Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 20 giugno 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1 *(6 punti)* Si consideri l'equazione differenziale dipendente dal parametro reale $\alpha \geq 0$:

$$y'(t) + \frac{y(t)}{1+\alpha t} = \frac{2}{1+\alpha t}\,.$$

1.1 (1.5 punti) Fissato $\alpha \geq 0$, si consideri una qualunque soluzione dell'equazione. Determinare il più ampio intervallo contenente $t = 0$ su cui essa risulta definita, senza calcolarla (si consiglia di distinguere i casi $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$).

1.2 Nel resto dell'esercizio si consideri $\alpha = 1$ e t appartenente all'intervallo determinato al punto 1.1.

a. (2.5 punti) Determinare esplicitamente l'integrale generale dell'equazione differenziale su tale intervallo.

b. (1 punto) Stabilire se esistono soluzioni limitate su tutto l'intervallo.

c. (1 punto) Risolvere il problema di Cauchy relativo alla condizione $y(0) = 1$.

Risposte

1.1) Si tratta di una EDO lineare del primo ordine del tipo $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$, con

$$a(t) = \frac{1}{1+\alpha t} \quad \text{e} \quad b(t) = \frac{2}{1+\alpha t}.$$

Alla luce del Teorema di Cauchy per EDO del primo ordine lineari, le soluzioni sono definite su tutto l'intervallo sul quale a e b risultano continue.

Se $\alpha = 0$ allora a e b sono costanti e tale intervallo è tutto $\mathbb{R}$.

Se $\alpha > 0$ allora a e b sono definite e continue in $(-\infty, -\frac{1}{\alpha}) \cup (-\frac{1}{\alpha}, +\infty)$; dunque il più ampio intervallo contenente $t = 0$ sulm quale le soluzioni risultano definite è

$$I_\alpha = (-\frac{1}{\alpha}, +\infty).$$

1.2) Nel caso $\alpha = 1$ la EDO e l'intervallo diventano:

$$y'(t) + \frac{y(t)}{1+t} = \frac{2}{1+t}, \qquad t \in I_1 = (-1, +\infty).$$

a) Applicando la formula risolutiva per EDO del primo ordine lineari, si ottiene

$$\mathcal{A}(t) = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| = \ln(1+t) \qquad (t \in I_1)$$

$$\mathcal{B}(t) = \int e^{\mathcal{A}(t)} b(t)\,dt = 2t$$

da cui l'integrale generale

$$y(t) = e^{-\ln(1+t)}(C + 2t) = \frac{C+2t}{1+t}, \qquad C \in \mathbb{R},\ t \in I_1.$$

b) Per $C = 2$ si ottiene $y(t) = 2$ che è limitata nell'intervallo.

c)Imponendo $y(0) = 1$ si ottiene $C = 1$. Perciò la soluzione del problema di Cauchy richiesto è

$$y(t) = \frac{1+2t}{1+t}.$$

Esercizio 2 *(6 punti)* Si consideri la seguente serie di funzioni definita per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(kx)}{k} \right)^2 .$$

2.1 (2 punti) Discutere la convergenza puntuale, assoluta e totale della serie.

2.2 (2 punti) Determinare la serie di Fourier di f, ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (può risultare conveniente l'utilizzo delle formule di duplicazione).

2.3 (2 punti) Calcolare $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx$, ricordando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Risposte

2.1) Si ha

$$\left| \frac{\cos^2(kx)}{k^2} \right| \leq \frac{1}{k^2}.$$

Essendo il lato destro una serie numerica convergente, la serie di funzioni proposta converge totalmente su $\mathbb{R}$. Di conseguenza, la convergenza è anche puntuale e assoluta su $\mathbb{R}$.

2.2) Facendo uso della formula di duplicazione

$$\cos^2(kx) = \frac{1 + \cos(2kx)}{2},$$

si ottiene

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \cos(2kx)}{2k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{2k^2}.$$

Infine, facendo uso del suggerimento, si conclude

$$f(x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{2k^2}.$$

I coefficienti di Fourier potevano anche essere calcolati con le usuali formule, osservando che $b_n = 0$ per ogni n per parità.

2.3) L'integrale richiesto si ottiene applicando l'identità di Parseval:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = 2 \left(\frac{\pi^2}{12} \right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k^2)^2} = \frac{\pi^4}{72} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^4}{90},$$

(nel secondo passaggio si è usato il suggerimento) da cui

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 \, dx = \frac{\pi^5}{72} + \frac{\pi^5}{360}.$$

Esercizio 3 *(6 punti)* Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = -x^2 + \log(xy - 1).$$

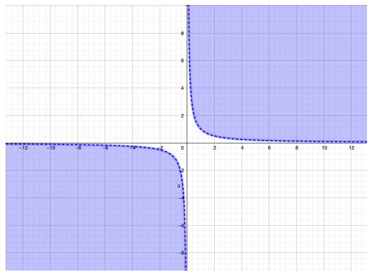
3.1 (1.5 punti) Determinare e disegnare il dominio D di f e poi specificare se D è aperto/chiuso e se è limitato/illimitato.

3.2 (2 punti) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$.

3.3 (1.5 punti) Scrivere la formula di Taylor al secondo ordine relativa al punto $(2, 1)$ per la funzione f.

3.4 (1 punto) Stabilire se localmente in un intorno del punto $(2, 1)$ il grafico di f si trovi tutto al di sopra o al di sotto del piano tangente calcolato precedentemente.

Risposte



3.1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1\}$ aperto e illimitato.

3.2)

$$f(2, 1) = -4 \qquad \nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -2x + \frac{y}{xy-1} \\ \frac{x}{xy-1} \end{pmatrix} \qquad \nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

da cui l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2, 1, f(2, 1))$ è

$$z = -4 - 3(x - 2) + 2(y - 1) = -3x + 2y.$$

3.3) La matrice Hessiana di f è

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -2 - \frac{y^2}{(xy-1)^2} & -\frac{1}{(xy-1)^2} \\ -\frac{1}{(xy-1)^2} & -\frac{x^2}{(xy-1)^2} \end{pmatrix} \qquad H_f(2, 1) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

La formula di Taylor al secondo ordine relativa al punto $(2, 1)$ per la funzione f è quindi

$$f(x, y) = -3x + 2y - \frac{3}{2}(x - 2)^2 - (x - 2)(y - 1) - 2(y - 1)^2 + o((x - 2)^2 + (y - 1)^2).$$

3.3) La forma quadratica indotta da $H_f(2, 1)$ è definita negativa in quanto

$$\det H_f(2, 1) = 11 > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 1) = -3 < 0.$$

Questo implica che localmente il grafico di f si trova tutto al di sotto del piano tangente.

Esercizio 4 *(6 punti)*

4.1 (2 punti) Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Calcolare l'integrale doppio $\iint_D xy^2\, dxdy$.

4.2 Si consideri la curva regolare a tratti avente parametrizzazione

$$\mathbf{r} : [0, 1+\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} (-t+1, -2t) & \text{se } 0 \leq t \leq 1, \\ (2\sin(t-1), -2\cos(t-1)) & \text{se } 1 \leq t \leq 1+\pi. \end{cases}$$

Si indichi con γ il sostegno di tale curva.

a. (1.5 punti) Determinare il versore tangente a γ nei punti dove è ben definito.

b. (2.5 punti) Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma xy^2\, ds$.

Risposte

4.1) Considerando ad esempio D come regione y-semplice, si ha

$$\iint_D xy^2\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^x xy^2\, dy\, dx = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^4}{3}\, dx = \frac{1}{15}.$$

4.2) La curva è regolare a tratti; non è regolare per $t = 1$.

a) Il versore tangente a γ è ben definito per $t \in (0,1) \cup (1, 1+\pi)$. Calcoliamo $\mathbf{r}'(t)$ in tali punti

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} (-1, -2) & \text{se } 0 < t < 1, \\ (2\cos(t-1), 2\sin(t-1)) & \text{se } 1 < t < 1+\pi. \end{cases}$$

Essendo poi

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \begin{cases} \sqrt{5} & \text{se } 0 < t < 1, \\ 2 & \text{se } 1 < t < 1+\pi, \end{cases}$$

concludiamo che il versore tangente a γ è

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{cases} (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}) & \text{se } 0 < t < 1, \\ (\cos(t-1), \sin(t-1)) & \text{se } 1 < t < 1+\pi. \end{cases}$$

b) Per calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma xy^2\, ds$, spezziamo l'integrale sui due intervalli sui quali la curva è regolare:

$$\begin{aligned} \int_\gamma xy^2\, ds &= \int_0^1 (-t+1)(-2t)^2 \sqrt{5}\, dt + \int_1^{1+\pi} 2\sin(t-1)(-2\cos(t-1))^2 2\, dt \\ &= 4\sqrt{5} \int_0^1 (t^2 - t^3)\, dt + 16 \int_1^{1+\pi} \sin(t-1)\cos^2(t-1)\, dt. \end{aligned}$$

Si ha

$$4\sqrt{5} \int_0^1 (t^2 - t^3)\, dt = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

e, tramite il cambio di variabili $\cos(t-1) = k$,

$$16 \int_1^{1+\pi} \sin(t-1)\cos^2(t-1)\, dt = 16 \int_{-1}^1 k^2\, dk = \frac{32}{3}.$$

In conclusione, l'integrale curvilineo richiesto vale $\frac{\sqrt{5}+32}{3}$.

TEORIA: 8 punti.

Risolvere i quesiti **T.1-5** *(nota bene: ogni quesito a crocette ammette una e una sola risposta corretta).*

T.1 (1 punto) Date le seguenti tre equazioni differenziali:

$$\text{i) } y' = ty^3, \qquad \text{ii) } y' + (\log\sqrt{2} - 3)y + 7e^{\sqrt{2}} = 0, \qquad \text{iii) } y' = ty + 3y^2$$

si ha che:

A la prima e la terza sono equazioni di Bernoulli e la seconda non ammette una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$.

B tutte le equazioni sono lineari.

X tutte le equazioni ammettono almeno una soluzione costante.

D tutte le equazioni sono a variabili separabili.

T.2 (1 punto) Si consideri la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

con centro $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $a_n \in \mathbb{R}$. Si ha che:

A se $a_n = 1/n!$ e $x_0 = 0$ la serie converge totalmente a e^{x^2} in tutto $\mathbb{R}$.

B se il raggio di convergenza della serie è $R > 0$, la serie è integrabile in $[x_0 - R/100, x_0 + R/100]$, ma non converge totalmente in tale intervallo.

C se il raggio di convergenza della serie è $R > 0$, la serie converge puntualmente in $[x_0 - R, x_0 + R]$.

X nessuna delle altre opzioni è vera.

T.3 (1 punto) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Si ha che:

X detto D un qualunque insieme chiuso e limitato contenuto in A, f ammette massimo assoluto in D

B se $\nabla f(x_0, y_0) = 0$, allora (x_0, y_0) è un punto estremale di f.

C la derivata direzionale di f in (x_0, y_0) è massima nella direzione di $-\nabla f(x_0, y_0)$.

D nessuna delle altre opzioni è vera.

T.4 (2 punti) Dare la definizione di punto di massimo relativo vincolato; enunciare il teorema relativo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

T.5 (3 punti) Dare la definizione di insieme di livello di una funzione di due variabili a valori reali; enunciare e dimostrare l'ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello.