ANALISI MATEMATICA 2
SVOLGIMENTO
5 FEBBRAIO 2018

1

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ infatti $0 \le |f(x,y)| \le |x| \, |e^{\arctan x} - 1| \to 0$

$f(0,x) = f(y,0) = 0 \implies \nabla f(0,0) = (0,0)$

inoltre $\lim_{t\to 0} \dfrac{f((0,0)+t(v_1,v_2)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(e^{\arctan tv_1} - 1)t^3 v_1 v_2^2}{t^3} = 0$

$\forall (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \|(v_1,v_2)\| = 1$ quindi

$D_{\underline{v}} f(0,0) = 0 \quad \forall \underline{v}$ (f può essere diff, $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (e^{\arctan x} - 1) \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$ infatti

$\left| (e^{\arctan x} - 1) \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \le |e^{\arctan x} - 1| \to 0$

(in alternativa $\lim_{\rho\to 0} (e^{\arctan(\rho\cos\vartheta)} - 1) \cos\vartheta \sin^2\vartheta = 0$

unif risp a ϑ –)

FACOLTATIVO

in $(1,2)$ $\quad f(1,2) = \frac{4}{5}\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right)$

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{\arctan x} \frac{1}{1+x^2} \left(\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right) + \left(e^{\arctan x} - 1\right) \frac{y^2(x^2+y^2) - 2x(xy^2)}{(x^2+y^2)^2}, \right.$$

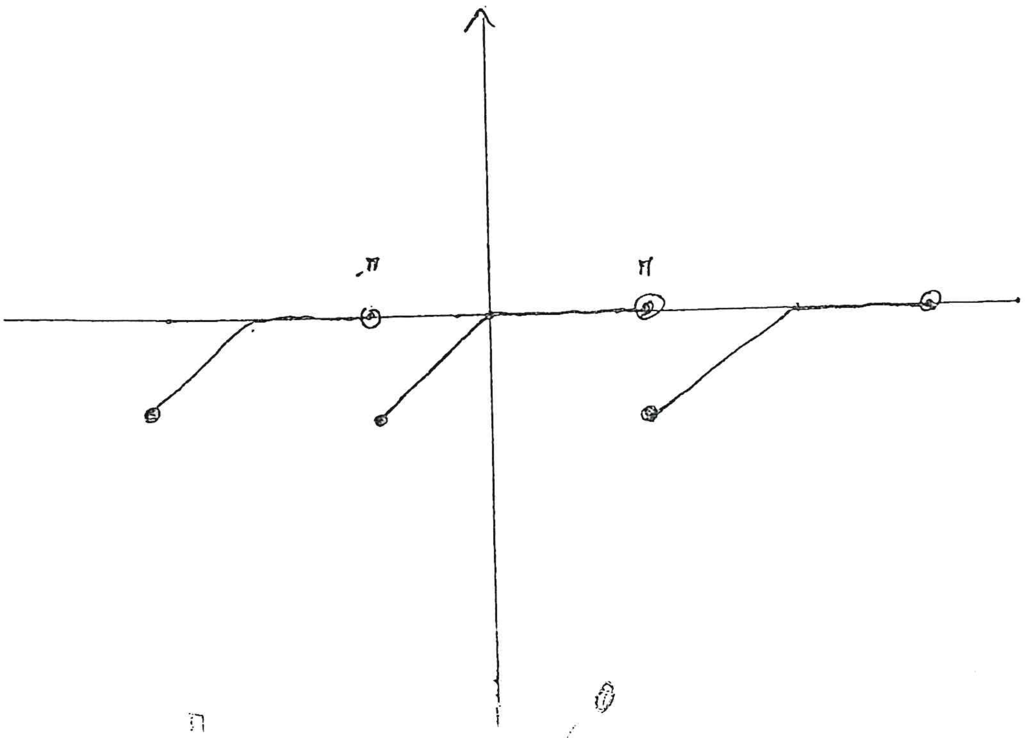
$$\left. \left(e^{\arctan x} - 1\right) \frac{2yx(x^2+y^2) - 2y\,xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right)$$

$$\nabla f(1,2) = \left(e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{2}{5} + \left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \frac{12}{25}, \left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \frac{4}{25} \right)$$

$$= \left(e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{22}{25} - \frac{12}{25}, \left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \cdot \frac{4}{5} \right)$$

$$z = \frac{4}{5}\left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) + \left(e^{\frac{\pi}{4}} \frac{22}{25} - \frac{12}{25}\right)(x-1) + \left(e^{\frac{\pi}{4}} - 1\right) \cdot \frac{4}{25} (y-2)$$

(2) Grafico di f



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\,dx = -\frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right) = \begin{cases} 0 & n \text{ pa} \\ +\frac{2}{\pi n^2} & n \text{ disp} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,dx = \int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{\pi n^2} \cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \right)$$

1) la serie converge in media quadratica su ogni intervallo limitato di R; converge puntualmente ad f dove f è continua; converge a $\frac{\pi}{2}$ per $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) la convergenza totale su $(-\pi, \pi)$ implica la convergenza totale su $[-\pi, \pi]$, impossibile perché f non è continua mentre gli addendi lo sono.

③ Eq. caratt. dell'eq omogenea associata -

a) $\lambda^3 - \alpha\lambda^2 + \lambda - \alpha = 0$ cioè $(\lambda^2+1)(\lambda-\alpha) = 0$

$\varphi_1(t) = \cos t$

$\varphi_2(t) = \sin t$ $\qquad \varphi(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 e^{\alpha t}$

$\varphi_3(t) = e^{\alpha t}$

b) se $\alpha \neq 0$ $\quad \psi_\alpha(t) = -\frac{1}{\alpha}$ è soluzione

se $\alpha = 0$ l'eq diventa $y''' + y' = 1$ ed una

soluz particolare è $\psi_0(t) = t$ -

quindi

$\alpha \neq 0 \quad \psi(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}$

$\alpha = 0 \quad \psi(t) = k_1 \cos t + k_2 \sin t + k_3 + t$

c) per $\alpha = 0$ non esistono soluzioni periodiche -

per $\alpha \neq 0$ sono periodiche le soluzioni con $k_3 = 0$

d) NO, per la presenza del termine $k_3 e^{\alpha t}$ per $\alpha \neq 0$

e per la presenza di t nel caso $\alpha = 0$