Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)
Prof. Fredy Ruiz
Appello del 25 gennaio 2023

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x_1}(t) = -2x_1(t) + 5x_2(t) + \beta u(t)$$
$$\dot{x_2}(t) = \alpha x_1(t)x_2(t) - \beta x_2(t)$$
$$y(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

dove α e β sono costanti reali **positive**.

1. Classificare il sistema

- sistema a tempo continuo
- Non lineare, ordine 2
- Invariante nel tempo
- SISO
- strettamente proprio

2. Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$.
   Attenzione: verificare l'esistenza di più equilibri.

Condizioni di equilibrio: $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = 0$

$-2\bar{x}_1 + 5\bar{x}_2 + \beta\bar{u} = 0$

$(\alpha\bar{x}_1 - \beta)\bar{x}_2 = 0$

Soluzioni: Punto 1 $\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{\beta}{2}\bar{u} \\ \bar{x}_2 = 0; \ \bar{y} = \frac{\beta}{2}\bar{u} \end{cases}$; Punto 2: $\begin{cases} \bar{x}_1 = \frac{\beta}{\alpha} \\ \bar{x}_2 = \frac{\beta}{5}\left(\frac{2}{\alpha} - \bar{u}\right) \\ \bar{y} = \frac{\beta}{5}\left(\frac{3}{\alpha} + \bar{u}\right) \end{cases}$

3. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio corrispondente a $\bar{u} = 2$ con $\bar{x}_2 = 0$.

Equilibrio: $\bar{x}_1 = \beta; \bar{x}_2 = 0, \bar{y} = \beta$

Sistema linearizzato: $\dot{\tilde{x}}(t) = A\tilde{x}(t) + B\tilde{u}(t)$; $\tilde{y}(t) = C\tilde{x}(t)$

con $\tilde{x} = x(t) - \bar{x}$, $\tilde{u} = u(t) - \bar{u}$, $\tilde{y} = y(t) - \bar{y}$

$$A = \frac{\partial F}{\partial x} = \left.\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ \alpha\bar{x}_2 & \alpha\bar{x}_1 - \beta \end{bmatrix}\right|_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & \beta(\alpha-1) \end{bmatrix}; \quad B = \frac{\partial F}{\partial u} = \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$C = \frac{\partial G}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4. Studiare la stabilità del sistema linearizzato trovato al punto precedente al variare dei parametri α e β. Se possibile, determinare la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda + 2)\cdot(\lambda - \beta(\alpha - 1)) \Big\} A \text{ è triangolare}$$

$\boxed{\lambda_1 = -2}$, $\boxed{\lambda_2 = \beta(\alpha-1)}$ $\Rightarrow$ Sistema Asint stabile se

$\beta(\alpha-1) < 0 \Rightarrow (\beta > 0 \wedge \alpha < 1) \vee (\beta < 0 \wedge \alpha > 1)$

Instabile se $\beta(\alpha-1) > 0 \Rightarrow (\beta < 0 \wedge \alpha < 1) \vee (\beta > 0 \wedge \alpha > 1)$

Semplicemente stabile se $\beta = 0 \vee \alpha = 1$

Il equilibrio del sistema non lineare è Asint. stabile o Instabile per le stesse condizioni. Mentre non possiamo concludere sulla stabilità del equilibrio se $\beta = 0 \vee \alpha = 1$

5. Per il sistema linearizzato, fissando i valori dei parametri $\alpha = 1$, $\beta = 3$, trovare il movimento libero dello stato attorno all'equilibrio per la condizione iniziale $\tilde{x}(0) = [0 \quad 1]'$.

$$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tilde{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u} \; ; \; \tilde{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

· Sistema a cascata:

$$\dot{\tilde{x}}_2 = 0$$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -2\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2 + \cancel{3u} \quad \tilde{u} = 0$$

allora $x_2(t) = 1, \; \forall t \geq 0$

$$\dot{\tilde{x}}_1 = -2\tilde{x}_1 + 5\tilde{x}_2, \text{ con } \tilde{x}_2 = 1$$

Lagrange $\tilde{x}_1(t) = \int_0^t e^{-2(t-\tau)} \cdot 5 \cdot 1 \, d\tau$

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{5}{2}\left(1 - e^{-2t}\right), \quad t \geq 0$$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = 0.2x_1(k) + 0.6x_2(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ x_2(k+1) = 0.5x_1(k) - 0.5x_2(k) + 2u_2(k) \\ y(k) = x_2(k) - u_1(k) \end{cases}$$

1. Scrivere il sistema in forma matriciale e classificare il sistema.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}$$

Sistema a tempo discreto, lineare, tempo invariante, MIMO proprio, ordine 2.

2. Determinare autovalori e modi del sistema, e studiare la sua stabilità.

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 0,2 & -0,6 \\ -0,5 & \lambda + 0,5 \end{pmatrix} = (\lambda - 0,2)(\lambda + 0,5) - 0,3$$

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 0,3\lambda - 0,4, \quad \lambda_1 = 0,5 \quad \lambda_2 = -0,8$$

I modi sono:

$$m_1(k) = \lambda_1^k = (0,5)^k,$$

$$m_2(k) = \lambda_2^k = (-0,8)^k,$$

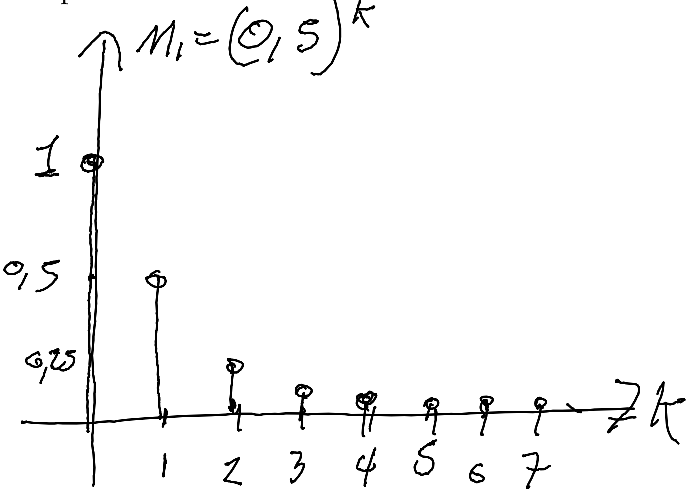
3. Trovare gli stati e l'uscita di equilibrio per un ingresso costante $u(k) = \bar{u} = [1 \;\; 1]'$

In equilibrio $X(k+1) = X(k) = \bar{X}$

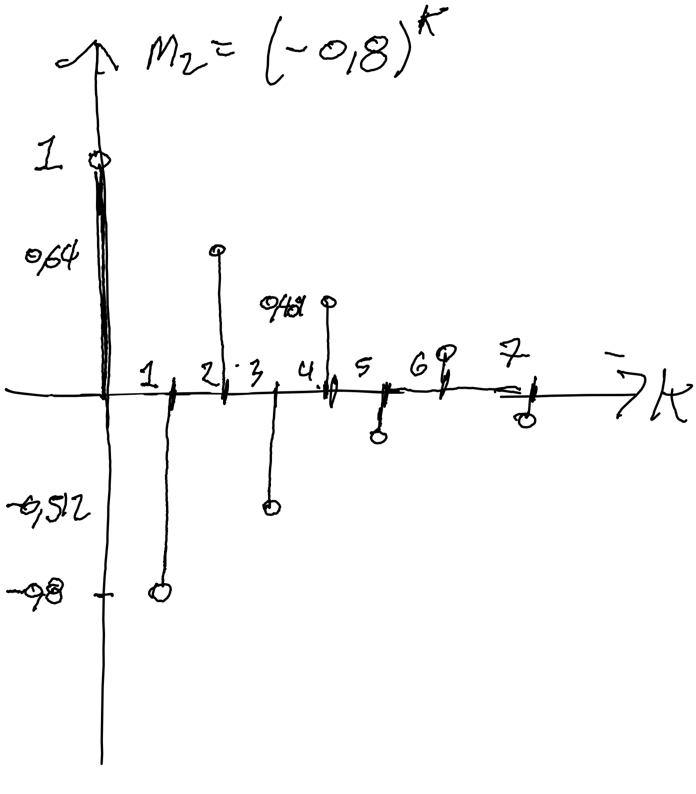
$$\bar{x}_1 = 0{,}2\bar{x}_1 + 0{,}6\bar{x}_2 + 1 - 1$$
$$\bar{x}_2 = 0{,}5\bar{x}_1 - 0{,}5\bar{x}_2 + 2$$
$$\bar{y} = \bar{x}_2 - 1$$

equilibrio: $\bar{x}_1 = 4/3$, $\bar{x}_2 = 16/9$, $\bar{y} = 7/9$

4. Disegnare *in maniera qualitativa* la risposta del movimento libero di ognuno dei modi del sistema, ipotizzare un ampiezza iniziale unitaria per ogni modo. Indicare quale modo si assesta più velocemente e se ci sono delle oscillazioni nelle risposte.



Il modo 1 si assesta più velocemente: $(0{,}5)^7 < 0{,}01$ mentre $(0{,}8)^7 \cong 0{,}21$



Il modo 2 é oscillante.

$m_2(k) = (-1)^k \cdot (0{,}8)^k$

ESERCIZIO 3

Un sistema dinamico lineare è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \beta x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_3(t) = \alpha x_3(t) + u(t) \\ y(t) = 3x_1(t) \end{cases}$$

con α e β parametri reali.

1. Scrivere il sistema in forma matriciale e classificare il sistema.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \; ; \; y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

sistema lineare, tempo invariante, ordine 3 SISO, strettamente proprio.

2. Analizzare le proprietà di stabilità del sistema, al variare dei parametri reali α e β.

A matrice triangolare, autovalori:

$\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$, $\lambda_3 = \alpha$

- Sistema Asint. stabile se: $\alpha < 0 \land \beta < 0$,
- Sistema instabile se: $\alpha > 0 \lor \beta > 0$
- Sistema semplicemente stabile se $\alpha = 0 \land \beta < 0$
  λ_1 e λ_3 Non Formano un blocco di Jordan
- Sistema semplicemente stabile se $\beta = 0 \land \alpha < 0$
- Sistema instabile se $\alpha = 0 \land \beta = 0$
  λ_1 e λ_2 Formano un blocco di Jordan

3. Posto ora $\alpha = -20$ e $\beta = -1$, determinare la funzione di trasferimento $G(s)$ tra l'ingresso $U(s)$ e l'uscita $Y(s)$, identificando guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$.

trasformando a Laplace con C.I. = 0

$$\left.\begin{aligned} s X_1(s) &= -20 X_1(s) + X_2(s) \\ s X_2(s) &= -X_2(s) + U(s) \\ s X_3(s) &= -20 X_3(s) \\ Y(s) &= 3 X_1(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(s) = \frac{3}{(s+1)(s+20)} U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{3}{(s+1)(s+20)}} \Rightarrow$$

$\mu = 3/20$
zeri: No
Poli: $\{-1, -20\}$ ordine 2
tipo: 0

4. Studiare la stabilità della funzione di trasferimento $G(s)$. È possibile determinare la stabilità interna del sistema in spazio di stato analizzando soltanto la funzione di trasferimento $G(s)$? giustificare la risposta.

- $G(s)$ ha due poli reali negativi, allora è asintoticamente stabile.
- Non è possibile determinare la stabilità interna del sistema perchè c'è un polo nascosto, ordine di $G(s)$ < ordine del sistema. λ_3 non compare in $G(s)$.

5. Considerando la funzione di trasferimento trovata al punto 3, determinare i valori di $y(0)$, e $y(\infty)$ della sua risposta a uno scalino unitario. Tracciare *qualitativamente* la risposta. È possibile fare una approssimazione a poli dominanti? giustificare la risposta.

$U(s) = 1/s$; Scalino

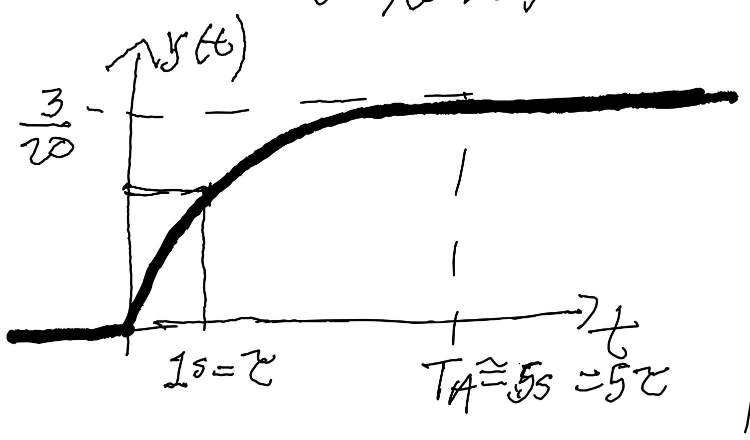
$Y(s) = \dfrac{3}{(s+1)(s+20)} \cdot \dfrac{1}{s}$,

T.V.I.

$y(0) = \lim_{s \to \infty} s \cdot Y(s) = 0$

$y(\infty) = \lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = 3/20$

T.V.F.



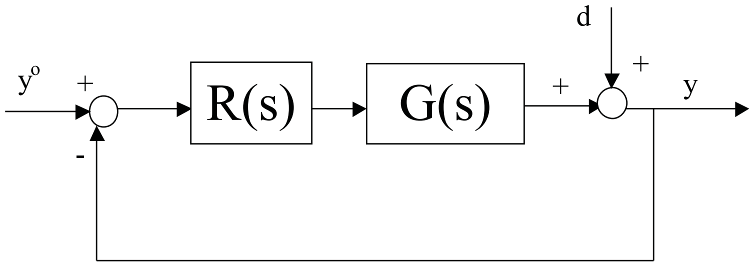
Si è possibile fare una approssimazione a polo dominante del primo ordine perchè $|P_1| \ll |P_2|$
$|-1| \ll |-20|$

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{250}{s(s+5)(s+50)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti e il sistema di controllo in figura:



1. Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

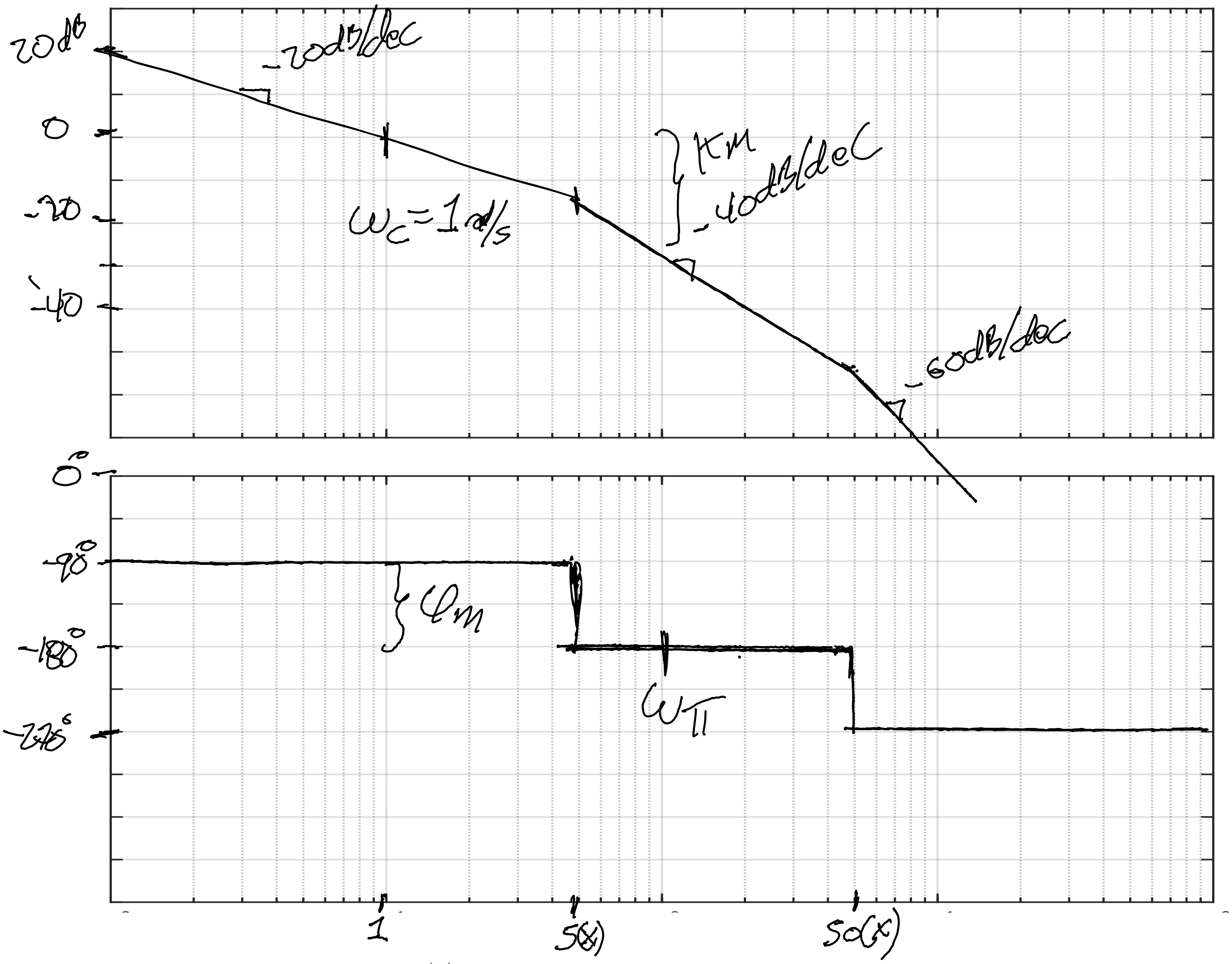
Poli: $\{0, -5, -50\}$; zeri: NO

tipo: 1, $\mu_g = 1 = \lim_{s \to 0} s \cdot G(s)$: guadagno generalizzato.

Sistema semplicemente stabile perchè $Re(p_i) \leq 0$ (c'è un polo in $s = 0$).

2. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.

$\mu_g = 1$, il asintoto sinistro incrocia $\omega = 1$ in $|G|_{dB} = 0$.



3. Per un regolatore $R_1(s) = 1$, determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato. Se possibile stabilire i margini di fase e di guadagno.

$L(s) = R(s) \cdot G(s)$,

$L(s)$ non è instabile, incrocia 0dB una sola volta, criterio di Bode:

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile perché:

$\mu_g > 0$

$\omega_c = 1$ rad/s $\Rightarrow \varphi_m \simeq 90° > 0$.

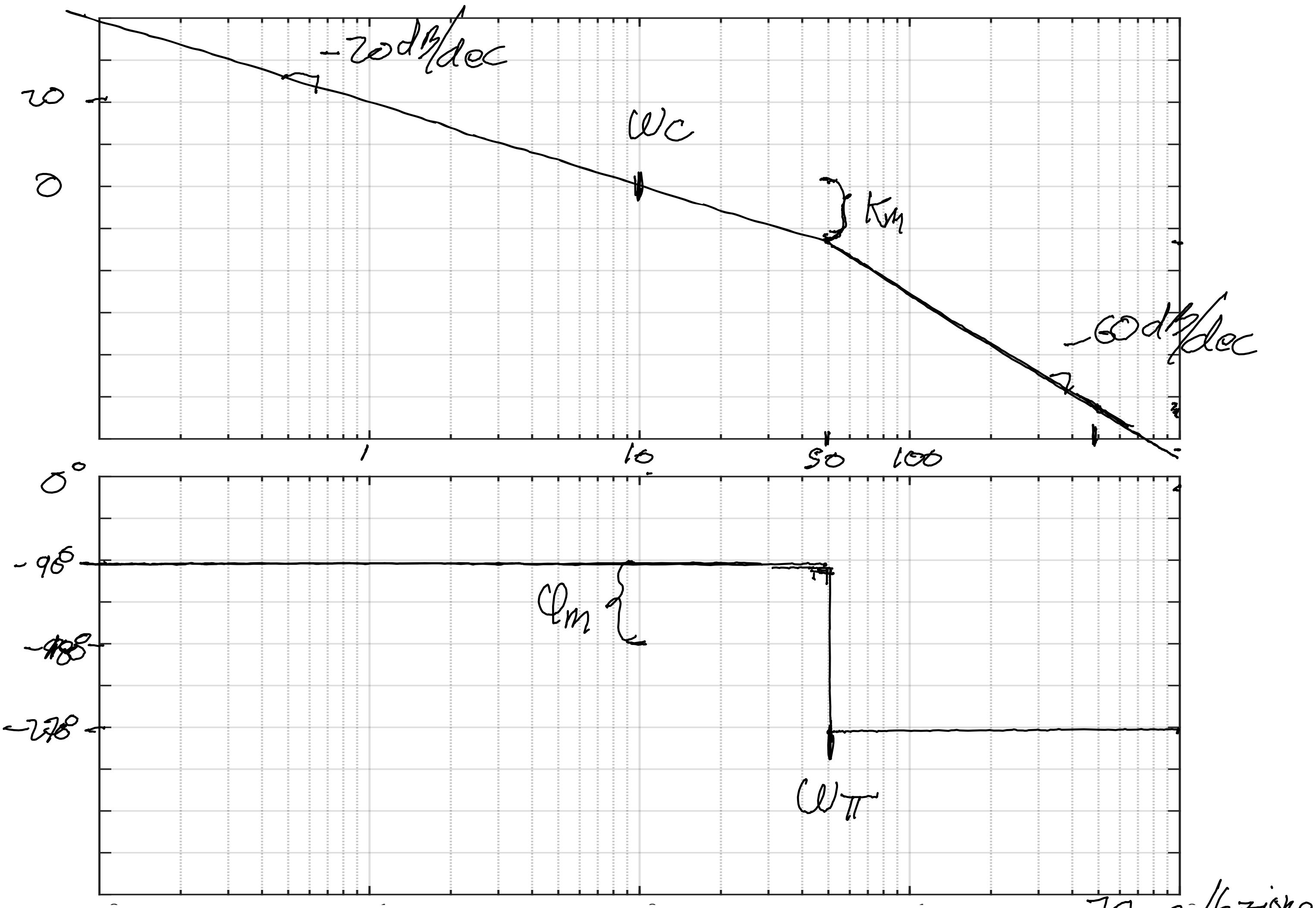
$k_m \simeq 30$ dB

$\omega_\pi \simeq 10$ rad/s

4. Per un regolatore

$$R_2(s) = 100\frac{s+5}{s+50},$$

determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato. Se possibile stabilire i margini di fase e di guadagno.



$$L(s) = R(s)\cdot G(s) = 25000 \cdot \frac{\cancel{s+5}}{s(\cancel{s+5})(s+50)^2}$$ Cancellazione stabile.

$$L(s) = \frac{25.000}{s(s+50)^2}, \quad \mu_g = 10 \ (20dB)$$

- Criterio di Bode: $\varphi_m \cong 90^\circ$, $\omega_c \cong 10\,rad/s$
- sistema retroazionato asint. stabile
- $K_m \cong 12\,dB$, $\omega_\pi = 50\,rad/s$

Considerando i due regolatori analizzati in precedenza, discutere quale dei due sistemi di controllo garantisce un minore errore a regime $|e_\infty|$ a fronte di:

5. Un ingresso a scalino del disturbo $d(t) = sca(t)$.

$E(s) = -S(s) \cdot D(s)$ $\quad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$

$\boxed{L(s) \text{ é tipo } 1 \text{ per i due regolatori}}$ $\quad \boxed{\text{il sistema retroazionato é Asint. stabile}}$

allora da tabella $|e_\infty| = 0$ per disturbo tipo scalino con i due regolatori.

6. Un ingresso di riferimento $y^0(t) = \sin(50t)$.

$E(s) = S(s) \cdot Y^0(s)$

$\omega_c = 1 \text{ rad/s}$ per R_1

$\omega_c = 10 \text{ rad/s}$ per R_2

$\omega = 50 \text{ rad/s} >> \omega_c$ | per i due regolatori

$$|S(s)| = \left|\frac{1}{1+L(s)}\right| \cong \begin{cases} \left|\frac{1}{L(s)}\right| & \text{per } \omega < \omega_c \\ 1 & \text{per } \omega > \omega_c \end{cases}$$

- Allora $|y^0(t)| \cong 1$ per i due regolatori.
- Entrambi garantiscono errori simili per gli ingressi considerati.