Prima prova in itinere (recupero)

Logica e Algebra

03 Febbraio 2017

Esercizio 1 *Angelo, Bruno e Carlo sono gli unici tre membri di una commissione che vota una proposta. Usando le lettere enunciative:* A = *"Angelo vota a favore"* , B = *"Bruno vota a favore"*, C = *"Carlo vota a favore" scrivere le formule che traducono le seguenti frasi:*

F_1 : *La votazione è stata unanime;*

F_2 : *La proposta è stata approvata ed ha ricevuto solo un numero pari di voti a favore;*

F_3 : *Angelo e Bruno votano allo stesso modo*

Provare sia per via semantica sia usando la risoluzione che $\{F_2, F_3\} \vdash_L \neg F_1$.

Esercizio 2 *Sia* $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ *l'insieme dei numeri naturali, e si consideri la funzione*

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

definita da $f(n, m) = M.C.D(m, n)$ *(il massimo comun divisore della coppia* m, n*).*

1. *La funzione* f *è iniettiva, suriettiva, biettiva?*
2. *In base alla risposta precedente costruire (se possibile) l'inversa sinistra e/o destra di* f.
3. *Descrivere la* $Ker(f)$*-classe dell'elemento* $(2, 3)$.

Soluzione (I prova in itinere)

Esercizio 1

1. La formula $\mathcal{F}_1$ è $(A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$. La formula $\mathcal{F}_2$ è $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$. La formula $\mathcal{F}_3$ è $A \Leftrightarrow B$. Per il teorema di correttezza e completezza forte $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}| -_L \neg F_1$ se e solo se $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}| = \neg\mathcal{F}_1$, ovvero se tutti i modelli di $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ sono modelli di $\neg\mathcal{F}_1$. È immediato verificare che l'unico modello di $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ è $v(A) = v(B) = 1, v(C) = 0$ che non è modello per $\mathcal{F}_1$ e dunque è modello per $\neg\mathcal{F}_1$. Quindi si è dimostrato per via semantica che $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}| = \neg\mathcal{F}_1$ ovvero che $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}| -_L \neg\mathcal{F}_1$.
   Per usare la risoluzione ricordiamo che $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}| = \neg\mathcal{F}_1$ se e solo se l'insieme di f.b.f $\{\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_1\}$ è insoddisfacibile. Scriviamo le formule in forma a clausole. Si ha subito che $\mathcal{F}_3 \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \equiv (A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$, quindi $\{\mathcal{F}_3\}^c = \{\{A, \neg B\}, \{\neg A, B\}\}$. Le altre due formule si scrivono in forma a clausole più facilmente scrivendo direttamente la loro forma normale congiuntiva:
   $$\{\mathcal{F}_2\}^c = \{\{A, B, C\}, \{\neg A, B, C\}, \{A, \neg B, C\}, \{A, B, \neg C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}\}$$
   $$\begin{aligned}\{\mathcal{F}_1\}^c = \{&\{A, \neg B, \neg C\}, \{\neg A, B, \neg C\}, \{\neg A, \neg B, C\}, \{\neg A, B, C\}, \{A, \neg B, C\},\\ &\{A, B, \neg C\}\}\end{aligned}$$
   Dobbiamo dimostrare che da
   $$\begin{aligned}S = \{&C_1 = \{A, \neg B\}, C_2 = \{\neg A, B\}, C_3 = \{A, B, C\}, C_4 = \{\neg A, B, C\}, C_5 = \{A, \neg B, C\},\\ &C_6 = \{A, B, \neg C\}, C_7 = \{\neg A, \neg B, \neg C\}, C_8 = \{A, \neg B, \neg C\}, C_9 = \{\neg A, B, \neg C\},\\ &C_{10} = \{\neg A, \neg B, C\}, C_{11} = \{\neg A, B, C\}, C_{12} = \{A, \neg B, C\}\}\end{aligned}$$
   ricaviamo per risoluzione la clausola vuota. Possiamo subito eliminare le clausole che ne contengono altre, ovvero C_4, C_5, C_8, C_9, C_{11}, C_{12}. Ora da C_3, C_6 si ottiene $C_{13} = \{A, B\}$ da questa con C_2 si ricava $C_{14} = \{B\}$ e con C_1 si ricava $C_{15} = \{A\}$, che con C_7 produce $C_{16} = \{\neg B, \neg C\}$, da C_{16} e C_{14} si ottiene $C_{17} = \{\neg C\}$. Da questa con C_{10} si ricava $C_{18} = \{\neg A, \neg B\}$, che a sua volta con C_{14} produce $\{\neg A\}$ da cui con C_{15} si ottiene la clausola vuota.

Esercizio 2

Il testo dice già che f è una funzione (del resto è ben noto che per ogni coppia di interi positivi esiste ed è unico il loro massimo comun divisore).

1. La funzione f non è iniettiva infatti ad esempio le coppie $(3, 5)$ ed $(1, 1)$ sono diverse ma hanno la stessa immagine 1, quindi f non è biunivoca. La f è suriettiva, infatti per ogni $n \in N$ si ha $f((n, n)) = n$, e quindi n ha almeno una controimmagine mediante f.

2. La funzione f, essendo suriettiva, ma non iniettiva ammette inversa sinistra. Una inversa sinistra è ad esempio la funzione $g : N \to N \times N$ definita ponendo $g(n) = (n, n)$. Infatti $g \cdot f(n) = f(g(n)) = f((n, n)) = n$ per ogni $n \in N$.

3. Essendo $f((2, 3)) = 1$ la ker f-classe di $(2, 3)$ è formata da tutte la coppie di interi positivi (x, y) tali che $f((2, 3)) = f((x, y)) = 1$, cioè da tutte le coppie di interi positivi primi fra loro.