

# Tabelle hash

Achille Frigeri  
Dipartimento di Matematica  
Politecnico di Milano

# Tabelle hash

Data una tabella hash di lunghezza  $m = 11$ , si supponga di dover inserire le chiavi 35, 83, 57, 26, 15, 63, 97, 46 (nell'ordine dato), con la funzione di hash  $h(k) = k \pmod{11}$ . Si esegua l'inserimento nel caso di

1. open hashing (separate chaining/concatenamento separato)
2. closed hashing con linear probing
3. closed hashing con quadratic probing con  $h_i(k) = (h(k) + i^2) \pmod{11}$
4. closed hashing con doppio hashing con  $h_2(k) = 1 + (k \pmod{10})$

# Tabelle hash

Iniziamo calcolando lo hash delle chiavi:

$$h(35) = 35 \pmod{11} = 2$$

$$h(83) = 83 \pmod{11} = 6$$

$$h(57) = 57 \pmod{11} = 2$$

$$h(26) = 26 \pmod{11} = 4$$

$$h(15) = 15 \pmod{11} = 4$$

$$h(63) = 63 \pmod{11} = 8$$

$$h(97) = 97 \pmod{11} = 9$$

$$h(46) = 46 \pmod{11} = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining

0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining

0			
1			
2	● → <table><tr><td>35</td><td></td></tr></table>	35	
35			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

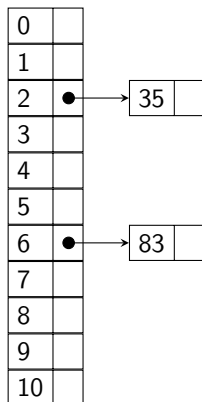
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

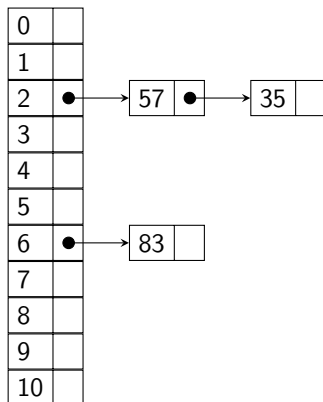
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

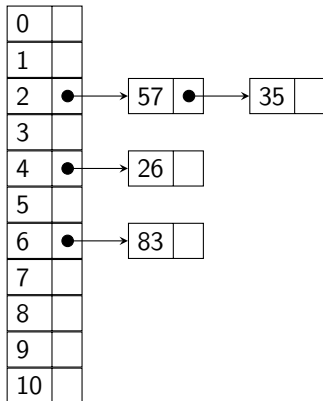
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

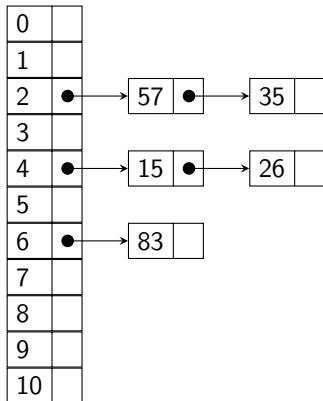
$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$



# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

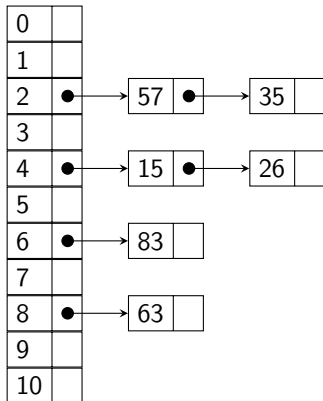
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

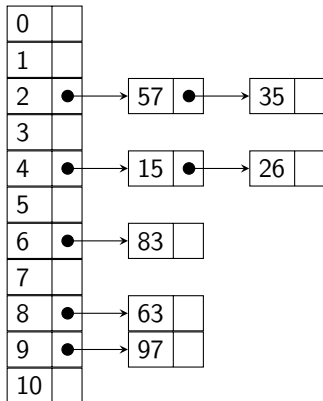
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

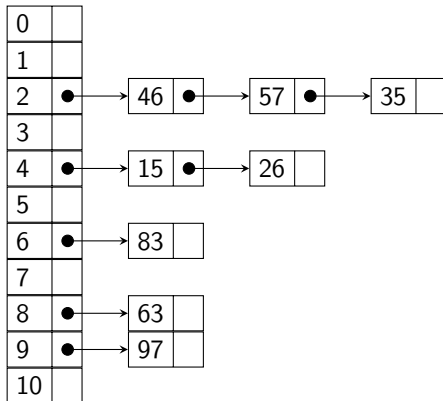
$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Open chaining



Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$



# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57			83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57			83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26		83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26		83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

Hash:

$h(35) = 2$

$h(83) = 6$

$h(57) = 2$

$h(26) = 4$

$h(15) = 4$

$h(63) = 8$

$h(97) = 9$

$h(46) = 2$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$



# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63		

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63		

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, il primo slot libero successivo è 7, dunque inserisco 46 in 7

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Linear probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83	46	63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (3)

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, lo inserisco nello slot successivo (5)

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, il primo slot libero successivo è 7, dunque inserisco 46 in 7

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$



# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57			83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57			83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26		83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

## Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26		83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$



# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63		

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63		

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$h(35) = 2$

$h(83) = 6$

$h(57) = 2$

$h(26) = 4$

$h(15) = 4$

$h(63) = 8$

$h(97) = 9$

$h(46) = 2$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35	57	26	15	83		63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è occupato, salto in avanti di  $2^2$ , lo slot 6 è occupato, salto in avanti di  $3^2$ , lo slot 0 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

## Tabelle hash - Quadratic probing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
46		35	57	26	15	83		63	97	

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 1, lo slot 3 è occupato, salto in avanti di  $2^2$ , lo slot 6 è occupato, salto in avanti di  $3^2$ , lo slot 0 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$



# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35								

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35				83				57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26		83				57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26		83				57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$



# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83				57

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83				57

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83		63		57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83		63		57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83		63	97	57

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

## Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
		35		26	15	83		63	97	57

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 9 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 5 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 1 è libero

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

## Tabelle hash - Doppio hashing

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	46	35		26	15	83		63	97	57

Hash:

$$h(35) = 2$$

$$h(83) = 6$$

$$h(57) = 2$$

$$h(26) = 4$$

$$h(15) = 4$$

$$h(63) = 8$$

$$h(97) = 9$$

$$h(46) = 2$$

$h(35) = 2$ , lo slot 2 è libero, inserisco 35

$h(83) = 6$ , lo slot 6 è libero, inserisco 83

$h(57) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 8, lo slot 10 è libero

$h(26) = 4$ , lo slot 4 è libero, inserisco 26

$h(15) = 4$ , lo slot 4 è occupato, salto in avanti di 6, lo slot 10 è occupato, salto ancora avanti di 6, lo slot 5 è libero

$h(63) = 8$ , lo slot 8 è libero, inserisco 63

$h(97) = 9$ , lo slot 9 è libero, inserisco 97

$h(46) = 2$ , lo slot 2 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 9 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 5 è occupato, salto in avanti di 7, lo slot 1 è libero

$$h_2(k) = 1 + (k \pmod{10}):$$

$$h_2(35) = 6$$

$$h_2(83) = 4$$

$$h_2(57) = 8$$

$$h_2(26) = 7$$

$$h_2(15) = 6$$

$$h_2(63) = 4$$

$$h_2(97) = 8$$

$$h_2(46) = 7$$

# Tabelle hash - Un problema insiemistico

Sono dati due insiemi di interi (di fatto due array)  $S$  e  $T$  di lunghezza rispettivamente  $m$  e  $n$ , con  $m \leq n$ .

Descrivere una procedura per stabilire se  $S \subseteq T$ .

Progettare una procedura che utilizzi una tabella hash con open chaining di dimensione  $m$ .

Valutarne la complessità nel **caso medio**.



# Tabelle hash - Un problema insiemistico

Descrivere una procedura per stabilire se  $S \subseteq T$ .

Potrei cercare ogni elemento di  $S$  in  $T$ , ma così ci metterei  $O(nm)$ , cioè  $O(n^2)$ .

Volendo farlo in modo più efficiente procedo così: ordino  $T$  e per ogni elemento  $s$  di  $S$  cerco se  $s \in T$  facendo una ricerca binaria.

La complessità è  $O(n \log(n))$  (per ordinare  $T$ ) più  $O(m \log(n))$  (per le ricerche), poiché  $m \leq n$ , la complessità totale è  $O(n \log(n))$ .

# Tabelle hash - Un problema insiemistico

Descrivere una procedura per stabilire se  $S \subseteq T$  usando una tabella hash con open chaining di dimensione  $m$ .

- ▶ inizializzo una tabella  $TH$  vuota
- ▶ per ogni  $t \in T$ , inserisco  $t$  in  $TH$
- ▶ per ogni  $s \in S$ , cerco  $s$  in  $TH$ 
  - ▶ se non trovo  $s$ ,  $S \not\subseteq T$  e ho terminato
- ▶ le ricerche hanno sempre avuto esito positivo e quindi  $S \subseteq T$

Quanto costa?

# Tabelle hash - Un problema insiemistico

- ▶ inizializza  $TH$  vuota
- ▶ per ogni  $t \in T$ , inserisci  $t$  in  $TH$
- ▶ per ogni  $s \in S$ , cerca  $s$  in  $TH$ 
  - ▶ se non trovi  $s$ ,  $S \not\subseteq T$  e ho terminato
- ▶ le ricerche hanno sempre avuto esito positivo e quindi  $S \subseteq T$

L'inizializzazione ha costo  $O(m)$ . Il costo di ogni singolo inserimento è dato dal costo del calcolo della funzione di hash, che si assume  $O(1)$ , più quello del concatenamento di un nuovo elemento alla lista, ancora  $O(1)$ . Le ricerche hanno un costo **medio** dato dal calcolo della hash e dalla ricerca nella lista corrispondente, ovvero metà della lunghezza media di una lista, ovvero  $O(1 + \frac{1}{2} \frac{n}{m})$ .

Nel caso in cui il ciclo sugli elementi di  $S$  vada effettuato per intero (ad esempio se  $S \subseteq T$ ) si ha una complessità totale:

$$O(m) + n \cdot O(1) + m \cdot O(1 + \frac{1}{2} \frac{n}{m}) = O(m) + O(n) + O(m + n) = O(n)$$

poiché  $m \leq n$ .