Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 7 febbraio 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(6 punti)*

1) (3 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^t$.

2) (1,5 punti) Stabilire se esistono soluzioni di tale equazione che verificano $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ e, in caso affermativo, determinarle tutte.

3) (1,5 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Risposte

1) Consideriamo in primo luogo l'equazione omogenea associata $y''(t)+2y'(t)-3y(t) = 0$. Il polinomio caratteristico è $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$, che ha gli zeri reali e distinti $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = 1$. Concludiamo che l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_o(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^t$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Passiamo a studiare l'equazione completa. Essendo la forzante $e^t = e^{1\cdot t}$ ed essendo 1 uno zero del polinomio caratteristico, una soluzione particolare avrà la forma $z(t) = Ate^t$ per una opportuna costante $A \in \mathbb{R}$. Calcolandone le derivate e sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo

$$\Big(2Ae^t + z(t)\Big) + 2\Big(Ae^t + z(t)\Big) - 3z(t) = 4Ae^t \overset{pongo}{=} e^t \qquad \Rightarrow \qquad A = \frac{1}{4},$$

da cui una soluzione particolare è $y_p(t) = \frac{t}{4}e^t$. Concludiamo che l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^t + \frac{t}{4}e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Le soluzioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$. Ricordando i limiti

$$\lim_{t\to-\infty} e^{-3t} = +\infty, \quad \lim_{t\to-\infty} e^t = 0, \quad \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{4}e^t = 0$$

(l'ultimo deriva dalla scala degli infiniti), deduciamo che le soluzioni dell'equazione che verificano $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ sono tutte e sole quelle ottenute ponendo $c_1 = 0$, cioè del tipo $ce^t + \frac{t}{4}e^t$, con $c \in \mathbb{R}$.

3) Si ha $y(0) = c_1 + c_2$ e

$$y'(t) = -3c_1e^{-3t} + \left(c_2 + \frac{1}{4}\right)e^t + \frac{t}{4}e^t \qquad \Rightarrow \qquad y'(0) = -3c_1 + c_2 + \frac{1}{4}.$$

Per risolvere il problema di Cauchy dobbiamo quindi determinare le soluzioni c_1, c_2 del sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -3c_1 + c_2 + \frac{1}{4} = 0, \end{cases}$$

da cui $c_1 = 1/16$, $c_2 = -1/16$ e la soluzione richiesta è

$$\frac{1}{16}e^{-3t} - \frac{1}{16}e^t + \frac{t}{4}e^t.$$

Esercizio 2 *(6 punti)*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi)$ da $\begin{cases} -x & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ \frac{x}{2} & \text{per } x \in [0, \pi). \end{cases}$

1) (3 punti) Studiare la convergenza della serie di Fourier di f, in particolare:

   a- discutere la convergenza in media quadratica;

   b- determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di Fourier e la funzione somma della serie in tale insieme;

   c- stabilire se la convergenza della serie di Fourier sia totale in tutto $\mathbb{R}$.

2) (3 punti) Determinare i coefficienti a_n della serie di Fourier di f. *Non è richiesto di calcolare i coefficienti b_n.*

Risposte

1) Essendo f periodica di periodo 2π e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, deduciamo immediatamente che la serie di Fourier di f converge in media quadratica e che essa converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$. Quindi la somma della serie $F(x) = \lim_{m\to+\infty} F_m(x)$ risulta ben definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, dove abbiamo indicato con $F_m(x)$ il polinomio di Fourier di ordine m associato a f. Inoltre

$$\text{per ogni } x \neq \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ si ha} \quad F(x) = f(x)$$

in quanto f è continua in tali punti, mentre

$$F(\pi + 2k\pi) = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{3}{4}\pi \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z},$$

in quanto f è discontinua in tali punti. Infine, la convergenza non è totale in tutto $\mathbb{R}$, in quanto la funzione F è discontinua (essendo $F_m(x)$ somme parziali m-esime di funzioni continue, se la convergenza fosse totale in tutto $\mathbb{R}$, si avrebbe che la funzione somma $F(x)$ sarebbe a sua volta una funzione continua).

2) Si ha

$$a_0 = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,dx = \frac{3}{8\pi}$$

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\cos(nx)\,dx = \frac{3}{2}\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2},$$

dove si è usato il seguente integrale ottenuto tramite integrazione per parti

$$\int x\cos(nx)\,dx = \frac{x\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

Possiamo equivalentemente scrivere che, per $k = 1, 2, 3...$

$$a_{2k-1} = \frac{3(-1)^{2k-1}}{\pi(2k-1)^2}, \qquad a_{2k} = 0.$$

Esercizio 3 *(6 punti)*

1) (3 punti) Sia g la funzione di due variabili definita da $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$.

   a- Determinare il dominio di g e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.

   b- Stabilire se esiste il limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ e, in caso affermativo, determinarlo.

2) (3 punti) Sia ora $f(x,y) = e^{x^2-y}$. Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul vincolo $\mathcal{Z} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

Risposte

1) Il dominio di g è

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2+y^2 \neq 0, \ 1+x^2y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y) \neq (0,0), \ x^2y > -1\}.$$

Si tratta della regione piana che giace sopra il grafico della funzione $y = -\dfrac{1}{x^2}$, ad esclusione dell'origine. Esso è aperto e illimitato. Riguardo il limite di g nell'origine, sfruttando il limite notevole 1-dimensionale $\ln(1+t) \sim t$ per $t \to 0$, si ha

$$g(x,y) \sim \frac{x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}} \qquad \text{per } (x,y) \to (0,0).$$

Dimostriamo che il limite richiesto è 0. Passando in coordinate polari $(x,y) = (r\cos(\theta), r\sin\theta)$ e prendendo il valore assoluto si ottiene:

$$\left|\frac{x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{\sqrt{2r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}}\right| = \frac{r^2|\cos^2\theta\sin\theta|}{\sqrt{2\cos^2\theta+\sin^2\theta}}.$$

Possiamo stimare il denominatore ad esempio come segue

$$\sqrt{2\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta+1} \geq 1.$$

Usando per il numeratore la disuguaglianza $|\cos^2\theta\sin\theta| \leq 1$ si ottiene

$$\left|\frac{x^2y}{\sqrt{2x^2+y^2}}\right| \leq r^2,$$

che permette di concludere che il limite richiesto è 0.

2) Essendo f continua su tutto il suo dominio ed essendo $\mathcal{Z}$ chiuso e limitato, il massimo e il minimo assoluti di f su $\mathcal{Z}$ esistono per il teorema di Weierstrass. Applicando il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, ci si riconduce a risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xe^{x^2-y} = 2\lambda x \\ -e^{x^2-y} = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione deduciamo che o $x = 0$, oppure $\lambda = e^{x^2-y}$. Nel caso $x = 0$ otteniamo i due punti candidati $P_1 = (0,1)$ e $P_2 = (0,-1)$. Nel caso complementare, andando a sostituire $\lambda = e^{x^2-y}$ nella seconda equazione, otteniamo

$$\begin{cases} -\lambda = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ x^2 = 1-y^2 = \frac{3}{4} \end{cases},$$

da cui i punti candidati $P_3 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ e $P_4 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. In conclusione, confrontando i valori $f(P_i)$ per $i = 1, \ldots, 4$,

$$\max_{\mathcal{Z}} f = e^{5/4} \qquad \min_{\mathcal{Z}} f = e^{-1}.$$

Il risultato poteva anche essere ottenuto con il metodo di sostituzione, sostituendo le coordinate polari nella f e cercando i punti critici tramite derivazione rispetto a θ.

Esercizio 4 *(6 punti)*

Data la lamina piana

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ x \geq 0, \ -x \leq y \leq x\},$$

avente densità di massa $\rho(x, y) = x$,

1) (2,5 punti) calcolare la massa $m(L)$ della lamina L;
2) (3,5 punti) ricordando che il baricentro di L ha coordinate

$$\frac{1}{m(L)} \left(\iint_L x\rho(x, y)\, dx\, dy, \iint_L y\rho(x, y)\, dx\, dy \right),$$

determinarle.

Risposte

1) Calcoliamo la massa passando alle coordinate polari $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin\theta)$. Ricordando di moltiplicare l'integranda per il modulo dello jacobiano del cambiamento di coordinate r, abbiamo

$$m(L) = \iint_L \rho(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 r\cos(\theta)\, r\, dr\, d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 r^2\, dr = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

2) Per determinare il baricentro di L, utilizziamo ancora le coordinate polari:

$$\frac{1}{m(L)} \iint_L x^2\, dx\, dy = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 r^2 \cos^2(\theta)\, r\, dr\, d\theta = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 r^3\, dr = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{2+\pi}{16}$$

$$\frac{1}{m(L)} \iint_L xy\, dx\, dy = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^1 r\cos(\theta)\, r\sin(\theta)\, r\, dr\, d\theta = \frac{3}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)\sin(\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 r^3\, dr = 0$$

(l'ordinata del baricentro poteva anche essere dedotta dalla simmetria del problema).

TEORIA: 8 punti.

Tutte le domande a crocette ammettono una e una sola risposta corretta.

1) *(1 punto)* Si consideri il sistema differenziale omogeneo $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, dove A è una matrice quadrata di ordine 2 avente autovalori complessi coniugati immaginari puri.

A Le soluzioni sono tutte limitate in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$

B Potrebbero esistere soluzioni non definite in tutto $\mathbb{R}$

C Le soluzioni sono tutte del tipo $\underline{v}\, e^{\lambda t}$, con λ reale e $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$

D L'integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 1

2) *(1 punto)* Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrizzazione di una curva regolare γ. Siano poi $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $\gamma \subset A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ continua. L'integrale curvilineo di f lungo γ è

A $\int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\, dt$

B $\int_{\underline{r}(a)}^{\underline{r}(b)} f(\underline{r}(t))\, dt$

C $\int_a^b f(\underline{r}(t))\, dt$

D $\int_a^b f(\underline{r}(t))\, \|\underline{r}'(t)\|\, dt$ $\boxed{\text{V}}$

3) *(1 punto)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora

A f è di classe C^1 in un intorno di $\underline{x}_0$

B può esistere una successione di punti $\underline{x}_n$ per cui si abbia $\lim\limits_{n\to+\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\underline{x}_n) \neq f(\underline{x}_0)$

C se inoltre $\underline{x}_0$ è punto critico per f, allora $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$ quando $\underline{x} \to \underline{x}_0$ $\boxed{\text{V}}$

D $\nabla f(\underline{x}_0)$ è tangente all'insieme di livello di f passante per $\underline{x}_0$

4) *(1,5 punti)* Enunciare il teorema di Fermat, specificandone le ipotesi di validità.

5) *(3,5 punti)* Enunciare e dimostrare la formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari.