Analisi Matematica 2 - 10 gennaio 2019

Prof. E. Maluta

Cognome: Nome:
Matricola: Compito B

1. (Punti 7) Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \log\left(x(x^2+y^2+2y)\right).$$

Determinare e disegnare l'insieme di definizione A di f e precisarne le proprietà topologiche;

dire dove f è continua, dove è differenziabile; determinare $Sup_A f$ e $Inf_A f$;

scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,f(2,1))$;

verificare che l'unico punto stazionario di f su A è $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-1\right)$;

stabilire, possibilmente senza calcolare l'Hessiano, se il punto stazionario è punto di massimo, di minimo o di sella.

2. (Punti 6) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t} + 2.$$

Data poi l'equazione differenziale

$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^2 + 2,$$

(a) determinarne l'integrale generale, precisando l'insieme di definizione e l'eventuale prolungabilità a tutto $\mathbf{R}$ delle soluzioni;

(b) stabilire quali sono i possibili valori di $\lim_{t\to+\infty}\psi(t)$ al variare di ψ nell'insieme delle soluzioni.

3. (Punti 5) Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 : 0 \le x \le 1 \wedge 0 \le y \le x^3 \wedge 0 \le z \le x\}$. Calcolare

$$\int_\Omega e^y\sqrt{x^2-z^2}\,dxdydz\,.$$

(Si consiglia, dopo aver scritto la formula per l'integrale iterato, di utilizzare la sostituzione $z = xt$.)

AN. MAT. 2

PROF. E. MALUTA

20/01/2020

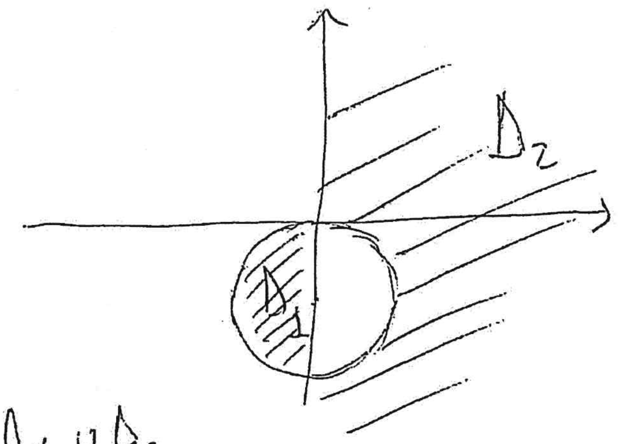
SVOLGIMENTO

COMPITO $\underline{B}$

1) $f(x,y) = \log\left(x\left(x^2+y^2+2y\right)\right)$

C.E. $x\left(x^2+y^2+2y\right) > 0$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2+y^2+2y > 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2+y^2+2y < 0 \end{cases}$$



$x^2+(y+1)^2 = 1$

circonf. $r = 1$

$C = (0,-1)$

C.E. $\Rightarrow$ tratteggiato, frontiera esclusa.

$D = D_1 \cup D_2$

$f \in C^\infty(D)$ - D aperto, illimitato, non connesso

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2+y^2+2y}{x\left(x^2+y^2+2y\right)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{15}{14}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2xy+2x}{x\left(x^2+y^2+2y\right)} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$$

piano tangente

$$z = f(2,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1)$$

$$z = \log 14 + \frac{15}{14}(x-2) + \frac{4}{7}(y-1)$$

$$15x + 8y - 14z + \log 14 - 14 = 0$$

— —

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2+y^2+2y = 0 \\[2ex] 2x(y+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(y+2) = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -2 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{non accett. } (\text{in } \partial\Delta)$$

oppure

$$\begin{cases} 3x^2 = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -1 \end{cases} \ \text{non acc. } \notin \Delta \quad \vee \quad \begin{cases} x = +\frac{1}{\sqrt{3}} \\ y = -1 \end{cases} \in \Delta$$

Poiché per $(x,y) \to \partial\Delta$, $f(x,y) \to -\infty$

per $(x,y) \to \infty$, $f(x,y) \to +\infty$

si ha $\sup\limits_{\Delta} f(x,y) = +\infty$ $\qquad \inf\limits_{\Delta} f(x,y) = -\infty$

Detto $D_1 = \{(x,y) : x<0 \wedge x^2+y^2+2y<0\}$

$\lim_{(x,y)\to\partial D_1} f(x,y) = -\infty$. Essendoci in D_1 l'unico punto stazionario $P \equiv \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -1\right)$, P deve essere un punto di massimo locale.

(2) $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda = 1 \wedge \lambda = 2$

$\varphi(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$

$\psi_1(t) = Ate^{2t} \qquad \psi_1'(t) = (A + 2At)e^{2t} \qquad \psi_1''(t) = (4A + 4At)e^{2t}$

$4A + 4At - 3A - 6At + \cancel{2At} = 1 \qquad A = 1$

$\psi_1(t) = te^{2t}$

$\psi_2(t) = B \qquad 2B = 2 \qquad B = 1$

$\underline{\psi(t)} = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t} + te^{2t} + 1$

Eq. di Eulero $\quad t \neq 0 \quad$ pongo a

$z'' - 3z' + 2z = e^{2\tau} + 2 \qquad \tau = \log|t|$

$z(\tau) = c_1 e^{\tau} + c_2 e^{2\tau} + \tau e^{2\tau} + 1$

$\psi(t) = c_1 t + c_2 t^2 + \log|t| \cdot t^2 + 1$

prolungabile di classe C^1 su $\mathbb{R}$ ponendo $\psi(0) = 1$

$\lim_{t \to +\infty} \psi(t) = \lim_{t \to +\infty} \log|t| \cdot t^2 = +\infty \qquad \forall c_1, c_2$

3

(Si consiglia, dopo aver scritto la formula per l'integrale iterato, di utilizzare la sostituzione $z = xt$.) SOLUZIONE Ponendo $z = xt$ (oppure $z = x \sin t$), si ha

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^3} e^y \int_0^x \sqrt{x^2 - z^2}\, dzdydx = \int_0^1 x^2 \int_0^{x^3} e^y \int_0^1 \sqrt{1 - t^2}\, dtdydx =$$

$$\frac{\pi}{4} \int_0^1 x^2 \left(e^{x^3} - 1\right) dx = \frac{\pi(e-2)}{12}.$$