Form 2 - Problemi con svolgimento cartaceo

1. (a) Si scriva la legge di Hooke specificando se la forza da essa descritta è conservativa e, nel caso, calcolarne l'energia potenziale. `[3 punti]`

    - Consideriamo una molla ideale vincolata a un estremo e imponiamo un sistema di coordinate con un asse x avente l'origine sull'estremo fisso della molla, diretto parallelamente ad essa e orientato verso l'altro estremo. La coordinata x identifica in ogni istante la posizione dell'estremo libero e perciò anche la lunghezza della molla. Se non agisce alcuna forza, la molla ha una lunghezza x_0 detta *lunghezza a riposo.*
    La Legge di Hooke mette in relazione l'allungamento della molla rispetto alla sua lunghezza a risposo $(x - x_0)$ con la forza $\vec{F}_{el}$ che essa esercita sull'estremo libero. Vettorialmente si scrive:

    $$\vec{F}_{el} = -k(x - x_0)\vec{u}_x = -k\Delta x\vec{u}_x$$

    La costante di proporzionalità k, detta *costante elastica*, è una caratteristica propria della molla in esame.

    - La forza elastica è conservativa. Infatti il lavoro svolto dalla forza $\vec{F}_{el}$ in un allungamento (o accorciamento) della molla lungo l'asse x si può scrivere:

    $$\mathcal{L}_{el} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{r} = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} -kx\vec{u}_x \cdot dx\,\vec{u}_x = \int_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} -kxdx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_\mathrm{A}}^{x_\mathrm{B}} = \frac{1}{2}kx_\mathrm{A}^2 - \frac{1}{2}kx_\mathrm{B}^2$$

    ovvero $\mathcal{L}_{el}$ dipende solo dagli estremi dello spostamento compiuto (x_A, x_B). Dall'espressione per $\mathcal{L}_{el}$ si può inoltre ricavare l'energia potenziale elastica come:

    $$U_{el} = \frac{1}{2}kx^2 \tag{1}$$

    infatti con questa definizione risulta $\mathcal{L}_{el} = U_{el,A} - U_{el,B} = -\Delta U$.

   Un corpo di massa m viene lanciato da una molla di costante elastica k lungo una guida liscia disposta in un piano verticale come indicato in figura. Noti l'altezza h (misurata rispetto alla posizione di riposo della molla) ed il raggio R, si determinino (in funzione di m, k, h, R):

   (b) La compressione d_1 della molla affinché il corpo giunga fino al punto A con velocità nulla. `[2 punti]`

    - Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica tra il punto iniziale e il punto A. Occorre considerare i contributi di energia potenziale della forza elastica U_{el} e di energia potenziale della forza peso U_P. I contributi di energia cinetica sono nulli perché il corpo è fermo sia all'inizio sia nel punto A.

    $$E_M = E'_M$$

    $$U_{el} + U_p + E_K = U'_{el} + U'_P + E'_K$$

    $$\frac{1}{2}kd_1^2 + 0 + 0 = 0 + mg(h + d_1) + 0$$

    $$\frac{1}{2}kd_1^2 - mgd_1 - mgh = 0$$

$$d_1 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + 2mghk}}{k}$$

Avendo significato fisico solamente la soluzione positiva, concludiamo:

$$\boxed{d_1 = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hk}{mg}}\right)}$$

(c) la compressione d_2 della molla affinché il corpo percorra interamente la guida fino al punto B. [3 punti]

- Il corpo raggiunge il punto B se riesce a raggiungere la sommità della guida con sufficiente velocità per cui non se ne distacca.
- In particolare, nel punto più alto della guida (denominiamolo punto C), agiscono sul corpo la forza peso $\vec{P}$ e la reazione normale della guida $\vec{R}_n$ entrambe rivolte verticalmente verso il basso. Esse danno una risultante di tipo centripeto, vista la forma della guida circolare. Proiettando la legge di Newton su un asse verticale rivolto verso il basso, nel punto C si ha:

$$P + R_n = F_C = m\frac{v_C^2}{R}$$

La condizione di non distacco dalla guida coincide con imporre, nell'equazione sopra scritta:

$$R_n \geq 0$$

Infatti, la reazione normale della guida non può essere rivolta verso l'alto e la parte scalare R_n non può assumere valori negativi. Ne consegue:

$$R_n = F_C - P = m\frac{v_C^2}{R} - mg \geq 0$$
$$v_C^2 \geq gR$$

- Applichiamo ora la conservazione dell'energia meccanica tra il punto iniziale e il punto C, considerando che esso si trova a una quota $h + R + d_2$ rispetto al punto iniziale:

$$U_{el} + U_p + E_K = U'_{el} + U'_P + E'_K$$
$$\frac{1}{2}kd_2^2 + 0 + 0 = 0 + mg(h + R + d_2) + \frac{1}{2}mv_C^2$$
$$v_C^2 = \frac{k}{m}d_2^2 - 2g(h + R + d_2)$$

- Imponendo $v_C^2 \geq gR$ otteniamo:

$$\frac{k}{m}d_2^2 - 2g(h + R + d_2) \geq gR$$
$$kd_2^2 - 2mgd_2 - mg(2h + 3R) \geq 0$$

Le soluzioni dell'uguaglianza sarebbero:

$$d_2 = \frac{mg \pm \sqrt{m^2g^2 + mgk(2h + 3R)}}{k}$$

da cui si ricava che la disuguaglianza è vera per:

$$d_2 \leq \frac{mg - \sqrt{m^2g^2 + mgk(2h + 3R)}}{k} \quad \wedge \quad d_2 \geq \frac{mg + \sqrt{m^2g^2 + mgk(2h + 3R)}}{k}$$

e di nuovo conservando solo la soluzione positiva:

$$\boxed{d_2 \geq \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{k(2h + 3R)}{mg}}\right)}$$

2. (a) Si enunci e si dimostri il Teorema dell'Impulso, specificando i termini. `[2 punti]`

- Si definisce impulso $\vec{J}$ di una forza $\vec{f}$, nell'intervallo di tempo tra t e $t+\Delta t$, la quantità vettoriale:

$$\vec{J} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}\, dt$$

- Il Teorema dell'Impulso afferma che una forza $\vec{f}$, agente su un punto materiale in un dato intervallo di tempo tra t e $t+\Delta t$, determina una variazione di quantità di moto del punto materiale pari all'impulso della forza stessa in quell'intervallo di tempo. In formule:

$$\Delta\vec{q} = \vec{J}$$

- Infatti:

$$\vec{J} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{f}\, dt = \int_t^{t+\Delta t} m\vec{a}\, dt = \int_t^{t+\Delta t} m\frac{d\vec{v}}{dt}\, dt = \int_t^{t+\Delta t} d\vec{q} = \vec{q}(t+\Delta t) - \vec{q}(t) = \Delta\vec{q}$$

Una biglia di massa $m_1 = 2$ kg è appesa ad un filo inestensibile di lunghezza L non nota. La biglia viene lasciata libera da una posizione in cui il filo forma un angolo $\alpha = 45°$ con la verticale. Quando il filo passa per la verticale, la biglia urta in modo completamente anelastico una seconda sferetta di massa $m_2 = 1$ kg, inizialmente ferma. Si calcoli:

(b) il massimo angolo di oscillazione del pendolo, rispetto alla verticale, dopo l'urto; `[3 punti]`

- La quota iniziale della biglia di massa m_1 è:

$$h_0 = L \cdot (1 - \cos\alpha) = L \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = L \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

- Per ricavare la velocità v_1, con cui la biglia di massa m_1 urta l'altra sferetta, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica dall'istante iniziale all'istante immediatamente precedente all'urto:

$$E_{M,0} = E_{M,1}$$

$$U_{P,0} + E_{K,0} = U_{P,1} + E_{K,1}$$

$$m_1 g h_0 + 0 = 0 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gL \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

- Durante l'urto si conserva certamente la componente orizzontale della quantità di moto del sistema delle due sferette. Le forze esterne agenti, quali la forza peso e la tensione della fune, sono dirette infatti verticalmente. (Si potrebbe comunque dimostrare che non sono impulsive)

$$Q_x = Q'_x$$

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V$$

Ricordiamo che, per definizione, dopo un urto perfettamente anelastico i due corpi procedono attaccati l'uno all'altro. La velocità V_1 del sistema delle due sferette, dopo l'urto, è dunque:

$$V = v_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

- Dopo l'urto il sistema delle due sferette arriverà alla quota massima h_2. Possiamo nominare β l'angolo rispetto alla verticale corrispondente a tale quota h_2. Si ha:

$$h_2 = L \cdot (1 - \cos\beta)$$

- In modo analogo a quanto svolto già poco sopra, applichiamo la conservazione dell'energia meccanica dall'istante immediatamente successivo all'urto all'istante in cui le due sferette, attaccate insieme, giungono alla quota h_2:

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)gh_2$$

$$V^2 = 2gh_2$$

- Sostituiamo le espressioni calcolate per V e h_2:

$$v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 2gL \cdot (1 - \cos\beta)$$

E ancora l'espressione di v_1:

$$2gL \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = 2gL \cdot (1 - \cos\beta)$$

$$(1 - \cos\beta) = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$\cos\beta = 1 - \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Sostituendo i valori numerici:

$$\cos\beta \simeq 0.8698$$

$$\boxed{\beta \simeq 29.6^\circ}$$

(c) il periodo delle oscillazioni dopo l'urto, se l'angolo iniziale α fosse molto piccolo e $L = 1$ m. `[2 punti]`

- Se l'angolo iniziale α fosse molto piccolo, le dinamiche sarebbero analoghe a quelle descritte al punto (b). Tuttavia, anche l'angolo β sarebbe necessariamente molto piccolo. Dopo l'urto si avrebbe quindi una massa $(m_1 + m_2)$ che descrive piccole oscillazioni appesa a un filo di lunghezza $L = 1$ m.
- Come noto dalla teoria, la pulsazione delle piccole oscillazioni di un pendolo semplice non dipende dalla massa sospesa, ma solo dalla lunghezza del filo L e dall'accelerazione di gravità g. In particolare:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

- Il periodo delle oscillazioni è dunque:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\boxed{T \simeq 2.01 \text{ s}}$$

3. Si considerino le trasformazioni termodinamiche rappresentate sul grafico pV in figura, svolte da 7 moli di gas monoatomico. Le trasformazioni ABC e ADC sono reversibili, mentre la trasformazione γ (che congiunge direttamente A con C) è irreversibile. È noto che il lavoro compiuto dal gas lungo la trasformazione ABC è $L_{ABC} = 30$ kJ.

   (a) Si calcoli la variazione di entropia del gas per le trasformazioni ABC, ADC e γ. Si discuta la variazione di entropia dell'ambiente per le tre trasformazioni.

   - L'entropia è funzione di stato, quindi la variazione di entropia del gas nelle tre trasformazioni considerate è la stessa e dipende solo dagli stati iniziale e finale (A e C).
   - In particolare, possiamo svolgere il calcolo di ΔS operando l'integrale di Clausius tra A e C lungo a una trasformazione reversibile che congiunga i due stati, per esempio la trasformazione ABC. Si ha allora:

$$\begin{aligned}\Delta S_{AC} &= S_C - S_A = \Delta S_{ABC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = \\ &= \int_{AB} \frac{\delta Q}{T} + \int_{AB} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_A}^{T_B} nc_V \frac{dT}{T} + \int_{T_B}^{T_C} nc_p \frac{dT}{T} = \\ &= nc_V \ln \frac{T_B}{T_A} + nc_p \ln \frac{T_C}{T_B}\end{aligned}$$

   - Osserviamo che nell'isocora AB $T_B/T_A = p_B/p_A$, mentre nell'isobara BC $T_C/T_B = V_C/V_B$, perciò:

$$\begin{aligned}\Delta S_{AC} &= nc_V \ln \frac{p_B}{p_A} + nc_p \ln \frac{V_C}{V_B} = \\ &= nc_V \ln 2 + nc_p \ln 4 = \\ &= \frac{3}{2} nR \ln 2 + \frac{5}{2} nR \cdot 2 \ln 2\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta S_{AC} = \frac{13}{2} nR \ln 2 \simeq +262 \text{ J/K}}$$

   - Nel caso delle trasformazioni ABC e ADC, che sono trasformazioni reversibili, la variazione di entropia dell'universo è nulla. Ne consegue:

$$\Delta S_U = \Delta S_{gas} + \Delta S_{amb} = 0$$

$$\Delta S_{amb} = -\Delta S_{gas} = -\frac{13}{2} nR \ln 2 \simeq -262 \text{ J/K}$$

     Per la trasformazione γ che è irreversibile, invece, possiamo solo affermare che $\Delta S_U > 0$ e perciò:

$$\Delta S_{gas} + \Delta S_{amb,\gamma} > 0$$

$$\Delta S_{amb,\gamma} > -\Delta S_{gas}$$

   (b) Si determini la variazione di energia interna fra gli stati A e C e il calore scambiato lungo la trasformazione ABC.

   - La variazione di energia interna fra gli stati A e C si può scrivere come:

$$\Delta U_{AC} = U_C - U_A = nc_V(T_C - T_A) = \frac{3}{2} nR(T_C - T_A) = \frac{3}{2}(nRT_C - nRT_A)$$

- Applicando ora l'equazione di stato dei gas ideali, abbiamo:

$$nRT_C = p_C V_C \qquad nRT_A = p_A V_A$$

per cui:

$$\Delta U_{AC} = \frac{3}{2}(p_C V_C - p_A V_A)$$

- Osserviamo dal grafico che $p_C = 2p_A$ e $V_C = 4V_A$. Si ricava:

$$\Delta U_{AC} = \frac{3}{2}(8p_A V_A - p_A V_A) = \frac{3}{2} \cdot 7p_A V_A = \frac{21}{2} p_A V_A$$

- La trasformazione ABC si compone di una isocora (AB) che non compie lavoro e di una isobara (BC). Sempre osservando il grafico possiamo dedurre:

$$L_{ABC} \equiv L_{BC} = p_B(V_C - V_B) = 2p_A \cdot (4V_A - V_A) = 6p_A V_A$$

$$p_A V_A = \frac{1}{6} L_{ABC}$$

- Concludiamo che:

$$\Delta U_{AC} = \frac{21}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot L_{ABC}$$

$$\boxed{\Delta U_{AC} = \frac{7}{4} L_{ABC} = 52.5 \text{ kJ}}$$

Il calore scambiato lungo la trasformazione ABC si ricava dalla semplice applicazione del Primo Principio della Termodinamica:

$$\boxed{Q_{ABC} = \Delta U_{AC} + L_{ABC} = \frac{11}{4} L_{ABC} = 82.5 \text{ kJ}}$$

(c) Si calcoli il lavoro effettuato e il calore scambiato lungo la trasformazione ADC.

- La trasformazione ADC si compone di una isobara (AD) e di una isocora (DC) che non compie lavoro. Dal grafico si ricava:

$$L_{ADC} \equiv L_{AD} = p_A(V_D - VA) = 3p_A V_A$$

- Abbiamo già ricavato al punto precedente che $p_A V_A = \frac{1}{6} L_{ABC}$, quindi:

$$L_{ADC} = 3 \cdot \frac{1}{6} \cdot L_{ABC}$$

$$\boxed{L_{ADC} = \frac{1}{2} L_{ABC} = 15 \text{ kJ}}$$

- Il calore scambiato si valuta sempre tramite il Primo Principio della Termodinamica:

$$\boxed{Q_{ADC} = \Delta U_{AC} + L_{ADC} = \frac{9}{4} L_{ABC} = 67.5 \text{ kJ}}$$