Esercitazioni di Analisi 2

SERIE NUMERICHE A TERMINI DI SEGNO COSTANTE

1. Determinare il carattere delle seguenti serie

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{\frac{1}{n}}$ (diverge)

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-\frac{n}{2}}$ (converge)

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+\ln n}$ (diverge)

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-n}}{n+e^{n}}$ (converge)

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^k+2}{n^k+3}$ $k \in R$ (diverge $\forall k$)

f) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2n}{n^2+1}-1$ (diverge)

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ (diverge)

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ (converge)

i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^n$ (diverge)

j) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{3^{2n}}$ (diverge)

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n2^n}{e^{n/2}}$ (diverge)

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n}$ (converge)

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(2n)^n}$ (converge)

n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ (converge)

o) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^4}{(3n)!}$ (diverge)

p) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$ (converge)

q) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1+\sin n}{3^n}$ (converge)

r) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(1/n)}{\sqrt{n}\ln n}$ (converge)

s) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n+\cos^2 n}{(n^2-1)4^n}$ (converge)

t) $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ (converge)

u) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ (converge)

v) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{n\ln^2 n}$ (converge)

w) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ (converge)

x) $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{n}{n-3}\right)^{n^2}$ (diverge)

y) $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2+\sin n}{4}\right)^{n}$ (converge)

z) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(1+n)}{n+1}$ (diverge)

aa) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n + 2n^3}$ (converge)

bb) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n\sqrt{n}}{n^4+4}$ (converge)

cc) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-\ln n}$ (converge)

dd) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(\sin(1/n))$ (diverge)

ee) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{\sqrt{n}}}{3^n(1+\ln n)}$ (converge)

ff) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^{n^2}}$ (converge) gg) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ (converge)

hh) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$ (converge)

ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!2^n}$ (diverge)

jj) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!e^n}$ (diverge)

kk) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ (diverge)

ll) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2$ (diverge)

mm) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^3$ (converge)

nn) $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{nx}$ (converge per $x < 0$, altrimenti diverge)

oo) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{2^n + a^n}$ (converge per $|a| < 2$, altrimenti diverge)

2. Dopo aver stabilito la convergenza delle seguenti serie, calcolarne la somma:

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}}$ $\left(\text{somma} = \frac{4}{5}\right)$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$ $\left(\text{somma} = \frac{2}{3}\right)$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{e^{2n}}$ $\left(\text{somma} = \frac{e^2}{e^2 - 2}\right)$

3. Risolvere le seguenti equazioni:

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^{2n} = 1$ sol. $\left(x = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^n = 3$ sol. $\left(x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)$

c) $\sum_{n=k}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{32}{81}$ sol. $(k = 5)$

SERIE NUMERICHE A TERMINI DI SEGNO NON COSTANTE

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n \frac{n+1}{2n}$ (non conv.: oscillante)

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n \frac{2^n}{2^n + 3^n}$ (converge)

c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + \cos n\pi}$ (converge)

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin n\pi \cdot \sin \frac{1}{n}$ (converge)

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n + (-1)^n \cdot n}$ (diverge)

f) $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n + (-1)^{n+1} \ln n}{n \ln n}$ (diverge)

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + n^2\left(1 + (-1)^n\right)}$ (non conv.: oscillante)

h) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-)^n a_n$, ove a_n è tale che: $a_{2n} = \frac{1}{2^n}$; $a_{2n+1} = \frac{1}{n}$. (converge)

i) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ (converge)

j) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos n}{2^n + n}$ (converge)

k) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n \frac{\pi}{4}}{2n + (-1)^n \cdot n}$ (converge)

l) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot (x-2)^n}$, con $x \in R \setminus \{2\}$ (converge per $x < 1$ oppure $x \geq 3$, altrimenti non converge)

m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{kn^2 - n}{3n^2 + 5} \right)^n$, $k \in R$ (converge per $-3 < k < 3$, altrimenti non converge)

n) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{2^n + a^n}$, $a \in R \setminus \{-2\}$ (converge per $-2 < k < 2$, altrimenti non converge)