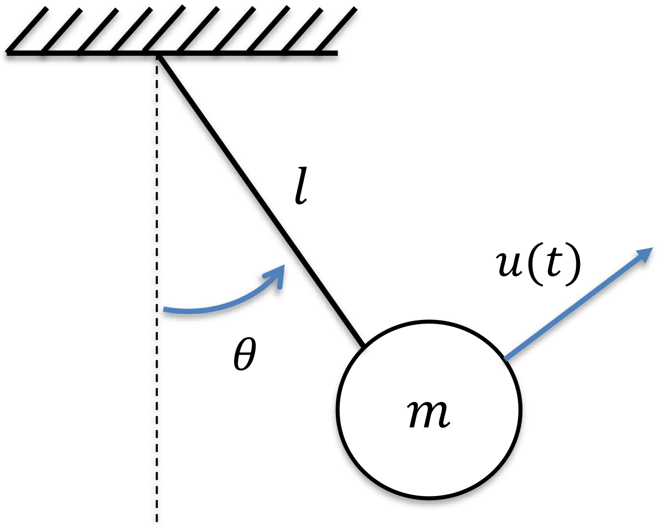
Fondamenti di Automatica – A.A. 2023/2024

Esercitazione 04: Sistemi non lineari e sistemi a tempo discreto

Ingegneria Informatica
Prof. Fredy Ruiz

Milano, 26 Marzo 2024

Esempio di sistema dinamico non lineare
Pendolo



Variabili di stato: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$

Posizione angolare del pendolo

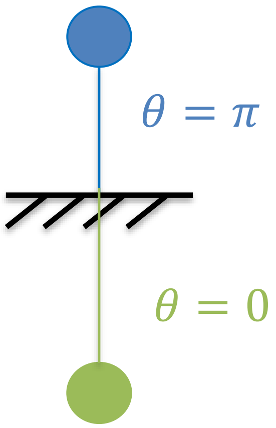
Velocità angolare del pendolo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l}\sin\big(x_1(t)\big) - \frac{\beta}{ml}x_2(t) + \frac{1}{mg}u(t) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f\big(x(t), u(t)\big) \\ y(t) = g\big(x(t), u(t)\big) \end{cases}$$

- Equilibrio (ossia uno stato costante) $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}$

  associato all'ingresso $\mathrm{u}(t) = \bar{u} = 0 \rightarrow$ Non è applicata nessuna forza



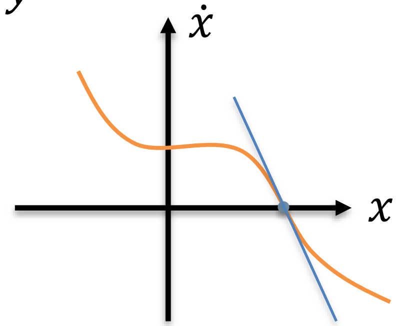
$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \frac{\boldsymbol{dx}(\boldsymbol{t})}{\boldsymbol{dt}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{g}{l}\sin(\bar{x}_1) - \frac{\beta}{ml}\bar{x}_2 + \frac{1}{mg}\bar{u} \\ \bar{y} = \bar{x}_1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\dot{\theta}} \end{bmatrix} \begin{matrix} \nearrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \searrow \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Esempio di sistema dinamico non lineare
Pendolo

- **Linearizzazione attorno all'equilibrio** → cerco un approssimazione lineare del comportamento del sistema INTORNO all'equilibrio

- Definisco delle nuove **variabili** che indicano lo **scostamento dall'equilibrio**

$$\delta x(t) = x(t) - \bar{x} \qquad \delta u(t) = u(t) - \bar{u} \qquad \delta y(t) = y(t) - \bar{y}$$

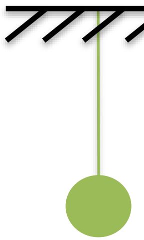


- Descrivo il comportamento LINEARIZZATO dello scostamento dall'equilibrio

$$\begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A_{lin}\delta x(t) + B_{lin}\delta u(t) \\ \delta y(t) = C_{lin}\delta x(t) + D_{lin}\delta u(t) \end{cases}$$

$$A_{lin} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad B_{lin} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial u(t)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial u(t)} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad C_{lin} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial y(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial y(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} \qquad D_{lin} = \left.\frac{\partial y(t)}{\partial u(t)}\right|_{\bar{x},\bar{u}}$$

Esempio di sistema dinamico non lineare
Pendolo



- Sistema linearizzato attorno al primo equilibrio $\begin{bmatrix} \bar{x}_{11} \\ \bar{x}_{21} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\dot{\theta}} \\ \bar{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$A_{lin} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_2(t)} \\ \frac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_1(t)} & \frac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos(\bar{x}_1) & -\frac{\beta}{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml} \end{bmatrix}$$

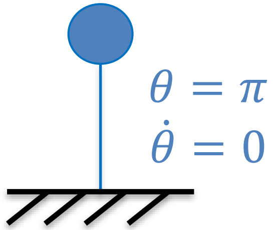
$$\det(\lambda I - A_{lin}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{g}{l} & \lambda + \frac{\beta}{ml} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{\beta}{ml}\lambda + \frac{g}{l}$$

$\rightarrow$ IL SISTEMA LINEARIZZATO E' ASINTOTICAMENTE STABILE
(nota: i parametri fisici g, m, l, β sono sempre > 0)

Data una condizione iniziale $\delta x(0) = x(0) - \bar{x}$ $\longrightarrow$ Se mi scosto dall'equilibrio (perturbo l'equilibrio)

per $t \to \infty$ $\quad \delta x_L(t) \to 0$

e dato che $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ per $t \to \infty$ $\quad x(t) \to \bar{x}$ $\longrightarrow$ Il sistema torna all'equilibrio



- Sistema linearizzato attorno al secondo equilibrio $\begin{bmatrix}\bar{x}_{12}\\ \bar{x}_{22}\\ \bar{u}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{\theta}_1\\ \dot{\bar{\theta}}\\ \bar{u}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$$A_{lin} = \left.\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_1(t)} & \dfrac{\partial \dot{x}_1(t)}{\partial x_2(t)} \\ \dfrac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_1(t)} & \dfrac{\partial \dot{x}_2(t)}{\partial x_2(t)} \end{bmatrix}\right|_{\bar{x},\bar{u}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{l}\cos(\bar{x}_1) & -\dfrac{\beta}{ml} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{g}{l} & -\dfrac{\beta}{ml} \end{bmatrix}$$

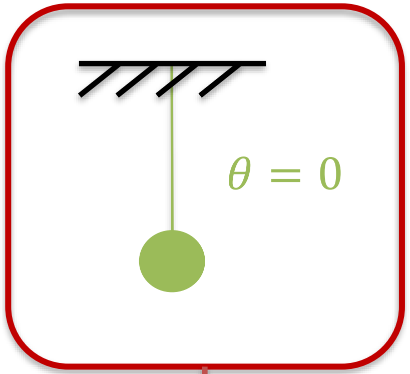
$$\det(\lambda I - A_{lin}) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -\dfrac{g}{l} & \lambda + \dfrac{\beta}{ml} \end{bmatrix}\right) = \lambda^2 + \frac{\beta}{ml}\lambda - \frac{g}{l}$$ $\rightarrow$ IL SISTEMA LINEARIZZATO E' INSTABILE

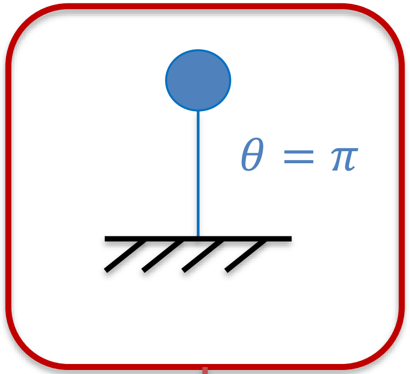
Data una condizione iniziale $\delta x(0) = x(0) - \bar{x}$ $\longrightarrow$ Se mi scosto dall'equilibrio (perturbo l'equilibrio)

per $t \to \infty$ $\quad \delta x_L(t) \to \infty$

e dato che $\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$ per $t \to \infty$ $\quad x(t) - \bar{x} \to \infty$ $\longrightarrow$ Il sistema si allontana dall'equilibrio

Esempio di sistema dinamico non lineare
Pendolo



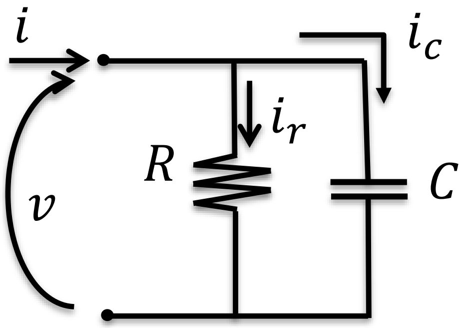


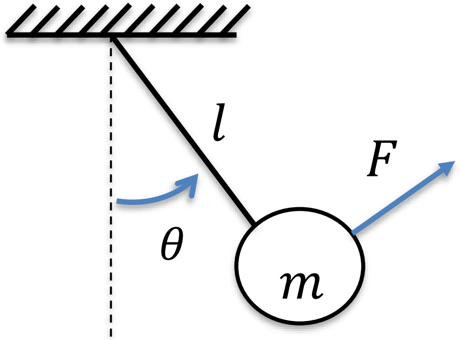
Equilibrio asintoticamente stabile

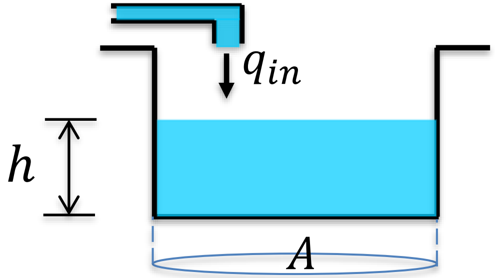
Equilibrio instabile

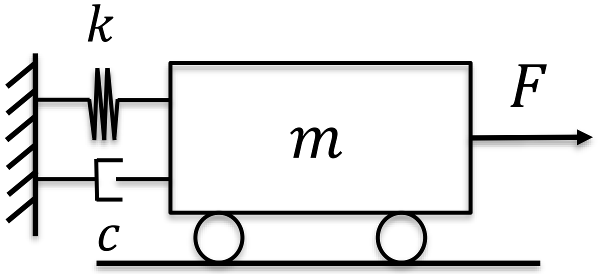
Quando abbiamo un sistema non lineare parleremo di stabilità/instabilità degli equilibri del sistema non lineare o del sistema linearizzato e NON di stabilità del sistema non lineare

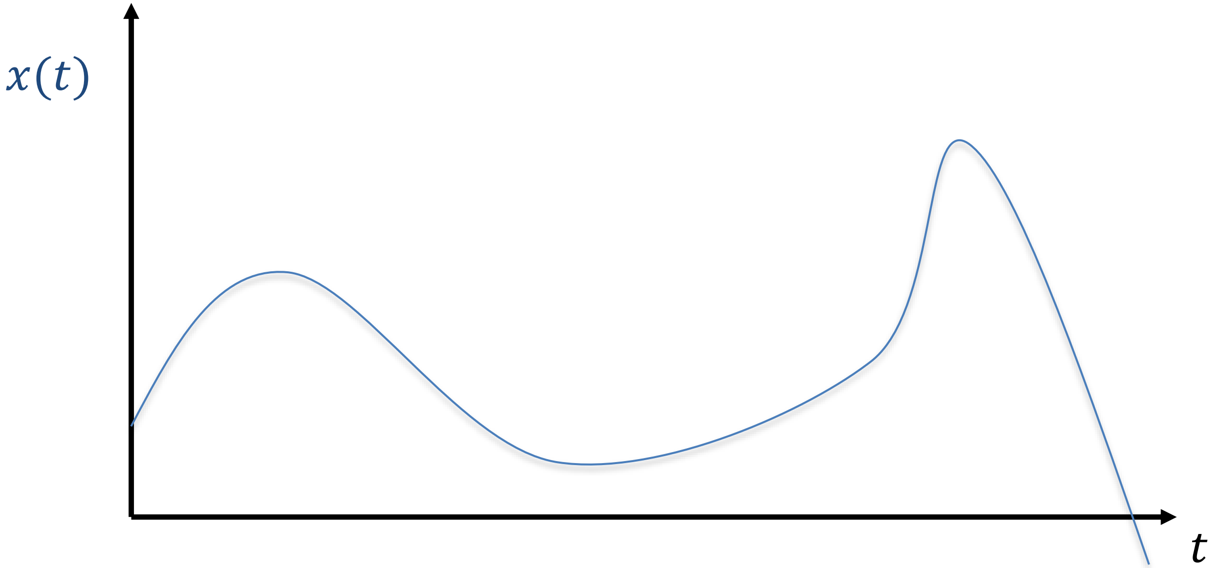
Sistemi a tempo continuo





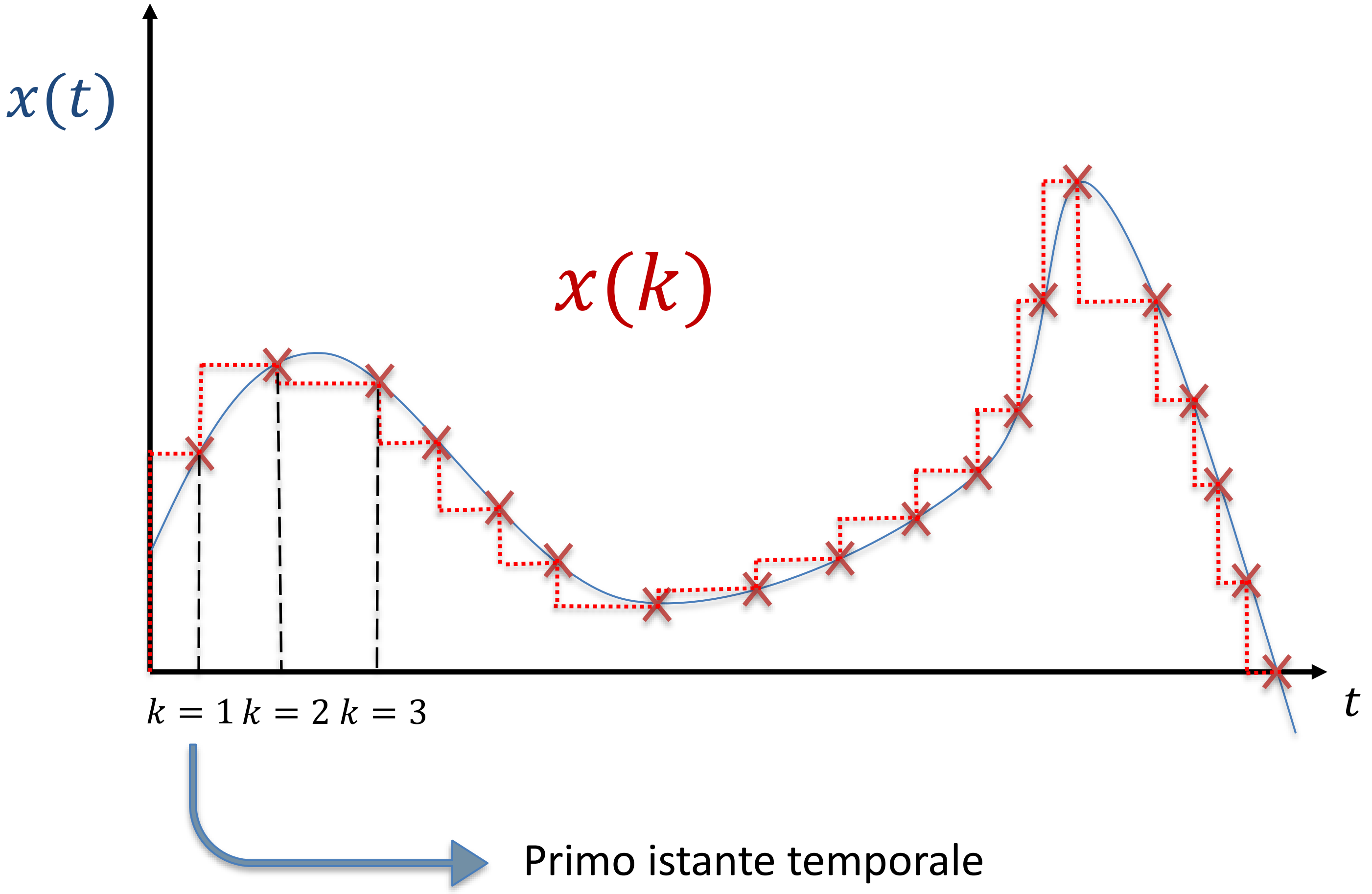






Tempo $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}$

Discretizzazione di un sistema a tempo continuo



Tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

discretizzazione

Tempo discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$

Sistemi a tempo discreto

Si consideri una popolazione di bruchi e farfalle. Ad ogni intervallo di tempo accadono i seguenti eventi:

- Tutti i bruchi diventano farfalle
- Si genera una popolazione di bruchi in misura proporzionale alla popolazione di farfalle, con costante di proporzionalità pari a α
- La popolazione di farfalle decade con un tasso di mortalità β (compreso tra 0 e 1)

Si consideri la dinamica degli studenti in un corso triennale. Siano $x_1(k)$, $x_2(k)$, $x_3(k)$ il numero di iscritti al 1°, 2°, 3° anno dell'anno accademico k.

- $u(k)$: il numero di studenti che superano l'esame di maturità nell'anno k e si iscrivono nell'anno $k+1$;
- $y(k)$: il numero di laureati nell'anno k;
- $\alpha_i \in [0,1]$: tasso degli studenti promossi nell'i-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\beta_i \in [0,1)$: tasso degli studenti ripetenti nell'i-esimo anno di corso ($i \in \{1,2,3\}$);
- $\forall i \in \{1,2,3\}$, $\alpha_i + \beta_i \leq 1$, ossia $1 - \alpha_i - \beta_i$ rappresenta il tasso di abbandono all'anno i.

Alcuni sistemi sono <u>intrinsecamente descritti a tempo discreto</u>.
Ad esempio tutti quei sistemi che presentano variabili intere o una discretizzazione intrinseca del tempo (ad esempio una popolazione, un tasso di interesse, un volume di produzione ..)

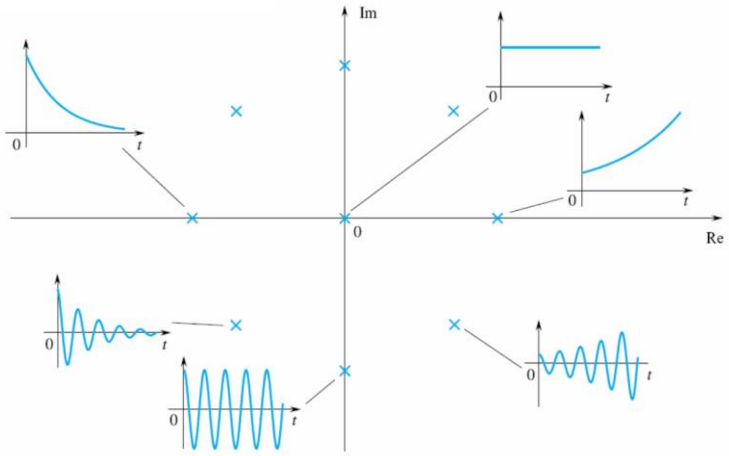
Confronto sistemi a tempo continuo-discreto

- **Tempo** $t \in \mathbb{R}$
- **Spazio di stato**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned}$$

- **Stabilità**

$$\begin{aligned} \mathbb{Re}(\lambda) < 0 \quad &\rightarrow \quad Asintotica\ stabilità \\ \mathbb{Re}(\lambda) = 0 \quad &\rightarrow \quad Stabilità\ semplice \\ \mathbb{Re}(\lambda) > 0 \quad &\rightarrow \quad Instabilità \end{aligned}$$

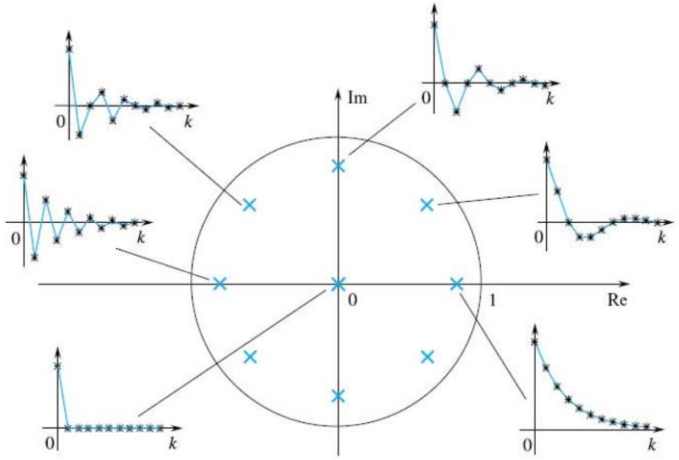


- **Tempo** $k \in \mathbb{N}$
- **Spazio di stato**

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned}$$

- **Stabilità**

$$\begin{aligned} |\lambda| < 1 \quad &\rightarrow \quad Asintotica\ stabilità \\ |\lambda| = 1 \quad &\rightarrow \quad Stabilità\ semplice \\ |\lambda| > 1 \quad &\rightarrow \quad Instabilità \end{aligned}$$



Confronto sistemi a tempo continuo-discreto

- **Modi**

$$e^{\lambda t}, \qquad te^{\lambda t}, \qquad \frac{t^2}{2}e^{\lambda t} \dots$$

- **Equilibrio** (dato $u(t) = \bar{u} \rightarrow \bar{x}$)

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

- **Formula di Lagrange**

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

- **Modi**

$$\lambda^k, \qquad k\lambda^k, \qquad \frac{k^2}{2}\lambda^k \dots$$

- **Equilibrio** (dato $u(k) = \bar{u} \rightarrow \bar{x}$)

$$x(k+1) = x(k) \qquad \rightarrow \qquad \bar{x} = (I - A)^{-1}B\bar{u}$$

- **Formula di Lagrange**

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1}Bu(i)$$