



5/9/2018

ore 8:30

### FISICA (secondo appello)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1.

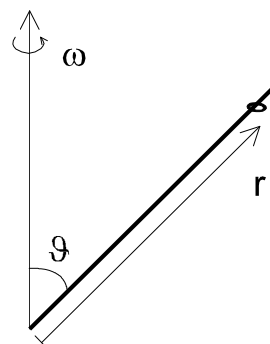
In un intervallo di tempo  $\Delta t$  un punto materiale di massa  $m$ , inizialmente fermo, percorre con accelerazione tangenziale costante una semicirconferenza di raggio  $R$ . Si calcoli:

- l'accelerazione tangenziale del moto,
- la velocità raggiunta alla fine della semicirconferenza,
- il modulo dell'accelerazione alla fine della semicirconferenza,
- il lavoro della forza risultante agente tra l'inizio e la fine della semicirconferenza.

2.

Un anello di massa  $m$  è infilato su un'asta rigida lungo la quale può scorrere senza attrito. L'asta è inclinata di un angolo  $\vartheta$  fisso rispetto alla verticale e ruota con velocità angolare  $\omega$  costante.

- Si elenchino tutte le forze agenti sull'anello osservate in un sistema di riferimento solidale con l'asta e se ne disegni un diagramma.
- Si determini l'energia potenziale della forza risultante agente sull'anello in tale sistema di riferimento, in funzione della coordinata  $r$  indicata in figura.
- Si individuino le eventuali posizioni di equilibrio in funzione di  $r$ .



3.

- Si definisca il calore molare, chiarendo esplicitamente il significato dei simboli utilizzati.
- Si enunci e si dimostri la relazione di Mayer per i gas ideali.

4.

- Si definisca il rendimento di una macchina termica.
- Una macchina termodinamica compie un ciclo reversibile scambiando le quantità di calore  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  con tre sorgenti a temperature  $T_1 = 800$  K,  $T_2 = 400$  K e  $T_3 = 300$  K, rispettivamente. Sapendo che  $Q_1 = 2Q_2$ , si calcoli il rendimento della macchina.

-----  
Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- FIRMARE l'elaborato;
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.

# Fisica - Appello del 5/9/18 - Traccia sintetica di soluzione

## Quesito 1

a) Poiché il moto sulla semicirconferenza è uniformemente accelerato:

$$s(t) = s(0) + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

Ma il punto materiale inizialmente è fermo in  $s(0) = 0$ , perciò dopo un tempo  $\Delta t$ :

$$s(\Delta t) = \frac{1}{2} a_T (\Delta t)^2$$

Imponendo che abbia percorso l'intera semicirconferenza nel tempo  $\Delta t$  si ottiene:

$$s(\Delta t) = \pi R \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} a_T (\Delta t)^2 = \pi R$$

e quindi il modulo dell'accelerazione tangenziale è:

$$a_T = \frac{2\pi R}{(\Delta t)^2}$$

b) La velocità alla fine della semicirconferenza (ricordando che  $v_0 = 0$ ) è:

$$v(\Delta t) = a_T \Delta t$$

$$v(\Delta t) = \frac{2\pi R}{\Delta t}$$

c) L'accelerazione del punto materiale è data dalla somma della sua componente tangenziale e della sua componente normale (centripeta):

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

L'accelerazione normale vale in modulo:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{(\Delta t)^2}$$

perciò:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \frac{1}{(\Delta t)^2} \sqrt{4\pi^2 R^2 + 16\pi^4 R^2}$$

$$a = \frac{2\pi R}{(\Delta t)^2} \sqrt{1 + 4\pi^2}$$

d) Per il Teorema dell'Energia Cinetica, il lavoro svolto dalla forza risultante è pari alla differenza di energia cinetica tra l'istante finale e quello iniziale:

$$\mathcal{L} = \Delta E_K$$

Inizialmente il punto materiale è fermo, quindi:

$$\Delta E_K \equiv E_{K, finale} = \frac{1}{2} m (v(\Delta t))^2$$

$$\mathcal{L} = \frac{2\pi^2 R^2 m}{(\Delta t)^2}$$

## Quesito 2

a) In un sistema di riferimento solidale con l'asta sono presenti le seguenti forze applicate all'anello:

- **Forza peso**  $\vec{P}$ , di modulo  $P = mg$ , diretta verticalmente e rivolta verso il basso ( $\vec{P} \parallel -\vec{\omega}$ )
- **Forza centrifuga**  $\vec{F}_C$ , di modulo  $F_C = m\omega^2\rho$  essendo  $\rho$  la distanza dell'anello dall'asse di rotazione (lunghezza di un segmento orizzontale che congiunge l'anello all'asse), diretta orizzontalmente verso l'esterno.
- **Forza di Coriolis**  $\vec{F}_{Cor}$ , diretta ortogonalmente al piano su cui giacciono  $\vec{r}$  e  $\vec{\omega}$ , ovvero diretta ortogonalmente al piano del foglio. Il verso dipende dal segno della velocità di spostamento dell'anello sull'asta.
- **Forza di reazione vincolare dell'asta**  $\vec{R}_n$ , diretta ortogonalmente all'asta. Poiché l'unico moto ammesso dell'anello è quello parallelo all'asta, la reazione vincolare bilancia esattamente le componenti di  $\vec{P}$  e  $\vec{F}_C$  ortogonali all'asta stessa; bilancia inoltre la forza di Coriolis.

b) • Per quanto discusso al punto a), la forza risultante sull'anello sarà data dalla somma delle componenti di  $\vec{P}$  e  $\vec{F}_C$  parallele all'asta.

$$\vec{F}_{ris} = -mg \cos \theta \vec{u}_r + m\omega^2 \rho \sin \theta \vec{u}_r$$

Poiché  $\rho$  è la distanza dell'anello dall'asse di rotazione, si può scrivere come  $\rho = r \sin \theta$ , da cui:

$$\vec{F}_{ris} = -mg \cos \theta \vec{u}_r + m\omega^2 r \sin^2 \theta \vec{u}_r$$

Osserviamo che la forza risultante dipende solo dalla coordinata radiale  $r$  ed è dunque conservativa.

- In generale, per una forza  $\vec{F}$  conservativa, si ha  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$ , dove  $U$  è l'energia potenziale associata. In questo caso abbiamo una sola direzione rilevante (parallela a  $\vec{u}_r$ ) e si ha:

$$F_{ris} \cdot \vec{u}_r = -\frac{d}{dr}U(r) \cdot \vec{u}_r$$

e quindi in forma scalare:

$$F_{ris} = -\frac{d}{dr}U(r)$$

- Conseguente che:

$$U(r) = -\int_0^r F_{ris} dr + U(0)$$

dove tuttavia possiamo fissare arbitrariamente  $U(0) = 0$  e quindi:

$$U(r) = -\int_0^r F_{ris} dr = -\int_0^r (-mg \cos \theta + m\omega^2 r \sin^2 \theta) dr$$

$$U(r) = mgr \cos \theta - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \sin^2 \theta$$

c) I punti di equilibrio si trovano per  $\frac{dU}{dr} = 0$  o equivalentemente  $F_{ris} = 0$ .

$$-mg \cos \theta + m\omega^2 r \sin^2 \theta = 0$$

$$r_{EQ} = \frac{g \cos \theta}{\omega^2 \sin^2 \theta}$$

si ha dunque un unico punto di equilibrio.

NOTA: Un'analisi più approfondita mostrerebbe che in quel punto  $\frac{d^2U}{dr^2} < 0$  e quindi si tratta di un punto di equilibrio *instabile*.

### Quesito 3

Si veda la teoria.

### Quesito 4

- a) Il rendimento  $\eta$  di una macchina termica (macchina termodinamica ciclica che produce lavoro netto positivo) è definito come il rapporto tra il lavoro  $\mathcal{L}$  svolto in un ciclo e il calore netto assorbito  $Q_{ass} > 0$  dalla macchina durante detto ciclo.

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}}$$

- b) • Per questo ciclo reversibile il Teorema di Clausius impone:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

- Poiché sappiamo che  $Q_1 = 2Q_2$ , possiamo scrivere:

$$2\frac{Q_2}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$$

da cui si ricava:

$$Q_3 = -\frac{T_3}{T_1 T_2} (T_1 + 2T_2) Q_2$$

e sostituendo i valori numerici delle temperature  $T_1, T_2, T_3$ :

$$Q_3 = -\frac{3}{2}Q_2$$

- Il lavoro svolto dalla macchina termica è pari al calore netto scambiato nel ciclo (per il Primo Principio della Termodinamica):

$$\mathcal{L} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 2Q_2 + Q_2 - \frac{3}{2}Q_2 = \frac{3}{2}Q_2$$

- Imponendo che il lavoro svolto sia positivo, otteniamo i seguenti segni per le quantità di calore:

$$Q_1 > 0 \quad Q_2 > 0 \quad Q_3 < 0$$

Il calore netto assorbito nel ciclo è dunque:

$$Q_{ass} = Q_1 + Q_2 = 2Q_2 + Q_2 = 3Q_2$$

- Possiamo ora calcolare il rendimento della macchina termica:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} = \frac{\frac{3}{2}Q_2}{3Q_2}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{2}}$$