INTEGRALI TRIPLI
Esercizi svolti - SOLUZIONI

1. Calcolare i seguenti integrali tripli:

(a) $\displaystyle\int_A xye^{xz}\,dx\,dy\,dz,\ A = [0,2]\times[1,3]\times[0,1]$.

Il calcolo dell'integrale triplo può essere ridotto al calcolo di tre integrali semplici successivi.

$$\int_A xye^{xz} = \int_1^3 \left(\int_0^2 \left(\int_0^1 xye^{xz}\,dz\right)\,dx\right)\,dy = \int_1^3 y\left(\int_0^2 [e^{xz}]_0^1\,dx\right)\,dy =$$

$$= \int_1^3 y\left(\int_0^2 (e^x-1)\,dx\right)\,dy = \int_1^3 y[e^x - x]_0^2\,dy = (e^2-3)\int_1^3 y\,dy = (e^2-3)\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = 4(e^2-3).$$

(b) $\displaystyle\int_A x\,dx\,dy\,dz,\ A = \{(x,y,z) : x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

Integrando per strati paralleli al piano xy si ha

$$\int_A x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{A_z} x\,dx\,dy\right)\,dz$$

dove A_z è l'insieme definito dalle disequazioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1-z \\ 0 \leq y \leq -x+1-z. \end{cases}$$

Applicando la formula di integrazione per verticali si ottiene

$$\int_{A_z} x\,dx\,dy = \int_0^{1-z}\left(\int_0^{-x+1-z} x\,dy\right)\,dx = \int_0^{1-z} x[y]_0^{-x+1-z}\,dx =$$

$$= \int_0^{1-z}(-x^2+x(1-z))\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+(1-z)\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-z} = \frac{(1-z)^3}{6}$$

e successivamente

$$\int_0^1\left(\int_{A_z} x\,dx\,dy\right)\,dz = \frac{1}{6}\int_0^1 (1-z)^3\,dz = \frac{1}{6}\left[-\frac{(1-z)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

(c) $\displaystyle\int_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz,\ A = \{(x,y,z) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x+1, 0 \leq z \leq x+y\}$.

Si ha, integrando per fili paralleli rispetto all'asse z

$$\int_A (x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)\,dx\,dy,$$

con $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y \leq x+1\}$ e applicando su D la formula di integrazione per verticali, si può scrivere:

$$\int_D\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\left(\int_0^{x+y}(x+y+z)\,dz\right)\,dy\right)\,dx =$$

$$= \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\left[(x+y)z+\frac{z^2}{2}\right]_0^{x+y}\,dy\right)\,dx = \int_0^1\left(\int_{2x}^{x+1}\frac{3}{2}(x+y)^2\,dy\right)\,dx =$$

$$= \int_0^1\left[\frac{1}{2}(x+y)^3\right]_{2x}^{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1(-19x^3+12x^2+6x+1)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{19}{4}x^4+4x^3+3x^2+x\right]_0^1 = \frac{13}{8}.$$

(d) $\displaystyle\int_A x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz,\ A=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2\le 1, x^2\ge y^2+z^2, x\ge 0\}.$
Si ha, integrando per fili paralleli all'asse x

$$\int_A x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x(y^2+z^2)\,dx\right)dy\,dz, =$$
$$= \int_D (y^2+z^2)\left(\int_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x\,dz\right)dy\,dz, = \int_D (y^2+z^2)\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\sqrt{y^2+z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dy\,dz =$$
$$= \frac{1}{2}\int_D (y^2+z^2)(1-2y^2-2z^2)\,dy\,dz$$

con $D=\{(y,z): y^2+z^2\le 1/2\}$.
Passando a coordinate polari nel piano y,z si ha

$$\frac{1}{2}\int_D (y^2+z^2)(1-2y^2-2z^2)\,dy\,dz = \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}(\rho^3-2\rho^5)\,d\theta\right)d\rho =$$
$$= \pi\int_0^{1/\sqrt{2}}(\rho^3-2\rho^5)\,d\rho = \pi\left[\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{3}\right]_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{48}.$$

Alternativamente, per calcolare l'integrale proposto, si possono usare le coordinate cilindriche,

$$\begin{cases} x = t\\ y=\rho\cos\theta\\ z=\rho\sin\theta,\end{cases}$$

che trasformano l'insieme A' dello spazio (t,ρ,θ), definito da

$$A'=\{(t,\rho,\theta): \rho\le t\le\sqrt{1-\rho^2}, 0\le\rho\le 1/\sqrt{2}, 0\le\theta\le 2\pi\},$$

nell'insieme A dello spazio (x,y,z).
Utilizzando la formula del cambiamento di variabili e ricordando che

$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(t,\rho,\theta)}=\rho,$$

si trova

$$\int_A x(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_0^{2\pi}\left(\int_\rho^{\sqrt{1-\rho^2}} t\rho^3\,dt\right)d\theta\right)d\rho = \frac{\pi}{48},$$

con calcoli identici ai precedenti.

2. Calcolare il baricentro e il volume dei seguenti solidi omogenei:

(a) $\{(x,y,z): 0\le z\le 1,\ (z-1)^2\ge x^2+y^2\}$.
Sia

$$A=\{(x,y,z): 0\le z\le 1,\ (z-1)^2\ge x^2+y^2\}.$$

Integrando per strati paralleli al piano x,y si ottiene

$$V(A)=\int_A dx\,dy\,dz = \int_0^1\left(\int_{A_z} dx\,dy\right)dz,$$

essendo A_z il cerchio, sul piano $z=0$, con centro nell'origine e raggio $z-1$.
Poichè

$$\int_{A_z} dx\,dy = \pi(z-1)^2$$

si ha

$$V(A)=\pi\int_0^1 (z-1)^2\,dz = \pi\left[\frac{(z-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{3}.$$

Siano $\overline{x}_A, \overline{y}_A, \overline{z}_A$ le coordinate del baricentro di A.

Per simmetria si ha

$$\overline{x}_A = 0, \qquad \overline{y}_A = 0,$$

mentre, essendo il solido omogeneo,

$$\overline{z}_A = \frac{1}{V(A)} \int_A z\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{\pi} \int_0^1 \left(\int_{A_z} z\, dx\, dy \right) dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)\, dz = 3 \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3} z^3 + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(b) piramide di vertici $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$,$C = (0, 0, 1)$ e $D = (0, 0, 0)$.
Sia

$$\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

la piramide di vertici $ABCD$.
Integrando per strati paralleli al piano x, y si ottiene

$$V(\Omega) = \int_\Omega dx\, dy\, dz = \int_0^1 \left(\int_{\Omega_z} dx\, dy \right) dz,$$

essendo Ω_z il triangolo, sul piano $z = 0$, descritto dalle disequazioni

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 - z \\ 0 \leq y \leq -x + 1 - z. \end{cases}$$

Poichè

$$\int_{\Omega_z} dx\, dy = \frac{1}{2}(1 - z)^2$$

si ha

$$V(\Omega) = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z)^2\, dz = \left[-\frac{1}{6}(1 - z)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Siano $\overline{x}_\Omega, \overline{y}_\Omega, \overline{z}_\Omega$ le coordinate del baricentro di Ω.
Per simmetria risulta

$$\overline{x}_\Omega = \overline{y}_\Omega = \overline{z}_\Omega$$

ed essendo il solido omogeneo si ha

$$\overline{z}_\Omega = \frac{1}{V(\Omega)} \int_\Omega z\, dx\, dy\, dz = 6 \int_0^1 \left(\int_{\Omega_z} z\, dx\, dy \right) dz = 3 \int_0^1 (z^3 - 2z^2 + z)\, dz = 3 \left[\frac{z^4}{4} - \frac{2}{3} z^3 + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(c) solido del primo ottante limitato dalla superficie cilindrica di equazione $z = x^2/3$ e dai piani di equazione $z = 0$,$y = 0$,$2x + 3y - 18 = 0$.
Sia C l'insieme del primo ottante limitato da $z = x^2/3$, $z = 0$,$y = 0$,$2x + 3y - 18 = 0$.
Si ha, integrando per fili paralleli rispetto all'asse z

$$V(C) = \int_C dx\, dy\, dz = \int_D \left(\int_0^{x^2/3} dz \right) dx\, dy,$$

con $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 9, 0 \leq y \leq \frac{18 - 2x}{3}\}$ e applicando su D la formula di integrazione per verticali, si può scrivere:

$$V(C) = \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \left(\int_0^{x^2/3} dz \right) dy \right) dx = \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \frac{x^2}{3}\, dy \right) dx =$$

$$= \int_0^9 (2x^2 - \frac{2}{9} x^3) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{x^4}{18} \right]_0^9 = \frac{243}{2}.$$

Siano $\overline{x}_C, \overline{y}_C, \overline{z}_C$ le coordinate del baricentro di C.
Poichè il solido è omogeneo si ha

$$\overline{x}_C = \frac{1}{V(C)} \int_C x\, dx\, dy\, dz = \frac{2}{243} \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \left(\int_0^{x^2/3} x\, dz \right) dy \right) dx =$$

$$= \frac{2}{243} \int_0^9 \left(\int_0^{\frac{18-2x}{3}} \frac{x^3}{3}\, dy \right) dx = \frac{2}{243} \int_0^9 (2x^3 - \frac{2}{9} x^4) dx = \frac{2}{243} \left[\frac{1}{2} x^4 - \frac{2}{45} x^5 \right]_0^9 = \frac{27}{5}.$$

Con calcoli analoghi si prova che

$$\overline{y}_C = \frac{1}{V(C)} \int_C y\, dx\, dy\, dz = \frac{6}{5} \quad \text{e} \quad \overline{z}_C = \frac{1}{V(C)} \int_C z\, dx\, dy\, dz = \frac{27}{5}.$$

~~3.~~ Sia A il solido generato dalla rotazione attorno all'asse z della regione piana:
$C = \{(x, y, z) : y = 0,\ x^2 - 1 \leq z \leq (x-1)^2,\ 0 \leq x \leq 1\}$.
Determinare il volume e il baricentro di A.
Applicando il I^0 Teorema di Guldino risulta

$$V(A) = 2\pi \int_C x\, dx\, dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{x^2-1}^{(x-1)^2} x\, dz \right) dx = 4\pi \int_0^1 (x - x^2)\, dx = 4\pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}\pi.$$

Siano $\overline{x}_A, \overline{y}_A, \overline{z}_A$ le coordinate del baricentro di A.
Per simmetria si ha

$$\overline{x}_A = 0, \qquad \overline{y}_A = 0,$$

mentre, essendo il solido omogeneo, si ha, integrando per strati paralleli al piano x, y

$$\overline{z}_A = \frac{1}{V(A)} \int_A z\, dx\, dy\, dz = \frac{3}{2\pi} \int_{-1}^0 \left(\int_{A_{1,z}} z\, dx\, dy \right) dz + \frac{3}{2\pi} \int_0^1 \left(\int_{A_{2,z}} z\, dx\, dy \right) dz$$

dove $A_{1,z}$ è il cerchio, sul piano $z = 0$, con centro nell'origine e raggio $\sqrt{z+1}$ e $A_{2,z}$ è il cerchio, sul piano $z = 0$, con centro nell'origine e raggio $1 - \sqrt{z}$.
Poichè

$$\int_{A_{1,z}} dx\, dy = \pi(z+1) \quad \text{e} \quad \int_{A_{2,z}} dx\, dy = \pi(1 - \sqrt{z})^2$$

si ottiene

$$\overline{z}_A = \frac{3}{2} \left(\int_{-1}^0 (z^2 + z)\, dz + \int_0^1 (z^2 - 2z\sqrt{z} + z)\, dz \right) = \frac{3}{2} \left(\left[\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{z^3}{3} - \frac{4}{5} z^2 \sqrt{z} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 \right) = -\frac{1}{5}.$$

4. Dato il solido $C_r = \{x^2 + y^2 \geq r^2, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ determinare il valore del parametro r in modo che il volume di C sia $\pi/8$.
Integrando per strati paralleli al piano x, y si ha

$$V(C_r) = \int_{C_r} dx\, dy\, dz = \int_{r^2}^1 \left(\int_{C_{r,z}} dx\, dy \right) dz \qquad (0 < r < 1)$$

dove $C_{r,z}$ è la corona circolare, sul piano $z = 0$, descritta dalle disequazioni $r^2 \leq x^2 + y^2 \leq z$.
Poichè

$$\int_{C_r} dx\, dy = \pi(z - r^2),$$

risulta

$$V(C_r) = \pi \int_{r^2}^1 (z - r^2)\, dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - r^2 z \right]_{r^2}^1 = \frac{\pi}{2}(1 - r^2)^2.$$

Imponendo che $V(C_r)$ sia uguale a $\pi/8$, si ottiene $r = 1/\sqrt{2}$.

~~5.~~ Determinare il volume dei seguenti solidi di rotazione:

(a) T triangolo di vertici $(0, 0, 2)$, $(0, -1, 1)$ e $(0, 1, 1)$ attorno all'asse y.
Sia

$$T = \{(y, z) : z - 2 \leq y \leq 2 - z, 1 \leq z \leq 2\}.$$

Applicando il I^0 Teorema di Guldino si ottiene

$$V = 2\pi \int_T z\, dy\, dz = 2\pi \int_1^2 \left(\int_{z-2}^{2-z} z\, dy \right) dz = 4\pi \int_1^2 (2z - z^2)\, dz = 4\pi \left[z^2 - \frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

(b) $D = \{(x,y,z) : y = 0, x^2 - 4z^2 \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse z.
Applicando il I^0 Teorema di Guldino si ottiene

$$V = 2\pi \int_D x \, dx \, dz = 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-x/2}^{x/2} x \, dz \right) dx = 2\pi \int_0^1 x^2 \, dx = 2\pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

(c) $D = \{(x,y,z) : z = 0, 0 \leq y \leq |-1/4 + x^2|, 0 \leq x \leq 1\}$ attorno all'asse x.
Posto $D = D_1 \cup D_2$ dove

$$D_1 = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq -x^2 + 1/4\} \quad \text{e} \quad D_2 = \{(x,y) : 1/2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2 - 1/4\},$$

e applicando il I^0 Teorema di Guldino risulta

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_D y \, dx \, dy = 2\pi \left(\int_{D_1} y \, dx \, dy + \int_{D_2} y \, dx \, dy \right) = \\ &= 2\pi \left(\int_0^{1/2} \left(\int_0^{-x^2+1/4} y \, dy \right) dx + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{x^2-1/4} y \, dy \right) dx \right) = \\ &= \pi \left(\int_0^{1/2} \left(-x^2 + \frac{1}{4} \right)^2 dx + \int_{1/2}^1 \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)^2 dx \right) = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{16} \right]_0^1 = \frac{23}{240}\pi. \end{aligned}$$