Analisi Matematica 2 – 30 gennaio 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Soluzioni

Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Enunciare e dimostrare la formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari.

Domande a risposta multipla (4×1 = 4 punti): una sola è corretta.

(1) Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in A. Il teorema di Fermat afferma che:
(a) se $\underline{x}_0 \in A$ è punto critico di f, allora $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$
(b) se $\underline{x}_0 \in A$ è punto critico di f, allora $\underline{x}_0$ è punto di estremo per f
$\boxed{\text{V}}$ se $\underline{x}_0 \in A$ è punto di estremo per f, allora $\underline{x}_0$ è punto critico di f
(d) $\underline{x}_0 \in A$ è punto di estremo per f se e solo se $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$

(S) L'affermazione (a) riguarda la definizione di punto critico, non il teorema di Fermat.
La risposta (d) non è corretta in quanto esistono punti critici che non sono di estremo (le selle).

(2) Le soluzioni del sistema differenziale lineare $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, con $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ simmetrica:
(a) sono periodiche
$\boxed{\text{V}}$ sono esponenziali
(c) non sono definite per $t < 0$
(d) non possono essere costanti

(S) Essendo A reale simmetrica, è diagonalizzabile, quindi le soluzioni sono tutte di tipo esponenziale; in particolare, non sono periodiche.
Essendo il sistema lineare a coefficienti costanti, le soluzioni sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Esiste sempre almeno una soluzione costante: quella nulla.

(3) La serie di funzioni $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$
(a) converge semplicemente ma non totalmente in $\mathbb{R}$
$\boxed{\text{V}}$ converge totalmente in $\mathbb{R}$
(c) è derivabile termine a termine in $\mathbb{R}$
(d) converge totalmente in $(-1, 1)$, ma non in $[-1, 1]$

(S) La serie di funzioni data converge totalmente in $\mathbb{R}$ poichè $\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ e la serie numerica di termine generale $\frac{1}{n^2}$ è convergente.
Non possiamo concludere la derivabilità termine a termine in quanto $\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)' = -\frac{\sin(nx)}{n}$ e la serie armonica è divergente.

(4) Il versore tangente alla curva piana $\underline{r}(t) = (t,\, 2\sqrt{t})$ in $t = 2$ è
(a) non ben definito
(b) $(1, \sqrt{1/2})$
(c) $(\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$
$\boxed{\text{V}}$ $(\sqrt{2/3}, \sqrt{1/3})$

(S) Il versore tangente nel generico t è $\underline{T}(t) = \frac{\underline{r}'(t)}{\|\underline{r}'(t)\|}$. Si ha che

$$\underline{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{t}} \end{pmatrix} \qquad \underline{r}'(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad \|\underline{r}'(2)\| = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(t) + 9y(t) = f(t),$$

dove f è una funzione reale di variabile reale, ovvero $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) (2 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale nel caso f sia identicamente nulla.

b) (4 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale nel caso $f(t) = \sin(3t)$ e determinare, fra di esse, la famiglia di tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}$.

c) (2 punti) Per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{Z}$ le soluzioni dell'equazione differenziale per f definita da $f(t) := \sin(\alpha t)$ sono tutte periodiche su $\mathbb{R}$?

(S) Le risposte ai quesiti sono:

a) Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 9$ che ha radici complesse e coniugate $\lambda_\pm = \pm 3i$. Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_o(t) = c_1 \cos(3t) + c_2 \sin(3t)$ con $t \in \mathbb{R}$ per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) L'integrale generale dell'equazione differenziale nel caso $f \not\equiv 0$ è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t), \tag{1}$$

dove y_o è stata trovata al punto precedente e per il metodo di somiglianza y_p è una soluzione particolare dell'equazione differenziale della forma

$$y_p(t) = t[A\cos(3t) + B\sin(3t)] \tag{2}$$

per appropriate costanti $A, B \in \mathbb{R}$ da determinare. Sostituendo y_p nell'equazione differenziale otteniamo

$$(3B + 3(B - 3At))\cos(3t) - (3(A + 3Bt) + 3A)\sin(3t) + 9t[A\cos(3t) + B\sin(3t)] = \sin(3t)$$

e quindi risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} 3B + 3(B - 3At) + 9At = 0, \\ -3(A + 3Bt) - 3A + 9Bt = 1 \end{cases}$$

troviamo le costanti $A = -1/6$ e $B = 0$ da cui $y_p(t) := -(t\cos(3t))/6$. Quindi da (1) concludiamo che l'integrale generale è:

$$y(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{t}{6}\cos(3t)$$

con $t \in \mathbb{R}$, per $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. La famiglia di tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}$ è vuota siccome

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = -\infty$$

per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

c) Le soluzioni sono tutte periodiche su $\mathbb{R}$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 3\}$, infatti per $\alpha \in \{\pm 3\}$ c'è risonanza e (come visto al punto precedente) le soluzioni non sono periodiche perchè la soluzione particolare è da ricercare della forma (2), mentre in tutti gli altri casi, siccome $p(\pm i\alpha) \neq 0$ la soluzione particolare è da ricercare della forma $y_p(t) = [A'\cos(\alpha t) + B'\sin(\alpha t)]$ per opportune costanti $A', B' \in \mathbb{R}$ e quindi si ottengono soluzioni periodiche.

Esercizio 2 Si consideri la funzione:

$$f(x,y) = x + \frac{y^2}{x-2} - 4\log(y+1).$$

Determinare e rappresentare in $\mathbb{R}^2$ il suo insieme di definizione $\mathbb{D}$. Trovare gli eventuali punti di estremo relativo di f in $\mathbb{D}$ e mostrare che f non ammette punti di estremo assoluto in $\mathbb{D}$.

(S) L'insieme di definizione $\mathbb{D}$ di f è caratterizzato dalle condizioni $x \neq 2$ e $y > -1$.
Essendo f derivabile in $\mathbb{D}$ e $\mathbb{D}$ aperto, per il teorema di Fermat gli eventuali punti di estremo relativo vanno ricercati tra i punti critici di f in $\mathbb{D}$. I punti critici soddisfano $\nabla f(x,y) = \underline{0}$ e cioè il sistema:

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{(x-2)^2} = 0 \\ \frac{y}{x-2} - \frac{2}{y+1} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-2)^2 = y^2 \\ y(y+1) = 2(x-2). \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava che $x - 2 = y$ oppure $x - 2 = -y$, dunque

$$\begin{cases} x-2 = y \\ y+1 = 2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x-2 = -y \\ y+1 = -2. \end{cases}$$

Il secondo sistema conduce al punto $B(5,-3)$ che non appartiene a $\mathbb{D}$. L'unico punto critico è quindi $A(3,1)$.
Per stabilire se A è punto estremale, applichiamo il criterio dell'Hessiana:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2y^2}{(x-2)^3} & -\dfrac{2y}{(x-2)^2} \\ \\ -\dfrac{2y}{(x-2)^2} & \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{4}{(y+1)^2} \end{pmatrix} \Longrightarrow H_f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

dunque A è punto di minimo locale per f con $f(A) = 4 - 4\log 2$.
Infine, dalle relazioni

$$\lim_{y\to+\infty} f(3,y) = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x,1) = -\infty,$$

deduciamo che f non ammette punti di estremo assoluto in $\mathbb{D}$.

Esercizio 3 Sia

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} - 3 < z < 3 - (x^2+y^2)\}$$

Calcolare $\iiint_E z\,dx\,dy\,dz$.

(S) L'integrale richiesto può essere calcolato per fili:

$$I = \iiint_E z\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-3}^{3-(x^2+y^2)} z\,dz \right) dx\,dy.$$

Determiniamo la regione D imponendo:

$$\sqrt{x^2+y^2} - 3 = 3 - (x^2+y^2) \quad \Leftrightarrow \quad r - 3 = 3 - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 + r - 6 = 0,$$

da cui deduciamo $r = 2$, cioè $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 4\} = \{(r,\theta) : r \in [0,2], \theta \in [0,2\pi)\}$.
Calcoliamo l'integrale interno e poi quello esterno passando in coordinate polari:

$$\begin{aligned} I = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \frac{1}{2} \left[(3-r^2)^2 - (r-3)^2 \right] r\,dr \right) d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1\,d\theta \cdot \int_0^2 \left[(3-r^2)^2 - (r-3)^2 \right] r\,dr \\ &= \pi \int_0^2 (r^5 - 7r^3 + 6r^2)\,dr = -\frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

In alternativa è anche possibile osservare che la regione E è unione di due regioni $E = E^+ \cup E^-$ sulle quali è possibile integrare per strati:

$$E^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < 3 - z,\ z \in (-1,3)\}$$

$$E^- = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 < (z+3)^2,\ z \in (-3,-1)\}.$$

La regione superiore E^+ può essere affettata in strati E_z^+, che risultano essere cerchi di raggio $\sqrt{3-z}$ e quindi

$$\text{area}(E_z^+) = \pi(3-z) \qquad z \in (-1,3).$$

La regione inferiore E^- invece si affetta in strati E_z^-, che sono cerchi di raggio $3+z$ e quindi

$$\text{area}(E_z^+) = \pi(3+z)^2 \qquad z \in (-3,-1).$$

In conclusione, integrando per strati sulle due regioni separatamente, si ottiene lo stesso risultato ottenuto in precedenza:

$$I = \int_{-1}^3 z \iint_{E_z^+} dxdy\,dz + \int_{-3}^{-1} z \iint_{E_z^-} dxdy\,dz = \int_{-1}^3 z\pi(3-z)\,dz + \int_{-3}^{-1} z\pi(3+z)^2\,dz = \frac{8}{3}\pi - 4\pi = -\frac{4}{3}\pi.$$