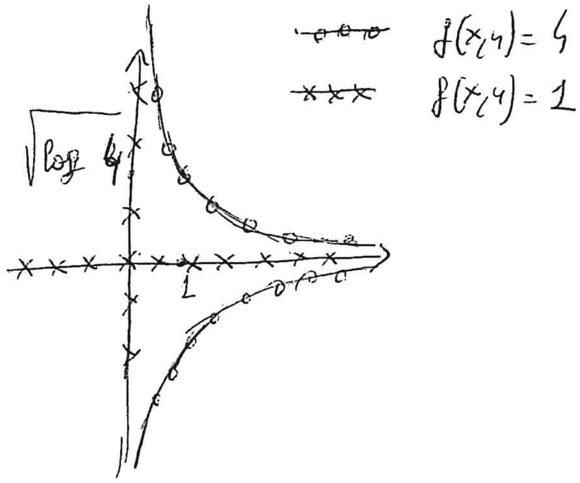
Politecnico di Milano *Prof. E. Maluta* Ing. Informatica e Ing. delle Telecomunicazioni	*Analisi Matematica II* Prima Parte	10 gennaio 2020
Cognome e Nome:	Matricola:	P T 1 2 3 4

Ogni risposta va scritta nello spazio sotto il quesito e motivata con calcoli o/e spiegazioni.

1. Data la funzione f definita su $\mathbb{R}^2$ da $f(x,y) = e^{xy^2}$, determinare e disegnare le curve di livello 1 e quelle di livello 4.

$f(x,y) = 1 \iff x = 0 \lor y = 0$

$f(x,y) = 4 \iff x = \dfrac{\log 4}{y^2}$



2. Calcolare il rotore del campo $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz^2, xy, xyz)$ e stabilire poi se il campo F è conservativo su $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz^2 & xy & xyz \end{vmatrix} = xz\,\underline{i} + yz\,\underline{j} + (y - z^2)\underline{k}$$

$\operatorname{rot} F(x,y,z) \neq \underline{0}$

$\Rightarrow$ F non può essere conservativo.

3. Stabilire se la curva di equazione parametrica $\mathbf{r}(t) = \left((\sin t)^3, t^2, 3t^2\right)$, con $t \in [-\pi, 2\pi]$, è piana, regolare, chiusa.

$z = 3y$ la curva sta sul piano $z - 3y = 0$;

$\underline{r}'(t) = (3\sin^2 t \cos t, 2t, 6t)$ $\quad \|\underline{r}'(0)\| = 0$ non regolare;

$\underline{r}(-\pi) = (0, \pi^2, 6\pi^2) \neq (0, 4\pi^2, 12\pi^2) = \underline{r}(2\pi)$ non chiusa

4. Calcolare $\int_0^1 \left(\sum_1^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n^3}\right) dx$ con un errore minore di $\frac{1}{100}$.

Serie di potenze - converge totalmente su $[-1,1]$

$\left(|a_n x^n| \leq \frac{1}{n^3} \right)$ quindi integrabile termine a termine su $[0,1]$

$$\int_0^1 \Sigma = \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3} \int_0^1 x^n = \sum_1^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^3(n+1)}$$ - converge assolutam.

Per Leibniz, $|E_{n+1}| \leq |a_n| = \frac{1}{n^3(n+1)} < \frac{1}{100}$ $n = 3$

$$\int_0^1 \Sigma = -\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + E_2$$

5. Sia $\frac{a_0}{2} + \sum_1^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la serie di Fourier della funzione f definita da $f(x) = \sin 2x \cos 2x$. Quanto valgono a_2, b_2, a_4 e b_4?

f dispari $\Rightarrow a_2, a_4 = 0$ $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x$ quindi

$b_2 = 0$, $b_4 = \frac{1}{2}$

6. Risolvere, per l'equazione differenziale $y' = y - 1$, il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(-1) = 1$.

poiché $y(t) \equiv 1$ è soluz., e sono soddisfatte le ipotesi di esistenza e unicità (ad es. come eq. lin. a coeff. cost.), $y(t) \equiv 1$ è l'unica soluzione.