

DAVIDE DEL GIUDICE - FEDERICO BIZZARRI -
ANGELO BRAMBILLA - DANIELE LINARO

ESERCIZIARIO DI ELETTROTECNICA

INGEGNERIA INFORMATICA, DELL'AUTOMAZIONE E BIOME-
DICA – POLITECNICO DI MILANO

NOT EVERYTHING THAT COUNTS CAN BE COUNTED, AND NOT EVERYTHING
THAT CAN BE COUNTED COUNTS.

ALBERT EINSTEIN



Copyright © 2022 Davide del Giudice - Federico Bizzarri - Angelo Brambilla - Daniele Linaro

Last printing, September 2022

Questa raccolta di esercizi è frutto del prezioso lavoro dell'Ing. Davide del Giudice che li ha sia concepiti sia talvolta collezionati da appunti, dispense, libri di diversi autori. A lui il merito integrale di averli rappresentati graficamente in queste pagine. Lo studente Alberto Panzanini, nell'ambito di un'attività "150 ore" del Politecnico di Milano, ha curato gli esercizi risolti e le relative illustrazioni nell'a.a. 2019/2020.

Gli studenti, ai quali raccomandiamo di essere ora e sempre lettori critici, che trovassero imprecisioni, errori, lacune in questa raccolta sono invitati a segnalarceli.

Indice

Esercitazione 0	13
Es. 0.1	13
Es. 0.2	13
Soluzione	13
Es. 0.3	15
Es. 0.4	15
Es. 0.5	15
Es. 0.6	15
Es. 0.7	16
Es. 0.8	16
Es. 0.9	16
Soluzione	16
Es. 0.10	18
Es. 0.11	18
Es. 0.12	19
Es. 0.13	19
 Esercitazione 1	 21
Es. 1.1	21
Es. 1.2	21
Es. 1.3	21
Es. 1.4	21
Es. 1.5	22
Es. 1.6	22
Es. 1.7	22
Es. 1.8	23
Es. 1.9	23
Soluzione	23
Es. 1.10	25
Es. 1.11	25
Es. 1.12	25
Es. 1.13	25
Es. 1.14	26

Es. 1.15	26
Es. 1.16	26
Soluzione	26
Es. 1.17	28
Esercitazione 2	29
Es. 2.1	29
Es. 2.2	29
Soluzione	29
Es. 2.3	30
Es. 2.4	30
Es. 2.5	31
Es. 2.6	31
Es. 2.7	32
Soluzione	32
Es. 2.8	33
Es. 2.9	33
Es. 2.10	33
Es. 2.11	34
Es. 2.12	34
Es. 2.13	34
Es. 2.14	34
Es. 2.15	35
Es. 2.16	35
Es. 2.17	35
Es. 2.18	35
Es. 2.19	36
Es. 2.20	36
Es. 2.21	36
Esercitazione 3	37
Es. 3.1	37
Es. 3.2	37
Es. 3.3	37
Soluzione	37
Es. 3.4	38
Soluzione	38
Es. 3.5	40
Es. 3.6	40
Es. 3.7	40
Es. 3.8	41
Es. 3.9	41
Es. 3.10	41
Es. 3.11	41

Es. 3.12	42
Es. 3.13	42
Es. 3.14	42
Es. 3.15	43
Es. 3.16	43
Es. 3.17	43
Es. 3.18	44
Es. 3.19	44
Es. 3.20	44
Es. 3.21	45
Es. 3.22	45
Es. 3.23	45
Es. 3.24	46
Es. 3.25	46
Es. 3.26	46
Esercitazione 4	47
Es. 4.1	47
Es. 4.2	47
Es. 4.3	47
Soluzione	48
Es. 4.4	50
Es. 4.5	50
Es. 4.6	50
Es. 4.7	50
Es. 4.8	51
Es. 4.9	51
Es. 4.10	51
Es. 4.11	51
Es. 4.12	52
Esercitazione 5	53
Es. 5.1	53
Soluzione	53
Es. 5.2	56
Es. 5.3	56
Es. 5.4	56
Soluzione	57
Es. 5.5	59
Es. 5.6	60
Es. 5.7	60
Es. 5.8	60
Es. 5.9	61
Es. 5.10	61

Es. 5.11	62
Es. 5.12	62
Es. 5.13	62
Es. 5.14	63
Es. 5.15	63
Es. 5.16	64
Es. 5.17	64
Es. 5.18	64
Es. 5.19	65
Es. 5.20	65
Esercitazione 6	67
Es. 6.1	67
Soluzione	67
Es. 6.2	68
Es. 6.3	68
Es. 6.4	69
Es. 6.5	69
Soluzione	69
Es. 6.6	71
Es. 6.7	71
Es. 6.8	72
Es. 6.9	72
Es. 6.10	73
Es. 6.11	73
Es. 6.12	73
Es. 6.13	74
Es. 6.14	74
Es. 6.15	74
Es. 6.16	74
Es. 6.17	75
Es. 6.18	75
Es. 6.19	75
Esercitazione 7	77
Es. 7.1	77
Es. 7.2	77
Soluzione	77
Es. 7.3	80
Es. 7.4	81
Soluzione	81
Es. 7.5	83
Es. 7.6	83
Es. 7.7	84

Es. 7.8	84
Es. 7.9	84
Es. 7.10	85
Es. 7.11	85
Es. 7.12	85
Es. 7.13	86
Es. 7.14	86
Es. 7.15	86
Es. 7.16	87
Es. 7.17	87
Es. 7.18	88
Es. 7.19	88
Es. 7.20	88
Esercitazione 8	89
Es. 8.1	89
Soluzione	89
Es. 8.2	92
Es. 8.3	93
Es. 8.4	93
Es. 8.5	93
Es. 8.6	94
Es. 8.7	94
Es. 8.8	94
Es. 8.9	95
Es. 8.10	95
Es. 8.11	95
Es. 8.12	96
Es. 8.13	96
Soluzione	96
Es. 8.14	97
Es. 8.15	98
Soluzione	98
Esercitazione 9	101
Es. 9.1	101
Es. 9.2	101
Es. 9.3	101
Es. 9.4	102
Soluzione	102
Es. 9.5	104
Es. 9.6	104
Es. 9.7	105
Es. 9.8	105

Es. 9.9	105
Es. 9.10	106
Es. 9.11	106
Es. 9.12	106
Es. 9.13	107
Es. 9.14	107
Es. 9.15	107
Es. 9.16	108
Es. 9.17	108
Soluzione	108
Es. 9.18	110
Es. 9.19	110
Es. 9.20	110
Es. 9.21	111
Es. 9.22	111
Es. 9.23	112
Es. 9.24	112
Es. 9.25	112

Esercitazione 10 **113**

Es. 10.1	113
Es. 10.2	113
Es. 10.3	113
Es. 10.4	114
Es. 10.5	114
Es. 10.6	114
Es. 10.7	115
Soluzione	115
Es. 10.8	117
Es. 10.9	117
Es. 10.10	117
Es. 10.11	118
Es. 10.12	118
Es. 10.13	118
Es. 10.14	119
Es. 10.15	119
Es. 10.16	119
Es. 10.17	120

Esercitazione 11 **121**

Es. 11.1	121
Es. 11.2	122
Soluzione	122
Es. 11.3	124

Soluzione	124
Es. 11.4	127
Es. 11.5	127
Es. 11.6	127
Es. 11.7	128
Es. 11.8	128
Es. 11.9	129
Es. 11.10	129
Es. 11.11	129
Es. 11.12	130
Es. 11.13	130
Es. 11.14	131
Esercitazione 12	133
Es. 12.1	133
Es. 12.2	134
Es. 12.3	135
Soluzione	135
Es. 12.4	136
Es. 12.5	137
Es. 12.6	137
Es. 12.7	139
Es. 12.8	140
Es. 12.9	141
Es. 12.10	141
Esercitazione 13	143
Es. 13.1	143
Soluzione	143
Es. 13.2	144
Es. 13.3	145
Es. 13.4	145
Es. 13.5	145
Es. 13.6	146
Es. 13.7	146
Es. 13.8	146
Es. 13.9	147
Es. 13.10	147
Es. 13.11	147
Es. 13.12	148
Es. 13.13	148
Esercitazione 14	149
Es. 14.1	149
Es. 14.2	149

Es. 14.3	150
Soluzione	150
Es. 14.4	152
Es. 14.5	152
Es. 14.6	153
Es. 14.7	153
Es. 14.8	153
Es. 14.9	154
Es. 14.10	154
Es. 14.11	155
Es. 14.12	155
Es. 14.13	155
Es. 14.14	155
Es. 14.15	156
Es. 14.16	156
Es. 14.17	156
Es. 14.18	157
Es. 14.19	158

Es. 0.1

Dati: $v_{BA} = 3V$, $v_{AD} = 2V$, $v_{CD} = -1V$.

Determinare:

- Il grafo del circuito (orientato come le tensioni).
- Le tensioni mancanti.

Sol: $[v_{BD} = 5V, v_{BC} = 6V, v_{CA} = -3V]$

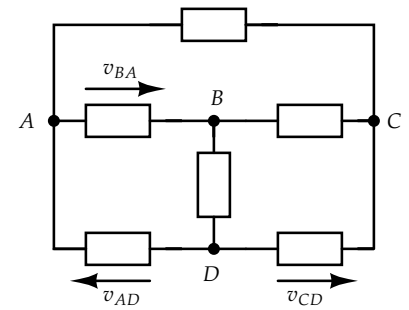


Figura 1: Es 0.1

Es. 0.2

Dati: $i_1 = -3A$, $i_4 = 1A$, $i_8 = -2A$, $i_9 = 2A$.

Determinare:

- Il grafo del circuito (orientato come le correnti).
- Le correnti mancanti.

Sol: $[i_2 = 1A, i_3 = -3A, i_5 = 2A, i_6 = -4A, i_7 = 4A]$

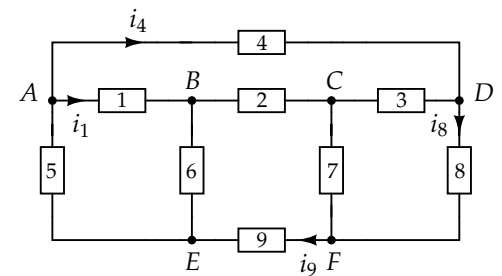


Figura 2: Es 0.2

Soluzione

SCEGLIAMO ARBITRARIAMENTE LE CORRENTI INCOGNITE come in figura 3 (freccie blu). Il grafo del circuito in figura 2, orientato come le correnti, è riportato in figura 4. Esso è caratterizzato da $n = 6$ nodi e $l = 9$ lati.

Ogni lato del grafo è caratterizzato da una corrente descrittiva e, delle $l = 9$ correnti di lato, cinque sono incognite. Poiché in generale, dato un circuito ed il grafo ad esso associato, è possibile determinare $n - 1$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL) linearmente indipendenti tra loro, in questo caso si possono scrivere $n - 1 = 5$

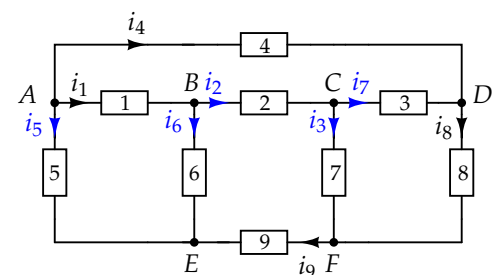


Figura 3: Circuito con le correnti mancanti aggiunte con verso arbitrario.

equazioni, cioè tante quante sono le correnti incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL per risolvere l'esercizio.

Ricordando che la legge di Kirchhoff per le correnti afferma che *la somma algebrica delle correnti attraverso una superficie chiusa orientata, che tagli solo terminali, è nulla*, si procede scegliendo cinque superfici chiuse e se ne fissa arbitrariamente l'orientamento. Le correnti che attraversano la superficie saranno prese col segno + se concordi con l'orientamento scelto e con il segno – altrimenti. Nello specifico, nella risoluzione di questo esercizio, si scelgono i tagli nodali indicati in figura 5 e il verso positivo è quello dall'esterno verso l'interno.

Le cinque KCL linearmente indipendenti, in cinque incognite, ottenute ai tagli nodali scelti sono

$$\text{Nodo A: } -i_4 - i_1 - i_5 = 0$$

$$\text{Nodo B: } +i_1 - i_2 - i_6 = 0$$

$$\text{Nodo D: } +i_4 + i_3 - i_8 = 0$$

$$\text{Nodo E: } +i_5 + i_6 + i_9 = 0$$

$$\text{Nodo F: } +i_7 - i_9 + i_8 = 0$$

Risolvendole si ottiene

$$i_5 = -i_4 - i_1 = 2A$$

$$i_6 = -i_9 - i_5 = -4A$$

$$i_2 = i_1 - i_6 = 1A$$

$$i_7 = i_9 - i_8 = 4A$$

$$i_3 = i_8 - i_4 = -3A$$

Si lascia allo studente la verifica che, se si fosse considerato il taglio nodale al nodo C, anziché al nodo B, si sarebbe comunque risolto l'esercizio. Inoltre si provi a cambiare l'orientamento delle superfici di taglio, anche non scegliendo lo stesso verso per tutte le superfici, e si verifichi che il risultato finale non cambia. Si provi ancora a scegliere orientamenti diversi per le correnti incognite: come cambiano i risultati in questo caso e perché?

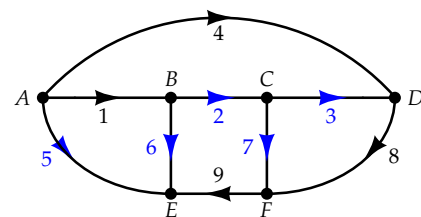


Figura 4: Grafo del circuito orientato come le correnti.

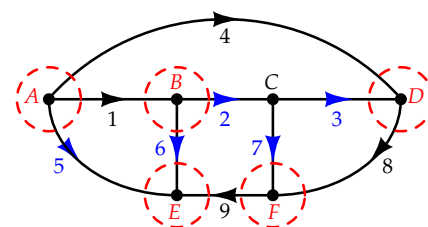


Figura 5: Tagli nodali considerati per scrivere le KCL.

Es. o.7

- Disegnare il grafo del circuito (sia orientato come le tensioni, sia orientato come le correnti).
- Calcolare le correnti e le tensioni mancanti.

Sol: [$v_{BD} = 3V$, $v_{CD} = 1V$, $i_1 = -5A$ dal nodo A al nodo B , $i_{T_{sx}} = -5A$ corrente al terminale con morsetto al nodo B in convenzione degli utilizzatori rispetto a v_{BD} , $i_{T_{dx}} = 5A$ corrente al terminale con morsetto al nodo C in convenzione dei generatori rispetto a v_{CD}]

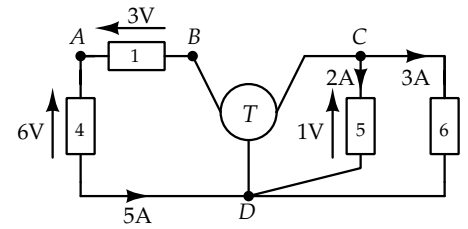


Figura 10: Es o.7

Es. o.8

Dati: $i_1 = 4A$, $i_2 = 3A$, $i_4 = -2A$, $v_1 = 1V$, $v_3 = 2V$, $v_5 = -4V$.

Determinare:

- La matrice di incidenza del circuito.
- Le correnti mancanti (a partire dalla matrice di incidenza ridotta).
- Le tensioni mancanti.

Sol: [$i_3 = 1A$ dal nodo A al nodo B , $i_5 = 1A$ dal nodo D al nodo B , $i_6 = 1A$ dal nodo D al nodo C , $v_{AC} = 1V$, $v_{DB} = -4V$, $v_{DC} = -5V$]

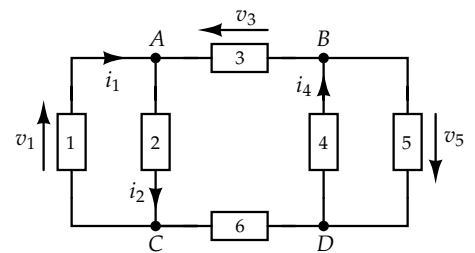


Figura 11: Es o.8

Es. o.9

Determinare:

- Il grafo del circuito usando la convenzione degli utilizzatori.
- Le tensioni e le correnti mancanti.
- La potenza assorbita da ogni bipolo. Quali di queste potenze sono realmente assorbite (o realmente erogate)?

Sol: [$v_2 = 11V$, $v_4 = -7V$, $i_1 = i_6 = 3A$, $i_4 = -5A$, $i_5 = i_7 = -2A$, $P_a^1 = -12W$, $P_a^2 = -33W$, $P_a^3 = 4W$, $P_a^4 = 35W$, $P_a^5 = -6W$, $P_a^6 = 24W$, $P_a^7 = -12W$]

Soluzione

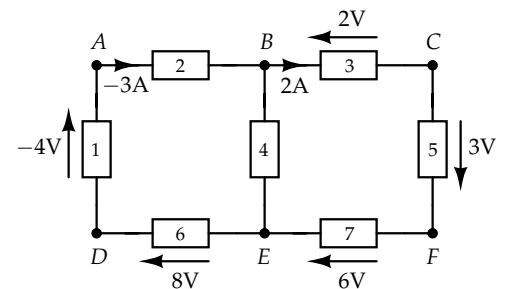


Figura 12: Es o.9

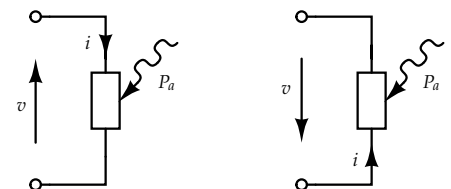


Figura 13: Convenzione degli utilizzatori per un generico bipolo.

LA CONVENZIONE DEGLI UTILIZZATORI PREVEDE che il verso della corrente in un lato sia opposto a quello della tensione. Si consideri l'esempio in figura 13. In entrambi i casi, la potenza P_a assorbita dal bipolo è pari a $P_a = vi$.

QUALORA INVECE SI UTILIZZI LA CONVENZIONE DEI GENERATORI, il verso della corrente è concorde a quello della tensione. Si consideri l'esempio in figura 14. In entrambi i casi, la potenza P_e erogata dal bipolo è pari a $P_e = vi$.

Si tenga inoltre conto di quanto segue:

- $P_a > 0$ potenza realmente assorbita
- $P_a < 0$ potenza realmente erogata
- $P_e > 0$ potenza realmente erogata
- $P_e < 0$ potenza realmente assorbita

Assegnando arbitrariamente al circuito in figura 12 le correnti e le tensioni mancanti, secondo la convenzione degli utilizzatori, come in figura 15 (freccette e linee blu), si ottengono due grafi (figure 16 e 17). Quando si adotta una convenzione (degli utilizzatori o dei generatori) è sufficiente un solo grafo per descrivere in maniera completa il circuito perché i versi delle correnti e delle tensioni di lato sono legati tra loro. Il numero di nodi del grafo è $n = 6$ ed è allora possibile ricavare $n - 1 = 5$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL) linearmente indipendenti. I lati sono $l = 7$ ed è allora possibile ricavare $l - n + 1 = 2$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti.

Considerando le maglie e i tagli nodali ai nodi evidenziati in figura 18 si possono ricavare le correnti e le tensioni mancanti come segue.

$$\text{Maglia I: } -2V + 3V + 6V + v_4 = 0, \quad v_4 = -7V$$

$$\text{Maglia II: } -4V - v_2 - v_4 + 8V = 0, \quad v_2 = 11V$$

$$\text{Nodo A: } +i_1 - 3A = 0, \quad i_1 = 3A$$

$$\text{Nodo B: } +2A + i_4 - (-3A) = 0, \quad i_4 = 5A$$

$$\text{Nodo C: } +2A + i_5 = 0, \quad i_5 = -2A$$

$$\text{Nodo D: } +i_6 - i_1 = 0, \quad i_6 = i_1 = 3A$$

$$\text{Nodo F: } +i_5 - i_7 = 0, \quad i_7 = i_5 = -2A$$

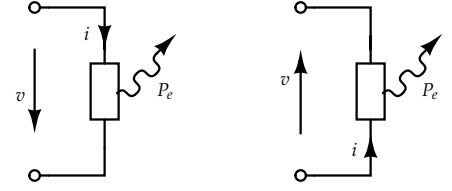


Figura 14: Convenzione dei generatori per un generico bipolo.

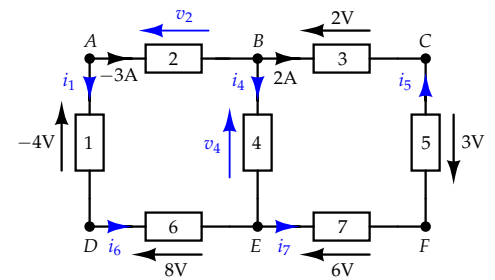


Figura 15: Circuito con le correnti e le tensioni mancanti aggiunte con verso arbitrario.

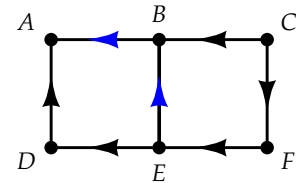


Figura 16: Grafo con lati orientati come le tensioni.

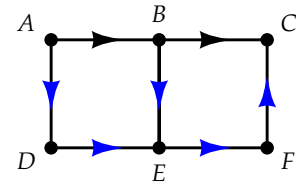


Figura 17: Grafo con lati orientati come le correnti.

É ora possibile calcolare la potenza assorbita da ciascun bipolo,

$$P_a^1 = v_1 i_1 = -12W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^2 = v_2 i_2 = -33W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^3 = v_3 i_3 = 4W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^4 = v_4 i_4 = 35W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^5 = v_5 i_5 = -6W \quad (\text{realmente erogata})$$

$$P_a^6 = v_6 i_6 = 24W \quad (\text{realmente assorbita})$$

$$P_a^7 = v_7 i_7 = -12W \quad (\text{realmente erogata})$$

Si lascia allo studente la verifica della validità dei risultati ottenuti, attraverso l'applicazione del Teorema di Tellegen.

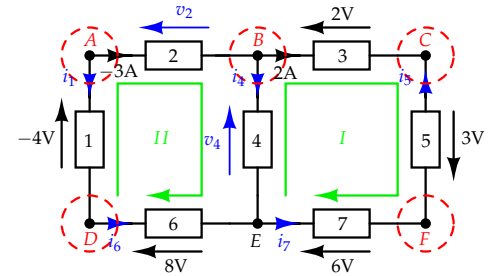


Figura 18: Circuito con maglie (in verde) e tagli nodali (in rosso) evidenziati.

Es. 0.10

Dati: $v_2 = 3V$, $v_3 = 1V$, $v_4 = -1V$, $v_6 = -2V$, $v_7 = -4V$, $i_5 = -3A$, $i_7 = 2A$; $i_8 = -1A$.

Determinare la potenza assorbita da ciascun bipolo.

Sol: [$P_a^1 = 42W$, $P_a^2 = -18W$, $P_a^3 = 3W$, $P_a^4 = 2W$, $P_a^5 = -6W$, $P_a^6 = -10W$, $P_a^7 = -8W$, $P_a^8 = -5W$.]

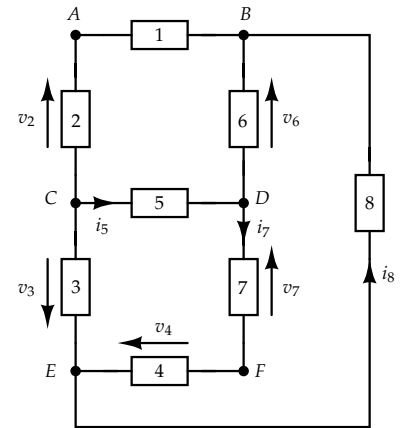


Figura 19: Es 0.10

Es. 0.11

Dati: $i_1 = 2A$, $v_2 = 4V$, $P_e^2 = 12W$, $P_a^1 = 12W$.

Determinare la potenza assorbita dai bipoli 3 e 4.

Sol: [$P_a^3 = 20W$, $P_a^4 = -20W$.]

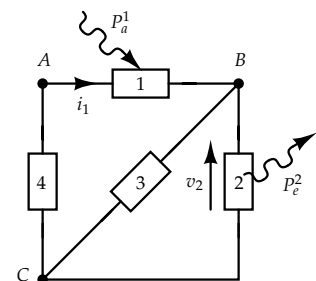


Figura 20: Es 0.11

Es. 0.12

Dati: $v_1 = -3V$, $v_4 = 5V$, $i_3 = 1A$, $P_e^4 = 10W$.

Determinare P_a^1 , P_a^2 e P_e^3 .

Sol: [$P_a^1 = -6W$, $P_a^2 = 24W$, $P_e^3 = 8W$.]

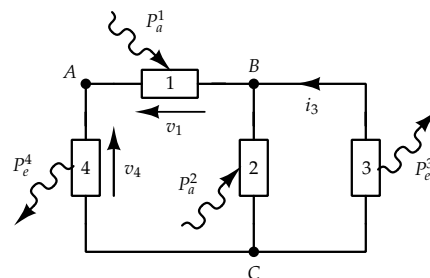


Figura 21: Es 0.12

Es. 0.13

Dati: $v_1 = 10V$, $i_1 = 5A$, $v_2 = -5V$, $i_2 = 3A$, $v_3 = 3V$, $i_3 = -4A$.

- Determinare le variabili descrittive del quadripolo.
- Sfruttando il Teorema di Tellegen, ricavare la potenza assorbita dal quadripolo.

Sol: [$v_{CA} = -10V$, $v_{DA} = -5V$, $v_{BA} = -2V$, $i_B = -4A$, $i_C = -2A$ e $i_D = 1A$ correnti ai terminali con morsetto al nodo B, C e D, rispettivamente, in convenzione dei generatori rispetto alle tensione v_{BA} , v_{CA} e v_{DA} , $P_a^Q = -23W$.]

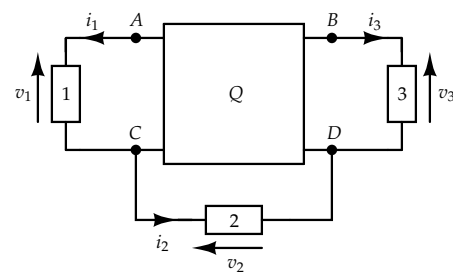


Figura 22: Es 0.13

Es. 1.1

Determinare:

- Tutti i grafi necessari per una descrizione completa del circuito.
- Tutte le tensioni e correnti che è necessario conoscere per poter affermare di aver "risolto" il circuito.

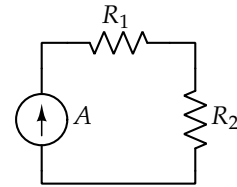


Figura 23: Es 1.1

Es. 1.2

Determinare v_1 e v_2 in funzione dei parametri del circuito.

$$\text{Sol: } [v_1 = \frac{R_1(E - AR_2)}{R_1 + R_2}, v_2 = \frac{R_2(E + AR_1)}{R_1 + R_2}]$$

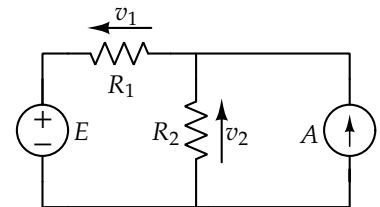


Figura 24: Es 1.2

Es. 1.3

Dati: $E = 10\text{V}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $A = 1\text{A}$.

Determinare i_1 e v_2 .

$$\text{Sol: } [i_1 = \frac{7}{3}\text{A}, v_2 = \frac{16}{3}\text{V}]$$

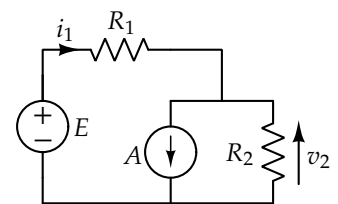


Figura 25: Es 1.3

Es. 1.4

Determinare i_e in funzione dei parametri del circuito.

$$\text{Sol: } [i_e = \frac{R_2 A}{R_1 + R_2} - \frac{(R_1 + R_2 + R_3)E}{(R_1 + R_2)R_3}]$$

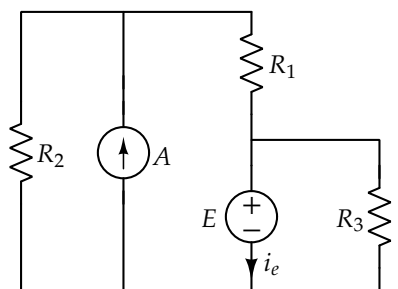


Figura 26: Es 1.4

Es. 1.5

Dati: $A_1 = 1\text{A}$, $A_2 = 2\text{A}$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

- Determinare la potenza assorbita da ciascun componente. Quali di queste potenze sono in realtà assorbite (o erogate)?
- Verificare i risultati ottenuti con il teorema di Tellegen.

Sol: [$P_a^{A_1} = 1\text{W}$ (realmente assorbita), $P_a^{R_1} = 1\text{W}$ (realmente assorbita), $P_a^{R_2} = 2\text{W}$ (realmente assorbita), $P_a^{A_2} = -4\text{W}$ (realmente erogata)]

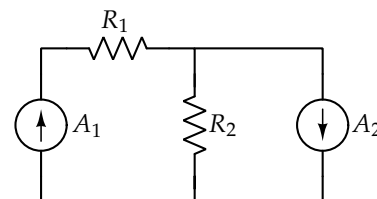


Figura 27: Es 1.5

Es. 1.6

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = r_{12}i_2 \\ v_2 = r_{21}i_1 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione di ciascun componente del circuito.
- La potenza assorbita dal tripolo T in funzione dei parametri del circuito.

Sol: [E definito su base corrente, A definito su base tensione, R definito sia su base tensione che corrente, circuito aperto definito su base tensione, tripolo T definito su base (i_1, i_2) e su base (v_1, v_2) purché $r_{12} \neq 0$ e $r_{21} \neq 0$, $P_a^T = \frac{A(E - r_{12}A)(r_{12} + r_{21})}{R_1}$]

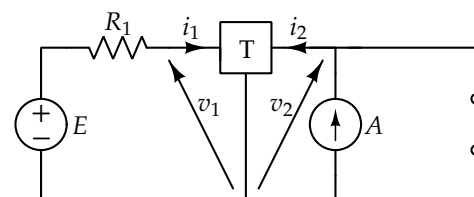


Figura 28: Es 1.6

Es. 1.7

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $E = 5\text{V}$, $P_e^E = 10\text{W}$.

Determinare la corrente A e la potenza erogata dal generatore di corrente.

Sol: [$A = -1\text{A}$, $P_e^A = 2\text{W}$]

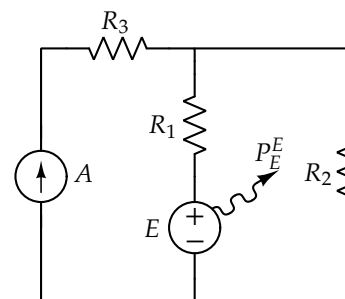


Figura 29: Es 1.7

Es. 1.8

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = g v_1 \\ i_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione del tripolo T.
- La corrente i in funzione dei parametri del circuito. Per quali valori di g è possibile determinare i ?

Sol: [T definito su base (v_1, v_2) e su base (i_1, i_2) purché $g \neq 0$, $i = -\frac{E}{R(3+2Rg)}$, $g \neq -\frac{3}{2R}$]

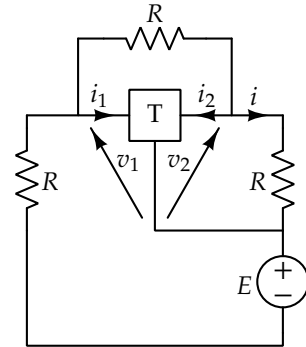


Figura 30: Es 1.8

Es. 1.9

Determinare la corrente i_{cc} in funzione dei parametri del circuito.

Sol: $[i_{cc} = \frac{E_2(R_1+R_2)-E_1R_2}{R_1R_2}]$

Soluzione

PER DISEGNARE IL GRAFO DEL CIRCUITO in figura 31, orientato come le tensioni (secondo la convenzione degli utilizzatori), è necessario scegliere arbitrariamente i versi delle tensioni mancanti, come riportato in figura 32. Si ottiene dunque il grafo in figura 33. Esso è caratterizzato da $n = 4$ nodi e $l = 6$ lati. Si possono quindi ricavare $n - 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL), linearmente indipendenti tra loro, e $l - n + 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti tra loro: cioè tante quante sono le correnti e le tensioni incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL e le KVL-II per risolvere l'esercizio.

Osservando il circuito in figura 34 si nota che è possibile ricavare i_{cc} dalla KCL al taglio nodale al nodo 1:

$$i_{cc} = -i_1 - i_2 \quad (1)$$

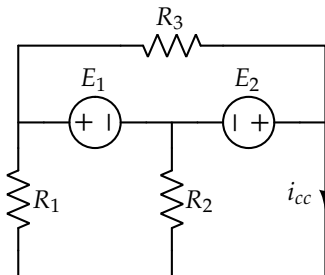


Figura 31: Es 1.9

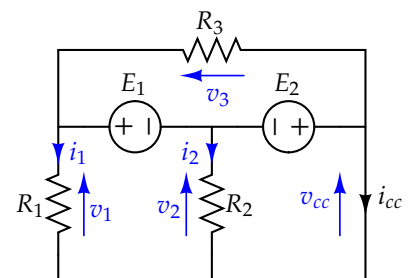


Figura 32: Circuito con segnati (in blu) i parametri secondo la convenzione degli utilizzatori.

È quindi necessario calcolare i_1 e i_2 . Si può ricavare i_2 dalla maglia I , infatti:

$$v_2 + E_2 = 0 \rightarrow R_2 i_2 + E_2 = 0 \rightarrow i_2 = -\frac{E_2}{R_2}.$$

Conoscendo i_2 e quindi di fatto anche v_2 dalla legge di Ohm, possiamo ricavare i_1 dalla maglia II . Infatti:

$$v_1 - E_1 - v_2 = 0 \rightarrow R_1 i_1 - E_1 - R_2 i_2 = 0 \rightarrow i_1 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1}.$$

Sostituendo nell'equazione 1 si può infine ricavare i_{cc} come segue:

$$\begin{aligned} i_{cc} &= -i_1 - i_2 = -\frac{E_1 - E_2}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} = \\ &= \frac{-E_1 R_2 + E_2 R_2 + E_2 R_1}{R_1 R_2} = \frac{E_2 (R_1 + R_2) - E_1 R_2}{R_1 R_2}. \end{aligned}$$

Si può poi verificare che il risultato è *plausibile* facendo l'analisi dimensionale:

$$\frac{[\text{V}\Omega]}{[\Omega^2]} = \left[\frac{\text{V}}{\Omega} \right] = [\text{A}].$$

È importante sottolineare che, se dimensionalmente il risultato non fosse risultato in $[\text{A}]$, avremmo avuto certezza di aver sbagliato la risoluzione dell'esercizio!

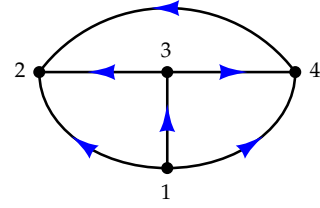


Figura 33: Grafo del circuito orientato come le tensioni, secondo la convenzione degli utilizzatori.

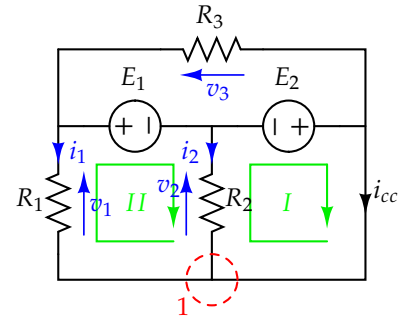


Figura 34: Circuito con le maglie (in verde) e i nodi (in rosso) utilizzati per la risoluzione.

Es. 1.10

- Determinare la tensione v .
- Si sostituisca il circuito aperto tra i morsetti $a-b$ con un generatore di tensione V (supposta nota). Determinare la corrente i in tali condizioni.

Sol: $[v = E + R_1 A, i = \frac{V - E - R_1 A}{R_1 + R_3}]$

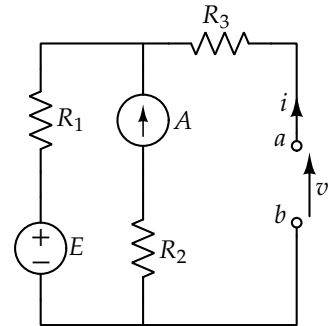


Figura 35: Es 1.10

Es. 1.11

Determinare la potenza erogata dal generatore E .

Sol: $[P_e^E = E^2 \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3}]$

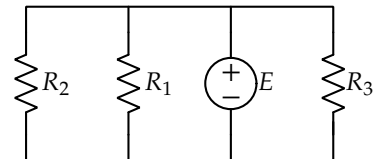


Figura 36: Es 1.11

Es. 1.12

Dati: $A_1 = 4A$, $A_2 = 2A$, $E = 3V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$.

Determinare i .

Sol: $[i = 3A]$

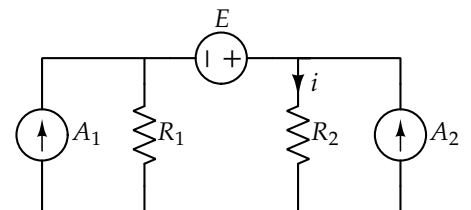


Figura 37: Es 1.12

Es. 1.13

Dati: $E = 10V$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_g = 10\Omega$.

Determinare r_x | $i_g = 0$.

Sol: $[r_x = 1\Omega]$

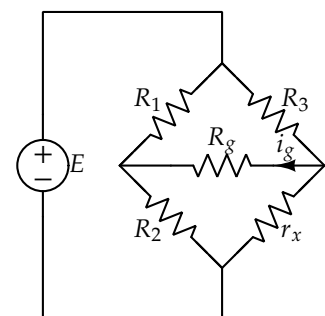


Figura 38: Es 1.13

Es. 1.14

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \alpha i_2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare:

- Le basi di definizione del tripolo T (hp: $\alpha \neq 0$).
- Per quali valori di α è possibile determinare i_2 ?
- La potenza erogata dal tripolo T e dal generatore di tensione E_1 .

Sol: [Tripolo T definito su base (v_1, i_2) , $i_2 = \frac{E_1}{R_2 + R_3(\alpha + 1)}$, $\alpha \neq -\frac{R_2}{R_3} - 1$,
 $P_e^T = -\frac{\alpha E_1}{R_2 + R_3(1 + \alpha)}(E_2 - \frac{E_1(R_1\alpha + R_3(1 + \alpha))}{R_2 + R_3(1 + \alpha)})$, $P_e^{E_1} = \frac{E_1^2}{R_2 + R_3(1 + \alpha)}$]

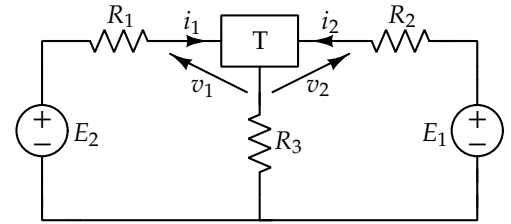


Figura 39: Es 1.14

Es. 1.15

Dati: $P_a^1 = 72W$, $P_a^2 = 40W$, $A = 5A$, $i_R = 1A$, $R = 1\Omega$.

Determinare v_3 e la potenza erogata dal generatore di corrente.

Sol: [$v_3 = 13V$, $P_e^A = 35W$]

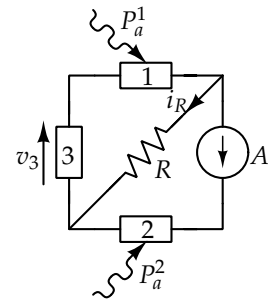


Figura 40: Es 1.15

Es. 1.16

Determinare A | $v_2 = 0$.

Sol: [$A = \frac{E}{R_3}$]

Soluzione

IL CIRCUITO IN FIGURA 41 è caratterizzato da $n = 4$ nodi e $l = 6$ lati. Si possono quindi ricavare $n - 1 = 3$ equazioni di Kirchhoff per le correnti (KCL), linearmente indipendenti tra loro, e $l - n + 1 = 3$

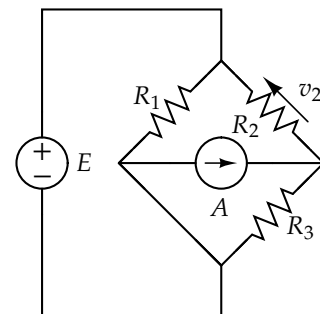


Figura 41: Es 1.16

equazioni di Kirchhoff per le tensioni (KVL-II) linearmente indipendenti tra loro: cioè tante quante sono le correnti e le tensioni incognite. È possibile quindi utilizzare le KCL e le KVL-II per risolvere l'esercizio.

Per risolvere questa tipologia di esercizi è possibile procedere in due modi diversi:

- I Approccio: ricavare una funzione $v_2 = f(E, A, R_1, R_2, R_3)$ e dopodiché imporre $A \mid v_2 = 0$.
- II Approccio: considerare $v_2 = 0$ e ricavare quanto vale A .

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO CON IL PRIMO APPROCCIO si considerino la maglia ed il taglio nodale evidenziati in figura 42

$$\text{Maglia I: } E - v_2 - v_3 = 0$$

$$\text{Nodo 3: } A + \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = 0 \quad .$$

Mettendo a sistema le due equazioni così ottenute, si ricava

$$v_2 = \frac{R_2(E - R_3A)}{R_2 + R_3} \quad .$$

Si può dunque concludere che $v_2 = 0$ se

$$E - R_3A = 0 \rightarrow A = \frac{E}{R_3} \quad .$$

PER RISOLVERE L'ESERCIZIO CON IL SECONDO APPROCCIO è necessario osservare che, assumendo $v_2 = 0$ si ottiene $i_2 = \frac{v_2}{R_2} = 0$. Considerando il circuito in figura 42, si ricava dunque

$$\text{Nodo 3: } A - i_3 + i_2 = A - i_3 = 0 \rightarrow A = i_3$$

$$\text{Maglia I: } E - v_2 - R_3 i_3 = E - R_3 i_3 = 0 \rightarrow E = R_3 i_3 \quad ,$$

da cui si conclude che

$$A = \frac{E}{R_3} \quad .$$

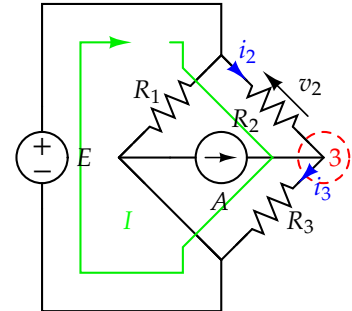


Figura 42: Circuito con la maglia (in verde) e il taglio nodale (in rosso) utilizzati per la risoluzione.

Es. 1.17

Si consideri un tripolo T caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \alpha v_1 + \beta v_2 \\ i_2 = \gamma v_1 + \delta v_2 \end{cases}$$

Determinare le basi di definizione del tripolo nei seguenti casi:

- $\alpha = \gamma = 0$ ($\beta, \delta \neq 0$).
- $\alpha = \beta = 0$ ($\gamma, \delta \neq 0$).
- $\gamma = \delta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$).
- $\beta = \delta = 0$ ($\alpha, \gamma \neq 0$).
- $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Sol: [

- $\alpha = \gamma = 0$ ($\beta, \delta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, i_2) e (v_1, v_2) .
- $\alpha = \beta = 0$ ($\gamma, \delta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, i_2) e (v_1, v_2)
- $\gamma = \delta = 0$ ($\alpha, \beta \neq 0$) \rightarrow base (v_1, v_2) e (i_1, v_2) .
- $\beta = \delta = 0$ ($\alpha, \gamma \neq 0$) \rightarrow base (v_1, v_2) e (i_1, v_2) .
- $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0 \rightarrow$ base (v_1, v_2)]

Es. 2.1

Dati: $R_1 = \frac{1}{2}\Omega$, $R_2 = \frac{1}{5}\Omega$, $R_3 = \frac{6}{7}\Omega$, $R_4 = 2\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = \frac{2}{3}\Omega]$

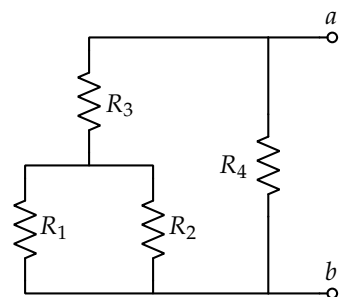


Figura 43: Es 2.1

Es. 2.2

Dati: $R_1 = R_2 = R_4 = R_5 = 3\Omega$, $R_3 = R_6 = 6\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 6\Omega]$

Soluzione

OSSERVANDO IL CIRCUITO in figura 44 si nota che i resistori R_1 e R_2 sono tra loro in serie. Vale lo stesso per R_4 e R_5 . Si possono quindi sostituire tali coppie con due resistori aventi resistenza equivalente:

$$\text{Serie } R_1, R_2 \rightarrow R_{12} = R_1 + R_2 = 6\Omega$$

$$\text{Serie } R_4, R_5 \rightarrow R_{45} = R_4 + R_5 = 6\Omega$$

Sostituendo tali componenti nel circuito iniziale è possibile ottenere il circuito in figura 45. Come mostrato sempre in figura 45, si possono far coincidere i nodi c e d . Così facendo risulta evidente che R_{12} ed R_3 sono in parallelo, così come R_{45} ed R_6 . Si calcolano dunque le due resistenze equivalenti a tali connessioni.

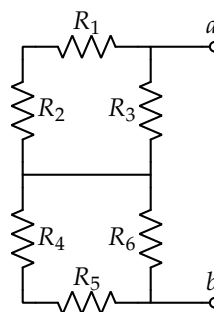


Figura 44: Es 2.2

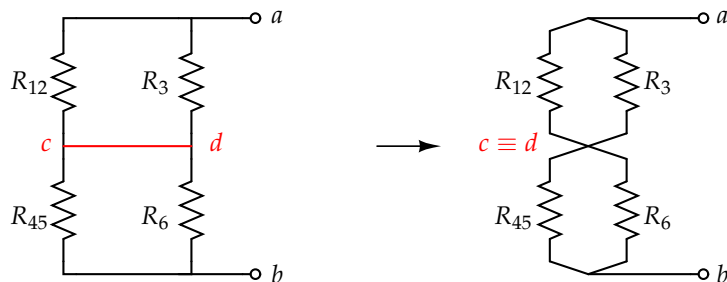


Figura 45: I nodi c e d sono equipotenziali e quindi R_{12} ed R_3 sono in parallelo, così come R_{45} ed R_6 .

$$\begin{aligned} \text{Parallelo } R_{12}, R_3 &\rightarrow R_{123} = \frac{R_{12}R_3}{R_{12} + R_3} = 3\Omega \\ \text{Parallelo } R_{45}, R_6 &\rightarrow R_{456} = \frac{R_{34}R_5}{R_{34} + R_5} = 3\Omega . \end{aligned}$$

Si ottiene dunque il circuito equivalente con i due resistori R_{123} e R_{456} in figura 46. Si nota che tali componenti sono tra loro in serie e quindi la resistenza equivalente ai morsetti a - b vale

$$R_{eq} = R_{123} + R_{456} = 6\Omega .$$

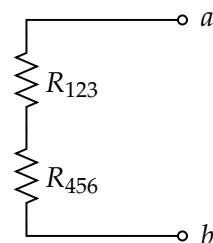


Figura 46: Circuito equivalente ottenuto sostituendo i resistori con resistenza equivalente R_{123} e R_{456} .

Es. 2.3

Dati: $E = 12V$, $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 8\Omega$.

Determinare V .

Sol: [$v = -2V$]

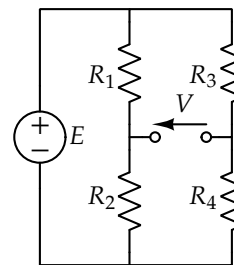


Figura 47: Es 2.3

Es. 2.4

Dati: $A = 6A$, $R_1 = 16\Omega$, $R_2 = R_3 = R_4 = 8\Omega$.

Determinare i .

Sol: [$i = 1A$]

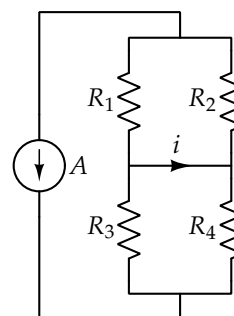


Figura 48: Es 2.4

Es. 2.5

Dati: $E = 30\text{V}$, $R_1 = 25\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = R_5 = R_6 = 5\Omega$, $R_4 = 2.5\Omega$.

Determinare i_1 , v_2 e i_5 .

Sol: $[i_1 = 1\text{A}, v_2 = 5\text{V}, i_5 = -0.25\text{A}]$

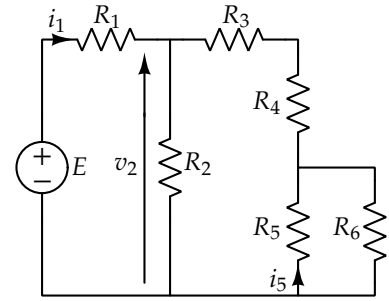


Figura 49: Es 2.5

Es. 2.6

Determinare:

- Il circuito equivalente di Thevenin e di Norton ai morsetti $a-b$, rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- La potenza erogata dal generatore di corrente A .
- Si connetta ai morsetti $a-b$ un resistore R_x . Quanto deve valere R_x affinché la sua potenza assorbita sia massima?

Sol: $[R_{th} = \frac{7}{3}R, E_{th} = E, G_{nr} = \frac{3}{7R}, A_{nr} = -\frac{3E}{7R}, P_e^A = (E + RA)A, P_a^{R_x}$ è massima se $R_x = R_{th}]$

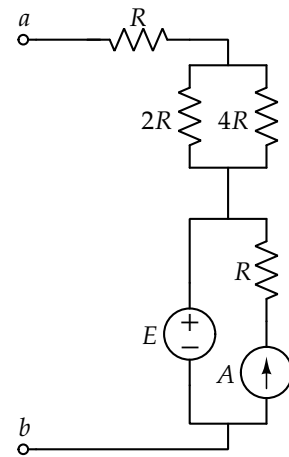


Figura 50: Es 2.6

Es. 2.7

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Il valore di A tale per cui il circuito equivalente si comporta come un resistore.

Sol: $[G_{nr} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 R_2 R_3}, A_{nr} = \frac{E(R_2 + R_3) - A R_2 R_3}{R_2 R_3}]$, il circuito equivalente si comporta come un resistore quando $A = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}$

Soluzione

PER DETERMINARE IL CIRCUITO EQUIVALENTE DI NORTON del circuito in figura 51 si ricavano le correnti in funzione di i e di v . Come prima cosa si osserva che i due resistori di resistenza R_2 e R_3 sono in parallelo. Si sostituiscono dunque con un singolo resistore avente resistenza equivalente pari a $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$.

Considerando la Maglia I evidenziata nel circuito in figura 52, si ricava subito che la tensione ai capi del resistore R_1 è pari a v e quindi la corrente che lo attraversa è pari a $\frac{v}{R_1}$. Considerando la legge di Kirchhoff per le correnti (KCL) al taglio nodale al Nodo 1, si ricava che la corrente che scorre attraverso il generatore indipendente di tensione è pari a $i - \frac{v}{R_1}$. Considerando la KCL al taglio nodale al Nodo 2 si ricava che la corrente che scorre nel resistore di resistenza R_{23} è pari a $i - \frac{v}{R_1} + A$.

Considerando la Maglia I del circuito in figura 53 si ottiene l'equazione

$$v + E - R_{23} \left(i - \frac{v}{R_1} + A \right) = 0 \quad (2)$$

Sostituendo il valore di R_{23} calcolato in precedenza e risolvendo si ricava

$$i = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} v + \frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3} \quad (3)$$

Si conclude dunque che i parametri per il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, in figura 54, sono:

$$G_{nr} = \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3}$$

$$A_{nr} = \frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3}$$

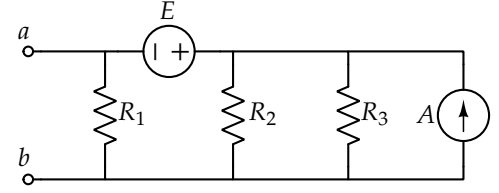


Figura 51: Es 2.7

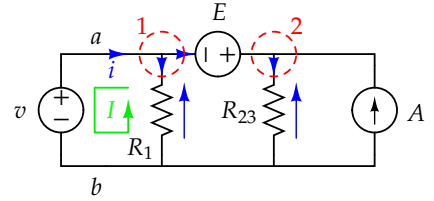


Figura 52: Circuito con evidenziati i tagli nodali (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzate per ricavare le correnti. Per calcolare il circuito equivalente di Norton è necessario imporre una tensione v ai morsetti $a-b$. Ciò equivale a collegare a tali morsetti un generatore indipendente di tensione che genera una tensione v .

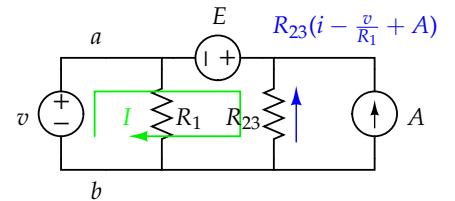


Figura 53: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) utilizzata.

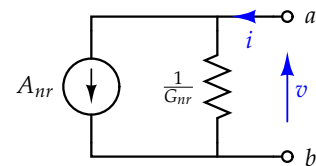


Figura 54: Circuito equivalente di Norton.

TALE CIRCUITO EQUIVALENTE si comporta come un resistore se e solo se $A_{nr} = 0$. Ciò accade se

$$\frac{E(R_2 + R_3) - R_2 R_3 A}{R_2 R_3} = 0 \rightarrow A = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_2 R_3}.$$

Es. 2.8

Dati: $E = 5\text{V}$, $A = 5\text{A}$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = \frac{5}{6}\text{A}]$

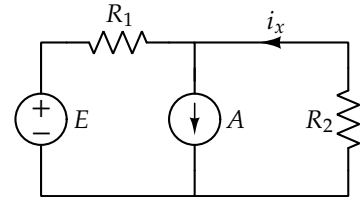


Figura 55: Es 2.8

Es. 2.9

Dati: $E_1 = 42\text{V}$, $E_2 = 24\text{V}$, $A = 2\text{A}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 3\Omega$.

Determinare v_x .

Sol: $[v_x = 12\text{V}]$

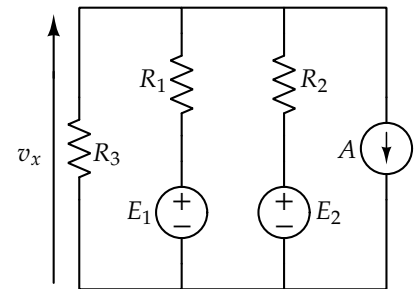


Figura 56: Es 2.9

Es. 2.10

Dati: $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 8\Omega$, $R_3 = 4\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 2\Omega]$

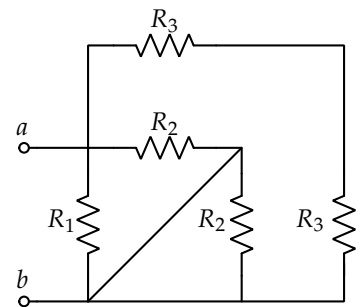


Figura 57: Es 2.10

Es. 2.11

Determinare:

- La potenza erogata dal generatore di tensione E .
- La potenza assorbita dal resistore R_2 .

Sol: $[P_e^E = \frac{E(E+R_1A)}{3R_1}, P_a^{R_2} = \frac{A^2 R_2^2 R_2}{(R_2+R_3)^2}]$

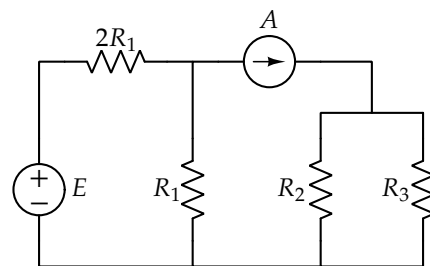


Figura 58: Es 2.11

Es. 2.12

Determinare:

- La corrente i_2 .
- La potenza assorbita dal generatore di tensione E .

Sol: $[i_2 = \frac{ER_1}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}, P_a^E = -\frac{E^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 + R_3(R_1 + R_2)}]$

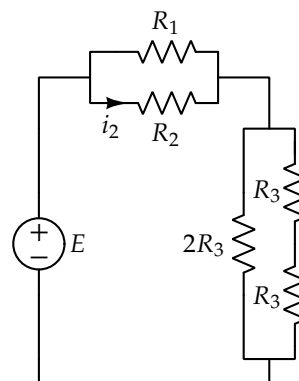


Figura 59: Es 2.12

Es. 2.13

Dati: $E = 9V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 6\Omega$, $R_5 = 5\Omega$, $R_6 = 7\Omega$.

Determinare v_1 e i_4 .

Sol: $[v_1 = 6V, i_4 = 0.75A]$

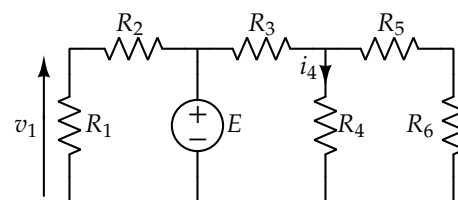


Figura 60: Es 2.13

Es. 2.14

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: $[R_{th} = 3R, E_{th} = -(E + RA)]$

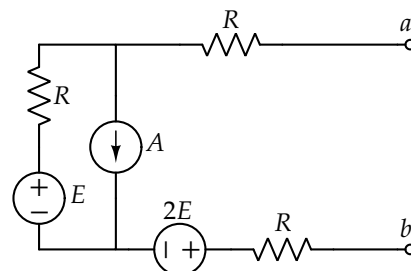


Figura 61: Es 2.14

Es. 2.15

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{2}{R}, A_{nr} = -\frac{E_1 + RA}{R}]$

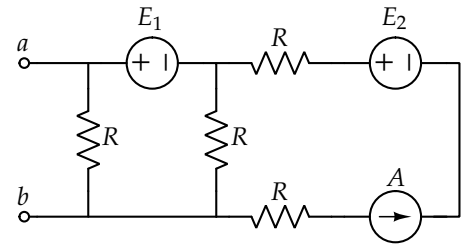


Figura 62: Es 2.15

Es. 2.16

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = \frac{A_1 R_1 + A_2 R_2 - E_2 - E_1}{R_1 + R_2}]$

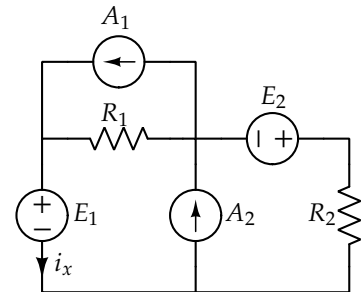


Figura 63: Es 2.16

Es. 2.17

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 60\Omega$, $R_3 = 30\Omega$, $R_4 = 90\Omega$.

Determinare la resistenza equivalente R_{eq} ai morsetti $a-b$.

Sol: $[R_{eq} = 1\Omega]$

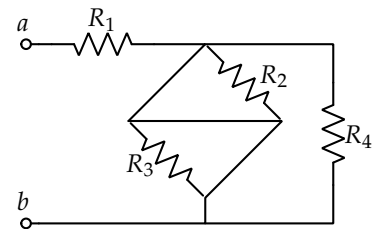


Figura 64: Es 2.17

Es. 2.18

Determinare la corrente i_2 .

Sol: $[i_2 = \frac{E_1 R_3 + E_2 R_1 - A R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}]$

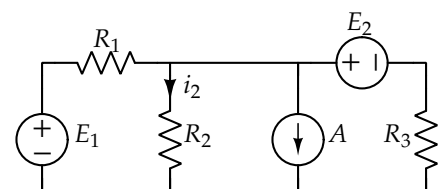


Figura 65: Es 2.18

Es. 2.19

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}, A_{nr} = \frac{A(R_1R_4-R_2R_3)}{(R_1+R_2)(R_3+R_4)}]$

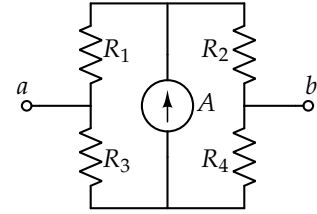


Figura 66: Es 2.19

Es. 2.20

Il tripolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_a = 0 \\ i_b = g v_a \end{cases}$$

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si sostituisca la resistenza R_3 con un circuito aperto. In questo caso, è ancora possibile determinare il circuito di equivalente di Thévenin? Motivare la risposta.

Sol: [Considerando R_3 si ottiene: $R_{th} = R_3$, $E_{th} = -\frac{gR_1R_3E}{R_1+R_2}$. Nel caso in cui si sostituisce la resistenza R_3 con un circuito aperto non è più possibile determinare il circuito equivalente di Thévenin perché l'equivalente ai morsetti $a-b$ è un generatore di corrente (componente non controllabile in corrente e che non permette, quindi, di essere descritto mediante un circuito equivalente di Thévenin)]

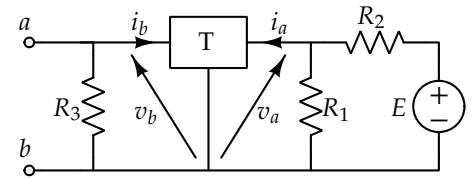


Figura 67: Es 2.20

Es. 2.21

Dati: $A_2 = 1A$, $A_3 = 5A$, $E = 4V$, $R = 2\Omega$.

Determinare la corrente $A_1 \mid v = 0$.

Sol: $[A_1 = -0.5A]$

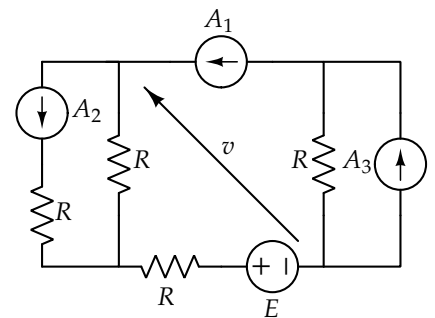


Figura 68: Es 2.21

Es. 3.1

Determinare la potenza erogata dal CCVS P_e^{CCVS} .

Sol: $[P_e^{CCVS} = \frac{rA(E+2RA)}{3R}]$

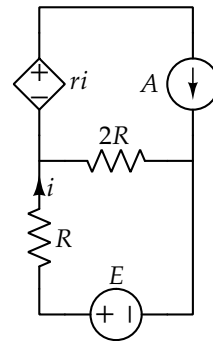


Figura 69: Es 3.1

Es. 3.2

Determinare la tensione v_0 . Per quali valori di α e β non è possibile determinare v_0 ?

Sol: $[v_0 = -\frac{E(1-\beta)}{3+\alpha-\beta}, 3+\alpha-\beta \neq 0]$

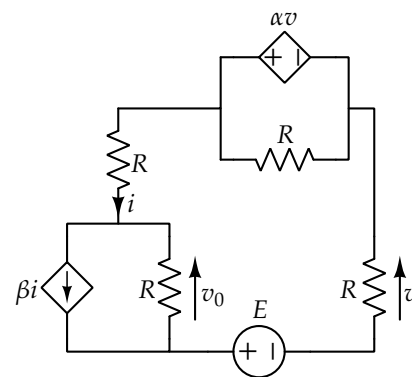


Figura 70: Es 3.2

Es. 3.3

Determinare, se esiste, $A \mid P_e^{CCVS} = 0$ (hp: $R_1 + R_2 + r \neq 0$).

Sol: $[P_e^{CCVS} = 0 \text{ se } A = -\frac{E}{R_2} \text{ o se } A = \frac{E}{R_1+r} \text{ (purché } r \neq -R_1)]$

Soluzione

IN PRIMIS È NECESSARIO CALCOLARE LA POTENZA erogata dal generatore di tensione pilotato in corrente: $P_e^{CCVS} = ri_1i$ (denominando

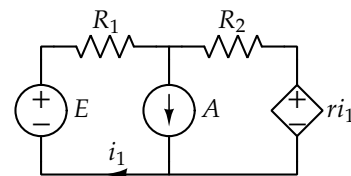


Figura 71: Es 3.3

i la corrente che attraversa tale generatore come in figura 72). Si nota dunque che è necessario ricavare il valore delle correnti incognite i e i_1 .

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo A in figura 72 si ricava

$$i_1 + i = A \rightarrow i = A - i_1 . \quad (4)$$

Scrivendo poi la KVL-II alla maglia I in figura 72 si ottiene

$$E - R_1 i_1 + R_2 i - r i_1 = 0 . \quad (5)$$

Sostituendo l'equazione 4 nell'equazione 5 e risolvendo, si ricava

$$\begin{aligned} i &= \frac{E + R_2 A}{R_1 + R_2 + r} \\ i_1 &= \frac{E - A(R_1 + r)}{R_1 + R_2 + r} . \end{aligned} \quad (6)$$

Si nota dunque che l'ipotesi $R_1 + R_2 + r \neq 0$ è necessaria per garantire l'esistenza di tale risultato. La potenza

$$p_e^{CCVS} = \frac{r(E + R_2 A)(E - A(R_1 + r))}{(R_1 + R_2 + r)^2} \quad (7)$$

può essere nulla se $A = -\frac{E}{R_2}$ o se $A = \frac{E}{R_1 + r}$ per $r \neq -R_1$.

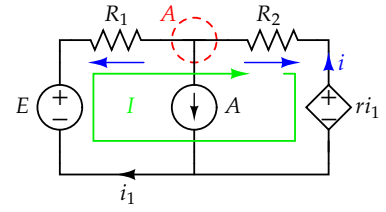


Figura 72: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) utilizzate per ricavare le correnti.

Es. 3.4

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Esistono dei valori di α per cui il circuito equivalente di Norton non esiste?

Sol: $[R_{th} = \frac{R(1-\alpha)}{2}, E_{th} = \frac{E}{2}]$. Il circuito equivalente di Norton esiste sse $\alpha \neq 1$

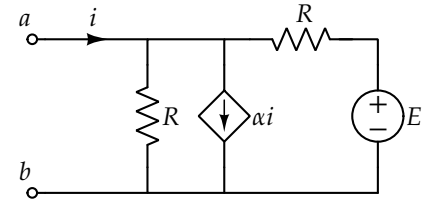


Figura 73: Es 3.4

Soluzione

PER DETERMINARE I PARAMETRI del circuito equivalente di Thévenin, si collega un generatore indipendente di corrente tra i morsetti $a-b$ come in figura 74: ciò equivale ad imporre una corrente entrante nel morsetto a pari ad i . Bisogna poi procedere per ricavare $v(i)$.

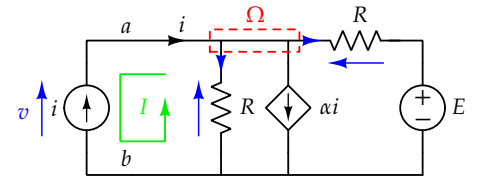


Figura 74: Circuito con evidenziato il taglio (in rosso) e la maglia (in verde) utilizzate per ricavare le correnti.

Considerando la maglia I nel circuito in figura 74, si ricava subito che la tensione ai capi del resistore in parallelo al generatore indipendente di corrente è pari a v e dunque la corrente che lo attraversa è v/R . Considerando quindi la KCL al taglio Ω si ricava che la corrente che attraversa l'altro resistore è pari a $i - v/R - \alpha i$ (figura 75).

Considerando la KVL-II alla maglia II in figura 75, si ricava

$$v - R \left(i - \frac{v}{R} - \alpha i \right) - E = 0, \quad (8)$$

ossia

$$v = \frac{R(1-\alpha)}{2} i + \frac{E}{2}. \quad (9)$$

Si conclude dunque che i parametri del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, secondo lo schema circuitale in figura 76, sono:

$$R_{th} = \frac{R(1-\alpha)}{2}$$

$$E_{th} = \frac{E}{2}.$$

PER RISPONDERE ALLA SECONDA RICHIESTA è necessario ricavare $i(v)$ dall'equazione 8. Si ottiene $i(v) = \frac{2}{R(1-\alpha)}v - \frac{E}{R(1-\alpha)}$. Si deduce dunque che i parametri del circuito equivalente di Norton, secondo lo schema circuitale in figura 76, sono

$$G_{nr} = \frac{2}{R(1-\alpha)}$$

$$A_{nr} = -\frac{E}{R(1-\alpha)}.$$

Si osserva dunque che l'equivalente di Norton non esiste quando $\alpha = 1$. Infatti, se α tende a 1 allora $|R_{th}|$ tende a zero 0 e $|G_{nr}|$ tende a $+\infty$. Se fosse $\alpha = 1$ allora R_{th} sarebbe nullo e $E_{th} = \frac{E}{2}$. Si otterrebbe dunque il circuito equivalente in figura 77 e si avrebbe $v = \frac{E}{2}$ per qualsiasi corrente i imposta. L'equivalente così ottenuto è un generatore indipendente di tensione. Poiché tale componente è definito solo su base corrente, esso non ammette per definizione l'equivalente di Norton, che esiste solo se il bipolo composito considerato è controllabile in tensione.

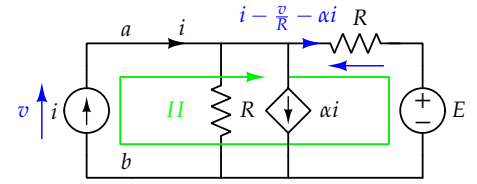


Figura 75: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) utilizzata.

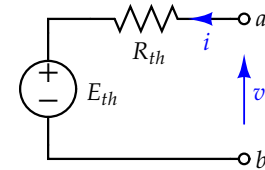


Figura 76: Schema circuitale del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

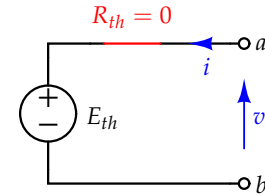


Figura 77: Schema circuitale del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nel caso in cui $R_{th} = 0$.

Es. 3.5

Dati: $R = 1\Omega$, $E = 4V$, $\beta = 3$.

- Determinare i_x quando i morsetti $a-b$ sono appesi.
- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$i_x = 4A$ (quando i morsetti $a-b$ sono appesi), $R_{th} = -1\Omega$, $E_{th} = 8V$]

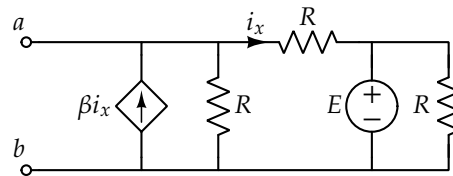


Figura 78: Es 3.5

Es. 3.6

Dati: $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 200\Omega$, $g = 0.1S$, $E = 20V$.

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$, e tracciare la sua equazione costitutiva sul piano $i-v$.
- Si colleghi $R_4 = 60\Omega$ ai morsetti $a-b$. Quanta potenza assorbe?

Sol: [$G_{nr} = 0.025S$, $A_{nr} = -0.4A$, $P_a^{R_4} = 1.536W$]

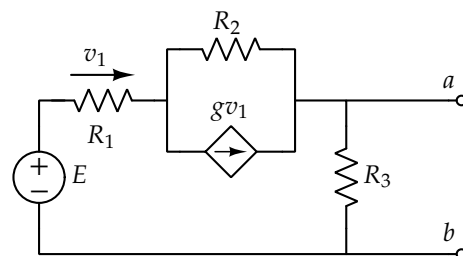


Figura 79: Es 3.6

Es. 3.7

Dati: $g_m = 1S$, $R = 1\Omega$, $E = 0.5V$, $A = 1A$.

- Determinare, se esiste, il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Determinare il valore che E dovrebbe avere affinché il circuito equivalente si comporti come un resistore.

Sol: [$G_{nr} = 0.5S$, $A_{nr} = -0.75A$, il circuito equivalente si comporta come un resistore sse $E = -1V$]

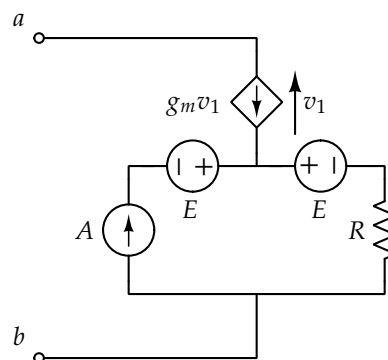


Figura 80: Es 3.7

Es. 3.8

Dati: $A = 6\text{A}$, $R = 4\Omega$, $\beta = 2$.

Determinare v e la potenza assorbita da tutti i componenti del circuito.

Sol: [$v = -24\text{V}$, $P_a^A = 144\text{W}$, $P_a^{\text{CCCS}} = -288\text{W}$, $P_a^R = 144\text{W}$]

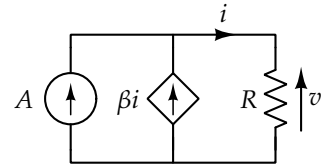


Figura 81: Es 3.8

Es. 3.9

Determinare i . Per quali valori di r è possibile determinare i ?

Sol: [$i = \frac{3E}{2r-5R}$, $r \neq \frac{5R}{2}$]

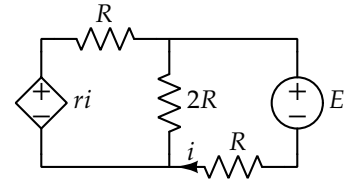


Figura 82: Es 3.9

Es. 3.10

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $A = 2\text{A}$, $r = 4\Omega$.

Determinare i e i_1 .

Sol: [$i = 4\text{A}$, $i_1 = -2\text{A}$]

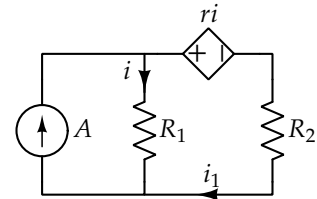


Figura 83: Es 3.10

Es. 3.11

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $A = 2\text{A}$, $E = 10\text{V}$, $\alpha = 2$.

Determinare i e v .

Sol: [$i = -\frac{6}{7}\text{A}$, $v = \frac{6}{7}\text{V}$]

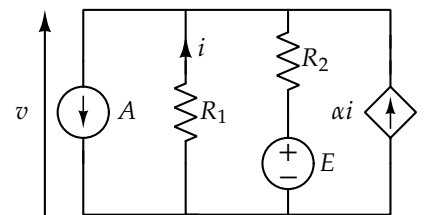


Figura 84: Es 3.11

Es. 3.12

Determinare:

- i_A . Per quali valori di k è possibile determinare i_A ?
- v .

Sol: $[i_A = \frac{E+R_1A}{R_2+R_1(1+k)}, k \neq -\frac{R_2}{R_1} - 1, v = \frac{R_1[E(1+k)-AR_2]}{R_2+R_1(1+k)}]$

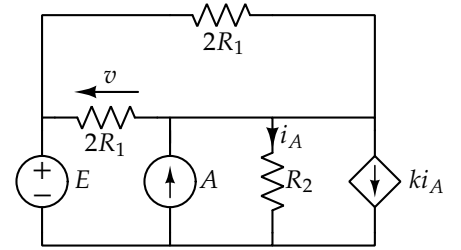


Figura 85: Es 3.12

Es. 3.13

Determinare la potenza erogata dal generatore di tensione E (hp: $r \neq \frac{R}{2}$).

Sol: $[P_e^E = \frac{3E^2(R-r)}{2R(R-2r)}]$

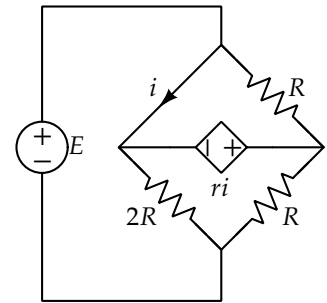


Figura 86: Es 3.13

Es. 3.14

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $E = 8V$, $A = 1A$, $R_2 = 6\Omega$.

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton e Thévenin ai morsetti $a-b$, rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Disegnare la caratteristica $i-v$ del bipolo equivalente ottenuto.
- Collegare $R_L = 12\Omega$ ai morsetti $a-b$. Determinare la potenza assorbita dal resistore R_L e dal generatore di tensione E in tali condizioni.

Sol: $[R_{th} = \frac{12}{5}\Omega, E_{th} = \frac{12}{5}V, G_{nr} = \frac{5}{12}S, A_{nr} = -1A, P_a^{R_L} = \frac{1}{3}W, P_a^E = -12W]$

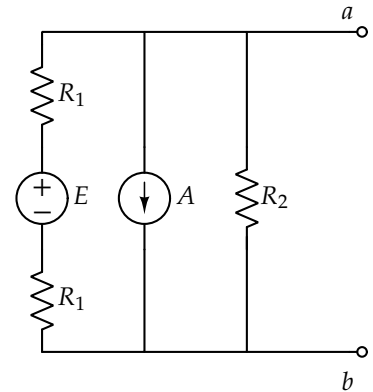


Figura 87: Es 3.14

Es. 3.15

Determinare:

- $R_3 \mid P_a^{R_3}$ è massima.
- $P_a^{R_3}_{max}$.

Sol: [$P_a^{R_3}$ è massima se $R_3 = R_{th} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$. In tali condizioni,
 $P_a^{R_3}_{max} = \frac{E^2 R_4}{4 R_2 (R_2 + R_4)}$]

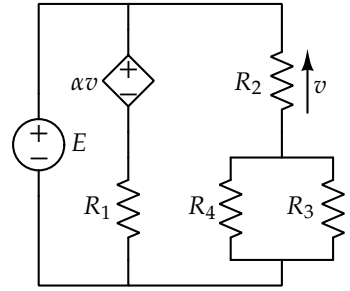


Figura 88: Es 3.15

Es. 3.16

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Il valore di γ (d'ora in poi chiamato $\hat{\gamma}$) per cui il circuito equivalente di Norton non esiste.
- Si ponga $\gamma = \hat{\gamma}$ e si connetta un resistore R_L ai morsetti $a-b$. Determinare la potenza assorbita da R_L in tali condizioni.

Sol: [$R_{th} = R(3 - \gamma)$, $E_{th} = E$, il circuito equivalente di Norton esiste sse $\gamma \neq 3$, $P_a^{R_L} = \frac{E^2}{R_L}$]

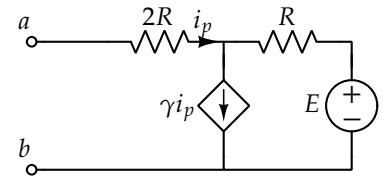


Figura 89: Es 3.16

Es. 3.17

Determinare:

- Il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Il valore di α per cui il circuito equivalente di Norton non esiste.

Sol: [$G_{nr} = \frac{R_1 + R_2}{(\alpha + 1)R_1 R_2}$, $A_{nr} = \frac{A R_2 - E}{R_2}$, $\alpha \neq -1$]

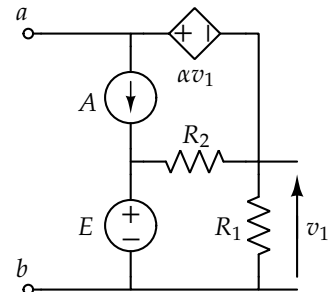


Figura 90: Es 3.17

Es. 3.18

Dati: $R = 1\Omega$, $A = 1A$, $\alpha = 4$.

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Esiste il circuito equivalente di Thévenin? Motivare la risposta.
- Si connetta ai morsetti $a-b$ un resistore $R_L = 5\Omega$. Determinare $P_a^{R_L}$.

Sol: [$G_{nr} = 0S$, $A_{nr} = -0.5A$, il circuito equivalente di Thévenin non esiste perché il bipolo equivalente ottenuto è un generatore di corrente (componente non controllabile in corrente e che non permette, quindi, di essere descritto mediante un circuito equivalente di Thévenin), $P_a^{R_L} = 1.25W$]

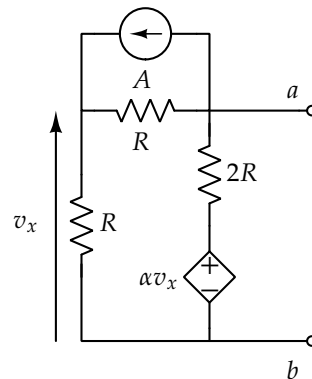


Figura 91: Es 3.18

Es. 3.19

Dati: $E_1 = 6V$, $E_2 = 12V$, $A = 1A$, $R = 2\Omega$.

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: [$G_{nr} = \frac{1}{3}S$, $A_{nr} = -3A$]

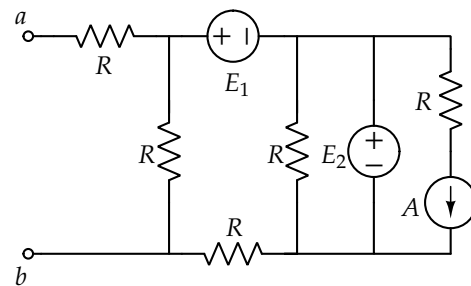


Figura 92: Es 3.19

Es. 3.20

Dati: $E_1 = 10V$, $E_2 = 5V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 4\Omega$.

Determinare i_x .

Sol: [$i_x = -0.05A$]

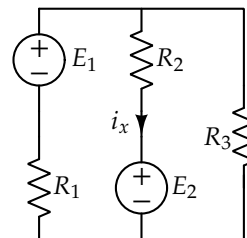


Figura 93: Es 3.20

Es. 3.21

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $\alpha = 2$, $E_1 = 6V$, $E_2 = 2V$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin del bipolo composto rappresentato in figura, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si connetta ai morsetti del bipolo composto un generatore di tensione $E_2 = 2V$ (vedi figura, in blu). Calcolare $P_e^{E_2}$.

Sol: $[R_{th} = 2\Omega$, $E_{th} = -6V$, $P_e^{E_2} = 8W]$

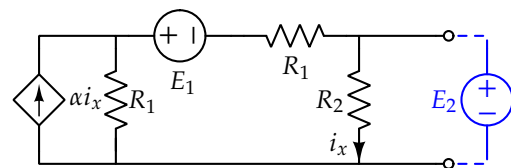


Figura 94: Es 3.21

Es. 3.22

- Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Per quali valori di α non esiste il circuito equivalente di Thévenin?
- Si connetta ai morsetti $a-b$ un generatore di corrente A_2 (vedi figura, in blu). Calcolare $P_e^{A_2}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{2+\alpha}{3R}$, $A_{nr} = -A_1$, il circuito equivalente di Thévenin esiste sse $\alpha \neq -2$, $P_e^{A_2} = \frac{A_2(A_2-A_1)3R}{2+\alpha}]$

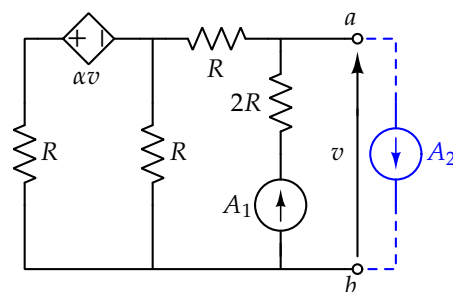


Figura 95: Es 3.22

Es. 3.23

Dati: $E = 4V$, $R = 2\Omega$, $A = 2A$, $\beta = 2$.

Determinare i_x .

Sol: $[i_x = -1A]$

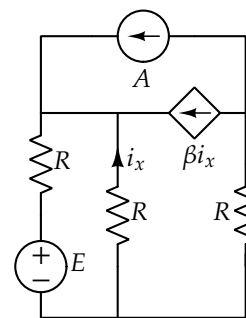


Figura 96: Es 3.23

Es. 3.24

Dati: $E_1 = 5V$, $E_2 = 10V$, $A = 1A$, $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $R_3 = 5\Omega$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $\alpha - \beta$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.
- Si connetta ai morsetti $\alpha - \beta$ una resistenza $R_L = 10\Omega$. Determinare $P_a^{R_L}$. La potenza assorbita da R_L è la massima possibile? Motivare la risposta.

Sol: [$R_{th} = 10\Omega$, $E_{th} = 20V$, $P_a^{R_L} = 10W$. La potenza assorbita da R_L è la massima possibile perché $R_L = R_{th}$ (condizione da rispettare per garantire il massimo trasferimento di potenza)]

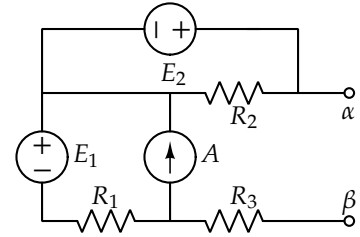


Figura 97: Es 3.24

Es. 3.25

Dati: $R = 2\Omega$, $A = 4A$, $\gamma = 2$, $\delta = 3$.

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin e di Norton ai morsetti $\alpha - \beta$, rispettivamente nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$ e $i = G_{nr}v + A_{nr}$.
- Determinare la massima potenza erogabile dal bipolo equivalente.

Sol: [$R_{th} = 1\Omega$, $E_{th} = 12V$, $G_{nr} = 1S$, $A_{nr} = -12A$. La massima potenza erogabile dal bipolo è pari a $36W$]

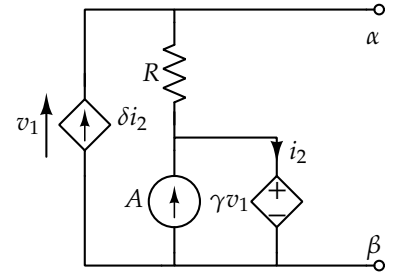


Figura 98: Es 3.25

Es. 3.26

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $\alpha - \beta$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, indicando per quali valori di γ tale circuito non esiste.
- Determinare i valori di γ ed A necessari affinché il circuito equivalente si comporti come un bipolo strettamente attivo.

Sol: [$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1-\gamma)}$, $E_{th} = \frac{R_2[E(1-\gamma) - R_1 A]}{R_1 + R_2(1-\gamma)}$, $\gamma \neq 1 + \frac{R_1}{R_2}$. Il circuito equivalente si comporta come un bipolo strettamente attivo quando $A = \frac{E(1-\gamma)}{R_1}$ e $\gamma > 1 + \frac{R_1}{R_2}$]

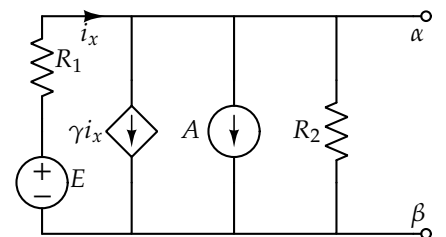


Figura 99: Es 3.26

Es. 4.1

Dati: $A = 2\text{A}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 24\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $E = 10\text{V}$.

Determinare i_2 e v_2 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcolare $P_a^{R_2}$.

Sol: [$i_2 = 0.25\text{A}$, $v_2 = 6\text{V}$, $P_a^{R_2} = 1.5\text{W}$]

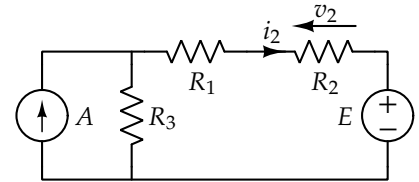


Figura 100: Es 4.1

Es. 4.2

Determinare v applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sol: [$v = \frac{E_1 - E_2 + RA_1}{2}$]

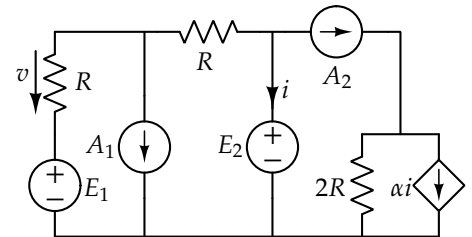


Figura 101: Es 4.2

Es. 4.3

Dati: $A = 1.5\text{A}$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$.

Determinare la tensione v_A applicando il metodo dell'analisi nodale (si consideri il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale).

Sol: [$v_A = -6\text{V}$]

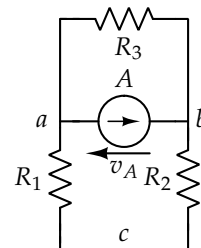


Figura 102: Es 4.3

Soluzione

L'ANALISI NODALE È UNA PROCEDURA SISTEMATICA che permette di risolvere i circuiti, nell'ipotesi che essi contengano solo componenti definiti su base tensione. Tale metodo si basa sulle equazioni di Tableau e consiste nel ricavare le correnti e le tensioni di lato a partire dai potenziali di nodo. La procedura è la seguente:

- Passo 0: si sceglie tra gli n nodi del circuito un nodo di riferimento del potenziale. Il suo potenziale può essere scelto arbitrariamente nullo;
- Passo 1: sfruttando le KVL-I si esprimono le tensioni di lato in funzione dei potenziali di nodo;
- Passo 2: poiché ogni componente è definito su base tensione, è possibile esprimere la corrente di ciascun lato in funzione delle tensioni di lato, ovvero dei potenziali di nodo;
- Passo 3: si risolvono le KCL del circuito, scritte per $n - 1$ tagli nodali (si esclude il taglio nodale al nodo di riferimento), in funzione dei potenziali di nodo.

Una volta ricavati i potenziali di nodo, è possibile ricavare le correnti e le tensioni di lato, risolvendo così il circuito. Qualora il circuito contenga elementi non definiti su base tensione, è possibile ricorrere all'analisi nodale modificata descritta nelle dispense del corso.

In questo esercizio tutti i componenti del circuito in figura 102 sono definiti su base tensione, quindi è possibile applicare il procedimento sopra descritto. Nella risoluzione si considerano le correnti e le tensioni di lato orientate come in figura 103 (secondo la convenzione degli utilizzatori). Il Passo 0 è da considerarsi già svolto poiché l'esercizio specifica quale nodo considerare come riferimento (nodo c). Il Passo 1 consiste nell'esprimere le tensioni v_1 , v_2 , v_3 e v_a in funzione dei potenziali di nodo (essendo c il nodo di riferimento, $u_c = 0$), ovvero

$$v_1 = u_a - u_c = u_a$$

$$v_2 = u_b - u_c = u_b$$

$$v_3 = u_a - u_b$$

$$v_a = u_a - u_b \quad .$$

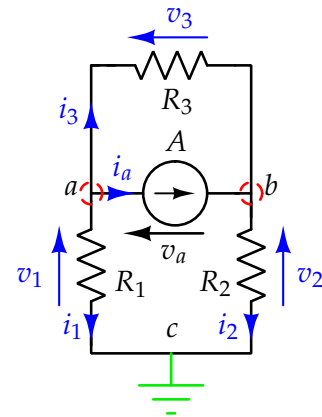


Figura 103: Circuito con indicati (in blu) i versi di tutte le correnti e tensioni, e (in rosso) i due nodi considerati al passo 3.

Bisogna poi esprimere le correnti i_1 , i_2 , i_3 e i_a in funzione di u_a , u_b e u_c (Passo 2)

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{v_1}{R_1} = \frac{u_a}{R_1} \\i_2 &= \frac{v_2}{R_2} = \frac{u_b}{R_2} \\i_3 &= \frac{v_3}{R_3} = \frac{u_a - u_b}{R_3} \\i_a &= A \quad .\end{aligned}$$

Per svolgere il Passo 3 si scrivono $n - 1$ KCL, esprimendo le correnti in funzione dei potenziali di nodo

$$\begin{aligned}\text{Nodo a: } i_1 + i_a + i_3 &= \frac{u_a}{R_1} + A + \frac{u_a - u_b}{R_3} = 0 \\ \text{Nodo b: } i_a - i_2 + i_3 &= A - \frac{u_b}{R_2} + \frac{u_a - u_b}{R_3} = 0 \quad .\end{aligned}$$

Si ottiene così il sistema

$$\begin{cases} u_a \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - \frac{u_b}{R_3} = -A \\ \frac{u_a}{R_3} + u_b \left(-\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = -A \quad , \end{cases} \quad (10)$$

che può anche essere scritto in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} \\ \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A \\ -A \end{bmatrix} \quad . \quad (11)$$

Risolvendo il sistema 10 è possibile ricavare u_a e u_b

$$\begin{aligned}u_a &= -\frac{AR_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = -4 \text{ V} \\ u_b &= \frac{AR_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 2 \text{ V} \quad .\end{aligned}$$

Si conclude l'esercizio ricavando le correnti e le tensioni di lato

$$\begin{aligned}v_1 &= u_a = -4 \text{ V} & i_1 &= \frac{u_a}{R_1} = -0.5 \text{ A} \\ v_2 &= u_b = 2 \text{ V} & i_2 &= \frac{u_b}{R_2} = 0.5 \text{ A} \\ v_3 &= u_a - u_b = -6 \text{ V} & i_3 &= \frac{u_a - u_b}{R_3} = -1 \text{ A} \\ v_a &= u_a - u_b = -6 \text{ V} & i_a &= A = 1.5 \text{ A} \quad .\end{aligned}$$

Si lascia allo studente verificare che, se si fosse considerato un nodo di riferimento diverso dal nodo c (quindi il nodo a oppure il nodo b), sarebbero variati solo i potenziali di nodo ma non il risultato finale.

Es. 4.4

Dati: $A = 4\text{A}$, $R_1 = \frac{1}{4}\Omega$, $R_2 = \frac{1}{2}\Omega$, $R_3 = \frac{1}{4}\Omega$, $E = 10\text{V}$.

Considerando il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_2 applicando il metodo dell'analisi nodale.

Calcolare la corrente erogata dal generatore di tensione i_E .

Sol: [$v_2 = -6\text{V}$, $i_E = 52\text{A}$]

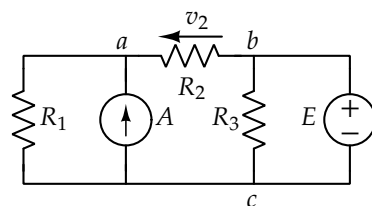


Figura 104: Es 4.4

Es. 4.5

Dati: $A = 6\text{A}$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 12\Omega$, $E = 12\text{V}$, $\beta = 2$.

Considerando il nodo d come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_3 applicando il metodo dell'analisi nodale.

Sol: [$v_3 = 6\text{V}$]

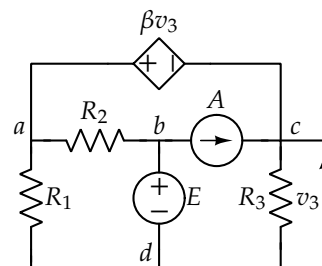


Figura 105: Es 4.5

Es. 4.6

Dati: $E_1 = 66\text{V}$, $E_2 = -88\text{V}$, $A = -33\text{A}$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $R_4 = 4\Omega$.

Determinare v_2 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti. Calcolare $P_a^{R_2}$.

Sol: [$v_2 = 14\text{V}$, $P_a^{R_2} = 98\text{W}$]

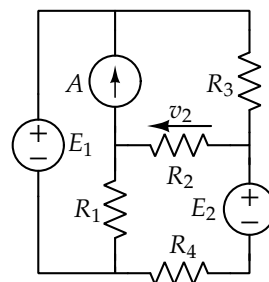


Figura 106: Es 4.6

Es. 4.7

Dati: $E = 8\text{V}$, $R = 500\Omega$, $A_1 = 3\text{mA}$, $A_2 = 5\text{mA}$.

Considerando il nodo c come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_{A_1} usando il metodo dell'analisi nodale.

Calcolare i_e .

Sol: [$v_{A_1} = -6\text{V}$, $i_e = 9\text{mA}$]

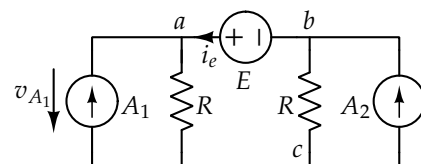


Figura 107: Es 4.7

Es. 4.8

Considerando il nodo e come nodo di riferimento per il potenziale, calcolare la tensione v_2 usando il metodo dell'analisi nodale.

Sol: $[v_2 = \frac{R_2(E_1 - E_2)}{R_1 + R_2}]$

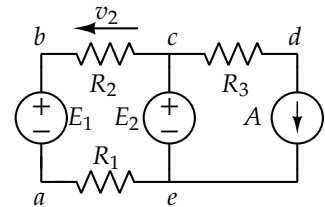


Figura 108: Es 4.8

Es. 4.9

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $E_1 = 3V$, $E_2 = 6V$, $A_1 = 3A$, $A_2 = -6A$.

Determinare la potenza assorbita da R_2 .

Sol: $[P_a^{R_2} = 0W]$

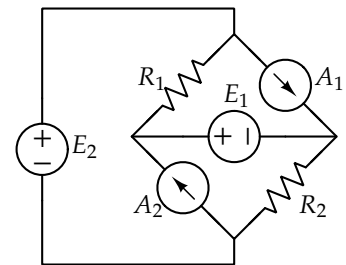


Figura 109: Es 4.9

Es. 4.10

Determinare v_1 (hp: $k \neq \frac{R_1 + R_2}{R_1}$).

Sol: $[v_1 = \frac{(A_2 + A_3)R_1R_2}{R_1(k-1) - R_2}]$

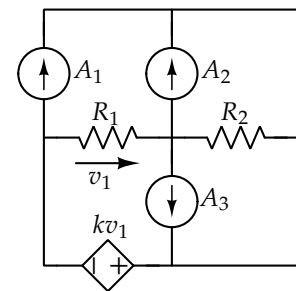


Figura 110: Es 4.10

Es. 4.11

Dati: $E = 10V$, $R = 10\Omega$, $\alpha = -1$. Utilizzando il metodo dell'analisi nodale, ricavare la tensione v_x .

Sol: $[v_x = 10V]$

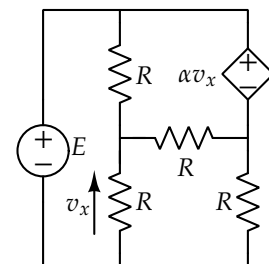


Figura 111: Es 4.11

Es. 4.12

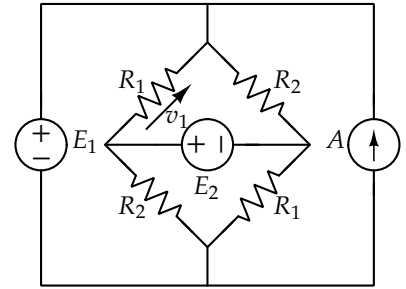
Determinare la tensione v_1 usando il metodo dell'analisi nodale.Sol: [$v_1 = \frac{E_1 - E_2}{2}$]

Figura 112: Es 4.12

Es. 5.1

Dati: $E = 3V$, $A = 10A$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

Ricavare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$, utilizzando le prove semplici.

Sol: $[R_{th} = 6\Omega, E_{th} = -9V]$

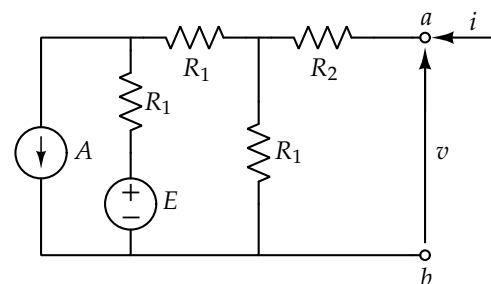


Figura 113: Es 5.1

Soluzione

I PARAMETRI DEL CIRCUITO EQUIVALENTE di Thévenin sono ricavabili utilizzando le prove semplici. Ai morsetti del bipolo composito considerato, tale circuito, se esiste, ha equazione $v = R_{th}i + E_{th}$. Le due prove semplici da eseguire sono:

1. $R_{th} = \frac{v}{i} \big|_{E_{th}=0}$, ma siccome E_{th} è dovuto alle sorgenti indipendenti presenti nel bipolo composito, ciò corrisponde a calcolare $R_{th} = \frac{v}{i}$ passivando le sorgenti indipendenti del bipolo composito considerato.
2. $E_{th} = v \big|_{i=0}$, ciò corrisponde a calcolare $E_{th} = v$ lasciando appesi i morsetti del bipolo composito considerato.

L'ordine in cui si eseguono le prove semplici è influente per il risultato finale. In questa risoluzione si parte calcolando R_{th} . Considerando il circuito in figura 113, se si passivano le sorgenti indipendenti e si impone una corrente i ai morsetti $a-b$, si ricava il circuito in figura 114.

Considerando tale circuito si nota che vi sono due resistori, di resistenza R_1 , in serie (evidenziati in verde). Il resistore, con resistenza equivalente ad essi, è a sua volta in parallelo con il terzo resistore di resistenza R_1 (evidenziato in arancione). Infine, tale resistore equivalente è in serie con il resistore di resistenza R_2 . Facendo tali

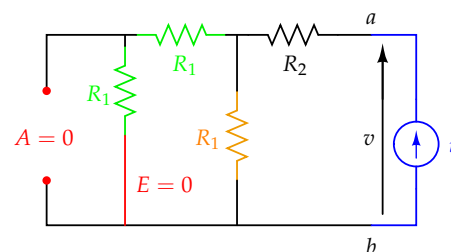


Figura 114: Circuito con i generatori indipendenti del bipolo composito considerato passivati. Imporre una corrente i ai morsetti $a-b$ equivale a collegare un generatore indipendente di corrente, orientato adeguatamente.

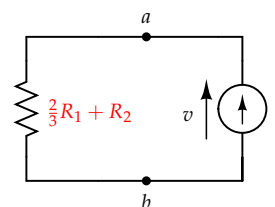


Figura 115: Circuito equivalente, ai morsetti $a-b$, ottenuto sostituendo resistori con adeguata resistenza equivalente.

considerazioni, dal circuito in figura 114 si ricava quello in figura 115. Si può dunque concludere che:

$$R_{th} = \frac{v}{i} = \frac{2}{3}R_1 + R_2 = 6\Omega . \quad (12)$$

Per calcolare E_{th} , sfruttando le prove semplici, si impone una corrente nulla ($i = 0$) ai morsetti $a-b$. Ciò corrisponde a lasciare i morsetti appesi. Si nota dunque che la corrente che scorre nel resistore di resistenza R_2 (in figura 113) è nulla, e quindi anche la tensione ai suoi capi. Dunque, la tensione sul resistore di resistenza R_1 , più a destra, è pari a v (il circuito ottenuto facendo tali considerazioni è riportato in figura 116). Per ricavare v si può procedere in molti modi diversi, seppur continuando ad utilizzare le prove semplici. Ci concentreremo sui due metodi seguenti:

1. Metodo 1: sostituzione delle sorgenti, sfruttando gli equivalenti di Thévenin e Norton.
2. Metodo 2: applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

METODO 1: facendo riferimento alla figura 116, si osserva che è possibile sostituire il bipolo costituito dalla serie formata dal generatore indipendente di tensione e dal resistore di resistenza R_1 (equivalente di Thévenin) con un equivalente di Norton, nel modo seguente:

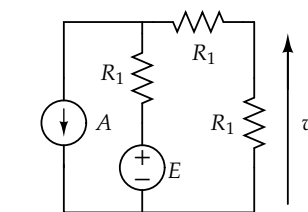
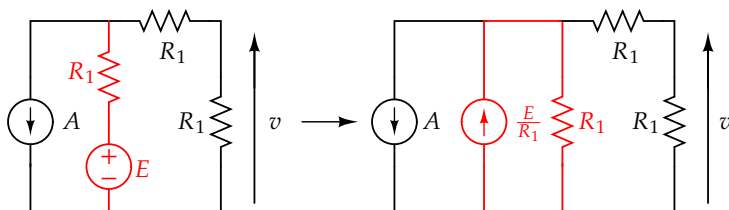


Figura 116: Circuito ottenuto imponendo una corrente nulla ($i = 0$) ai morsetti e notando che il resistore di resistenza R_2 non è influente nel calcolo di v .

Figura 117: Sostituzione con un bipolo equivalente di Norton (bipoli sostituiti evidenziati in rosso).

Si possono poi rimpiazzare i due generatori indipendenti di corrente con uno solo. È dunque possibile sostituire il bipolo costituito dal parallelo formato dal generatore indipendente di corrente equivalente e dal resistore di resistenza R_1 (equivalente di Norton) con il suo equivalente di Thévenin, come mostrato in figura 118.

In conclusione, si nota che si può calcolare la tensione v utilizzando il partitore di tensione:

$$v = (E - AR_1) \frac{R_1}{3R_1} = -9V . \quad (13)$$

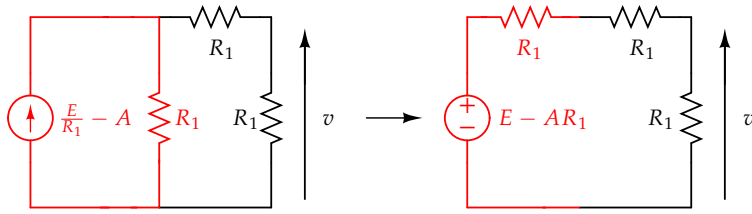


Figura 118: Sostituzione con un bipolo equivalente di Thévenin (bipoli sostituiti evidenziati in rosso).

METODO 2: è necessario passivare, uno alla volta, i due generatori indipendenti e calcolare il valore della tensione richiesta, in entrambi i casi. La loro somma sarà pari alla tensione v quando entrambi i generatori sono attivi. Vale dunque che

$$v = v_E + v_A \quad , \quad (14)$$

con v_E tensione calcolata con il generatore indipendente di corrente passivato e v_A tensione calcolata con il generatore indipendente di tensione passivato.

Considerando il circuito in figura 116 e spegnendo il generatore indipendente di corrente, si ricava il circuito in figura 119. Si può dunque calcolare la tensione v_E utilizzando il partitore di tensione:

$$v_E = \frac{1}{3}E = 1V \quad . \quad (15)$$

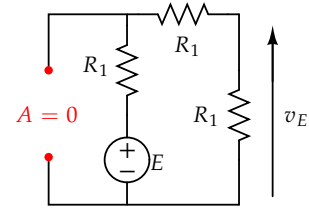


Figura 119: Circuito ottenuto passivando il generatore indipendente di corrente nel circuito in figura 116.

Considerando il circuito in figura 116 e spegnendo il generatore indipendente di tensione, si ricava il circuito in figura 120. Si può ricavare la corrente i_x utilizzando il partitore di corrente:

$$i_x = -\frac{R_1}{3R_1}A = -\frac{1}{3}A \quad . \quad (16)$$

Sfruttando l'equazione costitutiva del resistore, è possibile ricavare $v_A = -R_1 \frac{1}{3}A = -10V$. Allora, usando l'equazione 14 e sostituendo i valori ricavati di v_E e v_A , si conclude che $v = -9V$.

In conclusione l'equivalente di Thévenin (secondo lo schema circuitale in figura 76), con equazione $v = R_{th}i + E_{th}$, ha i seguenti parametri:

$$E_{th} = -9V$$

$$R_{th} = 6\Omega \quad .$$

L'esercizio chiedeva esplicitamente di calcolare l'equivalente attraverso l'applicazione delle prove semplici ma si sarebbe ottenuto lo stesso risultato imponendo una corrente i ai morsetti $a-b$ e calcolando il valore di $v(i)$.

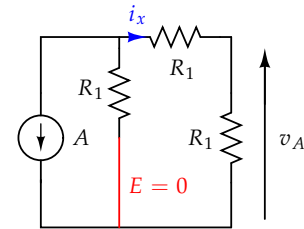


Figura 120: Circuito ottenuto passivando il generatore indipendente di tensione nel circuito in figura 116.

Es. 5.2

Ricavare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$, utilizzando le prove semplici.

Sol: $[G_{nr} = \frac{3+\beta-2\alpha}{2R}, A_{nr} = \frac{E}{R}]$

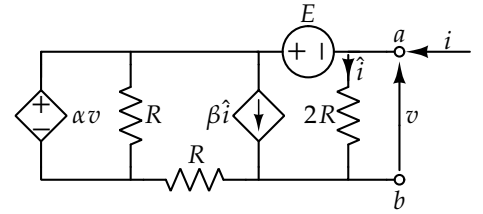


Figura 121: Es 5.2

Es. 5.3

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo.
- Si connettano al doppio bipolo i generatori di corrente A_2 e A_3 (vedi figura, in blu). Calcolare v_1 , v_2 e la potenza assorbita dal doppio bipolo P_a^{DB} .

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_2)i_1 + R_2i_2 + R_2A_1 \\ v_2 = R_2i_1 + R_2i_2 + R_2A_1 \end{cases}$$

$$v_1 = (R_1 + R_2)A_2 + R_2A_3 + R_2A_1, \quad v_2 = (A_1 + A_2 + A_3)R_1, \\ P_a^{DB} = v_1A_2 + v_2A_3]$$

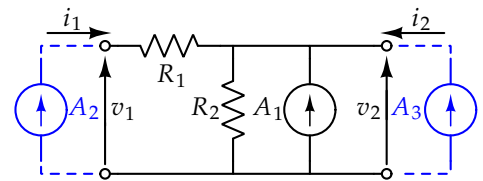


Figura 122: Es 5.3

Es. 5.4

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in tensione del doppio bipolo.
- Esistono dei valori di α per cui la rappresentazione con comando in corrente non esiste?

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 - \frac{1}{R}v_2 \\ i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 + \frac{1}{R}v_2 \end{cases}$$

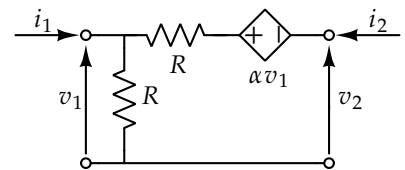


Figura 123: Es 5.4

La formulazione con controllo in corrente esiste per qualsiasi valore di α perché la matrice G è sempre invertibile]

Soluzione

LA RAPPRESENTAZIONE CON COMANDO IN TENSIONE del doppio bipolo è genericamente la seguente

$$\begin{cases} i_1 = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1 \\ i_2 = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2 \end{cases} \quad (17)$$

Tale rappresentazione può essere riscritta in forma matriciale come

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \quad (18)$$

Questa tipologia di esercizi può essere risolta in due modi

1. Metodo 1: si ricavano le correnti i_1 e i_2 in funzione delle tensioni v_1 e v_2 , si trovano quindi le due funzioni $i_1(v_1, v_2) = G_{11}v_1 + G_{12}v_2 + A_1$ e $i_2(v_1, v_2) = G_{21}v_1 + G_{22}v_2 + A_2$.
2. Metodo 2: si utilizzano le prove semplici per ricavare i parametri della rappresentazione.

Prima di procedere con l'applicazione dei metodi descritti, è utile osservare che nel doppio bipolo composto considerato (figura 123) non vi sono generatori indipendenti. Siccome il vettore \mathcal{A} è dovuto agli effetti dei generatori indipendenti, in questo caso sarà nullo e pertanto non verrà considerato nella risoluzione.

METODO 1: è necessario imporre le tensioni ad entrambe le porte, ciò equivale a collegare due generatori indipendenti di tensione, orientati opportunamente. Considerando la maglia I , in figura 124, si osserva che la tensione ai capi del resistore evidenziato in rosso è pari a v_1 . Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente si ottiene che è attraversato da una corrente pari a $\frac{v_1}{R}$ (presa con il verso indicato in figura 124). Considerando la figura 125 si può impostare un sistema sfruttando la KCL al taglio nodale al nodo A e la KVL-II alla maglia II . Si ottiene dunque

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - \frac{v_1}{R} = 0 \\ v_1 - v_2 - \alpha v_1 + Ri_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

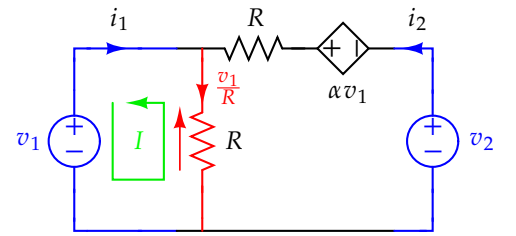


Figura 124: Doppio bipolo con imposte le tensioni di lato. In verde è evidenziata la maglia considerata.

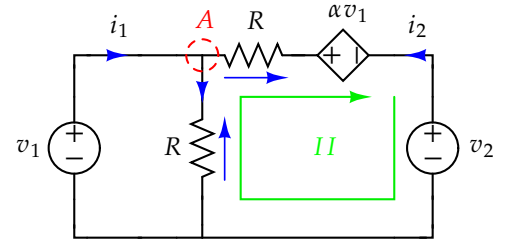


Figura 125: Doppio bipolo con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

Risolvendo il sistema 19 si ricavano le equazioni costitutive del doppio bipolo nella rappresentazione con comando in tensione

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 - \frac{1}{R}v_2 \\ i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 + \frac{1}{R}v_2 \end{cases} \quad (20)$$

METODO 2: è necessario eseguire due tipologie di prove semplici per calcolare i parametri della rappresentazione con comando in tensione.

1. Passivazione delle sorgenti indipendenti interne al doppio bipolo composito e quindi passivazione, alternata, delle tensioni di controllo alle porte, per calcolare i parametri della matrice \mathcal{G} .
2. Passivazione delle tensioni alle porte del doppio bipolo composito per calcolare il vettore \mathcal{A} .

Nell'esercizio in questione la seconda tipologia di prove semplici non è necessaria in quanto $A_1 = A_2 = 0$.

Per calcolare i parametri della matrice \mathcal{G} è dunque necessario eseguire due prove semplici. La prima consiste nella passivazione della tensione v_2 per calcolare G_{11} e G_{21} , si calcola quindi

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} \quad \text{e} \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} \quad (21)$$

Considerando il circuito in figura 123, passivando la tensione di porta v_2 e imponendo la tensione v_1 all'altra porta, si ottiene il circuito in figura 126. Considerando la KVL-II alla maglia I si può calcolare la tensione sul resistore evidenziato in arancione. Sfruttando la sua equazione costitutiva si può ricavare la corrente che lo attraversa. Utilizzando la KCL al taglio nodale al nodo A e la KVL-II alla maglia II , è possibile impostare un sistema da cui si ricava che

$$i_1 = \frac{2-\alpha}{R}v_1 \quad \text{e} \quad i_2 = -\frac{1-\alpha}{R}v_1 \quad (22)$$

Considerando le prove semplici 21 si conclude che

$$G_{11} = \left. \frac{i_1}{v_1} \right|_{v_2=0} = \frac{2-\alpha}{R} \quad \text{e} \quad G_{21} = \left. \frac{i_2}{v_1} \right|_{v_2=0} = -\frac{1-\alpha}{R} \quad (23)$$

Per eseguire la seconda prova semplice è necessario passivare la tensione v_1 per calcolare G_{12} e G_{22} , si calcola quindi

$$G_{12} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad \text{e} \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} \quad (24)$$

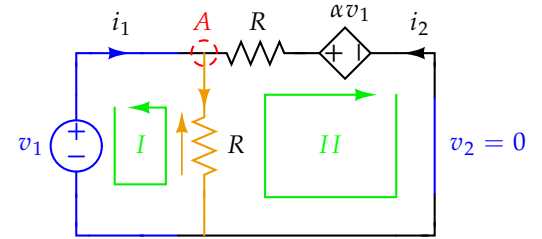


Figura 126: Doppio bipolo con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) considerati.

Considerando il circuito in figura 123, passivando la tensione di porta v_1 e imponendo la tensione v_2 all'altra porta, si ottiene il circuito in figura 127. Da cui si ricava

$$i_1 = -\frac{1}{R}v_2 \quad \text{e} \quad i_2 = \frac{1}{R}v_2 . \quad (25)$$

Considerando le prove semplici 24 si conclude che

$$G_{21} = \left. \frac{i_1}{v_2} \right|_{v_1=0} = -\frac{1}{R} \quad \text{e} \quad G_{22} = \left. \frac{i_2}{v_2} \right|_{v_1=0} = \frac{1}{R} . \quad (26)$$

Attraverso l'utilizzo delle prove semplici si conclude che i parametri per la rappresentazione con comando in corrente sono

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{2-\alpha}{R} & G_{12} &= -\frac{1}{R} \\ G_{21} &= -\frac{1-\alpha}{R} & G_{22} &= \frac{1}{R} . \end{aligned}$$

CON ENTRAMBI I METODI, si ricava la seguente matrice \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \begin{bmatrix} \frac{2-\alpha}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1-\alpha}{R} & \frac{1}{R} \end{bmatrix} . \quad (27)$$

PER RISPONDERE AL SECONDO PUNTO dell'esercizio, è necessario verificare se esistono dei valori di α tali per cui la matrice \mathcal{G} , ottenuta al punto precedente, risulta non invertibile. Calcolando il determinante di tale matrice si ricava che $\det(\mathcal{G}) = \frac{1}{R^2}$. Osservando che tale valore non dipende in alcun modo da α , è possibile concludere che non esistono valori di α per cui si annulla. Quindi \mathcal{G} è sempre invertibile per qualsiasi valore di α e quindi esiste sempre la rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo considerato.

Es. 5.5

Determinare i parametri della rappresentazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo. Per quali valori di β non esiste tale rappresentazione?

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto (che esiste sse $\beta \neq -1$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{R_a(R_b+R_c)+R_bR_c}{(\beta+1)(R_b+R_c)} i_1 + \frac{R_c}{R_b+R_c} v_2 \\ i_2 = -\frac{R_c(\beta+1)+R_b\beta}{(\beta+1)(R_b+R_c)} i_1 + \frac{1}{R_b+R_c} v_2 \end{cases}$$

]

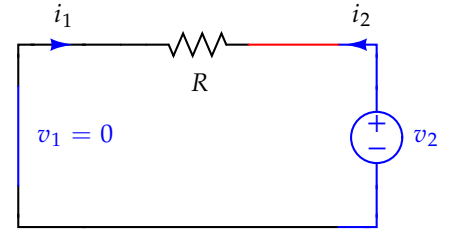


Figura 127: Ponendo $v_1 = 0$, si passiva di conseguenza il generatore pilotato di tensione. Rimane un solo resistore poichè l'altro sarebbe risultato in parallelo ad un corto circuito e quindi influente.

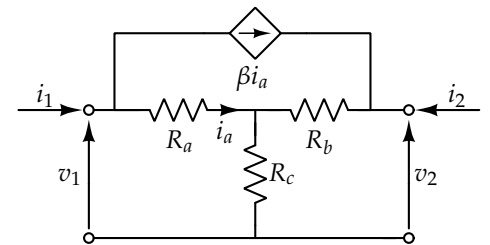


Figura 128: Es 5.5

Es. 5.6

Il doppio bipolo G è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = G_0 v_1 + 2G_0 v_2 \\ i_2 = 2G_0 v_1 + G_0 v_2 \end{cases}$$

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$. Per quali valori di r tale circuito non esiste?

Sol: $[G_{nr} = \frac{G_0(1-3G_0R)}{G_0R+1-2G_0r}, A_{nr} = 0]$. Il circuito equivalente di Norton esiste sse $r \neq \frac{G_0R+1}{2G_0}$

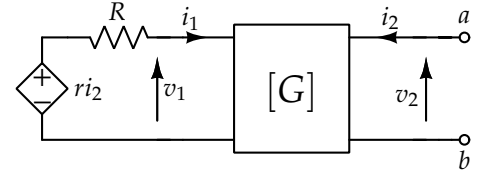


Figura 129: Es 5.6

Es. 5.7

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo.
- Esistono dei valori di α per cui la rappresentazione con comando in tensione non esiste?

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = \frac{3R}{2}i_1 + \frac{R(3\alpha+1)}{2}i_2 \\ v_2 = \frac{R}{2}i_1 + \frac{R(\alpha+1)}{2}i_2 \end{cases}$$

La formulazione con controllo in tensione esiste per qualsiasi valore di α perché la matrice R è sempre invertibile]

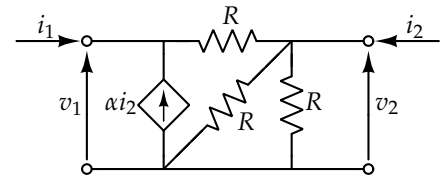


Figura 130: Es 5.7

Es. 5.8

Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo. Per quali valori di α tale rappresentazione non esiste?

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto (che esiste sse $\alpha \neq -3$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

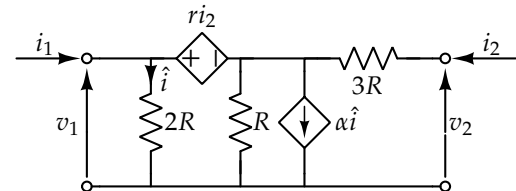


Figura 131: Es 5.8

$$\begin{cases} v_1 = \frac{2R}{3+\alpha} i_1 + \frac{2(r+R)}{3+\alpha} i_2 \\ v_2 = \frac{2R}{3+\alpha} i_1 + \frac{11R+3\alpha R-r(1+\alpha)}{3+\alpha} i_2 \end{cases}$$

]

Es. 5.9

Dati: $R = 1\Omega$, $\beta = 3$.

- Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione.
- Connettere la porta 1 ad un generatore di tensione $E = 4V$ e la porta 2 ad un circuito aperto (vedi figura, in blu). Calcolare, i_1 , v_2 e P_e^E .

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = 2v_1 - v_2 \\ i_2 = -4v_1 + 4v_2 \end{cases}$$

$$i_1 = 4A, v_2 = 4V, P_e^E = 16W]$$

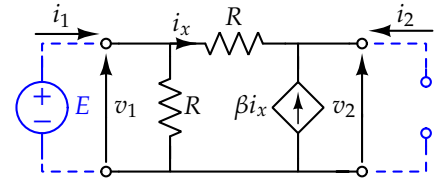


Figura 132: Es 5.9

Es. 5.10

Dati: $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = R_3 = 5\Omega$, $g_m = 0.2S$.

- Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione.
- Esiste la prima formulazione ibrida?
- Collegare alla porta 1 un generatore di corrente $A = 0.2A$ e alla porta 2 un resistore $R_4 = 5\Omega$ (vedi figura, in blu). Determinare la potenza assorbita dal doppio bipolo P_a^{DB} .

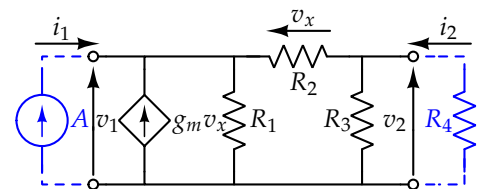


Figura 133: Es 5.10

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{6}v_1 \\ i_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 \end{cases}$$

La formulazione ibrida del primo tipo esiste perché $g_{11} \neq 0$. $P_a^{DB} = 0.208\text{W}$

Es. 5.11

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = (R_1 + R_2)i_1 \\ i_2 = \beta R_2 i_1 + \frac{1}{R_3}v_2 \end{cases}$$

]

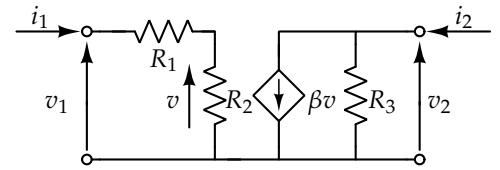


Figura 134: Es 5.11

Es. 5.12

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = ri_1 + v_2 \\ i_2 = \frac{r-R}{R}i_1 + \frac{gR+2}{R}v_2 - \frac{E}{R} \end{cases}$$

]

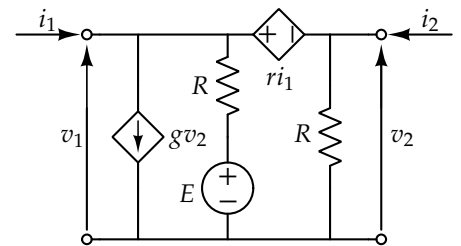


Figura 135: Es 5.12

Es. 5.13

Determinare i parametri della formulazione ibrida del secondo tipo.

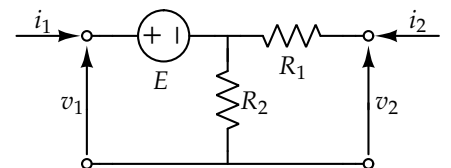


Figura 136: Es 5.13

Sol: [Il doppio bipolo H' ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{R_2} v_1 - i_2 - \frac{E}{R_2} \\ v_2 = v_1 + R_1 i_2 - E \end{cases}$$

]

Es. 5.14

Il doppio bipolo T è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = k v_2 \\ i_1 = g v_2 - k i_2 \end{cases}$$

- Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th} i + E_{th}$.
- Per quali valori di k non è definito il circuito equivalente di Norton?

Sol: [$R_{th} = \frac{kR}{gR+k}$, $E_{th} = \frac{k^2 E}{gR+k}$, il circuito equivalente di Norton esiste sse $k \neq 0$]

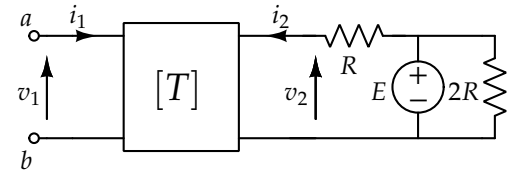


Figura 137: Es 5.14

Es. 5.15

Dati: $i_2 = 0A$, $R = 1\Omega$, $E = 1V$.

Il doppio bipolo R è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} i_1 + r_{12} i_2 = i_1 + 2i_2 \\ v_2 = r_{21} i_1 + r_{22} i_2 = 3i_1 + 4i_2 \end{cases}$$

Determinare v_2 .

Sol: [$v_2 = 1.5V$]

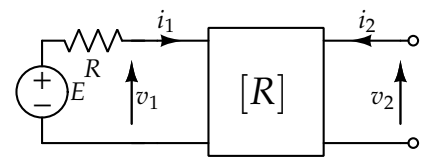


Figura 138: Es 5.15

Es. 5.16

Dati: $E = 13\text{V}$, $R = 4\Omega$, $\alpha = 0.5$.

Il doppio bipolo G è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}v_2 = v_1 + v_2 \\ i_2 = g_{21}v_1 + g_{22}v_2 = 2v_1 + 2v_2 \end{cases}$$

Determinare P_e^E .

Sol: $[P_e^E = 39\text{W}]$

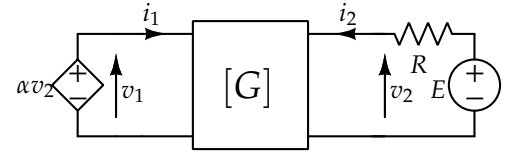


Figura 139: Es 5.16

Es. 5.17

Dati: $R = 1\Omega$.

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente (matrice R).
- Calcolare v_1 e v_2 quando la porta 1 viene connessa ad un resistore $R_2 = 0.5\Omega$ e la porta 2 viene connessa ad un generatore ideale di corrente che impone $i_2 = 4\text{A}$.

Sol: $[r_{11} = r_{22} = 1.5\Omega, r_{12} = r_{21} = -0.5\Omega, v_1 = -0.5\text{V}, v_2 = 5.5\text{V}]$

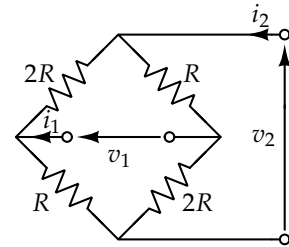


Figura 140: Es 5.17

Es. 5.18

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in tensione (matrice G).
- Per quali valori di α e β non esiste la formulazione ibrida del secondo tipo?

Sol: $[g_{11} = \frac{1}{2R}, g_{12} = -\frac{\alpha}{2R}, g_{21} = \frac{\beta}{2R}, g_{22} = \frac{2-\alpha\beta}{2R}]$, la formulazione ibrida del secondo tipo esiste sse $\alpha\beta \neq 2$

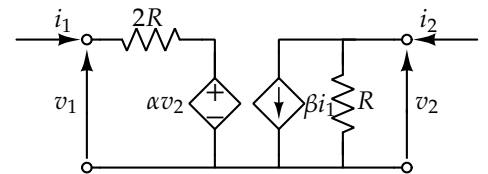


Figura 141: Es 5.18

Es. 5.19

- Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo (matrice H). Per quali valori di α e β tale formulazione non esiste?
- Si chiuda con un corto circuito la porta 2 ($v_2 = 0$) e in questa condizione si determini il circuito equivalente di Norton alla porta 1, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: [Il doppio bipolo ottenuto (che esiste sse $\alpha \neq -1$) è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + \beta v_2 \\ i_2 = -\frac{\alpha}{1+\alpha} i_1 + A \end{cases}$$

$$G_{nr} = \frac{1}{R_1}, A_{nr} = 0]$$

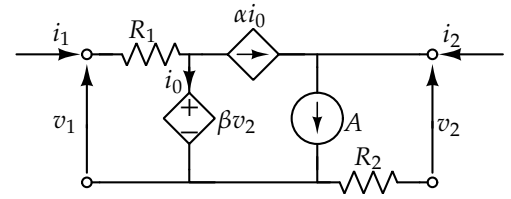


Figura 142: Es 5.19

Es. 5.20

Il doppio bipolo H è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \beta i_2 \\ v_2 = r i_2 + \alpha v_1 \end{cases}$$

Determinare:

- $R_2 \mid P_a^{R_2}$ è massima.
- $P_a^{R_2}_{max}$.

Sol: $[R_2 = (2R_1 + r - \alpha\beta R_1), P_a^{R_2}_{max} = \frac{(\alpha R_1 A)^2}{4(2R_1 + r - \alpha\beta R_1)}]$

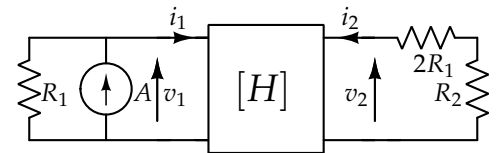


Figura 143: Es 5.20

Es. 6.1

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $A = 2A$.

Determinare la potenza assorbita da ciascun componente. Verificare i risultati ottenuti col teorema di Tellegen.

Sol: $[P_a^A = 0W, P_a^{R_1} = 4W, P_a^{R_2} = 4W, P_a^{AO} = -8W]$

Soluzione

LE EQUAZIONI COSTITUTIVE DELL'AMPLIFICATORE OPERAZIONALE IDEALE, con le grandezze riportate in figura 145, sono le seguenti

$$\begin{cases} I_- = I_+ = 0 \\ V_0 = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Considerando la KVL-II alla maglia I (in figura 145) si nota che la tensione ai capi del generatore indipendente di corrente è nulla ($v_A = 0V$). Si può pertanto concludere che anche la potenza assorbita da tale bipolo è nulla: $P_a^A = 0W$. Valutando la KCL al taglio nodale al nodo α , si ricava che la corrente che attraversa il resistore di resistenza R_1 , come indicata in figura, è pari ad A . Sfruttando l'equazione costitutiva del resistore, si calcola che la tensione ai suoi capi, come indicata in figura, è pari a $R_1 A$. Si ricava quindi che la potenza assorbita da tale bipolo è

$$P_a^{R_1} = v_1 i_1 = R_1 A^2 = 4W \quad (29)$$

Considerando la KVL-II alla maglia II , del circuito in figura 146, si ricava che la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 , come indicata in figura, è pari a $R_1 A$. Calcolando la corrente che attraversa tale bipolo, usando la sua equazione costitutiva, si può trovare la potenza assorbita, che risulta essere

$$P_a^{R_2} = v_2 i_2 = \frac{R_1^2 A^2}{R_2} = 4W \quad (30)$$

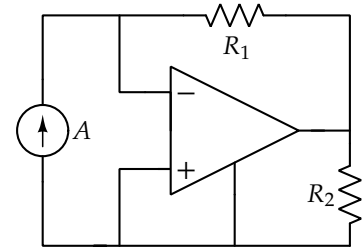


Figura 144: Es 6.1

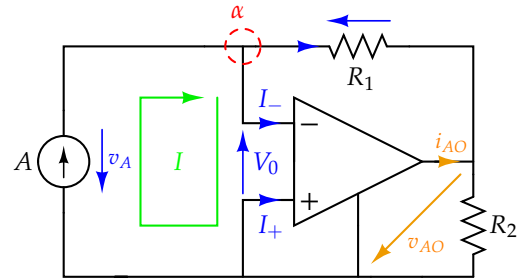


Figura 145: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati. Sono indicate (in arancione) le grandezze necessarie per il calcolo della potenza dell'amplificatore operazionale. I versi non sono scelti secondo la convenzione degli utilizzatori e risulta $P_a^{AO} = (-v_{AO})(-i_{AO})$.

Valutando la KCL al taglio nodale al nodo β e la KVL-II alla maglia III (in figura 147), si ricavano la corrente e la tensione dell'amplificatore operazionale

$$i_{AO} = -\left(A + \frac{R_1 A}{R_2}\right) \quad \text{e} \quad v_{AO} = R_1 A \quad (31)$$

(secondo i versi indicati in figura 145, in arancione). Quindi, la potenza assorbita risulta essere

$$P_a^{AO} = (-v_{AO})(-i_{AO}) = \left(R_1 + \frac{R_1^2}{R_2}\right) A^2 = -8W \quad (32)$$

Si può verificare la validità del risultato ottenuto usando il teorema di Tellegen, infatti

$$P_a^{AO} + P_a^{R_2} + P_a^{R_1} + P_a^A = 0 \quad (33)$$

IN ALTERNATIVA, anziché calcolare P_a^{AO} ricavando i_{AO} e v_{AO} dal circuito, si sarebbe potuto usare il teorema di Tellegen. In questo modo, conoscendo la potenza assorbita da tutti gli altri componenti, si poteva ricavare quella assorbita dall'amplificatore operazionale a partire dall'equazione 33, da cui si conclude che

$$P_a^{AO} = -P_a^{R_2} - P_a^{R_1} - P_a^A = -8W \quad (34)$$

Es. 6.2

Dati: $R = 10\Omega$, $A = 0.1A$, $E = 1V$.

Determinare v_0 , i_0 e la potenza erogata dall'amplificatore operazionale.

Sol: [$v_0 = -3V$, $i_0 = 0.5A$, $P_e^{AO} = 1.5W$]

Es. 6.3

Determinare la tensione v_0 applicando il principio di sovrapposizione degli effetti.

Sol: [$v_0 = (E_2 - E_1) \frac{R_2}{R_1}$]

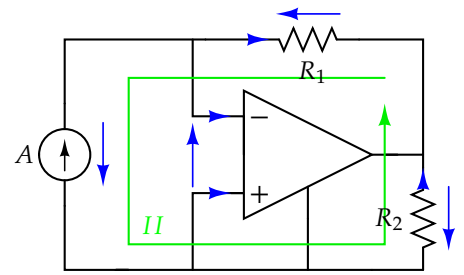


Figura 146: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) considerata.

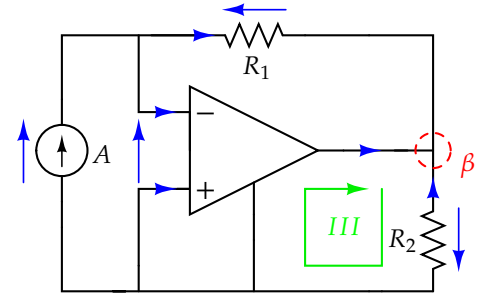


Figura 147: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

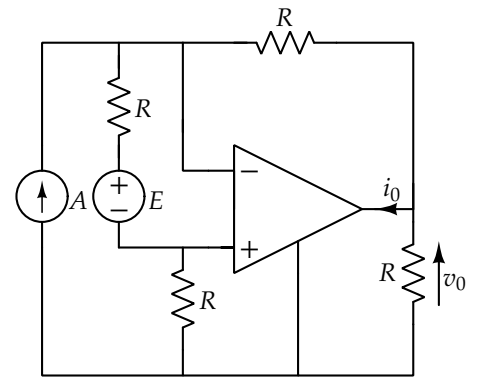
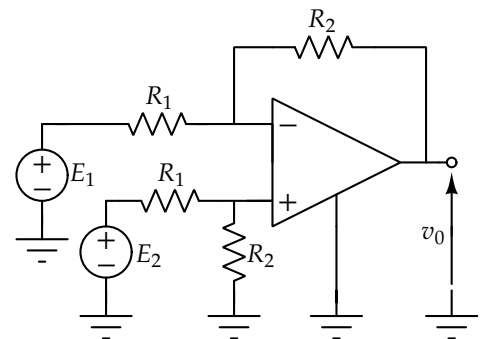


Figura 148: Es 6.2



Es. 6.4

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: $[R_{th} = \frac{4}{3}R, E_{th} = \frac{E}{3}]$

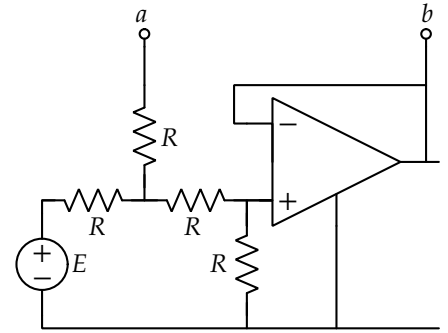


Figura 150: Es 6.4

Es. 6.5

Determinare i_y e v_x .

Sol: $[i_y = 0, v_x = \frac{E-nAR}{1+n^2}]$

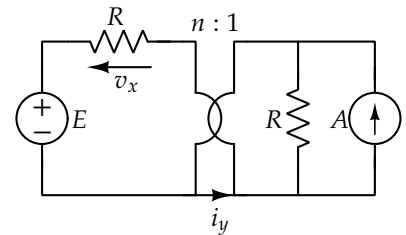


Figura 151: Es 6.5

Soluzione

IL TRASFERITORE IDEALE DI POTENZA È UN DOPPIO BIPOLO caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive (le grandezze sono riferite alla figura 152)

$$\begin{cases} v_1 = nv_2 \\ i_1 = -\frac{1}{n}i_2 \end{cases} \quad (35)$$

Come suggerisce il nome, il trasferitore ideale di potenza è un componente inerte. In altre parole assorbe tanta potenza quanta ne eroga (così che la potenza assorbita netta sia nulla).

SI OSSERVA INNANZITUTTO CHE LA CORRENTE i_y È NULLA. Per convincersene si disegni una superficie limite per le KCL che inglobi E , R ed il lato sinistro del trasferitore ideale di potenza tagliando quindi solo il corto circuito. Dato che i_y sarà la sola corrente uscente da tale superficie, si deduce che $i_y = 0$. Pertanto è possibile non considerare, durante la risoluzione, il corto circuito da essa attraversato. Si rammenta che tale corto circuito ha la funzione di rendere connesso il grafo del circuito (lo si verifichi per esercizio).

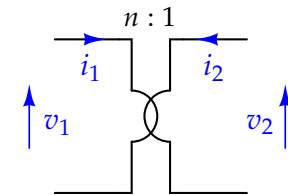


Figura 152: Trasferitore ideale di potenza con evidenziati i versi delle correnti e delle tensioni descritte in convenzione degli utilizzatori.

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 153) si ricava che la corrente che attraversa il resistore a destra (evidenziato in arancione in figura 153) è pari a $A - i_2$. Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente si ricava che la tensione ai suoi capi (con il verso preso come in figura 153) è

$$R(A - i_2) . \quad (36)$$

Usando l'equazione costitutiva del trasformatore ideale di potenza, sostituendo i_2 nell'equazione 36, si ricava che la tensione è pari a $R(A + ni_1)$.

Dalla KVL-II alla maglia I in figura 153 si ricava che

$$v_2 = R(A + ni_1) . \quad (37)$$

Sfruttando l'equazione costitutiva del trasformatore ideale di potenza, sostituendo v_2 nell'equazione 37 si ottiene che

$$v_1 = nR(A + ni_1) . \quad (38)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II in figura 154 si evince che $v_x = E - v_1$. Sostituendo quindi l'equazione 38 in quella appena ottenuta, si ricava che

$$v_x = E - nR(A + ni_1) . \quad (39)$$

Mettendo a sistema l'equazione 39 con l'equazione costitutiva del resistore (evidenziato in arancione in figura 154), si ricava il sistema risolutivo

$$\begin{cases} v_x = E - nR(A + ni_1) \\ v_x = Ri_1 \end{cases} \quad (40)$$

Da cui si conclude che

$$v_x = \frac{E - nAR}{1 + n^2} . \quad (41)$$

IN ALTERNATIVA è possibile risolvere l'esercizio calcolando il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$ (in figura 155) e utilizzando il partitore di tensione.

Si inizia sostituendo il bipolo evidenziato in rosso (figura 155) con il suo circuito equivalente di Thévenin. Si ottiene, ai morsetti $a-b$, il bipolo in figura 156. Sfruttando la sua equazione costitutiva è possibile calcolare la tensione ai capi del resistore (evidenziato in arancione in figura 156) e, attraverso la KVL-II alla maglia I , si ricava che

$$v_2 = AR - Ri_2 . \quad (42)$$

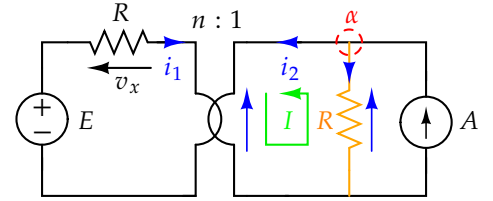


Figura 153: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

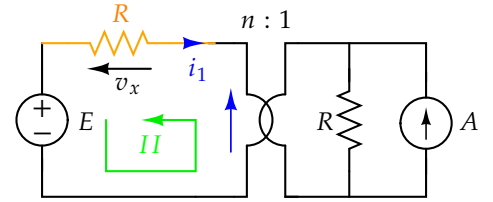


Figura 154: Circuito con evidenziata la maglia (in verde) considerata.

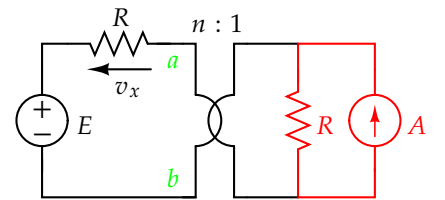


Figura 155: Circuito con evidenziati (in verde) i morsetti $a-b$ e (in rosso) il bipolo che verrà sostituito con il suo equivalente di Thévenin.

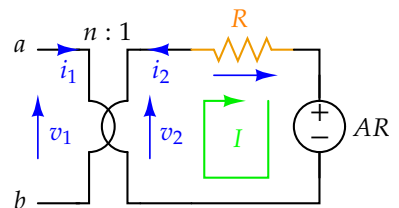


Figura 156: Bipolo con evidenziata (in verde) la maglia utilizzata.

Sostituendo le equazioni costitutive del trasformatore ideale di potenza (equazioni 35) nell'equazione 42, si ricava l'equazione del circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$

$$v_1 = \underbrace{n^2 R}_{R_{th}} i_1 + \underbrace{nAR}_{E_{th}} . \quad (43)$$

Si può quindi sostituire, ai morsetti $a-b$, il circuito equivalente di Thévenin, con i parametri appena calcolati. Si ottiene il circuito in figura 157.

Considerando il generatore indipendente di tensione equivalente ai due presenti, è possibile ricavare, usando il partitore di tensione, $v_x = \frac{E - nAR}{1 + n^2}$.

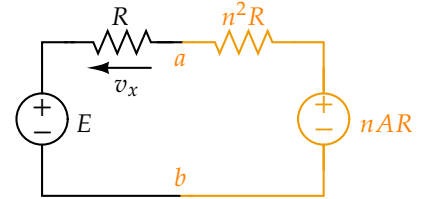


Figura 157: Circuito ottenuto sostituendo l'equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$ (in arancione).

Es. 6.6

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $i = G_{nr}v + A_{nr}$.

Sol: $[G_{nr} = \frac{\alpha n + 1}{Rn^2}, A_{nr} = -A]$

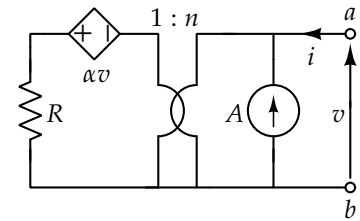


Figura 158: Es 6.6

Es. 6.7

Dati: $n_1 = 4$, $n_2 = 2$, $R = 1\Omega$.

- Determinare i parametri della rappresentazione con comando in corrente del doppio bipolo in figura.
- Determinare v_1 e i_2 quando la porta 1 è a vuoto e la porta 2 è connessa ad un generatore che impone $v_2 = 2V$. Determinare la potenza assorbita dal doppio bipolo in tali condizioni.

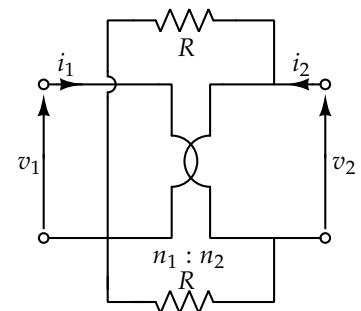


Figura 159: Es 6.7

Sol: [Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 8i_1 + 4i_2 \\ v_2 = 4i_1 + 2i_2 \end{cases}$$

$$i_2 = 1\text{A}, v_1 = 4\text{V}, P_a^{DB} = 2\text{W}]$$

Es. 6.8

Determinare la potenza erogata dall'amplificatore operazionale.

Sol: $[P_e^{AO} = \frac{E^2}{4R}]$

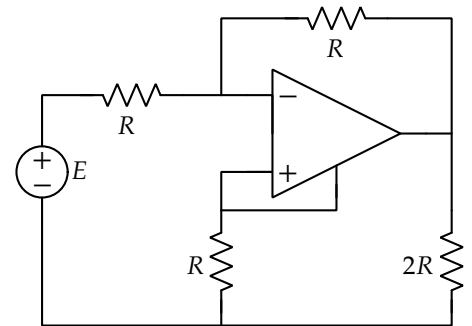


Figura 160: Es 6.8

Es. 6.9

Determinare v_{out} .

Sol: $[v_{out} = \frac{4E_1 - E_2}{5}]$

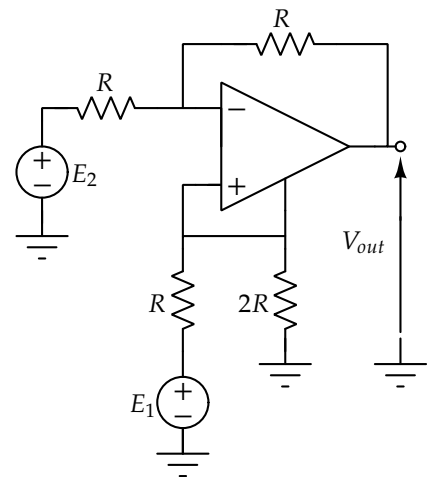


Figura 161: Es 6.9

Es. 6.10

Determinare v_0 .

Sol: $[v_0 = -\frac{R_4(R_1+R_2)}{R_1R_3}E_1 + \frac{R_3+R_4}{R_3}E_2]$

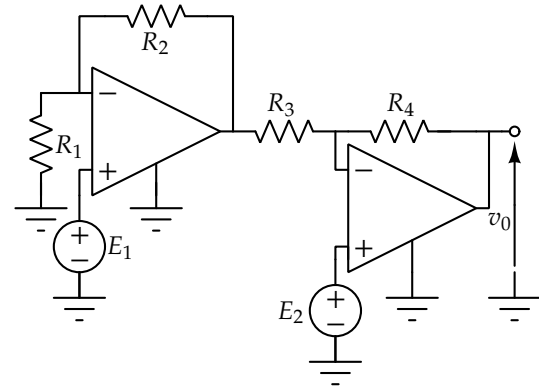


Figura 162: Es 6.10

Es. 6.11

Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = 0 \\ i_2 = -\frac{R_2+R_3}{R_2R_5}v_1 + \frac{1}{R_5}v_2 \end{cases}$$

]

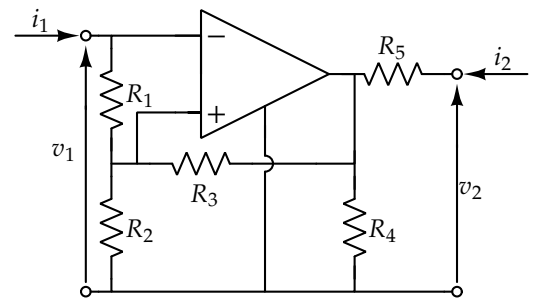


Figura 163: Es 6.11

Es. 6.12

Determinare i parametri della formulazione ibrida del secondo tipo del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo H' ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{5R}v_1 - \frac{1}{5}i_2 \\ v_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{6}{5}Ri_2 \end{cases}$$

]

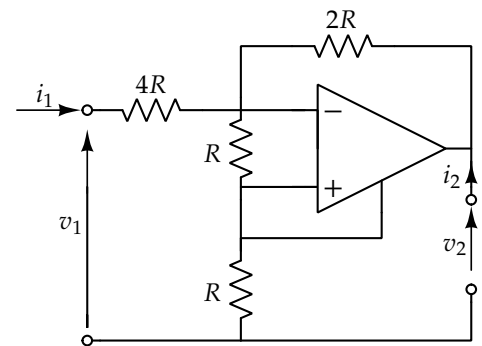


Figura 164: Es 6.12

Es. 6.13

Dati: $R = 10\Omega$, $A = 2A$, $n = 2$, $E = 20V$.

Determinare v_2 .

Sol: [$v_2 = 4V$]

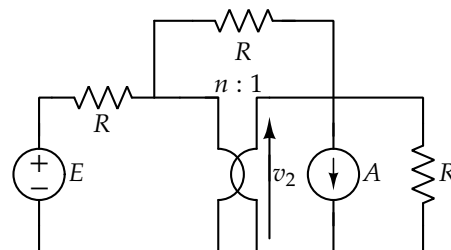


Figura 165: Es 6.13

Es. 6.14

Dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $R_3 = 6\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $E = 15V$, $n = 2$.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$R_{th} = 4\Omega$, $E_{th} = 10V$]

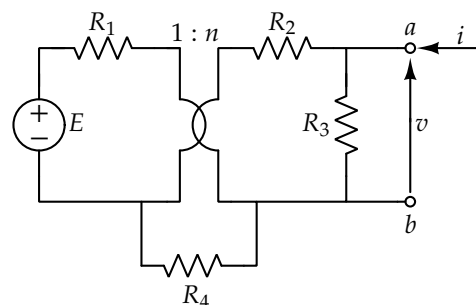


Figura 166: Es 6.14

Es. 6.15

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $v = R_{th}i + E_{th}$.

Sol: [$R_{th} = rn + R(1 + n^2)$, $E_{th} = -RAn^2$]

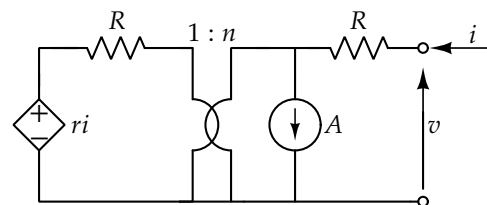


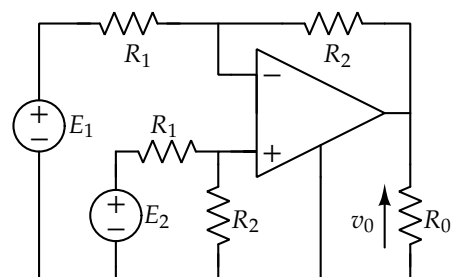
Figura 167: Es 6.15

Es. 6.16

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 9\Omega$, $R_0 = 10\Omega$, $E_1 = 1V$, $E_2 = 2V$.

Determinare v_0 , $P_a^{R_0}$, $P_e^{E_1}$ e $P_e^{E_2}$.

Sol: [$v_0 = 9V$, $P_a^{R_0} = 8.1W$, $P_e^{E_1} = -0.8W$, $P_e^{E_2} = 0.4W$]



Es. 6.17

Dati: $R = 1\Omega$, $E = 1V$.

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = i_1 \\ i_2 = -\frac{2}{3}i_1 + v_2 - 1 \end{cases}$$

]

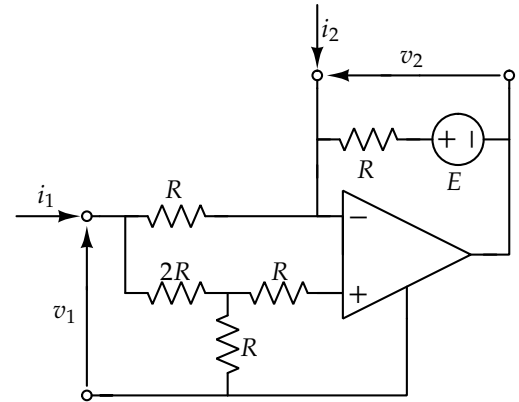


Figura 169: Es 6.17

Es. 6.18

Determinare i_1 .

Sol: $[i_1 = -\frac{E(gR+n)}{R[3+2(n+gR)n]}]$

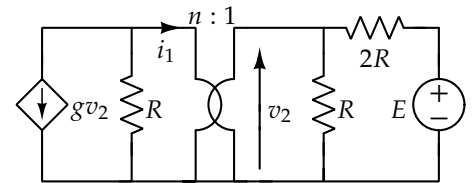


Figura 170: Es 6.18

Es. 6.19

Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo G ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} i_1 = \frac{2+3n^2}{2R}v_1 - \frac{n}{2R}v_2 - \frac{3En^2}{2R} \\ i_2 = -\frac{n}{2R}v_1 + \frac{1}{2R}v_2 + \frac{En+2AR}{2R} \end{cases}$$

]

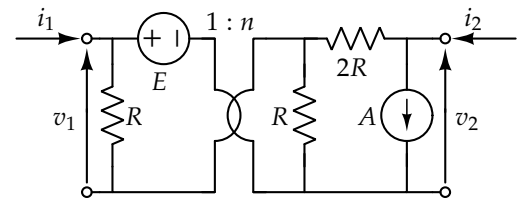


Figura 171: Es 6.19

Es. 7.1

Dati: $E = 10\text{V}$, $A = 1\text{A}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 10\Omega$.

Determinare i_3 nei seguenti modi:

- Utilizzando il metodo dell'analisi nodale.
- Sfruttando, se necessario, il principio di sovrapposizione degli effetti e la trasformazione serie/parallelo dei generatori reali.
- Ricavando il circuito equivalente di Thévenin (o Norton) rispetto a R_3 , calcolando infine i_3 .

Sol: $[i_3 = -0.25\text{A}]$

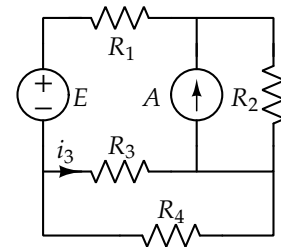


Figura 172: Es 7.1

Es. 7.2

Dati: $E_1 = 12\text{V}$, $E_2 = 20\text{V}$, $R_1 = R_2 = 4\Omega$, $L = 2\text{H}$, $i_L(0) = 3\text{A}$.

Determinare:

- $i_L(t)$.
- $v_L(t)$.
- L'energia immagazzinata nell'induttore per $t = \infty$.

Sol: $[i_L(t) = -5e^{-t} + 8, t \geq 0. v_L(t) = 10e^{-t}, t \geq 0. W_L(\infty) = 64\text{J}]$

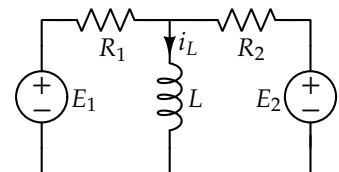


Figura 173: Es 7.2

Soluzione

IL CIRCUITO DELL'ESERCIZIO È DETTO RL DEL PRIMO ORDINE poiché contiene un solo induttore e dei resistori. Indipendentemente dalle richieste specifiche, il primo passo per risolvere questo tipo di esercizi è, tipicamente, ricavare la variabile di stato (in questo caso i_L). Per farlo occorre risolvere la cosiddetta equazione di stato, che, nel caso dei circuiti RL , ha la forma seguente

$$\frac{di_L}{dt} = \lambda i_L + u(t) . \quad (44)$$

Essa descrive l'andamento della variabile di stato in funzione del tempo.

Denominando v_L la tensione ai capi dell'induttore (con verso come in figura 174), è possibile ricavare, sfruttando la KVL-II alla maglia I (figura 174), la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 , ossia $E_1 - v_L$. Utilizzando la sua equazione costitutiva si ricava che il resistore R_1 è attraversato da una corrente pari a

$$\frac{E_1 - v_L}{R_1} . \quad (45)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II in figura 174, è possibile ricavare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 , ossia $E_2 - v_L$. Usando l'equazione costitutiva di tale componente, si ottiene che la corrente che attraversa R_2 è

$$\frac{E_2 - v_L}{R_2} . \quad (46)$$

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 174) si ricava l'equazione

$$i_L = \frac{E_1 - v_L}{R_1} + \frac{E_2 - v_L}{R_2} . \quad (47)$$

Per scrivere l'equazione di stato del circuito è necessario indicare v_L in funzione di i_L e sostituire v_L con l'equazione costitutiva dell'induttore. Seguendo questi passaggi (a partire dall'equazione 47) si ricava l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)L} i_L + \frac{E_1 R_2 + E_2 R_1}{(R_1 + R_2)L} . \quad (48)$$

Sostituendo i valori numerici si ricava

$$\frac{di_L}{dt} = -i_L + 8 . \quad (49)$$

La soluzione di un'equazione differenziale nella forma 44 è data dalla somma di due termini:

1. la soluzione dell'equazione omogenea associata $i_{L_{OA}}(t; k, \bar{t})$ (tale soluzione è della forma: $i_{L_{OA}}(t; k, \bar{t}) = ke^{\lambda(t-\bar{t})}$);

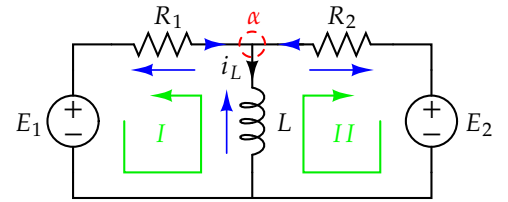


Figura 174: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzati.

2. l'integrale particolare $i_{LIP}(t)$ (la sua espressione dipende dalla funzione nota $u(t)$).

Sommando tali termini si ottiene dunque che

$$i_L(t; k, \bar{t}) = i_{LOA}(t; k, \bar{t}) + i_{LIP}(t) = ke^{\lambda(t-\bar{t})} + i_{LIP}(t) . \quad (50)$$

I parametri incogniti della funzione riportata sopra si possono ricavare solo se si conosce il valore di i_L ad un certo istante di tempo $t = \bar{t}$.

L'equazione 49 è nella forma 44, con i parametri

- frequenza libera (o pulsazione naturale): $\lambda = -1$ (siccome λ ha segno negativo, il circuito è asintoticamente stabile);
- ingresso: $u(t) = 8$;
- condizione iniziale della corrente che attraversa l'induttore in $\bar{t} = 0$.

POICHÉ $u(t)$ È UNA COSTANTE, allora anche l'integrale particolare sarà costante. Per comodità nei calcoli si pone $i_{LIP}(t) = a$, con a costante. Sostituendo $i_L = a$ nell'equazione 49 e risolvendo, si ricava

$$i_{LIP}(t) = a = 8 . \quad (51)$$

Sostituendo il valore di $i_{LIP}(t)$ appena ricavato, quello di \bar{t} e quello di λ nell'equazione 50, si ricava

$$i_L(t) = ke^{-t} + 8 . \quad (52)$$

Sapendo che $i_L(0) = 3A$, si può ricavare dall'equazione 52 (considerando $t = \bar{t} = 0$) che

$$i_L(0) = ke^{-0} + 8 = 3 , \quad (53)$$

da cui si conclude che $k = -5$. In questo modo è stata trovata la soluzione dell'equazione differenziale 49, che è

$$i_L(t) = -5e^{-t} + 8, \quad t \geq 0 . \quad (54)$$

Sostituendo la funzione 54 nell'equazione costitutiva dell'induttore, si ricava che

$$v_L(t) = 10e^{-t}, \quad t \geq 0 . \quad (55)$$

È importante sottolineare che nelle soluzioni appena trovate si deve indicare $t \geq 0$. Ciò è essenziale poiché nulla ci è lecito sapere di i_L prima dell'istante iniziale fornito.

L'ENERGIA IMMAGAZZINATA nell'induttore può essere calcolata usando la formula

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i_L(t)^2, \quad (56)$$

perciò

$$W_L(\infty) = \frac{1}{2} L i_L(\infty)^2 = \frac{1}{2} L \left[\lim_{t \rightarrow +\infty} (-5e^{-t} + 8) \right]^2 = 64 \text{ J}.$$

Si conclude quindi che l'energia immagazzinata nell'induttore per $t = \infty$ è pari a $W_L(\infty) = 64 \text{ J}$.

SAREBBE STATO POSSIBILE TROVARE L'INTEGRALE PARTICOLARE IN MODO DIVERSO. Se il circuito è asintoticamente stabile e gli ingressi sono costanti, il termine $i_{L_{IP}}(t)$ può essere ricavato considerando la rete a regime. In tale situazione la corrente i_L è costante (ha esaurito il transitorio) e quindi, considerando l'equazione costitutiva dell'induttore, si ricava che $v_L(\infty) = 0$. Ciò significa che tale componente può essere sostituito con un corto circuito.

Considerando il circuito in figura 173 a regime, si ricava quello in figura 175. Valutando le KVL-II alle maglie I e II si ricavano le tensioni ai capi dei due resistori di resistenza, rispettivamente, R_1 e R_2 . Sfruttando le equazioni costitutive di tali componenti si può calcolare la corrente che li percorre. Attraverso la KCL al taglio nodale al nodo α si ricava che

$$i_{L_{IP}}(t) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}. \quad (57)$$

Sostituendo i valori numerici, si ottiene esattamente lo stesso valore di $i_{L_{IP}}(t)$ ricavato in precedenza. L'equazione 57 poteva essere ricavata sostituendo nell'equazione 47 il valore di v_L a regime (ossia $v_L(\infty) = 0$).

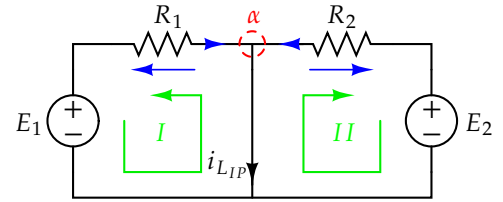


Figura 175: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzati.

Es. 7.3

Dati: $E = 12 \text{ V}$, $R_1 = 4 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 12 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $v_C(0) = 3 \text{ V}$.

Determinare:

- $v_x(t)$.
- L'energia immagazzinata nel condensatore per $t = \infty$.

Sol: $[v_x(t) = -3e^{-500t} + 6, t \geq 0. W_C(\infty) = 18 \mu\text{J}]$

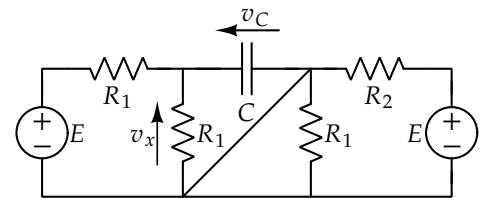


Figura 176: Es 7.3

Es. 7.4

Dati: $v_C(\bar{t}) = v_{C_0}$.

Determinare:

- $v_C(t)$ per $t \geq \bar{t}$.
- Quanto vale $v_C(\infty)$ se $r > R_1 + R_2$ e se $r < R_1 + R_2$?

Sol: $[v_C(t) = (v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2})e^{\frac{r-R_2-R_1}{R_1R_2C}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2}, t \geq \bar{t}$. Se $r < R_1 + R_2$ allora $v_C(\infty) = \frac{AR_1R_2}{r-R_1-R_2}$, altrimenti $v_C(\infty)$ diverge (il circuito diventa instabile)]

Soluzione

IL CIRCUITO DELL'ESERCIZIO È DETTO RC DEL PRIMO ORDINE poiché contiene un solo condensatore e dei resistori. L'equazione di stato di questa tipologia di circuiti ha la forma seguente

$$\frac{dv_C}{dt} = \lambda v_C + u(t) \quad (58)$$

Essa descrive l'andamento delle variabili di stato in funzione del tempo.

Valutando la KVL-II alla maglia I in figura 178, si ricava la tensione sul resistore di resistenza R_2 (secondo il verso indicato in figura 178). Sfruttando l'equazione di stato di tale componente, si può calcolare la corrente che lo attraversa, ricavando quindi che

$$i_2 = \frac{v_C}{R_2} \quad (59)$$

Considerando la KVL-II alla maglia II in figura 178 si può calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 , ossia $ri_2 - v_C$. Usando l'equazione costitutiva del componente, si calcola che la corrente da cui è attraversato è pari a

$$\frac{ri_2 - v_C}{R_1} \quad (60)$$

Denominando i_C la corrente che scorre nel condensatore, si ricava dalla KCL al taglio Ω (figura 179), l'equazione

$$i_2 + i_C + A = \frac{ri_2 - v_C}{R_1} \quad (61)$$

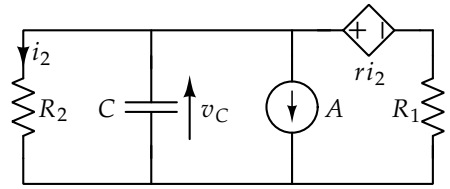


Figura 177: Es 7.4

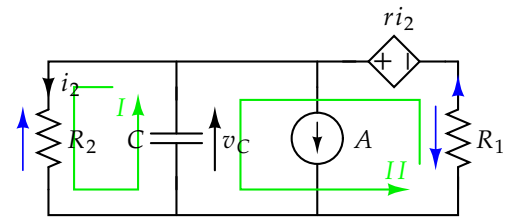


Figura 178: Circuito con evidenziate le maglie (in verde) utilizzate.

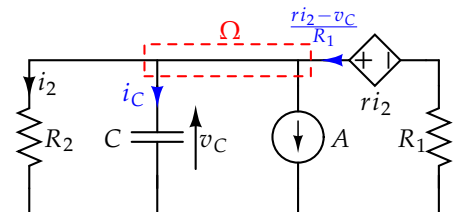


Figura 179: Circuito con evidenziato il taglio (in rosso) utilizzato.

Sostituendo nell'equazione sopra il valore di i_2 calcolato in funzione di v_C (eq. 59) e sostituendo i_C con l'equazione costitutiva del condensatore, si ricava l'equazione di stato

$$\frac{dv_C}{dt} = \underbrace{\frac{r - R_1 - R_2}{CR_1R_2}}_{\lambda} v_C - \underbrace{\frac{A}{C}}_{u(t)} . \quad (62)$$

L'equazione 62 è nella forma 58, con i parametri

- frequenza libera (o pulsazione naturale): $\lambda = \frac{r - R_1 - R_2}{CR_1R_2}$;
- ingresso: $u(t) = -\frac{A}{C}$;
- istante di tempo in cui è noto il valore della tensione iniziale ai capi del condensatore: \bar{t} .

LA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE 62 è del tipo

$$v_C(t) = ke^{\lambda(t-\bar{t})} + v_{C_{IP}}(t) . \quad (63)$$

Poiché $u(t)$ è una costante, allora anche l'integrale particolare dell'equazione differenziale 62 sarà una costante. Per comodità nei calcoli si consideri $v_{C_{IP}} = a$, con a costante. Sostituendo $v_C = a$ nell'equazione di stato e risolvendo, si ricava

$$v_{C_{IP}}(t) = a = -\frac{u(t)}{\lambda} = \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (64)$$

Sostituendo il valore di $v_{C_{IP}}(t)$ appena calcolato e quello di λ nella funzione 63, si ottiene

$$v_C(t) = ke^{\frac{r-R_1-R_2}{CR_1R_2}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (65)$$

Sapendo, dal testo dell'esercizio, che $v_C(\bar{t}) = v_{C_0}$, sostituendo nell'equazione 65 si ricava che

$$k = v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (66)$$

In conclusione, la soluzione dell'equazione differenziale 62 è

$$v_C(\bar{t}) = \left(v_{C_0} - \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} \right) e^{\frac{r-R_1-R_2}{CR_1R_2}(t-\bar{t})} + \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2}, \quad t \geq \bar{t} . \quad (67)$$

Si osserva che il segno di λ , e quindi il comportamento della rete, dipende esclusivamente dal segno del termine $r - R_1 - R_2$. Se $r > R_1 + R_2$, allora λ è positiva e il circuito è instabile. Quindi $v_C(\infty)$ diverge. Se $r < R_1 + R_2$, allora λ è negativa, quindi

$$v_C(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} v_C(t) = \frac{AR_1R_2}{r - R_1 - R_2} . \quad (68)$$

In questo caso il circuito è asintoticamente stabile e, siccome gli ingressi sono costanti, è possibile ricavare facilmente $v_{C_{IP}}(t)$ considerando la rete a regime.

In tale situazione la tensione $v_C(\infty)$ è costante e quindi la corrente $i_C(\infty)$ è nulla. Ciò significa che il condensatore, a regime, si comporta come un circuito aperto. Quindi, considerando il circuito in figura 177 a regime, si ottiene quello in figura 180. Ricavando da quest'ultimo la tensione v_C , si ottiene lo stesso valore di $v_{C_{IP}}(t)$ già calcolato in precedenza.

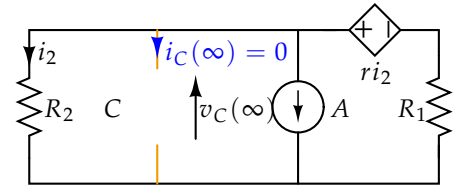


Figura 180: Rete a regime con il condensatore sostituito con un circuito aperto (arancione).

Es. 7.5

Dati: $i_L(\bar{t}) = I_{L0}$, $e(t) = \bar{k}t$ ($[\bar{k}] = [\frac{V}{s}]$)

Determinare $i_L(t)$ per $t \geq \bar{t}$.

Sol: $[i_L(t) = [I_{L0} - \frac{\bar{k}(R_1\alpha + R_2)}{R_1R_2}(\frac{L}{R_1} - \bar{t})]e^{-\frac{R_1}{L}(t-\bar{t})} + \frac{\bar{k}(R_1\alpha + R_2)}{R_1R_2}(\frac{L}{R_1} - t), t \geq \bar{t}]$

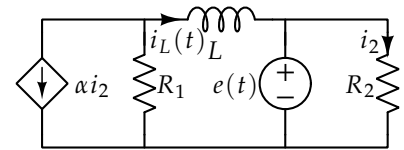


Figura 181: Es 7.5

Es. 7.6

Dati: $v_C(t_0) = V_{C0}$

Determinare:

- I valori di α che assicurano la stabilità asintotica del circuito.
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$ per $t \geq t_0$.

Sol: [Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha > -\frac{R_1 + R_2 n^2}{R_2 n}$. $v_C(t) = V_{C0} e^{-\frac{t-t_0}{C(R_2 n^2 + R_2 n \alpha + R_1)}}$, $t \geq t_0$]

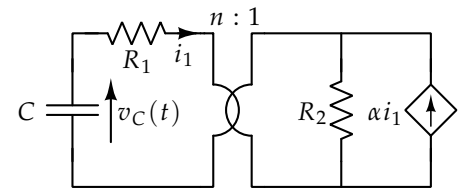


Figura 182: Es 7.6

Es. 7.7

Dati: $i_L(0) = 1\text{A}$

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $i_L(t)$, per $t \geq 0$.
- Determinare la potenza assorbita dall'amplificatore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1}{L}i_L(t) - \frac{E}{L} \cdot i_L(t) = \left(1 + \frac{E}{R_1}\right)e^{-\frac{R_1}{L}t} - \frac{E}{R_1}, t \geq 0,\right.$
 $\left.P_a^{AO}(\infty) = -\frac{E^2(R_1+R_2)(R_1+R_2+R_3)}{R_1^2 R_3}\right]$

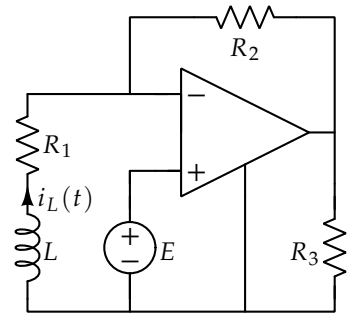


Figura 183: Es 7.7

Es. 7.8

Determinare la corrente i (hp: $\alpha \neq 4$).

Sol: $\left[i = -\frac{E_1 - E_2 - 3RA}{R(4 - \alpha)}\right]$

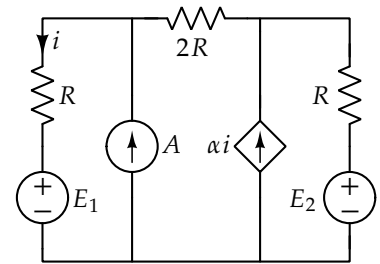


Figura 184: Es 7.8

Es. 7.9

Dati: $v_C(0) = V_{C_0}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$ per $t \geq 0$ e l'energia immagazzinata nel condensatore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: $\left[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{(R_1+R_2)C}v_C(t) - \frac{E+AR_2}{(R_1+R_2)C} \cdot \text{Il circuito è stabile per qualsiasi valore di } \alpha. v_C(t) = (V_{C_0} + E + AR_2)e^{-\frac{t}{(R_1+R_2)C}} - (E + AR_2), t \geq 0. W_C(\infty) = \frac{1}{2}C(E + R_2A)^2\right]$

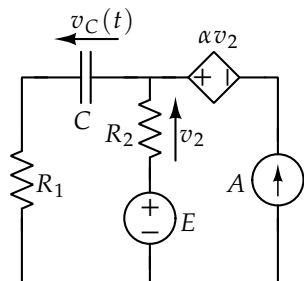


Figura 185: Es 7.9

Es. 7.10

Dati: $i_L(0) = I_{L_0}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ e $p_a^{R_2}(t)$.

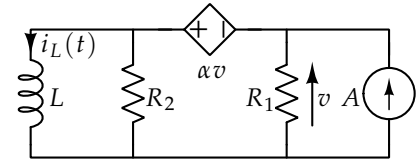


Figura 186: Es 7.10

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} i_L(t) + \frac{A R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]}\right]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha < -\frac{R_2}{R_1} - 1$ U $\alpha > -1$. $i_L(t) = (i_{L_0} - A)e^{-\frac{R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} t} + A$, $t \geq 0$. $p_a^{R_2}(t) = R_2 \left[\frac{R_1(1+\alpha)(i_{L_0}-A)}{R_1(1+\alpha)+R_2}\right]^2 e^{-\frac{2R_1 R_2 (1+\alpha)}{L[R_1(1+\alpha)+R_2]} t}$

Es. 7.11

Dati: $v_C(0) = 0$, $e(t) = E \cos(\omega t)$.Determinare: $v_C(t)$, per $t \geq 0$.

Sol: $[v_C = (\frac{E R_1}{(\omega C R_1 R_2)^2 + (R_1 + R_2)^2}) [-(R_1 + R_2) e^{-\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C} t} + (R_1 + R_2) \cos(\omega t) + (\omega R_1 R_2 C) \sin(\omega t)], t \geq 0]$

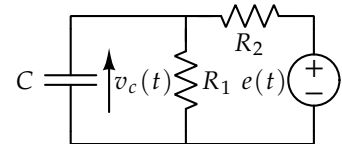


Figura 187: Es 7.11

Es. 7.12

Dati: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = R_3 = 6\text{k}\Omega$, $R_4 = 10\text{k}\Omega$, $E_1 = 10\text{V}$, $E_2 = 20\text{V}$, $L = 1\text{kH}$, $i_L(0) = 0\text{A}$.Determinare $i_L(t)$ e $i_2(t)$.

Sol: $[i_L(t) = 5(e^{-12t} - 1)10^{-3}, i_2(t) = -5(e^{-12t} + 1)10^{-3}, t \geq 0]$

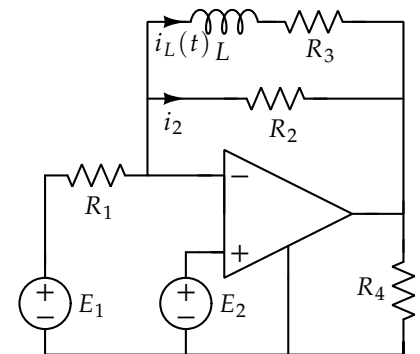


Figura 188: Es 7.12

Es. 7.13

Determinare l'equazione di stato del circuito.

Sol: $\left[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{(3+\alpha)}{RC}v_C(t) + \frac{E(\alpha+2)}{RC} \right]$

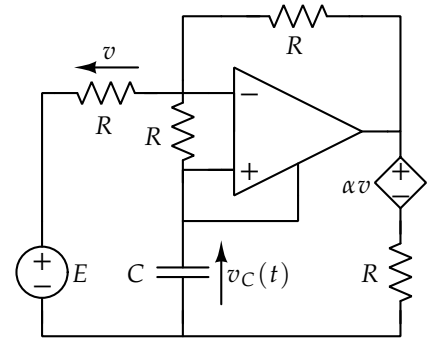


Figura 189: Es 7.13

Es. 7.14

Dati: $E = 1V$, $R = 1\Omega$, $C = 2F$. Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 1i_1 + 2i_2 \\ v_2 = 3i_1 + 4i_2 \end{cases}$$

Supponendo la tensione del condensatore $v_C(t)$ diretta come v_2 e sapendo che $v_C(0) = 0V$, determinare $v_2(t)$ e $i_2(t)$.

Sol: $[v_C(t) = -1.5e^{-0.5t} + 1.5, i_2(t) = -1.5e^{-0.5t}, t \geq 0]$

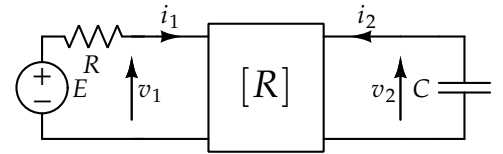


Figura 190: Es 7.14

Es. 7.15

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 4\Omega$, $E = 1V$, $n = 2$.

Determinare:

- I parametri della formulazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo in figura.
- Si supponga di connettere alla porta 1 un generatore di corrente $A = 1A$ e alla porta 2 un induttore $L = 2mH$ (vedi figura, in blu). Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.

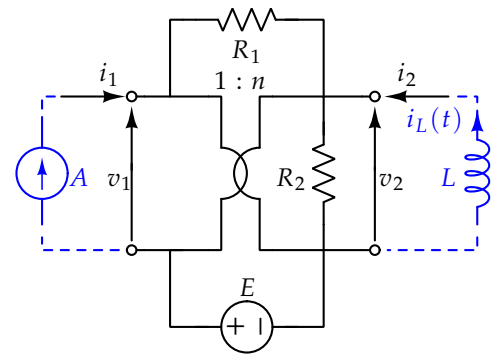


Figura 191: Es 7.15

- Supponendo la corrente dell'induttore $i_L(t)$ diretta come i_2 e sapendo che $i_L(0) = 0\text{A}$, determinare $i_2(t)$ e $v_2(t)$.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = 0.5v_2 \\ i_2 = -0.5i_1 + 0.5v_2 - 0.5 \end{cases}$$

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -10^3 i_L(t) - 10^3, i_2(t) = e^{-10^3 t} - 1, v_2(t) = 2e^{-10^3 t}, t \geq 0]$$

Es. 7.16

Dati: $i_L(0) = 1\text{A}$. Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ e l'energia immagazzinata nell'induttore per $t \rightarrow \infty$.

Sol: [$\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{(\alpha-3)R}{2L} i_L(t)$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha < 3$. $i_L(t) = e^{\frac{(\alpha-3)R}{2L} t}$, $t \geq 0$. $W_L(\infty) = 0\text{J}$.]

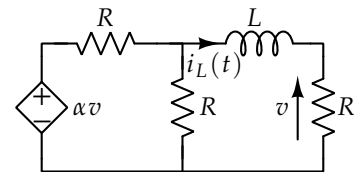


Figura 192: Es 7.16

Es. 7.17

Dati: $v_C(0) = 0\text{V}$.

Determinare: $v_0(t)$.

Sol: [$v_0(t) = \frac{6E+AR}{5} - \frac{AR+E}{5} e^{-\frac{t}{RC}}$, $t \geq 0$]

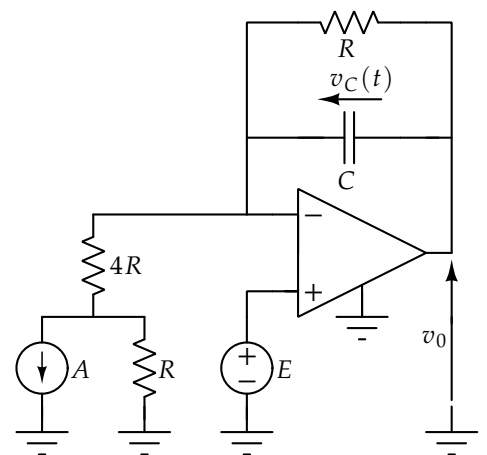


Figura 193: Es 7.17

Es. 7.18

Dati: $i_L(t_0) = 1\text{A}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di r il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ per $t \geq t_0$.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{2(R-2r)}{5L}i_L(t) + \frac{3E}{5L}]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $r < \frac{R}{2}$. $i_L(t) = (1 - \frac{3E}{2(R-2r)})e^{-\frac{2(R-2r)}{5L}(t-t_0)} + \frac{3E}{2(R-2r)}, t \geq t_0]$

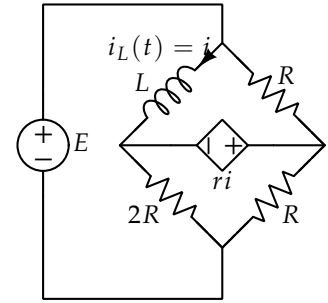


Figura 194: Es 7.18

Es. 7.19

Dati: $v_C(0) = 0\text{V}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di g il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$.

Sol: $[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{2-gR}{RC}v_C(t) + \frac{E_1(1-gR)+E_2}{RC}]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $g < \frac{2}{R}$. $v_C(t) = \frac{E_1(1-gR)+E_2}{2-gR}(1 - e^{-\frac{2-gR}{RC}t}), t \geq 0]$

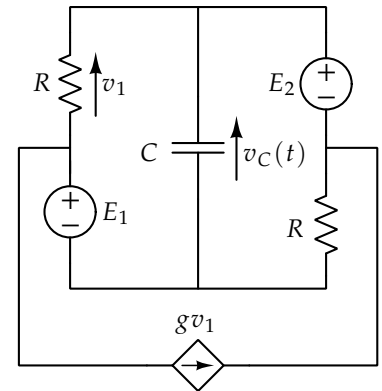


Figura 195: Es 7.19

Es. 7.20

Dati: $i_L(\bar{t}) = 1\text{A}$.

Determinare:

- $i_L(t)$.
- La potenza erogata dall'amplificatore operazionale per $t = \infty$.

Sol: $[i_L(t) = (1 - \frac{E_1-E_2}{R})e^{-\frac{R}{L}(t-\bar{t})} + \frac{E_1-E_2}{R}, t \geq \bar{t}]$. $P_e^{AO}(\infty) = \frac{(E_1-E_2)(E_1-2E_2)}{R}]$

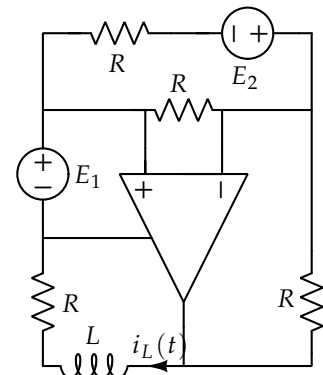


Figura 196: Es 7.20

Es. 8.1

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$, $i_L(0) = 0\text{A}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $i_L(t)$. Si ricavi $i_{L_{IP}}(t)$ mediante l'analisi fasoriale.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L(t) + \frac{e(t) R_2}{L(R_1 + R_2)} \right]$. $i_L(t) = \frac{E R_2}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} \left[-R_1 R_2 e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} + R_1 R_2 \cos(\omega t) + \omega L(R_1 + R_2) \sin(\omega t) \right], t \geq 0]$

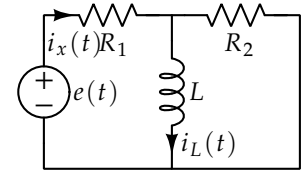


Figura 197: Es 8.1

Soluzione

PER RICAVERE L'EQUAZIONE DI STATO è necessario ragionare sul circuito. Si nomini v_L la tensione ai capi dell'induttore. Dalla KVL-II alla maglia I (figura 198) si ricava la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 , uguale a $e - v_L$. Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente, si calcola che la corrente che lo attraversa è pari a

$$\frac{e - v_L}{R_1} \quad (69)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II (figura 198) si ottiene la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 , uguale a v_L . Usando quindi la sua equazione costitutiva, si ricava che la corrente che scorre attraverso tale componente è

$$\frac{v_L}{R_2} \quad (70)$$

Attraverso la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 198), si ricava l'equazione

$$\frac{e - v_L}{R_1} = i_L + \frac{v_L}{R_2} \quad (71)$$

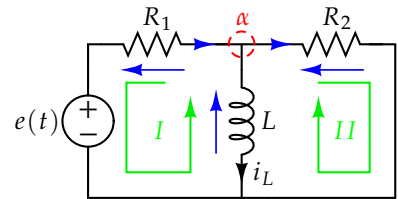


Figura 198: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) utilizzati.

da cui, sostituendo l'equazione costitutiva dell'induttore, si ottiene l'equazione di stato

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t) . \quad (72)$$

L'EQUAZIONE DI STATO DI UN CIRCUITO DEL PRIMO ORDINE (come quello in figura 197) può anche essere ricavata in un altro modo.

È possibile considerare l'induttore come se fosse collegato ad un bipolo composito.

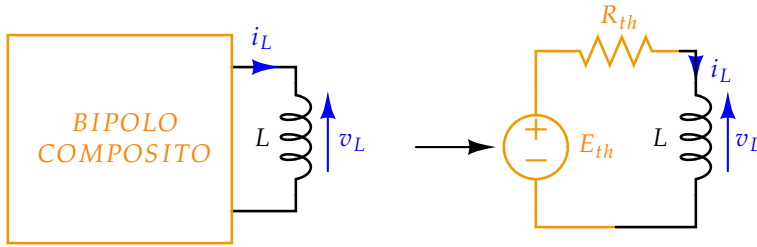


Figura 199: Sostituzione del bipolo composito a cui è collegato l'induttore con il suo circuito equivalente di Thévenin.

Procedendo come mostrato in figura, si ricava la rappresentazione equivalente di Thévenin del bipolo. Dalla KVL-II, valutata per l'unica maglia del circuito equivalente, si ottiene l'equazione

$$E_{th} - R_{th} i_L - v_L = 0 , \quad (73)$$

da cui si ricava l'equazione di stato

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_{th}}{L} i_L + \frac{E_{th}}{L} . \quad (74)$$

Si può procedere scollegando l'induttore dal circuito (in figura 197) e nominando *a-b* i morsetti a cui era collegato.

È possibile calcolare i parametri della rappresentazione equivalente di Thévenin mediante l'uso delle prove semplici. Passivando il generatore indipendente di tensione (sostituendolo con un corto circuito), si ricava il circuito in figura 200. Si osserva che i due resistori di resistenza, rispettivamente, R_1 e R_2 sono in parallelo, quindi

$$R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} . \quad (75)$$

Ponendo $i_L = 0$ si comprende, dalla KCL al taglio nodale al nodo α (in figura 201), che la corrente che scorre nei due resistori è la medesima. Pertanto è possibile calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 usando il partitore di tensione. Dalla KVL-II alla maglia *I* (in figura 201) si ricava che

$$E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t) . \quad (76)$$

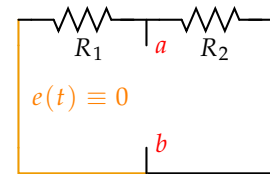


Figura 200: Risultato della passivazione delle sorgenti indipendenti nel bipolo.

Sostituendo i parametri della rappresentazione equivalente di Thévenin, appena calcolati, nell'equazione 74, si ricava l'equazione di stato

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t) . \quad (77)$$

Dopo aver ricavato l'equazione di stato, occorre calcolare la soluzione omogenea associata e l'integrale particolare $i_{LIP}(t)$. Poichè la frequenza libera λ è negativa la rete è asintoticamente stabile e, dal momento che gli ingressi sono sinusoidali, è possibile studiare il circuito in regime sinusoidale permanente mediante l'analisi fasoriale.

Attraverso l'applicazione del metodo dell'analisi fasoriale, l'analisi dei circuiti dinamici (circuiti al cui interno sono presenti condensatori e/o induttori) si riduce a quella di un circuito adinamico a parametri complessi. Infatti, ogni tensione ed ogni corrente viene rappresentata con l'opportuno fasore.

Considerando le correnti e le tensioni, presenti nell'equazione di stato (equazione 72), si ricava, passando al dominio dei fasori, quanto segue:

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} &\rightarrow j\omega \bar{i}_L \\ i_L &\rightarrow \bar{i}_L \\ e(t) = E \cos(\omega t) &\rightarrow E . \end{aligned}$$

Sostituendo tali valori nell'equazione di stato, si ricava l'equazione fasoriale

$$j\omega \bar{i}_L = -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \bar{i}_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} E . \quad (78)$$

EsPLICITANDO \bar{i}_L nell'equazione sopra, si ricava

$$\begin{aligned} \bar{i}_L &= \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)} = \\ &= \frac{R_2 E}{R_1 R_2 + j\omega L(R_1 + R_2)} \underbrace{\frac{R_1 R_2 - j\omega L(R_1 + R_2)}{R_1 R_2 - j\omega L(R_1 + R_2)}}_{\text{razionalizzazione}} = \\ &= \frac{R_2 E}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} [R_1 R_2 - j\omega L(R_1 + R_2)] . \end{aligned}$$

Per ricavare $i_{LIP}(t)$ è necessario passare dal dominio dei fasori al

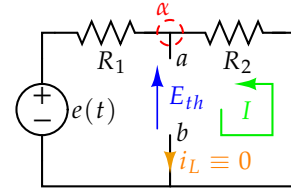


Figura 201: Circuito con evidenziato il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

dominio del tempo attraverso la relazione

$$\begin{aligned}
 i_{L_{IP}}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \bar{i}_L e^{\mathbf{j}\omega t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \bar{i}_L [\cos(\omega t) + \mathbf{j} \sin(\omega t)] \right\} = \\
 &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{R_2 E}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} [R_1 R_2 - \mathbf{j} \omega L(R_1 + R_2)] [\cos(\omega t) + \mathbf{j} \sin(\omega t)] \right\} \\
 &= \frac{R_2 E}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} [R_1 R_2 \cos(\omega t) + \omega L(R_1 + R_2) \sin(\omega t)] .
 \end{aligned}$$

A questo punto è possibile ricavare $i_L(t)$ come

$$i_L(t, k) = k e^{\lambda t} + i_{L_{IP}}(t) . \quad (79)$$

Dal testo dell'esercizio è noto che $i_L(0) = 0$ A. Considerando tale informazione e calcolando il valore assunto dalla funzione 79 per $t = 0$, si ottiene che

$$k = -i_{L_{IP}}(0) = -\frac{R_1 R_2^2 E}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} . \quad (80)$$

Sostituendo il valore appena ricavato di k nella 79 si conclude l'esercizio, ricavando

$$i_L(t) = \frac{E R_2}{(R_1 R_2)^2 + [\omega L(R_1 + R_2)]^2} \left[-R_1 R_2 e^{-\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} t} + R_1 R_2 \cos(\omega t) + \omega L(R_1 + R_2) \sin(\omega t) \right], \quad t \geq 0 . \quad (81)$$

Es. 8.2

Dati: $e(t) = E \sin(\omega t)$, $a(t) = A \cos(\omega t)$. Il doppio bipolo R ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = R i_2 \\ v_2 = -R i_1 + R i_2 \end{cases}$$

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $i_{L_{IP}}(t)$ mediante l'analisi fasoriale.

Sol: $\left[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i_L(t) + \frac{e(t) - R a(t)}{L} \right]$. $i_{L_{IP}}(t) = -\frac{1}{R^2 + (\omega L)^2} [(R^2 A + \omega L E) \cos(\omega t) - (E R - \omega L R A) \sin(\omega t)]$

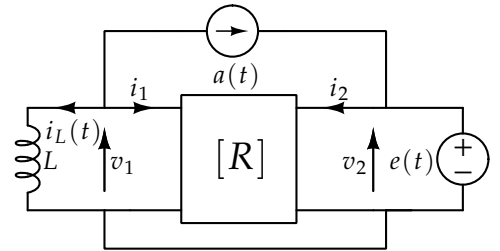


Figura 202: Es 8.2

Es. 8.3

Dati: $e(t) = E \sin(3\omega t)$, $v_C(0) = 0V$.

- Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di r il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$, $t \geq 0$.

Sol: $[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{2R+r}{R^2C}v_C(t) + \frac{R+r}{R^2C}e(t)]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $r > -2R$. $v_C(t) = \frac{(R+r)E}{(2R+r)^2 + (3\omega R^2C)^2} (3\omega R^2C e^{-\frac{2R+r}{R^2C}t} - 3\omega R^2C \cos(3\omega t) + (2R+r) \sin(3\omega t))$, $t \geq 0$

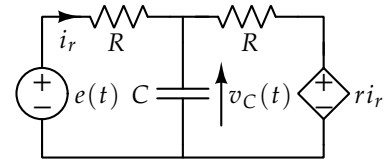


Figura 203: Es 8.3

Es. 8.4

Dati: $i_L(0) = 0A$, $a(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t)$. Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di α il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$ per $t \geq 0$.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = \frac{(\alpha-1)R}{L}i_L(t) + \frac{a(t)(\alpha-1)R}{L}]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $\alpha < 1$. $i_L(t) = (A_0 + \frac{A_1[(1-\alpha)R]^2}{[(1-\alpha)R]^2 + (\omega L)^2})e^{\frac{(\alpha-1)R}{L}t} - A_0 + \frac{A_1(\alpha-1)R}{[(1-\alpha)R]^2 + (\omega L)^2} [(1-\alpha)R \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)]$, $t \geq 0$

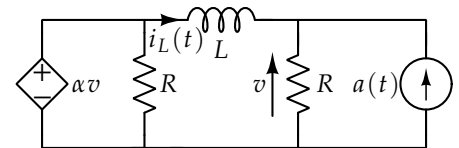


Figura 204: Es 8.4

Es. 8.5

Dati: $R = 1\Omega$, $L = 1mH$, $e(t) = 1 \cos(10^3 t)$, $a(t) = 1 \sin(2 \cdot 10^3 t)$. Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_{LIP}(t)$.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) + \frac{e(t)-Ra(t)}{L}]$. $i_{LIP}(t) = 0.5 \cos(10^3 t) + 0.5 \sin(10^3 t) + 0.4 \cos(2 \cdot 10^3 t) - 0.2 \sin(2 \cdot 10^3 t)$

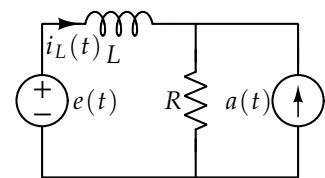


Figura 205: Es 8.5

Es. 8.6

Dati: $R_1 = R_2 = 1\text{k}\Omega$, $C_1 = 1\text{nF}$, $C_2 = 500\text{pF}$, $\omega = 1\text{Mrad/s}$.
 $L_1 = L_2 = 1\text{mH}$.

- Determinare l'impedenza equivalente Z_{eq} rispetto ai morsetti $a-b$. Di che natura è l'impedenza ottenuta?
- Determinare nuovamente Z_{eq} quando $\omega = 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty$.

Sol: $[Z_{ab}(\omega = 1\text{Mrad/s}) = 750 + j250\Omega]$. L'impedenza ottenuta è di natura ohmico-induttiva. $Z_{eq}(\omega = 0) = Z_{eq}(\omega \rightarrow \infty) = R_1 = 1\text{k}\Omega]$

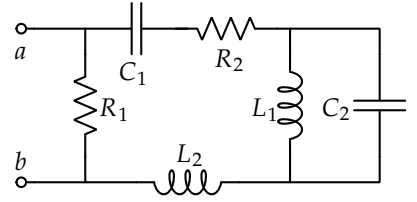


Figura 206: Es 8.6

Es. 8.7

Dati: $e(t) = E \sin(\omega t)$, $v_C(\frac{\pi}{\omega}) = 0\text{V}$. Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di r il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $v_C(t)$ per $t \geq \frac{\pi}{\omega}$.

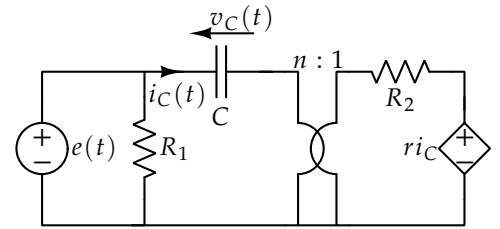


Figura 207: Es 8.7

Sol: $[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{nC(R_2n+r)}v_C(t) + \frac{e(t)}{nC(R_2n+r)}]$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $r > -R_2n$. $v_C(t) = \frac{E}{1+[\omega Cn(R_2n+r)]^2}[-\omega Cn(R_2n+r)e^{-\frac{t-\frac{\pi}{\omega}}{nC(R_2n+r)}} - \omega Cn(R_2n+r)\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]$, $t \geq \frac{\pi}{\omega}$

Es. 8.8

Dati: $L = 1\text{mH}$, $R = 1\Omega$, $e(t) = 1\text{V}$, $a(t) = 1 \sin(2 \cdot 10^3 t)$.

- Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- Calcolare $i_{L_{IP}}(t)$, $i_{R_{IP}}(t)$.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R}{L}i_L(t) + \frac{e(t)-Ra(t)}{L}]$. $i_{L_{IP}}(t) = 1 + 0.4 \cos(2 \cdot 10^3 t) - 0.2 \sin(2 \cdot 10^3 t)$, $i_{R_{IP}}(t) = 1 + 0.4 \cos(2 \cdot 10^3 t) + 0.8 \sin(2 \cdot 10^3 t)$

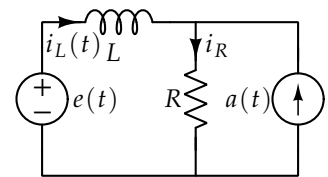


Figura 208: Es 8.8

Es. 8.9

Determinare $Z_{eq}(\omega)$ ai morsetti $a-b$. Per quale valore di ω l'impedenza equivalente è puramente resistiva? Per quali valori di ω l'impedenza equivalente è puramente induttiva?

Sol: $[Z_{eq}(w) = R_1 + j\omega L$. Tale impedenza è sempre ohmico-induttiva, tranne per $\omega = 0$ (caso in cui l'impedenza è puramente ohmica)]

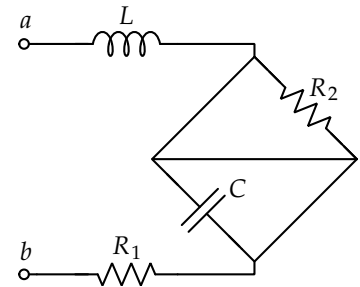


Figura 209: Es 8.9

Es. 8.10

Dati: $e(t) = E \cos(2\omega t)$, $i_L(0) = 0A$.

- Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di g il circuito è asintoticamente stabile?
- Supponendo il sistema asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$, $t \geq 0$.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R(1+n^2)}{L(1-Rgn)}i_L(t) + \frac{ne(t)}{L(1-Rgn)}$. Il sistema è asintoticamente stabile sse $g < \frac{1}{Rn}$. $i_L(t) = \frac{nE}{[R(1+n^2)]^2 + [2\omega L(1-Rgn)]^2} [-R(1+n^2)e^{-\frac{R(1+n^2)}{L(1-Rgn)}t} + R(1+n^2)\cos(2\omega t) + 2\omega L(1-Rgn)\sin(2\omega t)]$, $t \geq 0$]

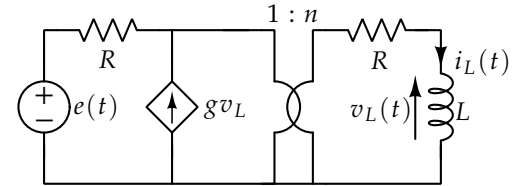


Figura 210: Es 8.10

Es. 8.11

Dati: $e(t) = E \sin(\omega t)$, $i_L(\frac{\pi}{2\omega}) = 0A$. Il doppio bipolo R è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} v_1 = ri_1 + 2ri_2 \\ v_2 = 2ri_1 + ri_2 \end{cases}$$

- Determinare l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito. Per quali valori di r è il circuito asintoticamente stabile?
- Supponendo il circuito asintoticamente stabile, determinare $i_L(t)$, $t \geq \frac{\pi}{2\omega}$.

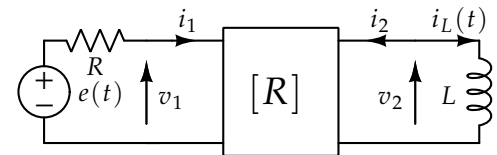


Figura 211: Es 8.11

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{r(R-3r)}{L(R+r)}i_L(t) + \frac{2re(t)}{L(R+r)}$. Il circuito è asintoticamente stabile sse $r < -R \cup 0 < r < \frac{R}{3}$. $i_L(t) = -\frac{2rE}{[(R+r)\omega L]^2 + [r(R-3r)]^2} [r(R-3r)e^{-\frac{r(R-3r)}{(R+r)L}(t-\frac{\pi}{2\omega})} + (R+r)\omega L \cos(\omega t) - r(R-3r) \sin(\omega t)]$, $t \geq \frac{\pi}{2\omega}$]

Es. 8.12

Dati: $e_1(t) = E$, $e_2(t) = E \cos(\omega t)$, $v_C(0) = 0V$.

Determinare $v_C(t)$, $t \geq 0$.

Sol: $[v_C(t) = E[-(\frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{1+(\omega CR_2)^2})e^{-\frac{t}{R_2C}} + \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{1+(\omega CR_2)^2}(\cos(\omega t) + \omega CR_2 \sin(\omega t))]$, $t \geq 0]$

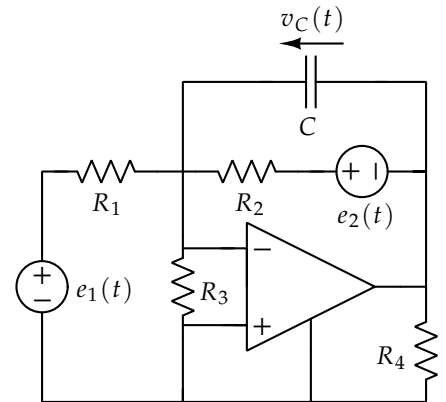


Figura 212: Es 8.12

Es. 8.13

Determinare l'impedenza equivalente $Z_{eq}(\omega)$ rispetto ai morsetti $a-b$ per $\omega = 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$.

Sol: $[Z_{eq}(\omega = 0) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, Z_{eq}(\omega \rightarrow \infty) = R_1 + R_2]$

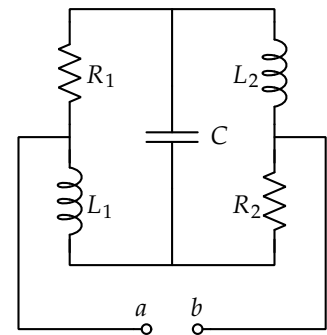


Figura 213: Es 8.13

Soluzione

L'IMPEDENZA È IL RAPPORTO tra il fasore della tensione descrittiva e quello della corrente descrittiva per un dato bipolo. È specifico per ciascun componente e nel caso, rispettivamente, di resistori, condensatori e induttori è pari a

$$Z_R(\omega) = R \in \mathbb{R}$$

$$Z_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C} \quad (82)$$

$$Z_L(\omega) = j\omega L$$

Per risolvere l'esercizio, è necessario considerare i due casi separatamente.

Se $\omega = 0$ allora, sostituendo tale valore nelle equazioni 82, si comprende che l'induttore può essere sostituito con un corto circuito poichè

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_L(\omega) = 0 \quad , \quad (83)$$

e il condensatore può essere rimpiazzato con un circuito aperto dato che

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_C(\omega) = +\infty \quad . \quad (84)$$

Dal bipolo in figura 213 si ricava dunque quello in figura 214. Osservando tale circuito si comprende che i due resistori di resistenza R_1 e R_2 sono in parallelo e quindi

$$Z_{eq}(\omega = 0) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad . \quad (85)$$

Se $\omega \rightarrow +\infty$ allora, dalle equazioni 82, si comprende che il condensatore può essere sostituito con un corto circuito dato che

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_C(\omega) = 0 \quad , \quad (86)$$

e l'induttore può essere rimpiazzato con un circuito aperto poichè

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_L(\omega) = +\infty \quad . \quad (87)$$

Dal bipolo in figura 213 si ricava dunque quello in figura 215. Osservando tale circuito si comprende che i due resistori di resistenza, rispettivamente, R_1 e R_2 sono in serie e quindi

$$Z_{eq}(\omega \rightarrow +\infty) = R_1 + R_2 \quad . \quad (88)$$

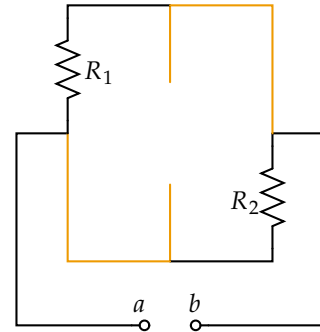


Figura 214: Bipolo ottenuto da quello in figura 213, nel caso in cui $\omega = 0$.

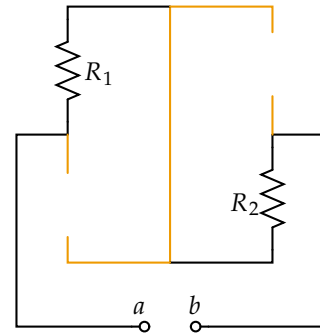


Figura 215: Bipolo ottenuto da quello in figura 213, nel caso in cui $\omega \rightarrow \infty$.

Es. 8.14

Determinare l'impedenza equivalente $Z_{eq}(\omega)$ rispetto ai morsetti $a-b$ per $\omega = 0$ e per $\omega \rightarrow \infty$.

Sol: $[Z_{eq}(\omega = 0) = R_2 - r, Z_{eq}(\omega \rightarrow \infty) = R_3]$

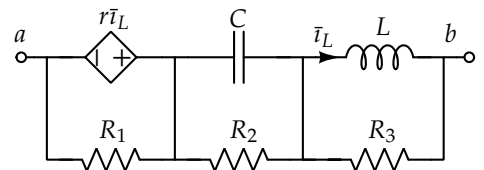


Figura 216: Es 8.14

Es. 8.15

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t)$, $v_c(0) = 0V$. (hp: $g < \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2}$)

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $v_c(t)$. Si ricavi $v_{C_{IP}}(t)$ mediante l'analisi fasoriale.

Sol: $[\frac{dv_C(t)}{dt} = -\frac{1}{C(R_1+R_2-gR_1R_2)}v_C(t) - \frac{a(t)}{C}]$. $v_c(t) = \frac{AR_{eq}}{1+(\omega CR_{eq})^2}[e^{-\frac{1}{CR_{eq}}t} - \cos(\omega t) - \omega CR_{eq} \sin(\omega t)]$, $t \geq 0$ (con $R_{eq} = R_1 + R_2 - gR_1R_2$)

Soluzione

PER RICAVERE L'EQUAZIONE DI STATO è necessario ragionare sul circuito.

Sfruttandone l'equazione costitutiva, è possibile calcolare la corrente che attraversa il resistore di resistenza R_2 . Valutando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 218), si ricava la corrente che percorre il resistore di resistenza R_1 , ossia $v/R_2 - gv$. Usando l'equazione costitutiva del resistore, si ottiene che la tensione ai suoi capi è pari a

$$\left(\frac{R_1 - gR_1R_2}{R_2}\right)v. \quad (89)$$

Considerando la KVL-II alla maglia I (figura 219), si ottiene

$$v_C = v + \left(\frac{R_1 - gR_1R_2}{R_2}\right)v. \quad (90)$$

Da tale equazione è possibile calcolare la tensione v in funzione della variabile di stato, si ricava infatti che

$$v = \frac{R_2}{R_1 + R_2 - gR_1R_2}v_C. \quad (91)$$

Dalla KCL al taglio nodale al nodo β (figura 218), nominando i_C la corrente che attraversa il condensatore, si ottiene l'equazione

$$a(t) + i_C + \frac{v}{R_2} = 0, \quad (92)$$

da cui, sostituendo il valore della tensione v calcolato in precedenza e l'equazione costitutiva del condensatore, si ricava l'equazione di stato

$$\frac{dv_C}{dt} = -\underbrace{\frac{1}{C(R_1 + R_2 - gR_1R_2)}}_{\lambda} v_C - \underbrace{\frac{a(t)}{C}}_{u(t)}. \quad (93)$$

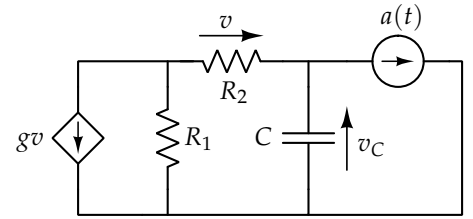


Figura 217: Es 8.15

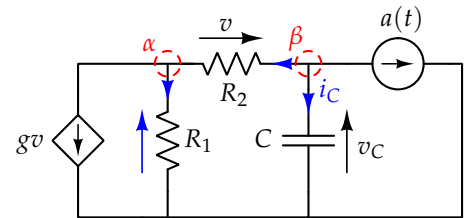


Figura 218: Circuito con evidenziati (in rosso) i tagli nodali considerati.

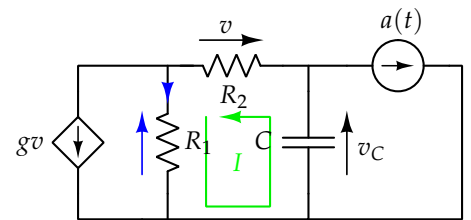


Figura 219: Circuito con evidenziata (in verde) la maglia considerata.

Il circuito è asintoticamente stabile solo se $\lambda < 0$, ossia quando

$$C(R_1 + R_2 - gR_1R_2) < 0 \rightarrow g < \frac{R_1 + R_2}{R_1R_2} . \quad (94)$$

Tale condizione è verificata poiché è data come ipotesi nel testo dell'esercizio. A questo punto, siccome la rete è asintoticamente stabile e gli ingressi sono sinusoidali (alla stessa frequenza), si può calcolare $v_{C_{IP}}(t)$ mediante l'analisi fasoriale. Passando al dominio dei fasori, l'equazione di stato diventa

$$\mathbb{j}\omega\bar{v}_C = -\frac{1}{C(R_1 + R_2 - gR_1R_2)}\bar{v}_C - \frac{A}{C} . \quad (95)$$

Rinominando R_{eq} il termine $R_1 + R_2 - gR_1R_2$, per comodità di notazione, ed esplicitando il fasore \bar{v}_C dall'equazione 95, si ricava che

$$\begin{aligned} \bar{v}_C &= -\frac{AR_{eq}}{1 + \mathbb{j}\omega CR_{eq}} = -\frac{AR_{eq}}{1 + \mathbb{j}\omega CR_{eq}} \underbrace{\frac{1 - \mathbb{j}\omega CR_{eq}}{1 - \mathbb{j}\omega CR_{eq}}}_{\text{razionalizzazione}} = \\ &= -\frac{AR_{eq}(1 - \mathbb{j}\omega CR_{eq})}{1 + (\omega CR_{eq})^2} . \end{aligned}$$

Passando dal dominio dei fasori a quello del tempo per ricavare $v_{C_{IP}}(t)$, si ottiene

$$\begin{aligned} v_{C_{IP}}(t) &= \text{Re} \left\{ \bar{v}_C e^{\mathbb{j}\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ \bar{v}_C [\cos(\omega t) + \mathbb{j} \sin(\omega t)] \right\} = \\ &= \text{Re} \left\{ -\frac{AR_{eq}(1 - \mathbb{j}\omega CR_{eq})}{1 + (\omega CR_{eq})^2} [\cos(\omega t) + \mathbb{j} \sin(\omega t)] \right\} \\ &= -\frac{AR_{eq}}{1 + (\omega CR_{eq})^2} [\cos(\omega t) + \omega CR_{eq} \sin(\omega t)] . \end{aligned}$$

A questo punto è possibile ricavare v_C nella forma

$$v_C(t, k) = ke^{\lambda t} + v_{C_{IP}}(t) . \quad (96)$$

Dal testo dell'esercizio è noto che $v_C(0) = 0 \text{ V}$. Considerando tale informazione e calcolando il valore assunto dalla funzione 96 per $t = 0$, si ottiene che

$$k = -v_{C_{IP}}(0) = \frac{AR_{eq}}{1 + (\omega CR_{eq})^2} . \quad (97)$$

Sostituendo il valore appena ricavato di k nella 96, si conclude l'esercizio, ricavando

$$v_C(t) = \frac{AR_{eq}}{1 + (\omega CR_{eq})^2} [e^{-\frac{1}{CR_{eq}}t} - \cos(\omega t) - \omega CR_{eq} \sin(\omega t)] , t \geq 0 . \quad (98)$$

Es. 9.1

Dati: $R = 1\Omega$, $L_1 = 1\text{mH}$, $L_2 = 2\mu\text{H}$, $C_1 = 1\text{mF}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$.

Determinare $Z_{ab}(\omega)$ alle seguenti pulsazioni:

- $\omega_1 = 1\text{krad/s}$ (cosa succede a Z_1 ?).
- $\omega_2 = 500\text{krad/s}$ (cosa succede a Z_2 ?).

Sol: [$Z_{ab}(\omega_1) = 1\Omega$ (per $\omega = \omega_1$, Z_1 entra in risonanza), $Z_{ab}(\omega_2) = 1 + j500\Omega$ (per $\omega = \omega_2$, Z_2 entra in risonanza)]

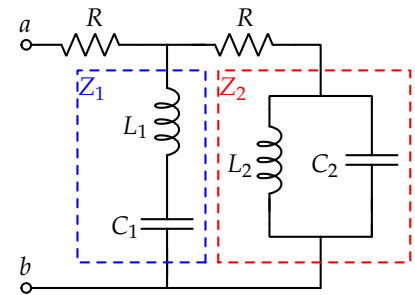


Figura 220: Es 9.1

Es. 9.2

Dati: $\bar{a} = 5$.

Determinare il fasore corrente \bar{i} . Supponendo $\omega = 1\text{krad/s}$ e il fasore \bar{a} espresso rispetto al valore massimo, ricavare $i(t)$.

Sol: [$\bar{i} = \frac{5}{2}(1 - j1)$. $i(t) = \frac{5}{2}(\cos(10^3t) + \sin(10^3t))$]

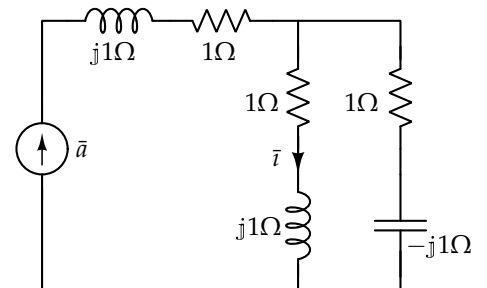


Figura 221: Es 9.2

Es. 9.3

Dati: $\bar{e} = 2 + j1$.

Determinare il fasore tensione \bar{v} . Supponendo $\omega = 1\text{krad/s}$ e il fasore \bar{e} espresso rispetto al valore massimo, ricavare $v(t)$.

Sol: [$\bar{v} = j2$. $v(t) = -2\sin(10^3t)$]

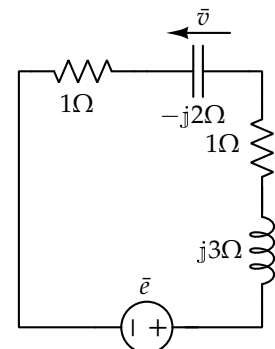


Figura 222: Es 9.3

Es. 9.4

Dati: $L = 10\text{mH}$, $C = 5\text{mF}$, $R = 2\Omega$, $\omega = 100\text{rad/s}$, $a(t) = \sqrt{2}\cos(\omega t + 45^\circ)$, $e(t) = 2\sin(\omega t - 90^\circ)$. Hp: il circuito opera in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_{C_2}(t)$.

Sol: $[v_{C_2}(t) = -2\cos(\omega t)]$

Soluzione

IL CIRCUITO OPERA IN REGIME SINUSOIDALE PERMANENTE. Pertanto è possibile passare dal dominio del tempo a quello dei fasori. In tale regime è comunque possibile applicare le stesse tecniche di risoluzione dei circuiti in corrente continua.

Si osserva subito che il condensatore e l'induttore, a sinistra nel circuito in figura 223, sono tra loro in serie. Dunque è possibile sostituirli con un bipolo avente impedenza equivalente. Poiché tali componenti hanno impedenza con parte reale nulla (resistenza nulla), allora se ne considera solamente la parte immaginaria che è pari a

$$j(X_C + X_L) \quad . \quad (99)$$

Dalla KVL-II alla maglia I (figura 224) è possibile ricavare la tensione ai capi del resistore. Sfruttando l'equazione fasoriale costitutiva di tale componente, si calcola che la corrente che lo percorre è pari a $\frac{\bar{v}_{C_2}}{R}$.

Attraverso l'uso dell'equazione fasoriale costitutiva, si può calcolare il valore della corrente che scorre nel condensatore (a destra nel circuito). Valutando la KCL al taglio Ω (figura 225), si ricava che la corrente che scorre nel ramo serie, tra il generatore indipendente di tensione e l'impedenza equivalente, vale

$$\bar{a} + \bar{v}_{C_2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_C} \right) \quad . \quad (100)$$

Considerando la KVL-II alla maglia II (figura 224), si ricava l'equazione risolvibile

$$\bar{e} = \bar{v}_{C_2} + j(X_C + X_L) \left[\bar{a} + \bar{v}_{C_2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX_C} \right) \right] \quad . \quad (101)$$

È necessario calcolare il valore numerico di ciascun fasore che compare nell'equazione 101. Svolgendo i calcoli si ricava che le reattanze

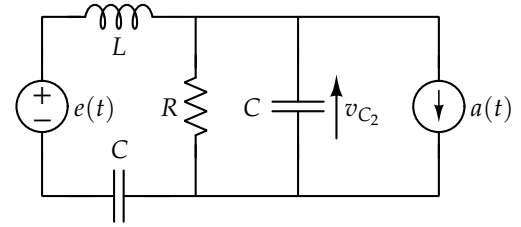


Figura 223: Es 9.4

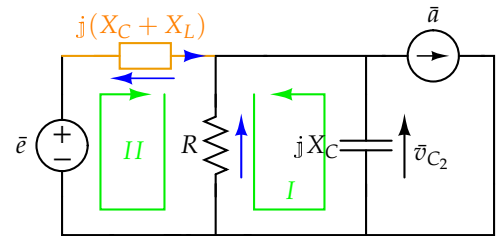


Figura 224: Circuito con evidenziate (in verde) le maglie considerate.

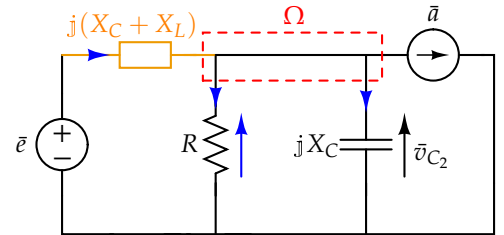


Figura 225: Circuito con evidenziato (in rosso) il taglio considerato.

valgono

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -2\Omega$$

$$X_L = \omega L = 1\Omega .$$

I fasori relativi ai generatori indipendenti si possono calcolare nel modo seguente

$$\bar{a} = \sqrt{2} (\cos(45^\circ) + j \sin(45^\circ)) = 1 + j1A , \quad (102)$$

per calcolare il valore numerico del fasore \bar{e} è possibile portare la funzione $e(t)$ nella forma $e(t) = E \cos(\omega t + \phi)$. Per fare ciò si procede nel modo seguente

$$e(t) = 2 \sin(\omega t - 90^\circ) = 2 \cos(\omega t - 180^\circ) = -2 \cos(\omega t) , \quad (103)$$

si ricava quindi che $\bar{e} = -2V$. Sostituendo il valore dei fasori appena calcolato nell'equazione 101 ed esplicitando rispetto al fasore \bar{v}_{C_2} , si ottiene

$$\bar{v}_{C_2} = -2V . \quad (104)$$

Si conclude l'esercizio calcolando $v_{C_2}(t)$

$$\begin{aligned} v_{C_2}(t) &= \text{Re} \left\{ \bar{v}_{C_2} e^{j\omega t} \right\} = \text{Re} \left\{ -2 [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \right\} = \\ &= -2 \cos(\omega t) \\ &= 2 \cos(\omega t + 180^\circ) . \end{aligned}$$

IN ALTERNATIVA, sarebbe stato possibile calcolare \bar{v}_{C_2} mediante il teorema di Millman.

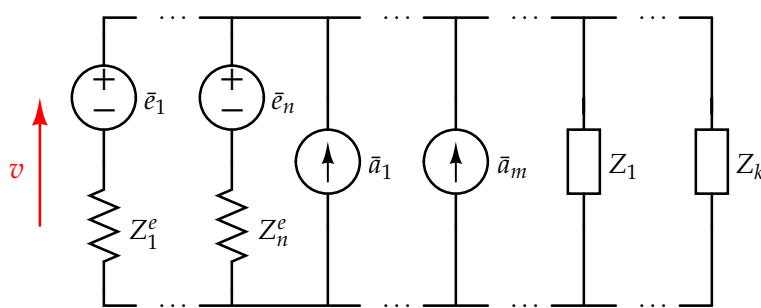


Figura 226: Schematizzazione del modello circuitale a cui è possibile applicare il teorema di Millman.

Tale teorema si applica ai circuiti bi-nodali (in continua o descritti mediante i fasori se in regime sinusoidale permanente), come quello indicato in figura 226, avente n generatori reali di tensione (formati

cioè da un generatore indipendente di tensione in serie ad un'impedenza), m generatori indipendenti di corrente e k impedenze, tutti in parallelo tra di loro. In tal caso, è possibile calcolare la tensione \bar{v} con la formula

$$\bar{v} = \frac{\frac{\bar{e}_1}{Z_1^e} + \dots + \frac{\bar{e}_n}{Z_n^e} + \bar{a}_1 + \dots + \bar{a}_m}{\frac{1}{Z_1^e} + \dots + \frac{1}{Z_n^e} + \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_k}} \quad (105)$$

È possibile ricavare tale formula a partire dal circuito in figura 226 sfruttando la trasformazione serie/parallelo dei generatori reali di tensione e di corrente.

Considerando il circuito in figura 224, si può dunque applicare il teorema di Millman e ricavare

$$\bar{v}_{C_2} = \frac{\frac{\bar{e}}{j(X_L + X_C)} - \bar{a}}{\frac{1}{j(X_L + X_C)} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_C}} \quad (106)$$

Risolvendo l'equazione sopra e sostituendovi i valori numerici, si ricava che

$$\bar{v}_{C_2} = -2V \quad (107)$$

Per terminare l'esercizio si procede come già illustrato in precedenza.

Es. 9.5

Dati: $a(t) = A \cos(\omega(t - \frac{T}{4}))$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ rad/s, Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare: $i_R(t)$.

$$\text{Sol: } [i_R(t) = \frac{A}{[(R+r)\omega C]^2 + 1} [(R+r)\omega C \cos(\omega t) - 1 \sin(\omega t)]]$$

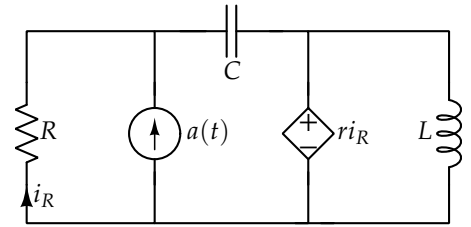


Figura 227: Es 9.5

Es. 9.6

Dati: $\bar{e} = j1$, $\bar{a} = 1$, $X_L = 8\Omega$, $X_C = -4\Omega$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 4\Omega$.

Determinare il circuito equivalente di Norton ai morsetti $a-b$, nella forma $\bar{i} = Y_{nr}\bar{v} + \bar{A}_{nr}$.

$$\text{Sol: } [Y_{nr} = 0.1 + j0.2S, \bar{A}_{nr} = -0.55 - j0.1A]$$

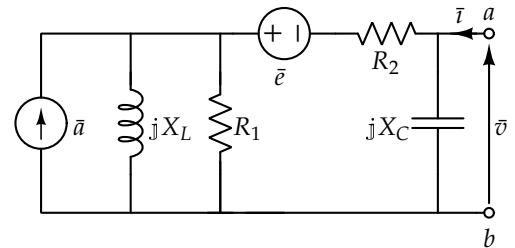


Figura 228: Es 9.6

Es. 9.7

Determinare i parametri del circuito equivalente di Thévenin del bipolo composito rappresentato in figura, nella forma $\bar{v} = Z_{th}\bar{i} + \bar{E}_{th}$. Per quali valori di n l'impedenza equivalente di Thévenin Z_{th} è di tipo ohmico-capacitivo?

Sol: $[Z_{th} = n^2 R + j \frac{\omega^2 LC - n^2}{\omega C}, \bar{E}_{th} = \frac{R\omega C - j1}{\omega C} n\bar{a}]$. L'impedenza equivalente di Thévenin Z_{th} è di tipo ohmico-capacitivo sse $n > \omega\sqrt{LC}$

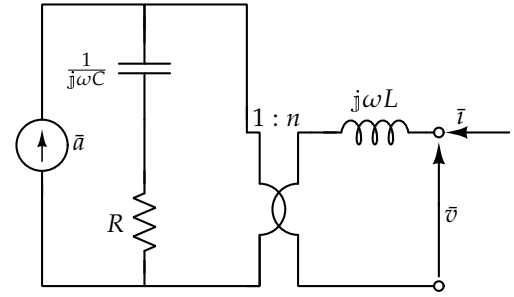


Figura 229: Es 9.7

Es. 9.8

Dati: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 5\Omega$, $R_3 = 10\Omega$, $L_1 = 7\text{mF}$, $L_2 = 6\text{mF}$, $C = 0.5\text{mF}$, $\omega = 1\text{krad/s}$.

Determinare i parametri della matrice delle impedenze Z del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo Z è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = (10 + j5)\bar{i}_1 + (5 - j2)\bar{i}_2 \\ \bar{v}_2 = (5 - j2)\bar{i}_1 + (15 + j4)\bar{i}_2 \end{cases}$$

]

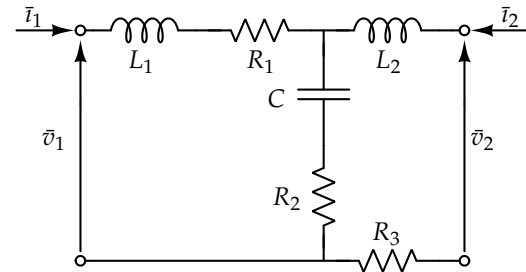


Figura 230: Es 9.8

Es. 9.9

Dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 2\Omega$, $L = 6\text{mH}$, $\omega = 1\text{krad/s}$.

Determinare i parametri della matrice delle ammettenze Y del doppio bipolo in figura. Stabilire se esiste la matrice delle impedenze Z e, se possibile, calcolarla.

Sol: [Il doppio bipolo Y è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{i}_1 = 1\bar{v}_1 \\ \bar{i}_2 = (1 + j3)\bar{v}_1 + 0.5\bar{v}_2 \end{cases}$$

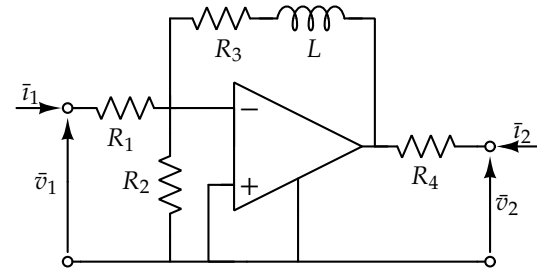


Figura 231: Es 9.9

Poiché la matrice Y associata al doppio bipolo ha un determinante diverso da zero, la matrice Z del doppio bipolo esiste ed è caratterizzata dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = 1\bar{i}_1 \\ \bar{v}_2 = -2(1 + j3)\bar{i}_1 + 2\bar{i}_2 \end{cases}$$

]

Es. 9.10

Dati: $\bar{i} = \frac{1}{2}$.

Determinare \bar{v}_R . Supponendo $\omega = 1 \text{ rad/s}$ e \bar{i} riferito rispetto al valore massimo, determinare $v_R(t)$.

Sol: $[\bar{v}_R = \frac{2}{17}(-1 + j4). v_R(t) = -\frac{2}{17}(\cos(1t) + 4\sin(1t))]$

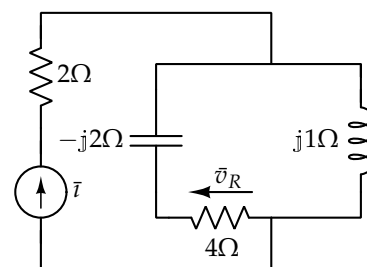


Figura 232: Es 9.10

Es. 9.11

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_1(t)$.

Sol: $[v_1(t) = -\frac{RAn}{(1+n^2)^2 + (\omega CRn^2)^2} [(1+n^2) \cos(\omega t) + \omega CRn^2 \sin(\omega t)]]$

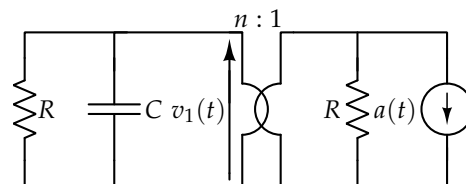


Figura 233: Es 9.11

Es. 9.12

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t + \frac{\pi}{4})$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $i_e(t)$.

Sol: $[i_e(t) = -\frac{E\sqrt{2}}{12R^2} [(5R - \omega L) \cos(\omega t) - (5R + \omega L) \sin(\omega t)]]$

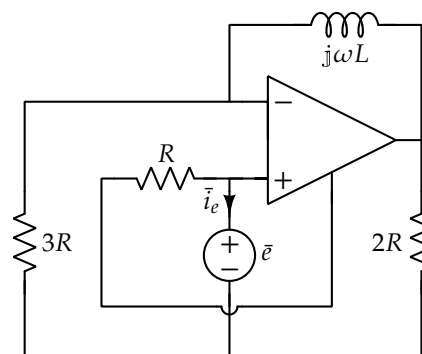


Figura 234: Es 9.12

Es. 9.13

Dati: $a(t) = A \cos(2\omega t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_a(t)$. $\exists r \mid v_a(t) = K \sin(2\omega t)$, con $k \in \mathbb{R}$?

Sol: $[v_a(t) = -\frac{RA2\omega L}{(r-R)^2 + (3\omega L)^2} [3\omega L \cos(2\omega t) + (r-R) \sin(2\omega t)]]$
 $\nexists r \mid v_a(t) = K \sin(2\omega t)$, con $k \in \mathbb{R}$

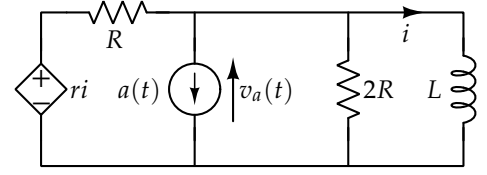


Figura 235: Es 9.13

Es. 9.14

Dati: $e(t) = E \sin(\omega t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_C(t)$.

Sol: $[v_C(t) = \frac{E}{R[(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2]} ([\omega R^2 C - \omega L(1 - \omega^2 LC)] \cos(\omega t) - R \sin(\omega t))]$

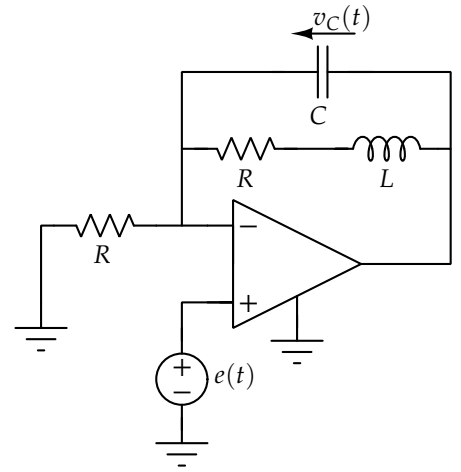


Figura 236: Es 9.14

Es. 9.15

Dati: $a(t) = A \cos(2\omega t)$, $e(t) = E \cos(\omega t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_R(t)$.

Sol: $[v_R(t) = -\frac{RA(4\omega^2 LC - 1)}{(2\omega RC)^2 + (4\omega^2 LC - 1)^2} [(4\omega^2 LC - 1) \cos(2\omega t) - 2\omega RC \sin(2\omega t)] - \frac{E\omega RC}{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2} [\omega RC \cos(\omega t) + (\omega^2 LC - 1) \sin(\omega t)]]$

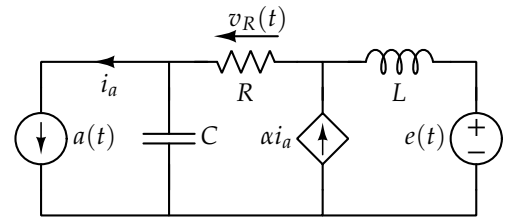


Figura 237: Es 9.15

Es. 9.16

Il doppio bipolo Z è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = R\bar{i}_1 + jX\bar{i}_2 \\ \bar{v}_2 = jX\bar{i}_1 + 2R\bar{i}_2 \end{cases}$$

Determinare \bar{i}_1 e \bar{i}_2 .

Sol: $[\bar{i}_1 = -\bar{a} \frac{R-jX\alpha}{2R-jX\alpha}, \bar{i}_2 = -\frac{R\alpha\bar{a}}{2R-jX\alpha}]$

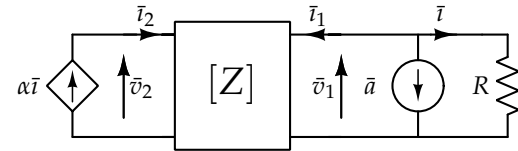


Figura 238: Es. 9.16

Es. 9.17

Dati: $X_L = 2\Omega$, $R = 1\Omega$, $\alpha = 4$, $\bar{a} = 5 + j1$.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $\bar{v} = Z_{th}\bar{i} + \bar{E}_{th}$.

Sol: $[Z_{th} = \frac{4}{13} + j\frac{7}{13}\Omega, E_{th} = -j2V]$

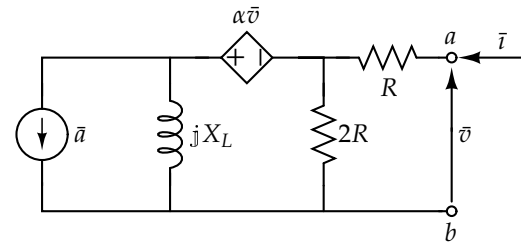


Figura 239: Es. 9.17

Soluzione

PER RICAVERE I PARAMETRI DEL CIRCUITO EQUIVALENTE DI THÉVENIN bisogna ricavare la funzione $\bar{v}(\bar{i})$.

Attraverso l'utilizzo dell'equazione costitutiva, è possibile calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R . Dalla KVL-II alla maglia I (circuito in figura 240) si ricava la tensione ai capi del resistore di resistenza $2R$, ossia $\bar{v} - R\bar{i}$. Mediante l'equazione costitutiva di tale componente si ottiene che la corrente che lo attraversa è pari a

$$\frac{\bar{v} - R\bar{i}}{2R} \quad (108)$$

Dalla KCL al taglio Ω (figura 241) si ricava la corrente che attraversa l'induttore. Usando la sua equazione costitutiva si calcola che la tensione ai suoi capi è pari a

$$jX_L \left(\frac{3}{2}\bar{i} - \bar{a} - \frac{\bar{v}}{2R} \right) \quad (109)$$

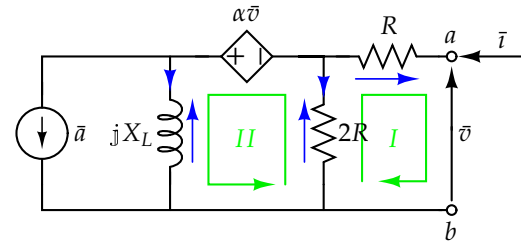


Figura 240: Circuito con evidenziate (in verde) le maglie considerate.

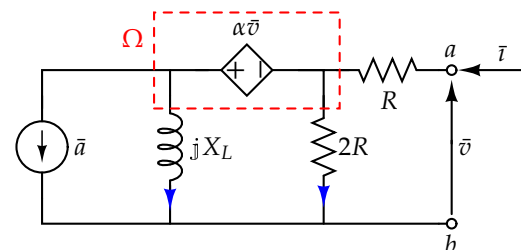


Figura 241: Circuito con evidenziato (in rosso) il taglio considerato.

Considerando la KVL-II alla maglia II (figura 240), si ottiene l'equazione

$$jX_L \left(\frac{3}{2}\bar{i} - \bar{a} - \frac{\bar{v}}{2R} \right) = \alpha\bar{v} + (\bar{v} - R\bar{i}) . \quad (110)$$

Sostituendo i valori numerici e risolvendo, si ricava l'equazione dell'equivalente di Thévenin

$$\bar{v} = \underbrace{\left(\frac{4}{13} + j\frac{7}{13} \right)}_{Z_{th}} \bar{i} - \underbrace{j2}_{E_{th}} . \quad (111)$$

IN ALTERNATIVA è possibile risolvere l'esercizio mediante l'uso delle prove semplici. Passivando le sorgenti indipendenti presenti nel bipolo in figura 239, si ricava il circuito in figura 242. Valutando la KVL-II alla maglia I (figura 242), ricavando la tensione ai capi del resistore di resistenza R mediante l'equazione costitutiva, si ottiene la tensione ai capi del resistore di resistenza $2R$. Tramite la sua equazione costitutiva, si calcola che la corrente che lo attraversa è pari a

$$\frac{\bar{v} - R\bar{i}}{2R} . \quad (112)$$

Sfruttando la KCL al taglio nodale al nodo β (figura 242), si ricava la corrente che scorre nell'induttore. Si può quindi calcolare che la tensione ai suoi capi vale

$$jX_L \left(\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{\bar{v}}{2R} \right) . \quad (113)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II (figura 242) si trova l'equazione

$$jX_L \left(\frac{3}{2}\bar{i} - \frac{\bar{v}}{2R} \right) = (\bar{v} - R\bar{i}) + \alpha\bar{v} . \quad (114)$$

Sostituendo i valori numerici nell'equazione 114 e risolvendo, si trova Z_{th} come segue

$$Z_{th} = \frac{\bar{v}}{\bar{i}} = \frac{4}{13} + j\frac{7}{13} \Omega . \quad (115)$$

Ponendo $\bar{i} = 0$, dal circuito in figura 239 si ricava quello in figura 243. Valutando la KVL-II alla maglia I (figura 243) si ottiene la tensione ai capi dell'induttore. Sfruttando l'equazione costitutiva di tale componente si calcola che la corrente che lo attraversa è pari a

$$\frac{\bar{v}(\alpha + 1)}{jX_L} . \quad (116)$$

Utilizzando l'equazione costitutiva è possibile calcolare la corrente che percorre il resistore. Infine, dalla KCL al taglio Ω (figura 243) si ricava l'equazione

$$\bar{a} + \frac{\bar{v}(\alpha + 1)}{jX_L} + \frac{\bar{v}}{2R} = 0 . \quad (117)$$

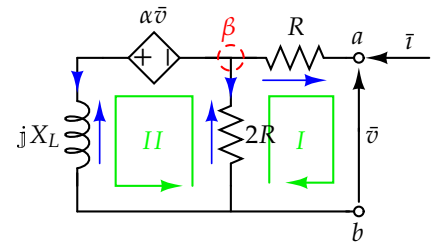


Figura 242: Circuito con evidenziati (in rosso) il taglio nodale e (in verde) le maglie considerati.

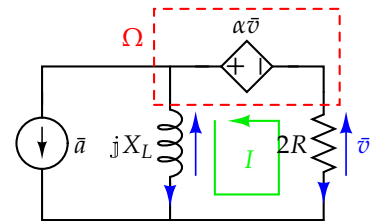


Figura 243: Circuito con evidenziati (in rosso) il taglio e (in verde) la maglia considerati.

Sostituendo i valori numerici nell'equazione sopra, si ricava \bar{E}_{th} come segue

$$\bar{E}_{th} = \bar{v}|_{\bar{i}=0} = -j2 \text{ V} . \quad (118)$$

Es. 9.18

Dati: $Z = R + jX$. Hp: $\gamma > 1$.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a-b$, nella forma $\bar{v} = Z_{th}\bar{i} + \bar{E}_{th}$. Per quali valori di X $\text{Im}\{Z_{th}\} = 0$? Con quale componente posso realizzare X ?

Sol: $[Z_{th} = \frac{(3R+jX)j\omega L}{3R+j(X-\omega L(\gamma-1))}, E_{th} = \frac{2RA(\gamma-1)j\omega L}{3R+j[X-\omega L(\gamma-1)]}]$. $\text{Im}\{Z_{th}\} = 0$ se $X_{1-2} = \frac{1}{2}\{(\gamma-1)\omega L \pm \sqrt{[\omega L(\gamma-1)]^2 - 36R^2}\}$. Poiché per ipotesi $\gamma > 1$, $X_{1-2} > 0$ e quindi per realizzare X è necessario utilizzare un induttore]

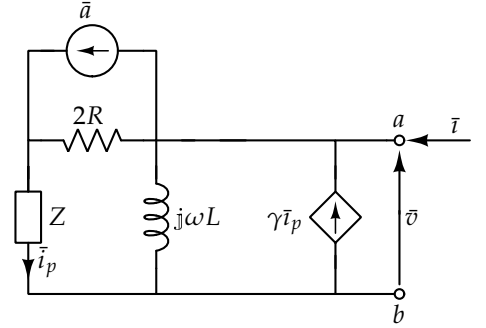


Figura 244: Es 9.18

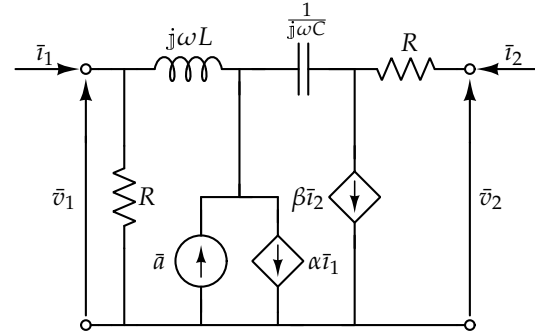
Es. 9.19

Determinare i parametri della formulazione con controllo in corrente del doppio bipolo indicato in figura.

Sol: [Il doppio bipolo Z è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = R(1-\alpha)\bar{i}_1 + R(1-\beta)\bar{i}_2 + R\bar{a} \\ \bar{v}_2 = [R(1-\alpha) - j\omega L\alpha]\bar{i}_1 + \{R + [R + j\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}]\}(1-\beta)\bar{i}_2 + (R + j\omega L)\bar{a} \end{cases}$$

Figura 245: Es 9.19



Es. 9.20

Determinare i parametri della formulazione con controllo in tensione del doppio bipolo indicato in figura. Hp: $r \neq -R$.

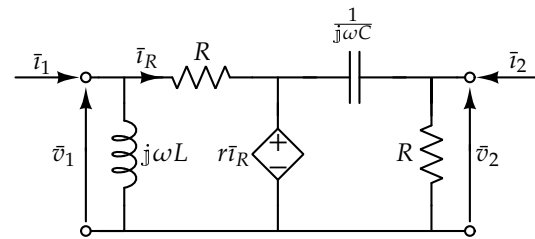


Figura 246: Es 9.20

Sol: [Il doppio bipolo Y è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{i}_1 = (\frac{1}{R+r} - j\frac{1}{\omega L})\bar{v}_1 \\ \bar{i}_2 = -j\frac{\omega Cr}{R+r}\bar{v}_1 + (\frac{1}{R} + j\omega C)\bar{v}_2 \end{cases}$$

]

Es. 9.21

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t)$, $i_L(0) = I_{L_0}$.

Determinare:

- L'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- Supponendo che i valori di α e β siano tali da garantire la stabilità asintotica del circuito, determinare il valore di I_{L_0} affinché il circuito sia in regime sinusoidale permanente a partire da $t = 0$. Ricavare l'espressione di $i_L(t)$ in tali condizioni.

Sol: $[\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{R(\alpha\beta+2(\alpha-1))}{L(\alpha-1)}i_L(t) + \frac{R\alpha a(t)}{L(\alpha-1)}$. Affinché il circuito sia in regime sinusoidale permanente a partire da $t = 0$, è necessario che $i_{L_0} = \frac{R^2\alpha A[\alpha\beta+2(\alpha-1)]}{[\omega L(\alpha-1)]^2 + R^2[\alpha\beta+2(\alpha-1)]^2}$. In tali condizioni, $i_L(t) = \frac{R\alpha A}{[\omega L(\alpha-1)]^2 + R^2[\alpha\beta+2(\alpha-1)]^2} [R(\alpha\beta + 2(\alpha - 1)) \cos(\omega t) + \omega L(\alpha - 1) \sin(\omega t)]$, $t \geq 0$]

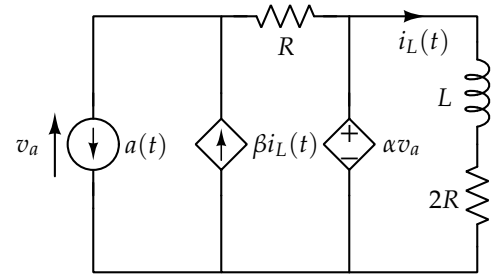


Figura 247: Es 9.21

Es. 9.22

Dati: $a(t) = A_0$, $e(t) = E_0 \cos(2\omega t)$.

Supponendo che il circuito sia a regime, determinare $i_L(t)$.

Sol: $[i_L(t) = \frac{E_0(1-\beta)}{R^2 + [2\omega L(1-\beta)]^2} [R \cos(2\omega t) + 2\omega L(1-\beta) \sin(2\omega t)] - A_0]$

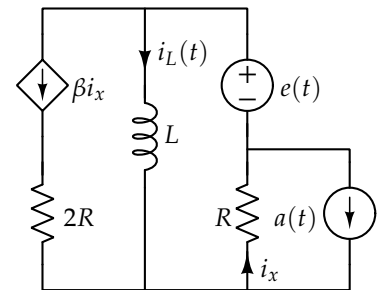


Figura 248: Es 9.22

Es. 9.23

Dati: $\bar{v} = j16$, $\bar{i} = 2(1 - j)$, $R = 1\Omega$, $X_C = -4\Omega$, $X_L = 1\Omega$, $\alpha = 3$.

Determinare \bar{i}_L .

Sol: $[\bar{i}_L = -\frac{2}{3}]$

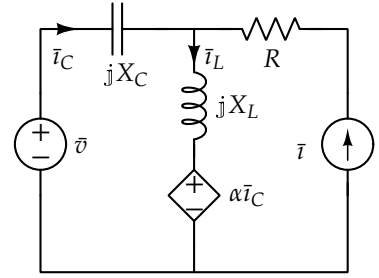


Figura 249: Es 9.23

Es. 9.24

Determinare il circuito equivalente di Norton del bipolo composito in figura, nella forma $\bar{i} = Y_{nr}\bar{v} + \bar{A}_{nr}$.

Sol: $[Y_{nr} = \frac{1+j\omega CR(1-\alpha)}{R}, \bar{A}_{nr} = j\bar{e} \frac{\omega^2 CL(1-\alpha)+\alpha}{\omega L}]$

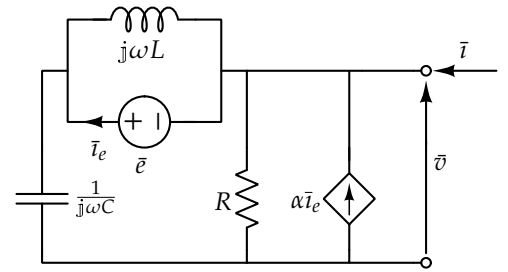


Figura 250: Es 9.24

Es. 9.25

Determinare i parametri della formulazione ibrida del primo tipo del doppio bipolo in figura.

Sol: [Il doppio bipolo H ottenuto è caratterizzato dalle seguenti equazioni costitutive:

$$\begin{cases} \bar{v}_1 = j(\omega n^2 L - \frac{1}{\omega C})\bar{i}_1 + (n + j\frac{\omega L n^2 \alpha}{R})\bar{v}_2 \\ \bar{i}_2 = -n\bar{i}_1 + \frac{1-n\alpha}{R}\bar{v}_2 \end{cases}$$

]

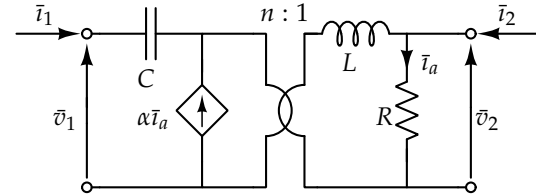


Figura 251: Es 9.25

Es. 10.1

Determinare la funzione di rete $H(j\omega) = \frac{\bar{v}_{out}}{\bar{v}_{in}}$.

Sol: $[H(j\omega) = \frac{1+j\omega C(R_1+R_2)}{1+j\omega CR_2}]$

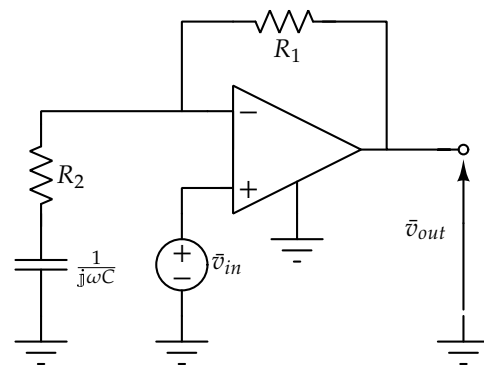


Figura 252: Es 10.1

Es. 10.2

Dati: $v_s(t) = 4 \cos(10t)$, $R = 2\Omega$, $L = 50\text{mH}$, $C = 0.1\text{F}$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare la potenza complessa erogata dal generatore di tensione \hat{A}_e^{vs} . Verificare il risultato ottenuto usando il teorema di Boucherot.

Sol: $[\hat{A}_e^{vs} \approx 3.7648 - j0.9412 \text{ VA}]$

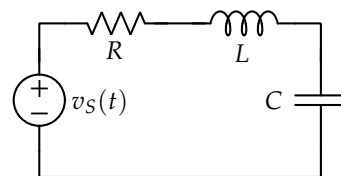


Figura 253: Es 10.2

Es. 10.3

Determinare \hat{A}_a^{CCCS} .

Sol: $[\hat{A}_a^{CCCS} = \frac{1}{2} \frac{\alpha(1-\alpha)|\bar{e}|^2(\omega C)^2}{(1-\alpha-\omega^2 LC)^2 + [\omega CR(1-\alpha)]^2} (R - j\frac{1}{\omega C})]$

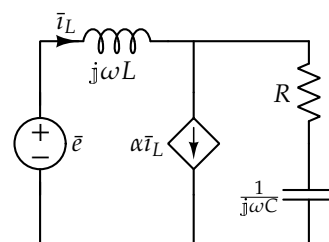


Figura 254: Es 10.3

Es. 10.4

Determinare Z | Z assorbe la massima potenza attiva. Calcolare $P_{a_{max}}^Z$.

Sol: [Affinché Z assorba la massima potenza attiva possibile, è necessario che $Z = \frac{Rn^2}{2} - j\frac{\omega Ln^2(2-\alpha)}{2}$. $P_{a_{max}}^Z = \frac{|\bar{e}|^2}{16R}$]

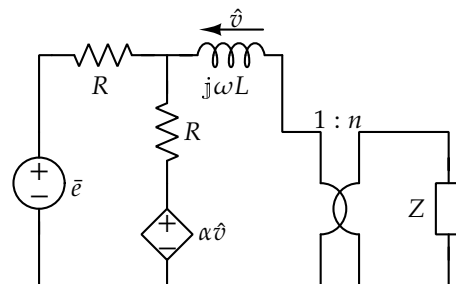


Figura 255: Es 10.4

Es. 10.5

Hp: $\alpha \neq -1$, $\alpha\beta > 0$.

Determinare C | $Q_e^E = 0$.

Sol: $[C = \frac{\alpha\beta}{\omega^2 L(1+\alpha)}]$

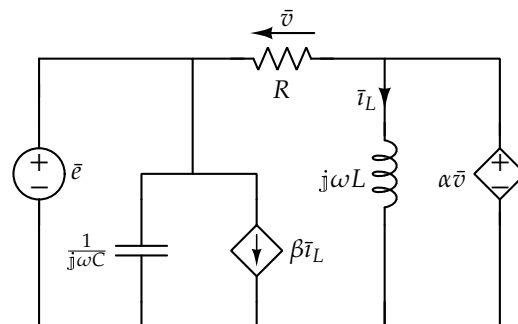


Figura 256: Es 10.5

Es. 10.6

Determinare la funzione di rete $H(j\omega) = \frac{\bar{v}_{out}}{\bar{v}_{in}}$.

Sol: $[H(j\omega) = -\frac{1+j\omega CR_2}{j\omega CR_1}]$

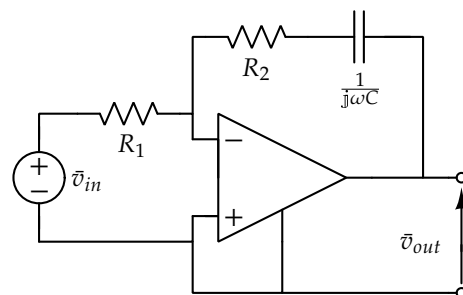


Figura 257: Es 10.6

Es. 10.7

Determinare la funzione di rete $H(j\omega) = \frac{\bar{v}_0}{\bar{e}}$.

$$\text{Sol: } [H(j\omega) = -\frac{2R_F + R}{R_S + j\omega L}]$$

Soluzione

RICAVARE UNA FUNZIONE DI RETE significa determinare il legame tra due variabili del circuito (non necessariamente riferite ad un unico componente circuitale) in funzione della pulsazione ω . Si osserva che l'induttore e il resistore di resistenza R_S sono tra loro in serie. È quindi possibile sostituirli con un bipolo composito avente impedenza equivalente $R_S + j\omega L$. Considerando le equazioni costitutive dell'amplificatore operazionale ideale, impiegato in condizione di "massa virtuale", si sa che $\bar{v} = 0$ e si nota che la caduta di tensione ai capi del resistore di resistenza R_G (in viola nel circuito in figura 259) è nulla, poiché $\bar{i}_- = 0$. Valutando quindi la KVL-II alla maglia I (figura 259), si ricava la tensione ai capi del bipolo composito (evidenziato in arancione). Conoscendone l'impedenza, si ricava che la corrente che lo percorre è pari a

$$\frac{\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (119)$$

Considerando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 259) e tenendo conto del fatto che $\bar{i}_+ = 0$, si ricava la corrente che percorre il resistore di resistenza R (collocato sotto il nodo α). Quindi è possibile ricavare che la tensione ai suoi capi, che vale

$$\frac{R\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (120)$$

Dalla KVL-II alla maglia II (figura 259) si ricava che la tensione ai capi del resistore di resistenza R (a sinistra nel circuito) è pari a

$$-\frac{R\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (121)$$

Dunque, utilizzando l'equazione costitutiva, si calcola che la corrente che scorre in tale resistore vale

$$-\frac{\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (122)$$

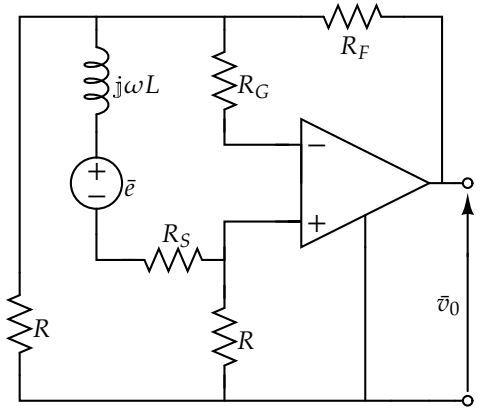


Figura 258: Es 10.7

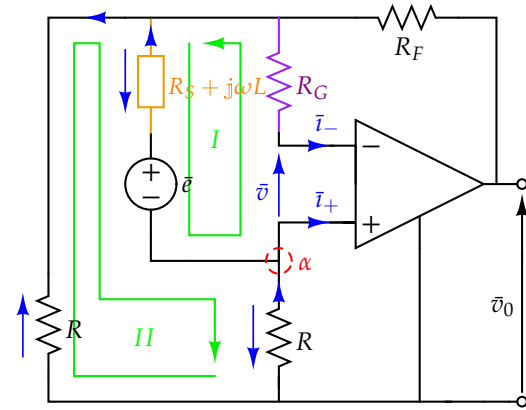


Figura 259: Circuito con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde) considerati.

Valutando la KCL al taglio Ω (figura 260), si ricava la corrente che attraversa il resistore di resistenza R_F . Usando l'equazione costitutiva di tale componente, si calcola che la caduta di tensione ai suoi capi è pari a

$$-\frac{2R_F\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (123)$$

Infine, dalla KVL-II alla maglia *III* (figura 260) si ricava che

$$\bar{v}_0 = -\frac{(2R_F + R)\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (124)$$

A questo punto è possibile ricavare la funzione di rete richiesta. Si conclude che

$$H(j\omega) = \frac{\bar{v}_0}{\bar{e}} = -\frac{2R_F + R}{R_S + j\omega L} \quad (125)$$

IN ALTERNATIVA, sarebbe stato possibile risolvere il circuito usando delle maglie diverse. Osservando il resistore di resistenza R_G (evidenziato in violetto nella figura 261) si nota che la tensione ai suoi capi è nulla poiché è percorso da corrente nulla ($\bar{i}_- = 0$). Considerando quindi la KVL-II alla maglia *I* (figura 261), si ricava la tensione ai capi del bipolo composito. Si può dunque calcolare che la corrente che percorre tale componente è pari a

$$\frac{\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (126)$$

Dalla KCL al taglio nodale al nodo α (figura 261), si nota che tale corrente scorre anche nel resistore di resistenza R (a destra nel circuito), poiché $\bar{i}_+ = 0$. Quindi si calcola che la tensione ai suoi capi vale

$$\frac{R\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (127)$$

Dalla KVL-II alla maglia *II* (figura 261) si nota che la tensione ai capi dei due resistori di resistenza R è la medesima e quindi anche la corrente che li attraversa. Dunque, dalla KCL al taglio Ω (figura 261), si conclude che la corrente che scorre nel resistore di resistenza R_F è doppia rispetto a quella che scorre in un singolo resistore di resistenza R . Noto ciò, è possibile calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_F , che risulta essere

$$\frac{2R_F\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (128)$$

Sfruttando la maglia *III* (figura 261), si ricava che

$$\bar{v}_0 = -\frac{(2R_F + R)\bar{e}}{R_S + j\omega L} \quad (129)$$

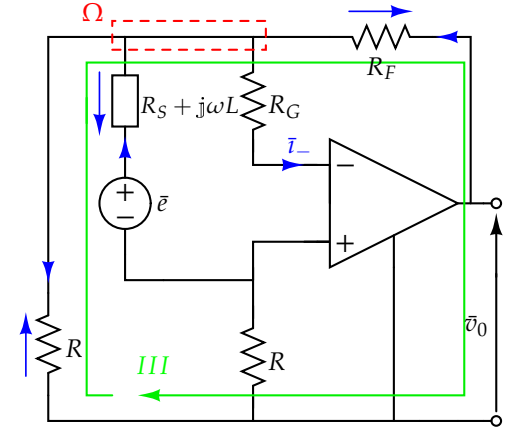


Figura 260: Circuito con evidenziati il taglio (in rosso) e la maglia (in verde) considerati.

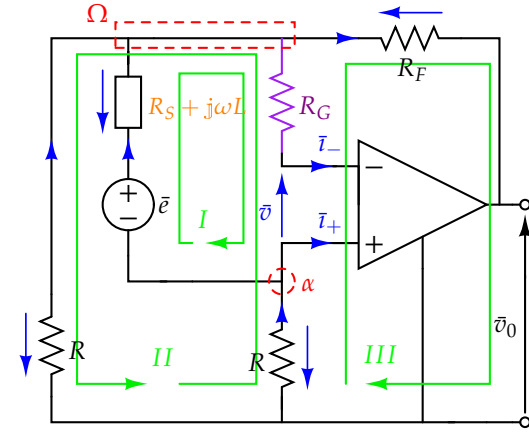


Figura 261: Circuito con evidenziati i tagli (in rosso) e le maglie (in verde).

Si conclude l'esercizio calcolando la funzione di rete richiesta, come segue

$$H(j\omega) = \frac{\bar{v}_0}{\bar{e}} = -\frac{2R_F + R}{R_S + j\omega L} . \quad (130)$$

Es. 10.8

Dati: $e_1(t) = 1 \cos(10t)$, $e_2(t) = -1 \sin(10t)$, $L = 1\text{H}$, $C = \frac{1}{50}\text{F}$, $R = 10\Omega$. Hp: circuito in regime sinusoidale permanente.

Determinare $\hat{A}_e^{E_1}$.

Sol: $[\hat{A}_e^{E_1} = -0.025 + j0.125 \text{ VA}]$

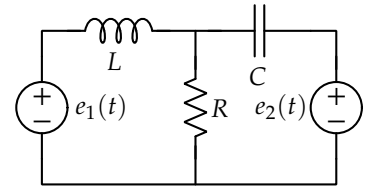


Figura 262: Es 10.8

Es. 10.9

Determinare \hat{A}_e^A .

Sol: $[\hat{A}_e^A = \frac{1}{58}(23 - j14) \text{ VA}]$

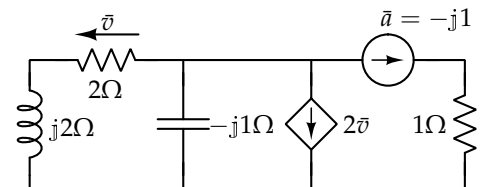


Figura 263: Es 10.9

Es. 10.10

Determinare \hat{A}_e^E .

Sol: $[\hat{A}_e^E = \frac{2|\bar{e}|^2}{R[(2R)^2 + (\omega L)^2]} [2R^2 + \omega^2 L^2 - j\omega LR]]$

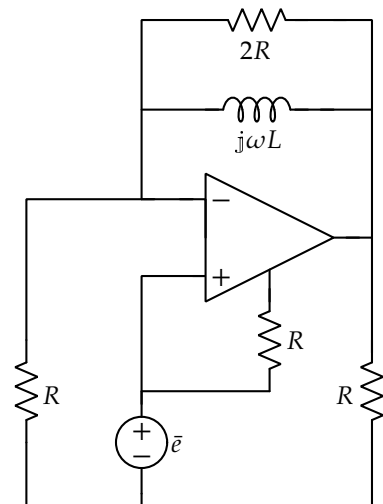


Figura 264: Es 10.10

Es. 10.11

Determinare $L \mid \hat{A}_a^{AO} = P_a^{AO}$.

Sol: $[L = \frac{CR^2}{1+\omega^2 C^2 R^2}]$

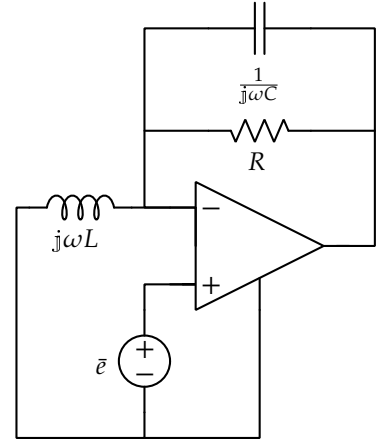


Figura 265: Es 10.11

Es. 10.12

Dati: $\bar{a} = A$.

$\exists X \mid \hat{A}_e^{VCCS} \in \mathbb{R}?$

Sol: $[\hat{A}_e^{VCCS} \in \mathbb{R} \forall X]$

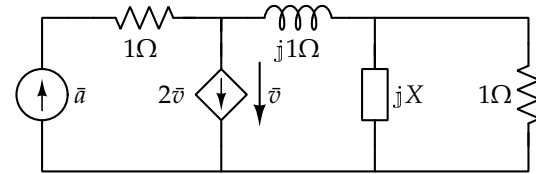


Figura 266: Es 10.12

Es. 10.13

Dati: $Z = R_0 + jX_0$, $\bar{e} = E_0$ (fasore riferito rispetto al valore massimo).

Determinare: $Z \mid P_a^Z$ sia massima. Calcolare $P_{a_{max}}^Z$.

Sol: $[Z = \frac{(1-\alpha)R}{(1-\alpha)^2 + (\omega CR)^2} + j \frac{\omega CR^2}{(1-\alpha)^2 + (\omega CR)^2} \cdot P_{a_{max}}^Z = \frac{E_0^2(1-\alpha)}{8R}]$

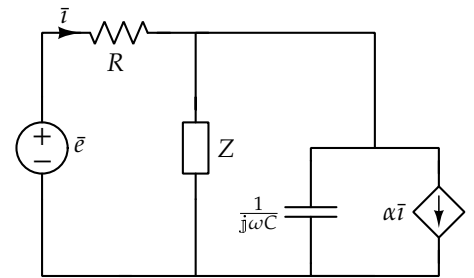


Figura 267: Es 10.13

Es. 10.14

Determinare la funzione di rete $H(j\omega) = \frac{\bar{v}_0}{\bar{e}}$.

Sol: $[H(j\omega) = \frac{(R_1 + R_2) + j\omega R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_2 (1 + j\omega C_1 R_1)}]$

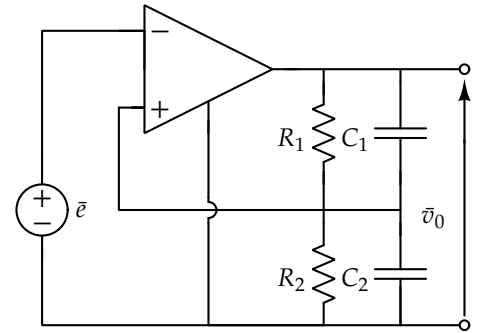


Figura 268: Es 10.14

Es. 10.15

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t)$.

Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare:

- La corrente $i_c(t)$ a regime.
- Per quale valore di α la potenza reattiva erogata dal generatore di corrente è nulla? Determinare la potenza attiva erogata dal generatore di corrente in tali condizioni.

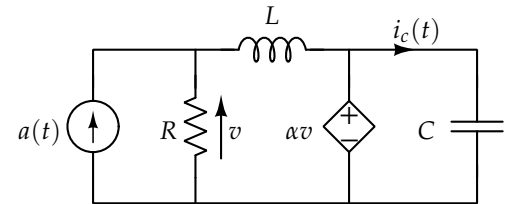


Figura 269: Es 10.15

Sol: $[i_c(t) = -\frac{A\omega^2 LCR\alpha}{[R(1-\alpha)]^2 + (\omega L)^2} [R(1-\alpha) \cos(\omega t) + \omega L \sin(\omega t)]]$. La potenza reattiva erogata dal generatore di corrente è nulla quando $\alpha = 1$. In tali condizioni, $P_e^A = \frac{A^2 R}{2}$

Es. 10.16

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente. Per quale valore di C la potenza reattiva erogata dal generatore di tensione è nulla?

Sol: $[C = \frac{n^2}{\omega^2 L}]$

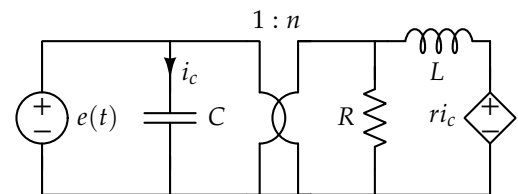


Figura 270: Es 10.16

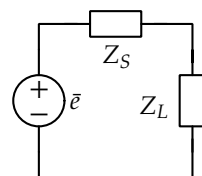
Es. 10.17

Dati: $\bar{e} = 101V$ (fasore riferito rispetto al valore massimo). $Z_S = R_S + jX_S = 100 + j100\Omega$, $Z_L = R_L + jX_L = 1 + j1\Omega$.

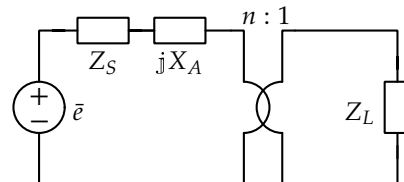
- Si consideri il circuito (a) e si calcoli la potenza attiva assorbita da Z_L . Tale potenza attiva assorbita è la massima possibile? Giustificare la risposta.
- Si consideri ora il circuito (b). Determinare i valori di X_A (impedenza puramente reattiva) e del rapporto di trasformazione n affinché Z_L assorba la massima potenza attiva possibile.

Sol:[Circuito (a): $P_a^{Z_L} = 0.25W$. La potenza assorbita da Z_L non è la massima possibile perché, secondo il teorema del massimo trasferimento di potenza attiva, la potenza attiva assorbita da Z_L è massima sse $Z_L = Z_S^*$.

Circuito (b): Affinché Z_L assorba la massima potenza attiva possibile, è necessario porre $X_A = -200\Omega$ e $n = 10$. In tali condizioni la potenza assorbita da Z_L è la massima possibile ed è pari a $P_a^{Z_L}_{MAX} = 12.75125W$]



(a)



(b)

Figura 271: Es 10.17

Es. 11.1

Dati: $R_1 = 1\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\text{k}\Omega$, $R_0 = 100\Omega$, $C = 5\mu\text{F}$, $e_1(t) = E_1 \cdot 1(t)$, $E_1 = 10\text{V}$, $e_2 = 2\text{V}$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$ s.

Determinare:

- l'equazione di stato che governa la dinamica del circuito.
- $v_C(t)$, $i_C(t)$, $v_0(t)$, $t \geq 0$ (con grafico).

Sol: [La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_C(t) = -20e^{-100t} + 16, t \geq 0$$

La corrente $i_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_C(0^-) = 0 \\ i_C(t) = 0.01e^{-100t}, t > 0 \end{cases}$$

La tensione $v_0(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_0(t) = 20e^{-100t} - 14, t \geq 0]$$

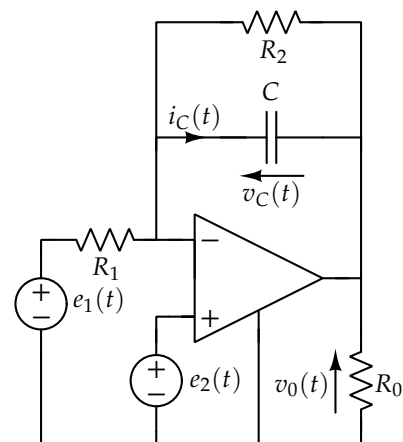


Figura 272: Es 11.1

Es. 11.2

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t) \cdot 1(-t) + E \cdot 1(t)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$ s.

Determinare:

- Il vincolo che soddisfa il parametro g dato che il circuito è asintoticamente stabile trovandosi a regime in $t = 0^-$ s.
- Determinare $v_C(t)$, $t \geq 0$.

Sol: [Il sistema è asintoticamente stabile sse $g > -\frac{1}{R}$. La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_C(t) = -\frac{E(\omega CR)^2}{(1+gR)^2 + (\omega CR)^2} e^{-\frac{1+gR}{RC}t} + E, t \geq 0]$$

Soluzione

IL CIRCUITO SI TROVA A REGIME SINUSOIDALE PER $t = 0^-$. Per tale motivo è possibile usare l'analisi fasoriale. Prima di passare ai fasori, però, conviene ricavare l'equazione di stato poiché essa non cambia in $t = 0$, in quanto il circuito rimane invariato (è l'ingresso che varia). Così facendo non sarà necessario calcolarla per $t = 0^+$. Considerando la KVL-II alla maglia I (figura 274) si ottiene che

$$v_R = e(t) - v_C \quad (131)$$

Mediante l'equazione costitutiva del resistore si calcola la corrente che lo attraversa. Valutando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 274), scrivendo la corrente che attraversa il condensatore mediante l'equazione costitutiva di tale componente e risolvendo, si ricava l'equazione di stato

$$\frac{dv_C}{dt} = -\underbrace{\frac{1+Rg}{CR}}_{\lambda} v_C + \frac{1+Rg}{CR} e(t) \quad (132)$$

Il circuito è asintoticamente stabile se e solo se $\lambda < 0$. In questo caso tale condizione si verifica se e solo se

$$(1+Rg) > 0 \rightarrow g > -\frac{1}{R} \quad (133)$$

Passando ai fasori, l'equazione di stato 132 diviene

$$j\omega \bar{v}_C = -\frac{1+Rg}{CR} \bar{v}_C + \frac{1+Rg}{CR} E \quad (134)$$

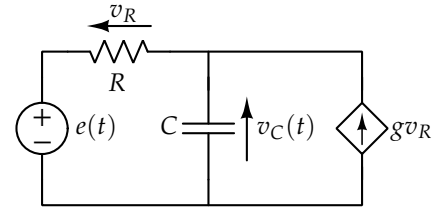


Figura 273: Es 11.2

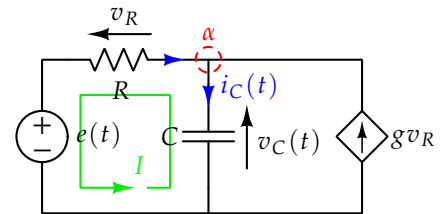


Figura 274: Circuito all'istante $t = 0^-$, con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde).

Risolvendo l'equazione appena ottenuta si ricava

$$\bar{v}_C = \frac{(1 + Rg)E}{\underbrace{(1 + Rg)^2 + (\omega CR)^2}_{\in \mathbb{R}}} (1 + Rg - j\omega CR) . \quad (135)$$

Siccome il circuito è a regime (per $t < 0$), il transitorio è esaurito e quindi la variabile di stato $v_C(t)$ coincide con l'integrale particolare $v_{C_{IP}}(t)$, quindi

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_{C_{IP}}(t) = \text{Re} \{ \bar{v}_C [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \} \\ &= \frac{(1 + Rg)E}{(1 + Rg)^2 + (\omega CR)^2} \text{Re} \{ (1 + Rg - j\omega CR) [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \} \\ &= \frac{(1 + Rg)E}{(1 + Rg)^2 + (\omega CR)^2} [(1 + Rg)\cos(\omega t) + \omega CR \sin(\omega t)] , t < 0 . \end{aligned}$$

Ponendo $t = 0^-$, si calcola che

$$v_C(0^-) = \frac{(1 + Rg)^2 E}{(1 + Rg)^2 + (\omega CR)^2} . \quad (136)$$

Poiché l'ingresso varia ma rimane sempre limitato, dalla teoria è noto che la variabile di stato è continua e quindi

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) . \quad (137)$$

CONSIDERANDO IL CIRCUITO PER $t = 0^+$ l'equazione di stato rimane quella calcolata in precedenza. Il valore della tensione $v_C(t)$ avrà l'andamento seguente

$$v_C(t) = ke^{\lambda t} + v_{C_{IP}}(t) , t \geq 0 . \quad (138)$$

Per calcolare l'integrale particolare si può considerare il circuito in figura 273 a regime (stazionario) per $t > 0$. In tal caso si ottiene il circuito in figura 275. Valutando la KCL al taglio nodale al nodo α (figura 275), si ricava che

$$\frac{v_R}{R} + gv_R = 0 , \quad (139)$$

da cui si ottiene che $v_R = 0$. Valutando quindi la KVL-II alla maglia I (figura 275) si conclude quindi che

$$v_{C_{IP}}(t) = E . \quad (140)$$

In alternativa sarebbe stato possibile ricavare tale valore ragionando direttamente sull'equazione di stato 132.

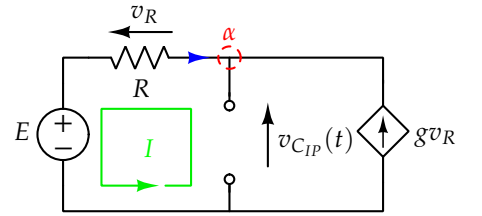


Figura 275: Circuito ottenuto considerando quello in figura 274 a regime per $t > 0$, con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e la maglia (in verde).

Considerando la relazione 137 e il valore di $v_C(0^-)$ calcolato in precedenza, si ricava dalla funzione 138, ponendo $t = 0$, il valore di k come segue

$$k = v_C(0) - v_{C_{IP}}(0) = -\frac{(\omega CR)^2 E}{(1 + Rg)^2 + (\omega CR)^2} \quad (141)$$

Sostituendo il valore di k appena ricavato e quello di λ nella funzione 138, si conclude che l'andamento di $v_C(t)$ è il seguente

$$v_C(t) = -\frac{E(\omega CR)^2}{(1 + gR)^2 + (\omega CR)^2} e^{-\frac{1+gR}{RC}t} + E, \quad t \geq 0 \quad .$$

Es. 11.3

Dati: $E = 12V$, $R_1 = 20k\Omega$, $R_2 = R_3 = 10k\Omega$, $C = 1\mu F$. L'interruttore S commuta dalla posizione A alla posizione B in $t = 0$ s. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$ s.

Determinare $v_C(t)$ e $i_E(t)$ per $t \geq 0$.

Sol: [La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_C(t) = -1e^{-150t} + 4, \quad t \geq 0$$

La corrente $i_E(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_E(0^-) = 0.3 \cdot 10^{-3} \\ i_E(t) = (0.4 + 0.05e^{-150t}) \cdot 10^{-3}, \quad t > 0 \text{ s} \end{cases}$$

]

Soluzione

CONSIDERANDO IL CIRCUITO IN FIGURA 276 A REGIME PER $t = 0^-$ s, si ottiene il circuito in figura 277. Dalla KVL-II alla maglia I (figura 277), si nota che la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 è pari a v_C . Considerando la KCL ai tagli nodali ai nodi α e β , si nota che la corrente che scorre nei tre resistori è i_E . Poiché tali

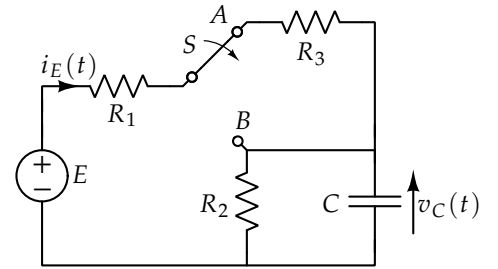


Figura 276: Es 11.3

componenti sono quindi in serie, si può calcolare la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 utilizzando il partitore di tensione. Si ricava dunque che

$$v_C(0^-) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 3V . \quad (142)$$

A questo punto è possibile calcolare, mediante la sua equazione costitutiva, la corrente che scorre nel resistore, ricavando

$$i_E(0^-) = \frac{E}{R_1 + R_2 + R_3} = 0.3\text{mA} . \quad (143)$$

Nell'istante $t = 0$ l'interruttore S commuta la propria posizione e dal circuito in figura 276 si ricava quello in figura 278. Osservando la KVL-II alla maglia I (figura 278) si nota che la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 è pari a v_C . Si calcola dunque che la corrente che attraversa tale resistore è pari a

$$\frac{v_C}{R_2} . \quad (144)$$

Valutando la KVL-II alla maglia II (figura 278), si ricava la tensione ai capi del resistore di resistenza R_1 . Usando quindi l'equazione costitutiva del componente, si ottiene che

$$i_E = \frac{E - v_C}{R_1} . \quad (145)$$

Infine, dalla KCL al taglio nodale al nodo α (figura 278), sostituendo i_C con l'equazione costitutiva del condensatore e risolvendo, si ricava l'equazione di stato del circuito

$$\frac{dv_C}{dt} = - \underbrace{\frac{R_1 + R_2}{CR_1R_2}}_{\lambda_{0+}} v_C + \underbrace{\frac{E}{CR_1}}_{u(t)} , t > 0 . \quad (146)$$

Osservando il circuito in figura 276, per $t < 0$, si nota che i due resistori di resistenza R_1 e R_3 sono tra loro in serie. Si possono sostituire tali componenti con un solo resistore avente resistenza equivalente pari a $R_1 + R_3$. In tal modo si ottiene un circuito che differisce da quello in figura 278 esclusivamente per il valore della resistenza del resistore evidenziato in viola. Dunque, per ricavare l'equazione di stato per $t < 0$ è sufficiente sostituire tutte le occorrenze di R_1 nell'equazione 146 con $R_1 + R_3$. Facendo ciò si ricava l'equazione di stato seguente

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = - \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3}{CR_2(R_1 + R_3)}}_{\lambda_{0-}} v_C(t) + \frac{E}{C(R_1 + R_3)} , t < 0 . \quad (147)$$

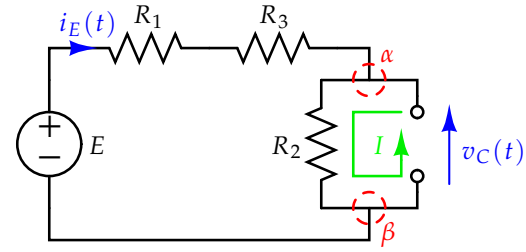


Figura 277: Circuito all'istante $t = 0^-$, con evidenziati i tagli nodali (in rosso) e la maglia (in verde).

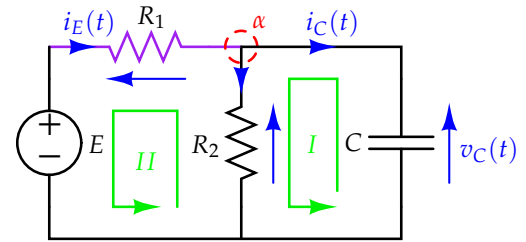


Figura 278: Circuito all'istante $t = 0$, con evidenziati il taglio nodale (in rosso) e le maglie (in verde).

Confrontando i due valori di λ ottenuti (λ_{0-} e λ_{0+}), si nota che sono diversi ma limitati. Dalla teoria è noto che, in tale circostanza, la variabile di stato è continua e quindi

$$v_C(0^-) = v_C(0^+) = v_C(0) . \quad (148)$$

Per calcolare $v_C(t)$ e $i_E(t)$ per $t \geq 0$, è necessario risolvere l'equazione di stato. Per ricavare $v_{C_{IP}}(t)$ si può procedere in due modi diversi.

CONSIDERANDO A REGIME IL CIRCUITO IN FIGURA 278, si ricava quello in figura 279. Osservando tale circuito, si comprende che la tensione ai capi del resistore di resistenza R_2 è uguale alla tensione $v_{C_{IP}}(t)$. Si nota anche che la corrente che percorre i due resistori è la medesima, quindi sono in serie. Dunque è possibile calcolare la tensione $v_{C_{IP}}(t)$ mediante il partitore di tensione. Si ottiene quindi

$$v_{C_{IP}}(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 4V . \quad (149)$$

IN ALTERNATIVA È POSSIBILE RAGIONARE ESCLUSIVAMENTE SULL'EQUAZIONE DI STATO 146. Siccome $u(t)$ è una costante allora anche $v_{C_{IP}}(t)$ sarà costante. Sostituendo $v_{C_{IP}}(t)$ a $v_C(t)$ nell'equazione di stato e considerando tale grandezza come una costante, si ricava che

$$v_{C_{IP}}(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 4V . \quad (150)$$

Ponendo $t = 0$ s e considerando la condizione 148, si può calcolare il valore di k nel modo seguente

$$k = v_C(0) - v_{C_{IP}}(0) = -\frac{ER_2R_3}{(R_1 + R_2 + R_3)(R_1 + R_2)} = -1V . \quad (151)$$

Calcolando il valore numerico di λ_{0+} , si ricava che l'andamento della variabile di stato v_C è

$$v_C(t) = -1e^{-150t} + 4, t \geq 0 .$$

Considerando il risultato appena ottenuto e la relazione 145, si ottiene anche l'andamento della variabile $i_E(t)$, che risulta essere

$$\begin{cases} i_E(0^-) = 0.3 \cdot 10^{-3} \\ i_E(t) = (0.4 + 0.05e^{-150t}) \cdot 10^{-3}, t > 0 \text{ s} . \end{cases}$$

Osservando il risultato appena ottenuto si nota che la corrente $i_E(t)$ ha una discontinuità di prima specie. Ciò è possibile poichè essa non è una variabile di stato.

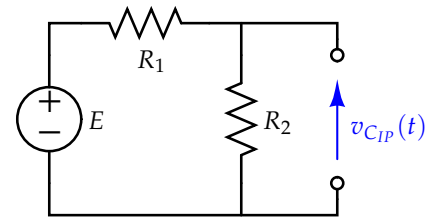


Figura 279: Circuito ottenuto considerando quello in figura 278 a regime.

Es. 11.4

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t) \cdot 1(-t)$. L'interruttore S_1 apre in $t = 0$ s, mentre l'interruttore S_2 chiude in $t = 1$ s. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$ s. Hp: $\frac{E}{2} > \frac{AR}{[1+(\omega CR)^2]}$.

Determinare: $v_C(t)$, $t \geq 0$ (con grafico qualitativo).

Sol: [La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} v_C(t) = \frac{AR}{1+(\omega CR)^2} e^{-\frac{1}{RC}t}, 0 < t < 1 \text{ s} \\ v_C(t) = \left[\frac{AR}{1+(\omega CR)^2} e^{-\frac{1}{RC}} - \frac{E}{2} \right] e^{-\frac{2}{RC}(t-1)} + \frac{E}{2}, t > 1 \text{ s} \end{cases}$$

]

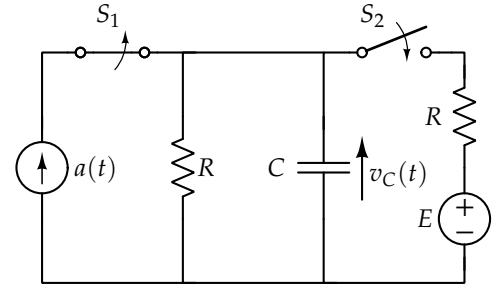


Figura 280: Es 11.4

Es. 11.5

Dati: $e(t) = E \cdot 1(t-2)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 2^-$.

Determinare:

- Il vincolo che soddisfa il parametro α dato che il circuito è asintoticamente stabile trovandosi a regime in $t = 2^-$ s.
- Determinare $i_L(t)$, $t \geq 2$.

Sol: [Il sistema è asintoticamente stabile sse $\alpha < -2 \cup \alpha > -1$. La corrente $i_L(t)$ ha il seguente andamento:

$$i_L(t) = -\frac{E(1+\alpha)}{R(2+\alpha)} e^{-\frac{R(2+\alpha)}{L(1+\alpha)}(t-2)} + \frac{E(1+\alpha)}{R(2+\alpha)}, t > 2 \text{ s}$$

]

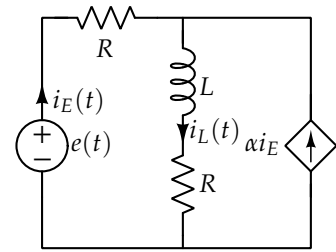


Figura 281: Es 11.5

Es. 11.6

Dati: $e(t) = E \cos(\omega t) \cdot 1(t)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$.

Determinare:

- Il vincolo che soddisfa il parametro g dato che il circuito è asintoticamente stabile trovandosi a regime in $t = 0^-$ s..
- Determinare $v_C(t)$, $t \geq 0$.

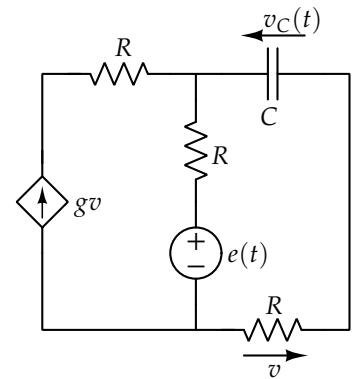


Figura 282: Es 11.6

Sol: [Il sistema è asintoticamente stabile sse $g < \frac{2}{R}$. La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_C(t) = -\frac{E}{1 + [\omega CR(2 - gR)]^2} e^{-\frac{1}{RC(2 - gR)}t} + \frac{E}{1 + [\omega CR(2 - gR)]^2} [\cos(\omega t) + \omega CR(2 - gR) \sin(\omega t)], t > 0s$$

]

Es. 11.7

Dati: $e(t) = E_0 + E \cdot 1(t)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$. Hp: $n \neq 1$.

Determinare $i_R(t)$, $t \geq 0$.

Sol: [La corrente $i_R(t)$ ha il seguente andamento:

$$i_R(t) = -\frac{En^2}{(1 + n^2)R} e^{-\frac{1+n^2}{RC(1-n)^2}t} + \frac{(E_0 + E)n^2}{R(1 + n^2)} - \frac{E_0 + E}{R}, t > 0s$$

]

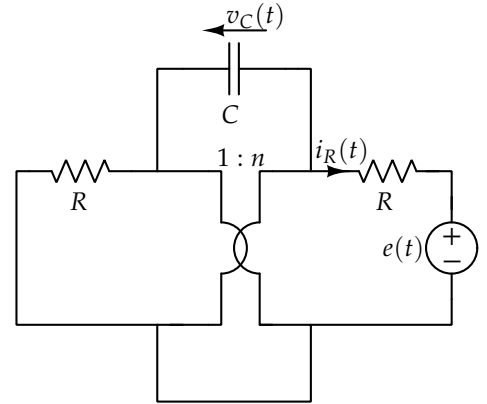


Figura 283: Es 11.7

Es. 11.8

Dati: $a(t) = A \cos(\omega t) + A_0 \cdot 1(t)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$.

Determinare:

- Il vincolo che soddisfa il parametro α dato che il circuito è asintoticamente stabile trovandosi a regime in $t = 0^-$ s.
- Determinare $v_C(t)$, $t \geq 0$.

Sol: [Il sistema è asintoticamente stabile sse $\alpha < 1$. La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$v_C(t) = \frac{RA_0(2 + \alpha)}{(1 - \alpha)} e^{-\frac{(1-\alpha)}{3RC}t} - \frac{(2 + \alpha)RA}{(1 - \alpha)^2 + (\omega 3RC)^2} [(1 - \alpha) \cos(\omega t) + 3\omega RC \sin(\omega t)] - \frac{RA_0(2 + \alpha)}{1 - \alpha}, t > 0s$$

]

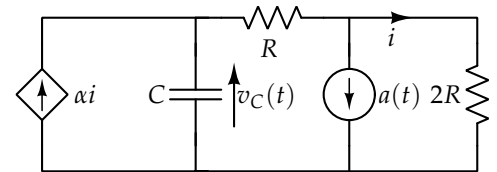


Figura 284: Es 11.8

Es. 11.9

Dati: $e(t) = E \cdot 1(t - 2)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 2^-$.

Determinare:

- Il vincolo che soddisfa il parametro r dato che il circuito è asintoticamente stabile trovandosi a regime in $t = 2^-$.
- Determinare $i_L(t)$, $t \geq 2$.

Sol: [Il sistema è asintoticamente stabile sse $r < \frac{R(1+n^2)}{n}$. La corrente $i_L(t)$ ha il seguente andamento:

$$i_L(t) = \frac{E(R - rn)}{nR^2} (1 - e^{-\frac{n^2 R^2}{[R(1+n^2) - rn]L} (t-2)}), t > 2s$$

]

Es. 11.10

Dati: $E = 10V$, $A = 2A$, $L = 50mH$, $R = 500\Omega$. L'interruttore S viene chiuso in $t = 0s$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$.

Determinare $i_L(t)$, $t \geq 0$.

Sol: [La corrente $i_L(t)$ ha il seguente andamento:

$$i_L(t) = -0.02e^{-5 \cdot 10^3 t} + 0.02, t > 0s$$

]

Es. 11.11

Dati: $E = 60V$, $R_1 = 2k\Omega$, $R_2 = 1k\Omega$, $R_3 = 2\Omega$, $R_4 = 8\Omega$, $\alpha = 0.5$, $L = 1mH$. L'interruttore S chiude in $t_0 = 0s$ e riapre in $t_1 = 1ms$.

Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$.

Determinare $i_L(t)$, $t \geq 0$.

Sol: [La corrente $i_L(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_L(t) = -0.25e^{-8 \cdot 10^3 t} + 1.25, 0 < t < 1ms \\ i_L(t) \approx 0.2499e^{-10^4 (t-10^{-3})} + 1, t > 1ms \end{cases}$$

]

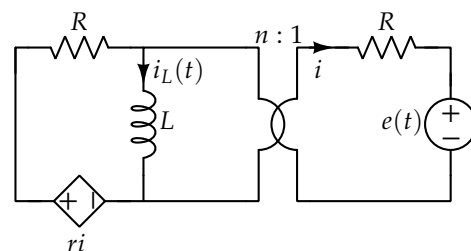


Figura 285: Es 11.9

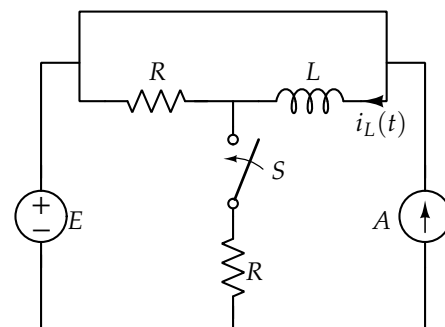


Figura 286: Es 11.10

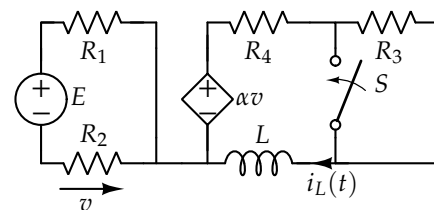


Figura 287: Es 11.11

Es. 11.12

Dati: $E = 6V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$, $L = 3H$, $i_L(0) = 2A$.

L'interruttore si chiude in $T = \ln(4)$ s.

Determinare $i_L(t)$ e $i_2(t)$ per $t \geq 0$ e tracciarne un grafico qualitativo.

Sol: [La corrente $i_L(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_L(t) = -4e^{-0.5t} + 6, & 0 \leq t < T \\ i_L(t) = -4e^{-0.25(t-T)} + 8, & t > T \end{cases}$$

La corrente $i_2(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_2(t) = -2e^{-0.5t} + 4, & 0 \leq t < T \\ i_2(t) = 3, & t > T \end{cases}$$

]

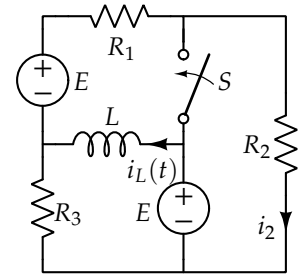


Figura 288: Es 11.12

Es. 11.13

Dati: $E = 2V$, $R_1 = 1k\Omega$, $R_2 = 5k\Omega$, $R_3 = 1k\Omega$, $R_4 = 50\Omega$, $C = 0.2\mu F$, $a(t) = 2 \cdot 1(t - 10^{-3})mA$. L'interruttore S, aperto da molto tempo, viene chiuso all'istante $t_0 = 0$.

Determinare:

- $v_C(t)$ e $v_0(t)$ per $t \geq 0$ e tracciarne un grafico qualitativo.
- Il massimo valore di energia accumulata nel condensatore per $t \geq 0$.

Sol: [La tensione $v_C(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} v_C(t) = -10e^{-1000t} + 10, & 0 \leq t < 1ms \\ v_C(t) \approx 6.3212e^{-1000(t-10^{-3})}, & t > 1ms \end{cases}$$

La tensione $v_0(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} v_0(t) = 10e^{-1000t} - 10, & 0 \leq t < 1ms \\ v_0(t) \approx -6.3212e^{-1000(t-10^{-3})} + 2, & t > 1ms \end{cases}$$

La massima energia accumulata nel condensatore è pari a $W_{C_{max}} \approx 3.9958\mu J$

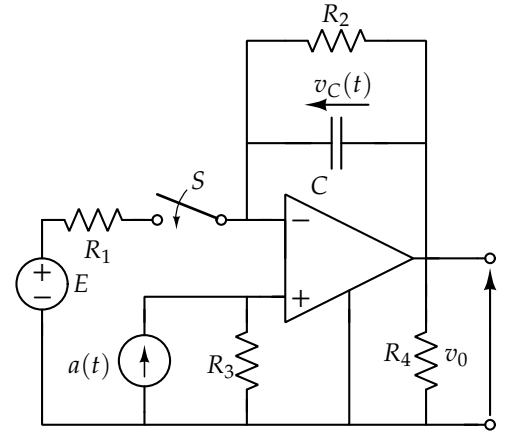


Figura 289: Es 11.13

Es. 11.14

Dati: $e(t) = E \cdot 1(-t)$. Hp: il circuito è a regime in $t = 0^-$ s.

Determinare $i_L(t)$.

Sol: [Il circuito è asintoticamente stabile per $g < -\frac{2}{R} \cup g > -\frac{1}{R}$.

$$i_L(t) = -\frac{E(1+gR)}{(2+gR)R} e^{-\frac{(2+gR)R}{(1+gR)L}t}, t \geq 0]$$

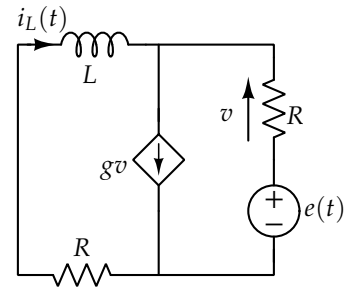


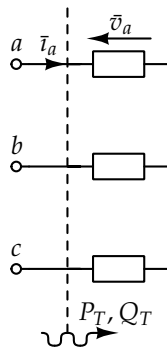
Figura 290: Es 11.14

Premessa: a meno che non sia diversamente specificato, negli esercizi proposti in questa sezione si assumono le seguenti ipotesi:

- Le tensioni e le correnti sono riferite al valore efficace.
- Le grandezze segnate (e.g., \bar{i}_a) sono fasori. Le stesse grandezze non segnate (e.g., i_a) rappresentano il modulo dei fasori.
- I carichi e le impedenze di linea sono equilibrati.
- La terna di generatori di tensione con cui si alimenta la rete è di tipo simmetrico. In ciascun esercizio si specifica soltanto se la terna di tensioni è orientata in sequenza positiva o negativa.

Es. 12.1

Figura 291: Es 12.1



Il carico trifase equilibrato rappresentato in figura, collegato ad una rete alimentata da una terna di tensioni ordinate in sequenza positiva, assorbe una potenza trifase attiva e reattiva pari a P_T e Q_T rispettivamente.

Si considerino i seguenti dati: $P_T = 4\text{kW}$, $Q_T = -5\text{kVAR}$, $\bar{v}_a = -j100\text{V}$, $\omega = 100\text{rad/s}$.

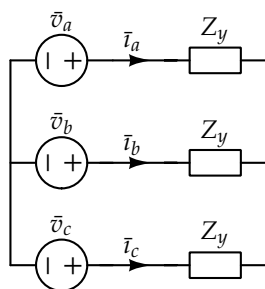
Determinare:

- Il fattore di potenza $\cos(\varphi)$ del carico. Di che natura è il carico? (puramente ohmico, ohmico-induttivo, ohmico-capacitivo, etc.)
- La corrente \bar{i}_a e l'angolo di sfasamento tra \bar{v}_a e \bar{i}_a .
- La tensione concatenata $\bar{v}_l \equiv \bar{v}_{ab}$ (tensione di linea).
- La potenza istantanea trifase $p(t)$.

Sol: $[\cos(\varphi) = 0.625$ (in anticipo): il carico è di natura ohmico-capacitiva. $\bar{i}_a \approx 16.67 - j13.33\text{A}$. La corrente \bar{i}_a è in anticipo rispetto a \bar{v}_a di un angolo pari a circa 51.35° . $\bar{v}_l \approx 173.205\text{V}$. $p(t) = 4\text{kW}$]

Es. 12.2

Figura 292: Es 12.2



Dati: $\bar{v}_a = 230\text{V}$ (sequenza positiva), $Z_y = 2 + j2\Omega$.

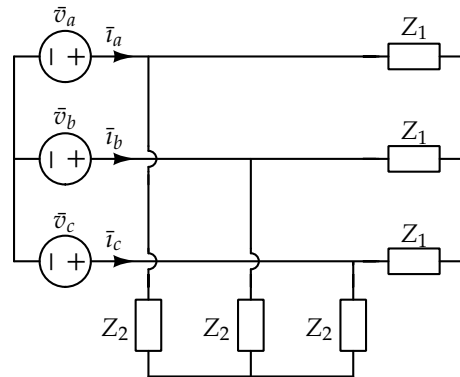
Determinare:

- $\bar{i}_a, \bar{i}_b, \bar{i}_c$.
- La potenza attiva e reattiva assorbita dal carico trifase.

Sol: $[\bar{i}_a = 81.32e^{-j45^\circ}\text{A}, \bar{i}_b = 81.32e^{-j165^\circ}\text{A}, \bar{i}_c = 81.32e^{j75^\circ}\text{A}, P_a^{Z_y} = 39.68\text{kW}, Q_a^{Z_y} = 39.68\text{kVAR}]$

Es. 12.3

Figura 293: Es 12.3



Dati: $\bar{v}_a = 230\text{V}$ (sequenza negativa), $Z_1 = Z_2 = 2 + j2\Omega$.

Determinare:

- $\bar{i}_a, \bar{i}_b, \bar{i}_c$.
- La potenza complessa assorbita complessivamente dai carichi trifase.

Sol: $[\bar{i}_a = 162.63e^{-j45^\circ}\text{A}, \bar{i}_b = 162.63e^{j75^\circ}\text{A}, \bar{i}_c = 162.63e^{j195^\circ}\text{A}, \hat{A}_a^{tot} = 79.35(1 + j)\text{kVA}]$

Soluzione

PER RISOLVERE I CIRCUITI TRIFASE SIMMETRICI ED EQUILIBRATI conviene analizzare il circuito monofase equivalente relativo ad una delle fasi. Per fare ciò è necessario che tutti i carichi e i generatori trifase siano collegati a stella. Se invece, ad esempio, un carico trifase bilanciato fosse collegato a triangolo, sarebbe necessario sfruttare la cosiddetta trasformazione stella-triangolo. Nel caso del circuito in figura 293, i carichi e i generatori trifase sono tutti collegati a stella. Pertanto, considerando ad esempio la fase a , si ottiene il circuito monofase equivalente in figura 294.

Per calcolare le correnti richieste dall'esercizio, è sufficiente trovare una e calcolare le altre sapendo che sono sfasate reciprocamente di 120° in senso antiorario (ossia in sequenza negativa, esattamente

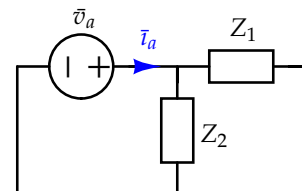


Figura 294: Circuito monofase equivalente ottenuto considerando la fase a nel circuito in figura 293.

come la terna di generatori di tensione trifase che alimenta il circuito). Osservando il circuito in figura 294 si nota che i due carichi sono tra loro in parallelo ed è quindi possibile calcolare la corrente \bar{i}_a come segue

$$\bar{i}_a = \frac{\bar{v}_a}{\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}} = \frac{230}{\sqrt{2}e^{j45^\circ}} \cong 162.63e^{-j45^\circ} \text{ A}$$

$$\cong 115 - j115 \text{ A} .$$

Le altre due correnti richieste risultano quindi essere

$$\bar{i}_b = \bar{i}_a e^{j120^\circ} \cong 162.63e^{j75^\circ} \text{ A}$$

$$\bar{i}_c = \bar{i}_a e^{j240^\circ} \cong 162.63e^{j195^\circ} \text{ A} .$$

Per calcolare la potenza complessa assorbita complessivamente dai carichi trifase del circuito (figura 293) è sufficiente usare la formula seguente

$$\hat{A}_a^{tot} = 3\bar{v}_a \bar{i}^* = \underbrace{79.35 \cdot 10^3}_{P_{tot}} + j \underbrace{79.35 \cdot 10^3}_{Q_{tot}} = 79.35(1 + j) \text{ kVA} . \quad (152)$$

Si osservi che nel calcolo della potenza apparente non compare il fattore 2 al denominatore. Ciò è dovuto al fatto che, come specificato nella premessa di questo capitolo, le tensioni e le correnti indicate nel testo sono riferite al valore efficace e non a quello di picco.

Es. 12.4

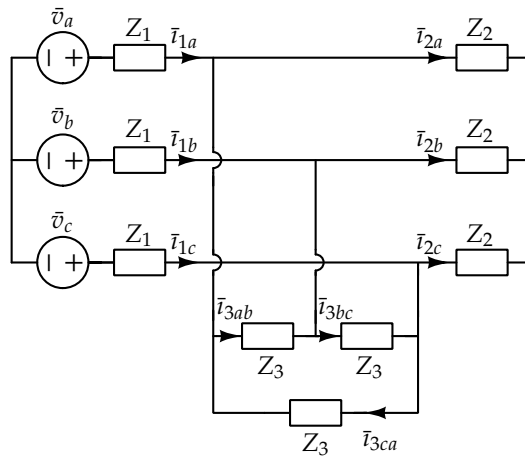
Dati: $\bar{v}_a = 220 \text{ V}$ (sequenza positiva), $Z_1 = j1\Omega$, $Z_2 = 2 - j1\Omega$, $Z_3 = 18\Omega$.

Determinare:

- $\bar{i}_{1a}, \bar{i}_{1b}, \bar{i}_{1c}$.
- $\bar{i}_{2a}, \bar{i}_{2b}, \bar{i}_{2c}$.
- $\bar{i}_{3ab}, \bar{i}_{3bc}, \bar{i}_{3ca}$.

Sol: $[\bar{i}_{1a} = 134.85e^{-j15.87^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{1b} = 134.85e^{-j135.87^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{1c} = 134.85e^{j104.13^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{2a} = 100.36e^{-j8.75^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{2b} = 100.36e^{-j128.75^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{2c} = 100.36e^{j111.25^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{3ab} = 21.59e^{-j5.32^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{3bc} = 21.59e^{-j125.32^\circ} \text{ A}, \bar{i}_{3ca} = 21.59e^{j114.68^\circ} \text{ A}]$

Figura 295: Es 12.4



Es. 12.5

Dati: $V_a(t) = \sqrt{2} 240 \cos(2\pi 50t)$ (sequenza positiva), $R = 10\Omega$,
 $L = 100\text{mH}$, $C = 0.1\text{mF}$.

Determinare:

- Il circuito monofase equivalente associato alla fase a nel dominio dei fasori.
- $i_{2a}(t)$, $i_{2b}(t)$, $i_{2c}(t)$.
- P_2 , Q_2 , A_2 relative alla sezione 1 (vedi figura, in rosso).
- P_1 , Q_1 , A_1 relative alla sezione 2 (vedi figura, in blu).

Sol: [$i_{2a}(t) = \sqrt{2} 3.646 \cos(2\pi 50t - 1.873\text{rad})\text{A}$, $i_{2b}(t) = \sqrt{2} 3.646 \cos(2\pi 50t + 2.316\text{rad})\text{A}$, $i_{2c}(t) = \sqrt{2} 3.646 \cos(2\pi 50t + 0.221\text{rad})\text{A}$, $P_2 = 398.95\text{W}$,
 $Q_2 = 0\text{VAR}$, $A_2 = P_2$, $P_1 = 797.69\text{W}$, $Q_2 = 5749.34\text{VAR}$, $A_2 = 5804.42\text{VA}$]

Es. 12.6

Dati: $\bar{v}_a = 250\text{V}$ (sequenza positiva), $Z = 81 + j45\Omega$, $R_L = 0.5\Omega$,
 $X_L = 2.5\Omega$. Determinare:

- Il circuito monofase equivalente (fase a).

Figura 296: Es 12.5

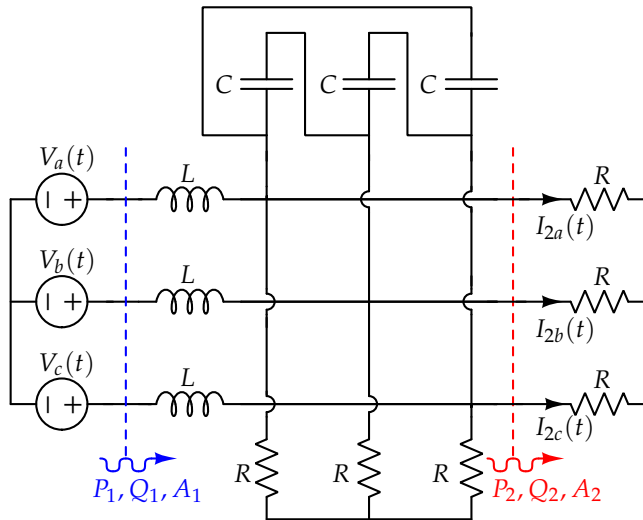
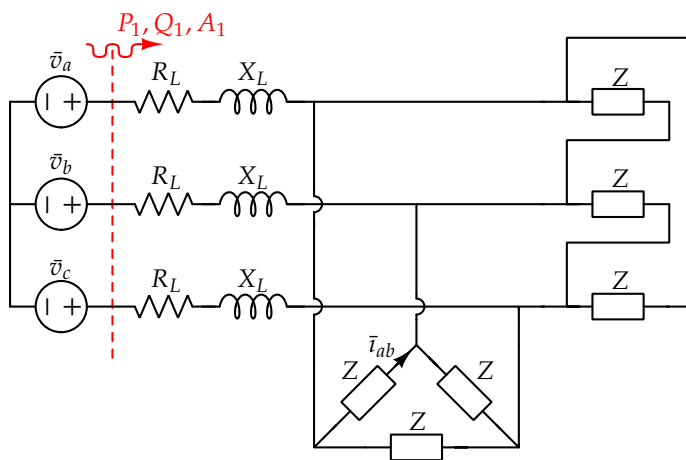


Figura 297: Es 12.6

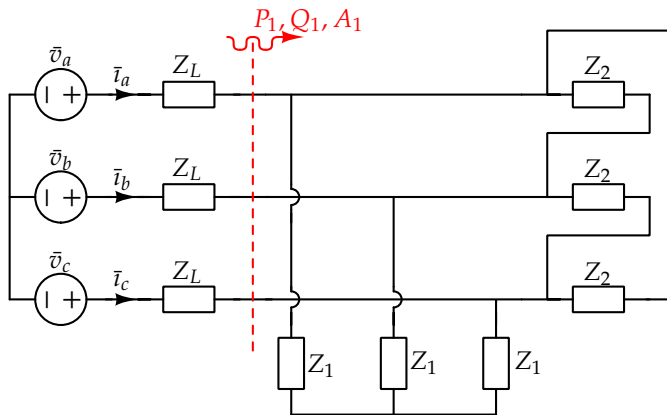


- P_1, Q_1, A_1 relative alla sezione 1 (vedi figura, in rosso).
- La potenza attiva P_d dissipata dalla linea trifase.
- La corrente I_{ab} .

Sol: [$P = 8868.27\text{W}$, $Q = 6334.48\text{VAR}$, $A = 10898.25\text{VA}$, $P_d = 316.72\text{W}$, $i_{ab} = 4.195\text{A}$]

Es. 12.7

Figura 298: Es 12.7



Dati: $\bar{v}_a = 240\text{V}$ (sequenza negativa), $Z_1 = 30 + j30\Omega$, $Z_2 = -j120\Omega$, $Z_L = 2 + j4\Omega$.

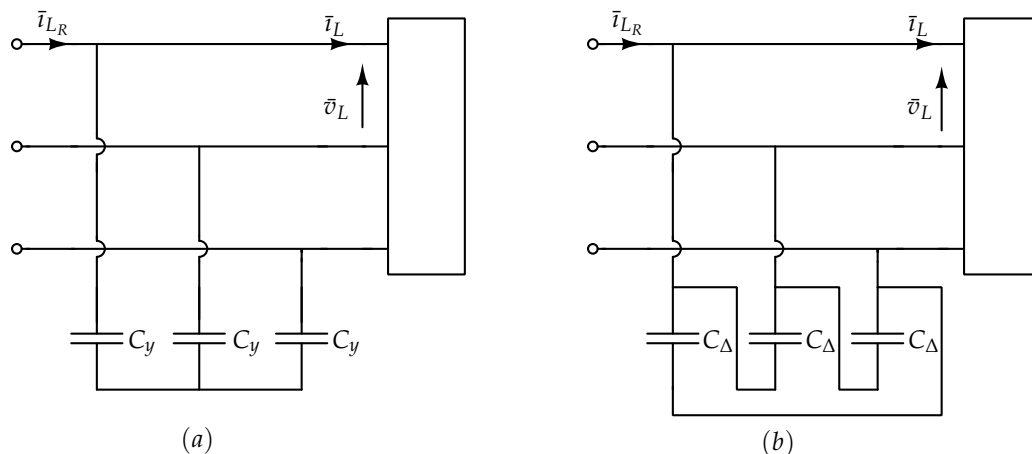
Determinare:

- $\bar{i}_a, \bar{i}_b, \bar{i}_c$.
- P_1, Q_1, A_1 relative alla sezione 1 (vedi figura, in rosso).
- La potenza reattiva Q_d dissipata dalla linea trifase.

Sol: [$\bar{i}_a = 4.46e^{j21.8^\circ}\text{A}$, $\bar{i}_b = 4.46e^{j141.8^\circ}\text{A}$, $\bar{i}_c = 4.46e^{j261.8^\circ}\text{A}$, $P_1 = 2860.12\text{W}$, $Q_1 = -1430.09\text{VAR}$, $A_1 = 3197.72\text{VA}$, $Q_d = 238.7\text{VAR}$]

Es. 12.8

Figura 299: Es 12.8



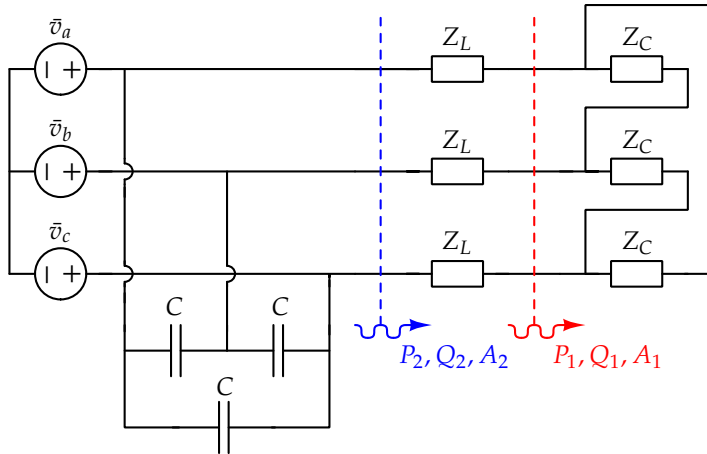
Un carico trifase è caratterizzato da una potenza apparente A_a e un fattore di potenza $\cos(\varphi)$. Si considerino i seguenti dati: $A_a = 700\text{kVA}$, $\cos(\varphi) = 0.85$ (in ritardo), $f = 50\text{Hz}$, $V_L = 15\text{kV}$ (tensione concatenata). Determinare:

- La corrente i_L .
- Si supponga ora di collegare a monte del carico un banco di condensatori trifase. Si calcoli la potenza reattiva complessiva Q_a^c assorbita dal banco di condensatori affinché il carico sia rifasato con $\cos(\varphi_R) = 0.92$ (in ritardo).
- Determinare la capacità dei condensatori necessaria per effettuare tale rifasamento in due casi: condensatori collegati a stella (Figura a) o a triangolo (Figura b).
- Calcolare la corrente i_{L_R} ottenuta in seguito al rifasamento.

Sol: [$i_L = 26.94\text{A}$, $Q_a^c = -115.25\text{kVAR}$, $C_y = 1.63\mu\text{F}$, $C_\Delta = 0.54\mu\text{F}$.
 $i_{L_R} = 24.89\text{A}$]

Es. 12.9

Figura 300: Es 12.9



Dati: $\bar{v}_a = 240\text{V}$ (sequenza positiva), $Z_C = 9 + j9\Omega$, $Z_L = 1 + j1\Omega$, $f = 50\text{Hz}$.

Determinare:

- P_1 , Q_1 , A_1 relative alla sezione 1 (vedi figura, in rosso).
- P_2 , Q_2 , A_2 relative alla sezione 2 (vedi figura, in blu).
- La capacità dei condensatori trifase (collegati a triangolo) C_Δ necessari per rifasare il carico complessivo a $\cos(\varphi_R) = 0.9$ (in ritardo).

Sol: [$P_1 = 16200\text{W}$, $Q_1 = 16200\text{VAR}$, $A_1 = 22910.26\text{VA}$, $P_2 = 21600\text{W}$, $Q_2 = 21600\text{VAR}$, $A_2 = 30547.01\text{VA}$, $C_\Delta = 68.40\mu\text{F}$]

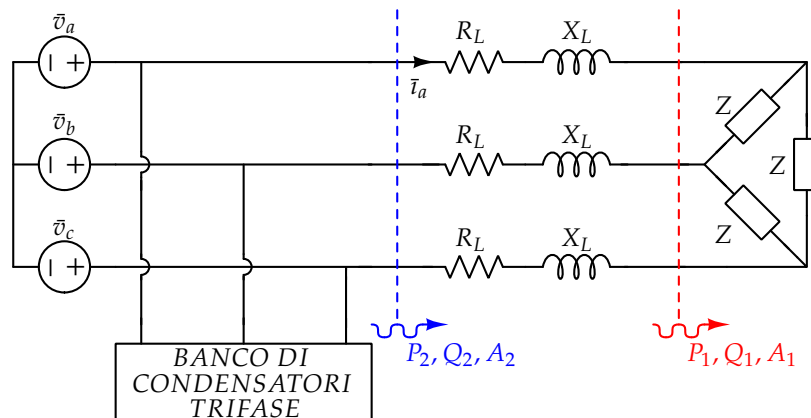
Es. 12.10

Dati: $\bar{v}_a = 250\text{V}$ (sequenza positiva), $Z_C = 39 + j57\Omega$, $X_L = 1\Omega$, $R_L = 2\Omega$, $f = 50\text{Hz}$.

Determinare:

- il circuito equivalente monofase relativo alla fase a.

Figura 301: Es 12.10



- P_1, Q_1, A_1 relative alla sezione 1 (vedi figura, in rosso).
- P_2, Q_2, A_2 relative alla sezione 2 (vedi figura, in blu).
- La capacità dei condensatori trifase necessari per rifasare il carico complessivo a $\cos(\varphi_R) = 0.95$ (in ritardo) in due casi: collegamento a stella (C_Y) e a triangolo (C_Δ).

Sol: [$P_1 = 3900\text{W}$, $Q_1 = 5700\text{VAR}$, $A_1 = 6906.52\text{VA}$, $P_2 = 4500\text{W}$, $Q_2 = 6000\text{VAR}$, $A_2 = 7500\text{VA}$, $C_Y = 76.75\mu\text{F}$, $C_\Delta = 25.58\mu\text{F}$]

Es. 13.1

Una spira di area A viene inserita in un campo magnetico $\vec{B}(t)$ variabile nel tempo. Si considerino i seguenti dati: $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $A = 1\text{m}^2$, $B(t) = 0.1t \text{ Wb/m}^2$.

Determinare le tensioni v_1 e v_2 . Tali tensioni sono uguali? Se la risposta è no, perché?

Sol: $[v_1 = \frac{1}{30}\text{V}, v_2 = -\frac{1}{15}\text{V}]$

Soluzione

OSSERVANDO LA FIGURA 302 si nota che il campo \vec{B} è entrante nel foglio. Scegliendo di orientare la superficie A come il campo \vec{B} , il verso con cui orientiamo la linea L , ovvero il bordo dell'area A , è orario (regola della mano destra) come indicato in figura 303. Si consideri la legge di Faraday-Henry

$$-\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{u}_N dS \quad (153)$$

Dalla teoria è noto che il termine di sinistra $(-\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l})$ è uguale alla somma algebrica delle cadute di tensione lungo il percorso L (figura 303). Tenendo conto di ciò e sostituendo i valori noti nell'equazione 153, si ricava che

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \frac{d}{dt} \int_S 0.1t \underbrace{\hat{u}_N \cdot \hat{u}_N}_{=1} dS \\ v_1 - v_2 &= \frac{d}{dt} \left(0.1t \int_S dS \right) \\ v_1 - v_2 &= 0.1 \text{V} . \end{aligned} \quad (154)$$

Considerando l'equazione costitutiva del resistore, è possibile scrivere che

$$\begin{aligned} v_2 &= 2i , \\ v_1 &= -1i . \end{aligned} \quad (155)$$

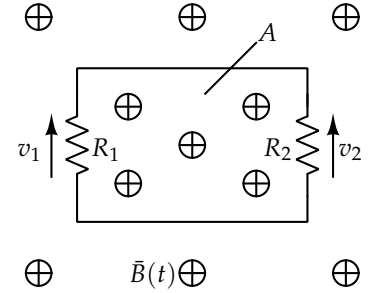


Figura 302: Es 13.1

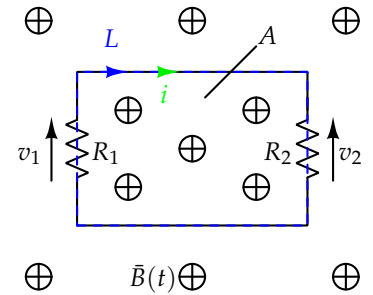


Figura 303: Circuito con evidenziato il percorso L (in blu) e il senso in cui scorre la corrente (in verde).

A partire dalle due equazioni appena ricavate e la relazione che lega le due tensioni (equazione 154), è possibile calcolare il valore della corrente che scorre nel circuito

$$i = -\frac{0.1}{2+1} = -\frac{1}{30} \text{ A} . \quad (156)$$

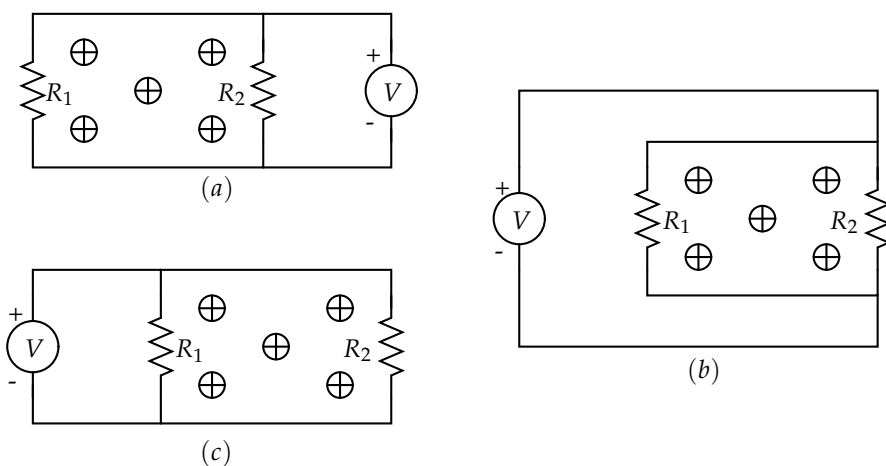
Sostituendo il valore di i appena ricavato nelle equazioni 155, si conclude l'esercizio ottenendo che

$$\begin{aligned} v_2 &= -\frac{1}{15} \text{ V} , \\ v_1 &= \frac{1}{30} \text{ V} . \end{aligned} \quad (157)$$

Le due tensioni non sono uguali perché, essendo il campo elettromagnetico tempo-variante, la legge di Kirchhoff per le tensioni non è valida (vedi capitolo 8.2 delle dispense).

Es. 13.2

Figura 304: Es 13.2



Un voltmetro ideale è collegato nei tre modi indicati in figura. Si determini, spiegandone i motivi, la lettura che si effettuerà col voltmetro per ciascuna delle tre posizioni in cui è posto. Si considerino i seguenti dati: $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 1\Omega$, $A = 1\text{m}^2$, $B(t) = 0.1t \text{ Wb/m}^2$. Sol: [caso (a): $V = -\frac{1}{30} \text{ V}$, caso (b): $V = \frac{1}{15} \text{ V}$, caso (c): $V = \frac{1}{15} \text{ V}$]

Es. 13.3

Dati: $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $l_1 = 1\text{m}$, $l_2 = 50\text{cm}$, $h = 10\text{cm}$,
 $B(t) = 2t \text{ mWb/m}^2$.

Determinare la tensione v .

Sol: [$v = -0.233\text{mV}$]

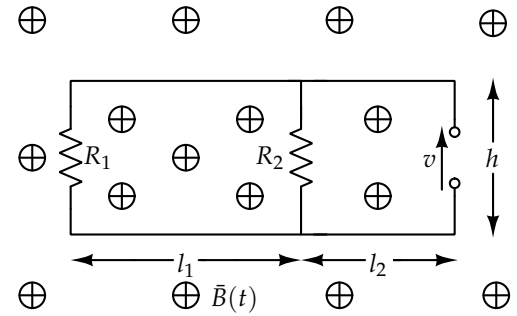


Figura 305: Es 13.3

Es. 13.4

Dati: $R_1 = 50\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $l_1 = 50\text{cm}$, $l_2 = 1\text{m}$, $h_1 = 10\text{cm}$,
 $h_2 = 30\text{cm}$, $B(t) = 2t \text{ mWb/m}^2$.

Determinare la tensione v .

Sol: [$v = 0.533\text{mV}$]

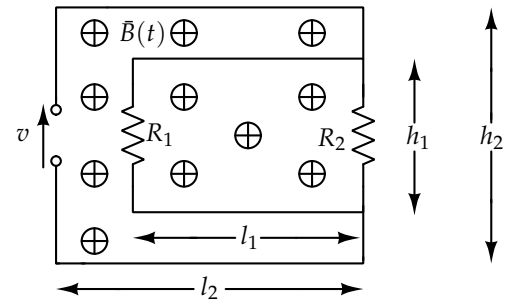


Figura 306: Es 13.4

Es. 13.5

Dati: $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 50\Omega$, $l_1 = 50\text{cm}$, $l_2 = 30\text{cm}$, $h = 20\text{cm}$,
 $B(t) = 10 \sin(2\pi 60t) \text{ mWb/m}^2$.

Determinare la tensione v .

Sol: [$v = 301.593 \cos(2\pi 60t) \text{ mV}$]

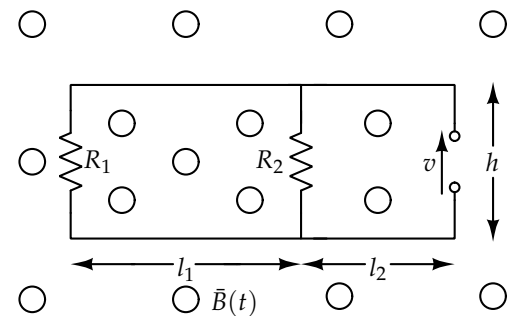


Figura 307: Es 13.5

Es. 13.6

Dati: $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = R_4 = 1\Omega$, $l = 1\text{m}$, $B(t) = 2t^2 \text{ mWb/m}^2$, $l_1 = l_2 = 1\text{m}$.

Determinare la corrente i_x .

Sol: $[i_x(t) = -0.6t \text{ mA}]$

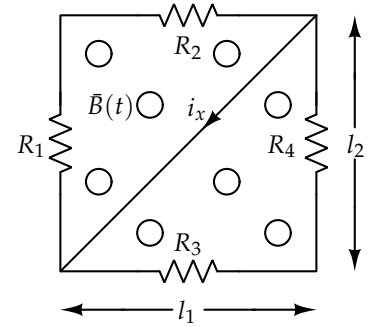


Figura 308: Es 13.6

Es. 13.7

Dati: $R = 2\Omega$, $l_1 = l_2 = 50\text{cm}$, $h = 100\text{cm}$, $B(t) = 8t + 0.1 \text{ Wb/m}^2$.

Determinare la tensione v .

Sol: $[v = 6\text{V}]$

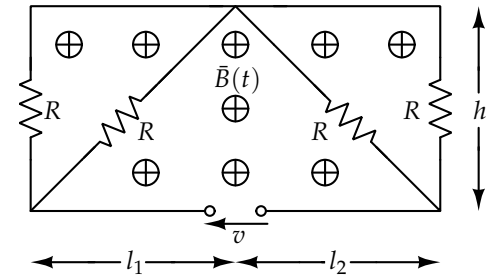


Figura 309: Es 13.7

Es. 13.8

Una coppia di fili perfettamente conduttori è disposta in modo da costituire dei binari lungo i quali un altro filo sottile perfettamente conduttore di lunghezza l si muove con velocità \vec{u} . Un campo magnetico $\vec{B}(t)$, orientato come mostrato in figura, attraversa la spira. Determinare la tensione v ai capi della spira in due casi:

- Caso a: $B(t) = B_0$.
- Caso b: $B(t) = B_0 \cos(\omega t)$.

Sol: [caso (a) $\rightarrow v = -B_0 l u$, caso (b) $\rightarrow v = B_0 l u [\omega t \sin(\omega t) - \cos(\omega t)]$]

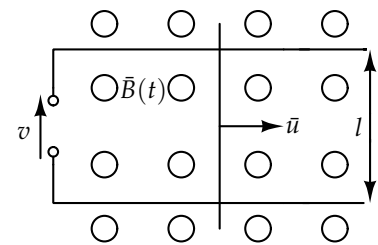


Figura 310: Es 13.8

Es. 13.9

Una coppia di fili perfettamente conduttori è disposta in modo da costituire dei binari lungo i quali un altro filo sottile perfettamente conduttore di lunghezza l si muove con velocità $\vec{u}(t)$. Un campo magnetico $\vec{B}(t)$, orientato come mostrato in figura, attraversa la spira.

Dati: $R = 100\Omega$, $l = 50\text{cm}$.

Determinare la corrente i che circola nella spira in due casi:

- Caso a: $B(t) = 2 \cos(2\pi 60t) \text{ mWb/m}^2$, $u(t) = 10 \text{ m/s}$.
- Caso b: $B(t) = 10 \text{ mWb/m}^2$, $u(t) = 100 \cos(10t) \text{ m/s}$.

Sol: [caso (a) $\rightarrow i \approx 0.1 \cos(2\pi 60t) - 37.7t \sin(2\pi 60t) \text{ mA}$, caso (b) $\rightarrow i = 5 \cos(10t) \text{ mA}$]

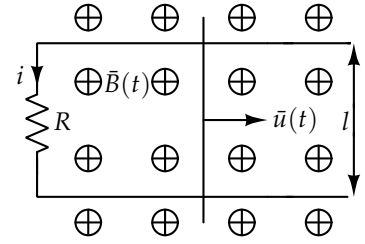


Figura 311: Es 13.9

Es. 13.10

Un campo magnetico uniforme e costante \vec{B} , orientato come mostrato in figura, attraversa una spira circolare. La spira ha un raggio r che decresce nel tempo alla velocità u . Supponendo che il raggio iniziale della spira sia pari a r_0 , determinare la tensione v indotta ai capi della spira.

Dati: $B = 0.01 \text{ Wb/m}^2$, $u = 100 \text{ m/s}$, $r_0 = 10 \text{ cm}$.

Sol: [$v \approx 0.628 - 628.32t \text{ V}$]

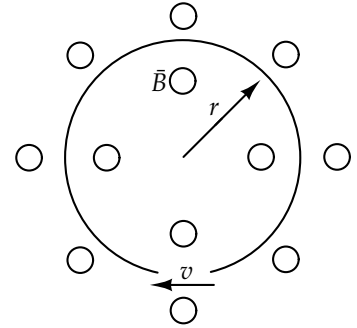


Figura 312: Es 13.10

Es. 13.11

In figura è mostrata una spira rettangolare con resistenza R che ruota in senso antiorario in un campo magnetico costante \vec{B} diretto lungo l'asse y . Un lato della spira giace sull'asse z , mentre gli altri ruotano con una velocità angolare ω . Supponendo che all'istante $t = 0$ la spira giaccia nel piano xz , determinare la corrente i indotta nella spira.

Dati: $R = 0.02\Omega$, $l = 1 \text{ cm}$, $h = 2 \text{ cm}$, $\omega = 2 \text{ rad/s}$, $B = 0.01 \text{ Wb/m}^2$.

Sol: [$i = 0.2 \sin(2t) \text{ mA}$]

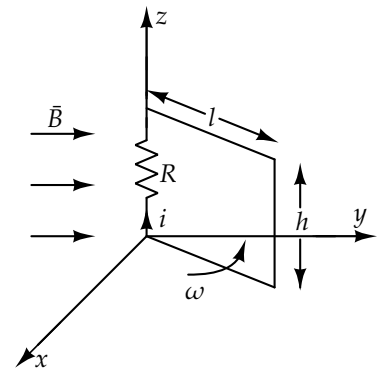


Figura 313: Es 13.11

Es. 13.12

Una spira quadrata di lato l è posta nello spazio libero in prossimità di un conduttore rettilineo che trasporta una corrente $i = I_m \cos(2\pi ft)$. Due dei lati della spira sono paralleli al conduttore e distano da esso d_1 e d_2 (vedi figura). Si determini la tensione v indotta nella spira.

Dati: $l = 20\text{cm}$, $I_m = 0.5\text{A}$, $f = 5\text{kHz}$, $d_1 = 5\text{cm}$, $d_2 = 25\text{cm}$.

Sol: [$v = 1.011 \sin(\pi \cdot 10^4 t)$ mV]

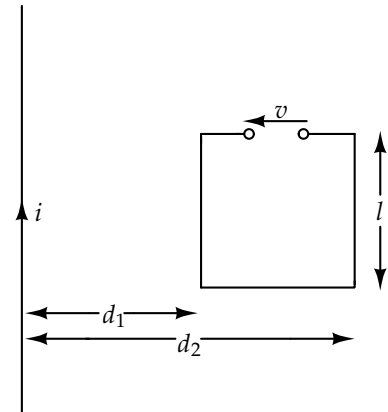


Figura 314: Es 13.12

Es. 13.13

Una spira quadrata di lato l si muove con velocità \vec{u} in una regione parzialmente interessata da un campo magnetico uniforme \vec{B} , diretto perpendicolarmente al piano e orientato come in figura. Sapendo che la posizione della spira al tempo $t = 0$ è quella in figura, determinare l'andamento della corrente $i_R(t)$ e fornirne una rappresentazione su un grafico quotato nell'intervallo $[0; 6\text{s}]$.

Dati: $R = 1\Omega$, $u = 1\text{m/s}$, $l = d_1 = 1\text{m}$, $d_2 = 3\text{m}$, $B = 2\text{Wb/m}^2$.

Sol: [La corrente $i_R(t)$ ha il seguente andamento:

$$\begin{cases} i_R(t) = 0\text{A}, & 0 \leq t < 1\text{s} \\ i_R(t) = 2\text{A}, & 1 \leq t < 2\text{s} \\ i_R(t) = 0\text{A}, & 2 \leq t < 4\text{s} \\ i_R(t) = -2\text{A}, & 4 \leq t < 5\text{s} \\ i_R(t) = 0\text{A}, & 5 \leq t < 6\text{s} \end{cases}$$

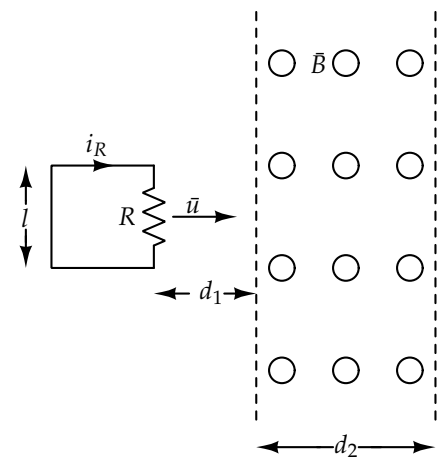


Figura 315: Es 13.13

Es. 14.1

Determinare l'induttanza equivalente L_{eq} .

Sol: $[L_{eq} = \frac{4}{15} \frac{N^2 \mu S}{l}]$

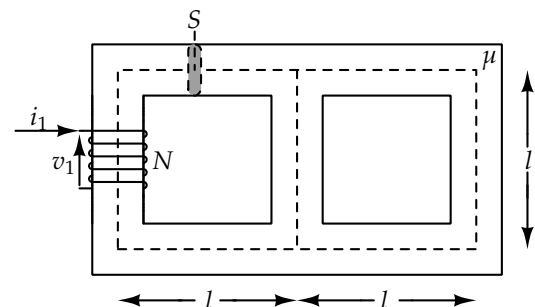


Figura 316: Es 14.1

Es. 14.2

Il toro in figura ha raggi $r \ll R$. Il numero di avvolgimenti è N e la permeabilità magnetica del toro è μ . Determinare l'induttanza equivalente ai morsetti $A - B$.

Sol: $[L_{eq} = \frac{N^2 r^2 \mu}{2R}]$

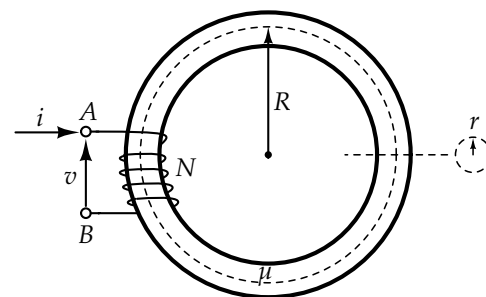


Figura 317: Es 14.2

Es. 14.3

Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

$$\text{Sol: } [L_{11} = \frac{4}{15} \frac{N_1^2 \mu S}{l}, L_{22} = \frac{2}{5} \frac{N_2^2 \mu S}{l}, M = -\frac{1}{5} \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}]$$

Soluzione

CONSIDERANDO LA SCRITTURA SEGUENTE che descrive il legame tra le correnti negli avvolgimenti e i flussi magnetici con essi concatenati,

$$\begin{cases} \phi_1 = L_{11}i_1 + Mi_2 \\ \phi_2 = Mi_1 + L_{22}i_2 \end{cases} \quad (158)$$

i coefficienti di autoinduzione richiesti sono L_{11} e L_{22} , mentre quello di mutua induzione è M .

Dalla figura 318 si ricava il circuito magnetico in figura 319. Il verso di ciascun generatore di forza magnetomotrice è dato dalla regola della mano destra applicata alla corrente che scorre nelle spire degli avvolgimenti (in figura 318). Il verso della corrente magnetica che attraversa ciascun generatore è lo stesso della forza magnetomotrice.

Come le resistenze, anche le riluttanze possono essere calcolate per serie e paralleli. Osservando il circuito magnetico in figura 319, si nota che le riluttanze evidenziate in verde ed in rosso sono tra loro in serie. Sostituendo tali componenti con altri aventi riluttanza equivalente, si ricava il circuito in figura 320.

Per risolvere il circuito magnetico, ovvero determinare la corrente ψ_1 e ψ_2 , si procede come nella risoluzione di un generico circuito elettrico in continua. Potremmo dunque, per esempio, applicare la sovrapposizione degli effetti considerando separatamente il contributo di ciascun generatore di forza magnetomotrice, oppure risolvere il circuito considerando tutti i generatori connessi contemporaneamente. Seguiremo questa seconda strada.

Dalla KCL (magnetica) al taglio nodale al nodo α (figura 320) si comprende che il flusso che scorre attraverso la riluttanza a destra (evidenziata in viola) è pari a $\psi_1 + \psi_2$. Considerando la KVL magnetica alla maglia I (figura 320), si ricava

$$N_2 i_2 = 3\mathcal{R}\psi_1 + 4\mathcal{R}\psi_2 \quad (159)$$

Dalla KVL magnetica alla maglia II (figura 320), si ottiene che

$$N_1 i_1 = 6\mathcal{R}\psi_1 + 3\mathcal{R}\psi_2 \quad (160)$$

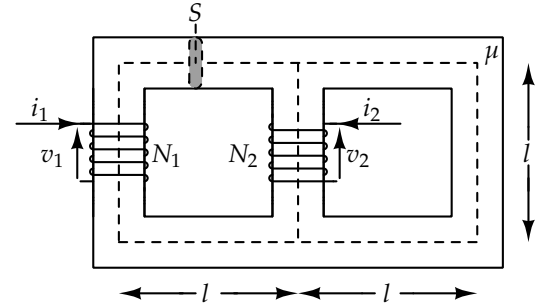


Figura 318: Es 14.3

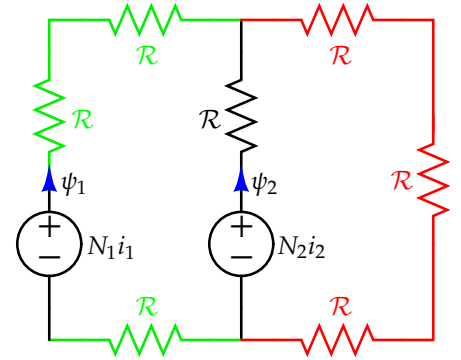


Figura 319: Circuito magnetico con evidenziate (con il medesimo colore) le riluttanze in serie.

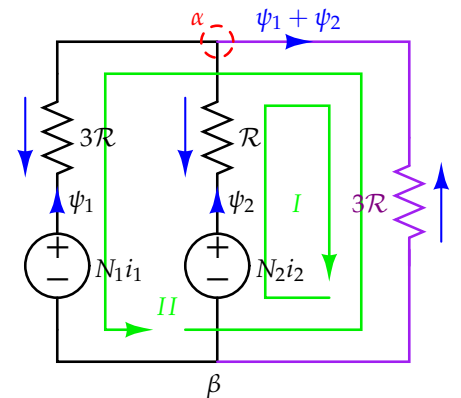


Figura 320: Circuito ottenuto da quello in figura 319 sostituendo le riluttanze equivalenti.

Mettendo a sistema le equazioni 159 e 160 e risolvendo, si ottengono i seguenti valori di ψ_1 e ψ_2

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{4}{15} \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} - \frac{1}{5} \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}} \\ \psi_2 = -\frac{1}{5} \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} + \frac{2}{5} \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}} \end{cases} \quad (161)$$

I flussi concatenati con gli avvolgimenti, si ricavano come

$$\phi_k = N_k \psi_k \quad , \quad (162)$$

con $k = 1, 2$. Utilizzando dunque la formula 162 e ricordando che

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} \quad , \quad (163)$$

si conclude l'esercizio ricavando

$$\begin{cases} \phi_1 = \underbrace{\frac{4}{15} \frac{N_1^2 \mu S}{l}}_{L_{11}} i_1 - \underbrace{\frac{1}{5} \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}}_M i_2 \\ \phi_2 = -\underbrace{\frac{1}{5} \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}}_M i_1 + \underbrace{\frac{2}{5} \frac{N_2^2 \mu S}{l}}_{L_{22}} i_2 \end{cases} \quad (164)$$

IN ALTERNATIVA, sarebbe stato possibile sfruttare il teorema di Millman per ricavare ψ_1 e ψ_2 . Mediante tale teorema è infatti possibile calcolare la tensione magnetica $v_{\alpha\beta}$ come segue

$$v_{\alpha\beta} = \frac{\frac{N_1 i_1}{3\mathcal{R}} + \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}}}{\frac{1}{3\mathcal{R}} + \frac{1}{\mathcal{R}} + \frac{1}{3\mathcal{R}}} = \frac{1}{5} (N_1 i_1 + 3N_2 i_2) \quad . \quad (165)$$

Osservando il circuito magnetico in figura 320, si nota che

$$v_{\alpha\beta} = N_1 i_1 - 3\mathcal{R} \psi_1 = N_2 i_2 - \mathcal{R} \psi_2 \quad . \quad (166)$$

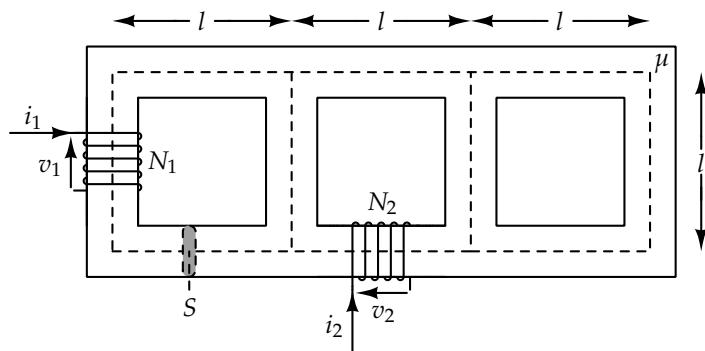
Esplicitando ψ_1 e ψ_2 da tali equazioni e sostituendo il valore di $v_{\alpha\beta}$ calcolato, si ricava che

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{N_1 i_1 - v_{\alpha\beta}}{3\mathcal{R}} = \frac{4}{15} \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} - \frac{1}{5} \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}} \\ \psi_2 = \frac{N_2 i_2 - v_{\alpha\beta}}{\mathcal{R}} = -\frac{1}{5} \frac{N_1 i_1}{\mathcal{R}} + \frac{2}{5} \frac{N_2 i_2}{\mathcal{R}} \end{cases} \quad (167)$$

Procedendo come mostrato in precedenza, si risolve l'esercizio calcolando ϕ_1 e ϕ_2 .

Es. 14.4

Figura 321: Es 14.4

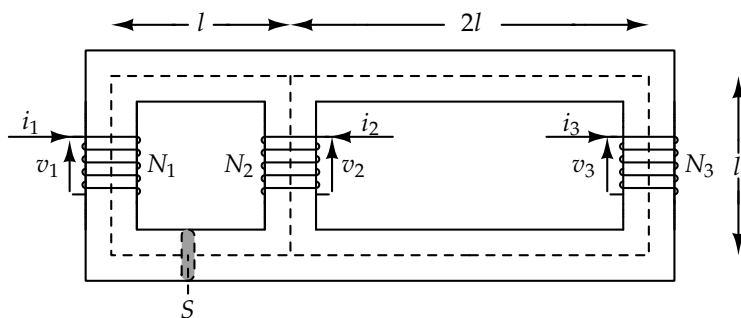


Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Sol: $[L_{11} = \frac{15}{56} \frac{N_1^2 \mu S}{l}, L_{22} = \frac{2}{7} \frac{N_2^2 \mu S}{l}, M = \frac{1}{14} \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}]$

Es. 14.5

Figura 322: Es 14.5



Determinare i coefficienti di auto e mutua induzione dei tre avvolgimenti.

Sol: $[L_{11} = \frac{6}{23} \frac{N_1^2 \mu S}{l}, L_{22} = \frac{8}{23} \frac{N_2^2 \mu S}{l}, L_{33} = \frac{4}{23} \frac{N_3^2 \mu S}{l}, M_{12} = M_{21} = \frac{5}{23} \frac{N_1 N_2 \mu S}{l}, M_{13} = M_{31} = -\frac{1}{23} \frac{N_1 N_3 \mu S}{l}, M_{23} = M_{32} = \frac{3}{23} \frac{N_2 N_3 \mu S}{l}]$

Es. 14.6

Dati: $S = 6\text{cm}^2$, $\delta = 1\text{mm}$, $N_1 = 100$ spire, $N_2 = 200$ spire, $l = 1\text{cm}$.
 Il materiale ferromagnetico ha una permeabilità magnetica $\mu = \mu_0\mu_R$,
 con $\mu_R = 1000$.

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Sol: [$L_{11} \approx 3.75\text{mH}$, $L_{22} \approx 22.45\text{mH}$, $M \approx -7.48\text{mH}$]

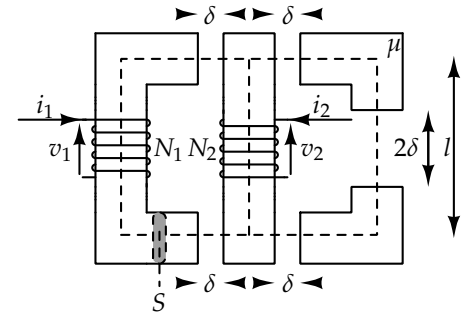


Figura 323: Es 14.6

Es. 14.7

Dati: $S = 6\text{cm}^2$, $\delta = 1\text{mm}$, $N_1 = 100$ spire, $N_2 = 200$ spire.

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Sol: [$L_{11} = 2.6928\text{mH}$, $L_{22} = 12.9254\text{mH}$, $M = 4.3084\text{mH}$]

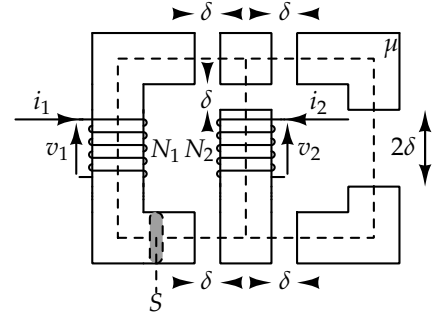


Figura 324: Es 14.7

Es. 14.8

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, calcolare i coefficienti di auto e mutua induzione dei due avvolgimenti.

Sol: [$L_{11} = \frac{2}{3} \frac{N_1^2 \mu_0 S}{\delta}$, $L_{22} = \frac{2}{3} \frac{N_2^2 \mu_0 S}{\delta}$, $M = \frac{1}{3} \frac{N_1 N_2 \mu_0 S}{\delta}$]

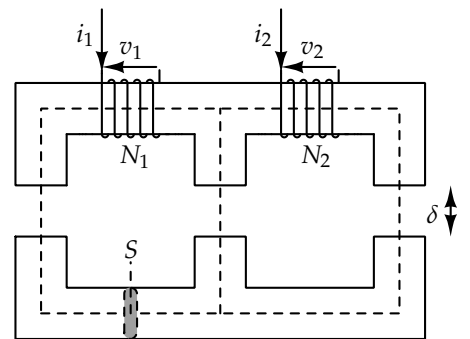


Figura 325: Es 14.8

Es. 14.9

Determinare l'impedenza Z_{eq} vista ai morsetti $A - B$ in ciascuno dei casi indicati.

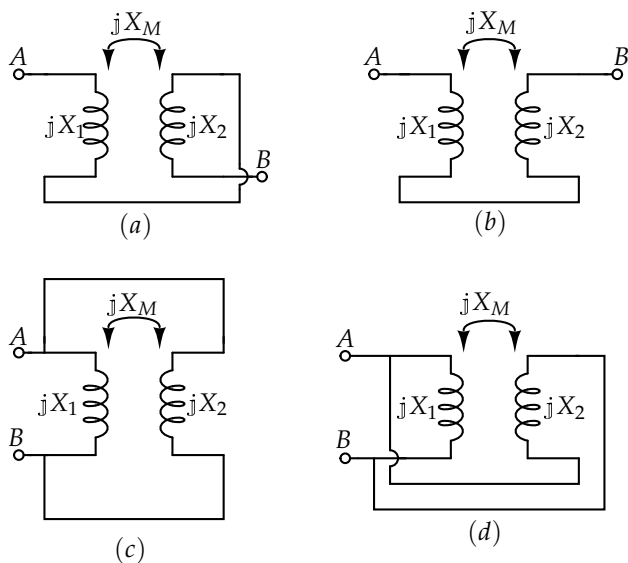


Figura 326: Es 14.9

Sol: [caso (a): $Z_{eq} = j(X_1 + X_2 + 2X_M)$, caso (b): $Z_{eq} = j(X_1 + X_2 - 2X_M)$, caso (c): $Z_{eq} = j \frac{X_1 X_2 - X_M^2}{X_1 + X_2 - 2X_M}$, caso (d): $Z_{eq} = j \frac{X_1 X_2 - X_M^2}{X_1 + X_2 + 2X_M}$]

Es. 14.10

Dati: $\bar{v}_s = 10V$, $R_1 = R_2 = 2\Omega$, $X_1 = X_2 = 2\Omega$, $X_M = 1\Omega$, $X_{C1} = X_{C2} = -2\Omega$.

Determinare \bar{v}_x .

Sol: [$\bar{v}_x = 4 - j2V$]

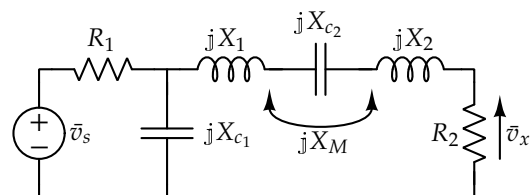


Figura 327: Es 14.10

Es. 14.11

Dati: $v_s(t) = 100 \cos(50t)$, $L_1 = 200\text{mH}$, $L_2 = 50\text{mH}$, $k = 0.8$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a - b$, nella forma $v = Z_{th}i + \bar{E}_{th}$.

Sol: $[\bar{E}_{th} = 31.707\text{ V}, Z_{th} \approx j0.439\Omega]$

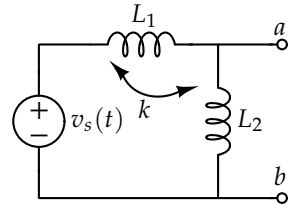


Figura 328: Es 14.11

Es. 14.12

Dati: $i_s(t) = 5 \cos(2\pi 50t)$, $R = 10\Omega$, $L_1 = 12\text{mH}$, $L_2 = 4\text{mH}$, $k = 0.8$, $C = 1\text{mF}$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare il circuito equivalente di Thévenin ai morsetti $a - b$, nella forma $v = Z_{th}i + \bar{E}_{th}$.

Sol: $[\bar{E}_{th} = j27.55\text{ V}, Z_{th} = 10 + j5.33\Omega]$

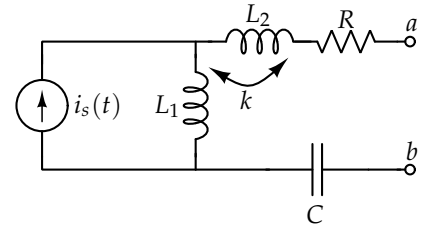


Figura 329: Es 14.12

Es. 14.13

Dati: $v_s(t) = \cos(100t)$, $R_1 = 200\Omega$, $R_2 = 320\Omega$, $L_1 = L_2 = 4\text{H}$, $k = 0.8$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

- Le correnti $i_1(t)$ e $i_2(t)$.
- $W_{MI}(2\text{ms})$, ossia l'energia immagazzinata nel mutuo induttore al tempo $t = 2\text{ms}$.

Sol: $[i_1(t) \approx 2.4615 \cos(100t - 0.644\text{rad})\text{mA}, i_2(t) \approx 1.5377 \cos(100t - 3.111\text{rad})\text{mA}, W_{MI}(2\text{ms}) \approx 3.71\mu\text{J}]$

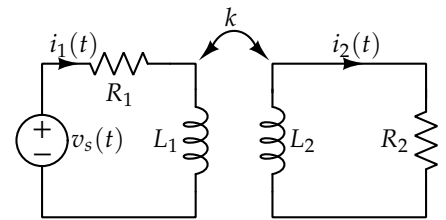


Figura 330: Es 14.13

Es. 14.14

Dati: $v_s(t) = 5 \cos(4t + \frac{\pi}{4})$, $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 12\Omega$, $L_1 = 4\text{H}$, $L_2 = 3\text{H}$, $M = 2\text{H}$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare $v_x(t)$.

Sol: $[v_x(t) \approx 1.656 \cos(4t + 0.6747\text{rad})\text{V}]$

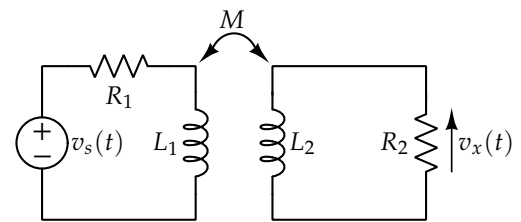


Figura 331: Es 14.14

Es. 14.15

Dati: $R = R_0 = 1\Omega$, $\bar{e} = 10V$ (valore efficace), $\omega = 2000\text{rad/s}$,
 $L_0 = 100\text{mH}$, $L_1 = 2\text{mH}$, $L_2 = 8\text{mH}$, $M = 3.2\text{mH}$, $\alpha = 2$, $C = 50\mu\text{F}$.
 Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Determinare la funzione di rete $F(j\omega) = \frac{\bar{v}_0}{\bar{e}}$ in funzione dei parametri simbolici. Dopodichè, considerando i dati indicati nel testo, calcolare la tensione \bar{v}_0 .

$$\text{Sol: } [F(j\omega) = \frac{\omega^2 C(L_1 L_2 - M^2)}{L_1 + L_2 - 2M} - \alpha \frac{1}{1 + j\omega RC}], \bar{v}_0 = 16.72e^{j174.29^\circ} V]$$

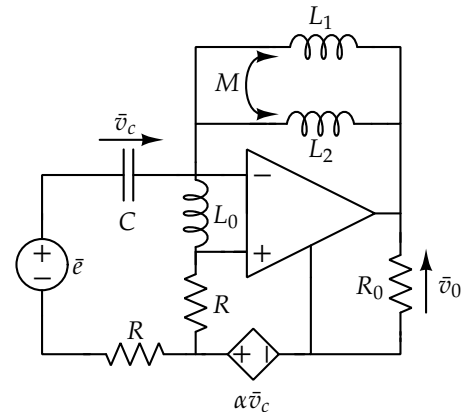


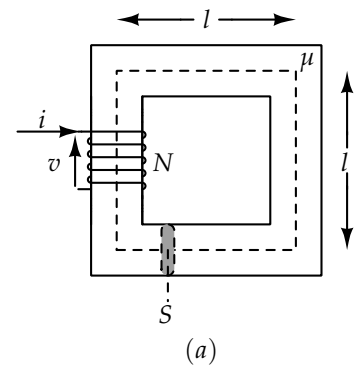
Figura 332: Es 14.15

Es. 14.16

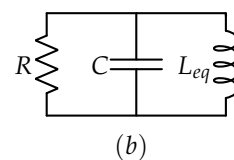
Dati: $l = 5\text{cm}$, $S = 4\text{cm}^2$, $\mu = \mu_0\mu_R = 10^{-4}\text{H/m}$, $N = 1000$ spire.

- Determinare l'induttanza equivalente L_{eq} vista ai morsetti A - B in figura (a).
- Si colleghi successivamente l'induttanza L_{eq} nel circuito in figura (b). Supponendo $R = 1\text{k}\Omega$, determinare il valore di capacità C tale per cui il circuito ha una pulsazione di risonanza pari a $\omega_R = 1000\text{rad/s}$.

$$\text{Sol: } [L_{eq} = 0.2\text{H}, C = 5\mu\text{F}]$$



(a)



(b)

Figura 333: Es 14.16

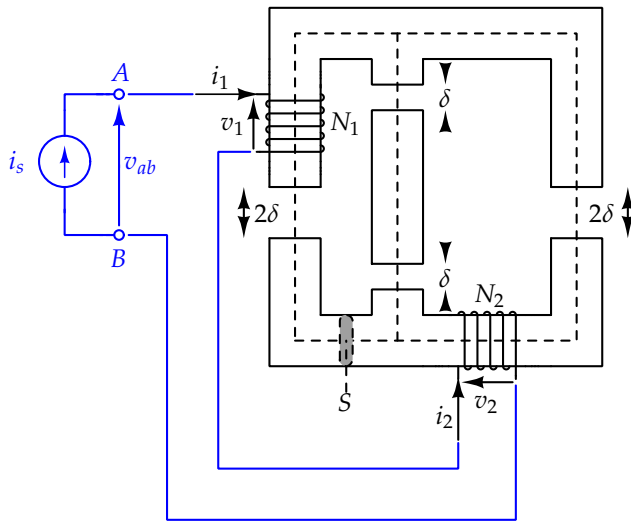
Es. 14.17

Dati: $S = 100\text{cm}^2$, $\delta = 2\text{mm}$, $N_1 = 200$ spire, $N_2 = 100$ spire,
 $i_s = 5\cos(10t)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, determinare:

- I parametri di auto e mutua induttanza dei due avvolgimenti.
- Si supponga di collegare gli avvolgimenti ad un generatore di corrente (vedi figura, in blu). Calcolare l'induttanza equivalente ai morsetti A - B del generatore di corrente. Calcolare infine $v_{ab}(t)$ a regime.

Figura 334: Es 14.17



Sol: $[L_{11} = 83.776\text{mH}, L_{22} = 20.944\text{mH}, M = 20.944\text{mH}, L_{ab} = 146.608\text{mH}, v_{ab}(t) \approx 7.3304 \cos(10t + \frac{\pi}{2})\text{V}]$

Es. 14.18

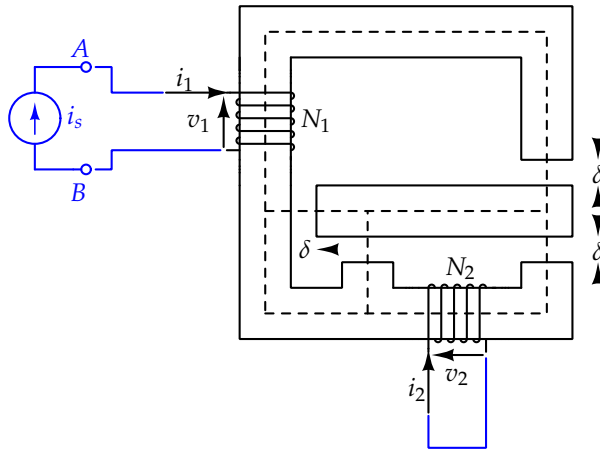
Dati: $S = 100\text{cm}^2$, $\delta = 1\text{mm}$, $N_1 = 200$ spire, $N_2 = 100$ spire, $i_s = \sqrt{2}\cos(\omega t + \frac{3}{4}\pi)$. Hp: il circuito è in regime sinusoidale permanente.

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, determinare:

- I parametri di auto e mutua induttanza dei due avvolgimenti.
- Si supponga di collegare l'avvolgimento a sinistra ad un generatore di corrente e di chiudere con un corto circuito l'avvolgimento a destra (vedi figura, in blu). Calcolare l'induttanza equivalente ai morsetti A - B del generatore di corrente. Calcolare infine la corrente $i_2(t)$ che scorre a regime nell'avvolgimento chiuso in corto circuito.

Sol: $[L_{11} = 376.991\text{mH}, L_{22} = 94.248\text{mH}, M = 62.832\text{mH}, L_{ab} = 335.103\text{mH}, i_2(t) = -\sqrt{2}0.667 \cos(\omega t + \frac{3}{4}\pi)\text{A}]$

Figura 335: Es 14.18



Es. 14.19

Dati: $S = 100\text{cm}^2$, $\delta = 1\text{mm}$, $N_1 = 100$ spire, $N_2 = 200$ spire,
 $v_s(t) = 4\text{V}$, $R = 2\Omega$. Hp: il circuito è a regime.

Supponendo $\mu \gg \mu_0$, determinare:

- I parametri di auto e mutua induttanza dei due avvolgimenti.
- Si supponga di collegare gli avvolgimenti ad un generatore reale di tensione (vedi figura, in blu). Calcolare l'induttanza equivalente ai morsetti A - B e l'energia immagazzinata a regime nel mutuo induttore W_{MI} .

Sol: [$L_{11} = 209.44\text{mH}$, $L_{22} = 335.10\text{mH}$, $M = 167.55\text{mH}$, $L_{ab} = 209.44\text{mH}$, $W_{MI} = 418.88\text{mJ}$]

Figura 336: Es 14.19

