Esercitazioni di Analisi 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Problemi di Cauchy, EDO di Bernoulli

1. $*$Risolvi il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(t) = y^2(t) \\ y(0) = -1 \end{cases}$.
   [L'equazione è a variabili separabili. La soluzione costante $y(t) = 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ non è soluzione del problema di Cauchy. Per $y \neq 0$ si ottiene l'integrale generale da $\int \frac{1}{y^2} dy = \int dt \Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c$. La condizione iniziale $y(0) = -1$ comporta $c = 1$. La soluzione è perciò $y(t) = \frac{-1}{t+1}$, con $t > -1$.]

2. Risolvi i seguenti problemi di Cauchy,specificando qual è il più ampio intervallo in cui ciascuna soluzione è definita:

   (a) $\begin{cases} y' = \dfrac{y+1}{x} \\ y(1) = 0 \end{cases}$ $[y = x - 1;\ \ (0, +\infty)]$

   (b) $*\begin{cases} y' = y + 2 \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $[y = 4e^{x-1} - 2;\ \mathbb{R}]$

   (c) $\begin{cases} y' = \dfrac{y+1}{x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$ $[\varnothing]$

   (d) $*\begin{cases} y'(t) = y(t) \cos t \\ y(1) = -1 \end{cases}$ $\left[y(t) = -\dfrac{1}{e^{\sin 1}} e^{\sin t};\ \mathbb{R}\right]$

   (e) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{x^2+1} y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\left[y = 2\sqrt{x^2+1};\ \mathbb{R}\right]$

   (f) $\begin{cases} y' = \dfrac{x^3}{x^3+1}(y-2) \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $[y = 2;\ \ (-1, +\infty)]$

   (g) $\begin{cases} y' = \dfrac{2y}{x} + 3x^2 \cos x \\ y(\pi) = 3\pi^3 \end{cases}$ $\left[y = 3x^2(\sin x + \pi);\ \ (0, +\infty)\right]$

   (h) $\begin{cases} y' = 2x\sqrt{1-y^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $[y = 1\ \vee\ y = \cos x^2;\ \mathbb{R}]$

   (i) $\begin{cases} y' + 3x^2 y = x^2 \\ y(2) = -1 \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{3} e^{8-x^3};\ \mathbb{R}\right]$

   (j) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{1}{1-x};\ \ (-\infty, 1)\right]$

   (k) $\begin{cases} y' = \dfrac{(1+y)^2}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{3}{1 - 3\log x} - 1;\ \ (0, \sqrt[3]{e})\right]$

(l) $\begin{cases} y' = 2y\left(1 - \dfrac{1}{3}y\right) \\ y(0) = 4 \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{12e^{2x}}{4e^{2x} - 1};\ \ (-\log 2, +\infty)\right]$

(m) $\begin{cases} y' = 2y\left(1 - \dfrac{1}{3}y\right) \\ y(0) = -1 \end{cases}$ $\left[y = 3\dfrac{e^{2x}}{e^{2x} - 4};\ \ (-\infty, \log 2)\right]$

(n) $\begin{cases} y' = 2y\left(1 - \dfrac{1}{3}y\right) \\ y(-5) = 3 \end{cases}$ $[y = 3;\ \ \mathbb{R}]$

(o) $\begin{cases} y' = y(1 - y) \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\left[y = \dfrac{e^{x}}{e^{x} + 1};\ \ \mathbb{R}\right]$

3. *Data l'equazione differenziale $y(t)\, y'(t) = t$:

   (a) risolvi se possibile il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(1) = -1$;
   [L'equazione assegnata è a variabili separabili e non ammette soluzioni costanti. L'integrale generale si ricava da $\int y dy = \int t dt \Rightarrow y^2 = t^2 - k;\ k \in \mathbb{R}$. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = -1$ si ottiene $k = 0$. L' equazione $y^2 = t^2$ ha come unica soluzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$ passante per $(1, -1)$ la funzione $y = -t$.]

   (b) trova tutte le soluzioni (massimali) specificando il loro dominio;
   [Le soluzioni continue e derivabili di $y^2 = t^2 - k$ costituiscono tutte le soluzioni dell'equazione differenziale assegnata, in particolare:
   $y = \sqrt{t^2 - k}$ definisce tre funzioni: se $k \geq 0$ una con dominio $\left(-\infty, -\sqrt{k}\right)$, un'altra con dominio $\left(\sqrt{k}, +\infty\right)$; se $k < 0$ un'ultima con dominio $\mathbb{R}$.
   $y = -\sqrt{t^2 - k}$ definisce a sua volta tre funzioni: per i domini valgono le considerazioni precedenti. $y = t$ e $y = -t$ sono le ultime soluzioni: si ottengono per $k = 0$ e sono definite in $\mathbb{R}$.]

   (c) risolvi se possibile il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(0) = 0$.
   [Il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(0) = 0$ ammette due soluzioni: $y = t$ e $y = -t$, entrambe definite in tutto $\mathbb{R}$.]

4. Risolvi i problemi di Cauchy $\begin{cases} xy' = y^2 + 2y + 1 \\ y(e) = 4 \end{cases}$ e $\begin{cases} xy' = y^2 + 2y + 1 \\ y(e) = -1 \end{cases}$ precisando l'insieme di definizione delle soluzioni trovate. $\left[y_1 = -1 - \dfrac{1}{\log x - \dfrac{6}{5}} \text{ con } 0 < x < e^{\frac{6}{5}};\ y_2 = -1 \text{ con } x \in \mathbb{R}\right]$

   (a) Detta y_1 la soluzione del problema di Cauchy con $y(e) = 4$, quanto vale $\lim\limits_{x \to 0^+} y_1(x)$? $[-1]$

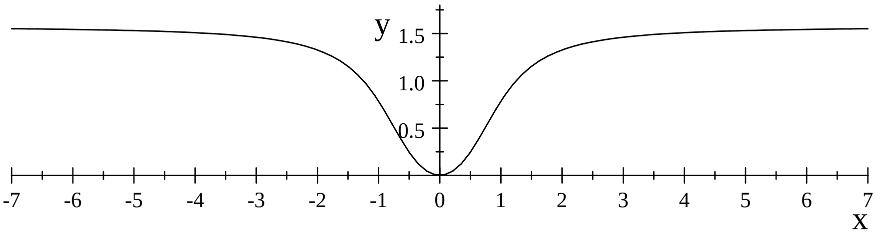
   (b) E' possibile prolungare la soluzione y_1 su tutto $\mathbb{R}$? [no]

5. *E' assegnata l'equazione differenziale $y' = 2t(\cos y)^2$:

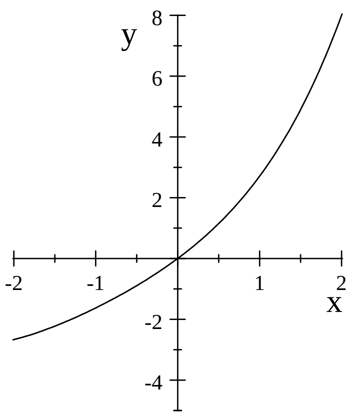
   (a) risolvi i relativi problemi di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = y_0$ con $y_0 = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}, \pi$;
   [L'equazione assegnata è a variabili separabili e ammette le soluzioni costanti $y(t) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ t \in \mathbb{R}$. Il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ ha perciò

soluzione $y(t) = \frac{\pi}{2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Il problema di Cauchy con condizione iniziale $y(1) = \frac{\pi}{4}$ ha soluzione $y(t) = \arctan\left(t^2\right)$ $\forall t \in \mathbb{R}$; con condizione iniziale $y(1) = \pi$ la soluzione è $y(t) = \arctan\left(t^2 - 1\right) + \pi$ $\forall t \in \mathbb{R}$.]

(b) disegna un grafico qualitativo nel caso $y_0 = \frac{\pi}{4}$. $\left[y(t) = \arctan\left(t^2\right) \ \forall t \in \mathbb{R}\right]$



6. ∗Disegna un grafico qualitativo in un intorno dell'origine della soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y'(x) = \cos(xy(x)) + e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}.$$



$\left[\text{Dall'equazione ricaviamo } y'(0) = 2,\ y''(0) = 1\right]$

7. Considera l'equazione differenziale: $y' = \frac{e^x}{ye^{-y^2}}$.

(a) Stabilisci, senza fare conti, se l'equazione ammette, su qualche intervallo, soluzioni costanti. [no]

(b) Determina tutte le soluzioni dell'equazione. $\left[y = \pm\sqrt{-\log\left(-2\left(e^x + c\right)\right)}\right]$.

(c) Risolvi il problema di Cauchy associato all'equazione con dato iniziale $y(0) = 1$, precisando l'insieme di definizione della soluzione e il suo comportamento agli estremi di tale insieme.
$$\left[\begin{array}{l} y = \sqrt{-\log\left(-2e^x + 2 + \frac{1}{e}\right)},\ \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right) < x < \log\left(1 + \frac{1}{2e}\right); \\ \lim\limits_{x \to \log\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2e}\right)^+} y(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \log\left(1 + \frac{1}{2e}\right)^-} y(x) = +\infty \end{array}\right]$$

8. ∗Data l'equazione differenziale $y'(x) = (y(x) + 1)\sin x$:

(a) risolvi il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(0) = y_0$, con $y_0 \in \mathbb{R}$; $\left[y(x) = (y_0 + 1)\, e^{1-\cos x} - 1\right]$

(b) determina per quali y_0 le soluzioni sono limitate in $\mathbb{R}$. [Tutte le soluzioni sono limitate $\forall y_0 \in \mathbb{R}$]

9. Risolvi il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y\cos x + xe^{\sin x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = e^{\sin x}\left(\frac{x^2}{2}+1\right),\ x \in \mathbb{R}\right]$

10. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{x^2}{y^2+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$, determina i valori di x soluzioni dell'equazione $y(x) = 0$, dove y è la soluzione del problema di Cauchy proposto. $\left[x = -\sqrt[3]{4}\right]$

11. Trova l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' = \dfrac{x}{y^2}$. Trova la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $y(4) = 3$ specificando il più ampio insieme in cui è definita. Traccia il grafico della funzione che soddisfa la condizione iniziale assegnata nell'intorno di $x = 4$. $\left[y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + c};\ c = 3,\ \mathbb{R};\text{ per il grafico di } y(x) \text{ occorrono } y'(4) = \frac{4}{9},\ y''(4) = -\frac{5}{3^5}\right]$

12. Determina l'integrale generale dell'equazione differenziale $y' + \dfrac{2}{x}y = 2x+1$ per $x > 0$. Determina la soluzione che si mantiene limitata per $x \to 0^+$. Determina la soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = 0$. $\left[y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{c}{x^2};\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x;\ y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{6x^2};\right]$

13. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = e^y - e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$, scrivi lo sviluppo di Taylor della soluzione arrestato al terzo ordine e disegna il grafico locale della soluzione in un intorno della condizione iniziale $x = 0$. [$T_3(y,0) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$; La soluzione passa per l'origine, è tangente all'asse x (punto di Max.) e ha la concavità rivolta verso il basso]

14. Dato il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \frac{2}{3}y(2-5y) \\ y(0) = -1 \end{cases}$, scrivi lo sviluppo di Taylor della soluzione arrestato al secondo ordine. $\left[T_2(y,0) = -1 - \frac{14}{3}x - \frac{56}{3}x^2\right]$

15. Equazione di Bernoulli: $y'(t) = a(t)y(t) + b(t)y^\alpha$. L'equazione ammette la soluzione costante $y = 0$, le altre soluzioni si ottengono (per $y \neq 0$) dividendo l'equazione per y^α e operando la sostituzione $z(t) = y(t)^{1-\alpha}$ si ottiene un'equazione lineare nella funzione incognita $z(t)$.

    (a) Risolvi l'equazione $y' = -\frac{1}{t}y - 2t^2y^2$ $\left[y(t) = 0,\ y(t) = \frac{1}{Ct+t^3};\ C \in \mathbb{R}\right]$

    (b) Risolvi il problema di Cauchy $\begin{cases} y' = \dfrac{2t}{1+t^2}y + 2t\sqrt{y} \\ y(1) = 2 \end{cases}$, precisando l'insieme di definizione della soluzione trovata.
    [$y(t) = \left(1+t^2\right)\left(1-\sqrt{2}+\sqrt{1+t^2}\right)^2$, $t \in \mathbb{R}$; Osservazione: per il calcolo del valore della costante C, corrispondente alla condizione iniziale assegnata, si è tenuto conto del fatto che $y \geq 0$, dunque anche $z \geq 0$ in quanto $z = \sqrt{y}$. Per z si ottiene: $z(t) = \sqrt{1+t^2}\left(\sqrt{1+t^2}+C\right) \Longrightarrow C \geq -1$]

    (c) Qual è l'ordine di infinito della soluzione per $t \to +\infty$? $\left[y(t) \sim t^4\right]$

16. $*$Trova una soluzione dell'equazione differenziale di Bernoulli: $y' = e^t y + y^{10}$. $[y = 0]$

17. $*$Considera l'equazione differenziale di Bernoulli: $y' = -\dfrac{y}{t} + 2y^2 \log t$.

   (a) Risolvi il problema di Cauchy con la condizione iniziale $y(1) = 1$ e determina il massimo intervallo di prolungabilità della soluzione. $\left[y = \dfrac{1}{t - t\log^2 t}, \quad \left(\dfrac{1}{e}, e\right)\right]$

   (b) Per quali valori di y_0 la soluzione del problema di Cauchy $y(1) = y_0$ è prolungabile all'intervallo $(0, +\infty)$? $[y_0 = 0]$

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono tratti da temi d'esame.