Analisi Matematica 2 – 19 gennaio 2024 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome (stampato maiuscolo):	Nome:	Matricola:

Parte A	Es.1	Es.2	Es.3	Totale

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A≥ 4, parte B≥ 12, totale≥ 18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Teoria (4 punti). Enunciare e dimostrare la formula del gradiente.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Data l'equazione differenziale $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, assumiamo che l'equazione caratteristica associata abbia radici reali λ_1 e λ_2. Si ha che:
(a) se $\lambda_1 = \lambda_2$, allora $y(t) = t^2 e^{\lambda_1 t}$ è soluzione
(b) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, allora $y(t) = 1000e^{32}te^{\lambda_1 t} + \log(3)e^{\lambda_2 t}$ è soluzione
(c) se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, allora $y(t) = e(1+t)$ è soluzione $\boxed{\text{V}}$
(d) nessuna delle precedenti

(2) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periodica, regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ e avente serie di Fourier $\dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$. Allora si ha che $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\, dx =$
(a) $\dfrac{\pi^2}{2} + \pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (b) $\pi^2 + \pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\dfrac{\pi^3}{4} + \pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ (d) $\dfrac{\pi^3}{2} + \pi \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ $\boxed{\text{V}}$

(3) Sia $f(x,y) = \dfrac{x\log(x^2+y+1)}{x^4+y^4}$ e sia $D = \operatorname{dom} f$. Quale dei seguenti punti appartiene alla frontiera di D?
(a) $(0,1)$ (b) $(0,-1)$ $\boxed{\text{V}}$ (c) $(0,2)$ (d) $(0,-2)$

(4) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile in $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora:
(a) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$
(b) esistono le derivate parziali di f in x_0, ma non le derivate direzionali in x_0 rispetto a tutte le direzioni
(c) f ammette tutte le derivate direzionali in x_0 $\boxed{\text{V}}$
(d) non esiste sempre il piano tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Data l'equazione differenziale

$$y'(t) = \frac{1}{t} y(t) + \frac{1}{t}\, e^{1/t}$$

(i) *(4 punti)* determinarne l'integrale generale;
(ii) *(2 punti)* determinare la soluzione che soddisfa la condizione $y(1) = 0$;
(iii) *(2 punti)* determinare la soluzione $z(t)$ che soddisfa $\lim_{t\to+\infty} z(t) = -1$.

(S) (i) Equazione lineare del prim'ordine, ben definita se $t \neq 0$. La riscriviamo come

$$\frac{1}{t} y' - \frac{1}{t^2} y = \frac{1}{t^2}\, e^{1/t} \implies \frac{d}{dt}\frac{y}{t} = \frac{1}{t^2}\, e^{1/t}\,.$$

Pertanto l'integrale generale è dato da $y(t) = t\left(C - e^{1/t}\right)$ con $C \in \mathbb{R}$, definite per $t \neq 0$.
(ii) Imponendo la condizione $y(1) = 0$, si trova $C = e$: la soluzione è: $y(t) = t\left(e - e^{1/t}\right)$.
(iii) Imponendo la condizione all'infinito, si ottiene:

$$-1 = \lim_{t\to+\infty} z(t) = \lim_{t\to+\infty} t\left(C - e^{1/t}\right) \overset{t=1/\tau}{=} \lim_{\tau\to 0^+} \frac{C - e^{\tau}}{\tau} \implies C = 1 \implies z(t) = t\left(1 - e^{1/t}\right).$$

Cognome (stampato maiuscolo):	Nome:	Matricola:

Esercizio 2 Si consideri la seguente serie di potenze e si denoti con $f(x)$ la sua funzione somma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n}\,.$$

(i) *(3 punti)* Determinarne l'intervallo di convergenza e studiarne il comportamento agli estremi di tale intervallo.
(ii) *(3 punti)* Motivando la risposta, dire in quale intervallo è applicabile il teorema di derivazione per serie. Successivamente, determinare $f'(x)$, il suo intervallo di convergenza ed il suo comportamento agli estremi di tale intervallo.
(iii) *(2 punti)* Esprimere $f(x)$ come funzione elementare, giustificando i passaggi effettuati.

(S) (i) Per il criterio del rapporto, il raggio di convergenza è

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)e^{n+1}}{ne^n} = e\,.$$

La serie converge in $(-e, e)$. In $x = e$, la serie diventa armonica e diverge; in $x = -e$, la serie è armonica a segno alterno e converge per il criterio di Leibniz. Quindi si ha convergenza puntuale a $f(x)$ in $[-e, e)$.
(ii) Le serie di potenze si possono sempre derivare per serie: otteniamo quindi

$$f'(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{e^n} \;=\; \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{e}\right)^n \;=\; \frac{1}{e}\,\frac{1}{1-\frac{x}{e}} \;=\; \frac{1}{e-x}.$$

Grazie al teorema di derivabilità termine a termine per serie di potenze reali, la serie derivata mantiene raggio di convergenza $R = e$. Agli estremi dell'intervallo tale serie non converge, in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria alla convergenza.
(iii) Ricordando che

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

si ha

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{ne^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x/e)^n}{n} = -\ln(1-x/e) = -\ln\left(\frac{e-x}{e}\right) = -\ln(e-x) + 1.$$

Esercizio 3 Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ la regione limitata del primo quadrante delimitata dalla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e dalla parabola $y = 1 - x^2$.

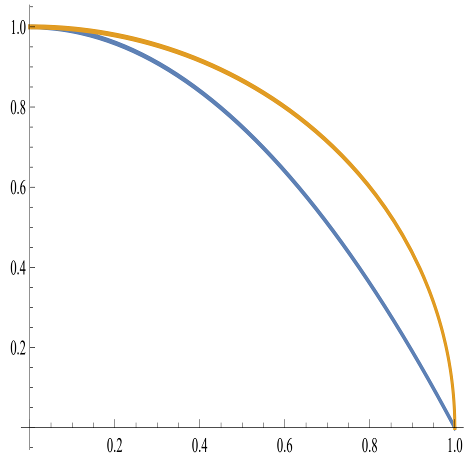
(i) *(4 punti)* Calcolare $\displaystyle\iint_D x^2 y \, dx \, dy$.

(ii) *(4 punti)* Calcolare $\displaystyle\int_{\partial D} x \, ds$.

(S) (i) Il dominio D è y-semplice, essendo possibile scriverlo nella forma

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1, 1 - x^2 \le y \le \sqrt{1 - x^2}\},$$

si veda la figura.



Si ha allora

$$\iint_D x^2 y \, dxdy = \int_0^1 \left(\int_{-x^2+1}^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx = \int_0^1 x^2 \left[\frac{1 - x^2}{2} - \frac{(1 - x^2)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{2} \right) dx = \frac{1}{35}.$$

(ii) Il bordo di D è dato dall'unione delle due curve parametriche γ_1 e γ_2, dove γ_1 ha parametrizzazione $\varphi_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi/2]$, e γ_2 ha parametrizzazione $\varphi_2(t) = (t, 1 - t^2)$, $t \in [0,1]$. Segue, per definizione di integrale curvilineo di prima specie,

$$\int_{\partial D} x \, d\ell = \int_{\gamma_1} x \, d\ell + \int_{\gamma_2} x \, d\ell = \int_0^{\pi/2} \cos t \, dt + \int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2} \, dt = 1 + \frac{1}{12}(1 + 4t^2)^{3/2}\Big|_0^1 = 1 + \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}.$$