



POLITECNICO
MILANO 1863

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

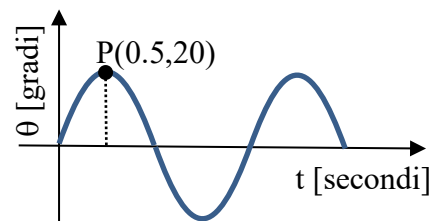
FISICA
Appello del 19 luglio 2022

Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

1.

Partendo dalle coordinate del punto P e dalla legge oraria del moto di un pendolo rappresentati in figura, si calcolino:

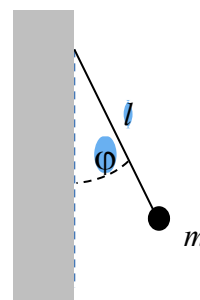
- la lunghezza della fune (2 punti);
- la massima accelerazione angolare (3 punti);
- il valore minimo di massa del pendolo che porta la fune alla rottura, sapendo che questa ha un carico di rottura di 20 N (3 punti).



2.

Un corpo puntiforme di massa m è collegato all'estremità di una fune ideale di lunghezza l che ha l'altro estremo fissato ad una parete verticale (vedi figura). Inizialmente il corpo è mantenuto in quiete mentre la fune forma un angolo ϕ con la verticale. Da questa posizione il corpo viene lasciato cadere. Sapendo che l'urto con la parete dissipa il 75% dell'energia cinetica, si calcoli:

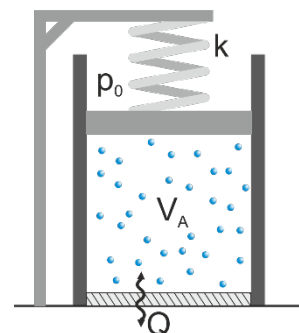
- l'angolo massimo formato dalla fune con la verticale, a seguito del rimbalzo dopo l'urto (4 punti);
- l'impulso della reazione vincolare esercitata dalla parete (4 punti);



3.

Un gas biatomico è contenuto in un cilindro con pistone di area $S = 200 \text{ cm}^2$, peso trascurabile e che può muoversi senza attrito. Il pistone è collegato a un sostegno rigido tramite una molla. Inizialmente, la molla si trova in posizione di riposo e il gas è in equilibrio a temperatura $T_A = -30^\circ \text{C}$, con volume occupato (V_A) pari a 5 litri e pressione pari a quella esterna $p_0 = 1 \text{ atm}$. Lasciando il sistema a contatto con l'ambiente esterno esso si porta a temperatura ambiente $T_F = 27^\circ \text{C}$. Il pistone si solleva di $h = 2 \text{ cm}$ e assume una nuova posizione di equilibrio.

- Quale è il valore della costante elastica k della molla? (3 punti)
- Quale è il lavoro compiuto dal gas durante la trasformazione? (3 punti)
- Quale è il calore scambiato dal gas nella trasformazione? (2 punti)



4.

Con riferimento al moto dei pianeti attorno al Sole:

- si enuncino le tre leggi di Keplero (2 punti);
- si ricavi il legame tra velocità areolare e momento angolare di un pianeta rispetto al Sole (3 punti);
- limitatamente al caso di orbite circolari, si deduca la terza legge di Keplero a partire dalla legge di gravitazione universale (3 punti).

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

Soluzioni

1.

- a) Dalle coordinate del punto P sul grafico, si ricava che un quarto di periodo ($T/4$) equivale a 0.5 s; per cui $T = 2$ s.

In generale, il periodo del moto di un pendolo è dato da:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove L è la lunghezza della fune che costituisce il pendolo.

Si ricava dunque che la lunghezza della fune è:

$$L = g \frac{T^2}{4\pi^2} = 9.81 \cdot \frac{4}{4\pi^2} \approx 1 \text{ m}$$

- b) La legge oraria dell'oscillazione del pendolo è:

$$\vartheta(t) = \vartheta_o \sin(\omega_o t + \varphi),$$

$$\text{con } \varphi = 0 \text{ e } \vartheta_o = 20 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.35 \text{ rad per le condizioni iniziali.}$$

Dalla derivata prima e dalla derivata seconda si ottengono, rispettivamente, le espressioni della velocità angolare e dell'accelerazione angolare:

$$\begin{aligned}\omega(t) &= \vartheta_o \omega_o \cos(\omega_o t) \\ \alpha(t) &= -\vartheta_o \omega_o^2 \sin(\omega_o t).\end{aligned}$$

L'accelerazione angolare massima si ha per $\sin(\omega_o t) = 1$, e vale in modulo:

$$\alpha_{MAX} = \vartheta_o \omega_o^2 \approx 3.4 \text{ rad/s}^2.$$

- c) La posizione del pendolo per cui la fune risente della tensione massima è quella verticale ($\vartheta = 0^\circ$). Qui, l'equazione del moto lungo la componente normale alla traiettoria del pendolo diventa:

$$T_{MAX} - mg = m \frac{v_{MAX}^2}{L} = m \omega_{MAX}^2 L$$

dove si è considerato $\cos(\vartheta = 0^\circ) = 1$ e $\omega_{MAX} = \vartheta_o \omega_o$.

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

Dato che la tensione massima che la fune può sopportare prima che si spezzi è $T_c = 20 \text{ N}$, deve risultare che:

$$\begin{aligned} T_{MAX} &\leq T_c \\ mg + m\omega_{MAX}^2 L &\leq T_c \\ m &\leq \frac{T_c}{g + \vartheta_o^2 \omega_o^2 L} \end{aligned}$$

con $m_{MIN} = \frac{T_c}{g + \vartheta_o^2 \omega_o^2 L} \approx 1.8 \text{ Kg}$ pari al minimo valore che la massa deve avere per provocare la rottura della fune del pendolo.

2.

- a) Al fine di determinare l'angolo massimo, rispetto alla parete, formato dal pendolo dopo l'urto, si determina prima la velocità d'impatto del pendolo sulla parete, imponendo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale (pendolo fermo) e quello immediatamente precedente all'urto:

$$\begin{aligned} mgh_i &= \frac{1}{2}mv_f^2 + mgh_f \\ -mgl\cos\varphi &= \frac{1}{2}mv_f^2 - mgl \end{aligned}$$

da cui si ricava che:

$$v_f = v_{\text{impatto}} = v_i = \sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}.$$

Dopo l'impatto, il 75% dell'energia cinetica del pendolo viene dissipata ($E_k'' = \frac{1}{4}E_k'$), per cui la velocità del pendolo dopo l'urto risulta:

$$v'' = \sqrt{\frac{1}{2}gl(1 - \cos\varphi)}.$$

A questo punto, è possibile determinare l'angolo massimo formato dal pendolo dopo l'urto imponendo nuovamente la conservazione dell'energia meccanica, tra l'istante appena successivo all'urto e quello in cui il pendolo si ferma, prima di invertire il moto:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv''^2 - mgl &= -mgl\cos\varphi' \\ \frac{1}{4}mgl(1 - \cos\varphi) &= mgl(1 - \cos\varphi') \\ \cos\varphi' &= 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos\varphi). \end{aligned}$$

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

- b) L'impulso della parete si ottiene tramite il calcolo della variazione della quantità di moto del sistema, lungo la direzione normale alla parete (direzione in cui agisce la forza vincolare impulsiva), tra l'istante precedente e quello successivo all'urto:

$$\bar{I} = mv''\widehat{u}_N - mv_i\widehat{u}_N$$

Dato che nella posizione verticale, il vettore velocità del pendolo ha come unica componente quella diretta lungo la normale alla parete, e considerati i versi opposti tra velocità di impatto e velocità del pendolo dopo l'urto, si ottiene:

$$I = mv'' - m(-v_i) = \frac{3}{2}mv_i = \frac{3}{2}m\sqrt{2gl(1 - \cos\varphi)}.$$

3.

- a) Per determinare la costante elastica della molla, è necessario determinare precedentemente i valori di pressione e volume del gas, a fine trasformazione. Utilizzando la proprietà di additività del volume, si ottiene che il volume finale occupato dal gas nel pistone è:

$$V_F = V_A + V' = V_A + S \cdot h = 5.4 \text{ l}$$

La pressione finale del gas si ottiene utilizzando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$p_F = nR \frac{T_F}{V_F} = \frac{p_o V_A T_F}{T_A V_F} \approx 1.14 \text{ atm}$$

Nella condizione di equilibrio finale, in cui il pistone si trova sollevato della quantità h , la pressione esterna esercitata sul gas dal sistema pistone-molla è uguale alla pressione interna del gas, per cui:

$$p_o + \frac{kh}{S} = p_F$$

da cui si ottiene la costante elastica della molla:

$$k = (p_F - p_o) \frac{S}{h} = 1.4 \times 10^4 \text{ N/m}$$

- b) Il lavoro positivo di espansione, compiuto dal gas durante la trasformazione, è:

$$W = p_o \Delta V + \int_0^h ky dy = p_o(V_F - V_A) + \frac{1}{2}kh^2 \approx 43 \text{ J}$$

- c) La quantità di calore scambiato dal gas durante la trasformazione si ricava dal primo principio della termodinamica:

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

$$Q = W + \Delta U$$

$$Q = W + nc_v \Delta T$$

$$Q = W + n \frac{5}{2} R \Delta T$$

$$Q = W + \frac{5 p_o V_A}{2 T_A} (T_F - T_A) \approx 43 + 296 \approx 340 \text{ J}$$

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*