Esercitazioni di Analisi 2

SERIE DI FOURIER

1. Calcola i coefficienti della serie di Fourier della funzione $f(x) = x$, definita per $x \in [0, 2\pi)$ e periodica di periodo $T = 2\pi$. $\left[a_0 = 2\pi,\ a_n = 0\ \forall n \geq 1,\ b_n = -\frac{2}{n}\right]$

2. $*$Data la funzione e^x, $0 \leq x \leq 2\pi$, calcola quanto vale il suo coefficiente a_1 nello sviluppo di Fourier. $\left[a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^x \cos x dx = \frac{e^{2\pi}-1}{2\pi}\right]$

3. Sia $f(x) = 1$, per $x \in [0, \pi)$.

   (a) Determina la serie $F(x)$ di Fourier di f, prolungata per disparità in $[-\pi, \pi]$;
   $\left[F(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin((2n-1)x)\right]$

   (b) Calcola la serie di Fourier di f, prolungata per parità in $[-\pi, \pi]$, avendo posto $f(0) = 1$; $[f(x) = 1]$

   (c) Discuti i vari tipi di convergenza delle serie trovate per i due prolungamenti della funzione (convergenza puntuale, totale, in media quadratica).

4. Data la funzione $f(x) = |\cos x|$, con $x \in (-\pi, \pi]$:

   (a) sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier il prolungamento periodico di $f(x)$;
   [Osserviamo che f ha periodo π, inoltre può essere utile l'identità
   $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$. $F(x) = f(x) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}\cos 2nx$]

   (b) calcola $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$. $\left[\text{valutando } f(0) \text{ si ottiene } \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right]$

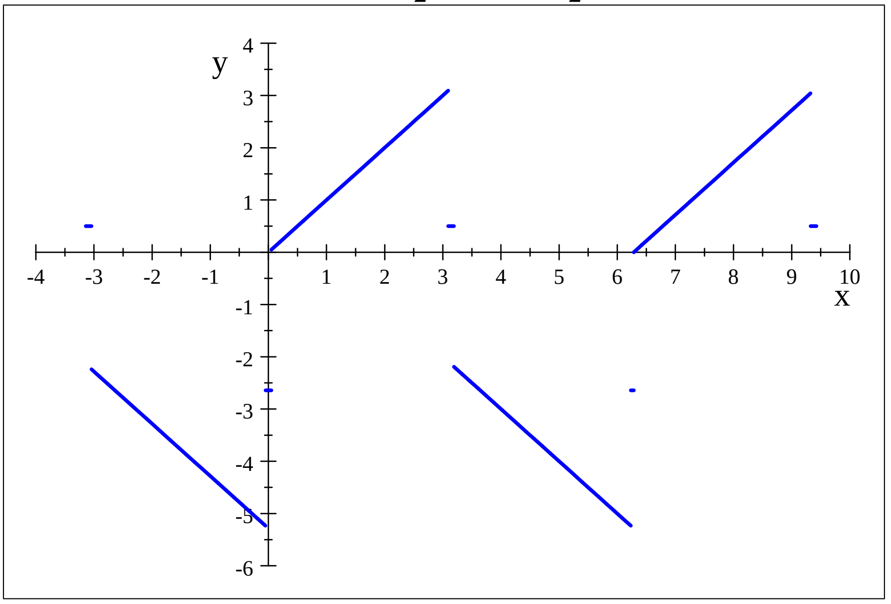
5. $*$Sia $f(x) = x^7$ per $x \in (-\pi, \pi)$; detti a_n e b_n i coefficienti di Fourier del prolungamento 2π-periodico di f, calcola $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.
   $\left[\text{Dall'identità di Bessel-Parseval: } \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right) = \frac{2\pi^{14}}{15}\right]$

6. Sviluppa in serie di Fourier $f(x) = 2 + \sin x + 3\cos(2x)$. $[a_n = \begin{cases} 4 & \text{se } n = 0 \\ 3 & \text{se } n = 2 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}, b_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}]$

7. $*$Sia $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ la serie di Fourier della funzione 2π-periodica $f(x) = (\cos x - \sin x)^2$. Calcola a_0, a_1, b_1, b_2. $\left[(\cos x - \sin x)^2 = 1 - \sin 2x;\ a_0 = 2, a_1 = 0, b_1 = 0, b_2 = -1\right]$

8. $*$Disegna in $[-\pi, 3\pi]$ la somma della serie di Fourier associata a $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \\ 1 - x & \text{se } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$.

[f è regolare a tratti in $[0, 2\pi]$ perciò la serie di Fourier ad essa associata converge ad f dove f è continua, nei punti x_0 dove f è discontinua la serie converge alla media $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$. In particolare, se $x_0 = 2k\pi$, $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \dfrac{1}{2} - \pi$; se $x_0 = \pi + 2k\pi$, $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \dfrac{1}{2}$]



9. $*$Disegna la somma della serie di Fourier associata a $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x \leq \pi \\ 1 - x & \text{se } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$.
[f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ perciò la serie di Fourier ad essa associata converge ad f dove f è continua, nei punti x_0 dove f è discontinua la serie converge alla media $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$. In particolare, se $x_0 = 2k\pi$, $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \dfrac{1}{2}$; se $x_0 = \pi + 2k\pi$, $\dfrac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \dfrac{1 + \pi + \pi^2}{2}$]

10. Data la funzione $f(x) = 1 - 2\cos x + |x|$, di periodo 2π e definita su $[-\pi, \pi]$, sviluppala in serie di Fourier. $\left[f(x) = 1 + \dfrac{\pi}{2} - \left(2 + \dfrac{4}{\pi}\right)\cos x - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)x) \right]$

11. Sia $f(x) = x^6 + 6\sin x$ definita in $(-\pi, \pi]$ e prolungata a una funzione 2π-periodica. Sia $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ la sua serie di Fourier. Determina b_1 e b_{11}. $[b_1 = 6,\ b_{11} = 0]$

12. Determina lo sviluppo $F(x)$ in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ definita su $(-\pi, \pi]$ e prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$. $\left[F(x) = \dfrac{1}{3}\pi^2 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4}{n^2}(-1)^n \cos(nx) \right]$

13. Determina lo sviluppo $F(x)$ in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^2$ definita su $[-1, 1)$ e prolungata a una funzione 2-periodica su $\mathbb{R}$. $\left[F(x) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{4}{\pi^2 n^2}(-1)^n \cos(n\pi x) \right]$

14. Utilizzando in modo opportuno la serie di Fourier dell'Esercizio 12, calcola $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. $\left[\dfrac{\pi^2}{6} \quad (f(\pi) = ..)\right]$

15. Utilizzando in modo opportuno la serie di Fourier dell'Esercizio 12, calcola $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
$\left[\dfrac{\pi^4}{90} \quad \text{(identità di Bessel-Parseval)}\right]$

16. Disegna un grafico qualitativo (almeno 2 periodi) della funzione f, periodica di periodo 2 e pari, tale che $f(x) = |e^x - 2|$ sull'intervallo $[0, 1]$.

17. Determina i coefficienti della serie di Fourier della funzione $f(x) = 4 - 2\sin x + 3\cos 3x$.
$$\left[a_n = \begin{cases} 8 & \text{se } n = 0 \\ 3 & \text{se } n = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, b_n = \begin{cases} -2 & \text{se } n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}\right]$$

18. Determina i coefficienti della serie $F(x)$ di Fourier della funzione onda quadra $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$ prolungata a una funzione di periodo 2π su $\mathbb{R}$. $\left[F(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n\pi} \sin nx\right]$

19. Utilizzando in modo opportuno lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x^3$, calcola la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}$. $\left[\dfrac{\pi^6}{945}\right]$

20. Sia f la funzione periodica di periodo 2 che vale $\dfrac{1}{x+1}$ per $x \in [0, 2)$. La serie di Fourier di f converge puntualmente su $\mathbb{R}$? Se sì, a quale funzione?

21. Sia f la funzione 2π-periodica definita ponendo $f(x) = \cos x + 1 - |x|$ su $[-\pi, \pi)$.

    (a) Disegna il grafico di f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$;

    (b) Determina le serie di Fourier $F(x)$ associata a f;
    $$\left[F(x) = 1 - \frac{\pi}{2} + \left(1 + \frac{4}{\pi}\right)\cos x + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)x)\right]$$

    (c) La serie converge puntualmente, in media quadratica, totalmente?

22. Sia f la funzione di periodo 2π, pari, definita su $[0, \pi)$ da $f(x) = 2 - x$.

    (a) Disegna un grafico qualitativo di f e scrivi la serie $F(x)$ di Fourier di f.
    $$\left[F(x) = \frac{4-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\right]$$

    (b) La serie converge in media quadratica, puntualmente, totalmente?

    (c) La serie delle derivate converge totalmente?

23. Sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier il prolungamento periodico della funzione $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{per } x \in (-\pi, 0] \\ 1 & \text{per } x \in (0, \pi] \end{cases}$.

$$\left[F(x) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x \right]$$

24. *Sia f la funzione 2π periodica definita su $[-\pi, \pi)$ da $f(x) = \dfrac{x - |x|}{2}$:

   (a) disegna il grafico di f sull'intervallo $(-2\pi, 2\pi)$;

   (b) scrivi la serie di Fourier di f; $[a_0 = -\dfrac{\pi}{2}$; $a_n = 0$ se n è pari, $a_n = \dfrac{2}{\pi n^2}$ se n è dispari; $b_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}]$

   (c) calcola il limite puntuale della serie di Fourier di f e deduci il valore della somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$; [Il prolungamento periodico di $f(x)$ è una funzione regolare a tratti, continua in $\mathbb{R}$ tranne che in $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. La serie di Fourier converge a f in ogni punto di $\mathbb{R}$ tranne che in $x = \pi + 2k\pi$, dove converge a $-\dfrac{\pi}{2}$. Valutando f in 0 si ottiene: $f(0) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(0) + b_n \sin(0)) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ da cui $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$]

25. Sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier il prolungamento periodico della funzione $f(x) = x$, con $x \in (-\pi, \pi]$ e dimostra la formula $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\left[F(x) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx; \text{ la formula si ottiene dall'identità di Bessel-Parseval} \right]$$

26. Sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier il prolungamento periodico della funzione $f(x) = x^4$, con $x \in (-\pi, \pi]$ e dimostra la formula $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

[$F(x) = \dfrac{\pi^4}{5} + 8\pi^2 \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx - 48 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$; la formula si ottiene valutando la serie e la funzione in $x = \pi$ e ricordando che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (esercizi 14 e 25)]

27. Sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier la funzione $f(x) = \dfrac{|x| + x}{2}$ con $x \in [-\pi, \pi)$ e periodica di periodo $T = 2\pi$ e determina la somma della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

[$F(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ (la formula si ottiene dall'identità di Bessel-Parseval e ricordando che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)]

28. Sviluppa in serie $F(x)$ di Fourier il prolungamento periodico della funzione $f(x)=\begin{cases} x & \text{per } x\in(-\pi,0] \\ 2x & \text{per } x\in(0,\pi] \end{cases}$.

$$\left[F(x)=-\frac{\pi}{4}-\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\cos nx+\frac{3(-1)^n}{n}\sin nx\right)\right]$$

29. Calcola la serie di Fourier di $f(x)=(\cos x-1)^3$. $\left[f(x)=-\frac{5}{2}+\frac{15}{4}\cos x-\frac{3}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 3x\right]$

30. Sia $g(x)=\begin{cases} 1 & x\in[0,\frac{\pi}{2}] \\ e^{-x} & x\in(\frac{\pi}{2},\pi] \end{cases}$ e $f(x)$ il prolungamento per parità di $g(x)$ in $[-\pi,\pi]$.

(a) traccia il grafico di $f(x)$;

(b) determina la serie di Fourier del prolungamento periodico di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;

(c) stabilisci dove la serie converge puntualmente a f. A cosa converge la serie in $x=\frac{\pi}{2}$?

31. E' data la funzione $f(x)=\begin{cases} x+1 & x\in(-\pi,0] \\ x-1 & x\in(0,\pi] \end{cases}$

(a) traccia il grafico di $f(x)$;

(b) determina la serie $F(x)$ di Fourier del prolungamento periodico di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;
$$\left[F(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left[(1-\pi)\cos n\pi-1\right]\sin nx\right]$$

(c) studia la convergenza della serie e scrivine la somma.
[La serie $F(x)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$; $F(x)=f(x)$ per $x\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$; $F(k\pi)=0\neq f(k\pi)$]

32. E' data la funzione $f(x)=\begin{cases} x(\pi+x) & x\in[-\pi,0) \\ x(\pi-x) & x\in[0,\pi) \end{cases}$

(a) traccia il grafico di $f(x)$ e verifica che il prolungamento periodico di $f(x)$ su $\mathbb{R}$ è derivabile;

(b) determina la serie $F(x)$ di Fourier del prolungamento periodico di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;
$$\left[F(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin(2n-1)x\right]$$

(c) La serie converge in media quadratica, puntualmente, totalmente?

33. E' data la funzione $f(x)=\begin{cases} 2(x+1) & x\in[-1,-\frac{1}{2}] \\ 1 & x\in(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}] \\ -2(x-1) & x\in(\frac{1}{2},1] \end{cases}$

(a) traccia il grafico di $f(x)$;

(b) determina la serie $F(x)$ di Fourier del prolungamento periodico di $f(x)$ su $\mathbb{R}$;
$$\left[F(x)=f(x)=\frac{3}{4}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\left(\cos n\frac{\pi}{2}-\cos n\pi\right)\cos n\pi x\right]$$

34. Calcola la serie di Fourier di $f(x) = |x| - 2\pi \sin 4x$ con $|x| < \pi$ e discutine la convergenza.

[f è somma di una funzione pari e di una dispari: $|x|$ determina i coefficienti a_n, $-2\pi \sin 4x$ i coefficienti b_n. $a_0 = 0$; $a_n = \dfrac{2}{\pi}\dfrac{(-1)^n - 1}{n^2} = \dfrac{4}{\pi}\dfrac{-1}{(2n-1)^2}$, $n \geq 1$; $b_n = 0$ per $n \neq 4$; $b_4 = -2\pi$.Il prolungamento periodico di f è continuo con derivata limitata in $\mathbb{R}$ perciò la serie converge puntualmente in $\mathbb{R}$.]

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono temi d'esame.