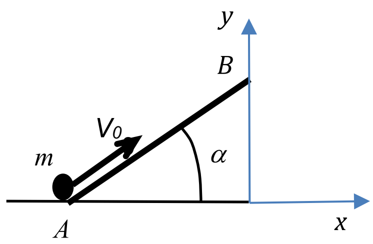
POLITECNICO MILANO 1863

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FISICA
Appello del 31 agosto 2022

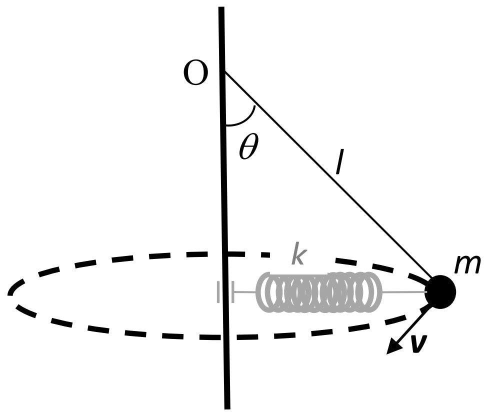
Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

1.
Una pallina di massa m viene lanciata lungo un piano di lunghezza AB = L, inclinato di un angolo α, scabro con coefficiente di attrito dinamico μ_D. La velocità iniziale della pallina è v_0, e una volta raggiunto il termine del piano nel punto B, essa prosegue il suo moto per effetto della sola forza peso (vedi figura). Si calcoli:



a. la velocità minima v_{0min} di v_0 affinché la pallina raggiunga il punto B; [3 punti]
b. la velocità v_B della pallina in B nel caso in cui $v_0 = 2 \times v_{0min}$; [2 punti]
c. le coordinate del punto di massima altezza raggiunto dalla pallina durante il volo (si utilizzi il sistema di riferimento xy indicato in figura). [3 punti]

2.
Un pendolo conico è costituito da un filo inestensibile di lunghezza l a cui è collegato un oggetto puntiforme di massa m; l'altro capo del filo è fissato in un punto O (vedi figura). L'oggetto descrive inizialmente una traiettoria circolare nel piano orizzontale con velocità iniziale v_0 mentre il filo forma un angolo costante θ con la direzione verticale.

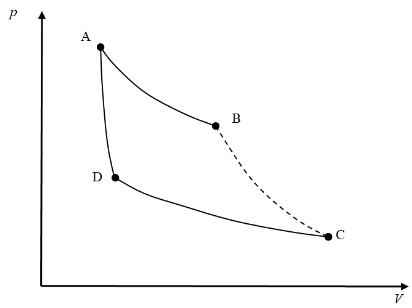


a. Si calcoli l'espressione di l in funzione di θ, v_0 e dell'accelerazione di gravità g. [5 punti]

Successivamente il pendolo viene modificato aggiungendo una molla libera di ruotare, di costante elastica k e lunghezza a riposo trascurabile, che collega l'oggetto puntiforme all'asse verticale passante per O. In questa configurazione l'oggetto descrive la stessa traiettoria circolare di prima, ma ad una velocità $v_1 = 2\ v_0$.

b. Si calcoli l'espressione della costante elastica k della molla. [3 punti]

3.
Una macchina termica a n = 2 moli di gas perfetto compie il ciclo termico mostrato in figura. L'isoterma AB alla temperatura T_1 = 600K, quella CD alla temperatura T_2 = 300 K, e la compressione adiabatica DA da T_2 a T_1 sono reversibili, mentre l'espansione adiabatica BC da T_1 a T_2 è irreversibile.
Sapendo che $V_B = 3\ V_A$ e che $V_C = 4\ V_D$, calcolare:



a. il rapporto dei lavori eseguiti nelle due adiabatiche (L_{BC} /L_{DA}); [3 punti]
b. il rendimento del ciclo; [2 punti]
c. la variazione di entropia per la trasformazione BC. [3 punti]

4.
a. Enunciare la prima e seconda equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali. [3 punti]
b. Dimostrare la prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi di punti materiali. [3 punti]
c. Discutere l'applicazione della prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi al caso di urto unidimensionale fra due oggetti puntiformi, chiarendo le ipotesi di partenza ed i limiti di validità di quanto ottenuto. [2 punti]

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Soluzioni

1.

a.

Le forze agenti sulla pallina sul piano inclinato scabro sono la forza peso, la reazione vincolare e la forza di attrito. Essendo la pallina sottoposta a forze non conservative applico il Teorema dell'energia cinetica tra il punto A e il punto B:

$$E_M^B - E_M^A = L_{att}$$

dove E_M^A (E_M^B) è l'energia meccanica nel punto A(B) e L_{att} il lavoro della forza di attrito. Sostituendo l'energia cinetica, potenziale della forza peso ed il lavoro della forza di attrito si ottiene:

$$\left(\frac{1}{2} m\, v_B^2 + mgL \sin\alpha\right) - \left(\frac{1}{2} m\, v_o^2\right) = -\,\mu_D m\, g\, L\, \cos\alpha \qquad (1)$$

Ponendo $v_B \geq 0$ si ottiene:

$$v_0 \geq v_{0min} = \sqrt{2\, g\, L\, (\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)}$$

b.

Utilizzando l'espressione precedente (eq. 1) si può ricavare la velocità v_B della pallina in *B* nel caso in cui $v_0 = 2v_{0min}$:

$$v_B = \sqrt{v_{0min}^2 - 2\, g\, L\, (\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)} = \sqrt{6\, g\, L\, (\sin\alpha + \mu_D \cos\alpha)}$$

c.

Una volta raggiunto il termine del piano inclinato nel punto *B*, la pallina prosegue il suo moto per effetto della sola forza peso analogamente al moto del proiettile. La pallina si stacca dal piano inclinato nel punto B di coordinate (0, L$\sin\alpha$) con velocità $(v_x(0) = v_1 \cos\alpha\,, v_y(0) = v_1 \sin\alpha)$. Durante il volo la pallina è sottoposta unicamente ad una accelerazione $a_y = -g$. Risolvendo le equazioni del moto si ottengono le seguenti componenti della velocità:

$$\begin{cases} v_x = v_1 \cos\alpha \\ v_y = -gt + v_1 \sin\alpha \end{cases}$$

e le seguenti componenti della posizione:

$$\begin{cases} x = (v_1 \cos\alpha)\, t \\ y = -\dfrac{1}{2} g\, t^2 + (v_1 \sin\alpha) t + L \sin\alpha \end{cases}$$

Il punto di massima altezza viene raggiunto dalla pallina durante il volo al tempo t_1 in cui la componente della velocità lungo y è nulla:

$$t_1 = \frac{v_1}{g} \sin\alpha$$

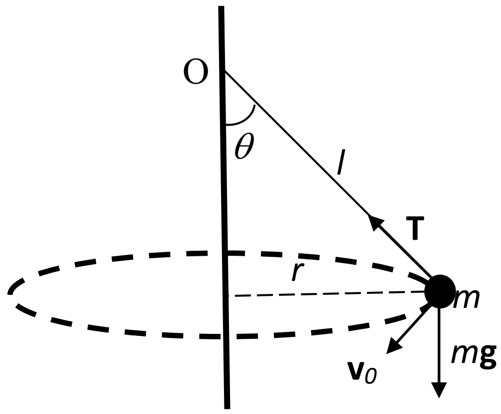
Le coordinate del punto di massima altezza raggiunto dalla pallina durante il volo si ottengono calcolando la posizione della pallina al tempo t_1:

$$\begin{cases} x(t_1) = \dfrac{v_1^2}{2g} \sin 2\alpha \\ y(t_1) = \dfrac{v_1^2\, (\sin\alpha)^2}{2g} + L \sin\alpha \end{cases}$$

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

2.

a.



Sia $r = l \sin\theta$ la distanza dell'oggetto dall'asse verticale. Applicando il secondo principio della dinamica otteniamo:

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a} = m\frac{v_0^2}{r}\mathbf{u}_n$$

con $\mathbf{u}_n$ versore normale diretto ortogonalmente all'asse e verso l'interno della traiettoria. Proiettando l'equazione in direzione orizzontale e verticale, otteniamo, rispettivamente:

$$T\sin\theta = \frac{mv_0^2}{l\sin\theta}$$
$$T\cos\theta = mg$$

da cui, sostituendo nella prima equazione il modulo T della tensione ricavato dalla seconda, si ottiene:

$$l = \frac{v_0^2\cos\theta}{g(\sin\theta)^2}$$

b.

Aggiungendo la molla, per il secondo principio della dinamica dovremo scrivere:

$$\mathbf{T} + m\mathbf{g} + \mathbf{F_e} = m\mathbf{a} = m\frac{v_1^2}{r}\mathbf{u}_n$$

con $\mathbf{F_e} = kr\,\mathbf{u}_n$ forza di richiamo della molla. Risulta pertanto:

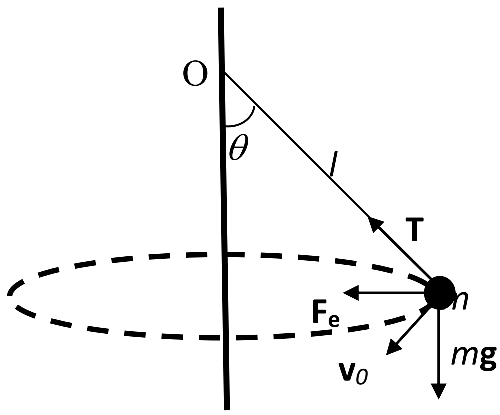
$$T\sin\theta + kl\sin\theta = \frac{mv_1^2}{l\sin\theta} = \frac{4mv_0^2}{l\sin\theta}$$
$$T\cos\theta = mg$$

Procedendo come al punto precedente, si ottiene:

$$mg\tan\theta + kl\sin\theta = \frac{4mv_0^2}{l\sin\theta}$$

da cui

$$mgl\sin\theta\tan\theta + kl^2(\sin\theta)^2 = 4mv_0^2$$



Possiamo ora sostituire nell'ultima equazione il valore di l calcolato al punto precedente, ottenendo

$$k = \frac{3mg^2(\tan\theta)^2}{v_0^2}$$

3.

a. Il primo principio per le due adiabatiche è:

$$L_{BC} + nc_v\,(T_2 - T_1) = 0$$

$$L_{DA} + nc_v\,(T_1 - T_2) = 0$$

Il rapporto tra i lavori risulta quindi $L_{BC}/\,L_{DA} = -1$.

b. Il gas assorbe calore durante l'isoterma AB (espansione) e cede calore nella isoterma CD (compressione), mentre non scambia calore nelle adiabatiche. Applicando la definizione di rendimento e utilizzando i rapporti dei volumi noti avremo:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{Ceduto}}{Q_{Assorbito}} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} = 1 - \frac{nRT_2\,\ln(\frac{V_C}{V_D})}{nRT_1\,\ln(\frac{V_B}{V_A})} = 1 - \frac{T_2\,\ln(4)}{T_1\,\ln(3)} = 36.9\ \%$$

c. In un ciclo la variazione di entropia è nulla, quindi:

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

$$\Delta S_{AB}^{gas} + \Delta S_{BC}^{gas} + \Delta S_{CD}^{gas} + \Delta S_{DA}^{gas} = 0$$

Per cui la variazione di entropia per la trasformazione adiabatica irreversibile è:

$$\Delta S_{BC}^{gas} = -(\Delta S_{AB}^{gas} + \Delta S_{CD}^{gas} + \Delta S_{DA}^{gas}) = -nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) - nR\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) + 0 =$$
$$= nR\left[\ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right) - \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right] = nR[\ln(4) - \ln(3)] = 4.78 \text{ J/K}.$$