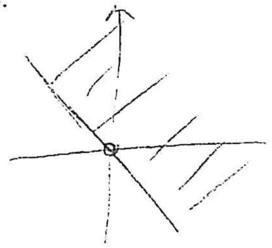
| | | |
|---|---|---|
| *Politecnico di Milano*<br>Ing. Informatica e Ing. delle Telecomunicazioni<br>*Prof. E. Maluta* | *Analisi Matematica II*<br><br>Prima Parte | 18 luglio 2018 |
| Cognome e Nome: | Matricola: | P T 1 2 3 4 |

**Ogni risposta va scritta nello spazio sotto il quesito e motivata con calcoli o/e spiegazioni.**

1. Disegnare sul piano cartesiano il dominio della funzione $f$ definita da $f(x,y) = \sqrt[4]{\frac{x+y}{x^2+y^2}}$ precisando se esso è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

$(x,y) \neq (0,0) \quad x+y \geq 0$



$y \geq -x$ tranne $(0,0)$

né aperto né chiuso

2. Data la funzione $f(x,y) = e^{x-y}\left(2x^2+y^2\right)$, scrivere l'equazione della retta tangente nel punto $(1,0)$ alla curva di livello.

$\nabla f(1,0) = (6e, -2e)$ retta tang $\perp \nabla f(1,0)$, passa per $(1,0)$ quindi

$(6e, -2e)(x-1, y) = 0 \qquad y = 3(x-1)$

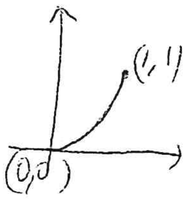
3. Sia $f(x,y) = x|y+1|$. Scrivere la derivata direzionale di $f$, relativa alla generica direzione $\mathbf{v}$, nel punto $(0,0)$.

$\underline{v} = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

$D_{\underline{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot \underline{v} = \cos\vartheta$

4. Disegnare il sostegno della curva $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j}$ con $t \in [-1,1]$ e stabilire se essa è semplice.

$\underline{r}(t) = \begin{cases} t^2 \\ t^4 \end{cases} \qquad y(t) = (x(t))^2$




chiuso, non semplice
percorso da $(1,1)$ a $(0,0)$ per $t \in [-1,0]$ e da $(0,0)$ a $(1,1)$ per $t \in [0,1]$.

5. Trovare l'insieme di differenziabilità della funzione $f(x,y) = |x^4y^3|$.

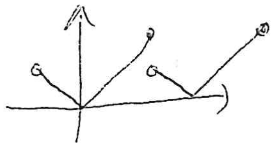
$f(x,y) = x^2y^2|y|$ Unici punti dubbi $(\alpha,0)$ ma $\nabla f(\alpha,0) = (0,0)$ e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\alpha+h,k) - f(\alpha,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(\alpha+h)^2 k^2 |k|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

6. Considerato il quadrato $Q = [0,1]^2$, calcolare $\int_Q x^2y^2\,dxdy$.

$$\int_0^1 x^2 dx \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{9}$$

7. Sia $f$ la funzione periodica di periodo 3 su $\mathbb{R}$ tale che $f(x) = |x|$, per $-1 < x \leq 2$. Qual è l'insieme di continuità della funzione somma della serie di Fourier di $f$?



discontinua in $x = 2 + 3K$

$\mathbb{R} \setminus \{x = 2 + 3K \,,\, K \in \mathbb{Z}\}$

8. Determinare l'insieme $A$ di convergenza puntuale della serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$.

Serie geometrica di ragione $\frac{x}{x+1}$: deve essere $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$

$|x| < |x+1|$ cioè dist $(x,0) <$ dist $(x,-1)$ $\Rightarrow$ $x > -\frac{1}{2}$

9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = y' \\ y'(1) = e^2 \\ y(1) = 3e^2. \end{cases}$$

ponendo $z = y'$ si ha

$z' = z \quad \Rightarrow \quad z(t) = ke^t = y'(t) \qquad y(t) = ke^t + h \qquad k, h \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} y'(1) = ke = e^2 \\ y(1) = ke + h = 3e^2 \end{cases}$ da cui $k = e$, $h = 2e^2$ $\quad y(t) = e^{t+1} + 2e^2$

10. Calcolare il rotore del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z) = (y^2z, yz, yz)$.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2z & yz & yz \end{vmatrix} = \underline{i}\,(z-y) - \underline{j}\,(-y^2) + \underline{k}\,(-2yz) = \underline{i}\,(z-y) + \underline{j}\,y^2 - \underline{k}\,2yz$$