ESERCIZIO 1

Un sistema dinamico è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= \alpha x_2(t) \\
\dot{x_2}(t) &= -\beta x_1(t) - \gamma x_2(t) - \theta x_2^2(t) + \eta u^2(t) \\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t)
\end{aligned}$$

dove α, β, γ, θ, η sono costanti reali.

1. (1.0) Classificare il sistema

Sistema non lineare, ci sono termini quadratici
Tempo invariante, t non compare esplicitamente
SISO: $u \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$
ordine 2
strettamente proprio

2. (2.0) Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u} \geq 0$.

A tempo continuo, la condizione di equilibrio è $\dot{x} = 0$, allora:

$$\dot{x}_1 = \alpha \bar{x}_2 = 0$$

$$\dot{x}_2 = -\beta \bar{x}_1 - \gamma \bar{x}_2 - \theta \bar{x}_2^2 + \eta \bar{u}^2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_2 &= 0 \\ \bar{x}_1 &= \frac{\eta}{\beta} \bar{u}^2 \end{aligned}\right\}$$ c'è un unico equilibrio $\bar{x}_1 = \frac{\eta}{\beta}\bar{u}^2$, $\bar{x}_2 = 0$ $\quad \| \quad \bar{y} = \frac{\eta}{\beta}\bar{u}^2$

3. (2.0) Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u}$.

attorno al equilibrio

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & -\gamma - 2\theta \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & -\gamma \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta \bar{u} \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

$$\begin{bmatrix} \delta \dot{x}_1 \\ \delta \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2\eta \bar{u} \end{bmatrix} \delta u$$

$$\begin{bmatrix} \delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \emptyset \cdot \delta u$$

4. (2.0) Studiare la stabilità del sistema linearizzato trovato al punto precedente e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza, in funzione dei parametri α, β, γ, θ, η.

il polinomio caratteristico è $\det(\lambda I - A)$, allora

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & -\alpha \\ \beta & \lambda+\gamma \end{pmatrix} = \lambda^2 + \gamma\lambda + \alpha\beta = \emptyset$$

- Per il criterio di Routh il sistema linearizzato è asint. stabile se:

  $\gamma > \emptyset$ e $\alpha\beta > \emptyset$, cioè $\begin{cases}\gamma>0\\ \alpha>0\\ \beta>0\end{cases}$ o $\begin{cases}\gamma>0\\ \alpha<0\\ \beta<0\end{cases}$

  In questo caso anche il equilibrio del sistema non lineare è asint. stabile.
- se $\alpha = \emptyset$ o $\beta = \emptyset$, e $\gamma > \emptyset$, il sistema è semplicemente stabile e non si può dire nulla sul equilibrio del sistema nonlineare
- se $\gamma < \emptyset$, il sistema e il equilibrio sono instabili.

ESERCIZIO 2

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{10(s-5)}{s^2 + 22s + 40}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti.

1. (1.0) Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

poli: $p_1 = -20$, $p_2 = -2 \Rightarrow$ sistema asint. stabile

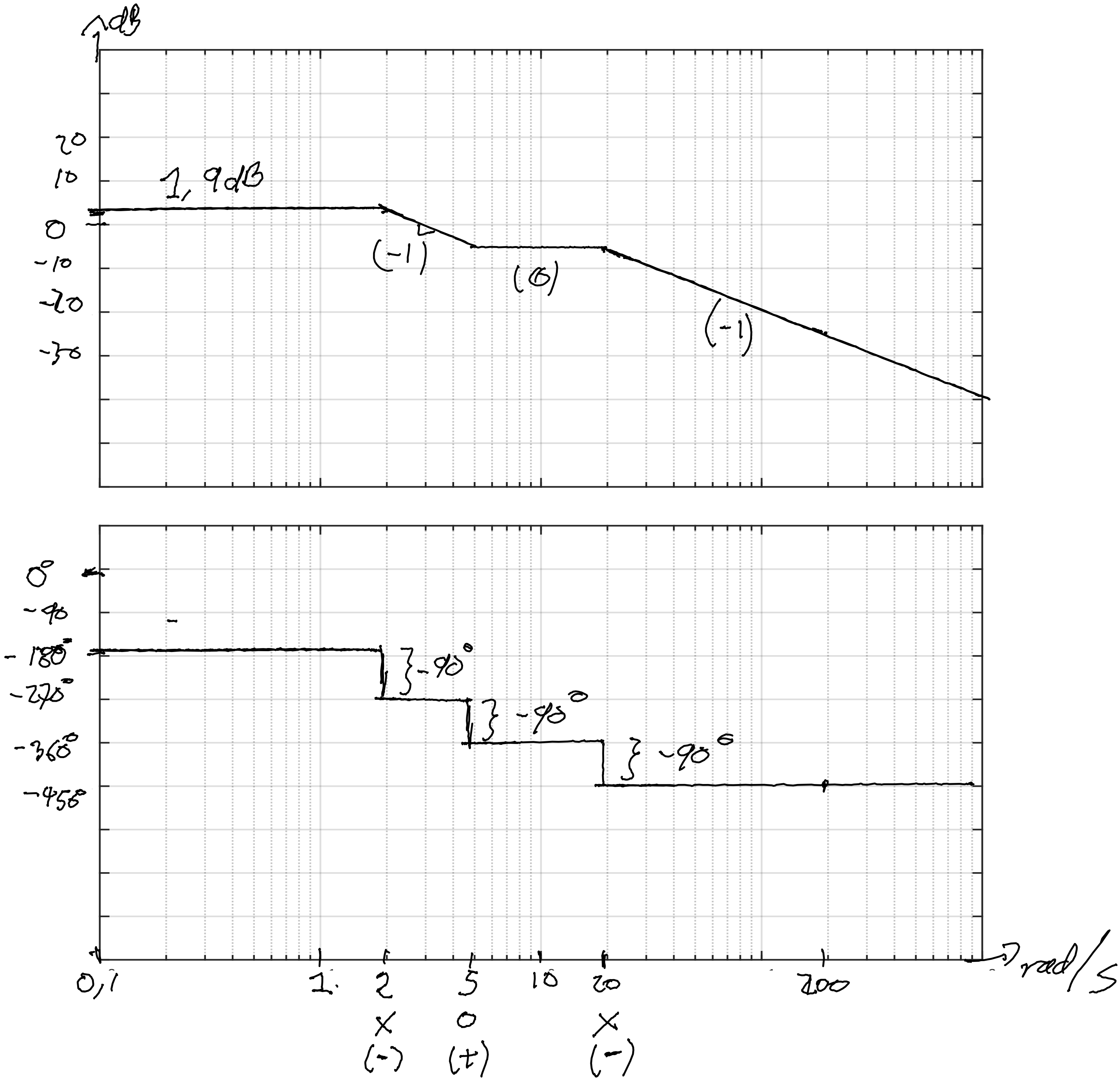
zeri: $z_1 = 5 \Rightarrow$ sistema a fase non minima.

guadagno: $G(\emptyset) = -5/4 = -1,25$, $|G(\emptyset)| = 1,9\,dB$

tipo: $\emptyset$; non ci sono poli in zero.

Guadagno negativo, allora $\arg(G(\emptyset)) = -180°$

2. (2.0) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.



3. (2.0) Determinare la risposta di regime $y(t)$ del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$, quando
a) $u_1(t) = 2\sin(0.1t)$
b) $u_2(t) = 5\sin(200t)$

$$\bullet\; Y_1^\infty(t) = 2\cdot|G(0{,}1j)|\cdot\sin\left(0{,}1t + \arg\left(G(0{,}1j)\right)\right)$$

$$\cong -2\cdot(5/4)\sin\left(0{,}1t - \pi\right)$$

$$Y_2^\infty(t) = 5\cdot|G(200j)|\sin\left(200t + \arg\left(G(200j)\right)\right)$$

$$\cong -5\cdot(0{,}05)\sin\left(200t - \frac{5}{2}\pi\right)$$

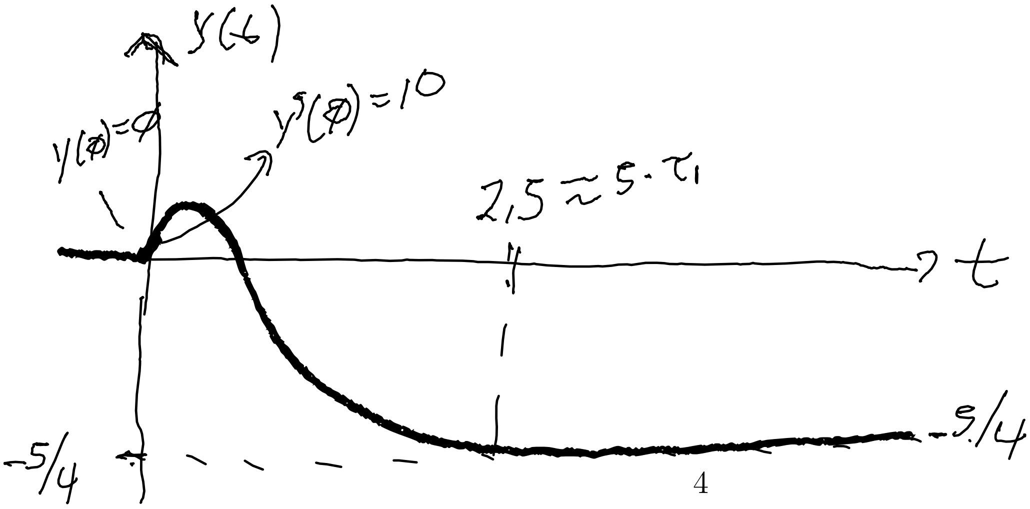
4. (2.0) Trovare analiticamente la **trasformata di Laplace** $Y(s)$ della risposta a uno scalino applicato come ingresso $u(t)$, determinando i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$. Tracciare *qualitativamente* la risposta. È possibile usare una approssimazione a polo dominante? giustificare la risposta.

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{10(s-5)}{s^2+22s+40}\cdot\frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \frac{-50}{(s+2)(s+20)\cdot s} + \frac{10\cdot s}{(s+2)(s+20)\,s}$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s) = 0;\quad y'(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot\left(s\cdot Y(s)\right) = 10$$

$$Y(\infty) = \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = -5/4$$



Costanti di tempo

$\tau_1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$

$\tau_2 = \frac{1}{20} = 0{,}05$

$\tau_3 = \frac{1}{5} = 0{,}2$

$\tau_1 \approx \tau_3$, allora

No polo dominante

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} p(k+1) = -p(k) - 0.5q(k) + u(k) \\ q(k+1) = q(k) + 1.5p(k) - u(k) \\ y(k) = q(k) - u(k) \end{cases}$$

1. (1.0) Classificare il sistema

SISO, Lineare, tempo invariante ordine 2, proprio.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 \\ 1,5 & 1 \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} ; \quad C = [0 \ 1], \quad D = [-1]$$

2. (2.0) Calcolare gli stati e l'uscita di equilibrio associati a $u(k) = \bar{u} = 2$.

In equilibrio $x(k+1) = x(k)$: $\bar{p} = -\bar{p} - 0,5\bar{q} + \bar{u}$

$\bar{q} = \bar{q} + 1,5\bar{p} - \bar{u}$

$\bar{y} = \bar{q} - \bar{u}$

$\bar{p} = \frac{2}{3}\bar{u} = \frac{4}{3}$

$\bar{q} = \frac{\bar{u} - 2\bar{p}}{0,5} = -4/3$

$\bar{y} = \bar{q} - \bar{u} = -\frac{10}{3}$

3. (2.0) Studiare la stabilità del sistema

Polinomio caratteristico: $\det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda+1 & 0,5 \\ -1,5 & \lambda - 1 \end{pmatrix} = \phi(\lambda)$

$\phi(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 ; \quad \lambda_{1,2} = \pm 0,5$

$|\lambda_{1,2}| = 0,5 < 1$, allora il sistema è asintoticamente stabile.

4. (2.0) Determinare gli autovettori del sistema e scrivere l'espressione della risposta libera quando lo stato iniziale appartiene a uno di essi.

autovettori: $(\lambda I - A)v = \emptyset$

$$\begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ -1,5 & -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \emptyset \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -1,5 & -1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \emptyset \Rightarrow \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

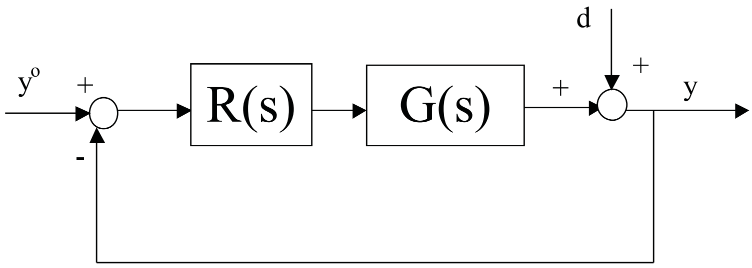
Risposta libera: $X_L^1 = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} (0,5)^k$; $X_L^2 = \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-0,5)^k$.

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{0.1}{(s+1)(s+0.1)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti e il sistema di controllo in figura:



1. (1.0) Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

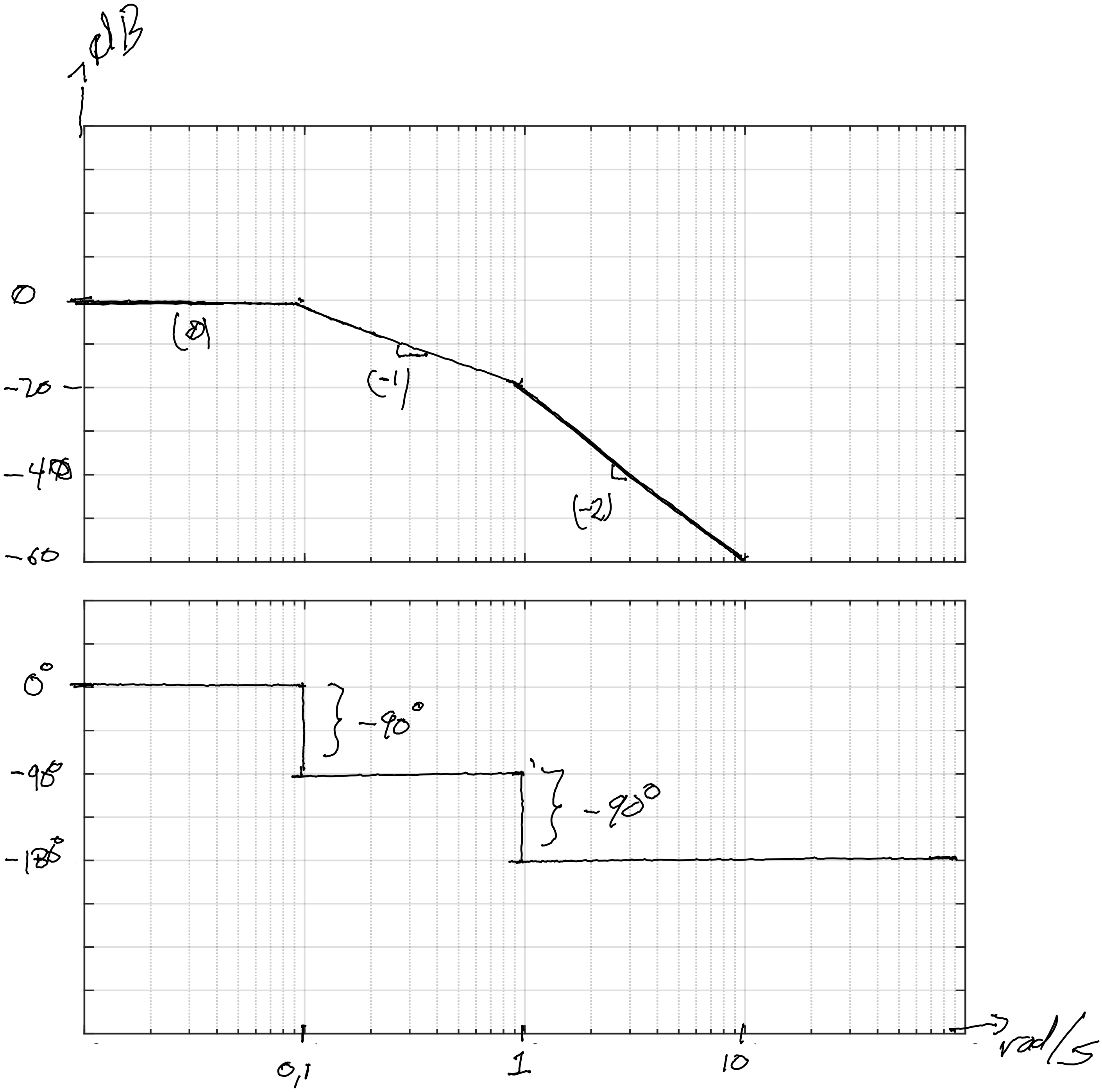
Poli: $p_1 = -1$; $p_2 = -0,1$ $\Rightarrow \mathrm{Re}(p_i) < \emptyset \Rightarrow$ sistema asint. stabile.

zeri: Non ci sono

tipo: $\emptyset$

guadagno: $G(\emptyset) = 1$

2. (2.0) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.



3. (3.0) Per il regolatore

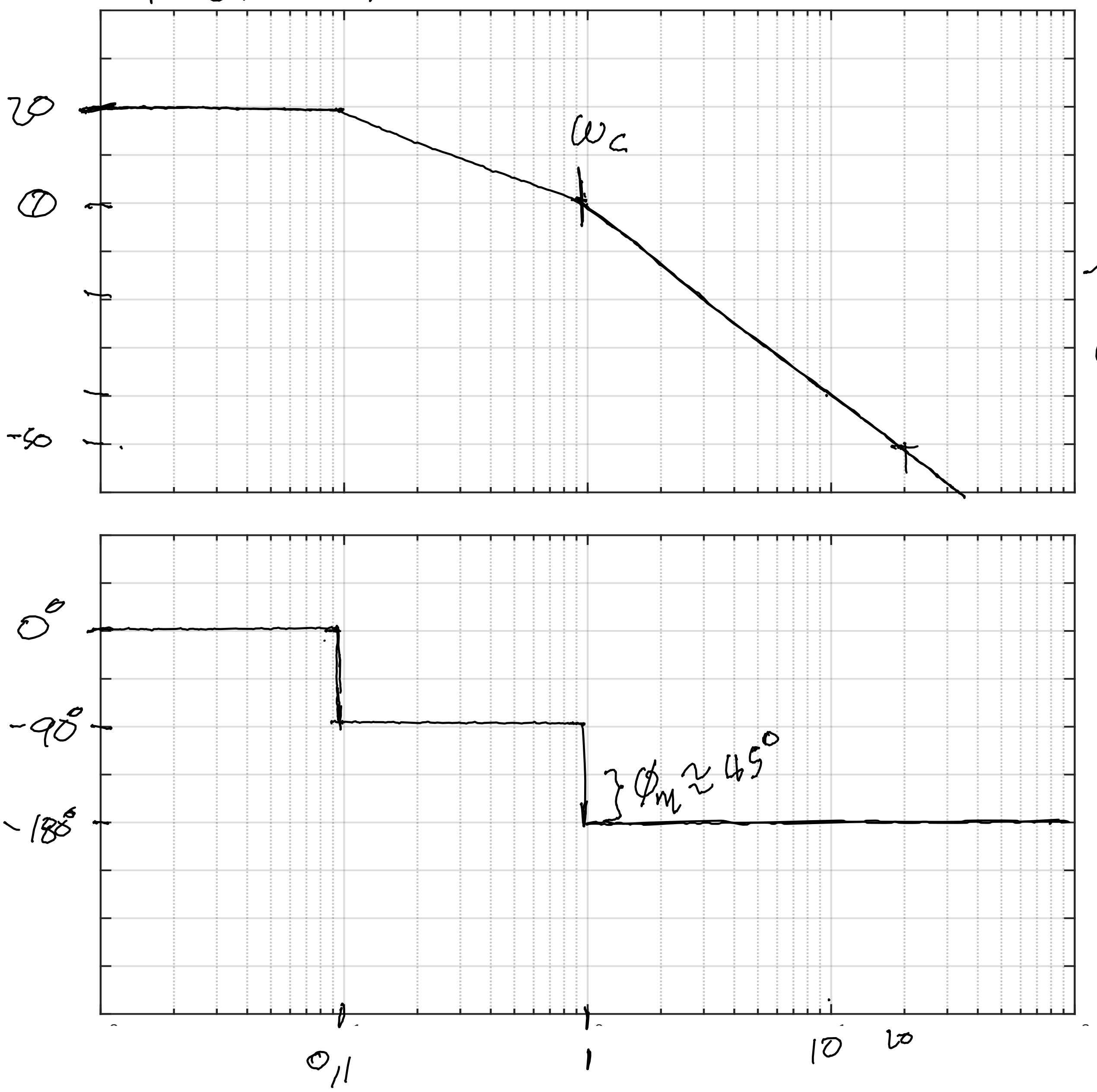
$$R(s) = k = 10$$

Verificare che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e determinare il margine di fase e di guadagno.

$$G(s) \cdot R(s) = \frac{10}{(s+1)\cdot(10 \cdot s+1)}$$

Guadagno 20dB

G(s) è asint. stabile, il diagramma di Bode attraversa l'asse a 0dB una volta sola, allora il sistema retroazionato è asint. stabile per il criterio di Bode perché $\phi_m > 0$ e $\mu > 0$.



$\phi_m \simeq 45^\circ$

$\mu_m = \infty$

$\omega_c = 1 rad/s$

Considerando il sistema retroazionato descritto al punto precedente rispondere:

4. (1.0) Determinare il valore di regime dell'errore $|e_\infty|$ a fronte di un ingresso a scalino del disturbo $d(t) = sca(t)$.

$$e_\infty = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot S(s) \cdot D(s) = \lim_{s\to 0} S(s) = \frac{1}{1+R(0)G(0)}$$

$$e_\infty = \frac{1}{1+10} \cong 0,0909$$ } sistema tipo 0, errore finito.

5. (2.0) Determinare quanto vale l'ampiezza di regime dell'uscita $|y_\infty|$ quando $y^0(t) = sca(t) - 2\sin(0.5t) + 5\sin(20t)$.

$$|y_1^\infty(t)| \cong |F(0)| = \left|\frac{L(0)}{1+L(0)}\right| \cong 1$$

$$|y_2^\infty(t)| \cong 2 \cdot |F(j0,5)|;\ 0,5 < \omega_c \Rightarrow |F(j\omega)| \cong 1$$

$$|y_3^\infty(t)| \cong 5 \cdot |F(j\cdot 20)|;\ 20 > \omega_c \Rightarrow |F(j\omega)| \cong |L(j\omega)| \cong 0,0032$$

$$|y^\infty(t)| \cong 1 + 2 + 0,016 = 3,016$$

6. (2.0) È possibile affermare che al aumentare il guadagno k del controllore $R(s)$ il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di un ingresso di riferimento $y_o(t) = sca(t)$ diminuisce, fino ad un valore massimo di k per il quale il sistema in anello chiuso risulta instabile? Giustificare la risposta.

É vero che al aumentare il guadagno K del controllore, il modulo dell'errore diminuisce per un ingresso di riferimento tipo scalino, perche $|L(0)|$ aumenta al crescere di K, ma, non é vero che ci sia un valore massimo di K per il quale il sistema risulta instabile perché il margine di guadagno é infinito.