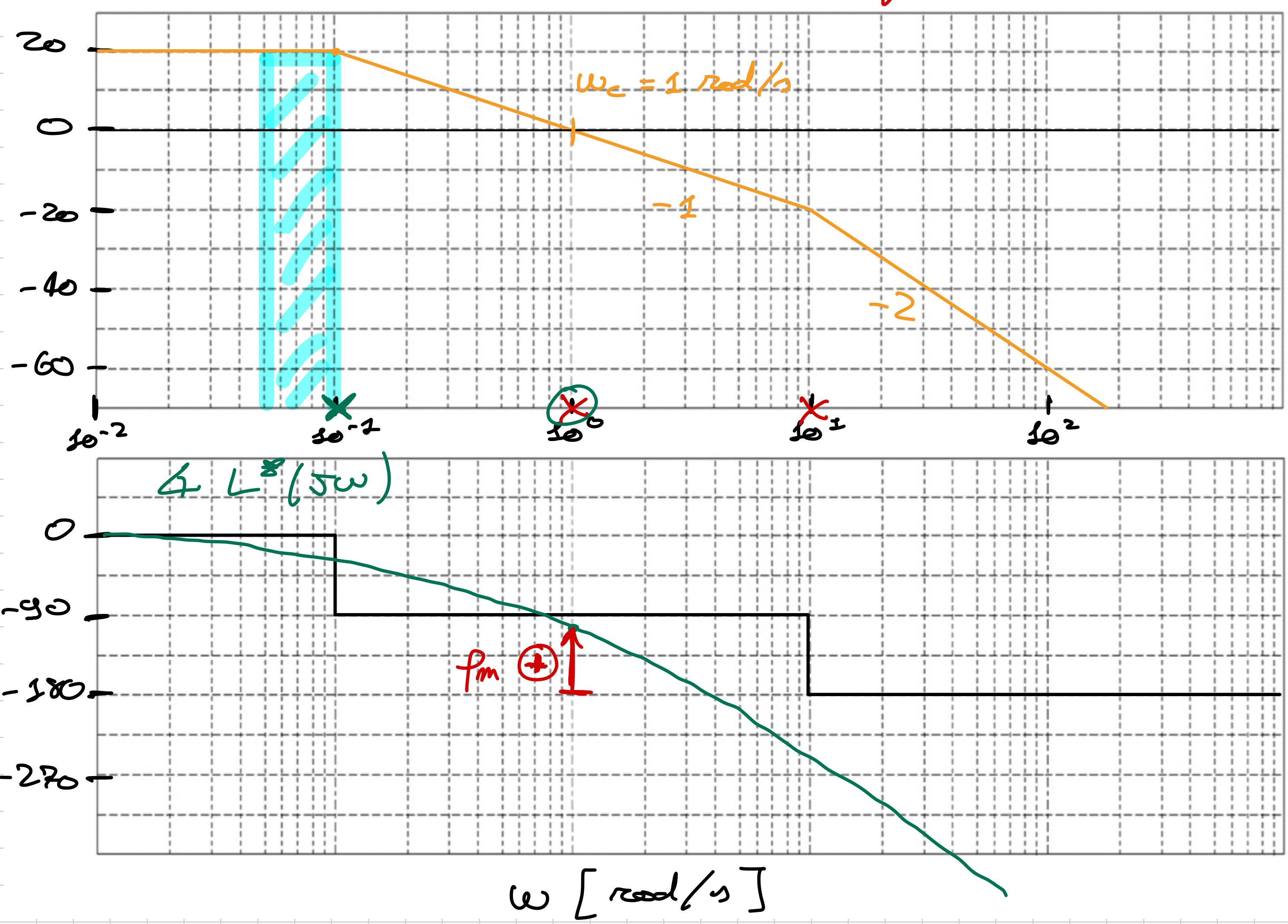
QUELLO CHE CI PIACEREBBE

il ritardo lo dobbiamo tenere !!

$$L^*(s) = 10 \frac{e^{-0,1 s}}{(1+10s)(1+0,1s)}$$

vogliamo tagliare prima

$|L^*(j\omega)|$ [dB]



$$\varphi_c = \angle L^*(j1) = -\angle(1+10s) - \angle(1+0,1s) - \omega_c \cdot \tau$$

$$= -\text{atan}(10) - \text{atan}(0,1) - 5,7^\circ$$

$$= -84,3^\circ - 5,7^\circ - 5,7^\circ$$

$$= -95,7^\circ$$

$\varphi_m = 180 - |\varphi_c| = 84{,}3°$ ✓

$\Rightarrow$ A. STAB.

$\Rightarrow \quad L^*(s) = R(s) \cdot G(s)$

$$10 \frac{e^{-0{,}1s}}{(1+10s)(1+0{,}1s)} \qquad\qquad \frac{e^{-0{,}1s}}{(1+0{,}1s)(1+s)}$$

$$\boxed{R(s) = 10 \cdot \frac{1+s}{1+10s}}$$

RETE RITARDATRICE

OSS: La cancellazione del polo $s=-1$ fatta dal rispettivo zero in $R(s)$ è fatto per migliorare il margine di fase. Altrimenti il polo farebbe perdere 90°!

N.B. generale: CONTROLLA SEMPRE CHE IL REGOLATORE $R(s)$ PROPOSTO SIA REALIZZABILE ($r \geq 0$)

"Non può avere più zeri che poli"

($\frac{1}{s}$ conta come polo in 0!)