Analisi Matematica 2 – 17 febbraio 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	Nome:	Matricola:

Parte A	Es.1	Es.2	Es.3	Totale

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A$\geq$4, parte B$\geq$12, totale$\geq$18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Enunciare e dimostrare uno (a scelta) dei criteri del rapporto o della radice per la determinazione del raggio di convergenza delle serie di potenze.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $f(x, y) = 4x + 8y$. Quale dei seguenti vettori è ortogonale alle curve di livello di f?
(a) $(8, 4)$ (b) $(-4, 8)$ (c) $(4, -8)$ (d) $(4, 8)$

(2) La soluzione del problema di Cauchy $y'(t) = ty(t),\ y(0) = 1$, è
(a) $y(t) = e^{t^2/2}$ (b) $y(t) = e^{-t^2/2}$ (c) $y(t) = e^{t^2}$ (d) $y(t) = e^{-t^2}$

(3) Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe $C^1(A)$ e $(x_0, y_0) \in A$. Si ha che:
(a) non è detto che f sia differenziabile in $(x_0, y_0) \in A$
(b) se (x_0, y_0) è un punto critico di f, allora (x_0, y_0) è un punto di estremo di f
(c) f ammette massimo e minimo assoluto in A
(d) se $(x_0, y_0) \in A$ è punto di sella di f, allora f ammette piano tangente orizzontale in $(x_0, y_0) \in A$

(4) La curva piana $\underline{r}(t) = \left(\sqrt{t(1-t)},\ \sin(\pi t)\right)$, con $t \in [0, 1]$, è
(a) chiusa ma non regolare a tratti (b) regolare ma non chiusa (c) chiusa ma non semplice (d) semplice e regolare

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Sia f la funzione di due variabili definita da $f(x, y) = \dfrac{x}{x^4 + y^2}$.
(a) (2 punti) Determinare il dominio di f e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.
(b) (6 punti) Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul quadrato chiuso Q di vertici $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ e, in caso affermativo, determinarli.

Esercizio 2 Si consideri la matrice $M = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

(a) (2 punti) Calcolare e^{tM} $(t \in \mathbb{R})$.

(b) (3+3 punti) Risolvere i problemi di Cauchy 1) $\begin{cases} \underline{y}'(t) = M\,\underline{y}(t) \\ \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$ e 2) $\begin{cases} \underline{y}'(t) = M\,\underline{y}(t) + \begin{pmatrix} 2e^t \\ e^t \end{pmatrix} \\ \underline{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Esercizio 3 Sia $Q_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0\}$ e sia $\overline{B}_1(0, 0)$ il disco chiuso centrato nell'origine avente raggio 1. Poniamo $D = \overline{B}_1(0, 0) \cap Q_3$.

(a) (4 punti) Calcolare $\displaystyle\iint_D xy^2\, dxdy$.

(b) (4 punti) Calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_{\partial D} xy\, ds$, dove ∂D indica il bordo di D.