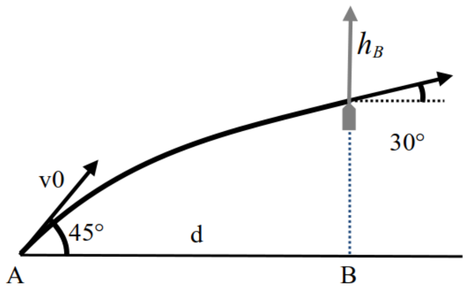
Form 2 - Problemi con svolgimento cartaceo `[tot. 24 punti]`

1. Un piattello di massa M viene sparato con velocità iniziale di modulo v_0 e con un alzo di 45° rispetto all'orizzontale, dal punto A in figura.



   (a) Calcolare la quota h_B raggiunta dal piattello quando passa sulla verticale del punto B, posto a distanza d dal punto A. La quota h_B sia espressa in forma letterale, in funzione solamente di d, v_0 e g. `[3 punti]`

   - Il piattello, soggetto unicamente alla forza peso, si muove di moto parabolico. Fissato un sistema di coordinate con asse x orizzontale rivolto verso destra, asse y verticale rivolto verso l'alto e origine in A, il moto è descritto da:

$$\begin{cases} x = v_{0x}t \\ y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

   - Sapendo che il piattello è sparato con un alzo di 45°, ricaviamo le componenti x e y della velocità iniziale:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 \qquad v_{0y} = v_0 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0$$

   - Il piattello passa sulla verticale del punto B, ovvero raggiunge la posizione $x_B = d$, all'istante:

$$t_B = \frac{x_B}{v_{0x}} = \sqrt{2}\frac{d}{v_0}$$

   e in quell'istante avrà dunque raggiunto una quota $h_B = y_B$ data da:

$$h_B = v_{0y}t_B - \frac{1}{2}gt_B^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}v_0 \cdot \sqrt{2}\frac{d}{v_0} - \frac{1}{2}g \cdot 2\frac{d^2}{v_0^2} = d - \frac{gd^2}{v_0^2}$$

   (b) Calcolare la velocità v_0 necessaria affinché la velocità del piattello formi, sulla verticale del punto B, un angolo di 30° con l'orizzontale, se $d = 10$ m. `[3 punti]`

   - Date le leggi del moto parabolico, le componenti x e y della velocità del piattello seguono:

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} \\ v_y = v_{0y} - gt \end{cases}$$

   - Giunto sulla verticale del punto B, il piattello deve possedere una velocità che formi un angolo di 30° con l'orizzontale. Ciò significa che, in $t = t_B$, deve valere:

$$\frac{v_{yB}}{v_{xB}} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- Sostituendo le espressioni precedentemente ricavate:

$$\frac{v_{yB}}{v_{xB}} = \frac{v_{0y} - gt_B}{v_{0x}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}v_0 - g \cdot \sqrt{2}\frac{d}{v_0}}{\frac{\sqrt{2}}{2}v_0} = \frac{v_0^2 - 2gd}{v_0^2}$$

  da cui:

$$\frac{v_0^2 - 2gd}{v_0^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) v_0^2 = 2gd$$

$$v_0^2 = 2gd \cdot \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = gd \cdot \frac{6\left(3 + \sqrt{3}\right)}{9 - 3}$$

$$v_0 = \sqrt{gd} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}} \simeq 21.5 \text{ m/s}$$

(c) Proprio sulla verticale del punto B, il piattello viene colpito da un proiettile di massa $m = M/10$, sparato in direzione verticale dal punto B sottostante con velocità $10v_0$. L'urto è completamente anelastico. Calcolare la componente orizzontale della velocità del piattello e del proiettile, nell'istante successivo all'urto, sempre assumendo $d = 10$ m. `[2 punti]`

- Durante l'urto anelastico si conserva la quantità di moto del sistema dei due corpi (piattello e proiettile), non agendo forze esterne impulsive. Ricordiamo che, per definizione di urto totalmente anelastico, successivamente all'urto i due corpi procedono con la stessa velocità $\vec{V}$, tipicamente incastrati l'uno nell'altro.

$$\vec{Q} = cost.$$

$$M\vec{v}_B + m\vec{v}_{pro} = (M + m)\,\vec{V}$$

  dove $\vec{v}_B$ è la velocità del piattello sulla verticale del punto B, poco prima dell'urto, e $\vec{v}_{pro}$ è la velocità del proiettile poco prima dell'urto.

- La velocità del proiettile prima dell'urto non è data. Il testo ci indica la velocità con cui esso viene lanciato dal suolo e ci indica che il lancio avviene in direzione verticale. Questo ci basta ad affermare che $\vec{v}_{pro}$ è diretta verticalmente:

$$\vec{v}_{pro} = v_{pro}\vec{u}_y$$

  Possiamo dare per assunto che la velocità di lancio sia sufficiente per raggiungere la quota h_B, altrimenti la richiesta del problema non avrebbe significato.

- La conservazione della quantità di moto può essere scritta scomposta nelle componenti orizzontale e verticale. In particolare, noi siamo interessati alla componente orizzontale della velocità $\vec{V}$ dopo l'urto. Scriviamo perciò:

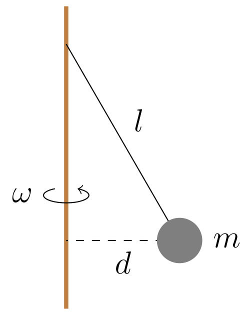
$$Mv_{xB} + m \cdot 0 = (M + m)\,V_x$$

  dato che la velocità del proiettile ha sicuramente componente orizzontale nulla. Concludiamo:

$$V_x = \frac{M}{M + m}v_{xB} = \frac{10m}{10m + m}v_{0x} = \frac{10}{11} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot v_0$$

$$V_x = \sqrt{2}\frac{5}{11} \cdot \sqrt{gd} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3}} = \frac{5}{11}\sqrt{6 + 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{gd} \simeq 13.9 \text{ m/s}$$

2. Una sfera metallica di massa $m = 1$ kg è appesa a una corda inestensibile di lunghezza $l = 20$ cm, fissata all'estremità di un asse rotante a velocità angolare ω.



(a) Calcolare la distanza d della massa m dall'asse rotante in funzione della velocità angolare ω di rotazione. `[3 punti]`

- Alla sfera metallica sono applicate solo le seguenti forze:
  - la forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$, diretta verticalmente verso il basso;
  - la forza $\vec{T}$ di tensione della fune, diretta parallelamente alla corda, orientata verso l'estremità più alta.
- Nella condizione descritta dal testo del problema, la sfera metallica sta compiendo un moto circolare uniforme, di raggio d. La risultante delle forze applicate assume la forma di una forza centripeta.

$$\vec{F}_C = \vec{T} + \vec{P}$$

  dove $|\vec{F}_C| = m\omega^2 d$. Scomponendo questa uguaglianza su un asse orizzontale x e su un asse verticale y con verso opportuno, abbiamo:

$$\begin{cases} F_C = T_x \\ 0 = T_y - P \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\omega^2 d = T_x \\ 0 = T_y - mg \quad \rightarrow \quad T_y = mg \end{cases}$$

- Detto θ l'angolo compreso tra l'asse rotante e la corda, si ha:

$$\tan\theta = \frac{T_x}{T_y} = \frac{m\omega^2 d}{mg} = \frac{\omega^2 d}{g}$$

  Inoltre, da considerazioni puramente geometriche, possiamo dedurre:

$$\tan\theta = \frac{d}{\sqrt{l^2 - d^2}}$$

  Perciò:

$$\frac{\omega^4 d^2}{g^2} = \tan^2\theta = \frac{d^2}{l^2 - d^2}$$

$$l^2 - d^2 = \frac{g^2}{\omega^4}$$

$$d = \sqrt{l^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$$

(b) Al di sopra di quale velocità angolare di rotazione, detta ω_0, si ha una distanza $d \geq l/2$? `[2 punti]`

- Imponendo $d \geq l/2$, si ricava:

$$
\begin{aligned}
d^2 &\geq \frac{l^2}{4} \\
l^2 - \frac{g^2}{\omega^4} &\geq \frac{l^2}{4} \\
\frac{3l^2}{4} &\geq \frac{g^2}{\omega^4} \\
\omega^4 &\geq \frac{4g^2}{3l^2} \\
\omega &\geq \omega_0
\end{aligned}
$$

con $\omega_0 = \sqrt[4]{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{g}{l}} \simeq 7.5$ rad/s.

(c) Se la corda ha una tensione di rottura $T_{max} = 720$ N per quale ω la corda si rompe? `[3 punti]`

- Tenendo conto dei risultati del punto (a) scriviamo la tensione della fune come:

$$
\begin{aligned}
T &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \\
&= \sqrt{m^2\omega^4 d^2 + m^2 g^2} = \\
&= \sqrt{m^2\omega^4\left(l^2 - \frac{g^2}{\omega^4}\right) + m^2 g^2} = \\
&= \sqrt{m^2\omega^4 l^2 - m^2 g^2 + m^2 g^2} = m\omega^2 l
\end{aligned}
$$

- La corda si rompe se $T \geq T_{max}$, quindi:

$$m\omega^2 l \geq T_{max}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{T_{max}}{ml}}$$

ovvero

$$\omega \geq \omega_{max}$$

con $\omega_{max} = \sqrt{\frac{T_{max}}{ml}} \simeq 60$ rad/s.

3. Cinque moli di gas perfetto si trovano in un cilindro di diametro $d = 30$ cm. All'interno del cilindro il volume del gas può essere variato mediante un pistone. Le pareti laterali del cilindro ed il pistone sono adiabatici, mentre il fondo del cilindro è in contatto termico con un serbatoio molto grande contenente una miscela di acqua e ghiaccio all'equilibrio termico. Inizialmente sul pistone agisce una pressione $p_0 = 10^5$ Pa. Successivamente il gas viene compresso aggiungendo molto lentamente sul pistone una massa $M = 70$ Kg di sabbia.

   (a) Si calcoli la quantità totale di ghiaccio m che si fonde durante la compressione del gas (il calore latente di fusione del ghiaccio è $\lambda_F = 335$ J/g); `[3 punti]`

   - Poiché la compressione del gas avviene molto lentamente si può assumere che il gas sia sempre in equilibrio con il serbatoio di acqua e ghiaccio alla temperatura $T = 273.15$ K. La compressione risulta essere una isoterma quasistatica. Se assumiamo trascurabili le eventuali forze dissipative in gioco (es. attriti del pistone con il cilindro), la trasformazione è anche reversibile e il lavoro $\mathcal{L}$ compiuto sul gas si converte integralmente in calore Q ceduto al serbatoio, in quanto l'energia interna non varia.
   - Per un'isoterma reversibile possiamo scrivere:

   $$\mathcal{L} = \int_i^f p\,dV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nRT \ln\left(\frac{p_i}{p_f}\right).$$

   dove p_i e p_f sono la pressione iniziale e finale del sistema.
   - La pressione del gas è pari alla pressione insistente sul pistone. Inizialmente si ha $p_i = p_0$. Alla fine della trasformazione invece si aggiunge la pressione dovuta alla forza peso della sabbia, distribuita sulla sua superficie. Poichè la superficie del pistone è $S = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$, abbiamo:

   $$p_f = p_0 + \frac{P}{S} = p_0 + 4\frac{Mg}{\pi d^2}$$

   - In generale, lo scioglimento di una massa m di ghiaccio richiede una quantità di calore:

   $$Q_F = m\lambda_F$$

   - Il serbatoio assorbe una quantità di calore pari a $-Q = -\mathcal{L}$, da cui possiamo scrivere:

   $$m = \frac{-\mathcal{L}}{\lambda_F} = -\frac{nRT}{\lambda_F} \ln\left(\frac{p_0}{p_0 + 4\frac{Mg}{\pi d^2}}\right) = 3.14 \text{ g}$$

   (b) Si calcoli la variazione di entropia ΔS subita dal gas. `[3 punti]`

   - La variazione di entropia in una trasformazione isoterma reversibile può essere calcolata osservando che:

   $$(\delta Q)_{rev} = dU + d\mathcal{L} = \frac{nRT}{V} dV$$

   in quanto $dU = 0$. Allora:

   $$\Delta S = \int_i^f \frac{(\delta Q)_{rev}}{T} = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nR}{V} dV = nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = nR \ln\left(\frac{p_i}{p_f}\right) = -3.85 \text{ J/K}$$

   - In alternativa, si poteva osservare che per una trasformazione reversibile la variazione di entropia dell'universo è nulla. Quindi, la variazione di entropia del gas è opposta a quella del serbatoio. Poiché nel serbatoio avviene un cambiamento di fase (a temperatura costante), si ha:

   $$\Delta S = -\Delta S_{serb} = -\frac{-Q}{T} = -\frac{m\lambda_F}{T}$$

   e sostituendo i valori numerici si giunge ad analogo risultato.

(c) Si definiscano i concetti di trasformazione termodinamica reversibile e irreversibile, specificando a quale categoria appartiene la trasformazione in esame. `[2 punti]`

- Una trasformazione *irreversibile* è una trasformazione da uno stato i a uno stato f tale per cui non è possibile riportare (tramite un'altra trasformazione) il sistema in i e anche l'ambiente nel suo stato iniziale. In pratica, rimane sempre una traccia della trasformazione nell'ambiente.
- Una trasformazione *reversibile* è una trasformazione da i a f tale per cui invece è possibile riportare (tramite un'altra trasformazione) sia il sistema sia l'ambiente nello stato originario.
- Affinché una trasformazione sia reversibile devono sussistere due condizioni:
  - La trasformazione deve essere quasistatica.
  - Non devono agire forze dissipative.

  Tutte le trasformazioni reali hanno sempre un certo grado di irreversibilità, se non altro perché gli attriti (forze dissipative) non possono mai essere eliminati del tutto. Il concetto di trasformazione reversibile è un concetto limite che può solo essere avvicinato da trasformazioni reali, con tanto migliore approssimazione quanto più queste sono graduali (quasistatiche) e si svolgono in condizioni di attrito trascurabile.
- Da quanto discusso poco sopra e già anche nel punto (a) dell'esercizio, la trasformazione in esame può essere considerata *reversibile*.