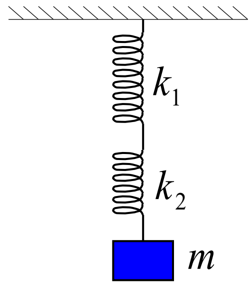
Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FISICA
Appello del 9 gennaio 2023

Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

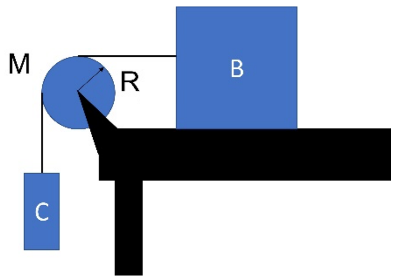
1.
Due molle ideali di costanti elastiche rispettive k_1 = 1000 N/m e k_2 = 2500 N/m sono collegate come mostrato in figura: l'estremità superiore della prima molla è fissata al soffitto, mentre l'estremità inferiore della seconda è vincolata ad un corpo di massa m = 10 kg.



a. Si determini l'allungamento di ciascuna molla quando il corpo è all'equilibrio; [2 punti]
b. Si dimostri che il sistema delle due molle è equivalente ad una sola molla di opportuna costante elastica e se ne determini l'espressione e il valore; [3 punti]
c. Si determini il periodo delle oscillazioni se la massa è spostata verticalmente dalla sua posizione di equilibrio. [3 punti]

2.
a. Si dia la definizione di centro di massa di un sistema di punti materiali. [2 punti]
b. Si enunci il teorema del centro di massa. [3 punti]
c. Si dimostri il suddetto teorema. [3 punti]

3.
I blocchi B e C sono legati l'uno all'altro da una fune di massa trascurabile che passa su una puleggia, costituita da un disco omogeneo di massa M e raggio R, libero di ruotare intorno al proprio asse, come riportato in figura. L'attrito tra il blocco B ed il tavolo e l'attrito della puleggia sono trascurabili.



Sotto l'ipotesi che la fune non slitti, determinare:
a. il modulo dell'accelerazione lineare dei blocchi; [5 punti]
b. le tensioni della fune tra la puleggia e i blocchi B e C. [3 punti]

Nota: Si esprimano le soluzioni in funzione di m_B, m_C (masse dei blocchi B e C, rispettivamente), M, R e g (accelerazione di gravità terrestre), ricordando che il momento d'inerzia di un disco omogeneo rispetto ad un asse baricentrico ortogonale al disco stesso è dato dall'espressione $I = ½\, M\, R^2$.

4.
Una macchina termica che lavora tra due sorgenti di calore con temperature T_1 = 300 K e T_2 = 600 K fornisce una potenza media P = 10 W con un rendimento pari alla metà di quello di una macchina di Carnot che utilizzi le stesse sorgenti.
a. Si calcoli il calore scambiato con ciascuna delle sorgenti in un minuto di funzionamento (supponendo che in tale intervallo di tempo la macchina compia un numero intero di cicli). [3 punti]
b. Si determini la corrispondente variazione di entropia delle sorgenti, della macchina e dell'universo. [3 punti]
c. Basandosi sui risultati ottenuti al punto b, si dica se le trasformazioni in gioco sono reversibili o no, argomentando la risposta, e si discuta infine se il risultato ottenuto è conforme al teorema di Carnot. [2 punti]

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FISICA
Appello del 9 gennaio 2023

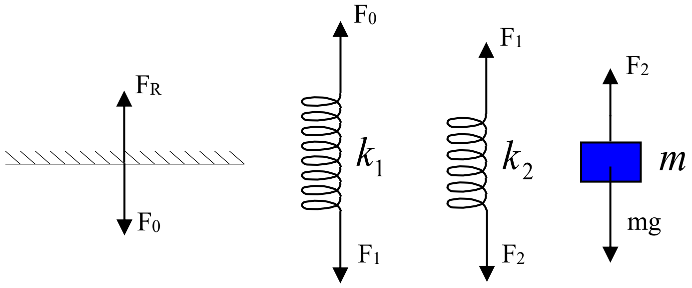
Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

Soluzioni

1.

a.

Applicando il principio di azione e reazione possiamo rappresentare i diagrammi a corpo libero di ciascun elemento del sistema.



Poiché il corpo di massa m si trova, per ipotesi, all'equilibrio, anche le due molle devono esserlo, quindi avremo:

$F_2 = mg$, $F_1 = F_2 = mg$, $F_0 = F_1 = mg$, $F_R = F_0 = mg$.

Quindi all'equilibrio la forza applicata da due molle in serie tra loro è la stessa per ciascuna molla, e varranno le relazioni:

$F_1 = k_1 \Delta x_1 = mg$, e $F_2 = k_2 \Delta x_2 = mg$, da cui rispettivamente otteniamo gli allungamenti:

$\Delta x_1 = mg \,/\, k_1$ e $\Delta x_2 = mg \,/\, k_2$.

Sostituendo i valori numerici otteniamo $\Delta x_1 = 9.8$ cm, e $\Delta x_2 = 3.9$ cm.

b.

In base al punto precedente, la forza elastica applicata dalle molle è la stessa, diciamola F.

L'allungamento complessivo del sistema elastico formato dalle due molle è dato da $\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$.

Dunque per tale sistema possiamo definire una costante elastica equivalente, detta k, tale da soddisfare la relazione costitutiva della molla (legge di Hooke):

$$F = k\,\Delta x.$$

Sostituendo le equazioni precedenti, abbiamo:

$F = k\,\Delta x = k\,(\Delta x_1 + \Delta x_2) = k\,(F_1/k_1 + F_2/k_2) = k\,(F/k_1 + F/k_2)$.

Semplificando k ad ambo i membri ricaviamo quindi $\Delta x = F\,(1/k_1 + 1/k_2)$, e dunque

$$F = \frac{1}{(1/k_1 + 1/k_2)}\Delta x.$$

Identifichiamo così l'espressione della costante elastica del sistema delle due molle in serie:

$$k = \frac{1}{(1/k_1 + 1/k_2)} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

Sostituendo i valori numerici si ottiene $k = 714.3$ N/m.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

c.
A questo punto il problema è ricondotto al ben noto caso elementare di un oscillatore formato da un corpo di massa *m* vincolato ad una molla di costante elastica *k*. Si trova così immediatamente la frequenza di risonanza:

$$\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

da cui il periodo:

$$T = \frac{1}{\upsilon} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$$

Sostituendo i valori numerici otteniamo $T = 0.743$ s.

3.
Il sistema si muove sotto accelerazione (da calcolare): il corpo C scende lungo la verticale, la puleggia ruota in senso antiorario ed il corpo B si sposta orizzontalmente verso sinistra.
Consideriamo l'approccio con diagramma a corpo libero e scriviamo le equazioni cardinali per i tre corpi: i corpi *B* e *C* di masse rispettivamente m_B ed m_C, e la puleggia di momento d'inerzia I.
Il corpo C è sottoposto all'attrazione di gravità e alla tensione della fune T_C:

$$m_C\, g - T_C = m_C\, a \tag{1}$$

Il corpo B è messo in moto sotto l'azione della tentione T_B:

$$T_B = m_B\, a \tag{2}$$

La puleggia ruota senza slittamento rispetto alla fune:

$$R\,(T_C - T_B) = I\,(a/R) \tag{3}$$

L'equazione 3 ha un'espressione particolarmente semplice perché i momenti sono, in modulo, massimi.

a.
La differenza ($T_C - T_B$) si ottiene come differenza fra le equazioni 1 e 2, e sostituita nell'equazione 3 fornisce:

$$(T_C - T_B) = m_C\, g - (m_C + m_B)\, a = I\, a / R^2 \tag{4}$$

Dall'equazione 4 possiamo calcolare l'accelerazione complessiva del sistema:

$$a = m_C\, g / (m_C + m_B + I / R^2) \tag{5}$$

Sostituendo infine l'espressione del momento d'inerzia, $I = ½\, M\, R^2$, otteniamo infine:

$$a = 2\, m_C\, g / (2m_C + 2m_B + M) \tag{5}$$

b.
Avendo trovato l'accelerazione del sistema, per sostituzione nelle equazioni 1 e 2, possiamo rispettivamente calcolare le tensioni T_C e T_B. In particolare risulta:

$$T_C = [(m_B + I/R^2)/(m_C + m_B + I/R^2)]\, m_C\, g = [(2m_B + M)/(2m_C + 2m_B + M)]\, m_C\, g,$$

$$T_B = [m_B / (m_C + m_B + I/R^2)]\, m_C\, g = [2m_B / (2m_C + 2m_B + \mathrm{M})]\, m_C\, g.$$

4.

a.

Il lavoro prodotto in Δt = 60 secondi è pari a:

$$L = P \cdot \Delta t = 10W * 60s = 600\,J$$

Da cui, usando la definizione di rendimento di una macchina termica

$$\eta = \frac{L}{Q_2}$$

otteniamo

$$Q_2 = \frac{L}{\eta}$$

Per definizione, il rendimento della macchina di Carnot operante tra le stesse temperature è dato da:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{300K}{600K} = 0.5$$

Il rendimento della macchina risulta quindi essere

$$\eta = 0.5\eta_c = 0.25$$

Per cui, per il calore assorbito da T_2 si ottiene

$$Q_2 = \frac{600J}{0.25} = 2400J$$

Usando il primo principio sulla macchina termica, e considerando che lavora per cicli ($\Delta U = 0$), si ottiene che

$$L = Q_2 + Q_1$$

il calore ceduto a T_1 è quindi pari a

$$Q_1 = L - Q_2 = -1800J$$

b.

L'entropia dell'universo è data da

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_M$$

Siccome la macchina lavora per cicli e l'entropia è una funzione di stato, $\Delta S_M = 0$. La variazione di entropia della prima sorgente è invece data da

$$\Delta S_1 = \frac{-Q_1}{T_1} = \frac{1800J}{300K} = 6\frac{J}{K}$$

Allo stesso modo, per la seconda sorgente si ottiene

$$\Delta S_2 = \frac{-Q_2}{T_2} = \frac{-2400J}{600K} = -4\frac{J}{K}$$

Da cui, risulta una variazione di entropia dell'universo pari a

$$\Delta S_u = 6\frac{J}{K} - 4\frac{J}{K} = 2\frac{J}{K}$$

c.

Visto che l'entropia dell'universo è positiva, almeno una delle trasformazioni in gioco non è reversibile e la macchina termica non è reversibile. Questo risultato è concorde con quanto predetto dal teorema di Carnot. Il fatto che il rendimento della macchina termica sia metà di quello della macchina di Carnot associata permette di affermare, senza bisogno di conti aggiuntivi, che la macchina in esame non è reversibile. Se fosse reversibile, infatti, il suo rendimento sarebbe identico a quello della macchina di Carnot operante tra le due stesse temperature.