ESERCIZIO 1

Un sistema dinamico è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= -2x_1(t) + \alpha x_2(t) \\
\dot{x_2}(t) &= \beta x_2(t) - 5u(t) \\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}$$

dove α, β sono costanti reali.

1. (1.0) Classificare il sistema

Lineare, tempo continuo
SISO
strett. proprio
ordine 2
tempo invariante

2. (2.0) Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}, \forall t$.

In equilibrio $\dot{x} = 0$,

$$\begin{cases} 0 = -2\bar{x}_1 + \alpha \bar{x}_2 \\ 0 = \beta \bar{x}_2 - 5\bar{u} \end{cases}$$

allora

$$\bar{x}_2 = \frac{5}{\beta}\bar{u}$$

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha}{2}\bar{x}_2 = \frac{5\alpha}{2\beta}\bar{u}$$

$$\bar{y} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 = \frac{5}{\beta}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\bar{u}$$

3. (2.0) Studiare la stabilità del sistema in funzione dei parametri α e β.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \alpha \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$$ è triangolare allora $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \beta$

Il sistema è asintoticamente stabile per $\beta < 0$, semplicemente stabile per $\beta = 0$, instabile per $\beta > 0$.

La stabilità non dipende di α.

4. (2.0) Determinare il movimento dello stato e dell'uscita per $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $u(t) = 0, \forall t \geq 0$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Movimento libero, sistema a cascata risolvendo per $x_2(t)$.

$$\dot{x}_2 = 5x_2, \quad x_2(0) = 1$$

allora $x_2(t) = 1 \cdot e^{5t}, \quad t \geq 0$.

per $x_1(t)$ ~~r~~isulta:

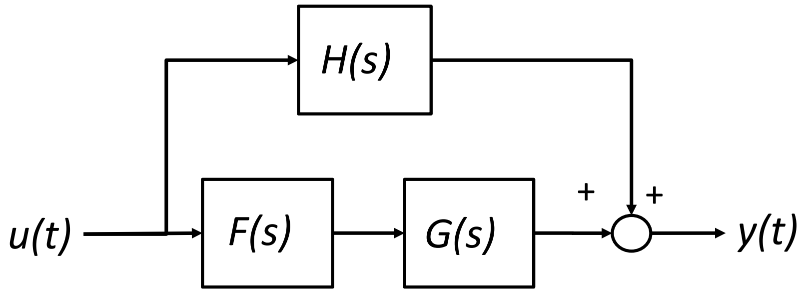
$$\dot{x}_1 = -2x_1 + 2 \cdot e^{5t}; \quad x_1(0) = 0.$$

soluzione equivalente a movimento forzato

$$x_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 2e^{5\tau} d\tau = \frac{2}{7}\left(e^{5t} - e^{-2t}\right)$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema



1

1. (2.0) Determinare la funzione di trasferimento da $U(s)$ a $Y(s)$.

$$Y(s) = H(s) + F(s) \cdot G(s)$$

2. (2.0) Poste $F(s) = 1/(s+a)$, $G(s) = 2/(s^2+bs+c)$, $H(s) = 2/(s+a)$, funzioni di trasferimento di sistemi lineari tempo invarianti senza poli nascosti, studiare la stabilità del sistema equivalente al variare dei parametri $a \in \mathcal{R}$, $b \in \mathcal{R}$, $c \in \mathcal{R}$. Per quali valori dei parametri il sistema equivalente è asintoticamente stabile?

$$G_T(s) = \left.\frac{2\,(s^2+bs+c+1)}{(s+a)(s^2+bs+c)}\right\} \text{Polo nascosto in } -a$$

- Non c'è collegamento in retroazione. I poli di G_T sono i poli di F, G e H, allora il sistema è asint. stabile per $a>0$: poli di F e H

$b>0$, $c>0$: criterio di Routh su G

se $a=0$, $b>0$, $c>0$: sist. semplicemente stabile

se $a<0$ o $b<0$ o $c<0$: sist. instabile

se $a>0$, $b>0$, $c=0$: sist. semplicemente stabile

se $a>0$, $b=0$, $c>0$: sist. semplicemente stabile.

3. (2.0) Per $a = 2$, $b = 8$, $c = 15$, trovare analiticamente la *trasformata di Laplace* $Y(s)$ della risposta a uno scalino applicato come ingresso $u(t)$, determinando i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$. Tracciare *qualitativamente* la risposta. È possibile usare una approssimazione a polo dominante? giustificare la risposta.

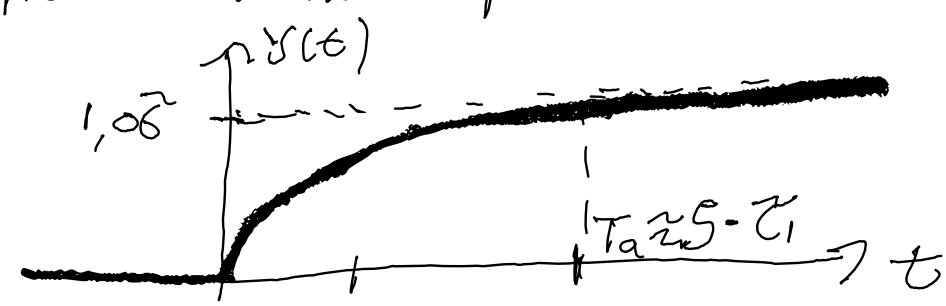
scalino $U(s) = \frac{1}{s}$, $G_T(s) = \frac{2(s^2+8s+16)}{(s+2)(s^2+8s+15)}$

$$Y(s) = G_T(s)\cdot U(s) = \boxed{\frac{2(s^2+8s+16)}{s\cdot(s+2)\cdot(s^2+8s+15)}}$$

$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s) = 0$; $y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 2$

$y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = \frac{15}{16} \cong 1,0\tilde{6}$

$G_T(s)$ ha poli in $\{-2, -3, -5\}$ e zeri in $\{-4, -4\}$
poli e zeri vicini, non è possibile usare approssimazione a polo dominante.



$\tau_1 = 0,5$
$\tau_2 = 0,33$
$\tau_3 = 0,2$

4. (2.0) È possibile affermare che una condizione sufficiente per ottenere un sistema equivalente asintoticamente stabile è avere $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ asintoticamente stabili? giustificare la risposta.

È vero, non ci sono collegamenti in retroazione allora i poli del sistema equivalente sono funzione dei poli di F, G, e H. se i tre sistemi sono asint. stabili, allora anche il sistema equivalente lo sarà.

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$x(k+1) = Ax(k) + B\,u(k) \quad (1)$$
$$y(k) = Cx(k) + D\,u(k) \quad (2)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. (1.0) Classificare il sistema

- Lineare tempo invariante
- proprio
- ordine 2
- MISO: due ingressi e una uscita.

2. (2.0) Determinare, se possibile, un vettore di ingresso $\overline{u}$ per avere come stato di equilibrio il punto $\overline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

In equilibrio $x(k+1) = x(k) = \overline{x}$, allora

$$\overline{x}_1 = a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \overline{u}_2$$
$$\overline{x}_2 = a_3\overline{x}_2 + \overline{u}_1 + \overline{u}_2$$

Per $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 1$ risulta $\quad 1 - a_1 = a_2 + u_2$

$$\overline{u}_2 = 1 - a_1 - a_2$$
$$\overline{u}_1 + \overline{u}_2 = 1 - a_3$$
$$\overline{u}_1 = 1 - a_3 - (1 - a_1 - a_2) = a_1 + a_2 - a_3$$

3. (2.0) Studiare la stabilità del sistema al variare dei parametri a_1, a_2 e a_3.

A è triangolare $\lambda_1 = a_1$; $\lambda_2 = a_3$; allora

$|a_1| < 1$, $|a_3| < 1$, sistema asint. stabile

$|a_1| > 1$ o $|a_3| > 1$, sistema instabile.

$\left.\begin{array}{l} |a_1| = 1 \text{ e } |a_3| < 1 \\ |a_1| < 1 \text{ e } |a_3| = 1 \end{array}\right\}$ sist. semplicemente stabile.

$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_3 = 1 \text{ e } a_2 \neq 0 \\ a_1 = a_3 = -1 \text{ e } a_2 \neq 0 \end{array}\right\}$ sist. instabile (blocco di Jordan)

4. (2.0) Fissati i valori $a_1 = -1$, $a_2 = 1$ e $a_3 = 1$, determinare il movimento libero dello stato e dell'uscita quando lo stato iniziale è $x(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

movimento libero:

$$X(k) = A^k X(0)$$

sistema a cascata: $X_2(k) = 1^k \cdot 0 = 0$

$$X_1(k) = (-1)^k \cdot 5 + 0 = (-1)^k \cdot 5$$

$$Y(k) = X_2(k) = 0$$

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{100(0.2s+1)}{(10s+1)(0.01s+1)^2}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti.

1. (1.0) Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

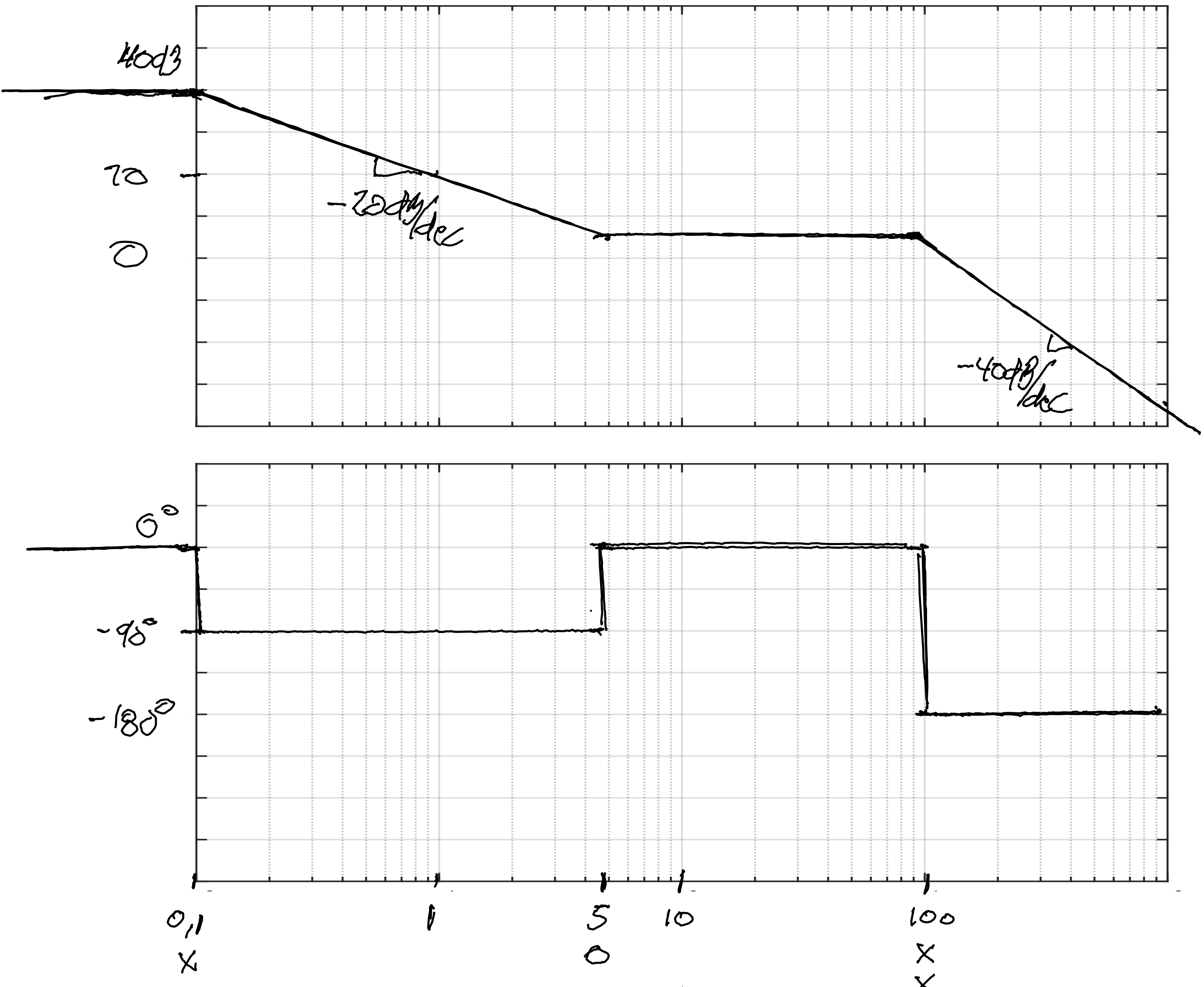
Poli: $\{-1/10; -1/0{,}01; -1/0{,}01\}$, tipo 0, zero: $\{-1/0{,}2\}$

$\mu = G(0) = 100$

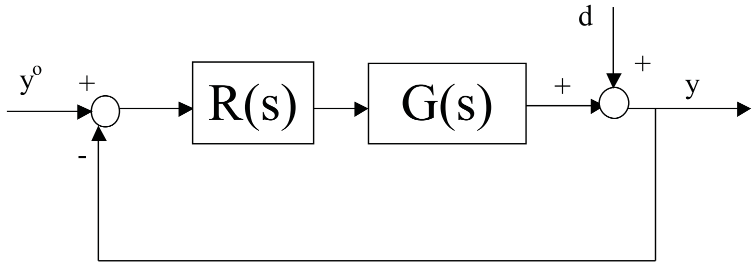
$\mu_{dB} = 40dB$

$G(s)$ asintoticamente stabile. $\mathrm{Re}(p_i) < 0 \ \forall i$

2. (2.0) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.



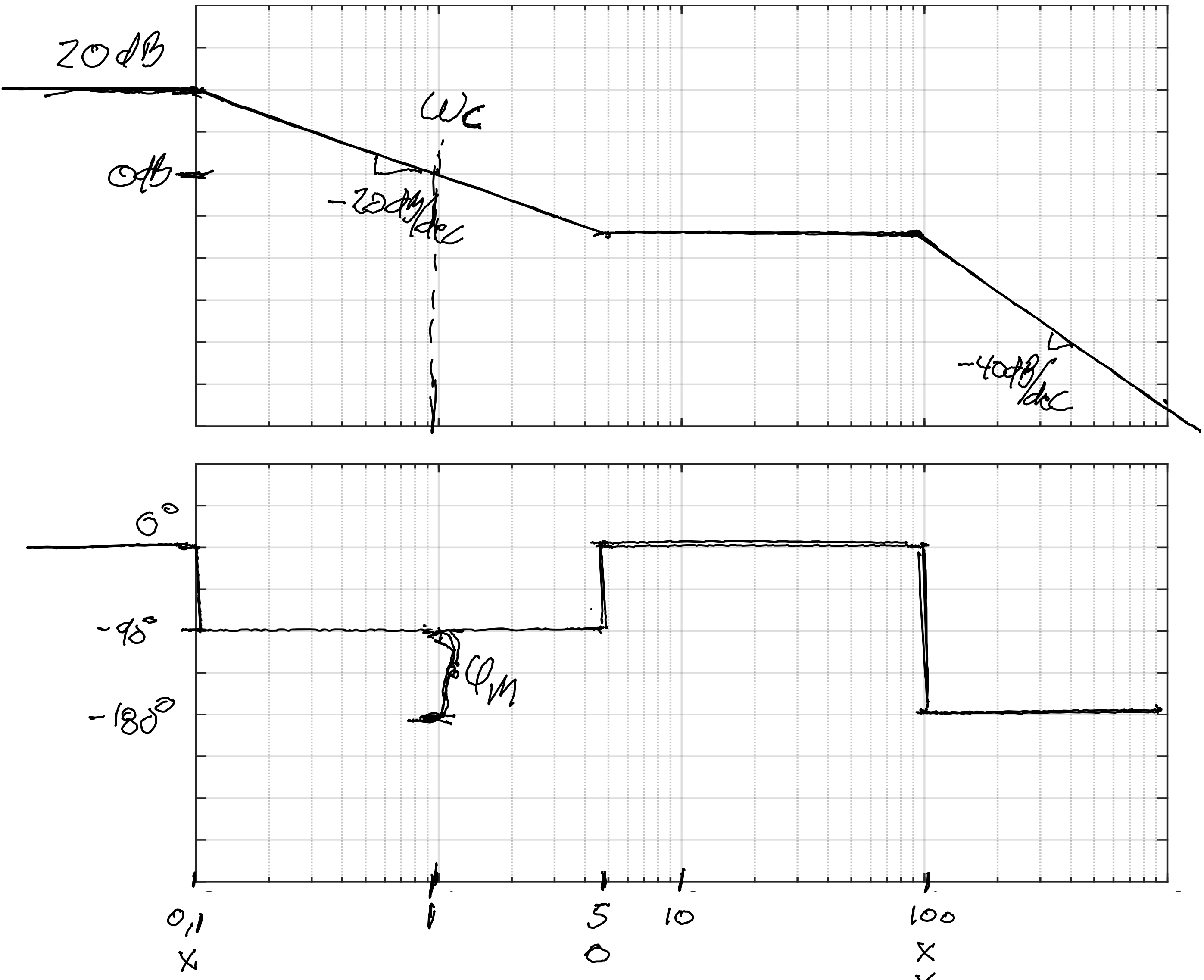
Si supponga che il sistema venga retroazionato come in figura:



3. (3.0) Per il regolatore

$$R(s) = k = 0.1$$

Verificare che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e determinare il margine di fase e di guadagno.



$$L(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{10\,(0{,}2s+1)}{(10s+1)(0{,}01s+1)^2}\ , \quad \mu_{dB} = 20\,dB$$

- Sistema stabile, guadagno positivo, ω_c ben definita, $\varphi_m \cong 90° > 0°$, allora per criterio di Bode il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- Margine di guadagno infinito $|arg(L(j\omega))| < 180°$

Considerando il sistema retroazionato descritto al punto precedente rispondere:

4. (1.0) Determinare il valore di regime dell'errore $|e_\infty|$ a fronte di un ingresso a scalino del riferimento $y^o(t) = sca(t)$.

$L(s)$ è tipo 0, errore finito per ingresso tipo scalino. $|e_\infty| = \frac{1}{1+\mu_L} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11}$

5. (2.0) Determinare quanto vale l'ampiezza di regime dell'uscita $|y_\infty|$ quando $d(t) = 2\sin(0.01t) + 3\sin(50t)$.

$Y(s) = S(s) \cdot D(s)$; $S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$;

per $\omega = 0{,}01 \, rad/s \ll \omega_c$, $|y'_\infty| = |S(j\omega)| \cdot |d| \simeq \left|\frac{1}{L(j\omega)}\right| \cdot |d|$

$|y'_\infty| = 0{,}1 \cdot 2 = 0{,}2$

Per $\omega = 50 \, rad/s \gg \omega_c$, $|y^2_\infty| \simeq |d| = 3$; in totale $|y_\infty| \cong 3{,}2$

6. (2.0) Che caratteristiche deve avere il controllore $R(s)$ per garantire che il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di un ingresso di riferimento $y_o(t) = sca(t)$ sia nullo? Giustificare la risposta.

Per garantire errore nullo per $y_o(t) = sca(t)$ $L(s)$ deve essere tipo 1, allora $R(s)$ deve avere un integratore (polo in $s=0$) e continuare a garantire stabilità asintotica del sistema retroazionato ($\varphi_m > 0$)