Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)
Prof. Fredy Ruiz
Appello del 15 febbraio 2023

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= \alpha \sin(x_2(t)) - \beta x_1(t) - u(t) \\ \dot{x_2}(t) &= k x_1(t) \\ y(t) &= x_1^2(t) + x_2^2(t) \end{aligned}$$

dove α, β e k sono costanti reali diverse da zero, e $-\pi/2 < x_2(t) < \pi/2$.

1. Classificare il sistema

SISO
Strettamente proprio
NON lineare
Ordine 2
tempo invariante

2. Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. È possibile trovare degli equilibri per un qualsiasi valore di $\bar{u}$?

In equilibrio $\dot{x} = 0$

$\dot{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0$

$\dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \alpha \sin(\bar{x}_2) = \bar{u} \Rightarrow \bar{x}_2 = \operatorname{asin}\left(\frac{\bar{u}}{\alpha}\right)$

$\bar{y} = \left(\operatorname{asin}\left(\frac{\bar{u}}{\alpha}\right)\right)^2$ // Il equilibrio esiste solo se: $-1 \leq \frac{\bar{u}}{\alpha} \leq 1$ } Codominio di $\sin(\cdot)$

3. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 0$.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha\cos(\bar{x}_2) \\ k & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 2\bar{x}_1 & 2\bar{x}_2 \end{bmatrix}; \quad D = 0$$

per $\bar{u} = 0$, $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{y} = 0$

$$\delta\dot{x} = \begin{bmatrix} -\beta & \alpha \\ k & 0 \end{bmatrix} \delta x(t) + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u(t); \quad \delta y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x(t)$$

4. Studiare la stabilità del sistema linearizzato trovato al punto precedente al variare dei parametri α, β e k. Se possibile, determinare la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

Autovalori: $\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \varphi(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda+\beta & -\alpha \\ -k & \lambda \end{pmatrix} = 0$

$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda - k\alpha$

per il criterio di Routh (2do ordine), il sistema è A.stabile se $\beta > 0 \wedge k\alpha < 0$, è instabile se $\beta < 0 \vee k\alpha > 0$.

Per ipotesi $\beta, k, \alpha \neq 0$, non ci sono casi con poli in zero.

Le stesse conclussioni si applicano al equilibrio del sistema N.L.

5. Per il sistema linearizzato, fissando i valori dei parametri $\alpha = 1$, $\beta = 2$ e $k = 3$, trovare gli autovalori, autovettori e modi del movimento libero dello stato.

$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$; $\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$ → $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$

modi: $m_1(t) = e^{-3t}$; $m_2(t) = e^{t}$

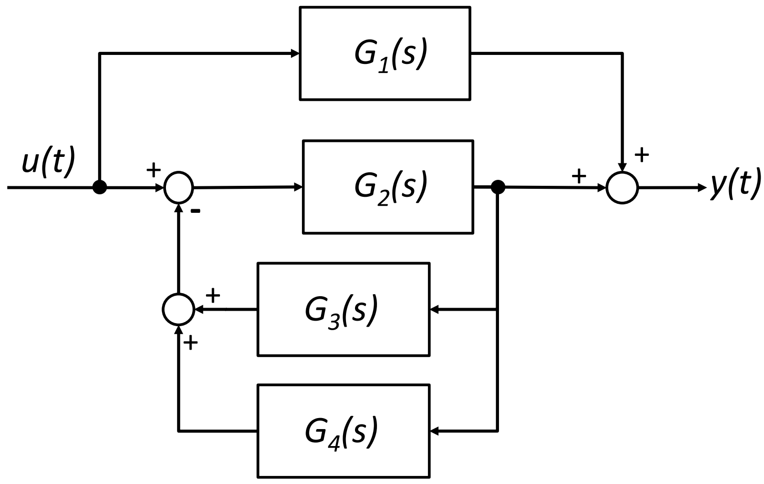
autovettori

$$\left(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il seguente schema:



1. Determinare la funzione di trasferimento $G_E(s)$ da $U(s)$ a $Y(s)$.

$$G_E(s) = \underbrace{G_1(s) +}_{\text{Serie}} \overbrace{\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s)\cdot\underbrace{\left(G_3(s)+G_4(s)\right)}_{\text{Parallelo}}}}^{\text{retroazione}}$$

2. Posto $G_1(s) = 1/(s+100)$, $G_2(s) = k/(s+2)$, $G_3(s) = 5/(s+10)$ e $G_4(s) = 2/(s+10)$, valutare la funzione di trasferimento e determinare i valori del parametro k per i quali la $G_E(s)$ è asintoticamente stabile.

$$G_E(s) = \frac{1}{s+100} + \frac{\frac{k}{s+2}}{1 + \frac{k}{s+2}\left(\frac{5}{s+10} + \frac{2}{s+10}\right)}$$

$$G_E(s) = \frac{1}{s+100} + \frac{k(s+10)}{(s+2)(s+10)+7k}$$

$$G_E(s) = \frac{1}{s+100} + \frac{k(s+10)}{s^2+12s+20+7k}$$

$$G_E(s) = \frac{s^2+12s+20+7k+k(s+10)(s+100)}{(s+100)(s^2+12s+20+7k)}$$

$s^2+110s+1000$

$$G_E(s) = \frac{(k+1)s^2+(12+110k)s+20+1007k}{(s+100)(s^2+12s+20+7k)}$$

Polo in -100 non dipende di k mentre per il criteri di Routh gli altri due poli sono A. Stabili se $20+7k>0 \Rightarrow k > -\frac{20}{7}$

3. é possibile trarre conclusioni sulla stabilità del sistema complessivo analizzando solo la funzione di trasferimento $G_E(s)$ appena ricavata? Giustificare.

$G_E(s)$ è del terzo ordine, mentre la somma degli ordini di G_1, G_2, G_3, G_4 è 4. C'è un polo nascosto, allora non è possibile concludere sulla stabilità interna analizzando solo la $G_E(s)$

4. Posto $k = 1$, per un ingresso $u(t)$ tipo scalino determinare la trasformata di Laplace dell'uscita $Y(s)$ e i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$. Tracciare *qualitativamente* l'andamento dell'uscita. È possibile fare una approssimazione a poli dominanti? Giustificare la risposta.

Per $k=1$, $G_E(s) = \dfrac{2s^2+122s+1027}{s^3+112s^2+1227s+2700}$

$Y(s) = G_E(s)\cdot\frac{1}{s}$,

$y(0) \overset{T.V.I.}{=} \lim_{s\to\infty} s\cdot G_E(s)\cdot\frac{1}{s} = 0$

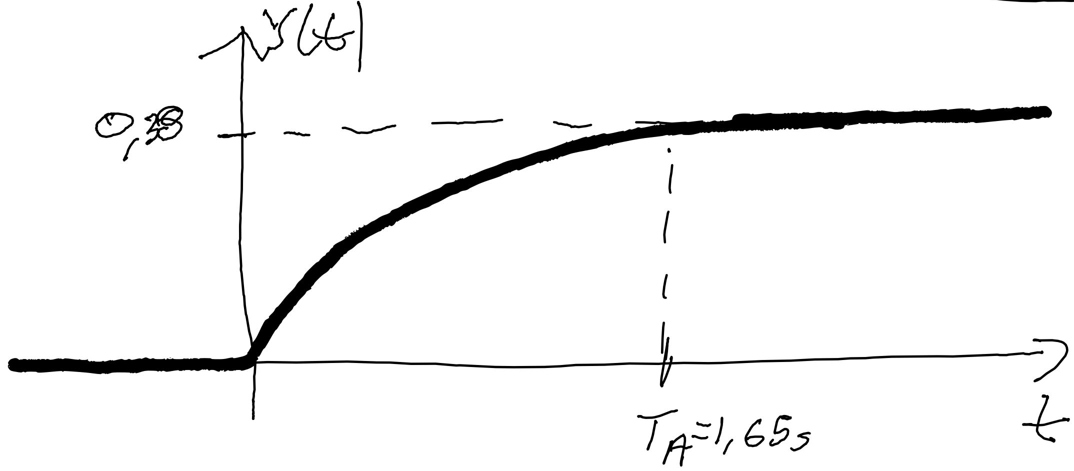
$y'(0) \overset{T.V.I.}{=} \lim_{s\to\infty} s^2 G_E(s)\cdot\frac{1}{s} = 2$

$y_\infty \overset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} s\cdot G_E(s)\cdot\frac{1}{s} \cong 0,38$

• Zeri
$z_1 \cong -51$
$z_2 \cong -10$

• Poli
$p_1 = -100$
$p_2 = -9$
$\boxed{p_3 = -3}$

Polo dominante
$\tau = 0,33s$
$T_A \cong 1,65s$



ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.8x_1(k) + 0.4x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 0.4x_1(k) + 0.2x_2(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

1. Scrivere in forma matriciale e classificare il sistema.

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 1] x(k) + [1] u(k)$$

- tempo discreto
- SISO
- ordine 2
- Tempo invariante
- lineare
- proprio

2. Determinare gli stati di equilibrio per un ingresso costante $u(k) = \bar{u}$. È possibile trovare un valore del ingresso $\bar{u}$ per avere come stato di equilibrio il punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$? Giustificare la risposta.

In equilibrio $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\bar{x}_1 = 0,8\bar{x}_1 + 0,4\bar{x}_2 + \bar{u}$$
$$\bar{x}_2 = 0,4\bar{x}_1 + 0,2\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$$

$$2\bar{x}_2 = 1,6\bar{x}_2 + 0,4\bar{x}_2 + \bar{u}$$
$$0 = \bar{u}$$

$$\bar{y} = 3\bar{x}_2 + \bar{u} = 3\bar{x}_2$$

- C'è equilibrio soltanto se $\bar{u} = 0$,
- l'equilibrio non dipende dai valori assoluti di x_1 e x_2
- basta la condizione $\bar{x}_1 = 2\bar{x}_2$.
- Non è possibile avere come equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ perché non sodisfa la condizione di equilibrio per x_2.

3. Determinare i modi del sistema e studiare le sue proprietà di stabilità.

autovalori

$$\varphi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 0{,}8 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & \lambda - 0{,}2 \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$$

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $|\lambda_2| = 1$

sistema semplicemente stabile.

modi: $m_1 = \mathrm{imp}(k)$, $m_2 = 1$

4. Calcolare i primi 5 campioni del movimento dello stato e dell'uscita per $u(k) = 1, \forall k \geq 0$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

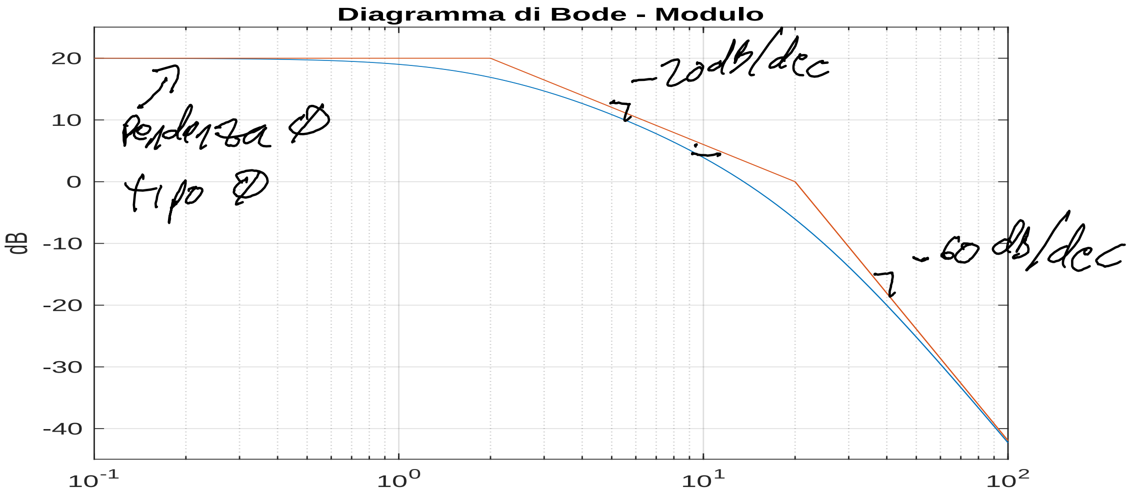
$x_1 = 0{,}8 x_1 + 0{,}4 x_2 + u$

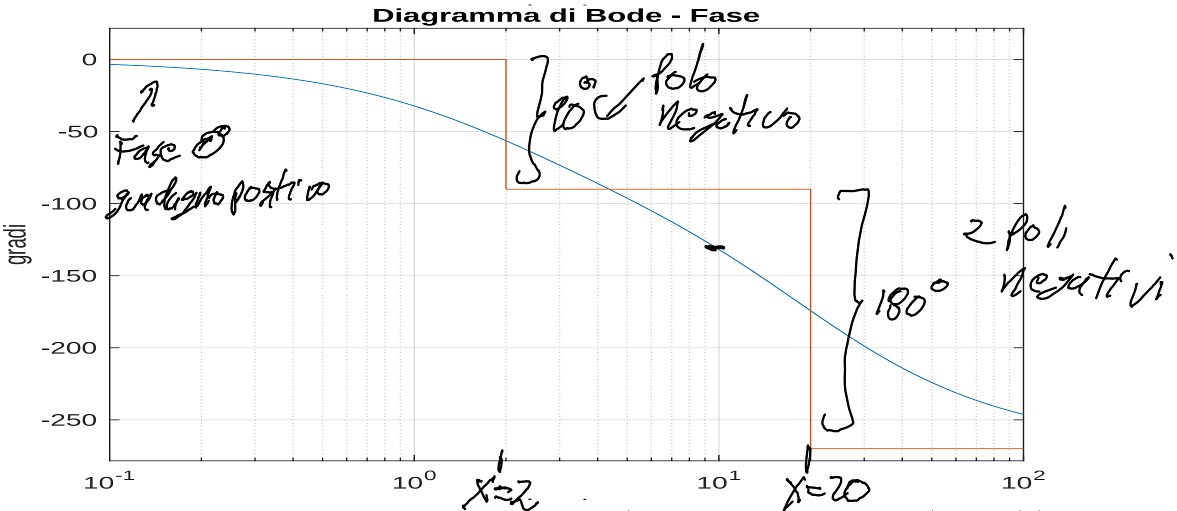
$x_2 = 0{,}4 x_1 + 0{,}2 x_2$

k	u	x_1	x_2	y
0	1	1	0	2
1	1	1,8	0,4	3,2
2	1	2,6	0,8	4,4
3	1	3,4	1,2	5,6
4	1	4,2	1,6	6,8
5	1	5	2	8
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ESERCIZIO 4

In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.





1. Determinare ordine, tipo, poli, zeri e guadagno (statico o generalizzato) di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

Tipo Ø, 3 poli stabili, NO zeri

guadagno $\mu = 10$ (20 dB)

$$G(s) \cong \frac{10}{\left(1+\frac{s}{2}\right)\left(1+\frac{s}{20}\right)^2} = \frac{8.000}{(s+2)(s+20)^2}$$

Sistema A. stabile: tre poli con parte reale negativa.

2. Si dica, approssimativamente, quanto vale a regime l'uscita $y(t)$ del sistema a fronte di un ingresso $u(t)$ pari a:
1) $u(t) = 5\text{sca(t)}$
2) $u(t) = \sin(2\,t)$
3) $u(t) = \sin(10\,t)$.

1) $y_\infty = \mu \cdot |u_\infty| = 50$,

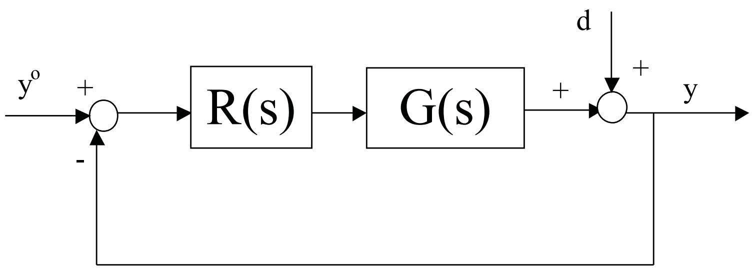
2) $|Y| = \underbrace{|G(2j)|}_{\simeq 17dB} \cdot 1 \cong 7; \; \angle Y(t) = \arg(G(2j)) \cong -55^\circ$

$y(t) \cong 7 \cdot \sin(2t - 0{,}96)$

3) $|Y| = \underbrace{|G(10j)|}_{\simeq 4dB} \cong 1{,}6; \; \angle Y(t) = \arg(G(10j)) \cong -130^\circ$

$y(t) \cong 1{,}6 \sin(10t - 2{,}27)$

3. Si consideri il sistema di controllo in figura:



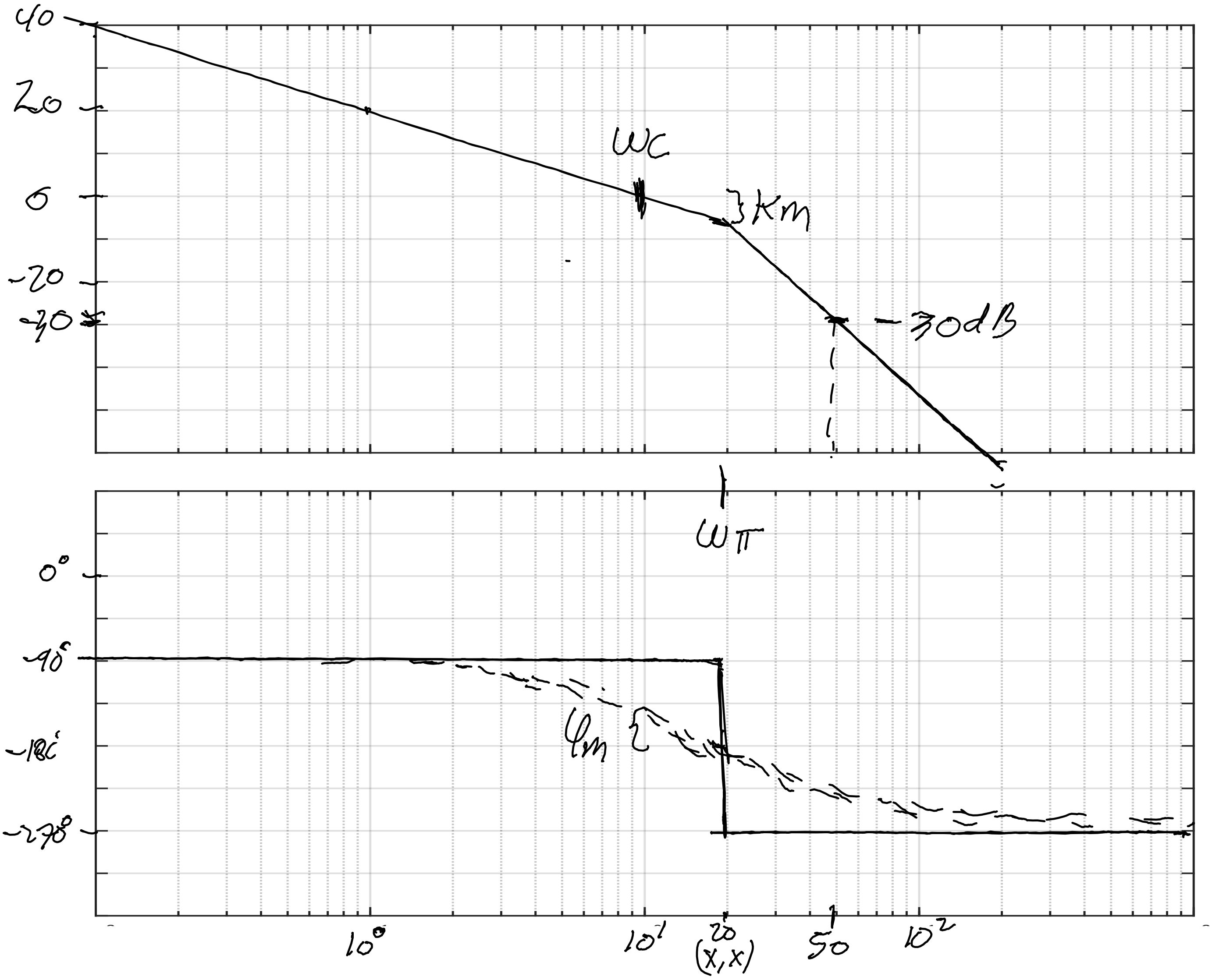
Per il sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ studiato al punto 1 e il regolatore

$$R(s) = 0.5\frac{s+2}{s},$$

Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento di anello $L(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.

$$L(s) = G(s) \cdot R(s) = \frac{4000\,\cancel{(s+2)}}{s\,\cancel{(s+2)}(s+20)^2}$$

$$L(s) = \frac{4000}{s(s+20)^2} \quad \left\} \begin{array}{l} \mu_g = 10 \; (20dB) \\ g = 1 \end{array} \right.$$



4. Determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato. Se possibile stabilire i margini di fase e di guadagno.

Dal diagramma di Bode si vede $\omega_c = 10\ rad/s$

$\omega_\pi = 20\ rad/s$

$\arg(L(j10)) \cong -143^\circ \Rightarrow \varphi_m = 180-143 = 37^\circ$

$|L(j20)| \cong -10dB \Rightarrow k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \cong 3,16$

Per criterio di Bode ($k>0$, $\varphi_m > 0$, $L(s)$ non ha poli instabili)

Il sistema retroazionato è Asintoticamente Stabile.

5. Considerando il sistema retroazionato descritto al punto precedente determinare il valore di regime dell'uscita $|y_\infty|$ a fronte di:

   - Un ingresso a scalino del disturbo $d(t) = sca(t)$

$L(s)$ è tipo 1, allora l'errore per $d(t) = sca(t)$ è zero e

$$|y_\infty| = 0.$$

   - Un ingresso di riferimento $y^o(t) = \sin(50t)$.

$$Y(s) = F(s) \cdot Y^o(s).$$

$\omega = 50\,rad/s >> \omega_c$, allora

$$|F(s)| \simeq \left|\frac{L(s)}{1+L(s)}\right| \approx |L(s)| \simeq -30dB$$

$$|y_\infty| = 1 \cdot 0{,}0316 = 0{,}0316$$