Esercizi sugli integrali doppi

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali doppi:

1) $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\right\}.$

2) $\displaystyle\int_\Omega \left(x^2-x\,e^y\right)\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ 1\le x\le 2,\ -1\le y\le 3\right\}.$

3) $\displaystyle\int_\Omega xy\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2\le y\le \sqrt{x}\right\}.$

4) $\displaystyle\int_\Omega (x+y)\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2+y^2\le 1,\ 0\le y\le x\right\}.$

5) $\displaystyle\int_\Omega xy\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$

6) $\displaystyle\int_\Omega 8xy\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2+y^2\le 4,\ 0\le x\le y+2\right\}.$

7) $\displaystyle\int_\Omega xy^2\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2+y^2\le 1,\ y\le x+1\right\}.$

8) $\displaystyle\int_\Omega 2x\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ 1\le x+y\le 2,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$

9) $\displaystyle\int_\Omega xy^2\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ 9x^2+4y^2\le 36,\ x\ge 0\right\}.$

10) $\displaystyle\int_\Omega \left(1+\frac{8x^2}{x^2+y^2}\right)\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2+y^2\le 9,\ 9x^2+y^2\ge 9,\ -x\le y\le 0\right\}.$

11) $\displaystyle\int_\Omega \frac{6}{x^2(y-1)}\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ y\ge 2,\ \frac{2y-3}{y-1}\le x\le \frac{y}{y-1}\right\}.$

12) $\displaystyle\int_\Omega 3y\, dx\, dy, \qquad \Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ x^2+y^2\le 3,\ y\ge \sqrt{2x}\right\}.$

SVOLGIMENTO

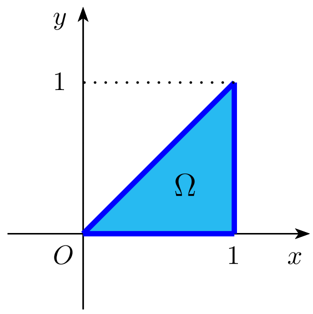
1) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le x\right\}.$$

L'insieme Ω è y-semplice. Quindi si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2+y^2\right)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\int_0^x \left(x^2+y^2\right)\, dy\right] dx =$$

$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{4}{3}x^3\, dx = \left[\frac{1}{3}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$



2) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega \left(x^2 - x\, e^y\right)\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ 1\le x\le 2,\ \ -1\le y\le 3\right\}.$$

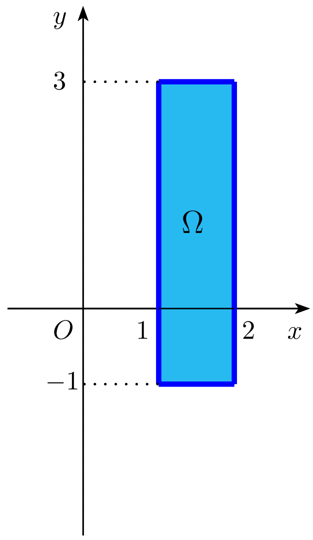
L'insieme Ω è sia x-semplice che y-semplice, infatti è un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Si ha che

$$\int_\Omega \left(x^2 - x\, e^y\right)\, dx\, dy = \int_\Omega x^2\, dx\, dy - \int_\Omega x\, e^y\, dx\, dy =$$

essendo Ω un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati e le funzioni integrande prodotto di una funzione di x e di una funzione di y si ottiene

$$= \left(\int_1^2 x^2\, dx\right)\left(\int_{-1}^3 1\, dy\right) - \left(\int_1^2 x\, dx\right)\left(\int_{-1}^3 e^y\, dy\right) =$$

$$= 4\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \left[e^y\right]_{-1}^3 = \frac{28}{3} - \frac{3}{2}\left(e^3 - e^{-1}\right).$$

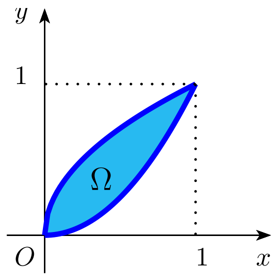


3) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy\, dx\, dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \ x^2\le y\le \sqrt{x}\right\}.$$

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti, si ha che

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ \ x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\right\}.$$



Quindi si ha che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\,dy\right]\,dx =$$

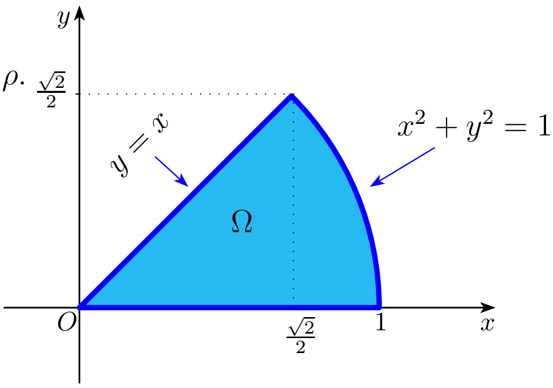
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 - x^5\right)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

4) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq x\right\}.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \geq 0, \ \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$



Allora

$$(x,y) \in \Omega \quad \iff \quad \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Ne segue che

$$\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^2(\cos\vartheta + \sin\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una funzione di ϑ si ottiene

$$= \left(\int_0^1 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\vartheta + \sin\vartheta)\,d\vartheta\right) = \left[\frac{1}{3}\rho^3\right]_0^1 \left[\sin\vartheta - \cos\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}.$$

5) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, \ \ x \ge 0, \ \ y \ge 0\right\}.$$

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

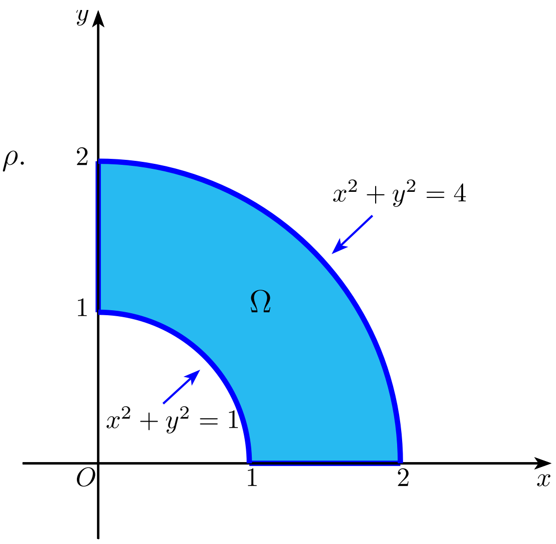
$$\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0, \ 0 \le \vartheta \le 2\pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = \rho.$$

Allora

$$(x,y) \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 \le \rho \le 2 \\ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \le \rho \le 2, \ 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$



Ne segue che

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una funzione di ϑ si ottiene

$$= \left(\int_1^2 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta\,d\vartheta\right) = \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{15}{8}.$$

6) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega 8xy\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \le 4, \ \ 0 \le x \le y + 2\right\}.$$

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti, si ha che

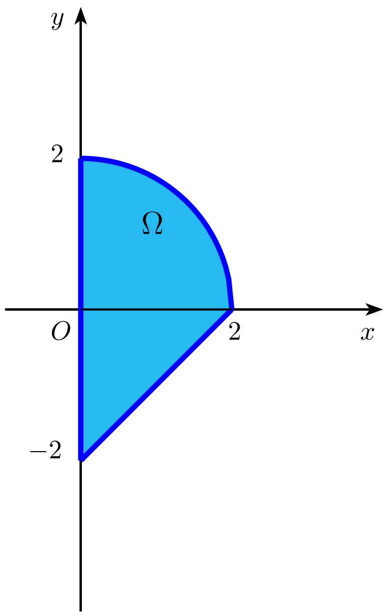
$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ 0 \le x \le 2, \ \ x-2 \le y \le \sqrt{4-x^2} \right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_\Omega 8xy \, dx \, dy = 8 \int_0^2 \left[\int_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy \right] dx =$$

$$= 8 \int_0^2 \left[\frac{1}{2} xy^2 \right]_{x-2}^{\sqrt{4-x^2}} dx = 8 \int_0^2 \left(2x^2 - x^3 \right) dx =$$

$$= 8 \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 = \frac{32}{3}.$$

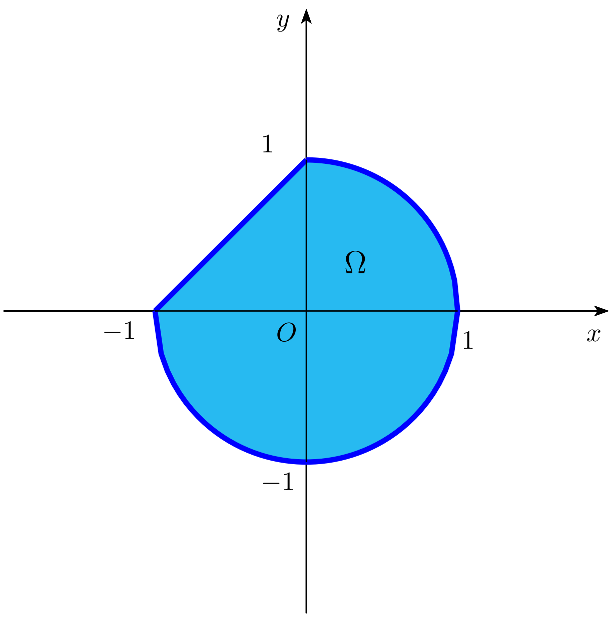


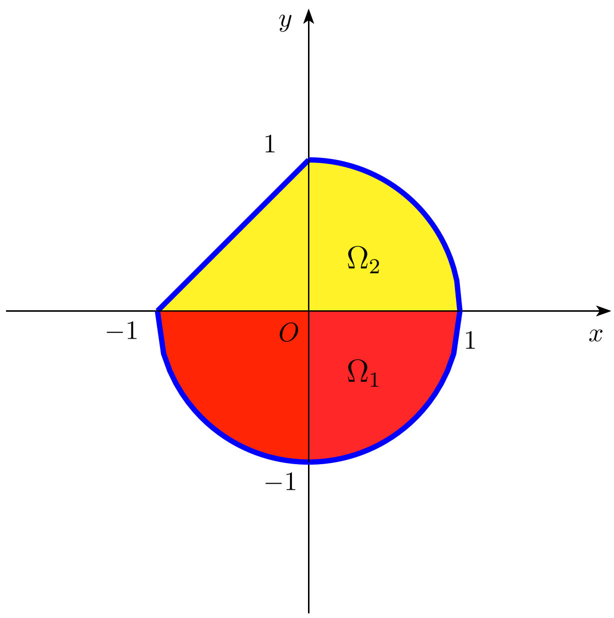
7) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega xy^2 \, dx \, dy$, dove

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 1, \ \ y \le x+1 \right\}.$$

Osserviamo che $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, dove

$$\Omega_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 1, \ \ y \le 0 \right\}, \quad \Omega_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \ x^2 + y^2 \le 1, \ \ 0 \le y \le x+1 \right\}.$$





Poiché $m(\Omega_1 \cap \Omega_2) = 0$, si ha che

$$\int_\Omega xy^2 \, dx \, dy = \int_{\Omega_1} xy^2 \, dx \, dy + \int_{\Omega_2} xy^2 \, dx \, dy.$$

L'insieme Ω_1 è simmetrico rispetto all'asse y e la funzione integranda $f(x,y)=xy^2$ è dispari rispetto alla variabile x. Infatti,

$$(x,y)\in\Omega_1 \quad\Longrightarrow\quad x^2+y^2\le 1,\ \ y\le 0$$

e

$$(-x)^2+y^2=x^2+y^2\le 1,\ \ y\le 0 \quad\Longrightarrow\quad (-x,y)\in\Omega_1,$$

$$f(-x,y)=(-x)y^2=-xy^2=-f(x,y).$$

Quindi $\displaystyle\int_{\Omega_1} xy^2\,dx\,dy=0.$

Invece l'insieme Ω_2 è x-semplice. Infatti, si ha che

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le y\le 1,\ \ y-1\le x\le\sqrt{1-y^2}\right\}.$$

Quindi si ha che

$$\int_{\Omega_2} xy^2\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\,dx\right]dy=\int_0^1\left[\frac{1}{2}x^2y^2\right]_{y-1}^{\sqrt{1-y^2}}dy=$$

$$=\int_0^1\left(y^3-y^4\right)dy=\left[\frac{1}{4}y^4-\frac{1}{5}y^5\right]_0^1=\frac{1}{20}.$$

In conclusione

$$\int_{\Omega} xy^2\,dx\,dy=\int_{\Omega_1} xy^2\,dx\,dy+\int_{\Omega_2} xy^2\,dx\,dy=\frac{1}{20}.$$

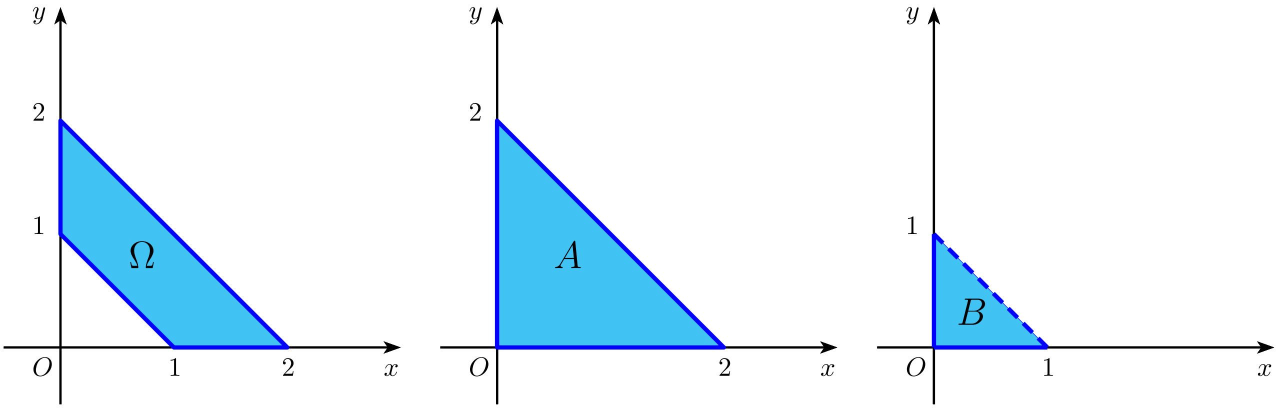
8) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega 2x\,dx\,dy$, dove

$$\Omega=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 1\le x+y\le \overset{2}{\cancel{1}},\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\right\}.$$

Osserviamo che $\Omega=A\setminus B$, dove

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le x+y\le 2,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le y\le 2-x,\ \ 0\le x\le 2\right\},$$

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le x+y<1,\ \ x\ge 0,\ \ y\ge 0\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ 0\le y<1-x,\ \ 0\le x<1\right\}.$$



Quindi

$$\int_\Omega 2x\,dx\,dy = \int_A 2x\,dx\,dy - \int_B 2x\,dx\,dy =$$

essendo A e B insiemi y-semplici si ottiene

$$= 2\int_0^2 \left(\int_0^{2-x} x\,dy\right)\,dx - 2\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} x\,dy\right)\,dx = 2\int_0^2 \Big[xy\Big]_0^{2-x}\,dx - 2\int_0^1 \int_0^1 \Big[xy\Big]_0^{1-x}\,dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left(2x - x^2\right)\,dx - 2\int_0^1 \left(x - x^2\right)\,dx = 2\left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 - 2\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{7}{3}.$$

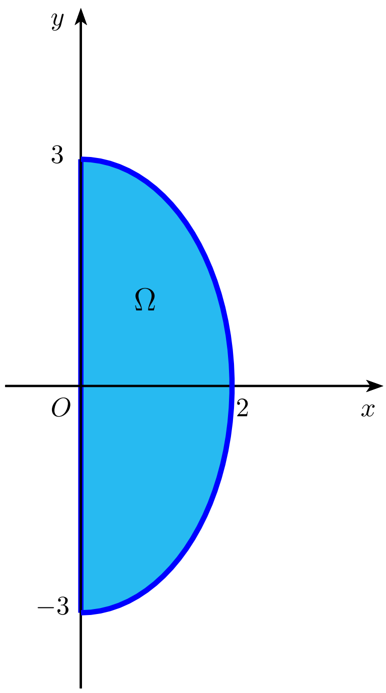
9) Consideriamo l'integrale $\int_\Omega xy^2\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 9x^2 + 4y^2 \le 36,\ \ x \ge 0\right\}.$$

L'inseme Ω è l'insieme dei punti del piano compresi fra l'asse y e l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Passiamo in coordinate ellittiche nel piano. Poiché l'insieme Ω è contenuto nei I e IV quadrante, conviene scegliere che la coordinata ϑ appartenga all'intervallo $[-\pi, \pi]$. Poniamo quindi

$$\Phi : \begin{cases} x = 2\rho\cos\vartheta \\ y = 3\rho\sin\vartheta, \end{cases} \qquad \rho \ge 0,\ -\pi \le \vartheta \le \pi, \qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)| = 6\rho.$$



Allora

$$(x,y) \in \Omega \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Quindi si ha che $\Omega = \Phi(\Omega')$, dove

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 :\ \ 0 \le \rho \le 1,\ -\frac{\pi}{2} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Ne segue che

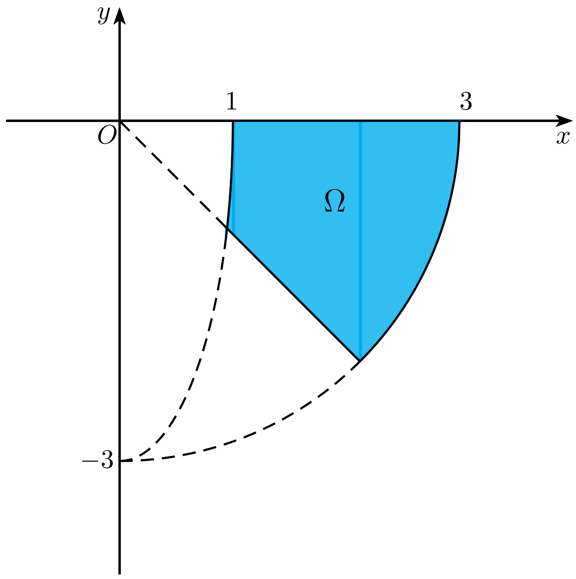
$$\int_\Omega xy^2\,dx\,dy = \int_{\Omega'} 108\rho^4\cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\rho\,d\vartheta =$$

essendo Ω' un rettangolo con lati paralleli agli assi ρ e ϑ e la funzione integranda prodotto di una funzione di ρ e di una funzione di ϑ si ottiene

$$= 108\left(\int_0^1 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right) = 108\left[\frac{1}{5}\rho^5\right]_0^1\left[\frac{1}{3}\sin^3\vartheta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{72}{5}.$$

10) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \left(1+\frac{8x^2}{x^2+y^2}\right)dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ x^2+y^2\le 9,\ \ 9x^2+y^2\ge 9,\ \ -x\le y\le 0\right\}.$$



L'inseme Ω è l'insieme dei punti IV quadrante compresi fra l'ellisse di equazione $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$, la circonferenza $x^2+y^2=9$, la retta $y=-x$ e l'asse x.

Passiamo in coordinate polari nel piano. Poniamo quindi

$$\Phi:\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta\\ y=\rho\sin\vartheta,\end{cases}\qquad \rho\ge 0,\ -\pi\le\vartheta\le\pi,\qquad |\det J_\Phi(\rho,\vartheta)|=\rho.$$

Allora

$$(x,y)\in\Omega \implies \begin{cases} x^2+y^2\le 9\\ 9x^2+y^2\ge 9\\ -x\le y\le 0\end{cases} \implies \begin{cases}\rho\le 3\\ \rho^2\left(9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\right)\ge 9\\ -\cos\vartheta\le\sin\vartheta\le 0\end{cases} \implies \begin{cases}\dfrac{3}{\sqrt{9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta}}\le\rho\le 3\\ -\frac{\pi}{4}\le\vartheta\le 0.\end{cases}$$

Poiché $9\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta = 8\cos^2\vartheta+\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta = 8\cos^2\vartheta+1$, si ha che

$$\Omega' = \left\{(\rho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2:\ \ \frac{3}{\sqrt{8\cos^2\vartheta+1}}\le\rho\le 3,\ \ -\frac{\pi}{4}\le\vartheta\le 0\right\}.$$

Essendo Ω' un insieme ρ semplice, si ha che

$$\int_\Omega\left(1+\frac{8x^2}{x^2+y^2}\right)dx\,dy = \int_{\Omega'}\left(1+8\cos^2\vartheta\right)\rho\,d\rho\,d\vartheta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0\left(\int_{\frac{3}{\sqrt{8\cos^2\vartheta+1}}}^3 \left(1+8\cos^2\vartheta\right)\rho\,d\rho\right)d\vartheta =$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(1 + 8\cos^2\vartheta\right) \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\frac{3}{\sqrt{8\cos^2\vartheta+1}}}^{3} d\vartheta = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(1 + 8\cos^2\vartheta\right)\left(9 - \frac{9}{8\cos^2\vartheta + 1}\right) d\vartheta =$$

$$= 36\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \cos^2\vartheta\, d\vartheta = 36\left[\frac{1}{2}(\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0} = \frac{9}{2}\pi + 9.$$

11) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega \frac{6}{x^2(y-1)}\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 2, \ \frac{2y-3}{y-1} \leq x \leq \frac{y}{y-1}\right\}.$$

Si ha che per $y \geq 2$

$$\frac{2y-3}{y-1} \leq \frac{y}{y-1} \quad \Longleftrightarrow \quad 2y - 3 \leq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \leq 3.$$

Quindi

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2 \leq y \leq 3, \ \frac{2y-3}{y-1} \leq x \leq \frac{y}{y-1}\right\}.$$

Ne segue che Ω è un insieme x-semplice. Di conseguenza si ha che

$$\int_\Omega \frac{6}{x^2(y-1)}\,dx\,dy = \int_2^3 \left(\int_{\frac{2y-3}{y-1}}^{\frac{y}{y-1}} \frac{6}{x^2(y-1)}\,dx\right) dy = 6\int_2^3 \frac{1}{y-1}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{2y-3}{y-1}}^{\frac{y}{y-1}} dy =$$

$$= -6\int_2^3 \frac{1}{y-1}\left(\frac{y-1}{y} - \frac{y-1}{2y-3}\right) dy = -6\int_2^3 \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2y-3}\right) dy =$$

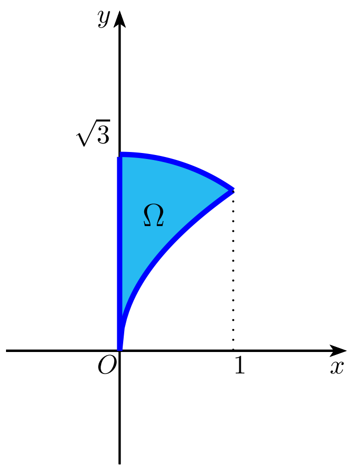
$$= -6\left[\log|y| - \frac{1}{2}\log|2y-3|\right]_2^3 = \log(64) - \log(27).$$

12) Consideriamo l'integrale $\displaystyle\int_\Omega 3y\,dx\,dy$, dove

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 3, \ y \geq \sqrt{2x}\right\}.$$

L'insieme Ω è y-semplice. Infatti,

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ \sqrt{2x} \leq y \leq \sqrt{3 - x^2}\right\}.$$



Quindi si ha che

$$\int_\Omega 3y\,dx\,dy = 3\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3-x^2}} y\,dy\right] dx = 3\int_0^1 \left[\frac{1}{2}y^2\right]_{\sqrt{2x}}^{\sqrt{3-x^2}} dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 \left(3 - 2x - x^2\right) dx = \frac{3}{2}\left[3x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{5}{2}.$$