



POLITECNICO
MILANO 1863

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

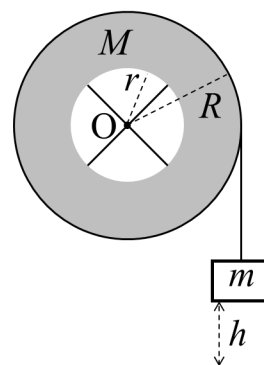
FISICA
Seconda prova in itinere del 13 giugno 2022

Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

1.

Un blocco di massa m è attaccato a un filo di massa trascurabile, che è avvolto intorno a un cilindro omogeneo di massa $M = 2m$ e raggio R , avente un foro nel centro di raggio $r = R/2$. Il cilindro è libero di girare, con attrito trascurabile, intorno a un asse orizzontale fisso passante per il suo centro (indicato con O in figura). Detto I il momento d'inerzia del cilindro rispetto all'asse di rotazione del cilindro, si calcolino:

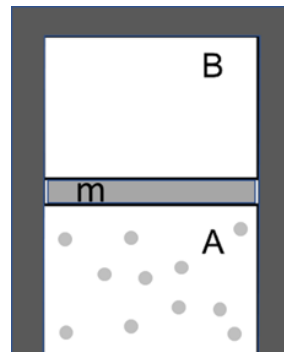
- la velocità del blocco di massa m , dopo che il blocco è sceso di un tratto verticale h a partire dalla quiete; (4 punti)
- la tensione della fune durante il moto. (4 punti)
- il momento d'inerzia del cilindro forato rispetto all'asse di rotazione; (3 punti)



2.

È dato un recipiente cilindrico di sezione S , rigido, adiabatico tranne una base diatermica (vedi figura). Il recipiente è diviso in due parti (A e B) da un pistone di massa m pure adiabatico, mobile senza attrito. In A sono contenute n moli di gas perfetto monoatomico a temperatura T_0 , mentre in B c'è il vuoto. Il sistema è inizialmente in equilibrio termodinamico. Tramite la base diatermica si fornisce al gas una quantità di calore Q , molto lentamente. A valle dell'avvenuta trasformazione, si calcoli:

- la temperatura finale del gas; (4 punti)
- il lavoro compiuto dal gas; (3 punti)
- la variazione dell'entropia del gas e dell'Universo. (4 punti)



3.

Si consideri una macchina termica generica operante tra due serbatoi, che scambia il calore Q_1 con la sorgente alla temperatura T_1 e il calore Q_2 con la sorgente a temperatura T_2 , con $T_2 > T_1$:

- Utilizzando il Teorema di Carnot, si ricavi l'espressione che lega i calori scambiati dalla macchina normalizzati alle temperature delle sorgenti (detta anche disuguaglianza di Clausius); (6 punti)
- Utilizzando il risultato del punto a), si calcoli la variazione di entropia dopo un ciclo intero per la macchina, per le sorgenti di calore e per l'universo, nei due casi di macchina reversibile o irreversibile (5 punti)

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

Soluzione

1.

- a) La velocità finale v del blocco può essere ricavata dalla conservazione dell'energia meccanica totale. Presa la posizione iniziale del blocco come riferimento per le altezze e posto I il momento d'inerzia del cilindro cavo, risulta:

$$E_M^{(ini)} = 0$$
$$E_M^{(fin)} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m v^2 + m g (-h) = \frac{1}{2} \left(\frac{I}{R^2} + m \right) v^2 - m g h$$

dove abbiamo usato la relazione $\omega = v/R$ tra velocità di rotazione del cilindro cavo e quella di traslazione del blocco. Poiché $E_M^{(fin)} = E_M^{(ini)}$, risulta:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{I}{R^2} + m \right) v^2 - m g h = 0$$
$$\frac{1}{2} \left(\frac{I}{R^2} + m \right) v^2 = m g h$$
$$v = \sqrt{\frac{2 m g h}{I/R^2 + m}}$$

- b) La tensione della fune può essere ricavata dalle equazioni del moto del blocco e del cilindro cavo. In un opportuno sistema di riferimento:

$$m g - T = m a$$
$$R T = I \alpha$$

Tenendo conto che $\alpha = a/R$ ed eliminando l'accelerazione, si può ricavare la tensione:

$$a = g - \frac{T}{m}$$
$$R T = I \frac{g - T/m}{R}$$
$$R^2 T + I \frac{T}{m} = I g$$
$$T = \frac{I m g}{m R^2 + I}$$

- c) Il momento d'inerzia del cilindro cavo può essere ricavato per differenza, partendo dal momento d'inerzia di un cilindro pieno. Occorre però trovare la massa dei due cilindri di raggio R ed r a partire dalla densità del cilindro cavo:

$$\delta = \frac{M}{\pi H (R^2 - r^2)} = \frac{4M}{3\pi H R^2}$$

dove abbiamo indicato con H l'altezza del cilindro cavo. Le masse dei cilindri pieni di raggio R ed r sono rispettivamente:

$$M_R = \delta \pi R^2 H = \frac{4M \pi R^2 H}{3\pi H R^2} = \frac{4}{3} M$$
$$M_r = \delta \pi r^2 H = \frac{M \pi R^2 H}{3\pi H R^2} = \frac{1}{3} M$$

Quindi il momento d'inerzia del cilindro cavo risulta:

$$I = \frac{1}{2} M_R R^2 - \frac{1}{2} M_r r^2 = \frac{1}{2} \frac{4}{3} M R^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{3} M \frac{R^2}{4} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{24} \right) M R^2 = \frac{5}{8} M R^2$$

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.

2.

- a) A causa del calore fornito molto lentamente il gas subisce un'espansione isobara reversibile alla pressione esercitata dalla forza peso del pistone:

$$p = \frac{mg}{S}$$

La temperatura finale del gas T_1 può essere calcolata tenendo conto del calore fornito. Deve risultare:

$$Q = nc_p \Delta T = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_0)$$

dove abbiamo considerato $c_p = 5/2R$ essendo il gas è monoatomico. Quindi:

$$T_1 = T_0 + \frac{2Q}{5nR}$$

- b) Il lavoro compiuto da gas può essere calcolato utilizzando il primo principio della termodinamica:

$$\mathcal{L} = Q - \Delta U = Q - nc_V \Delta T$$

Utilizzando il risultato del punto precedente:

$$\mathcal{L} = Q - \frac{nc_V}{nc_p} Q = \frac{c_p - c_V}{c_p} Q = \frac{R}{c_p} Q = \frac{2}{5} Q$$

Alternativamente il lavoro può essere calcolato tenendo conto che la trasformazione è isobara:

$$\mathcal{L} = p\Delta V = p(V_1 - V_0) = p \left(\frac{nRT_1}{p} - \frac{nRT_0}{p} \right) = nR\Delta T = \frac{nR}{nc_p} Q = \frac{2}{5} Q$$

dove di nuovo abbiamo usato il risultato del punto precedente.

- c) La variazione di entropia del gas può essere calcolata tenendo conto che il calore viene scambiato a pressione costante:

$$\Delta S_{GAS} = \int_0^1 \frac{(\delta Q)_{REV}}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{nc_p dT}{T} = \frac{5}{2} nR \ln \frac{T_1}{T_0} = \frac{5}{2} nR \ln \left(1 + \frac{2Q}{5nRT_0} \right) > 0$$

La variazione di entropia dell'Universo, invece, risulta nulla essendo la trasformazione reversibile.

Si ricorda di:

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*