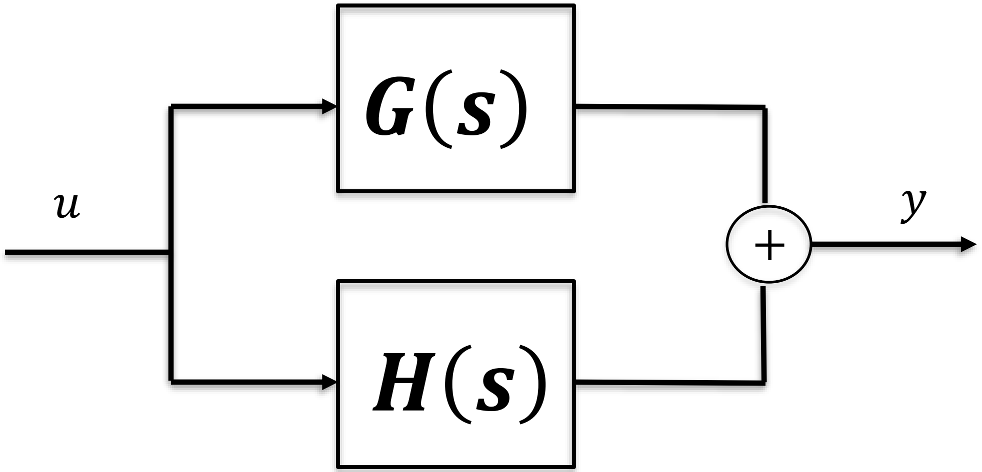
Fondamenti di Automatica – A.A. 2023/2024

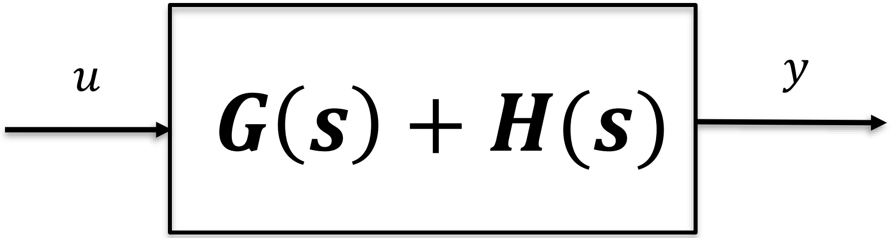
Esercitazione 08: Sistemi interconnessi e risposta in frequenza

Ingegneria Informatica
Prof. Fredy Ruiz

Milano, 23 aprile 2024

Schemi a blocchi - parallelo

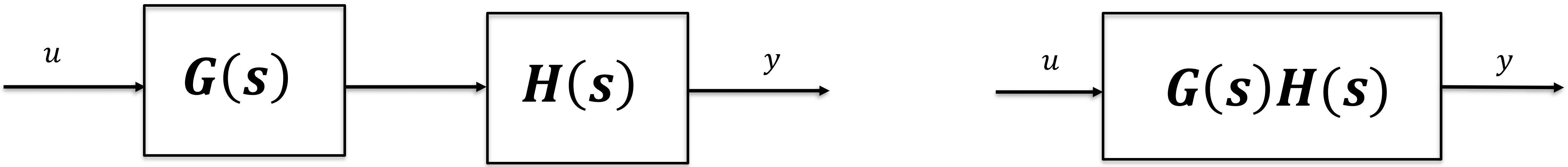




- Dati due sistemi $G(s)$ e $H(s)$ in parallelo, il sistema risultante sarà asintoticamente stabile solo se $G(s)$ e $H(s)$ sono asintoticamente stabile.

  $\rightarrow$ **La connessione in parallelo non sposta i poli dei sistemi**

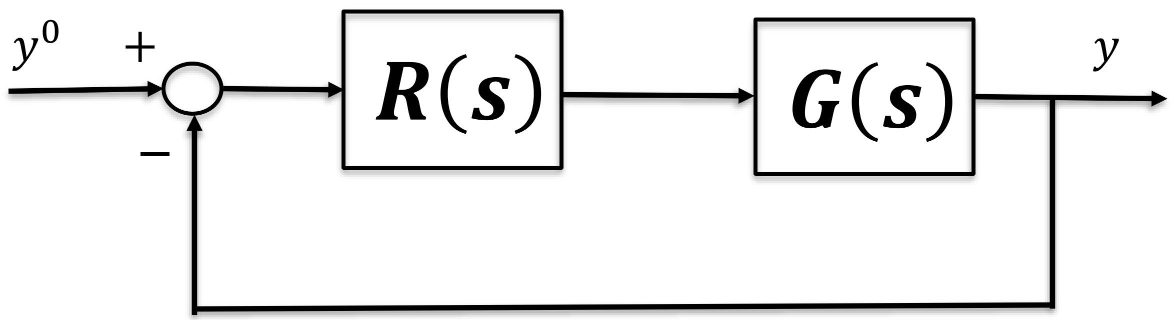
Schemi a blocchi - serie

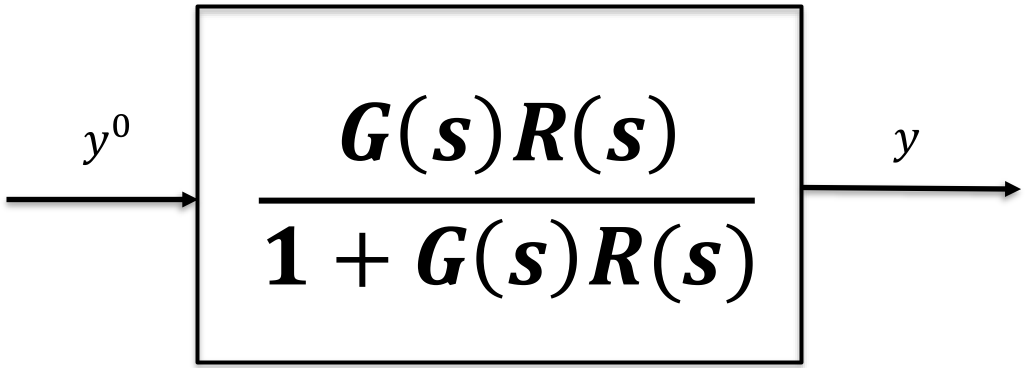


- Dati due sistemi $G(s)$ e $H(s)$ in serie, il sistema risultante sarà asintoticamente stabile solo se $G(s)$ e $H(s)$ sono asintoticamente stabile.

  $\rightarrow$ **La connessione in serie non sposta i poli dei sistemi**

Schemi a blocchi - retroazione

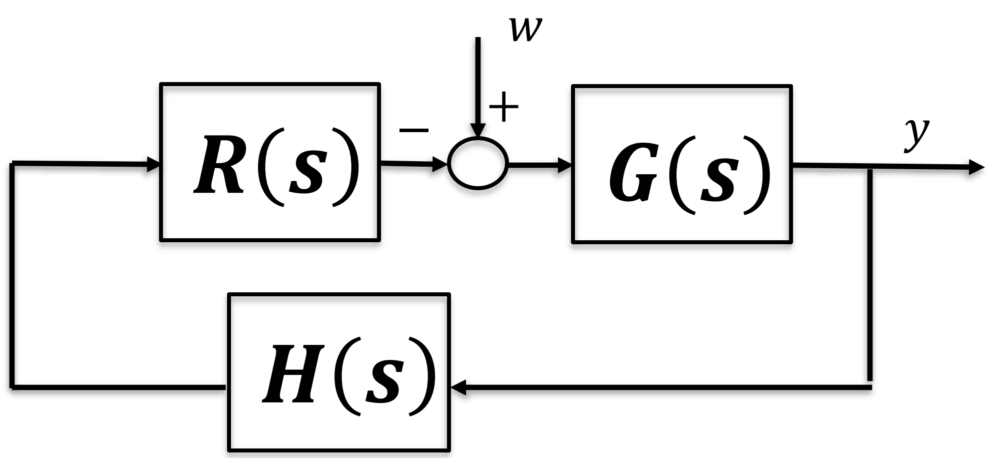




- Dati due sistemi $G(s)$ e $\mathrm{R}(s)$ in serie, il sistema risultante sarà asintoticamente stabile solo se $1 + G(s)R(s)$ è asintoticamente stabile.

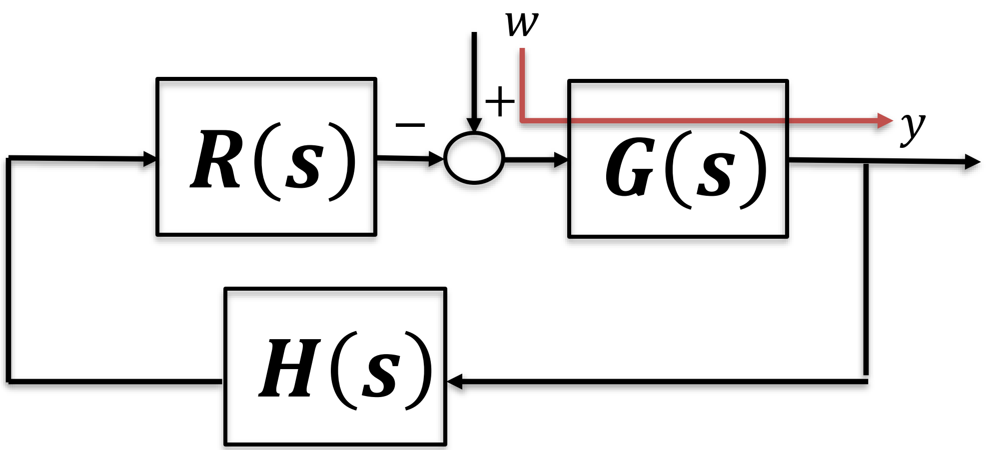
$\rightarrow$ **La connessione in retroazione SPOSTA i poli dei sistemi**

Schemi a blocchi – funzione ad anello generica



$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Funzione\ d'andata}{1 \pm Funzione\ d'anello}$$

Schemi a blocchi – funzione ad anello generica

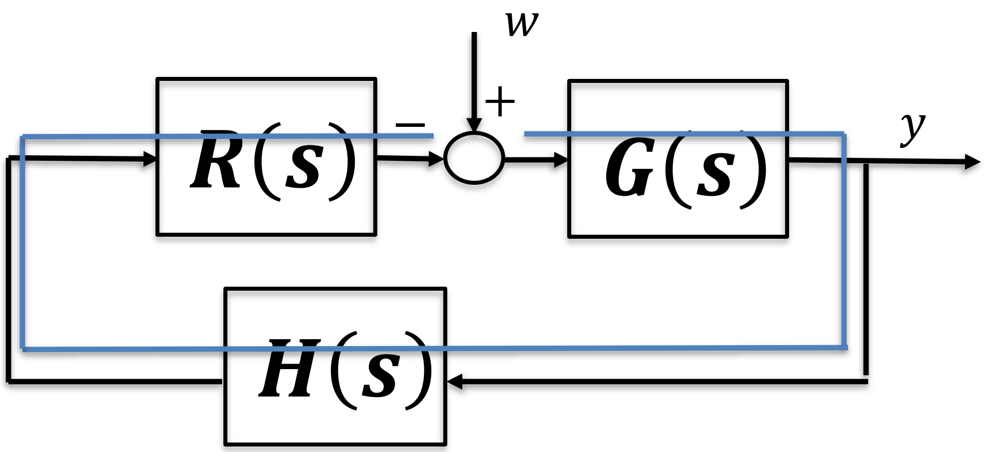


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Funzione\ d'andata}{1 \pm Funzione\ d'anello}$$

$Funzione\ d'andata$ = tutte le funzioni di trasferimento tra ingresso e uscita

$$Funzione\ d'andata = G(s)$$

Schemi a blocchi – funzione ad anello generica

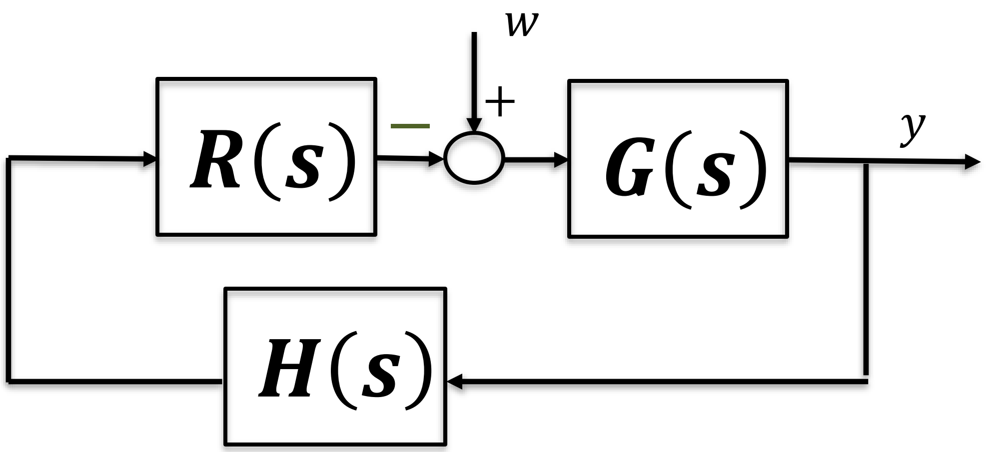


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Funzione\ d'andata}{1 \pm Funzione\ d'anello}$$

$Funzione\ d'anello$ = tutte le funzioni di trasferimento tra valle e monte del nodo sommatore

$$Funzione\ d'anello = G(s)H(s)R(s)$$

Schemi a blocchi – funzione ad anello generica

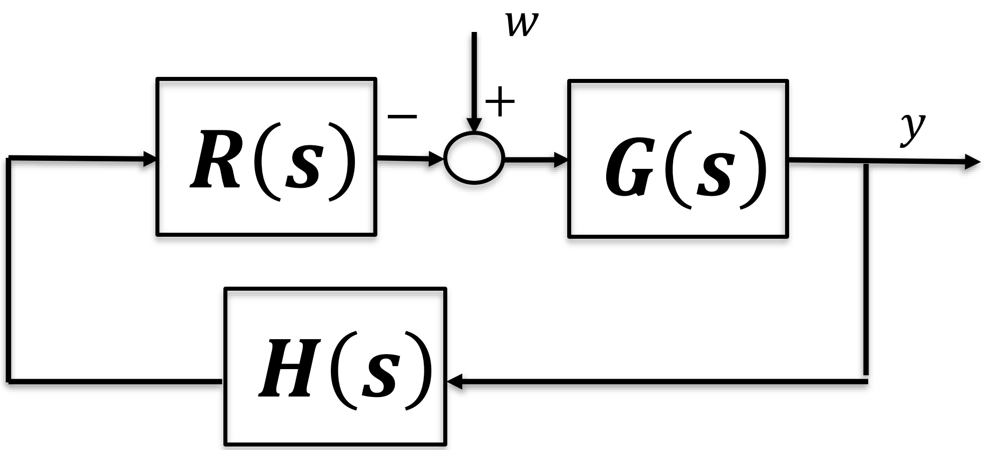


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Funzione\ d'andata}{1 \pm Funzione\ d'anello}$$

$Segno$ = è sempre **opposto a quello della retroazione**

$$Segno = +$$

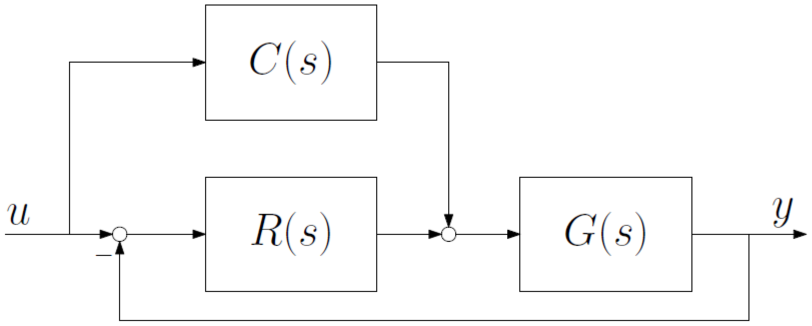
Schemi a blocchi – funzione ad anello generica

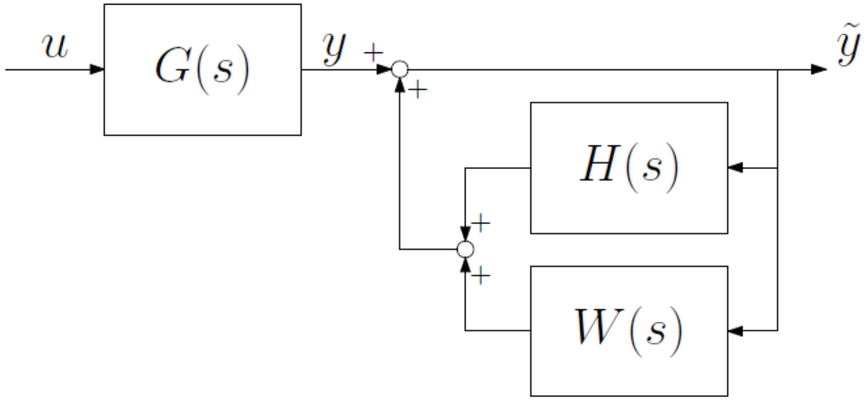


$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Funzione\ d'andata}{1 \pm Funzione\ d'anello}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)R(s)}$$

Schemi a blocchi – Sistemi complessi





Sfruttiamo le conoscenze di serie, parallelo e retroazione per descrivere con un’unica funzione di trasferimento il sistema complessivo.

Risposta in frequenza

Si consideri un sistema dinamico lineare

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

Con funzione di trasferimento $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

Si definisce **risposta in frequenza** associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ la **funzione** $\boldsymbol{G(j\omega)}$ della variabile reale $\boldsymbol{\omega \geq 0}$

Teorema della risposta in frequenza

Se la matrice dinamica A del sistema non ha autovalori sull'asse immaginario (non abbiamo poli del tipo $s = \pm j$).

Allora all'ingresso sinusoidale con pulsazione ω, ampiezza $\bar{u}$ e fase φ:

$$\boldsymbol{u(t) = \bar{u}\sin(\omega t + \varphi)}\,, \qquad\qquad t \geq 0$$

➢ Esiste una condizione iniziale $\tilde{x}(0)$ tale che l'uscita $y(t)$ è pari a

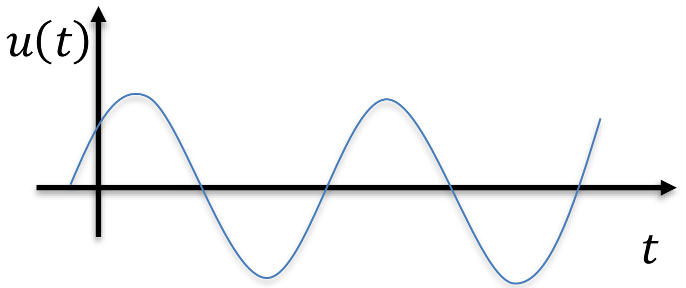
$$\boldsymbol{\tilde{y}(t) = \bar{u}|G(j\omega)|\sin\big(\omega t + \varphi + \measuredangle G(j\omega)\big)}\,,$$

- **Se il sistema è asintoticamente stabile**, allora $\boldsymbol{y(t) \to \tilde{y}(t)}$ **per $\boldsymbol{t \to +\infty}$ per ogni condizione iniziale**

Teorema della risposta in frequenza (interpretazione grafica)

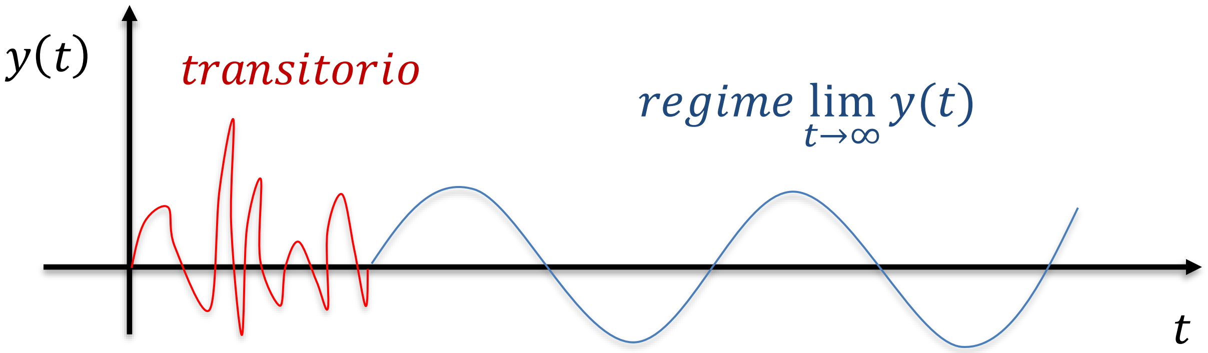
- Dato l'ingresso sinusoidale:

  $$u(t) = \bar{u}\sin(\omega t + \varphi)\,, \qquad t \geq 0$$



- A regime l'uscita sarà un segnale sinusoidale come l'ingresso ma sfasato e amplificato dalla funzione di trasferimento.

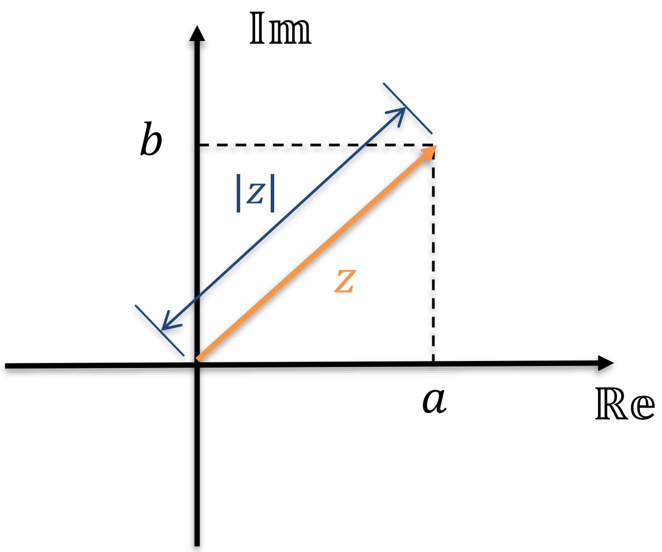
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \bar{u}|G(j\omega)|\sin\big(\omega t + \varphi + \measuredangle G(j\omega)\big)\,,$$



Modulo di una funzione complessa $G(j\omega)$

- Modulo di un numero complesso $z = a + jb$

$$|z| = \sqrt{\mathbb{Re}(z)^2 + \mathbb{Im}(z)^2}$$



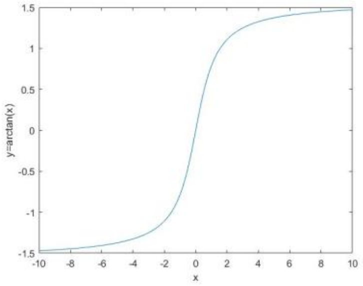
Esempio:

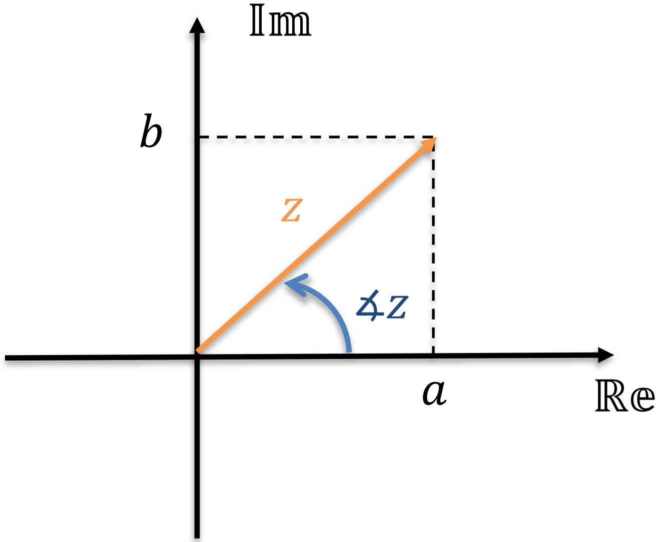
$$G(j\omega) = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)(a_3 + jb_3)} \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)| = \frac{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}\sqrt{a_3^2 + b_3^2}}$$

Fase di una funzione complessa $G(j\omega)$

- Fase della funzione complessa $z = a + jb$

$$\measuredangle z = \mathrm{atan}\left(\frac{\mathbb{Im}(z)}{\mathbb{Re}(z)}\right)$$





Esempio:

$$G(j\omega) = \frac{(a_1 + jb_1)}{(a_2 + jb_2)(a_3 + jb_3)} \quad \rightarrow \quad \measuredangle G(j\omega) = + \mathrm{atan}\left(\frac{b_1}{a_1}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{b_2}{a_2}\right) - \mathrm{atan}\left(\frac{b_3}{a_3}\right)$$

Sommo i termini al numeratore

Sottraggo i termini al denominatore