Analisi Matematica 2 – agosto 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	Nome:	Matricola:

Parte A	Es.1	Es.2	Es.3	Totale

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A≥ 4, parte B≥ 12, totale≥ 18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Teoria (4 punti). Enunciare e dimostrare il criterio della matrice Hessiana.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze reale e si denoti con R il suo raggio di convergenza. Si ha:

(a) se $R=0$, la serie non converge puntualmente in nessun punto

(b) se $R=+\infty$, la serie converge totalmente in ogni sottointervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$

(c) $R = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, se tale limite esiste

(d) nessuna delle altre

(2) Sia $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \log(xy)\le 1\}$. Allora

(a) nessuna delle altre affermazioni è corretta

(b) Ω è aperto

(c) Ω è chiuso

(d) Ω è limitato

(3) Sia $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, x^2+y^2\le 4,\ y\le x+2,\ x\le 0\right\}$ e sia f continua in Ω. Allora $\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$

(a) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x+2} f(x,y)dydx$

(b) $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\int_0^2 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho d\theta$

(c) $\displaystyle\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\int_{-2}^{2} f(x,y)dydx$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_0^{x+2} f(x,y)dydx$

(4) Data una serie di funzioni $\sum_n f_n$ con $f_n : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I non vuoto, si ha

(a) se $f_n(x)\to 0$ per ogni $x\in I$, allora la serie data converge puntualmente in I

(b) se esiste $x_0\in I$ tale che $f_n(x_0)\not\to 0$, allora la serie data non converge totalmente in I

(c) se la serie data converge puntualmente su I, allora è integrabile termine a termine su I

(d) se $|f_n(x)|\le 1/n$ per ogni $x\in I$ ed ogni n, allora la serie data converge totalmente in I

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 (i) (6 punti) Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) (2 punti) Determinare la soluzione $\underline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ di tale sistema che soddisfa $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$.

Esercizio 2 Sia f la funzione 2π-periodica, pari, definita in $[0, \pi]$ da $f(x) = x$.
(i) (1 punto) Rappresentare f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
(ii) (4 punti) Calcolare la serie di Fourier di f.
(iii) (3 punti) Relativamente a tale serie: determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione somma della serie; stabilire se la convergenza sia totale in tutto $\mathbb{R}$; discutere la convergenza in media quadratica.

Esercizio 3 Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x, y) = -\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + 2.$$

(i) (3 punti) Motivando la risposta, dire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Detto I_1 l'insieme di livello 1 di f, determinare un vettore ortogonale ad I_1 nel punto $P_0 = \left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

(ii) (2 punti) Immaginando che la regione $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ rappresenti una montagna, calcolare la direzione di minima pendenza (crescita) della montagna nel punto P_0,

(iii) (3 punti) Considerare l'insieme $\gamma = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in I_1\}$ come sostegno di una curva in $\mathbb{R}^3$ e, immaginando che si scavi un fossato sulle pendici della montagna lungo γ, calcolare la massa totale del materiale rimosso per lo scavo nel caso in cui la densità di massa $\delta : M \to \mathbb{R}$ sia definita per ogni $(x, y, z) \in M$ da

$$\delta(x, y, z) = \frac{x^2|y|}{\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2}}.$$