PROF. E. MALUTA

ANALISI MATEMATICA 2

18 LUGLIO 2018

SVOLGIMENTO

$$D = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2+y^2-y \le 0 \wedge |z| \le \sqrt{x^2+y^2}\}$$

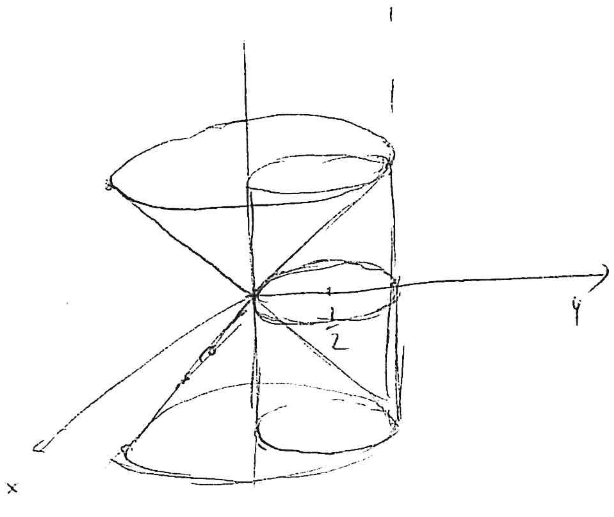
passaggio a cilindriche

$$\hat{D} = \{(\rho,\vartheta,z) \in R^3 : \rho \le \sin\vartheta \wedge 0 \le \vartheta \le \pi \wedge |z| \le \rho\}$$

$$\int_D 1 \, dx\, dy\, dz = \int_{\hat{D}} \rho \, d\rho\, d\vartheta\, dz = \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin\vartheta} \rho \left(\int_{-\rho}^{\rho} dz \right) d\rho \right) d\vartheta =$$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{\sin\vartheta} 2\rho^2 \, d\rho \right) d\vartheta = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{3} \int_0^\pi \sin\vartheta (1-\cos^2\vartheta) d\vartheta$$

$$= \left[-\frac{2}{3}\cos\vartheta + \frac{2}{9}\cos^3\vartheta \right]_0^\pi = \frac{8}{9}$$



D è l'intersezione del cilindro retto che si proietta sul cerchio $x^2+y^2-y \le 0$ con l'esterno del cono di equazione $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

2

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{y}{(x-2)^2+y^2} , \frac{2-x}{(x-2)^2+y^2} \right)$$

i) $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$ ~ aperto, illimitato, connesso ma non semplicemente connesso.

ii) $$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{(x-2)^2 - 2y^2}{((x-2)^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)$$ $\underline{F}$ irrotazionale

iii) $C_1 \subseteq \{(x,y) : x < 2\} = \Omega_1$ $\quad \Omega_1$ semplicemente connesso

$$\Rightarrow \int_{C_1} \underline{F}(x,y) \cdot (dx,dy) = 0 \quad (\underline{F} \text{ conservativo su } \Omega_1)$$

$$\int_{C_2} \underline{F}(x,y) \cdot (dx, dy) =$$

$$\underline{r}_2(t) = \begin{cases} x(t) = 2 + \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$$\underline{r}_2'(t) = \begin{cases} -\sin t \\ \cos t \end{cases}$$

$t \in [-\pi, \pi]$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt = -2\pi$$

iv) Poiché $\int_{C_2} \underline{F}(x,y)(dx,dy) \neq 0$, $\underline{F}$ non ammette potenziale su Ω.

$$y' = \frac{1}{t} y + \frac{1}{t} y^{-1} = \frac{1}{t}\left(\frac{1+y^2}{y}\right)$$

a) $f(t) = \frac{1}{t}$ $\quad f \in C(R \setminus \{0\})$ $\quad$ quindi $\forall (t_0, y_0)$

$g(t) = \frac{1+y^2}{y}$ $\quad g \in C^1(R \setminus \{0\})$ $\quad$ con $t_0 \neq 0$ e $y_0 \neq 0$

b) φ soluz non può annullarsi - essendo continua non può cambiare segno -

c) per $y \neq 0$ $\quad y'y = \frac{1}{t} y^2 + \frac{1}{t}$ $\quad$ poniamo $y^2 = z$, $z > 0$

da cui $\quad z' = \frac{2}{t} z + \frac{2}{t}$

$$z(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt}\left(c + \int \frac{2}{t} e^{-\int \frac{2}{t} dt}\right) = (c t^2 - 1)$$

$z(\pm 1) = 1 \qquad 1 = c - 1 \quad \Rightarrow \quad c = 2$

$z(t) = 2t^2 - 1 \qquad \left(z(t) > 0 \text{ quindi } |t| > \frac{1}{2}\right)$

φ_1 soluz per $y(1) = 1 \qquad \varphi_1(t) = \sqrt{2t^2 - 1}$ prolungabile su $t \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

φ_2 soluz per $y(-1) = -1 \qquad \varphi_2(t) = -\sqrt{2t^2 - 1}$ prolungabile su $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$