LOGICA E ALGEBRA

26 luglio 2018

Esercizio 1 Sia $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $R \subseteq X \times X$ la relazione avente la matrice di incidenza M quadrata di ordine 5 con tutti gli elementi nulli tranne $m_{11} = m_{12} = m_{22} = m_{34} = m_{54} = 1$ e $m_{21} = k \in \{0,1\}$.

a) Si mostri che R è una relazione transitiva su X.
b) Al variare di $k \in \{0,1\}$ si determini, se esiste, una relazione d'ordine T su X che contenga R. In caso affermativo la si costruisca e si determinino gli elementi massimali e minimali di X rispetto a T.
c) Nel caso $k = 1$ si determini la relazione d'equivalenza S generata da R e si descriva X / S. Si stabilisca se S coincide con la chiusura riflessiva e simmetrica di R.

Esercizio 2 Sia f (A,B,C) la f.b.f. avente la seguente tavola di verità:

A	B	C	f (A,B,C)
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

a) Dire se esiste nella teoria L una deduzione di $C \Rightarrow f(A,B,C)$ dall'insieme $\{A, B\}$.
b) Provare il risultato ottenuto al punto precedente utilizzando la risoluzione.

Esercizio 3

a) Si scriva in un opportuno linguaggio del primo ordine la seguente proposizione:
« Due numeri interi sono congrui a zero modulo *n* se e solo se lo è la loro somma »

Attenzione: oltre ai connettivi, le variabili, i quantificatori e le parentesi, si usi solo una lettera predicativa U per la relazione di uguaglianza, una costante per denotare l'intero *n*, due lettere funzionali S e P per le operazioni di addizione e moltiplicazione tra interi.

b) Si stabilisca se la formula ottenuta è vera nell'interpretazione assegnata e se è logicamente valida.
c) Sia, ora, $A = Z_n$ l'anello degli interi modulo *n* ed *a* un suo elemento.
Si verifichi che l'insieme $H_a = \{x \in A \mid x \cdot a = [0]_n\}$ è un sottoanello di A. E' anche un suo ideale?

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1

a) Si osservi che la matrice d'incidenza di R è la seguente

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando la relazione R^2 si ottiene la matrice

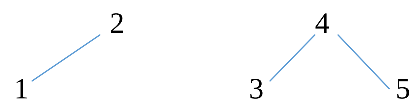
$$\begin{bmatrix} 1+k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & k+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si può osservare che sia per k = 0 che per k = 1 R^2 è contenuta in R e perciò R è transitiva per ogni k.

b) Si osservi poi che per k = 1 R non è antisimmetrica e perciò non può esistere la relazione d'ordine T che contenga R.
Per k = 0 R è antisimmetrica, controlliamo se esiste la relazione d'ordine T contenente R: calcolando la chiusura riflessiva e transitiva di R, se questa è ancora antisimmetrica, sarà la relazione T richiesta. La chiusura riflessiva e transitiva di R corrisponde alla sua chiusura riflessiva in quanto R è transitiva e chiudendo riflessivamente non si perde tale la transitività. Perciò la chiusura riflessiva e transitiva di R avrà la seguente matrice d'incidenza

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dalla quale si evince che conserva l'antisimmetria.Tale matrice è pertanto la matrice d'incidenza della relazione T cercata il cui diagramma di Hasse è



Gli elementi massimali di X rispetto a T sono pertanto 2, 4; gli elementi minimali sono 1, 3, 5.

c) Si consideri ora la relazione R nel caso k = 1. Costruendo la chiusura riflessiva, simmetrica e transitiva di R si ottiene la seguente matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che risulta essere la matrice d'incidenza della relazione d'equivalenza S generata da R. Le classi di equivalenza sono $[1]_S = \{1, 2\}$ e $[3]_S = \{3, 4, 5\}$ e l'insieme quoziente è $X / S = \{[1]_S, [3]_S\}$.

La chiusura riflessiva e simmetrica di R presenta invece la seguente matrice d'incidenza:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e non coincide pertanto con S.

Esercizio 2

a) Esiste la deduzione {A, B} $|-_L$ C $\Rightarrow$ f (A,B,C) se e solo se, per il teorema di correttezza e completezza forte, vale la deduzione semantica {A, B} |= C $\Rightarrow$ f (A,B,C). Pertanto basta verificare che i modelli di {A, B} sono modelli anche per C $\Rightarrow$ f (A,B,C). I modelli di {A, B} sono le interpretazioni v_1 e v_2 tali che $v_1(A) = v_1(B) = v_1(C) = 1$, $v_2(A) = v_2(B) = 1$, $v_2(C) = 0$ che risultano essere modelli anche per C $\Rightarrow$ f (A,B,C). Segue che la deduzione {A, B} $|-_L$ C $\Rightarrow$ f (A,B,C) esiste.

b) L'insieme {A, B} genera le clausole {A}, {B}. Scriviamo in forma a clausole la negazione di C $\Rightarrow$ f (A,B,C):

$$\neg(C \Rightarrow f(A,B,C)) \equiv \neg(C \Rightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C))) \equiv$$
$$\equiv \neg(C \Rightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee ((A \vee \neg A) \wedge (\neg B \wedge \neg C)))) \equiv \neg(C \Rightarrow ((A \wedge B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))) \equiv$$
$$\equiv \neg(\neg C \vee ((A \wedge B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C))) \equiv C \wedge (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee C)$$

Si ottengono così le clausole $\{C\},\{\neg A,\neg B,\neg C\},\{B,C\}$.

Scriviamo la derivazione per risoluzione della clausola vuota:

1) {A} (clausola di input)
2) $\{\neg A,\neg B,\neg C\}$ (clausola di input)
3) $\{\neg B,\neg C\}$ (risolvente di 1) e 2))
4) {B} (clausola di input)
5) $\{\neg C\}$ (risolvente di 3) e 4))
6) {C} (clausola di input)
7) □ (risolvente di 5) e 6))

Esercizio 3

a) La formula richiesta è la seguente:

$$\forall x \forall y (\exists h\, U(x,P(h,b)) \wedge \exists k\, U(y,P(k,b)) \Leftrightarrow \exists z\, U(S(x,y),P(z,b))),$$

dove *b* è la costante che interpreta il numero *n*.

b) La formula trovata non è vera in quanto se la somma di due interi è congrua a zero modulo *n* non è detto che ciascuno dei due numeri lo sia. Infatti se, ad esempio, $x = n + 1$, $y = n - 1$, allora $x + y = 2n$ e quindi $x + y \equiv 0 \pmod n$ ma *x* ed *y* non sono congrui a 0 modulo *n* (si ricordi che per poter definire la relazione di congruenza modulo *n* occorre prendere $n > 1$). Segue immediatamente che la formula non può essere logicamente valida in quanto già non è vera nella precedente interpretazione.

c) Siano $x, y \in H_a$. Valgono:

$$(x - y) \cdot a = x \cdot a - y \cdot a = [0]_n - [0]_n = [0]_n$$
$$(x \cdot y) \cdot a = x \cdot (y \cdot a) = x \cdot [0]_n = [0]_n$$

e pertanto $x - y \in H_a, x \cdot y \in H_a$. Dal criterio di caratterizzazione dei sottoanelli segue che H_a è un sottoanello di *A*. Inoltre H_a è anche un ideale poiché, presi due generici elementi $x \in H_a, z \in A$, risulta $(z \cdot x) \cdot a = (x \cdot z) \cdot a = (x \cdot a) \cdot z = [0]_n \cdot z = [0]_n$ e quindi $x \cdot z \in H_a, z \cdot x \in H_a$.