Esercizi di riepilogo
Stima Bayesiana

Es1: Treno in ritardo

- Ogni giorno un treno arriva in ritardo ad una stazione con un tempo casuale X, uniformemente distribuito in $[0, \theta]$. Il parametro θ non è noto ed è modellizzato come il valore assunto da una v.a. Θ uniformemente distribuita da 0 a 1 ora.

a) Assumendo che il treno sia arrivato in ritardo di una quantità x nel primo giorno, il passeggero come dovrebbe usare questa informazione per aggiornare la distribuzione di Θ?

b) Se il passeggero osserva dei ritardi $x_1, \ldots, x_n$ nei primi n giorni, come dovrebbe aggiornare la legge di Θ? Qui si assuma che il treno sia in ritardo di tempi casuali $X_1, \ldots, X_n$ dove, dato $\Theta = \theta$, tutti i ritardi sono iid uniformi tra 0 e θ

Es1: Treno in ritardo

c) Trovare la stima MAP di Θ basata sull'osservazione di X=x
d) Trovare la stima LMS di Θ basata sull'osservazione di X=x
e) Si calcolino gli errori quadratici medi condizionati per le stime MAP e LMS. Si confrontino i risultati.
f) Si derivi lo stimatore lineare LMS di Θ basato su X
g) Si calcoli l'errore quadratico medio condizionato dello stimatore LMS lineare. Si confronti il risultato con quello del punto e).

Es2: Inferenza della media di Gaussiane

- Si osserva un insieme di dati $X_1, \ldots, X_n$ che hanno una media uguale a θ e che si vuole stimare.
- Si assuma che, dato il valore della media, le v.a. X_i siano Gaussiane e indipendenti con varianze note $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$
- La distribuzione a priori della media è $\Theta \sim \mathcal{N}(x_0, \sigma_0^2)$
- Determinare la distribuzione a posteriori di Θ, la stima MAP e la stima LMS
- Determinare la stima LMS lineare

Es3: Scatole

- Ci sono 2 scatole, ognuna contenente 3 palline: una nera e due bianche nella scatola 1, due nere e una bianca nella scatola 2
- Si sceglie una scatola a caso, dove la prob. di scegliere la scatola 1 è p, dopodiché si estrae una pallina a caso dalla scatola.

a) La descriva la stima MAP per la decisione dell'identità della scatola basata sul fatto che la pallina estratta sia nera o bianca

b) Assumendo che p=0.5, si trovi la prob. di non riconoscere la scatola giusta, e confrontarla con la prob. di non riconoscere la scatola prima di aver effettuato l'estrazione della pallina.

Es4: Autovelox

- Un autovelox sovrastima sempre la velocità delle automobili di una quantità che è uniformemente distribuita tra 0 e 5 km/h.
- Si assuma che le automobili viaggino ad una velocità uniformemente distribuita tra 55 e 75 km/h.
- Qual è la stima LMS della velocità di un'automobile basata sulla misura dell'autovelox?

Es5: Trasmissione Ottica

- In un sistema di trasmissione ottica, un photodetector conta il numero di fotoni che arrivano durante un intervallo di tempo
- Un utente trasmette informazione accendendo e spegnendo un trasmettitore di fotoni (laser)
- Si assuma che la prob. che il trasmettitore sia acceso sia p
- Quando il trasmettitore è acceso, il numero di fotoni trasmesso nell'intervallo di tempo di interesse è una v.a. di Poisson Θ di media λ
- A causa dello «shot noise», il photodetector può captare fotoni che non sono stati prodotti dal trasmettitore. Il numero di questi fotoni N è una v.a. di Poisson con media μ.

Es5: Trasmissione ottica

- Il numero totale di fotoni ricevuto è $X = \Theta + N$ quando il trasmettitore è acceso, e $X = N$ altrimenti.
- Si assuma che Θ ed N siano indipendenti. Dunque $\Theta + N \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

a) Qual è la prob. che il trasmettitore sia acceso, sapendo che il fotodetector ha captato k fotoni?

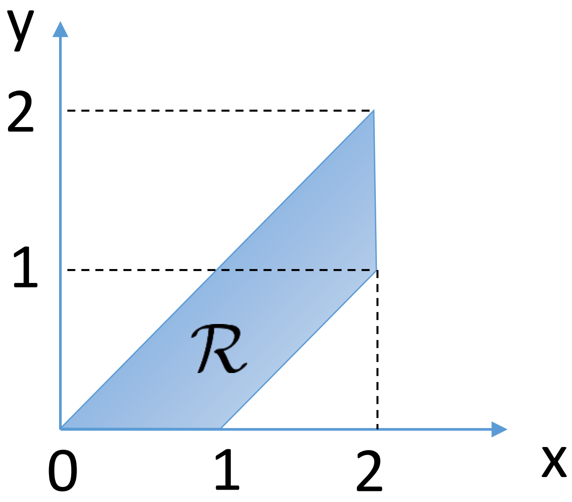
b) Si descriva lo stimatore MAP per decidere se il trasmettitore è acceso

c) Si trovi lo stimatore lineare LMS del numero di fotoni trasmesso, basato sul numero di fotoni ricevuto

Es6: Stima LMS

- Due v.a. continue X e Y hanno una legge congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/3 & (x,y) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Si vuole stimare Y basandosi sull'osservaz. di X

a) Trovare la stima LMS di Y: $\widehat{Y} = g(X)$

b) Calcolare l'errore quadratico medio condizionato $\mathsf{E}[(Y - g(X))^2 | X = x]$

c) Calcolare l'errore quadratico medio $\mathsf{E}[(Y - g(X))^2]$. Coincide con $\mathsf{E}[\mathsf{Var}[Y|X]]$?

d) Trovare $L(X)$, lo stimatore lineare LMS di Y basato su X.

e) Cosa ci si aspetta dal MSE di L(X) rispetto al MSE di g(X)?