Informazione e stima – 01/09/2022

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, codice persona, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Un allenatore di calcio ha a disposizione 3 portieri, 8 difensori, 7 centrocampisti e 4 attaccanti. Per la prossima partita, l'allenatore ha intenzione di schierare 1 portiere, 4 difensori, 4 centrocampisti e 2 attaccanti. Supponendo che l'allenatore scelga 11 giocatori a caso tra i 22 disponibili, calcolare la probabilità che riesca ad ottenere il suo modulo ideale.

2. Ci sono 4 scatole contenenti alcune banconote:
   - la scatola rossa contiene una banconota da €100 e 9 da €5;
   - la scatola verde contiene 2 banconote da €100 e 8 da €5;
   - la scatola blu contiene 3 banconote da €100 e 7 da €5;
   - la scatola gialla contiene 5 banconote da €100 e 5 da €5.

   Pescate una scatola a caso e una banconota a caso dalla scatola. Se la banconota pescata è di €100, qual è la probabilità che la scatola scelta sia quella gialla?

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[-1,1]$. Determinare la legge di $Y = 1/X^2$.

4. Si consideri un insieme di v.a. $\{X_i\}$ iid con $X_i \sim \text{Poisson}(1)$, e due successioni di v.a. $\{Y_n\}$ e $\{W_n\}$ con $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ e $W_n = \sqrt{n}(Y_n - 1)$. Cosa si può dire sulla convergenza delle successioni $\{Y_n\}$ e $\{W_n\}$ per $n \to \infty$?

5. Uno strumento di misura produce dei valori $X = \Theta + N$ dove $N \sim \mathcal{N}(0,10)$ e $\Theta \sim \mathcal{N}(5,1)$, con $N \perp \Theta$. Si trovi la stima LMS lineare di Θ dato un valore di X.

6. Si hanno due monete, una ben bilanciata e una con $\Pr(\text{Testa}) = 0.1$. Si prende una moneta a caso e la si lancia. Il risultato del lancio è il risultato dell'esperimento. Quanto è l'informazione media, in bit, contenuta nel risultato dell'esperimento?

Soluzioni

Problema 1

Lo spazio di probabilità è discreto uniforme. I casi totali sono $\binom{22}{11}$, perché l'allenatore seleziona a caso un sottogruppo di 11 calciatori da un gruppo di 22. I casi favorevoli si possono contare a stadi: nel primo stadio si considera la scelta del portiere, nel secondo i difensori, nel terzo i centrocampisti, e nel quarto gli attaccanti. I casi favorevoli nei quattro casi sono:

$$\binom{3}{1}, \qquad \binom{8}{4}, \qquad \binom{7}{4}, \qquad \binom{4}{2}. \tag{1}$$

I casi favorevoli totali si calcolano tramite la regola moltiplicativa, dunque la risposta finale è:

$$p = \frac{\binom{3}{1}\binom{8}{4}\binom{7}{4}\binom{4}{2}}{\binom{22}{11}} = \frac{44100}{705432} = 0.0625. \tag{2}$$

Problema 2

La probabilità di pescare una qualsiasi scatola è 1/4. La probabilità di pescare una banconota di €100 da ogni scatola è:

$$\Pr(100|\text{rossa}) = 0.1, \qquad \Pr(100|\text{verde}) = 0.2, \qquad \Pr(100|\text{blu}) = 0.3, \qquad \Pr(100|\text{gialla}) = 0.5. \tag{3}$$

La probabilità cercata si può calcolare tramite la regola di Bayes:

$$\Pr(\text{gialla}|100) = \frac{\Pr(100|\text{gialla}) \cdot 1/4}{1/4 \cdot (\Pr(100|\text{rossa}) + \Pr(100|\text{verde}) + \Pr(100|\text{blu}) + \Pr(100|\text{gialla}))} \tag{4}$$

$$= \frac{0.5}{0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.5} = \frac{0.5}{1.1} = 0.4545. \tag{5}$$

Problema 3

Innanzitutto si noti che $Y \in [1, \infty)$. Utilizzando il metodo della cumulata, si ha:

$$F_y(y) = \Pr(Y \leq y) = \Pr(1 \leq yX^2) \tag{6}$$

$$= \Pr\left(X \geq \frac{1}{\sqrt{y}}\right) + \Pr\left(X \leq -\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{7}$$

$$= 2\Pr\left(X \leq -\frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{8}$$

$$= 2\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \tag{9}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{y}}, \qquad y \geq 1. \tag{10}$$

La densità di probabilità si ottiene come

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{1}{2y^{3/2}}, \qquad y \geq 1. \tag{11}$$

Problema 4

Si noti che Y_n è una media campionaria di v.a. iid, dunque possiamo concludere che per la legge debole dei grandi numeri la successione $\{Y_n\}$ converge in probabilità a

$$Y_n \xrightarrow{P} \mathsf{E}[Y_n] = \mathsf{E}[X_1] = 1. \tag{12}$$

Per la successione $\{W_n\}$ si noti che

$$\mathsf{E}[\sqrt{n}W_n] = n(\mathsf{E}[Y_n] - 1) = 0 \tag{13}$$

$$\mathsf{Var}[\sqrt{n}W_n] = n^2\mathsf{Var}[Y_n] = 1, \tag{14}$$

ovvero $\sqrt{n}W_n$ è una v.a. standardizzata (con media zero e varianza uno). Per il teorema centrale del limite sappiamo che $F_{W_n}(c) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(c)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$, dunque la successione $\{W_n\}$ è formata da v.a. che convergono ad una Gaussiana standard.

Problema 5

Dalla teoria sappiamo che l'espressione dello stimatore LMS lineare è:

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{Lin}}(X) = \mathsf{E}[\Theta] + \frac{\mathsf{Cov}[\Theta, X]}{\mathsf{Var}[X]}(X - \mathsf{E}[X]). \tag{15}$$

Dai dati sappiamo che:

$$\mathsf{E}[\Theta] = 5, \qquad \mathsf{E}[X] = \mathsf{E}[\Theta] + \mathsf{E}[N] = 5, \qquad \mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}[\Theta] + \mathsf{Var}[N] = 1 + 10 = 11. \tag{16}$$

Rimane da calcolare il valore atteso del prodotto:

$$\mathsf{E}[\Theta X] = \mathsf{E}[\Theta(\Theta + N)] = \mathsf{E}[\Theta^2] + \mathsf{E}[\Theta]\mathsf{E}[N] = \mathsf{Var}[\Theta] + \mathsf{E}[\Theta]^2 = 1 + 25 = 26, \tag{17}$$

dunque la covarianza risulta

$$\mathsf{Cov}[\Theta, X] = \mathsf{E}[\Theta X] - \mathsf{E}[\Theta]\mathsf{E}[X] = 26 - 25 = 1. \tag{18}$$

Lo stimatore LMS lineare è:

$$\widehat{\Theta}_{\mathrm{Lin}}(X) = 5 + \frac{1}{11}(X - 5). \tag{19}$$

Problema 6

Calcoliamo le probabilità tramite il teorema delle probabilità totali:

$$\Pr(X = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0.3 \tag{20}$$

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{2} = 0.7. \tag{21}$$

L'entropia dell'esperimento è:

$$H(X) = H_2(0.3) = -0.3 \log_2 0.3 - 0.7 \log_2 0.7 \approx 0.88 \text{ bit}. \tag{22}$$