Fondamenti di Automatica

Corso di laurea in Ingegneria Informatica, AA 2023/2024

Esercitazione del 27/05/2024

Prof. Fredy Ruiz

Responsabile delle esercitazioni: Mattia Alborghetti

Esercizio 1

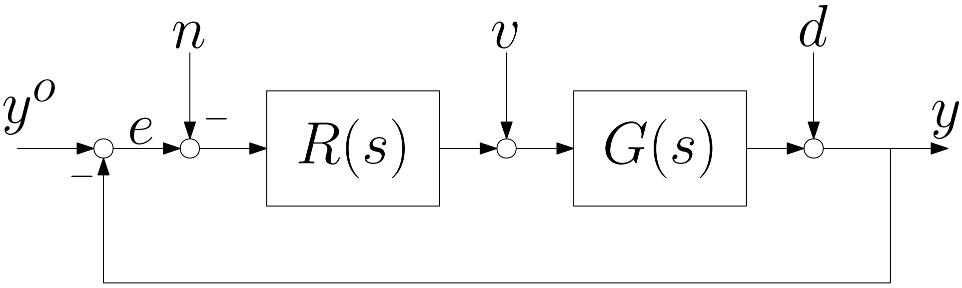


Figura 1: Schema di controllo.

Si consideri il sistema retroazionato in figura, dove $G(s) = \frac{1}{(1+10s)(1+0.001s)^2}$.

1.1. Progettare $R(s) = K\left(1 + \frac{1}{sT_I}\right)$ (regolatore PI) in modo che:

- Attenuazione di $d(t) = 0.1\sin(\bar{\omega}t)$ con $\bar{\omega} < 10\,rad/s$ di almeno un fattore 10
- Errore di regime nullo quando $y^o(t) = \text{sca}(t)$
- $\omega_c > 10\,rad/s$

Esercizio 2

Si consideri il sistema a tempo continuo:

$$G(s) = \frac{1}{s(0.01s + 1)}$$

collegato come indicato nella seguente figura:

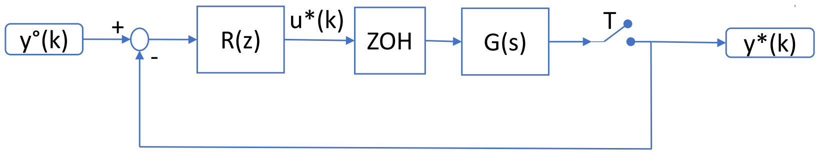


Figura 2: Schema di controllo.

2.1. Analizzare la stabilità del sistema ad anello chiuso per $R(z) = k$ con $k > 0$, al variare del tempo di campionamento T

2.2. Per $T = 1.3$ e $k = 1.3$ determinare le principali caratteristiche della risposta allo scalino unitario.

Esercizio 3

Si consideri il sistema a tempo continuo:

$$G(s) = \frac{17}{s(0.25s + 1)} \tag{1}$$

3.1. Progettare un controllore $R(s)$ che garantisca un margine di fase $\phi_m \geq 45°$ e $\omega_c \geq 125 rad/s$.

3.2. Scegliere un tempo di campionamento adeguato per la discretizzazione del controllore

3.3. Determinare regolatori digitali equivalenti con i metodi di Eulero e Tustin.

$\boxed{1}$ $\underline{G(s)}$

tipo : $g = 0$

poli : $p_1 = -0,1$, $p_{2,3} = -1000$

guadagno : $\mu = 1$

$\Rightarrow$ $G(s)$ A. STAB. in anello aperto

PROGETTO $R(s)$ con PI

Traduzione specifiche statiche

- Attenuazione di $d(t) = 0,1 \sin(\overline{\omega} t)$ con $\overline{\omega} < 10$ rad/s di un fattore almeno 10

$\hookrightarrow$ $|e_\infty^d| \leq 0,01$

$$\frac{E(j\omega)}{D(j\omega)} < \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{S(s)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} \simeq \frac{1}{L(s)} < \frac{1}{10}$$

$\uparrow$

$\bar{\omega} < \omega_c$ [$\omega_c > 10\,rad/s$]

$$\Longrightarrow \; L(s) > \underset{\underset{20\,dB}{\shortparallel}}{10}$$

- $|e_\infty^{y_o}| = 0$ per $y^o(t) = sca(t)$

$\Longrightarrow$ $L(s)$ tipo 1

$\Longrightarrow$ $R(s)$ tipo 1

$$R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{K}{T_I}}\left(\frac{T_I s + 1}{s}\right)$$

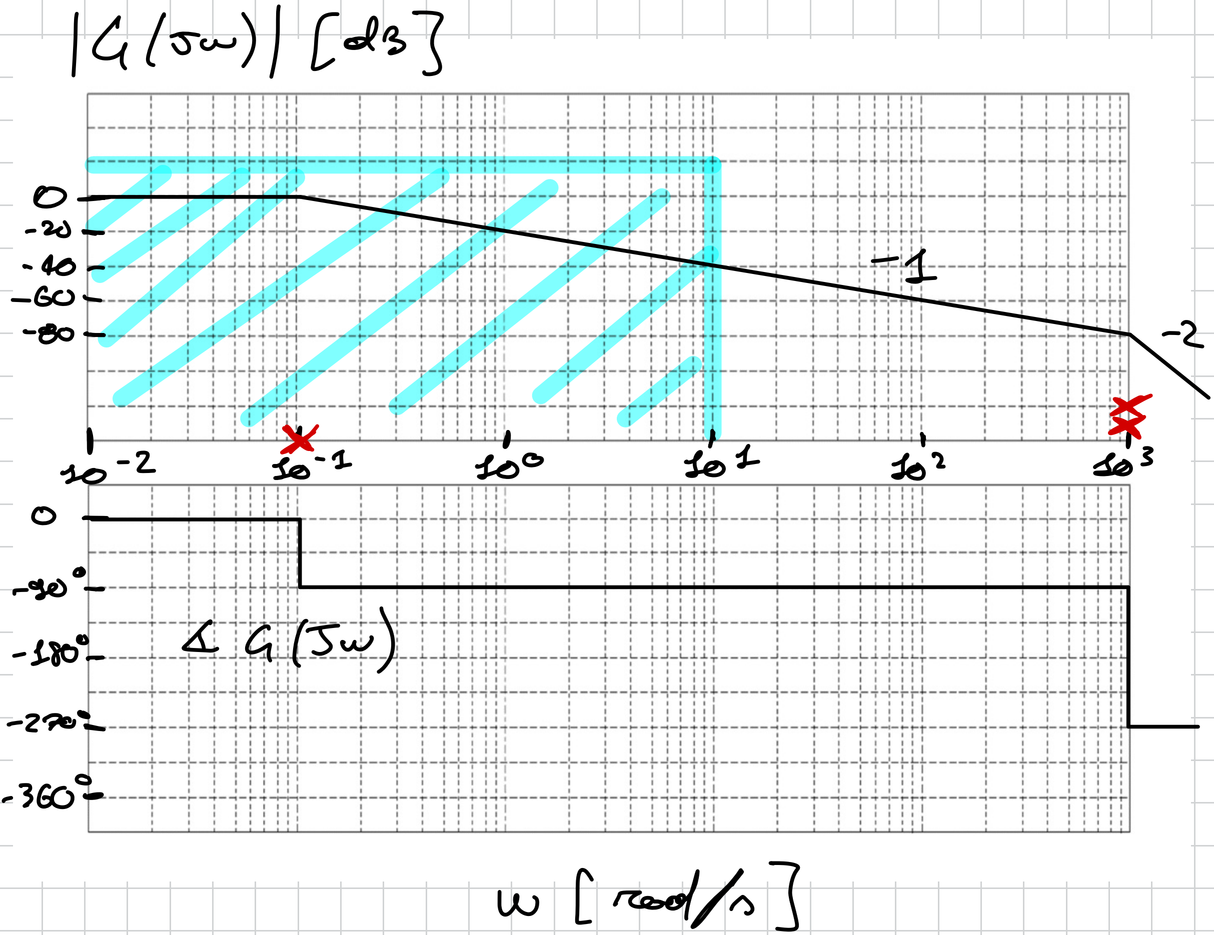
guadagno

polo in $s = 0$

zero in $s = -1/T_I$

(Esattamente come classico regolatore con 1 zero e il guadagno: 2 parametri)

$$L(s) = \frac{K}{T_I} \frac{T_I s + 1}{s(1+10s)(1+0{,}001s)^2}$$



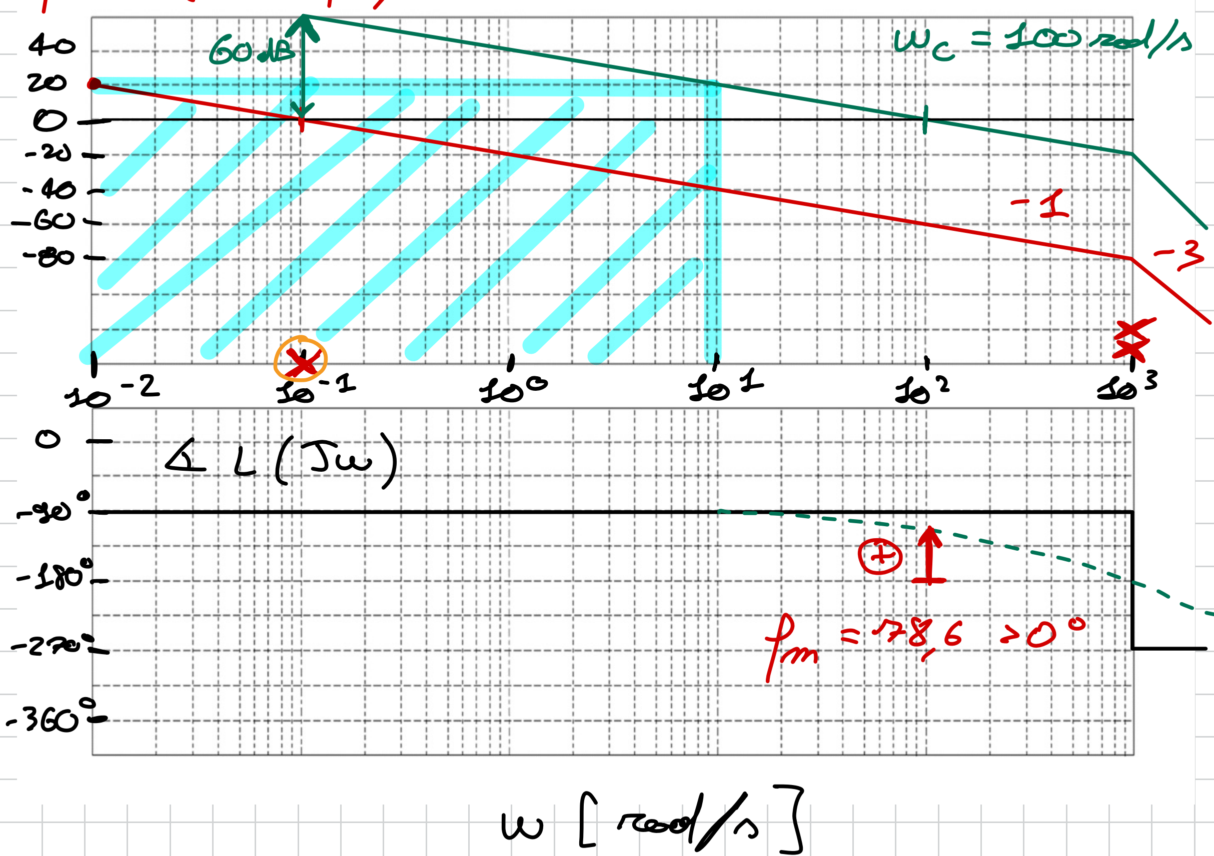
PROPOSTA: correzione dinamica "lenta"

$\Rightarrow \quad T_I = 10$ per cancellazione polo - zero

$$\Rightarrow \quad R = \frac{K}{10} \frac{(1+10s)}{s}$$

$$L = \frac{K}{10} \frac{1}{s\left(1+10^{-3}s\right)^2}$$

$|L(j\omega)|$, $K=1$, $K=10^3$



$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{K = 10^3}}$$ → scalto "alzando il grafico"

$$\varphi_c(j\,100) = -90° - 2\angle\left(1 + \frac{1}{10}\,s\right)$$

$$= -90° - 2\,\operatorname{atan}\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$= -90° - 11{,}4°$$

$$= -101{,}4°$$

$$\varphi_m = 180 - |-101{,}4°| = 78{,}6°$$

2

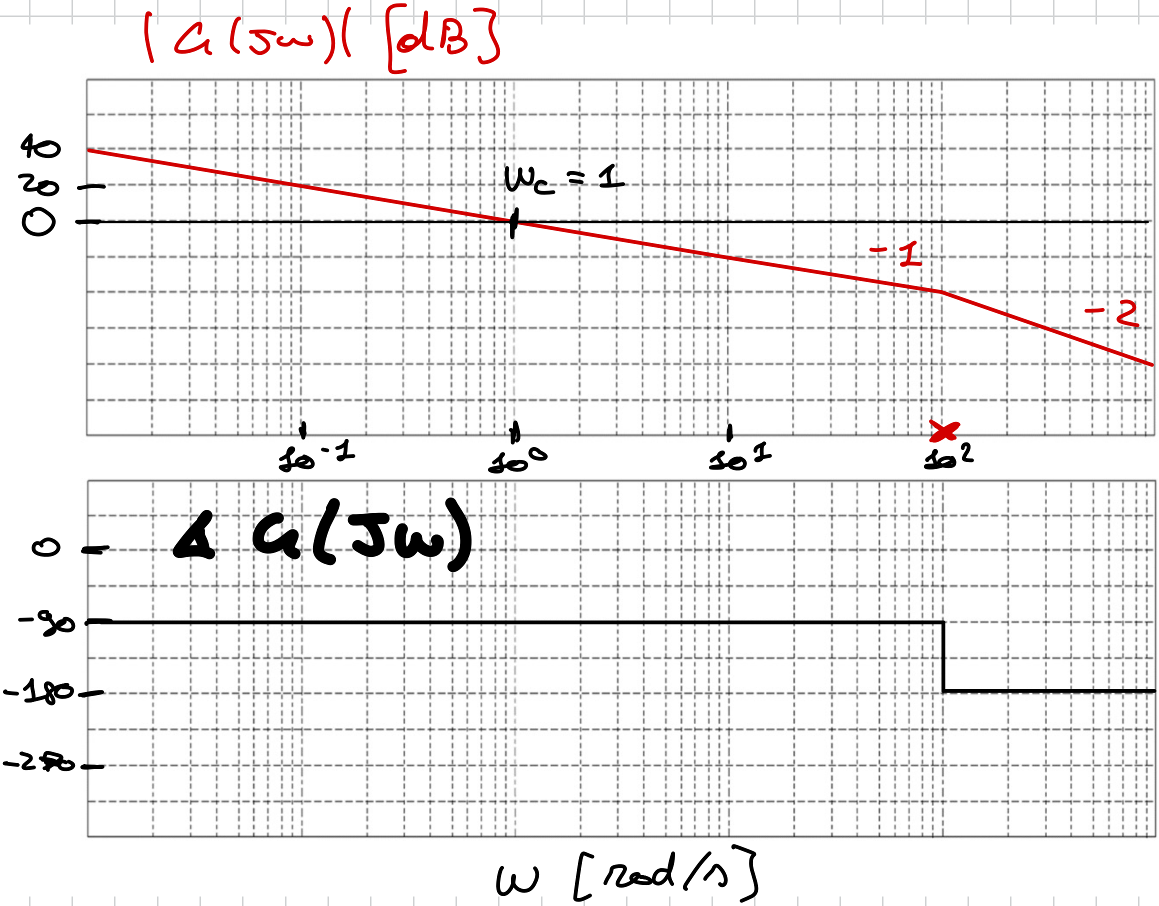
$$G(s) = \frac{1}{s(0{,}01s + 1)}$$

1)

TIPO: $g = 1$

polo: $p_1 = -100$

guadagno: $\mu = 1$



$$\varphi_c = \angle G(j1) = -90^\circ - \angle(0{,}1j+1)$$

$$= -90^\circ - \operatorname{atan}(0{,}01) \cong -90^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ| = 90^\circ$$

$K_m = \infty$, ω_π non definita

MODELLIAMO RITARDO INTRODOTTO DA ZOH

$$R(s) = \frac{1}{T} H_0(s) R^*(e^{sT}) \qquad H_0 = \frac{1-e^{-sT}}{s}$$

per banda $[0, \omega_N]$ $\qquad H_0 \simeq T e^{-\frac{T}{2}s}$

ω_N ↳ Nyquist, non è ω_c!

$$\tilde{L}(s) = K \frac{1}{s(0{,}01s+1)} \cdot e^{-\frac{T}{2}s}$$

$$\tilde{\varphi}_m = \varphi_m - \omega_c \frac{T}{2} \cdot \frac{180}{\pi}$$

in [°]

verifichiamo guadagno stabilità

↳ $L(s) = \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{K}\, G(s)$

$\Rightarrow$ guardiamo il margine di fase !

$$\boxed{\omega_\pi} \qquad \angle L(j\omega_\pi) = -180^\circ$$

svolgiamo in radianti

$$\underbrace{-\cancel{j\omega_\pi}}_{-\frac{\pi}{2}} - \underbrace{\operatorname{atan}\left(\frac{0{,}01\,\omega_\pi}{1}\right)}_{\sim 0} - \omega_\pi \frac{T}{2} = -\pi$$

$$-\omega_\pi \frac{T}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_\pi = \frac{\pi}{T}$$

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = \omega_\pi$$

$$|L(j\omega_\pi)| = \frac{1}{\omega_\pi \cdot |0{,}01\,j\omega_\pi + 1|}$$

$$= \frac{1}{\omega_r \cdot \cancel{\sqrt{\frac{\omega_r^2}{10^4} + 1}}}$$

$T = 1\,s$ $\qquad \omega_r = 3{,}14$ rad/s

$\qquad K_m = 3{,}14 \simeq 9{,}94$ dB

$T = 5\,s$ $\qquad \omega_r = 0{,}62$ rad/s

$\qquad K_m = 0{,}62 \simeq -4{,}03$ dB

$T = 0{,}1\,s$ $\qquad \omega_r = 31{,}4$ rad/s

$\qquad K_m = 31{,}4 \simeq 29{,}94$ dB

$T = 0{,}5\,s$ $\qquad K_m = 6{,}28 \simeq 16$ dB

2) $T = K = 1,3$

$$\tilde{L}(s) = \frac{1,3}{s(0,01s+1)}\, e^{-\overbrace{0,65}^{T/2}\, s}$$

$$\omega_c = 1,3 \text{ rad/s}$$

$$\tilde{\varphi}_m = \varphi_m - \omega_c \cdot \frac{T}{2} \cdot \frac{180}{\pi} =$$

$$= 90 - \underbrace{1,3 \cdot 0,65 \cdot \frac{180}{\pi}}_{48,4^\circ} = 41,6^\circ$$

$\tilde{\varphi}_m < 75^\circ \Rightarrow$ RISPOSTA DEL SECONDO ORDINE $\quad y_0 \rightarrow \boxed{F(s)} \rightarrow y$

$$\xi_F = \frac{\varphi_m}{100} \simeq 0,41 \longrightarrow$$

$$S\% = e^{\frac{-\pi \xi_F}{\sqrt{1-\xi_F^2}}} \cdot 100$$

$$\simeq 24\%$$

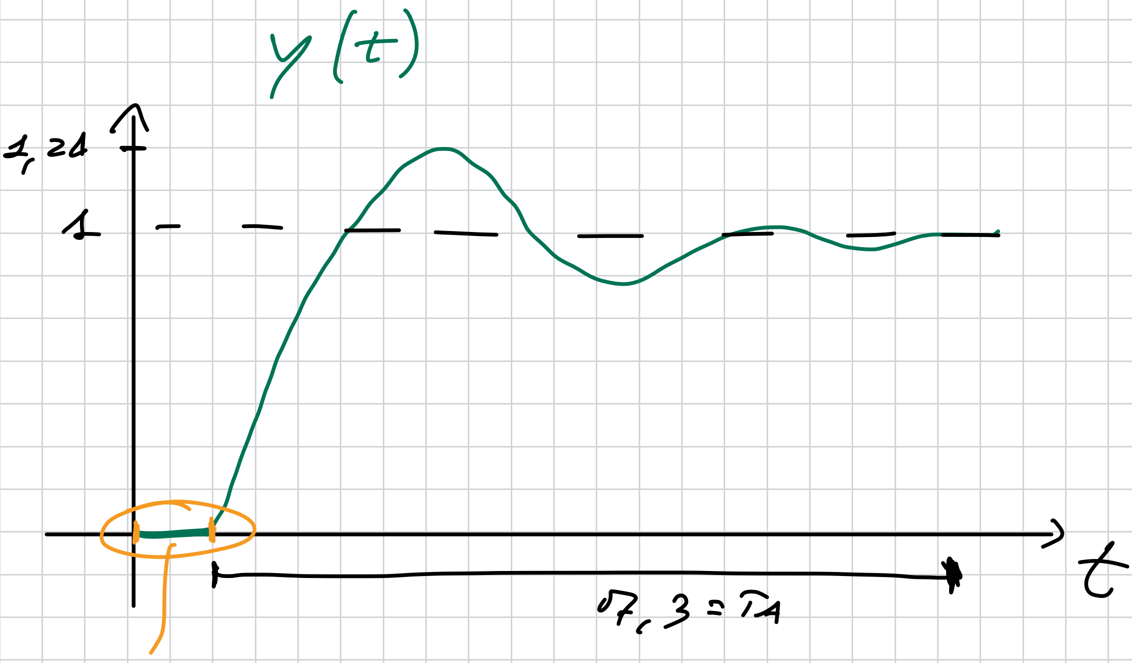
NOTA:

Ricordiamo che $\frac{\varphi_m}{100}$ per ξ_F è un'approssimaz. Per valori più precisi è opportuno utilizzare

$$\xi_F = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right)$$

$$\mu_F = 1 \quad (g_L > 0)$$

$$T_A = \frac{5}{\xi_F \cdot \omega_c} = 7{,}3\ s$$



$$\frac{T}{2} = 0{,}65$$ → RITARDO INTRINSECO INTRODOTTO DAL CAMPIONATORE!

$\boxed{3}$

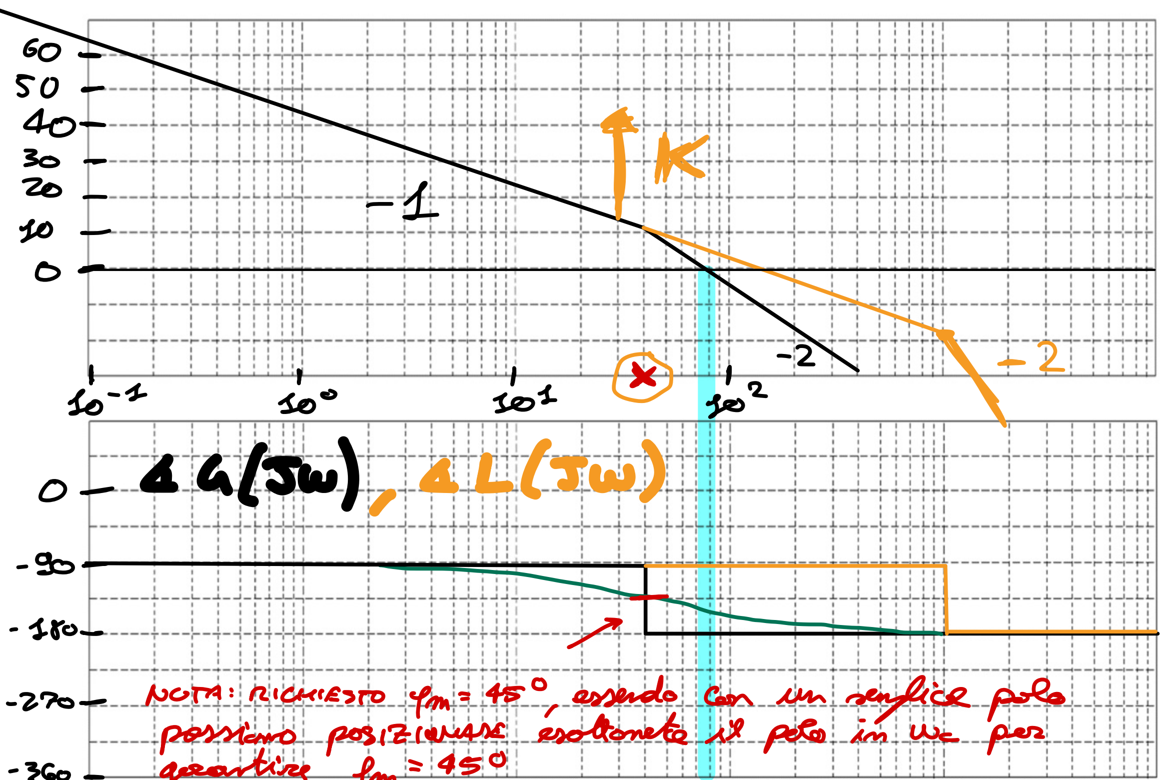
$$G(s) = \frac{17}{s(0{,}25s+1)}$$

1) TIPO: $g = 1$

polo: $p_1 = -4$

GUADAGNO: $\mu_a = 17 = 24{,}6\ dB$

$|G(j\omega)|\ [dB]$ $\quad |L(j\omega)|\ [dB]$



NOTA: RICHIESTO $\varphi_m = 45°$, essendo con un semplice polo possiamo posizionare esattamente il polo in ω_c per garantire $\varphi_m = 45°$

ω [rad/s]

$$R(s) = K \frac{(0{,}25\, s + 1)}{\left(\boxed{\frac{1}{125}}\, s + 1\right)}$$

fissare ω_c

annullare polo $G(s)$

in modo da garantire $\varphi_m = 45°$

$$L^*(s) = L(s) = \frac{17K}{s} \, \frac{1}{\left(\frac{1}{125} s + 1\right)}$$

$$\boxed{K} \quad \left| R(j\bar{\omega})\, G(j\bar{\omega}) \right|_{\bar{\omega} = \omega_c = 125} = 1$$

$$\left| \frac{17K}{125} \, \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} \right| = 1$$

$$\frac{17K}{125\sqrt{2}} = 1$$

$$K = \frac{125 \cdot \sqrt{2}}{17} = 10{,}4$$

$$\Rightarrow \qquad \omega_c = 125 \text{ rad/s}$$

$$T_A = \frac{5}{\xi \omega_c} \simeq 89 \text{ ms}$$

$$\xi \simeq \frac{\varphi_m}{100} = 0,45$$

2)

$$R(s) = 10,4 \, \frac{(0,25 s + 1)}{\left(\frac{1}{125} s + 1\right)}$$

$$= 325 \, \frac{(s+4)}{(s+125)}$$

REGOLA PRATICA

$$\boxed{\gamma \, \omega_c < \omega_s < 10 \, \gamma \, \omega_c}$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \qquad\qquad 5 \leq \gamma \leq 10$$

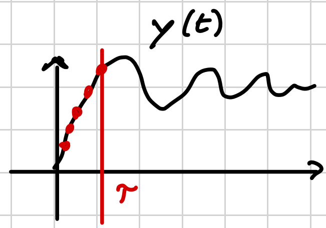
$\gamma = 5$ $\longmapsto$ Buon margine ingegneristico

$$5 \cdot 125 < \frac{2\pi}{T_s} < 50 \cdot 125$$

$$\frac{2\pi}{5 \cdot 1250} < T_s < \frac{2\pi}{625}$$

$$1\,ms < T_s < 10\,ms$$

Altro punto di vista



$$T_s << T_A$$

$$T_A \simeq 50\,ms = 5\tau$$

$$\tau \simeq 10\,ms$$

Buon campionamento: 10 samples nel tempo di salita $\sim \tau$

$$\Rightarrow \boxed{T_s = 1\,ms}$$

3) TRASFORM. Z. BILINEARE

$$s = \frac{1}{T} \frac{z-1}{\alpha z + 1 - \alpha}$$

EA $\quad \alpha = 0 \quad s = \dfrac{z-1}{T}$

EI $\quad \alpha = 1 \quad s = \dfrac{1}{T} \dfrac{z-1}{z}$

TUSTIN $\quad \alpha = \dfrac{1}{2} \quad s = \dfrac{2}{T} \dfrac{z-1}{z+1}$

Eulero I: $\quad s \simeq \dfrac{z-1}{T_s \cdot z}$

$$R(z) = 325 \, \frac{\left(\dfrac{z-1}{T_s \cdot z} + 4 \right)}{\left(\dfrac{z-1}{T_s \cdot z} + 125 \right)}$$

$$= 325 \left(\frac{\dfrac{z-1+T_s \cdot z \cdot 4}{\cancel{T_s z}}}{\dfrac{z-1+T_s \cdot z \cdot 125}{\cancel{T_s z}}} \right)$$

$$= 325 \, \frac{1{,}004\, z - 1}{1{,}125\, z - 1}$$

$$\left(\text{DC gain check} : R_s(0) = R_z(1) = 10{,}4 \right)$$

Tustin :

$$s \simeq \frac{2}{T} \, \frac{z-1}{z+1}$$

$$R(z) = 325 \, \frac{\left(\dfrac{2}{T} \dfrac{z-1}{z+1} + 4 \right)}{\left(\dfrac{2}{T} \dfrac{z-1}{z+1} + 125 \right)}$$

$$= \dots =$$

$$= 306{,}49 \, \frac{z - 0{,}996}{z - 0{,}8824}$$

$$\text{DC GAIN} \quad R_z(1) = 10{,}4 \; \checkmark$$