Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 20 giugno 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tempo: 2 ore e 10 minuti. È richiesto di giustificare tutti i passaggi.
La prova è sufficiente se e solo se le seguenti tre soglie sono tutte raggiunte: esercizi 12 punti, teoria 4 punti, punteggio totale 18.

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(6 punti)* Si consideri l'equazione differenziale dipendente dal parametro reale $\alpha \geq 0$:

$$y'(t) + \frac{y(t)}{1+\alpha t} = \frac{2}{1+\alpha t}\,.$$

1.1 (1.5 punti) Fissato $\alpha \geq 0$, si consideri una qualunque soluzione dell'equazione. Determinare il più ampio intervallo contenente $t = 0$ su cui essa risulta definita, senza calcolarla (si consiglia di distinguere i casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$).

1.2 Nel resto dell'esercizio si consideri $\alpha = 1$ e t appartenente all'intervallo determinato al punto 1.1.

a. (2.5 punti) Determinare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale su tale intervallo.
b. (1 punto) Stabilire se esistono soluzioni limitate su tutto l'intervallo.
c. (1 punto) Risolvere il problema di Cauchy relativo alla condizione $y(0) = 1$.

Esercizio 2 *(6 punti)*

Si consideri la seguente serie di funzioni definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx)}{k} \right)^2 .$$

2.1 (2 punti) Discutere la convergenza puntuale, assoluta e totale della serie.

2.2 (2 punti) Determinare la serie di Fourier di f, ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (può risultare conveniente l'utilizzo delle formule di duplicazione).

2.3 (2 punti) Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$, ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Esercizio 3 *(6 punti)*

Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = -x^2 + \log(xy-1).$$

3.1 (1.5 punti) Determinare e disegnare il dominio D di f e poi specificare se D è aperto/chiuso e se è limitato/illimitato.

3.2 (2 punti) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,f(2,1))$.

3.3 (1.5 punti) Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine relativa al punto $(2,1)$ per la funzione f.

3.4 (1 punto) Stabilire se localmente in un intorno del punto $(2,1)$ il grafico di f si trovi tutto al di sopra o al di sotto del piano tangente calcolato precedentemente.

Esercizio 4 *(6 punti)*

4.1 (2 punti) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Calcolare l'integrale doppio $\iint_D xy^2 \, dxdy$.

4.2 Si consideri la curva regolare a tratti avente parametrizzazione

$$\mathbf{r} : [0, 1 + \pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (-t + 1, -2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ (2 \sin(t - 1), -2 \cos(t - 1)) & \text{se } 1 \leq t \leq 1 + \pi. \end{cases}$$

Si indichi con γ il sostegno di tale curva.

a. (1.5 punti) Determinare il versore tangente a γ nei punti dove è ben definito.

b. (2.5 punti) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma xy^2 \, ds$.

TEORIA: 8 punti.

Risolvere i quesiti **T.1-5** *(nota bene: ogni quesito a crocette ammette una e una sola risposta corretta).*

T.1 (1 punto) Date le seguenti tre equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = ty^3, \qquad \text{ii) } y' + (\log\sqrt{2} - 3)y + 7e^{\sqrt{2}} = 0, \qquad \text{iii) } y' = ty + 3y^2$$

si ha che:

A la prima e la terza sono equazioni di Bernoulli e la seconda non ammette una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

B tutte le equazioni sono lineari.

C tutte le equazioni ammettono almeno una soluzione costante.

D tutte le equazioni sono a variabili separabili.

T.2 (1 punto) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $a_n \in \mathbb{R}$. Si ha che:

A se $a_n = 1/n!$ e $x_0 = 0$ la serie converge totalmente a e^{x^2} in tutto $\mathbb{R}$.

B se il raggio di convergenza della serie è $R > 0$, la serie è integrabile in $[x_0 - R/100, x_0 + R/100]$, ma non converge totalmente in tale intervallo.

C se il raggio di convergenza della serie è $R > 0$, la serie converge puntualmente in $[x_0 - R, x_0 + R]$.

D nessuna delle altre opzioni è vera.

T.3 (1 punto) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Si ha che:

A detto D un qualunque insieme chiuso e limitato contenuto in A, f ammette massimo assoluto in D

B se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto estremale di f.

C la derivata direzionale di f in (x_0, y_0) è massima nella direzione di $-\nabla f(x_0, y_0)$.

D nessuna delle altre opzioni è vera.

T.4 (2 punti) Dare la definizione di punto di massimo relativo vincolato; enunciare il teorema relativo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

T.5 (3 punti) Dare la definizione di insieme di livello di una funzione di due variabili a valori reali; enunciare e dimostrare l'ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello.