Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 3 settembre 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tempo: 2 ore e 10 minuti. È richiesto di giustificare tutti i passaggi.
La prova è sufficiente se e solo se le seguenti tre soglie sono tutte raggiunte: esercizi 12 punti, teoria 4 punti, punteggio totale 18.

Esercizio 1 *(5,5 punti)* Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^3 \sin t$.

1.1 *(2,5 punti)* Determinarne l'integrale generale.

1.2 *(1,5 punti)* Stabilire se esistono soluzioni di tale equazione differenziale definite su tutto $\mathbb{R}$; in caso affermativo, determinarle tutte.

1.3 *(1,5 punti)* Trovare la soluzione dell'equazione differenziale data che soddisfa $y(\pi) = -1$.

Esercizio 2 *(6,5 punti)*

2.1 *(3 punti)* Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n+1)}{2^n - n}(x-1)^n$$

e dire, motivando la risposta, se essa risulta integrabile termine a termine nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2.2 *(3,5 punti)* Sia f_α (dipendente dal parametro $\alpha > 0$) l'estensione 2π-periodica della funzione

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha & x \in [0, \pi) \\ 2 - \alpha x & x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

È possibile determinare α affinché la serie di Fourier di f_α converga totalmente in $\mathbb{R}$? In caso affermativo, calcolare tale α.
Successivamente, determinare la serie di Fourier di f_0 (cioè della funzione 2π-periodica ottenuta per $\alpha = 0$).

Esercizio 3 *(6 punti)*

3.1 (*4 punti*) Siano

$$f(x, y) = x^2(y^2 + x^2 + 2) - y^2 \qquad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}.$$

Determinare, giustificandone l'esistenza, i valori di massimo e di minimo assoluto di f in D.

3.2 (*2 punti*) Calcolare, se esiste,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Esercizio 4 *(6 punti)* Si consideri la regione limitata di piano compresa tra l'asse x e le due curve $x = y^2$ e $x = -y^2 + 2$. Sia poi Ω la regione ottenuta intersecandola con il primo quadrante $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, y \ge 0\}$.

4.1 (*2,5 punti*) Determinare l'area di Ω.

4.2 (*3,5 punti*) Detto γ il contorno (bordo) di Ω, calcolare $\displaystyle\int_\gamma y \, ds$.

TEORIA: 8 punti.

Ogni quesito a risposta chiusa ammette una e una sola risposta corretta.

T.1 (1 punto) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ è di frontiera per E se e solo se

A. $\underline{x}_0$ non appartiene ad E

B. esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \subseteq E$

C. per ogni $r > 0$ si ha $B_r(\underline{x}_0) \cap E \neq \emptyset$ e $B_r(\underline{x}_0) \cap E^c \neq \emptyset$

D. esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \cap E \neq \emptyset$ e $B_r(\underline{x}_0) \cap E^c \neq \emptyset$

T.2 (1 punto) Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : I \to \mathbb{R}$ per ogni n, $I \subseteq \mathbb{R}$. Si ha:

A. tale serie converge puntualmente in I se e solo se $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in I$

B. se $\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ per ogni n, allora tale serie converge totalmente in I

C. se, per ogni n e per ogni $x \in I$, si ha $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^2}{n^2}$, tale serie converge assolutamente in I

D. nessuna delle altre opzioni è vera

T.3 (1 punto) Sia $\underline{y}' = A\underline{y}$ un sistema differenziale omogeneo a coefficienti costanti ($\underline{y} \in \mathbb{R}^n$). Si ha:

A. se A è invertibile, allora tale sistema possiede soltanto soluzioni di tipo esponenziale (ovvero del tipo $e^{\lambda t}\underline{v}$, per opportuni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$)

B. se A è la matrice nulla, una base dell'integrale generale del sistema è la base canonica $\{\underline{e}_i\}_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$

C. detta $W(t)$ una matrice Wronskiana associata a tale sistema, può esistere $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $W(t_0)$ non sia invertibile

D. nessuna delle altre opzioni è vera

T.4 (2 punti) Enunciare i teoremi di struttura

- dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del II ordine omogenea;
- dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare del II ordine non omogenea

(i due enunciati possono eventualmente essere accorpati in un unico teorema).

T.5 (3 punti) Enunciare e dimostrare il teorema riguardante le direzioni di massima e di minima crescita del grafico di una funzione di due variabili.