Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 3 settembre 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Esercizio 1 *(5,5 punti)* Si consideri l'equazione differenziale $y'(t) = (y(t))^3 \sin t$.

1.1 *(2,5 punti)* Determinarne l'integrale generale.

1.2 *(1,5 punti)* Stabilire se esistono soluzioni di tale equazione differenziale definite su tutto $\mathbb{R}$; in caso affermativo, determinarle tutte.

1.3 *(1,5 punti)* Trovare la soluzione dell'equazione differenziale data che soddisfa $y(\pi) = -1$.

Svolgimento

1.1 L'equazione differenziale è del tipo $y'(t) = h(t)g(y(t))$ con funzioni h e g definite rispettivamente da $h(t) = \sin t$ e $g(y) = y^3$. Innanzitutto verifichiamo che, siccome la funzione g si annulla solo in $y = 0$, l'unica soluzione costante dell'equazione differenziale è $y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Cerchiamo ora le soluzioni non costanti tramite la formula per equazioni differenziali a variabili separabili:

$$\int \frac{y'(t)}{y(t)^3}\, dt = \int \sin t\, dt,$$

da cui, integrando,

$$\frac{1}{2y(t)^2} = \cos t + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Troviamo le soluzioni non costanti

$$y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\cos t + C)}},$$

che sono definite sull'insieme

$$J = J_C = \{x \in \mathbb{R} : \cos x + C > 0\}.$$

Quindi, considerando sia le soluzioni costanti che quelle non costanti, otteniamo che l'integrale generale dell'equazione differenziale è dato dalla famiglia di soluzioni:

$$y(t) = 0 \text{ con } t \in \mathbb{R}, \qquad y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\cos t + C)}} \text{ con } t \in J_C \text{ per } C > -1,$$

dove abbiamo escluso $C \leq -1$ perché in tal si verifica che $J_C = \emptyset$.

1.2 Sì, esistono soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$: per esempio la soluzione costante $y = 0$ su $\mathbb{R}$. Inoltre, dalla definizione di J_C segue che, se $C > 1$, allora $J_C = \mathbb{R}$, mentre se $C = 1$, allora $J_C = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}_{k \in \mathcal{Z}}$, e se $C \in (-1, 1)$, allora J_C è dato dall'unione di una famiglia numerabile di intervalli $I_k \subset (2k\pi, 2(k+1)\pi)$ per $k \in \mathbb{Z}$ aventi tutte medesima lunghezza minore di 2π. Quindi, le soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$ sono tutte e sole le seguenti:

$$y = 0 \text{ e } y(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(\cos t + C)}} \text{ per } C > 1.$$

1.3 Osserviamo che la soluzione costante non è soluzione del problema di Cauchy con condizione $y(\pi) = -1$, essendo nulla. Per cui sostituiamo la condizione $y(\pi) = -1$ nella restante famiglia di soluzioni dipendente dalla costante C prendendo il segno negativo, in quanto solo tali soluzioni possono assumere valori negativi. Otteniamo che

$$-1 = y(\pi) = -\frac{1}{\sqrt{2(\cos(\pi) + C)}} = -\frac{1}{\sqrt{2(-1 + C)}}$$

per $t \in J_C$ con $C > -1$, e quindi $C = 3/2$. Siccome $3/2 > -1$ e per le osservazioni fatte al punto precedete $J_{3/2} = \mathbb{R}$, la soluzione è

$$y(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\left(\cos t + \frac{3}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\cos t + 3}}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2 *(6,5 punti)*

2.1 *(3 punti)* Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n(n+1)}{2^n - n}(x-1)^n$$

e dire, motivando la risposta, se essa risulta integrabile termine a termine nell'intervallo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

2.2 *(3,5 punti)* Sia f_α (dipendente dal parametro $\alpha > 0$) l'estensione 2π-periodica della funzione

$$g_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha & x \in [0, \pi) \\ 2 - \alpha x & x \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$

È possibile determinare α affinché la serie di Fourier di f_α converga totalmente in $\mathbb{R}$? In caso affermativo, calcolare tale α.

Successivamente, determinare la serie di Fourier di f_0 (cioè della funzione 2π-periodica ottenuta per $\alpha = 0$).

Svolgimento

2.1 Si tratta di una serie di potenze centrata in $x_0 = 1$. Per calcolarne il raggio di convergenza R, utilizziamo ad esempio il criterio della radice: si ha

$$R^{-1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3(n+1)^{1/n}}{(2^n - n)^{1/n}} = \frac{3}{2},$$

da cui $R = 2/3$ e la serie converge nell'intervallo $(1/3, 5/3)$. Studiamo la convergenza agli estremi dell'intervallo: per $x = 5/3$ e $x = 1/3$ si hanno rispettivamente le serie numeriche

$$\frac{2^n(n+1)}{2^n - n} \qquad \frac{(-2)^n(n+1)}{2^n - n}$$

che non convergono in quanto non soddisfano il criterio necessario per la convergenza. In conclusione, l'insieme di convergenza puntuale della serie data è l'intervallo $(1/3, 5/3)$. Essendo $[1/2, 3/2] \subset (1/3, 5/3)$, concludiamo dalla teoria che la serie risulta integrabile termine a termine in tale intervallo.

2.2 Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie di Fourier di f_α converga totalmente in $\mathbb{R}$ è che f_α sia continua in $\mathbb{R}$. Questo si verifica se e solo se

$$\begin{cases} g_\alpha \text{ è continua in } x = \pi \\ g_\alpha(0) = g_\alpha(2\pi) \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha\pi - \alpha = 2 - \alpha\pi \\ 2 - 2\alpha\pi = -\alpha. \end{cases}$$

Si verifica che tale sistema ammette un'unica soluzione: $\alpha = 2/(2\pi - 1)$.

Si ha che f_0 è la funzione a gradini data dall'estensione 2π-periodica di

$$g_0 = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi) \\ 2 & x \in (\pi, 2\pi). \end{cases}$$

La sua serie di Fourier

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

ha coefficienti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_\pi^{2\pi} 2\, dx = 1$$

e, per $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2\cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 2\sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(nx)}{n} \right]_{\pi}^{2\pi} = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -\frac{4}{n\pi} & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$

da cui la serie di Fourier

$$1 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}.$$

Esercizio 3 *(6 punti)*

3.1 *(4 punti)* Sia f la funzione di due variabili avente espressione

$$f(x,y) = x^2(y^2 + x^2 + 2) - y^2.$$

Determinare, giustificandone l'esistenza, il massimo e il minimo assoluto di f sull'insieme

$$D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

3.2 *(2 punti)* Calcolare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

(se esiste, determinarne il valore; se non esiste, spiegare perché non esiste).

Svolgimento

3.1 f ammette massimo e minimo assoluto in D grazie al teorema di Weierstrass. Determiniamo i punti candidati ad essere estremali di f in D. All'interno di D possiamo applicare il teorema di Fermat:

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(2x^2 + y^2 + 2) \\ 2y(x^2 - 1) \end{pmatrix} = \underline{0} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(2x^2 + y^2 + 2) = 0 \\ 2y(x^2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Essendo $2x^2 + y^2 + 2 > 0$, l'unica soluzione del sistema è l'origine degli assi. Quindi all'interno di D c'è un unico candidato $P_1 = (0,0)$.

Essendo il bordo di D la circonferenza unitaria, applichiamo il metodo di sostituzione con il passaggio alle coordinate polari $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$. Detta g la restrizione di f al bordo di D, si ha

$$g(\theta) = 3\cos^2\theta - \sin^2\theta, \qquad \theta \in [0, 2\pi).$$

I candidati punti estremali di f vincolati al bordo di D sono i punti nei quali la derivata di g è nulla. Essendo

$$g'(\theta) = -8\cos\theta\sin\theta,$$

troviamo i punti $P_2 = (1,0)$, $P_3 = (0,1)$, $P_4 = (-1,0)$, $P_5 = (0,-1)$. Questi punti possono essere determinati alternativamente con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Determiniamo massimo e minimo assoluto di f in D confrontando $f(P_i)$ per $I = 1, \ldots, 5$. Otteniamo

$$\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -1$$

assunto nei punti P_3 e P_5;

$$\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3$$

assunto nei punti P_2 e P_4.

3.2 Osserviamo che

$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^4} = 0,$$

mentre

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} \frac{\log(1 + x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^4)}{4x^4} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x^4)}{x^4} = \frac{1}{4},$$

e quindi possiamo concludere che il limite non esiste siccome per l'unicità del limite non si possono avere valori distinti se si tende all'origine sull'asse x o sulla bisettrice del primo e terzo quadrante $y = x$.

Esercizio 4 *(6 punti)* Sia $Q_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ e si consideri la regione limitata di piano $\Sigma \subset Q_1$ compresa tra l'asse x e le curve di equazione cartesiana $x = y^2$ e $x = -y^2 + 2$.

4.1 (*2,5 punti*) Determinare l'area di Σ.

4.2 (*3,5 punti*) Detto γ il contorno (bordo) di Σ, calcolare $\displaystyle\int_\gamma y \, d\ell$.

Svolgimento

4.1 Considerando Σ ad esempio come regione y-semplice ed applicando le formule di riduzione, otteniamo

$$\text{area}(\Sigma) = \iint_\Sigma 1 \, dx \, dy = \int_0^1 \int_{y^2}^{-y^2+2} 1 \, dx \, dy = \int_0^1 2(1 - y^2) \, dy = \frac{4}{3}.$$

4.2 γ è una curva regolare a tratti costituita da tre curve regolari γ_i, $i = 1, \ldots, 3$. Possibili parametrizzazioni per γ_i, $i = 1, \ldots, 3$, sono:

$$\underline{r}_1(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1), \qquad \underline{r}_2(t) = \begin{pmatrix} -t^2 + 2 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 1), \qquad \underline{r}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 2).$$

Calcoliamo le lunghezze d'arco:

$$\underline{r}_1'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_2'(t) = \begin{pmatrix} -2t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_3'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui $\|\underline{r}_1'(t)\| = \|\underline{r}_2'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1}$ e $\|\underline{r}_3'(t)\| = 1$. Detta $h(x, y) = y$ la funzione integranda, utilizzando la formula dell'integrale di linea e osservando che $\int_{\gamma_3} h \, d\ell = 0$, otteniamo

$$\int_\gamma h \, d\ell = \int_{\gamma_1} h \, d\ell + \int_{\gamma_2} h \, d\ell + \int_{\gamma_3} h \, d\ell = 2 \int_0^1 t\sqrt{4t^2 + 1} \, dt = \left[\frac{1}{6}(4t^2 + 1)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}.$$

TEORIA: 8 punti.

Ogni quesito a risposta chiusa ammette una e una sola risposta corretta.

T.1 (1 punto) Sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Un punto $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ è di frontiera per E se e solo se

A. $\underline{x}_0$ non appartiene ad E

B. esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \subseteq E$

C. per ogni $r > 0$ si ha $B_r(\underline{x}_0) \cap E \neq \emptyset$ e $B_r(\underline{x}_0) \cap E^c \neq \emptyset$ $\boxed{\text{V}}$

D. esiste $r > 0$ tale che $B_r(\underline{x}_0) \cap E \neq \emptyset$ e $B_r(\underline{x}_0) \cap E^c \neq \emptyset$

T.2 (1 punto) Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : I \to \mathbb{R}$ per ogni n, $I \subseteq \mathbb{R}$. Si ha:

A. tale serie converge puntualmente in I se e solo se $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ per ogni $x \in I$

B. se $\sup_{x\in I} |f_n(x)| = \dfrac{1}{n}$ per ogni n, allora tale serie converge totalmente in I

C. se, per ogni n e per ogni $x \in I$, si ha $|f_n(x)| \leq \dfrac{x^2}{n^2}$, tale serie converge assolutamente in I $\boxed{\text{V}}$

D. nessuna delle altre opzioni è vera

T.3 (1 punto) Sia $\underline{y}' = A\underline{y}$ un sistema differenziale omogeneo a coefficienti costanti ($\underline{y} \in \mathbb{R}^n$). Si ha:

A. se A è invertibile, allora tale sistema possiede soltanto soluzioni di tipo esponenziale (ovvero del tipo $e^{\lambda t}\underline{v}$, per opportuni $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$)

B. se A è la matrice nulla, una base dell'integrale generale del sistema è la base canonica $\{\underline{e}_i\}_{i=1}^n$ di $\mathbb{R}^n$ $\boxed{\text{V}}$

C. detta $W(t)$ una matrice Wronskiana associata a tale sistema, può esistere $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $W(t_0)$ non sia invertibile

D. nessuna delle altre opzioni è vera