Analisi Matematica 2 – 17 febbraio 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Parte A	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Totale**

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A$\geq$4, parte B$\geq$12, totale$\geq$18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Enunciare e dimostrare uno (a scelta) dei criteri del rapporto o della radice per la determinazione del raggio di convergenza delle serie di potenze.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $f(x,y) = 4x + 8y$. Quale dei seguenti vettori è ortogonale alle curve di livello di f?
(a) $(8,4)$ (b) $(-4,8)$ (c) $(4,-8)$ (d) $(4,8)$ $\boxed{\text{V}}$

(S) Sappiamo dalla teoria delle funzioni differenziabili che, sotto opportune ipotesi, il gradiente di una funzione in un punto è ortogonale alla linea di livello della funzione in quel punto. La funzione data è lineare, quindi il suo gradiente risulta essere costante: $\nabla f(x,y) = (4,8)$ per ogni (x,y). Esso è ortogonale alle linee di livello in ogni punto.

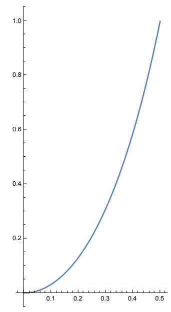
(2) La soluzione del problema di Cauchy $y'(t) = ty(t),\ y(0) = 1$, è
(a) $y(t) = e^{t^2/2}$ $\boxed{\text{V}}$ (b) $y(t) = e^{-t^2/2}$ (c) $y(t) = e^{t^2}$ (d) $y(t) = e^{-t^2}$

(3) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Si ha che:
(a) non è detto che f sia differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$
(b) se (x_0, y_0) è un punto critico di f, allora (x_0, y_0) è un punto di estremo di f
(c) f ammette massimo e minimo assoluto in A
(d) se $(x_0, y_0) \in A$ è punto di sella di f, allora f ammette piano tangente orizzontale in $(x_0, y_0) \in A$ $\boxed{\text{V}}$

(S) La risposta (a) non è corretta in quanto, per il teorema del differenziale totale, C^1 implica differenziabile. La risposta (b) non è corretta: (x_0, y_0) potrebbe essere una sella per f e dunque punto critico, ma non estremo. L'opzione (c) non è necessariamente vera, in quanto non sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass.

(4) La curva piana $\underline{r}(t) = \left(\sqrt{t(1-t)},\ \sin(\pi t)\right)$, con $t \in [0,1]$, è
(a) chiusa ma non regolare a tratti (b) regolare ma non chiusa (c) chiusa ma non semplice $\boxed{\text{V}}$ (d) semplice e regolare

(S) È qui rappresentato il sostegno della curva. Esso viene percorso due volte, perciò la curva non è semplice. Inoltre, essendo $\underline{r}(0) = \underline{r}(1)$, la curva è chiusa.



PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Sia f la funzione di due variabili definita da $f(x,y) = \dfrac{x}{x^4+y^2}$.

(a) (2 punti) Determinare il dominio di f e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.

(b) (6 punti) Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul quadrato chiuso Q di vertici $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$, $(2,0)$ e, in caso affermativo, determinarli.

(S) (a) Il dominio di f è l'insieme $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. D è aperto, in quanto la sua frontiera è il punto $\{(0,0)\}$, che non gli appartiene. Inoltre, D è illimitato, in quanto non può essere racchiuso in una palla.

(b) Per il teorema di Weiestrass f ammette massimo e minimo assoluti in Q, essendo f definita e continua in Q e Q chiuso e limitato. Per determinare gli estremi assoluti di f in Q, studiamo separatamente l'interno del quadrato e la sua frontiera. Essendo l'interno del quadrato aperto, per il teorema di Fermat i punti estremanti vanno ricercati tra i punti critici:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y^2-3x^4}{(x^4+y^2)^2} \\ -\frac{2xy}{(x^4+y^2)^2} \end{pmatrix}, \qquad \nabla f(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} y^2 = 3x^4 \\ xy = 0 \end{cases} .$$

Poiché f non ha punti critici in D, i punti estremanti andranno ricercati sul bordo del quadrato. La restrizione di f ai due lati verticali del quadrato è monotona decrescente:

$$f(1,y) = \frac{1}{1+y^2} \qquad f(2,y) = \frac{2}{2^4+y^2}, \qquad y \in [0,1],$$

da cui ricaviamo come candidati i quattro vertici del quadrato. Anche la restrizione di f al lato orizzontale in basso è monotona decrescente, quindi non fornisce ulteriori candidati. Riguardo l'ultimo lato si ha:

$$g(x) = f(x,1) = \frac{x}{1+x^4}, \qquad g'(x) = \frac{1-3x^4}{(1+x^4)^2}, \qquad x \in [1,2],$$

da cui si evince che un ulteriore candidato sarebbe il punto $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1\right)$, che però non appartiene a Q. Da ultimo, confrontiamo il valore della funzione sui quattro candidati:

$$f(2,1) = \frac{2}{2^4+1} \ < \ f(2,0) = \frac{1}{2^3} \ < \ f(1,1) = \frac{1}{2} \ < \ f(1,0) = 1.$$

In conclusione, il massimo assoluto di f in Q vale 1, assunto nel vertice $(1,0)$, mentre il minimo assoluto di f in Q vale $\frac{2}{2^4+1}$, assunto nel vertice $(2,1)$.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) (2 punti) Calcolare e^{tM} $(t \in \mathbb{R})$.

(b) (3+3 punti) Risolvere i problemi di Cauchy 1) $\begin{cases} \underline{y}'(t) = M\,\underline{y}(t) \\ \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ e 2) $\begin{cases} \underline{y}'(t) = M\,\underline{y}(t) + \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \\ \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

(S) (a) Gli autovalori di M sono 1 e 2 con autovettori corrispondenti $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pertanto $M = S\Lambda S^{-1}$, con

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$e^{tM} = Se^{t\Lambda}S^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5e^t - 4e^{2t} & -10e^t + 10e^{2t} \\ 2e^t - 2e^{2t} & -4e^t + 5e^{2t} \end{pmatrix}.$$

(b) La soluzione del problema di Cauchy omogeneo è

$$e^{tM} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5e^t + 6e^{2t} \\ -2e^t + 3e^{2t} \end{pmatrix}.$$

La soluzione del problema di Cauchy inomogeneo può essere ottenuta tramite la formula

$$\underline{y}(t) = e^{tM}\underline{y}(0) + e^{tM} \int_0^t e^{-sM} \begin{pmatrix} 2e^s \\ e^s \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 6e^{2t} - 5e^t \\ 3e^{2t} - 2e^t \end{pmatrix} + e^{tM} \int_0^t \begin{pmatrix} 2e^{-s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} 8e^{2t} - 7e^t \\ 4e^{2t} - 3e^t \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3 Sia $Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$ e sia $\overline{B}_1(0,0)$ il disco chiuso centrato nell'origine avente raggio 1. Poniamo $D = \overline{B}_1(0,0) \cap Q_3$.

(a) (4 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_D xy^2\, dxdy$.

(b) (4 punti) Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_{\partial D} xy\, ds$, dove ∂D indica il bordo di D.

(S) (a) Passiamo a coordinate polari, notando che in tale sistema di coordinate D si esprime agevolmente come $\{(\rho, \theta) : \rho \in [0, 1], \theta \in [\pi, (3/2)\pi]\}$. Ricordando di moltiplicare l'integranda per lo jacobiano del cambio di variabili (uguale a ρ), avremo quindi

$$\iint_D xy^2\, dxdy = \int_0^1 \rho^4\, d\rho \int_\pi^{(3/2)\pi} \cos\theta \sin^2\theta\, d\theta = \frac{1}{5}\frac{\sin(\theta)^3}{3}\Big|_\pi^{(3/2)\pi} = -\frac{1}{15}.$$

(b) Osserviamo che, sui due tratti rettilinei della frontiera di D (che giacciono sugli assi), l'integranda è nulla. Pertanto, parametrizzando il tratto rimanente di frontiera, che giace sulla circonferenza di raggio 1, come $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [\pi, (3/2)\pi]$ e osservando che in tal modo $ds = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$ avremo

$$\int_{\partial D} xy\, ds = \int_\pi^{(3/2)\pi} \cos t \sin t\, dt = -\frac{1}{4}\cos(2t)\Big|_\pi^{(3/2)\pi} = \frac{1}{2}.$$