Politecnico di Milano *Prof. E. Maluta* **Ing. Informatica e Ing. delle Telecomunicazioni**	*Analisi Matematica II* **Prima Parte**	**3 settembre 2018**
Cognome e Nome:	**Matricola:**	**P T 1 2 3 4**

Ogni risposta va scritta nello spazio sotto il quesito e motivata con calcoli o/e spiegazioni.

1. Data la funzione $f(x, y) = 3y \log(x^2+y^2)$, scriverne, nel punto $(1, 1)$, la derivata nella direzione del versore che individua la bisettrice del primo quadrante.

$\nabla f(1,1) = (3, 3\log 2 + 3)$ $\quad \underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\quad D_{\underline{v}}(1,1) = 3\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \log 2$

2. Sia f definita da $f(x, y) = y^2-x^2-xy$. Stabilire se la restrizione di f alla curva di equazione $37x^2+12y^4 = 9$ è limitata.

$C = \{(x,y) : 37x^2 + 12y^4 = 9\}$ è un insieme chiuso e limitato –

$f \in \mathcal{C}(C) \Rightarrow f$ limitata.

3. Determinare tutti i punti stazionari della funzione $f(x, y) = x^8 - 2x^4 - y^2$.

$\nabla f(x,y) = (8x^7 - 8x^3, -2y)$ $\quad \nabla f(x,y) = (0,0) \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0, \pm 1 \end{cases}$ quindi

$(0,0)$; $(-1,0)$; $(1,0)$ sono tutti e soli i punti stazionari

4. Scrivere la formula di McLaurin arrestata al secondo ordine della funzione $f(x, y) = \log(1 + xy)$.

$f(x,y) = xy + o(x^2+y^2) \quad (x,y) \to (0,0)$

5. Calcolare la lunghezza della curva $r(t) = (\cos t^4, \sin t^4)$, $t \in [0, \sqrt[4]{\pi}]$.

Al variare di t in $[0, \sqrt[4]{\pi}]$ $\underline{r}(t)$ percorre 1 volta la semicirconferenza unitaria da $(1,0)$ a $(-1,0)$ quindi

$\ell = \pi$

6. Trovare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 1$.

$\varphi_0(t) = \frac{1}{6}$ soluz particolare

da $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$ abbiamo $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = -3$ quindi

$\varphi(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{6}$

7. Scrivere la serie di Fourier della funzione 2π-periodica $u(x) = \sin x - \sin^2 x$.

da $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ si ha $u(x) = -\frac{1}{2} + \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x$

8. Calcolare la somma F della serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$, precisando per quali $x \in \mathbb{R}$ vale l'uguaglianza $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{x}{x+1})^n$.

serie geometrica di ragione $\frac{x}{x+1}$ - Converge, per $\left|\frac{x}{x+1}\right| < 1$ (quindi $x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$), con $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n = x+1$

9. Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y + 2 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

$\varphi_0(t) = -2$ soluz. soluz $y' = y$ è $\varphi(t) = ce^t$

$\varphi(t) = ce^t - 2$ $\quad \varphi(1) = 2$ per $c = \frac{4}{e}$

$\bar{\varphi}(t) = 4e^{t-1} - 2$

10. Stabilire se il sistema di equazioni differenziali $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, dove $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, ammette soluzioni non identicamente nulle Φ tali che $\lim_{t\to+\infty} \Phi(t) = 0$

$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 9$ $\quad \lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha = 2$

soluz $\varphi_1(t), \varphi_2(t) = h_1 e^{2t}\cos(\beta t), h_2 e^{2t}\sin(\beta t) \not\to 0$ ~~dal~~