11/7/2018
ore 15:00

FISICA (appello 1)

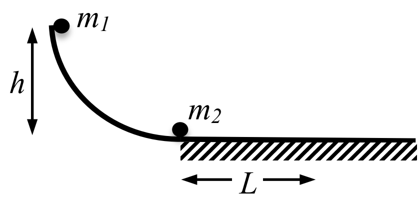
Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1.
Un punto materiale compie un moto piano definito dalla seguente legge oraria, in coordinate cartesiane, $x(t) = A \cos(k\, t^3)$, $y(t) = A \sin(k\, t^3)$, con $t \geq 0$, e A e k due costanti positive. Si determinino:

(i) le unità di misura di A e k;
(ii) la traiettoria del moto;
(iii) la legge oraria (ascissa curvilinea in funzione del tempo);
(iv) il modulo dell'accelerazione normale e tangenziale in funzione del tempo.

2.
Un corpo puntiforme di massa m_1 cade da una quota h scivolando lungo una guida liscia (vedi figura). Giunto in fondo alla guida, urta un secondo corpo puntiforme di massa $m_2 = 2\, m_1$, inizialmente in quiete. Dopo l'urto, il secondo corpo si muove lungo un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 1/2$, arrestandosi dopo un tratto di lunghezza $L = (2/9)\, h$.

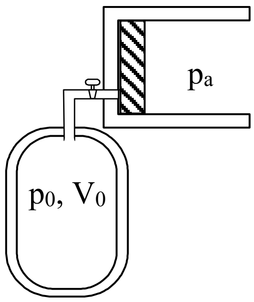
(i) Si calcoli la velocità del corpo di massa m_2 dopo l'urto;
(ii) si calcoli la velocità del corpo di massa m_1 dopo l'urto;
(iii) si dica, giustificando la risposta, se l'urto è elastico o meno.



3.
(i) Si definisca la pressione in un fluido, spiegando il significato di tutti i simboli utilizzati.
(ii) Si enunci e si dimostri l'equazione fondamentale della statica dei fluidi soggetti al proprio peso.

4.
Una bombola contiene n moli di un gas ideale monoatomico a pressione p_0 e volume V_0. La bombola è collegata, tramite una valvola inizialmente chiusa, ad un cilindro vuoto munito di pistone scorrevole in orizzontale senza attrito e in equilibrio con l'aria esterna alla pressione atmosferica p_a. La valvola viene aperta rapidamente ed il gas raggiunge un nuovo stato di equilibrio. Considerando il sistema adiabatico e assumendo $p_0 = 2\, p_a$, si calcoli:

(i) il volume finale del gas in funzione solo di V_0;
(ii) la variazione d'entropia del gas.



Si ricorda di:
- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Fisica - Appello dell'11/07/18 - Traccia sintetica di soluzione

Quesito 1

(i) nel Sistema Internazionale: [A] = m; [k] = rad$\cdot$s^{-3}.

(ii) la traiettoria del moto è una circonferenza di raggio A, centrata nell'origine. Infatti:

$$x^2 + y^2 = A^2 \left[\cos^2(kt^3) + sin^2(kt^3)\right] = A^2$$

e $x^2 + y^2 = A^2$ è proprio l'equazione implicita di una circonferenza di raggio A con centro in O(0,0).

(iii) Se indichiamo con $\phi = kt^3$ la fase del moto circolare, possiamo scrivere l'ascissa curvilinea in funzione del tempo come:

$$s(t) = A \cdot \phi = A\,k\,t^3$$

avendo posto l'origine di s in $t = 0$.

(iv) In un moto circolare di raggio A, avente velocità angolare istantanea $\omega(t)$ l'accelerazione tangenziale è $a_t = A\frac{d\omega}{dt}$ e l'accelerazione normale $a_n = A\omega^2$. In questo moto $\omega = \frac{d\phi}{dt} = 3kt^2$, quindi:

$$a_t = 6Akt \qquad a_n = 9Ak^2t^4$$

Quesito 2

(i)
- Per studiare il moto sul piano scabro, fissiamo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano, avente l'origine all'inizio di esso. L'asse y è verticale e orientato verso l'alto.
- Il corpo di massa m_2 è sottoposto alle seguenti forze:
  $\vec{P} = -m_2 g\vec{u}_y$ forza peso
  $\vec{R}_n = -\vec{P} = m_2 g\vec{u}_y$ reazione normale del piano di appoggio
  $\vec{F}_a = -\mu_d|\vec{R}_n|\vec{u}_x = -\mu_d m_2 g\vec{u}_x$ forza di attrito radente
- La forza risultante è dunque $\vec{F}_{ris} = \vec{F}_a = -\mu_d m_2 g\vec{u}_x$.
- Applichiamo il teorema delle forze vive al moto del corpo di massa m_2 lungo il piano scabro, sapendo che esso si arresta dopo un tratto di lunghezza L. Detta V_2 la velocitá del corpo di massa m_2 dopo l'urto avremo:

$$-\mu_d m_2 g L = 0 - \frac{1}{2}m_2 V_2^2$$

$$V_2 = \sqrt{2\mu_d g L}$$

Sostituendo $\mu_d = 1/2$ e $L = (2/9)h$ ricaviamo:

$$\boxed{V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}}$$

(ii)
- Applichiamo la conservazione dell'energia al moto di discesa lungo la guida liscia (senza attrito):

$$m_1 g h = \frac{1}{2}m_1 v_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

avendo indicato con v_1 la velocità del corpo di massa m_1 prima dell'urto.

- Applichiamo all'urto la conservazione della quantitá di moto, ricordando che inizialmente il corpo di massa m_2 è fermo, dunque $v_2 = 0$.

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$
$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2$$

- Ora, $m_2/m_1 = 2$, $v_1 = \sqrt{2gh}$ e $V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$. Si ricava dunque:

$$V_1 = \sqrt{2gh} - \frac{2}{3}\sqrt{2gh} = \frac{1}{3}\sqrt{2gh} = V_2$$

(iii)
- Poiché $V_2 = V_1$ si deduce che i corpi procedono insieme dopo l'urto, rimanendo attaccati. L'urto è dunque perfettamente anelastico.

Quesito 3

Si vedano le dispense relative alle lezioni del corso.

Quesito 4

(i)
- Notiamo che la trasformazione è irreversibile.
- Dal Primo Principio della Termodinamica, applicato a una trasformazione adiabatica:

$$\mathcal{L} = -\Delta U$$

Avendo un gas perfetto monoatomico $\Delta U = nc_V \Delta T = \frac{3}{2} nR(T_1 - T_0)$, quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}(nRT_0 - nRT_1)$$

- Dall'equazione di stato dei gas perfetti (considerando che $p_0 = 2p_a$):

$$nRT_0 = p_0 V_0 = 2p_a V_0$$
$$nRT_1 = p_a V_1$$

Perciò, sostituendo:

$$\mathcal{L} = \frac{3}{2}(2p_a V_0 - p_a V_1) = 3p_a V_0 - \frac{3}{2} p_a V_1$$

- Il lavoro di una trasformazione termodinamica è, per definizione:

$$\mathcal{L} = \int p_{est} dV$$

in questo caso la pressione esterna è costante $p_{est} = p_a$ e possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} = p_{est}(V_1 - V_0) = p_a V_1 - p_a V_0$$

- Uguagliando con quanto ottenuto dal Primo Principio:

$$p_a V_1 - p_a V_0 = 3p_a V_0 - \frac{3}{2} p_a V_1$$
$$\frac{5}{2} p_a V_1 = 4p_a V_0$$
$$\boxed{V_1 = \frac{8}{5} V_0}$$

(ii) La variazione di entropia di un gas perfetto che passa da uno stato (p_0, V_0) a uno stato (p_1, V_1) è data da:

$$\Delta S = nc_V \ln \frac{p_1}{p_0} + nc_p \ln \frac{V_1}{V_0}$$

In questo caso $c_V = \frac{3}{2}R$, $c_p = \frac{5}{2}R$, $p_1 = p_a$, quindi:

$$\Delta S = -\frac{3}{2}nR\ln 2 + \frac{5}{2}nR\ln\frac{8}{5} = \frac{1}{2}nR\,(5\ln 8 - 5\ln 5 - 3\ln 2) = \frac{1}{2}nR\,(15\ln 2 - 5\ln 5 - 3\ln 2)$$

$$\boxed{\Delta S = \frac{1}{2}nR\,(12\ln 2 - 5\ln 5)}$$