Fondamenti di Automatica – A.A. 2023/2024

Esercitazione 03: Ripasso stabilità e modi

Ingegneria Informatica
Prof. Fredy Ruiz

Milano, 12 Marzo 2024

Moto libero

<u>Nel caso particolare</u> in cui la **condizione iniziale coincida** con l'i-esimo **autovettore** $x(0) = v_i$

$$x_L(t) = e^{At}x(0) = e^{At}v_i = e^{\lambda_i t}v_i$$

<u>In generale….</u>

Qualsiasi condizione iniziale può essere scritta come combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti (autovettori)

$$x_L(t) = e^{At}x(0) = e^{At}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \sum_{i=1}^{n} e^{At} v_i$$

Abbiamo già visto prima però che $e^{At}v_i = e^{\lambda_i t}v_i$

$$x_L(t) = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t} v_i = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{\lambda_i t}v_i$$

Moto libero in generale

Possiamo dare due definizioni di «**modo**»:

- Funzione scalare $e^{\lambda_i t}$
- Funzione vettoriale $e^{\lambda_i t} v_i$

IN GENERALE il **moto libero** è **sempre combinazione lineare dei modi** del sistema (qualsiasi definizione uno consideri):

$$x_L(t) = e^{At}x(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{\lambda_i t}\, v_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i e^{\lambda_i t}$$

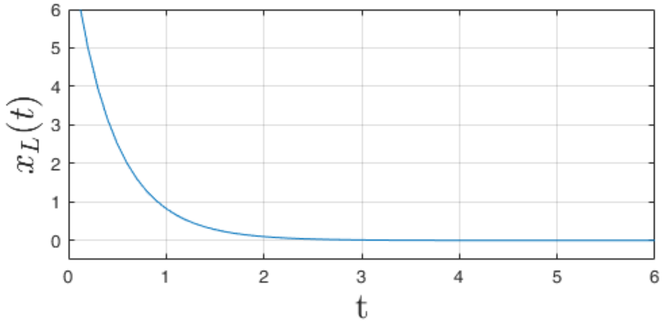
Nel caso particolare in cui la **condizione iniziale coincida** con l'i-esimo **autovettore** $x(0) = v_i$

$$x_L(t) = e^{At}x(0) = e^{At}v_i = e^{\lambda_i t}v_i$$

Stabilità

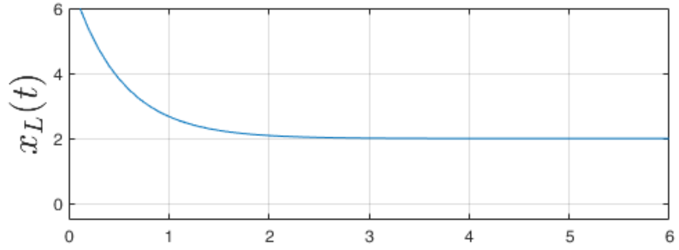
Per rendere più intuitivo il concetto di stabilità, consideriamo la seguente definizione:

- Il sistema è **asintoticamente stabile se il movimento libero dello stato tende a 0** per t → ∞.



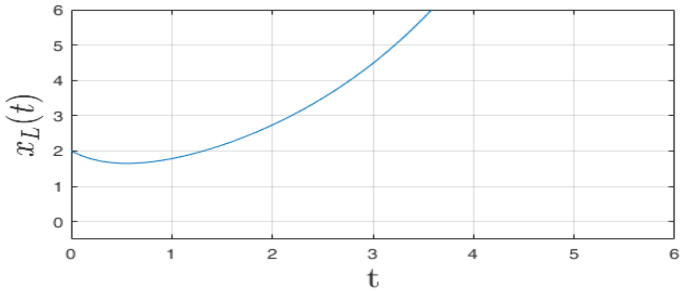
Esempio: $x_L(t) = 5e^{-2t} + 3e^{-3t}$

- Il sistema è **semplicemente stabile se il movimento libero dello stato tende a una costante** per t → ∞.



Esempio: $x_L(t) = 5e^{-2t} + 2e^{0t}$

- Il sistema è **instabile se il movimento libero dello stato tende a ∞** per t → ∞.



Esempio: $x_L(t) = e^{-2t} + e^{+0.5t}$

Stabilità

Quindi per studiare la stabilità andiamo ad analizzare gli **autovalori** $\boldsymbol{\lambda_i}$ (esponenti dei modi).

Ossia la soluzione all'equazione caratteristica $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_0 = 0$

- Il sistema è **asintoticamente stabile se** $\forall \boldsymbol{i}: \quad \mathbb{R}\mathrm{e}(\boldsymbol{\lambda_i}) < \mathbf{0}$
- Il sistema è **semplicemente stabile se** $\exists \boldsymbol{i} : \quad \mathbb{R}\mathrm{e}(\boldsymbol{\lambda_i}) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{R}\mathrm{e}(\boldsymbol{\lambda_j}) < \mathbf{0} \;\; \forall \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{i}$
- Il sistema è **instabile se** $\exists \boldsymbol{i} : \quad \mathbb{R}\mathrm{e}(\boldsymbol{\lambda_i}) > \mathbf{0}$

NOTA: per polinomi di **ordine 2**, $p_A(\lambda) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0$
È **condizione necessaria e sufficiente** per avere tutte le radici (soluzioni) a parte reale strettamente negativa, che **i segni siano concordi**

$$+\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = 0 \qquad\qquad -\lambda^2 - c_1\lambda - c_0 = 0$$

Criterio di Routh

Per sistemi di ordine superiore al secondo…

$$\varphi(\lambda) = \varphi_0\lambda^n + \varphi_1\lambda^{n-1} + \cdots + \varphi_n = 0$$

$$\left.\begin{array}{cccc} \varphi_0 & \varphi_2 & \varphi_4 & \dots \\ \varphi_1 & \varphi_3 & \varphi_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \\ l_1 & l_2 & l_3 & \dots \end{array}\right\} \text{n+1 righe}$$

$$l_i = -\frac{1}{k_1}\det\begin{bmatrix} h_1 & h_{i+1} \\ k_1 & k_{i+1} \end{bmatrix}$$

Se tutti gli elementi sulla prima colonna sono concordi in segno, il polinomio ha tutte radici a parte reale strettamente negativa.

Nota: **se $\boldsymbol{k_1 = 0}$**, l'espressione per l_i non è applicabile e allora si dirà, per convenzione, che **la tabella di Routh non è ben definita.**

Stabilità per sistemi non diagonalizzabili

Se il sistema non è diagonalizzabile (molteplicità algebrica $\neq$ molteplicità geometrica)

- Esiste una trasformazione (una matrice T_j^{-1}) in grado di portare la matrice A, in forma di Jordan:

$$A_j = T_j A T_j^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(2) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_2(3) & 0 \\ 0 & J_2(-1) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(5) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(7) & 0 \\ 0 & 0 & J_1(4) \end{pmatrix}$$

Una matrice in forma di Jordan ha elementi non nulli solo sulla diagonale e sulla sopradiagonale (esempi qua a sinistra)