Esercitazioni di Analisi 2

DIFFERENZIABILITA', PIANO TANGENTE

1. Sia $f(x,y) = x\sqrt[3]{y}$.
   (a) Mostra che f è differenziabile in $(0,0)$. [Utilizza la definizione]
   (b) Stabilisci dove f è differenziabile. $[y \neq 0 \vee (0,0)]$

2. Stabilisci dove è differenziabile.la funzione $f(x,y) = |x \sin(xy)|$ $[(xy \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}) \vee x = 0]$

3. Sia $f(x,y) = \sqrt[5]{x^4y^2}$.
   (a) Stabilisci, usando la definizione, se f è differenziabile in $(0,0)$. [Si]
   (b) Calcola $D_{\overrightarrow{v}} f(0,0)$ rispetto al versore $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. $[D_{\overrightarrow{v}} f(0,0) = 0]$

4. Determina l'insieme dei punti in cui è necessario studiare la differenziabilità della funzione $f(x,y) = \sqrt[3]{y^2 - x^3}$ $\left[|y| = \sqrt{x^3}\right]$

5. Stabilisci se le seguenti funzioni sono differenziabili nell'origine:
   (a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ [No]
   (b) $f(x,y) = |x| \log(1+y)$ [Si]

6. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$
   dimostra che f è continua ma non differenziabile nell'origine.

7. Considera la funzione $f(x,y) = \begin{cases} x^2y^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$
   (a) Determina l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in cui f è continua. $[\mathbb{R}^2]$
   (b) Determina l'insieme dei punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in cui f ammette derivate parziali e calcolale.
   $[\mathbb{R}^2;$ $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2xy^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{2}{x} \sin \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$,
   $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} 2x^2 \cos \dfrac{1}{x^2y^2} + \dfrac{2}{y} \sin \dfrac{1}{x^2y^2} & \text{se } x \neq 0 \wedge y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \vee y = 0 \end{cases}$ $]$
   (c) Determina se $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sono continue nell'origine. [No]

(d) Determina se f è differenziabile nell'origine. [Si]

8. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Calcola le derivate parziali di f nell'origine. $\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1;\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1\right]$

   (b) Stabilisci se f è differenziabile in $(0,0)$. [No (definizione)]

9. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \ln(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } x > 0 \wedge y > 0 \\ y^2 & \text{altrove} \end{cases}$

   (a) Stabilisci se f è continua in $(0,1)$. [No]

   (b) Stabilisci se f è differenziabile in $(0,1)$. [No]]

   (c) Stabilisci se f è continua in $(0,0)$. [Si]

   (d) Stabilisci se f è differenziabile in $(0,0)$. [No (definizione)]

10. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \sin(xy)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Studia la continuità di f in $\mathbb{R}^2$. $\left[f \text{ è continua in } \mathbb{R}^2\right]$

   (b) Calcola tutte le derivate direzionali di f nell'origine (se esistono). $\left[D_{\overrightarrow{v}} f(0,0) = \sin^2\theta \cos\theta\right]$

   (c) Stabilisci se f è differenziabile in $(0,0)$.
   [No, non è soddisfatta la formula del gradiente (oppure definizione)]

11. Sia $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y \ln\left(1+xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   (a) Studia la continuità di f in $\mathbb{R}^2$. $\left[f \text{ è continua in } dom(f) \subset \mathbb{R}^2\right]$

   (b) Calcola tutte le derivate direzionali di f nell'origine (se esistono). $\left[D_{\overrightarrow{v}} f(0,0) = \sin^4\theta \cos\theta\right]$

   (c) Stabilisci se f è differenziabile in $(0,0)$.
   [No, non è soddisfatta la formula del gradiente (oppure definizione)]

12. **Piano tangente** (la differenziabilità delle funzioni assegnate nel punto indicato può essere stabilita facilmente con il teorema del differenziale totale (condizione sufficiente di differenziabilità) o con considerazioni di carattere generale sulla natura della funzione (es.: polinomi, funzioni razionali ecc.))

   (a) Calcola l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = e^x \sin y$ in $(1, \pi, f(1,\pi))$, dopo averne giustificato l'esistenza. Calcola inoltre $D_{\overrightarrow{v}} f(1,\pi)$, dove $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}\right)$.

   $$\left[\begin{array}{l} z(x,y) = f(1,\pi) + \overrightarrow{\nabla} f(1,\pi) \cdot (x-1, y-\pi) = -e(y-\pi); \\ D_{\overrightarrow{v}} f(1,\pi) = \overrightarrow{\nabla} f(1,\pi) \cdot \overrightarrow{v} = -\dfrac{4}{5} e \end{array}\right]$$

(b) Determina il piano tangente alla funzione $f(x,y)=\log\left(x^2+y^4\right)$ in $P=(1,-1,f(1,-1))$.
$[z=\log 2+(x-1)-2(y+1)]$

(c) Sia $f(x,y)=\dfrac{y^2\left(e^x-1\right)}{x^2+y^2}$ e sia $z=z(x,y)$ il piano tangente ad f nel punto $(1,1,f(1,1))$. Calcola l'equazione di z e $z(0,1)$.
$\left[z(x,y)=\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{e-1}{2}y;\ z(0,1)=\dfrac{e}{2}-1\right]$

(d) Calcola l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)=\left(x^2+y^2\right)^{-2}$ in $(1,1,f(1,1))$.
$\left[z(x,y)=\dfrac{5}{4}-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}\right]$

(e) Scrivi l'equazione del piano tangente a $f(x,y)=x^2(y-1)$ nel punto $(1,1,0)$.
$[z=y-1]$

(f) Calcola l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)=e^{\sqrt{2x-y}}$ in $\left(3,2,e^2\right)$.
$\left[z(x,y)=\dfrac{e^2}{2}x-\dfrac{e^2}{4}y\right]$

(g) Scrivi l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione $z=f(x,y)=x^2-2y^2$ nel punto $A(1,1,f(1,1))$.
$[z=2x-4y+1]$

(h) Verifica che i piani tangenti al grafico della funzione $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}-x$ passano tutti per l'origine.

(i) Calcola l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y)=\cos xy$ in $(\pi,1,-1)$.
$[z(x,y)=-1]$

13. Sia $f(x,y)=(x+1)y+\ln(1+2x)$

(a) Calcola $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)$ e determina massimo e minimo di $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)\cdot\overrightarrow{v}$ al variare del generico versore $\overrightarrow{v}$ del piano xy.
$$\left[\begin{array}{l}\text{Massimo per } \theta=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right),\ \text{corrispondente a } \overrightarrow{v}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right);\\ \text{minimo per } \theta=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\pi,\ \text{corrispondente al versore opposto al precedente.}\end{array}\right]$$

(b) Verifica che $\overrightarrow{\nabla} f(0,0)$ è ortogonale in $(0,0)$ alla linea di equazione $y=-\dfrac{\ln(1+2x)}{1+x}$.

14. Data la superficie S di equazione $z=x^y$, individua i punti P in cui il piano tangente a S è parallelo al piano xy.
$\left[\text{Deve essere } \overrightarrow{\nabla} f(x,y)=(0,0);\ P(1,0,1);\ \text{il piano ha equazione } z=1.\right]$

15. Considera la funzione $f(x,y)=x\sin y$. Individua in quale direzione $D_{\overrightarrow{v}}f(1,1)=0$.
$$\left[\begin{array}{l}f \text{ è differenziabile in } (1,1),\ \text{vale la formula del gradiente } D_{\overrightarrow{v}}f(1,1)=\overrightarrow{\nabla} f(1,1)\cdot\overrightarrow{v},\ \text{quindi}\\ \text{la derivata direzionale è nulla nella direzione ortogonale al gradiente: } \overrightarrow{v}=\pm(\cos 1,-\sin 1)\end{array}\right]$$

16. Considera la funzione $f(x,y) = (x+y)^2$ in un intorno di $P(1,1)$. In quale direzione $D_{\overrightarrow{v}} f(1,1)$ è massima e in quale minima? In quale direzione $D_{\overrightarrow{v}} f(1,1) = 0$?

17. Data la funzione $f(x,y) = y^4 e^{3x}$, individua in quale direzione $D_{\overrightarrow{v}} f(1,1) = 0$. $\left[\overrightarrow{v} = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right]$

18. Data la superficie di equazione $z = 3x^2 - 3y^2 + 2x - xy$ e il punto $P(1,1)$, nell'intorno di P:

    (a) qual è la direzione di massima pendenza? Quanto vale la massima pendenza?
    (b) in quali direzioni la pendenza sale o scende?
    (c) in quale direzione la pendenza è di $30°$?
    (d) in quale direzione la pendenza è $\alpha = \arctan(7)$?