Esame di Logica e Algebra - 9 luglio 2021

Durata della prova: 1h 30'

1. (9 punti)
   a) 4 punti; b) 5 punti
   Si consideri la formula $f(A,B,C)$ che assume il valore di verità 1 solo per le interpretazioni v_1 ove $v_1(A) = v_1(B) = 1$ e $v_1(C) = 0$ e v_2 ove $v_2(A) = 0$ e $v_2(B) = v_2(C) = 1$.

   (a) Dire se la formula $\neg(B \Rightarrow \neg f(A,B,C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$ è un teorema della teoria L;

   (b) Verificare utilizzando la risoluzione che l'insieme $\{\neg(C \Rightarrow \neg A), f(A,B,C)\}$ è insoddisfacibile.

   Soluzione:

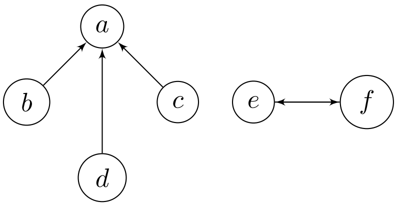
   (a) Per il teorema di correttezza e completezza dobbiamo verificare se $\models \neg(B \Rightarrow \neg f(A,B,C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$. Invece di costruire la tavola di verità, supponiamo per assurdo che $\neg(B \Rightarrow \neg f(A,B,C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$ non sia una tautologia. Ciò vuole dire che $\neg(B \Rightarrow \neg f(A,B,C)$ è vera e $(C \Rightarrow \neg A)$ è falsa. Dal fatto che $B \Rightarrow \neg f(A,B,C)$ deve essere falsa ne deduciamo che B è vera ed $f(A,B,C)$ è anch'essa vera, mentre dal fatto che $(C \Rightarrow \neg A)$ è falsa ne deduciamo che A, C sono vere. Ma per A, B, C vere la formula $f(A,B,C)$ è falsa, che contraddice il fatto che $f(A,B,C)$ doveva essere vera. Quindi la formula $\neg(B \Rightarrow \neg f(A,B,C)) \Rightarrow (C \Rightarrow \neg A)$ è una tautologia e pertanto è un teorema della teoria L.

   (b) Sia $\Gamma = \{\neg(C \Rightarrow \neg A), f(A,B,C)\}$. Usando la forma normale disgiuntiva otteniamo che $f(A,B,C) \equiv (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$. Dal teorema di correttezza e completezza per refutazione per dimostrare che l'insieme Γ è insoddisfacibile occorre verificare che $\Gamma^c \vdash_R \square$. Si ricava che $\Gamma^c = \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, C\}, \{\neg A, \neg C\}\}$. Da $\{A\}$ e $\{\neg A, \neg C\}$ otteniamo $\{\neg C\}$ che con $\{C\}$ permette di ricavare la clausola vuota.

2. (11 punti)

a) 2 punti; b) 3 punti; c) 3 punti; d) 3 punti.

Sia $R \subseteq X \times X$, con $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ la relazione binaria rappresentata dal seguente grafo:



(a) Si provi che non esiste nessuna relazione d'ordine su X contenente R. Si dica, motivando la risposta, se R è transitiva.

(b) Si trovi la relazione d'equivalenza ρ generata da R. Si stabilisca se ρ coincide con la chiusura riflessiva e simmetrica T di R.

(c) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\forall x \forall y \forall z\, (\, (A(x,y) \wedge A(y,z) \Rightarrow A(x,z)) \wedge (A(x,y) \Rightarrow \exists z A(y,z))\,)$$

E si dica se è vera, falsa, soddisfacibile ma non vera, nel caso in cui A sia interpretata dalla relazione R. Cosa accade se A è la relazione T? E se è ρ?

(d) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

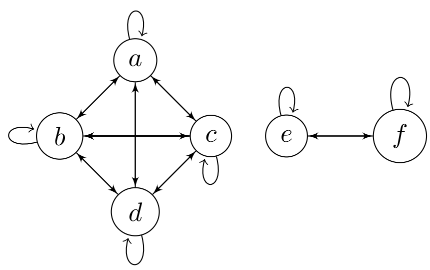
$$\forall x\, (\, S(a, p(x, f(x))) \Rightarrow S(a, p(f(x), x))\,)$$

Si stabilisca se è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme D di tutte le relazioni binarie sull'insieme X e in cui la lettera predicativa p è il prodotto di relazioni su X, f è l'inversa ($f(b)$ è la relazione inversa di b), a è la relazione identica, ed S è la lettera predicativa che indica la relazione di essere sottoinsieme.

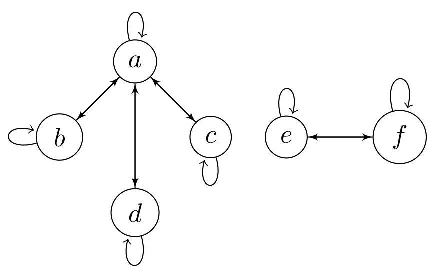
Soluzione:

(a) Dato che R contiene le coppie $(e, f), (f, e)$, qualunque relazione S che contenga R conterrà queste coppie, quindi S non potrà mai essere antisimmetrica. Segue che non può esistere una relazione d'ordine che contenga R. R non è transitiva poichè $(e, f), (f, e) \in R$ ma $(e, e) \notin R$.

(b) Ricordiamo che per chiudere transitivamente basta completare le clique del grafo d'adiacenza di R, quindi otteniamo che il grafo d'adiacenza di ρ è:



La relazione T che è la chiusura riflessiva e simmetrica di R ha il seguente grafo d'adiacenza:



che è palesemente diverso da quello di ρ.

(c) La formula è chiusa quindi può essere solo o vera o falsa, ma non solo soddisficibile (ma non vera). La formula $A(x, y) \wedge A(y, z) \Rightarrow A(x, z)$ esprime la transitività quindi, nel caso in cui A interpreti R oppure T, l'intera formula è falsa dato che queste due relazioni non sono transitive. Nel caso in cui A interpreti ρ dobbiamo anche valutare la verità della sottoformula $A(x, y) \Rightarrow \exists z A(y, z)$ che afferma: se $(x, y) \in \rho$ allora esiste uno $z \in X$ tale che $(y, z) \in \rho$. Dato che ρ è riflessiva, scegliendo $z = y$ abbiamo che $(y, y) \in \rho$ per tutti gli $y \in X$ e quindi il conseguente è sempre soddisfatto. Inoltre ρ è anche transitiva e pertanto l'intera formula è vera essendo chiusura universale della congiunzione di due formule vere.

(d) La formula traduce la seguente proprietà: indicata con I la relazione identica, se $I \subseteq R \cdot R^{-1}$ allora $I \subseteq R^{-1} \cdot R$. La formula è falsa, basta considerare la relazione $R = \{(1,2),(2,2)\}$ su $Y = \{1,2\}$, allora $I \subseteq R \cdot R^{-1} = \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1)\}$, ma $R^{-1} \cdot R = \{(2,2)\}$ e quindi la relazione identica I non è contenuta in quest'ultimo prodotto. Pertanto l'antecedente è soddisfatto da questo assegnamento mentre il conseguente non lo è , dunque la formula è falsa.

3. (11 punti)
a) 4 punti; b) 3 punti; c) 4 punti.
Si consideri l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, strutturato a gruppo G rispetto all'operazione

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

(a) Si mostri che l'insieme $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 2y = 0\}$ è un sottogruppo normale di G.

(b) Si consideri ora la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\forall x \forall y\, (\, E(f(x, y), f(y, x)) \Rightarrow E(\, g(f(x, y)), f(g(x), g(y))\,)\,)$$

e si dica se è vera, falsa soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione in cui il dominio è G, la lettera predicativa E è da interpretarsi come l'uguaglianza, le lettere funzionali f e g rispettivamente come la somma in G e l'esistenza dell'inverso rispetto all'operazione in G. Si dica se la formula è logicamente valida o logicamente contraddittoria.

(c) Si consideri ora la formula:

$$\exists x \exists y\, (\, \forall h\, (E(h, y) \Rightarrow E(g(x), g(y))) \Rightarrow \forall t\, (E(t, y) \Rightarrow E(g(x), g(y)))\,)$$

e si mostri utilizzando la teoria della risoluzione della logica del primo ordine che è logicamente valida.

Soluzione:

(a) Notiamo che l'elemento neutro di G è $(0, 0)$, mentre l'inverso di (c, d) è $(-c, -d)$. Siano $(a, b), (c, d) \in H$, allora $a + 2b = 0$, $c + 2d = 0$. Consideriamo $(a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d)$ allora, poiché $a + 2b - (c + 2d) = 0$, otteniamo $(a - c) + 2(b - d) = 0$, quindi, per il criterio di caratterizzazione dei sottogruppi, $(a - c, b - d) \in H$. Segue che H è un sottogruppo. Poiché $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b)$, abbiamo che G è un gruppo commutativo, quindi H è un sottogruppo normale.

(b) La formula esprime il seguente fatto in G: se G è commutativo (cioè $x + y = y + x$), allora l'inverso della somma di x e y è la somma degli inversi di x ed y: $-(x + y) = (-x) + (-y)$. Segue che in questa interpretazione la formula è vera e quindi non è logicamente contraddittoria. Essa però non è nemmeno logicamente valida dato che se prendiamo un qualunque gruppo $(G, \star)$ non commutativo allora non è vero in generale che $(x \star y)^{-1} = x^{-1} \star y^{-1}$.

(c) Dobbiamo verificare che $\neg \exists x \exists y\, (\, \forall h\, (E(h, y) \Rightarrow E(g(x), g(y))) \Rightarrow \forall t\, (E(t, y) \Rightarrow E(g(x), g(y)))\,)$ è insoddisfacibile. Questa formula è equivalente a:

$$\forall x \forall y\, (\, \forall h (\neg E(h, y) \vee E(g(x), g(y))) \wedge \exists t (E(t, y) \wedge \neg E(g(x), g(y)))\,)$$

Quindi la sua forma normale prenessa è:

$$\forall x \forall y\, (\, \exists t \forall h\, (\, (\neg E(h, y) \vee E(g(x), g(y))) \wedge (E(t, y) \wedge \neg E(g(x), g(y)))\,)\,)$$

da cui ricaviamo la sua forma di Skolem, dove w è una nuova lettera funzionale:

$$\forall x \forall y \forall h\, (\, (\neg E(h, y) \vee E(g(x), g(y))) \wedge (E(w(x, y), y) \wedge \neg E(g(x), g(y)))\,)$$

Quindi l'insieme di clausole è dato da

$$\{\neg E(h, y), E(g(x), g(y))\}, \{E(w(x', y'), y')\}, \{\neg E(g(x''), g(y''))\}$$

dove abbiamo differenziato tutte le variabili tra le clausole. Una risolvente tra la prima e la seconda clausola con la sostituzione $w(x', y')/h, y'/y$ permette di ottenere la clausola $\{E(g(x), g(y'))\}$ da cui con la terza clausola mediante la sostituzione $x/x'', y'/y''$ permette di ottenere la clausola vuota.