Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FISICA
II Prova in Itinere del 19 giugno 2019

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti, Puppin

1.
Una biglia di vetro sferica, di raggio R e massa M, sta rotolando senza strisciare su un piano inclinato di un angolo β rispetto all'orizzontale. Determinare:

a) il momento d'inerzia della biglia rispetto al centro di istantanea rotazione, sapendo che il momento d'inerzia di una sfera di massa M e raggio R, valutato rispetto a un asse passante per il centro di massa, vale $I_{CM} = 2/5\ M R^2$;
b) il modulo dell'accelerazione del centro di massa della biglia;
c) modulo, direzione e verso della forza d'attrito presente tra la biglia e il piano durante il rotolamento;
d) il minimo coefficiente di attrito statico μ_S che consente il rotolamento senza strisciamento assumendo $\beta = 45°$.

2.
Si enunci e si dimostri il Teorema di Carnot, chiarendo esplicitamente il significato dei simboli utilizzati.

3.
Un contenitore cilindrico chiuso e indeformabile, di altezza h e diametro D, contiene gas biatomico ideale alla pressione atmosferica p_0 e alla temperatura assoluta iniziale T_0.

a) determinare la quantità di calore che deve essere fornita al gas nel cilindro per far triplicare la sua temperatura rispetto al valore iniziale, esprimendo il risultato in funzione dei soli dati sopra specificati;
b) calcolare la variazione di entropia del sistema a seguito di tale trasformazione;
c) calcolare la variazione di entropia dell'universo a seguito di tale trasformazione, se questa è effettuata ponendo il cilindro in contatto termico con un termostato ad una temperatura pari a 10 T_0;
d) dire se la trasformazione effettuata nella modalità del punto c) è reversibile, giustificando la risposta.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Fisica - II Prova in itinere del 19/06/19 - Traccia di soluzione

Problema 1

a) Un asse passante per il centro di istantanea rotazione è posto a distanza R da un asse passante per il centro di massa e parallelo ad esso. Applicando il Teorema di Huygens-Steiner:

$$I_{\mathrm{P}} = I_{\mathrm{CM}} + MR^2 = \frac{2}{5}MR^2 + MR^2$$

$$\boxed{I_{\mathrm{P}} = \frac{7}{5}MR^2}$$

b)
- Consideriamo la Seconda Equazione Cardinale della Dinamica, utilizzando come polo il centro di istantanea rotazione. L'unica forza applicata alla biglia che dà momento non nullo rispetto a questo polo è la forza peso $\vec{P}$.
- L'equazione cardinale può essere scritta in forma scalare:

$$M_{\mathrm{tot}} = I_P\,\alpha$$

dove M_{tot} è il momento meccanico totale delle forze esterne e α è l'accelerazione angolare della biglia. Si risolve allora:

$$R \cdot P \cdot \sin\beta = I_P\,\alpha$$

$$R \cdot Mg \cdot \sin\beta = \frac{7}{5}MR^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{5}{7}\frac{g}{R}\sin\beta$$

- Se il moto di rotolamento è senza strisciamento, l'accelerazione del centro di massa e l'accelerazione angolare sono legate dalla relazione:

$$a = \alpha\,R$$

quindi:

$$\boxed{a = \frac{5}{7}\,g\sin\beta}$$

c)
- Consideriamo la Prima Equazione Cardinale della Dinamica, in forma scalare, proiettata su un asse x parallelo al piano inclinato e orientato nel verso discendente del piano.
- Le forze a cui la biglia è soggetta sono:
  - La forza peso, la cui componente parallela al piano è:

$$P_x = Mg\sin\beta$$

  - La forza di attrito statico, necessariamente parallela al piano. Consideriamo la forza positiva se orientata nel verso discendente del piano.

$$F_a \equiv F_{a,x}$$

  - La forza di reazione vincolare normale al piano inclinato, che per definizione non ha componenti ad esso parallele.

Possiamo dunque scrivere:

$$P_x + F_{a,x} = Ma$$

- Sostituendo le espressioni delle forze e dell'accelerazione:

$$Mg\sin\beta + F_a = \frac{5}{7}\,Mg\sin\beta$$

$$F_a = -\frac{2}{7}Mg\sin\beta$$

- Si conclude che la forza di attrito statico, avente **direzione parallela al piano inclinato**, è orientata nel **verso ascendente** del piano (quindi opposto al verso di traslazione della biglia) e ha modulo:

$$\boxed{\left|\vec{F}_a\right| = \frac{2}{7}Mg\sin\beta}$$

d)

- La forza di attrito statico ha modulo limitato superiormente da:

$$\left|\vec{F}_a\right| \leqslant \mu_{\mathrm{S}}\left|\vec{R}_n\right|$$

dove $\left|\vec{R}_n\right|$ è la reazione vincolare normale al piano inclinato.

- In questo caso, non essendoci moto nella direzione ortogonale al piano, essa deve bilanciare la componente della forza peso ortgonale al piano:

$$\left|\vec{R}_n\right| = \left|\vec{P}_\perp\right| = Mg\cos\beta$$

- Sostituendo:

$$\frac{2}{7}Mg\sin\beta \leqslant \mu_{\mathrm{S}}Mg\cos\beta$$

$$\mu_{\mathrm{S}} \geqslant \frac{2}{7}\tan\beta$$

- Se $\beta = 45°$ si ha $\tan\beta = 1$ e il coefficiente minimo è:

$$\boxed{\mu_{\mathrm{S},min} = \frac{2}{7}}$$

Problema 3

a)

- Il volume del gas è:

$$V = h\pi\frac{D^2}{4}$$

dall'Equazione di Stato dei gas perfetti si ricava:

$$n = \frac{p_0V}{RT_0} = \pi\frac{p_0D^2h}{4RT_0}$$

- Per un riscaldamento isocoro, la quantità di calore scambiato è:

$$Q = n\,c_V\,\Delta T$$

- Per un gas ideale biatomico $c_V = \frac{5}{2}R$ e in questo caso $\Delta T = T_f - T_i = 3T_0 - T_0 = 2T_0$. Perciò:

$$Q = n\,c_V\,\Delta T = \pi\frac{p_0D^2h}{4RT_0}\cdot\frac{5}{2}R\cdot 2T_0$$

$$\boxed{Q = \frac{5}{4}\pi D^2hp_0}$$

b) Per calcolare la variazione di entropia, valutiamo l'integrale di Clausius lungo un riscaldamento isocoro (ipotizzato come reversibile) che conduca dallo stesso stato iniziale allo stesso stato finale.

$$\Delta S_{sist.} = \int_{T_0}^{3\,T_0} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_0}^{3\,T_0} n\, c_V\, \frac{dT}{T} = n\, c_V\, \ln 3$$

$$\Delta S_{sist.} = \pi \frac{p_0 D^2 h}{4RT_0} \cdot \frac{5}{2} R \cdot \ln 3$$

$$\boxed{\Delta S_{sist.} = \frac{5}{8}\pi \frac{p_0 D^2 h}{T_0} \ln 3}$$

c)
- La variazione di entropia dell'universo è la somma della variazione di entropia del sistema e della variazione di entropia dell'ambiente, costituito dal termostato con cui il sistema scambia calore.

$$\Delta S_U = \Delta S_{sist.} + \Delta S_{amb.}$$

- Per valutare la variazione di entropia dell'ambiente, consideriamo una trasformazione equivalente reversibile in cui il termostato cede complessivamente la stessa quantità di calore considerata al punto a).

$$Q_{termostato} = -Q_{sist.} = -Q$$

  Poiché la temperatura del termostato rimane costante a $10T_0$ si può scrivere:

$$\Delta S_{amb.} = \int \frac{\delta Q_{termostato}}{T} = -\frac{Q}{10T_0} = -\frac{5}{4}\pi D^2 h p_0 \cdot \frac{1}{10T_0} = -\frac{1}{8}\pi \frac{p_0 D^2 h}{T_0}$$

- Risulta:

$$\Delta S_U = \frac{5}{8}\pi \frac{p_0 D^2 h}{T_0} \ln 3 - \frac{1}{8}\pi \frac{p_0 D^2 h}{T_0}$$

$$\boxed{\Delta S_U = \frac{1}{8}\pi \frac{p_0 D^2 h}{T_0} (5 \ln 3 - 1)}$$

d) Dal Principio di Aumento dell'Entropia sappiamo che una trasformazione è reversibile se e solo se $\Delta S_U = 0$, altrimenti si ha $\Delta S_U > 0$. L'espressione di ΔS_U ricavata al punto precedente è certamente non nulla (e positiva). La trasformazione è dunque **irreversibile**.