Esercitazioni di Analisi 2

ESTREMI VINCOLATI

1. Determina il massimo assoluto di $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy$ sulla retta $x - y = 1$. $\left[\frac{3}{4}\right]$

2. Determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = e^{x^2+4y^2-8y}$ sull'insieme $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 16\right\}$. La funzione ammette massimi e minimi assoluti in $\mathbb{R}^2$?
$\left[M = (0,-2);\ m = (0,1)\ \text{su } C;\ m = (0,1)\ \text{su } \mathbb{R}^2\right]$

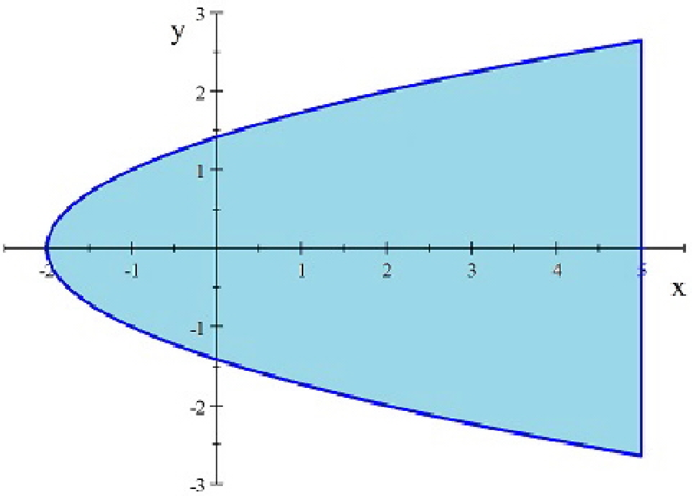
3. Determina il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y) = -x - y^2$ sull'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 5\}$.
$[\max f = 5 \text{ in } (-5,0)\,;\ \min f = -25 \text{ in } (0,\pm 5)]$

4. Determina i punti di massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = 1 - x - y$ sul quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.
$[M = (0,0);\ m = (1,1)]$

5. Trova i massimi e i minimi di $f(x,y) = \sqrt{|x| + |y|}$ sulla circonferenza unitaria.
$\left[\max f = \sqrt[4]{2} \text{ sull'intersezione bisettrici-circonferenza},\ \min f = 1 \text{ sull'intersez. assi-circonferenza}\right]$

6. Determina i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = xy$ sul vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$
$\left[M_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ M_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ m_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);\ m_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$

7. Determina i punti di massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = \sqrt[3]{\arctan(1+xy)}$ su $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 2 \leq x \leq 5\}$.



[L'insieme C è la parte di piano rappresentata in colore: C è chiuso, connesso e limitato.

La funzione f è continua in C, pertanto ammette massimo e minimo assoluti in C (Weierstrass). Il dominio di f è $\mathbb{R}^2$, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, i suoi eventuali estremi liberi che cadono in C

soddisfano $\nabla f(x,y) = 0$. Dato che f è ottenuta dalla composizione dell'arcotangente con la radice cubica, che sono funzioni strettamente crescenti, è sufficiente analizzare il comportamento dell'argomento dell'arcotangente $g(x,y) = 1 + xy$.

$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \nabla g(x,y) = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$. L'unico punto stazionario libero di f è l'origine. Esso è interno a C quindi è candidato ad essere estremo assoluto.

La restrizione di f sulla retta verticale $x = 5$ è: $\begin{cases} f(5,y) = \sqrt[3]{\arctan(5y+1)} \\ -\sqrt{7} \le y \le \sqrt{7} \end{cases}$, essa è strettamente crescente $\forall y \in \left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$ (lo è l'argomento dell'arcotangente..) $\Rightarrow$ i punti $\left(5, \pm\sqrt{7}\right)$ sono candidati ad essere estremi assoluti.

La restrizione di f sulla parabola $x = y^2 - 2$ è: $\begin{cases} f\left(y^2-2, y\right) = \sqrt[3]{\arctan\left(y^3 - 2y + 1\right)} \\ -\sqrt{7} \le y \le \sqrt{7} \end{cases}$, la derivata dell'argomento dell'arcotangente è $3y^2 - 2$ e si annulla per $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, a cui corrisponde $x = -\frac{4}{3} \Rightarrow$ i punti $\left(-\frac{4}{3}, \pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ sono candidati ad essere estremi assoluti.

Confrontando i valori di g in corrispondenza dei punti individuati come candidati ad essere estremi si trova che $f\left(5, \sqrt{7}\right)$ è massimo assoluto, $f\left(5, -\sqrt{7}\right)$ è minimo assoluto.]

8. Determina i punti di massimo e minimo di $f(x,y) = x^3 - xy^2$ sul quadrato $Q = [0,1] \times [0,1]$.
   $\left[M = (1,0);\ m = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right)\right]$

9. Determina i punti critici di $f(x,y) = x^2y + xy^2 - 5xy - 2x$. Determina poi il massimo e il minimo assoluti.di f nel triangolo $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 5\}$.
   $\left[\begin{array}{l} (3,1) \text{ è punto di minimo locale, } \left(0, \frac{5 \pm \sqrt{33}}{2}\right) \text{ e } \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ sono punti di sella.} \\ \min\limits_T f = -10 \text{ in } (5,0);\ \max\limits_T f = 0 \text{ in } (0,y) \text{ con } 0 \le y \le 5 \end{array}\right]$

10. Determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x + 3y + 2$ sull'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, y \ge 0, x^2 + y^2 \le 1\}$.
    $\left[m = (0,0);\ M = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right]$

11. Determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = y^3 + 4x^2y - 4y$ sul vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.
    $[m = (0,1);\ M = (0,-1)]$

12. Determina massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = 1 - x^2 - 3y^2$ sul cerchio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.
    [$\max f = 1$ nell'origine, $\min f = -2$ sull'intersezione asse ordinate-circonferenza.]

13. Determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2$ sul vincolo $g(x,y) = 4x^2 + y^2 - 1 = 0$.
    $\left[m = (\pm\frac{1}{2}, 0);\ M = (0, \pm 1)\right]$

14. Determina il massimo e il minimo assoluti di $f(x,y) = 2-2y^2-x^2-x$ nell'insieme $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+2y^2 \leq 1\}$.
$\left[\min_C f = 0 \text{ in } (1,0);\ \max_C f = \frac{9}{4} \text{ in } (-\frac{1}{2},0)\right]$

15. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange determina i punti di estremo assoluto della funzione $f(x,y) = 4x^2+y^2+2x-4y+1$ sull'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2-1=0\}$.
$\left[M = \left(\frac{1}{2\sqrt{17}}, -\frac{4}{\sqrt{17}}\right);\ m = \left(-\frac{1}{2\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}}\right)\right]$

16. Utilizzando sia il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che il metodo della parametrizzazione determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^2+y^2+\frac{3}{2}x+1$ sull'insieme $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2+y^2-1=0\}$.
$\left[M = \left(\frac{1}{4}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right); m = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)\right]$

17. Determina i punti di massimo e minimo assoluto della funzione $f(x,y) = x^4+y^4-8\left(x^2+y^2\right)$ nell'insieme $\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 9\right\}$. $[m = (\pm 2, 2)\,,\ (\pm 2, -2)\,;\ M = (0, \pm 3)\,,\ (\pm 3, 0)]$

18. Data la funzione $f(x,y) = 2\,(x-y)^2 - 4\left(x^4+y^4+3\right)$:

    (a) stabilisci se è superiormente e/o inferiormente limitata.
    [f è superiormente limitata (coordinate polari)]

    (b) determina i suoi estremi locali in $\mathbb{R}^2$.
    [$M = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; l'origine è un punto stazionario con $\det H(0,0) = 0$: $g = f\,(x,y) - f\,(0,0)$ non ha segno costante in un intorno di $(0,0)$, dunque è punto di sella (confronta ad esempio la restrizione di g sull'asse y e sulla bisettrice $y = x$)]

    (c) individua i suoi estremi assoluti sull'insieme $x^4+y^4 = 32$.
    [$M = (\pm 2, \mp 2)$; $m = (\pm 2, \pm 2)$ (metodo dei moltiplicatori di Lagrange)]

19. Data la funzione $f(x,y) = 3x^3+xy^2-x$, determina:

    (a) tutti i punti di estremo relativo e assoluto di f nel quadrato $D = [-1,1] \times [-1,1]$.
    $\left[M_A = (1, \pm 1);\ m_A = (-1, \pm 1)\,;\ m_r = (\frac{1}{3}, 0);\ M_r = \left(-\frac{1}{3}, 0\right)\right]$

    (b) l'estremo superiore e l'estremo inferiore di f nel quadrato $D = [-1,1] \times [-1,1]$, precisando se si tratta anche di massimo e minimo. $\left[\min_D f = -3;\ \max_D f = 3\right]$

20. Determina, se esistono, i punti di massimo M e minimo m assoluto delle seguenti funzioni sul vincolo a fianco indicato:

    (a) $f(x,y) = e^x + e^y$; $x + y = 2$ $[m = (1,1)]$

    (b) $f(x,y) = xy$; $(x-1)^2+y^2 = 1$ $\left[m = \left(\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ M = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$

    (c) $f(x,y) = xy + x^2$; $x + 2y - 4 = 0$ $[m = (-2, 3)]$

    (d) $f(x,y) = x^2+3y^2+x-y$; il triangolo delimitato da $x = 1$; $y = 1$; $x + y = 1$
    $\left[m = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right);\ M = (1,1)\right]$

(e) $f(x,y)=x^2+y^2;\ \ 4x^2+y^2-2y=0\quad [m=(0,0)\,;\ M=(0,2)]$

(f) $f(x,y)=4x\left(x^2-y^2\right)-3x^2+y^2;\ \ x^2-y^2=\frac{1}{4}\quad \left[M=\left(\frac{1}{2},0\right)\,;\ M=\left(-\frac{1}{2},0\right)\right]$

(g) $f(x,y)=x^2+5y^2-\frac{1}{2}xy^2;\ \ x^2+4y^2-4=0\quad \left[m=(\pm 2,0)\,;\ M=\left(-\frac{2}{3},\pm 2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$

(h) $f(x,y)=3x+4y+1;\ \ 9x^2+4y^2-36=0\quad \left[m=\left(-\frac{2}{\sqrt{5}},-\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\,;\ M=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{6}{\sqrt{5}}\right)\right]$

(i) $f(x,y)=x+\log(2x+y)\,;\ \ y+x^2-3=0\quad \left[M=\left(\sqrt{5},-2\right)\right]$

(j) $f(x,y)=2xy^2+x^5;\ \ x^4+y^2=1$
$\left[m=(1,0)\,;\ M=(-1,0)\,;\ m=\left(-\sqrt[4]{\frac{2}{5}},\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)\,;\ M=\left(\sqrt[4]{\frac{2}{5}},\pm\sqrt[4]{\frac{3}{5}}\right)\right]$

(k) $f(x,y)=2x-y+1;\ \ x^2-2xy+2y^2=1\quad \left[m=\left(-\frac{3}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\,;\ M=\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right]$

(l) $f(x,y)=2x^3+y^3-3x^2-3y;\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x+y\le 4;\ x\ge 0;\ y\ge 0\}$
$[m=(1,1)\,;\ M=(4,0)]$

(m) $f(x,y)=x^2(x+y)-y^2-4y;\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\ge x-2;\ x\ge 0;\ y\le 1\}$
$[m=(0,1)\,;\ M=(1,0)]$

(n) $f(x,y)=-x^2y^2-2y^3+2x^2+8y+1;\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2-2y=0\}$
$[m=(0,0)\,;\ m=(0,2)\,;\ M=(\pm 1,1)]$

(o) $f(x,y)=x\left(x^2+y^2\right);\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2;\ xy\le 1\}$
$\left[m=(0,y)\ \text{con}\ 0\le y\le 2;\ M=\left(2,\frac{1}{2}\right)\right]$

(p) $f(x,y)=-2x^3+4x^2y+5x^2-12xy+4y^2;\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: 0\le x\le 1; 0\le y\le 1\}$
$[m=(1,1)\,;\ M=(0,1)]$

(q) $f(x,y)=xy-y^2+3;\qquad D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1\le x\le 1-y^2\}$
$\left[m=\left(-1,\sqrt{2}\right)\,;\ M=\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\right]$

21. Data la funzione $f(x,y)=xy\left(y-x^2+1\right)$:

(a) trova i punti stazionari di f. $\left[O\,(0,0)\,;\ A\,(0,-1)\,;\ B\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{5}\right)\,;\ C\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{5}\right)\right]$

(b) determina la natura dei punti stazionari di f
[O e A sono punti di sella, B è punto di minimo, C è punto di massimo]

(c) determina i punti di estremo assoluto di f in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-1\le y\le 0\}$.
$\left[f \text{ è costante sulla frontiera di } D...\ ,m=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{5}\right)\,;\ M=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{5}\right)\right]$

(d) determina i punti di estremo assoluto di f in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\le 1-x^2;\ y\ge -x-1;$ $y\ge x-1\}$. $\left[M=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{5}\right)\,;\ m=\left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{4}{5}\right)\right]$

22. Data la funzione $f(x,y)=\log(4+xy)$:

(a) trova i punti stazionari di f. $[O\,(0,0)]$

(b) determina la natura dei punti stazionari di f [O è punto di sella]

(c) determina i punti di estremo assoluto di f in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2-1\le 0;\ y\le -x+1\}$.
$\left[m=\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\mp\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\,;\ M=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$