Informazione e stima – 09/09/2021

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti.
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori.
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, e codice persona su ogni foglio consegnato.
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si estraggono due carte da un mazzo di 52. Si considerino gli eventi $A = \{\text{la prima estratta è di cuori}\}$ e $B = \{\text{entrambe sono di cuori}\}$. Si calcolino le probabilità dell'unione e dell'intersezione di A e B.
Nel mazzo ci sono 13 *carte di cuori. Le estrazioni sono senza reinserimento.*

2. Si esegue 100 volte un esperimento che produce una variabile casuale con legge esponenziale con valore atteso 1. Si calcolino le probabilità che almeno una variabile causale sia maggiore di 5, e che una sola sia maggiore di 5.

3. Sia X una v.a. con legge uniforme tra 0 e 1, e $Y = \sqrt[3]{X}$. Si calcoli la legge di Y, e da questa si ricavino valore atteso e varianza di Y.

4. Mario riceve sul suo cellulare mediamente 10 messaggi al giorno da Laura e 4 messaggi al giorno da Carlo. I messaggi arrivano secondo due processi di Poisson indipendenti. Per semplicità, assumiamo l'assenza di altri tipi di messaggi. Trovare:

   (a) la probabilità che l'ultimo messaggio ricevuto sia stato da Laura;

   (b) la probabilità che negli ultimi 3 messaggi ci siano stati più messaggi di Carlo che di Laura.

5. In 10000 lanci indipendenti di moneta si sono ottenute 4700 teste. Ipotizzando di non avere alcuna informazione a priori sul bilanciamento della moneta (vale a dire, $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$, con Θ il bilanciamento incognito della moneta), è lecito sospettare che la moneta non sia ben bilanciata? Giustificare adeguatamente la risposta.

6. Si consideri un mazzo ben mescolato di 52 carte, e si sveli la sequenza ordinata di carte così generata. Qual è la quantità di bit di informazione svelata?

Soluzioni

Problema 1

L'evento B è incluso in A, vale a dire $B \subset A$. Quindi

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

e

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(B) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17}.$$

Problema 2

La probabilità che nella singola prova la variabile casuale superi 5 è $p = e^{-5}$. La probabilità di un successo in 100 prove è una probabilità binomiale:

$$\binom{100}{1} p (1-p)^{99} \approx 0.345,$$

e di almeno un successo è

$$1 - (1-p)^{100} \approx 0.491.$$

Problema 3

La relazione che lega y e x è $y = g(x) = x^{1/3}$. Siccome g è una funzione invertibile nel dominio $(0, 1)$, possiamo calcolare la legge di Y tramite il metodo diretto:

$$g^{-1}(y) = y^3 \qquad \frac{d}{dx} g(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \overset{(x=y^3)}{=} \frac{1}{3y^2} \qquad f_X(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \frac{f_X(g^{-1}(y))}{\left|\frac{d}{dx} g(x)\right|_{x=g^{-1}(y)}} = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{3y^2}} & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 3y^2 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{1}$$

Valor atteso e varianza si possono calcolare come segue:

$$\mathsf{E}[Y] = \int_0^1 y \cdot 3y^2 \, dy = \frac{3}{4} \qquad \mathsf{E}\left[Y^2\right] = \int_0^1 y^2 \cdot 3y^2 \, dy = \frac{3}{5} \qquad \mathsf{Var}[Y] = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{80} = 0.0375.$$

Problema 4

1. Tutti i tipi di messaggio ricevuti sono indipendenti, perché per ipotesi i due processi di Poisson sono indipendenti, e perchè gli istanti di arrivo sono indipendenti. Dunque, la probabilità che un messaggio sia stato mandato da Laura è proporzionale all'intensità del processo di Poisson di Laura, vale a dire:

$$\frac{10}{10+4} = \frac{5}{7} = 0.7143 \tag{2}$$

2. Il numero di messaggi arrivati da Carlo tra gli ultimi 3 messaggi è una v.a. Binomiale $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{4}{14} = \frac{2}{7}\right)$. Dunque, la probabilità che questi siano di più rispetto a quelli ricevuti da Laura è:

$$\Pr(X > 3 - X) = \Pr\left(X > \frac{3}{2}\right) = \Pr(X \geq 2) = p_X(2) + p_X(3) \tag{3}$$

$$= \binom{3}{2} \left(\frac{2}{7}\right)^2 \frac{5}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^3 \approx 0.1983. \tag{4}$$

Problema 5

Sia T il numero di teste osservate in 10000 lanci di moneta. Allora la funzione di verosimiglianza è una binomiale:

$$\Pr(T = t | \Theta = \theta) = \binom{10000}{t} \theta^t (1-\theta)^{10000-t}. \tag{5}$$

La densità a posteriori di una moneta bilanciata, cioè per $\Theta = 1/2$, si calcola tramite la legge di Bayes:

$$f_{\Theta|T}\left(\frac{1}{2}|4700\right) = \frac{\Pr(T = 4700|\Theta = 1/2) f_\Theta(1/2)}{\Pr(T = 4700)} \tag{6}$$

$$= \frac{1}{\Pr(T = 4700)} \binom{10000}{4700} \left(\frac{1}{2}\right)^{4700} \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10000-4700}. \tag{7}$$

Dato che è difficile valutare il coefficiente binomiale, possiamo approssimare la Binomiale su 10000 prove con una legge Gaussiana con valor atteso $10000 \cdot \frac{1}{2} = 5000$ e varianza $10000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - 1/2) = 2500$. Dunque:

$$f_{\Theta|T}\left(\frac{1}{2}|4700\right) \approx \frac{1}{\Pr(T = 4700)} \frac{1}{\sqrt{2\pi 2500}} e^{-\frac{(4700-5000)^2}{2\cdot 2500}} \tag{8}$$

$$\approx \frac{1}{\Pr(T = 4700)} 1.21 \cdot 10^{-10}, \tag{9}$$

che è un numero molto piccolo. Da questo si evince che $\Theta = 1/2$ non è una stima accurata del bilanciamento della moneta.

Problema 6

Siccome il mazzo è ben mescolato, possiamo considerare uno spazio di probabilità uniforme dove ogni sequenza di 52 carte ha la stessa probabilità di verificarsi. In tutto ci sono 52! possibili sequenze ordinate. Associamo ad ogni possibile sequenza di 52 carte un numero naturale progressivo, da 1 a 52!.

Dobbiamo valutare l'entropia di una v.a. X che è uniformemente distribuita nell'insieme discreto $\{1, 2, \ldots, 52!\}$. Nel caso di v.a. uniformi, l'entropia è uguale al logaritmo della cardinalità dell'insieme discreto:

$$H(X) = \log_2(52!) = \sum_{i=1}^{52} \log_2(i) \approx 225.581 \text{ bit.} \tag{10}$$