POLITECNICO DI MILANO

FONDAMENTI DI AUTOMATICA
(Ingegneria Gestionale)
Prof. Fredy O. Ruiz-Palacios

Anno Accademico 2020/21

Appello del 10/09/2021

COGNOME...

NOME ....

CODICE PERSONA ....

FIRMA ....

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)
Prof. Fredy Ruiz
Appello del 10 settembre 2021

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico lineare e tempo invariante con ingresso $u(t)$ ed uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= (\alpha + 1)x_1(t) - 2\beta x_2(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -2x_2(t) + u(t) \\
\dot{x}_3(t) &= \alpha x_3(t) + 2u(t) \\
y(t) &= x_1(t),
\end{aligned}$$

con α e β parametri reali.

1.1 Classificare il sistema.

- Lineare
- tempo invariante
- dinamico del terzo ordine
- strettamente proprio
- SISO

1.2 Studiare la stabilità interna del sistema al variare dei parametri α e β.

La matrice A del sistema è

$$A = \begin{bmatrix} \alpha+1 & -2\beta & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

A è triangolare superiore allora gli autovalori sono: $\lambda_1 = \alpha+1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = \alpha$.

- Il sistema è asintoticamente stabile se $Re(\lambda) < 0$, cioè: $\alpha + 1 < 0$, $-2 < 0$, $\alpha < 0$, allora $\alpha < -1$, $\forall \beta$
- Il sistema è semplicemente stabile se $Re(\lambda) \leq$ e non ci sono blocchi di Jordan per $\lambda = 0$, in questo caso per $\alpha = -1$. Finalmente, instabile per $\alpha > -1$.

* Non è possibile valutare la stabilità della $G(s)$ perché $G(s)$ è del secondo ordine, mentre il sistema è di terzo ordine. c'è un polo nascosto.

1.3 Posto ora $\alpha = -2$ e $\beta = 1$ calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema e dire, motivando la risposta, se è possibile valutare le proprietà di stabilità interna del sistema dall'analisi della sola $G(s)$.

In Laplace:

$$sX_1(s) = (1+\alpha)X_1(s) - 2\beta X_2(s) \quad (1)$$

$$sX_2(s) = -2X_2(s) + U(s) \quad (2)$$

$$sX_3(s) = \alpha X_3(s) + 2U(s) \quad (3)$$

$$Y(s) = X_1(s) \quad (4)$$

da (1) $X_1(s) = \dfrac{-2\beta}{s-1-\alpha} X_2(s)$, da (2) $X_2(s) = \dfrac{1}{s+2} U(s)$

da (4) $Y(s) = -\dfrac{2\beta}{(s-1-\alpha)(s+2)} U(s) \Rightarrow G(s) = -\dfrac{2}{(s+1)(s+2)}$

1.4 Per la funzione di trasferimento trovata al punto precedente determinare analiticamente la risposta allo scalino $u(t) = sca(t)$ e tracciare *qualitativamente* la risposta, specificando i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$.

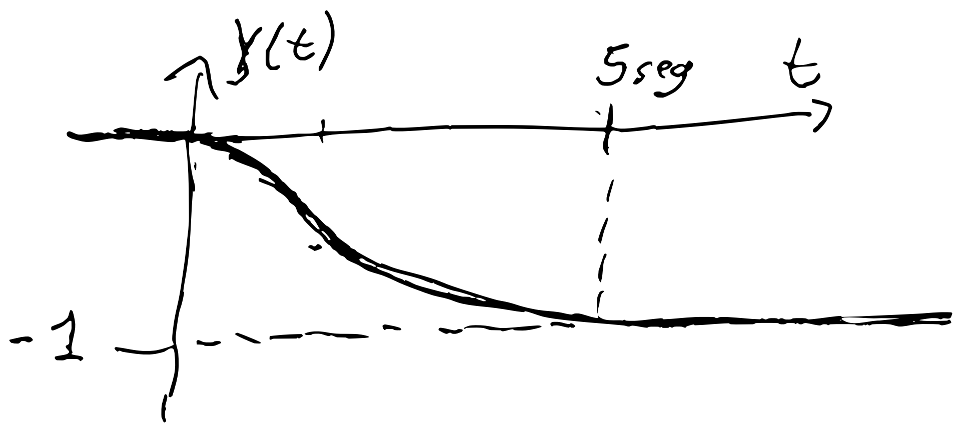
scalino: $U(s) = \dfrac{1}{s}$, Allora:

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = -\frac{2}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{1}{s}$$

sviluppo di Heaviside:

$$Y(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s},$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = 2e^{-t} - e^{-2t} - sca(t), \quad t \geq 0,$$



TVI

$$y(0) = \lim_{s \to \infty} sY(s) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s \to \infty} s^2 Y(s) = 0$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = -1$$

TVF

ESERCIZIO 2

Si consideri la funzione di trasferimento

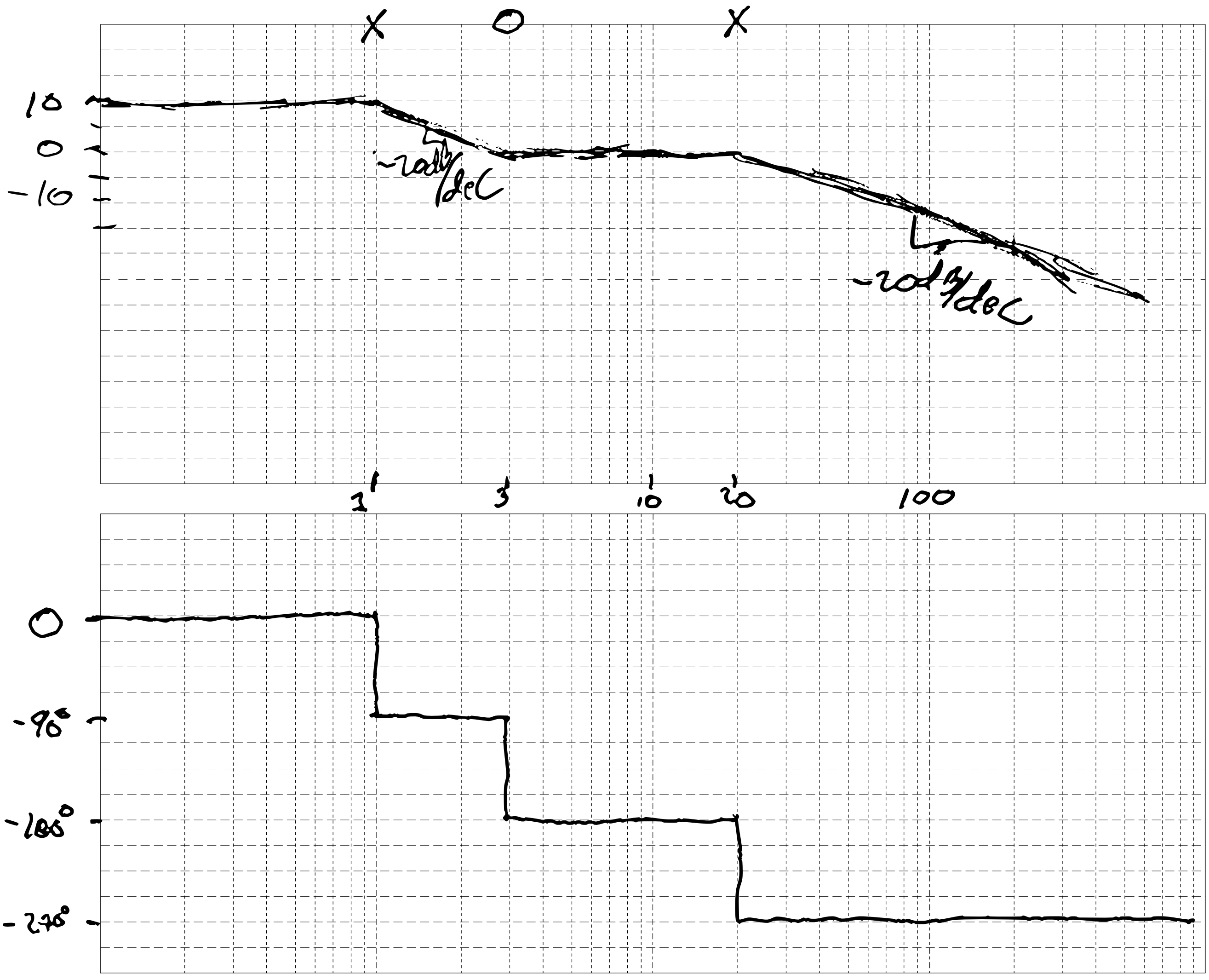
$$G(s) = 20\frac{3-s}{(s+1)(s+20)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

2.1 Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

- $\mu = G(0) = 3 \cong 9{,}5\,dB$
- tipo 0
- poli : $\{-1, -20\}$, sistema asintoticamente stabile; $Re(P) < 0$
- zero : $\{3\}$, sistema a fase non minima

2.2 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.



2.3 Determinale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ a transitorio esaurito a fronte del ingresso $u(t) = 3\sin(10t)$.

$$y_\infty(t) = |G(j\omega)| \cdot 3 \sin(10t + \arg(G(j\omega)))$$

dal diagramma di Bode $|G(j10)| \cong 0\,dB \cong 1$

$\arg(j10) \cong -180°$

$$y_\infty(t) \cong 3\sin(10t - \pi)$$

2.4 Si supponga ora che il sistema venga retroazionato come in figura 1, con $L(s) = kG(s)$, essendo k un parametro reale. Determinare per quali valori di k il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile.

$$\frac{\frac{N}{D}}{1+k\frac{N}{D}} = \frac{N}{D+kN}$$

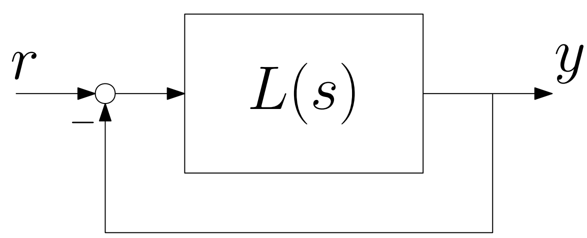


Figura 1: Esercizio 2 - Sistema retroazionato.

il sistema retroazionato $G_r(s) = \dfrac{L(s)}{1+L(s)}$ risulta

$$G_r(s) = \frac{20(3-s)}{(s+1)(s+20) + k\,20(3-s)} = \frac{20(3-s)}{s^2 + (21-20k)s + 20 + 60k}$$

criterio di Routh, sistema di ordine 2:

$$\left.\begin{array}{l} 21 - 20k > 0 \\ 20 + 60k > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k < 21/20 \\ k > -1/3 \end{array}$$

$G_r(s)$ è asintoticamente stabile per

$$-1/3 < k < 21/20$$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k+1) = -v(k) - 0.5w(k) + u(k) \\ w(k+1) = 1.5v(k) + w(k) \\ y(k) = v(k) - w(k) \end{cases}$$

3.1 Classificare il sistema

- Lineare
- tempo invariante
- SISO
- strettamente proprio
- dinamico, ordine 2

3.2 Calcolare gli stati e l'uscita di equilibrio associati a $u(k) = \bar{u} = 2$.

in equilibrio $v(k+1) = v(k)$ e $w(k+1) = w(k)$:

$$\begin{aligned} \bar{v} &= -\bar{v} - 0{,}5\bar{w} + 2 \\ \bar{w} &= 1{,}5\bar{v} + \bar{w} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{v} &= 0 \\ \bar{w} &= 4 \end{aligned} \Rightarrow \bar{y} = -4$$

3.3 Studiare la stabilità del sistema

matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -0{,}5 \\ 1{,}5 & 1 \end{bmatrix}$, $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$

$$\det\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & \lambda-1 \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0{,}25 \Rightarrow \lambda = \pm 0{,}5.$$

il sistema è asintoticamente stabile perché $|\lambda| < 1$.

3.4 Determinare gli autovettori del sistema e scrivere la risposta libera quando lo stato iniziale appartiene a ognuno di essi.

Autovettori v_1:

$$(\lambda_1 I - A) v_1 = \emptyset = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

v_2: $$(\lambda_2 I - A) v_2 = \emptyset = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}5 & -1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per ogni coppia autovalore-autovettore si ha:

$$x_\lambda^L(k) = \underbrace{v_\lambda \cdot (\lambda)^k}_{\text{modo}}$$

allora

$$x_1^L(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} (0{,}5)^k$$

$$x_2^L(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-0{,}5)^k$$

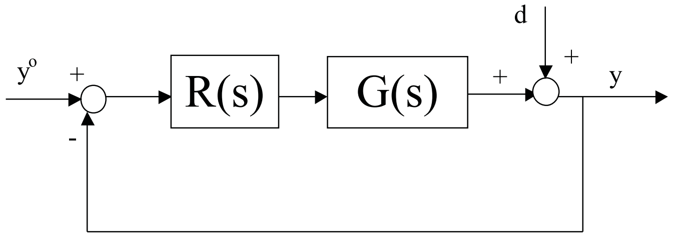
ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo in figura

Poli: $\{0, -20\}$

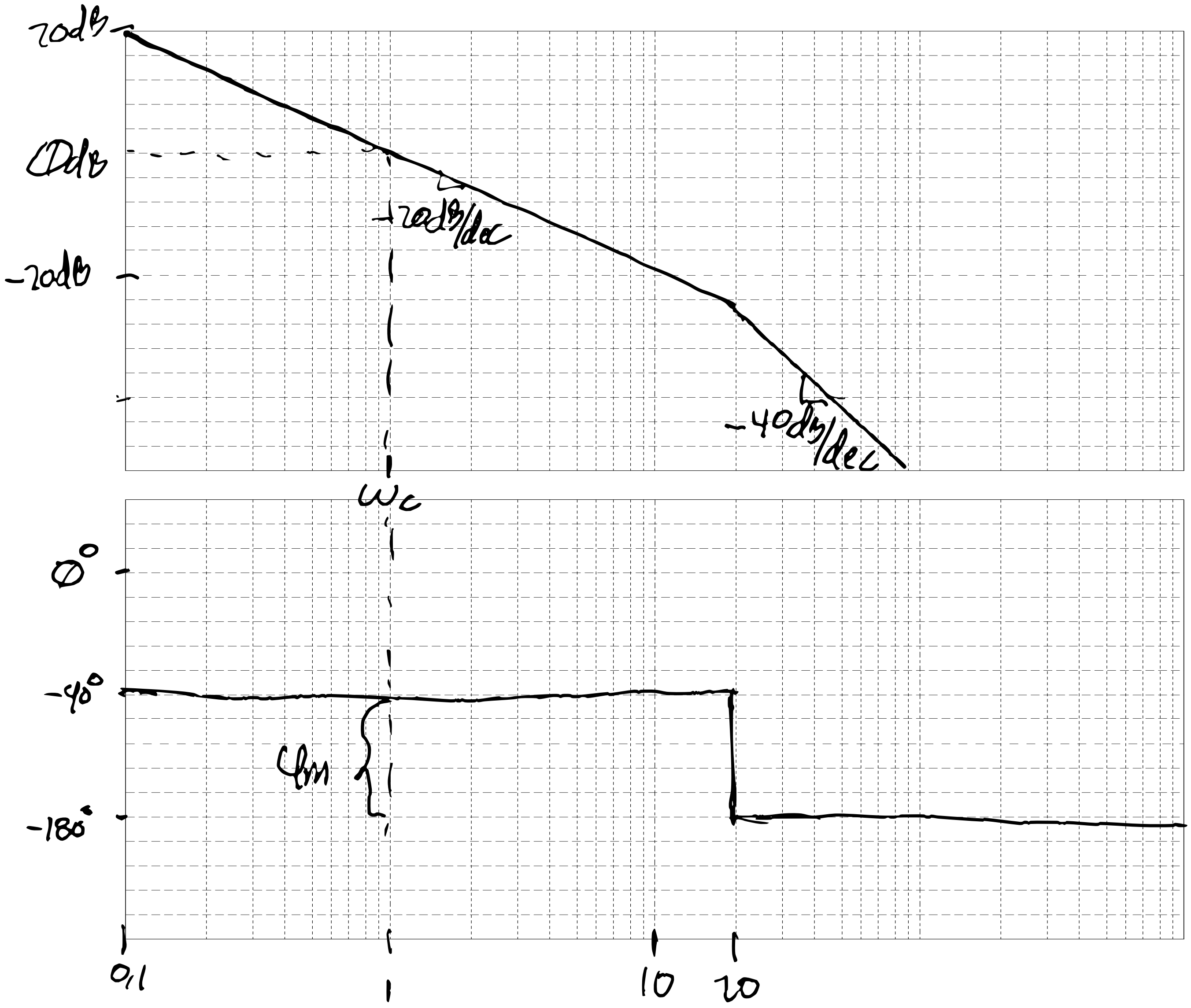
$\mu_g = 1$

TIPO 1



dove $G(s) = \frac{5}{s(s+20)}$ e $R(s) = 4$. $\Rightarrow L(s) = \frac{20}{s(s+20)}$

4.1 Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di anello $L(s) = R(s)G(s)$.



4.2 Verificare che il sistema in anello chiuso è asintoticamente stabile e determinare la pulsazione critica e il margine di fase.

- $|\arg(G(j\omega))| < 180°$, $\forall \omega$ $\Rightarrow$ Per il criterio della piccola fase, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.
- $G(s)$ non ha poli con $Re(p) > 0$

$\omega_c = 1\ rad/s$, $\varphi_M \cong 90°$

4.3 Determinale il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = \sin(0.1t)$ con $y_o(t) = 0$.

La F.d.T. da $D(s)$ verso $E(s)$ è

$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1+L(s)};$$ $0{,}1\ rad/s << \omega_c$, allora

$$\left|\frac{-1}{1+L(j\omega)}\right| \cong \frac{1}{|L(j\omega)|}$$, dal diagramma di Bode $|L(j0{,}1)| = 20dB$

$$|e^{\infty}(t)| \cong \frac{1}{|L(j0{,}1)|} \cdot |d(t)| = 0{,}1$$

4.4 Dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = 5 + 2\sin(10t)$ con $d(t) = 0$.

$$\frac{Y(s)}{Y^o(s)} = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$, per $\omega = 10\ rad/s >> \omega_c$ $\left|\frac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)}\right| \cong |L(j\omega)|$

$L(s)$ è tipo 1, allora: $|y^{\infty}(t)| = 5 + |\underbrace{L(j\cdot 10)}_{-20dB}| \cdot 2$

$$|y^{\infty}(t)| = 5 + 0{,}2 = 5{,}2$$

4.5 È possibile affermare che al aumentare il guadagno k del controllore $R(s)$ il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di un ingresso di riferimento $y_o(t) = sca(t)$ diminuisce, fino ad un valore massimo di k per il quale il sistema in anello chiuso risulta instabile? Giustificare la risposta.

- L'errore a transitorio esaurito per $y_o(t) = sca(t)$ è zero se il sistema retroazionato è asintoticamente stabile, indipendentemente dal valore di K.
- Per il criterio della piccola fase, il sistema è asintoticamente stabile per $K > 0$, allora la affermazione è falsa.