Logica e Algebra

17 Febbraio 2017

Parte di Logica

Esercizio 1

- Stabilire sia per via semantica che mediante la risoluzione se i seguenti insiemi di f.b.f.

$$\Delta_1 = \{A \Rightarrow \neg B, B \Rightarrow \neg C\}$$
$$\Delta_2 = \{(A \Rightarrow \neg B) \wedge \neg C,\ (B \Rightarrow \neg C) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B))\}$$

  sono insoddisfacibili.

- Trovare una formula $F = f(A, B, C)$, che non sia una contraddizione, tale che, in L, F non si deduca da Δ_1, ma si deduca da Δ_2.

Esercizio 2

a) Tradurre in un opportuno linguaggio del primo ordine la seguente frase "Se una funzione è iniettiva, allora ammette inversa destra".

b) Si consideri la seguente f.b.f.

$$\mathcal{F} = \big(\forall x \forall y \left(A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x, y)\right)\big) \Rightarrow \big(\forall x \exists y \left(A_1^2(f_1^1(y), x)\right)\big)$$

1. Si dica se la formula è logicamente valida ed in caso contrario si dia una interpretazione in cui è vera ed una in cui è falsa.
2. Portare $\mathcal{F}$ in forma di Skolem.

Esercizio 1

1. L'insieme Δ_1 ammette almeno i modelli che assegnano ad A e a B il valore 0, per cui è soddisfacibile. Cerchiamo ora se Δ_2 ha modelli: perché sia soddisfatta la prima delle due formule C deve assumere il valore 0, ma se C assume il valore 0, perché assuma valore 1 il secondo congiunto della seconda formula la sottoformula $\neg(A \implies \neg B)$ deve assumere il valore 1, quindi $A \implies \neg B$ deve valere 0 ma allora la prima formula di Δ_2 vale 0. Non esistono pertanto modelli di Δ_2 che dunque è insoddisfacibile.
   Usiamo ora la risoluzione. Δ_1 in forma a clausole è $S = \{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}\}$ e dato che
   $$Ris^*(S) = \{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg B, \neg C\}\} = S$$
   non contiene la clausola vuota, Δ_1 è soddisfacibile. Δ_2 in forma a clausole è $\{\{\neg A, \neg B\}, \{\neg C\}, \{\neg B, \neg C\}, \{C, A\}, \{C, B\}\}$, per risoluzione da $\{C, A\}$ e $\{\neg C\}$ si ricava $\{A\}$, da $\{\neg A, \neg B\}$ ed $\{A\}$ si ottiene $\{\neg B\}$, da $\{C, B\}$ e $\{\neg C\}$ si ricava $\{B\}$ che con la clausola $\{\neg B\}$ genera la clausola vuota. Dunque Δ_2 è insoddisfacibile.

2. Per il teorema di correttezza e completezza (versione forte) da Δ_1 non si deduce in L una formula F se e solo se F non è conseguenza semantica di Δ_1 e da Δ_2 si deduce in L una formula F se e solo se F è conseguenza semantica di Δ_2. Poiché ogni formula è conseguenza semantica di un insieme insoddisfacibile, dobbiamo quindi trovare una formula F che non sia una contraddizione e che non sia semanticamente deducibile da Δ_1, ovvero che non abbia come modelli tutti i modelli di Δ_1. Scriviamo ad esempio una formula che non abbia il modello $v(A) = v(B) = v(C) = 0$. La formula $\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C$ ha come unico modello $v(A) = v(B) = v(C) = 0$ e quindi la sua negazione $A \vee B \vee C$ non ha quel modello e non è conseguenza semantica di Δ_1 e non è una contraddizione perché ogni altra assegnazione di valori alle lettere enunciative è un suo modello

Esercizio 2

a) Formalizziamo la frase "Se una funzione è iniettiva, allora ammette inversa destra", usando un linguaggio del primo ordine con due variabili x,y, una costante i, una lettera funzionale f_1^2, due lettere predicative $\mathcal{A}^1$ e $\mathcal{E}^2$ e scriviamo
$$\forall x(\mathcal{A}^1(x) \implies \exists y(\mathcal{E}^2(f_1^2(x, y), i)))$$
che interpretata nel dominio dato dall'insieme $\{g : X \to X\}$ delle funzioni da un insieme in se stesso con la lettera f_1^2 vista come usuale prodotto di funzioni, i come funzione identica, $\mathcal{A}^1$ come predicato essere iniettiva e $\mathcal{E}^2$ come predicato di uguaglianza viene letta come la frase indicata. Notate che in un linguaggio con dominio X, due variabili x, y, due lettere funzionali f_1^1, f_2^1 e una lettera predicativa $\mathcal{E}^2$ possiamo scrivere le frasi f è una funzione iniettiva e g è inversa destra di f nella forma $\forall x \forall y(\mathcal{E}^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \implies \mathcal{E}^2(x, y)$ e $\forall x \mathcal{E}^2(f_2^1(f_1^1(x)), x)$, ma non possiamo scrivere la frase data perché non possiamo quantificare lettere funzionali.

b) 1. La formula $\mathcal{F}$ quando si interpreti la lettera funzionale f_1^1 come una funzione $f : X \to DX$ e la lettera predicativa $\mathcal{A}^2$ come predicato di uguaglianza, dice che se f è una funzione iniettiva allora è anche una funzione suriettiva e questa formula non è sempre vera, è vera nelle interpretazioni in cui la funzione che interpreta f_1^1 è suriettiva o non iniettiva, mentre è falsa nelle interpretazioni in cui la funzione che interpreta f_1^1 è iniettiva ma non biunivoca. Dunque la formula non è logicamente valida. A parte le interpretazioni precedenti è facile osservare che la formula $\mathcal{F}$ è vera in tutte le interpretazioni in cui $\mathcal{A}_1^2$ è la relazione universale sul dominio dell'interpretazione, perché in tal caso il conseguente è vero ed è falsa in tutte le interpretazioni in cui $\mathcal{A}_1^2$ è la relazione vuota, perché in tal caso il conseguente è falso, mentre l'antecedente è vero.

2. Portiamo dapprima $\mathcal{F}$ in forma prenessa

$$\big(\forall x \forall y \left(A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)\right)\big) \Rightarrow \big(\forall x \exists y \left(A_1^2(f_1^1(y), x)\right)\big) \equiv$$

$$\equiv \exists x \exists y \big((A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)) \Rightarrow (\forall x \exists y (A_1^2(f_1^1(y), x)))\big)$$

$$\equiv \exists x \exists y \forall z \exists v \big((A_1^2(f_1^1(x), f_1^1(y)) \Rightarrow A_1^2(x,y)) \Rightarrow A_1^2(f_1^1(v), z)\big).$$

che in forma di Skolem diventa

$$\forall z \big((A_1^2(f_1^1(a_{Sk}), f_1^1(b_{Sk})) \Rightarrow A_1^2(a_{Sk}, b_{Sk})) \Rightarrow A_1^2(f_1^1(f_{Sk}^1(z)), z)\big)$$