Esercitazioni di Analisi 2

Funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$: **LIMITI - CONTINUITA'**

1. Calcola i seguenti limiti, se esistono:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{x^2+y^4}$ $\quad$ [non esiste: studia ad es. $x=0$ e $x=y^2$]

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ $\quad$ [non esiste: analizza ad es. $y=0$ e $y=x^2$]

   (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin x \sin y}$ $\quad$ [1 $\;(\sin x \sim x$ per $x\to 0$...)]

   (d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ $\quad$ [0: maggiorazioni, coordinate polari...]

   (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} xy \arctan\left(\frac{1}{xy}\right)+y$ $\quad$ [1]

   (f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ [non esiste: studia ad es. $y=x$ e $y=-x$]

   (g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2(xy)}{y}$ $\quad$ [0 $\;(\sin xy \sim xy$ per $xy\to 0$...)]

   (h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)\log\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad$ [0: coordinate polari]

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(xy)}{\sqrt{x^2-y^2}}$ $\quad$ [$-\infty$]

   (j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2+y^2}$ $\quad$ $\left[0\text{: } 1-\cos(xy)\sim\frac{x^2y^2}{2} \text{ per } xy\to 0...\right]$

   (k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{x^3}}$ $\quad$ [non esiste: studia ad es. $y=0$ e $x=y^2$ o le linee di livello]

   (l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$ $\quad$ [0: maggiorazioni, coordinate polari...]

   (m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$ $\quad$ [0: maggiorazioni, coordinate polari centrate in $(1,0)$ ...]

   (n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(y-1)^2\sin\pi x}{(x-2)^2+(y-1)^2}$ ...[0: maggiorazioni, coordinate polari centrate in $(2,1)$ ...]

   (o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ $\quad$ [0: maggiorazioni, coordinate polari...]

   (p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^4+y^2}$ $\quad$ [0]

2. Verifica che i seguenti limiti non esistono:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y^2}$ $\quad$ $\left[\text{considera ad es. le restrizioni a } x=0 \text{ e } x=\frac{1}{2}y^2 \text{ o le linee di livello...}\right]$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x-y)}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad$ [considera ad es. le restrizioni a $y=x$ e $x=y^3$]

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$ $\quad$ [considera ad es. le restrizioni a $y=x$ e $x=y^2$]

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{-\frac{y}{x}}$ $\quad$ [considera ad es. le restrizioni a $y=x$ e $x=-y^3$ o le linee di livello...]

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$ $\quad$ [considera ad es. le restrizioni a $y=0$ e $y=x$. Le linee di livello sono rette passanti per O...]

3. Calcola i seguenti limiti:

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-2xy+y^2}{x^2+y^2}$ $\quad$ [non esiste]

(b) $\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \dfrac{x^2-2x+1}{\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}}$ $\quad$ [0]

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y\cos(x+y)}{x^2+y^2}$ $\quad$ [0]

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y\sin(xy)}{x^2+y^2}$ $\quad$ [0]

4. Stabilisci se le seguenti funzioni sono continue nell'origine:

(a) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [no: analizza ad es. $x=y^2$]

(b) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$ $\quad$ [no: analizza ad es. $y=x^2$]

(c) $f(x,y)=\begin{cases} \arctan\dfrac{x}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [no: analizza ad es. $x=0$]

(d) $f(x,y)=\begin{cases} (2x^2+y^2)\log\sqrt{2x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [si]

(e) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x-y} & \text{se } x\neq y \\ 0 & \text{se } x=y \end{cases}$ $\quad$ [no: le linee di livello sono parabole passanti per O]

(f) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [si: coordinate polari]

(g) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x\sin^2 y}{x^2+2y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [si: $\sin y \sim y$ per $y\to 0$ e maggiorazioni]

(h) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2\sqrt[3]{xy}\sin\sqrt[3]{xy}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [si: maggiorazioni]

(i) $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|x|\,(x+2y)}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad$ [si: maggiorazioni]

(j) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-x^3y+x^2y^2+y^4}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ [no: analizza ad es. $y=x$]

(k) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{\frac{-1}{x^2+y^2}}}{|x|+|y|} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ [si: maggiorazioni; coord. polari]

5. Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & \text{se } x\neq 0\\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, stabilisci se:

- $f(x,y)$ è continua in $O(0,0)$ $\left[\text{no: analizza ad es. } x=y^2\right]$
- $f(x,y)$ è continua in $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq x\leq 1\right\}$ [si]

6. Studia la continuità di $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{y^2-x}}{x+y} & \text{se } x\leq y^2;\ y\neq -x\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$ nel suo dominio.

7. Studia la continuità di $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(x+y-2)}{\sqrt{(x+y)^2-9}} & \text{se } (x,y)\neq(1,2)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(1,2)\end{cases}$ in $A(1,2)$. [f è continua in $(1,2)$]

8. Data la funzione $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } |y|\leq x^2;\ (x,y)\neq(0,0)\\ \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } |y|>x^2\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0)\end{cases}$, stabilisci se:

- $f(x,y)$ è continua in $O(0,0)$ [si]
- $f(x,y)$ è continua $\mathbb{R}^2$ $\left[f \text{ è continua in } \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\neq x\right\}\cup\{(0,0),(1,\pm1)\}\right]$

9. Stabilisci se $f(x,y)=\dfrac{e^{xy^2}-1}{x^2+2y^2}$ può essere prolungata con continuità nell'origine. [si]

10. Determina per quali valori di α la funzione $f_\alpha(x,y)=\dfrac{\sin(x^\alpha y)}{1-e^{x^2+y^2}}$ è prolungabile per continuità nell'origine. [$\alpha>1$]