
Durata della prova: 1 h 30’

Esame di Logica e Algebra Politecnico di Milano – Ingegneria Informatica – 15 luglio 2019		
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

Esercizio 1

Data la formula $(A \wedge C) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$,

1) semplificarla e trasformarla in una che contenga solo i connettivi $\{\neg, \wedge\}$;
2) provare che è un teorema di L sia per via semantica, sia utilizzando la teoria della risoluzione;
3) utilizzando il risultato precedente verificare che la formula ben formata del primo ordine
$$(A_1^1(x) \wedge A_1^1(y)) \Rightarrow (\neg A_1^1(y) \Rightarrow \neg (\exists x) A_1^2(x, y))$$
è logicamente valida.

<u>Svolgimento</u>

1) $(A \wedge C) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B) \equiv \neg (A \wedge C) \vee (C \vee B) \equiv \neg A \vee \neg C \vee C \vee B \equiv \neg C \vee C \equiv \neg (C \wedge \neg C)$
2) Poichè la formula data è equivalente a $\neg C \vee C$ che è una tautologia, per il teorema di correttezza e completezza segue che la formula assegnata è un teorema di L.
La forma a clausole della negazione della formula assegnata è $C \wedge \neg C$ quindi si ottengono le clausole $\{ C \}$ e $\{ \neg C \}$ la cui risolvente è proprio la clausola vuota. Ciò conferma che la formula assegnata è un teorema di L.
3) La f.b.f. $(A_1^1(x) \wedge A_1^1(y)) \Rightarrow (\neg A_1^1(y) \Rightarrow \neg (\exists x) A_1^2(x, y))$ è logicamente valida in quanto è un esempio di tautologia. Infatti si ottiene a partire dalla tautologia $(A \wedge C) \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ effettuando le seguenti sostituzioni:
$A_1^1(x) \rightarrow A$ $\qquad$ $A_1^1(y) \rightarrow C$ $\qquad$ $\neg (\exists x) A_1^2(x, y) \rightarrow B$

Esercizio 2

Si consideri l'insieme X = {a,b,c,d,e} e la relazione binaria R su X rappresentata dal grafo

1) Si provi che R è transitiva e che non esiste nessuna relazione d'ordine su X contenente R.
2) Si costruisca la relazione di equivalenza S generata da R e si determini l'insieme quoziente X / S.
3) Si stabilisca se S coincide con la chiusura simmetrica della chiusura riflessiva e transitiva T di R.
4) Si considerino le seguente formule della logica del primo ordine :

$$a)\ (\forall x)(\forall y)((A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y,z)) \Rightarrow A_1^2(x,z)) \wedge (\exists x)(\exists y)\ ((A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y,z)) \Rightarrow A_2^2(x,y))$$

$$b)\ (\exists x)(\forall y)\ A_3^2(x,y) \wedge (\forall x)(\forall y)(A_3^2(x,y) \Rightarrow A_3^2(y,x))$$

Si stabilisca se a) è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme X e in cui la lettera predicativa A_1^2 è interpretata dalla relazione R su X e la lettera predicativa A_2^2 è interpretata dalla relazione di uguaglianza.
Si stabilisca altresì se b) è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme X e in cui la lettera predicativa A_3^2 è interpretata dalla relazione S su X.

<u>Svolgimento</u>

1) Scriviamo la matrice di incidenza di R e di R^2:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{R^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poiché $R^2 \subseteq R$ si ha che R è transitiva. Inoltre non può esistere nessuna relazione d'ordine su X contenente R in quanto R non è antisimmetrica poiché, ad esempio, (a, b) ∊ R e (b, a) ∊ R.

2) Costruiamo la chiusura riflessiva a simmetrica V di R:

$$M_V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e calcoliamo le potenze di V:

$$M_{V^2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{V^3}$$

Segue che

$$M_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi l'insieme quoziente è X / S = {$[a]_S$, $[c]_S$}, con $[a]_S$ = {a, b} e $[c]_S$ = {c, d, e}.

3) Poiché R è già transitiva, la sua chiusura riflessiva e transitiva corrisponde alla chiusura riflessiva W di R:

$$M_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e quindi la chiusura simmetrica W' di W è la seguente:

$$M_W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

che, come si può vedere, non coincide con S che invece è la chiusura transitiva della chiusura riflessiva e simmetrica di R.

4) La formula a) è vera nell'interpretazione assegnata in quanto è data dalla congiunzione di due formule vere. Infatti la formula $(\forall x)(\forall y)((A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y, z)) \Rightarrow A_1^2(x,z))$ è vera in quanto R soddisfa la proprietà transitiva. La f.b.f. $(\exists x)(\exists y)((A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y, z)) \Rightarrow A_2^2(x, y))$ è anch'essa vera in quanto qualunque sia l'assegnamento di valori alla variabile z, basta assegnare ad x ed y lo stesso valore per rendere soddisfatto il conseguente e pertanto l'intera implicazione è vera.
La formula b) è falsa in quanto è data dalla congiunzione di due formule di cui la seconda è vera (esprime la proprietà simmetrica di S) mentre la prima è falsa. Infatti la sottoformula $(\exists x)(\forall y)\, A_3^2(x, y)$ è falsa poiché non c'è nessun elemento che è in relazione con tutti gli altri.

Esercizio 3
Si consideri il seguente sottoinsieme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} : a, b \in Q, a \neq 0 \vee b \neq 0 \right\}$$

del gruppo GL(2, Q) delle matrici non singolari 2 × 2 a coefficienti razionali,
(a) Si provi che G è un gruppo rispetto all'usuale prodotto di matrici.
(b) Si stabilisca se G è gruppo abeliano.
(c) Si scriva in un opportuno linguaggio del primo ordine, che contenga tra i suoi simboli una lettera funzionale binaria f (x, y) e una lettera unaria g(x), una formula chiusa che dica che in un gruppo l'inverso del prodotto di due elementi è il prodotto degli inversi di ogni singolo elemento.
(d) Si dica se si tratta di una formula logicamente valida e se può essere soddisfacibile ma non vera.

Svolgimento

(a) Poiché GL(2, Q) è un gruppo rispetto all'usuale prodotto di matrici e G è un suo sottoinsieme, per provare che G è un gruppo possiamo applicare il criterio di caratterizzazione dei sottogruppi.

Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix} \in G$, allora l'inversa della matrice A è la matrice

$A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+ab-b^2} \cdot \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a \end{pmatrix}$ e quindi risulta:

$$A^{-1} \cdot B = \frac{1}{a^2+ab-b^2} \cdot \begin{pmatrix} a+b & -b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2+ab-b^2} \cdot \begin{pmatrix} aa'+ba'-bb' & ab'-ba' \\ -ba'+ab' & -bb'+aa'+ab' \end{pmatrix}$$

e quindi $A^{-1} \cdot B \in G$ poiché la matrice $\dfrac{1}{a^2+ab-b^2} \cdot \begin{pmatrix} aa'+ba'-bb' & ab'-ba' \\ -ba'+ab' & -bb'+aa'+ab' \end{pmatrix}$ ha gli elementi di posto (1,2) e (2,1) uguali e che, sommati tra di loro, danno come risultato l'elemento di posto (2,2). Per il criterio di caratterizzazione dei sottogruppi segue che G è sottogruppo di GL(2, Q).

(b) Siano $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix} \in G$, allora risulta:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'+bb' & ab'+ba'+bb' \\ ba'+ab'+bb' & bb'+aa'+ab'+ba'+bb' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} = B \cdot A$$

ed essendo $A \cdot B = B \cdot A$ segue che vale la proprietà commutativa e quindi G è un gruppo abeliano.

(c) Introduciamo una lettera predicativa binaria E che interpreti la relazione di uguaglianza, una lettera funzionale binaria f che interpreti l'operazione di moltiplicazione fra gli elementi del gruppo e una lettera funzionale unaria g che interpreti la funzione che ad ogni elemento del gruppo associa il suo inverso. Allora la formula richiesta è la seguente: $\forall x \forall y\ E(g(f(x,y)), f(g(x), g(y)))$.

(d) La formula trovata non è logicamente valida in quanto non è vera in un'interpretazione in cui il dominio è un gruppo non abeliano, infatti è noto dalla teoria che l'inverso del prodotto di due elementi di un gruppo è uguale al prodotto degli inversi dei due elementi scambiati di posto. Inoltre la formula trovata non può essere soddisfacibile ma non vera poiché si tratta di una formula chiusa.

N.B.: per un errore materiale, nel testo dell'esame non compariva il simbolo $\vee$ nella definizione dell'insieme G. Ovviamente nella correzione degli elaborati non si è tenuto conto di eventuali errori derivanti da tale fatto.