Durata della prova: 1h 30'

ESAME DI LOGICA E ALGEBRA

Politecnico di Milano – Ingegneria Informatica – 25 Gennaio 2021

Docente:	**Cognome:**	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. (a) Si costruisca una formula $\mathcal{F}(A, B, C)$ nella logica proposizionale sulle lettere enunciative A, B, C che abbia **solamente** i tre modelli ν_1, ν_2, ν_3 con $\nu_1(A) = \nu_1(B) = \nu(C) = 1$, $\nu_2(A) = 1, \nu_2(B) = \nu_2(C) = 0$, $\nu_3(A) = 0, \nu_3(B) = \nu_3(C) = 1$.

   (b) Mostrare sia per via semantica che usando la risoluzione che $\mathcal{F}(A, B, C) \vDash (B \vee \neg C)$.

   Soluzioni:

   (a) Usando la forma normale disgiuntiva una formula che ha i modelli descritti nell'esercizio è $(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$.

   (b) Per via semantica. Dire che $\mathcal{F}(A, B, C) \vDash (B \vee \neg C)$ equivale a dire che tutti i modelli di $\mathcal{F}(A, B, C)$ sono anche modelli di $(B \vee \neg C)$ ora i modelli di $\mathcal{F}(A, B, C)$ sono ν_1, ν_2, ν_3 con $\nu_1(A) = \nu_1(B) = \nu(C) = 1$, $\nu_2(A) = 1, \nu_2(B) = \nu_2(C) = 0$, $\nu_3(A) = 0, \nu_3(B) = \nu_3(C) = 1$, ed è facile vedere che sono anche modelli di $(B \vee \neg C)$. Mediante la risoluzione, dobbiamo mostrare che

$$\{(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C), \neg B \wedge C\}^c \vdash_R \square$$

   ora l'insieme di clausole contiene sicuramente $\{\neg B\}, \{C\}, \{B, \neg C\}$, ed è facile vedere che $\{B\}$ è una risolvente tra le ultime due clausole e quindi la clausola vuota si ottiene come risolvente di $\{\neg B\}$, e $\{B\}$.

2. Si consideri la relazione binaria R sull'insieme $X = \{a, b, c, d, e\}$ definita dalla seguente matrice di incidenza

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) R è una funzione da X in X? In caso, disegnare il grafo d'adiacenza della relazione $Ker(R)$ e calcolare l'insieme quoziente $X/Ker(R)$.

(b) Esiste la chiusura d'ordine di R? In caso affermativo calcolarla e disegnare il suo diagramma di Hasse. Calcolare (se esistono): $Sup\{a, c\}$ ed eventuali minimali e massimali.

(c) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\forall x\, (\exists y A(y, x) \Rightarrow \forall z(A(x, z) \Rightarrow A(z, z)))$$

Si stabilisca, motivando bene la risposta, se è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme X e in cui la lettera predicativa A è interpretata dalla relazione R^2 su X. La formula è logicamente valida o logicamente contraddittoria?

(d) Usando la risoluzione del primo ordine verificare se la formula

$$\forall x\, (\exists y\, (\, A(y, x) \Rightarrow \forall z(A(x, z) \Rightarrow A(z, z))\,) \wedge \neg\exists y A(x, y))$$

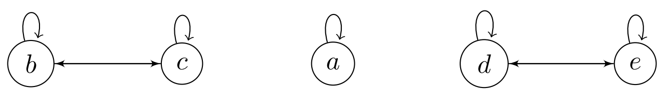
è logicamente contraddittoria.

Soluzioni:

(a) Poiché la matrice d'adiacenza ha un solo 1 per ogni riga, la relazione R è una funzione, dunque

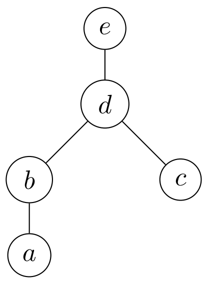
$$Ker(R) = \{(b, c), (c, b), (d, e), (e, d)\} \cup I_X$$

Il suo grafo d'adiacenza è:



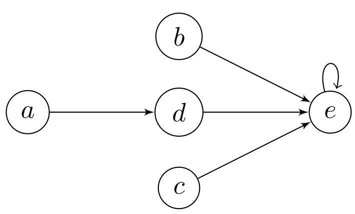
quindi l'insieme quoziente $X/Ker(R) = \{\{b, c\}, \{a\}, \{e, d\}\}$.

(b) Notiamo che R è antisimmetrica, quindi potrebbe esistere la chiusura d'ordine. Per verificarlo, chiudiamo riflessivamente e transitivamente R ottenendo $H = R \cup I_X \cup \{(c, e), (a, d), (b, e), (a, e)\}$ che è ancora antisimmetrica, quindi essendo H anche riflessiva e transitiva, otteniamo che H è la chiusura d'ordine di R. Il suo diagramma di Hasse è il seguente:



L'insieme dei maggioranti di $\{a, c\}$ è costituito dall'insieme $\{d, e\}$ il cui minimo (rispetto ad H) è d, quindi $Sup\{a, c\} = d$. I minimali sono $\{a, c\}$, mentre l'isieme di massimali è $\{e\}$ ed e è anche massimo.

(c) La formula interpreta la seguente proprietà della relazione R^2: per ogni $x \in X$, se esiste un elemento $y \in X$ tale che (y, x), allora per ogni altro $z \in X$ con $(x, z) \in R^2$ si ha che z è in relazione con se stesso. La relazione R^2 ha il seguente grafo d'adiacenza:



Indichiamo con B la sottoformula $\exists y A(y, x) \Rightarrow \forall z(A(x, z) \Rightarrow A(z, z))$. Gli unici elementi x che hanno una freccia entrante sono $x = d$ e $x = e$ quindi l'antecedente della formula B è soddisfatto se $x = d$ oppure $x = e$. Inoltre se $(d, z) \in R^2$, allora necessariamente $z = e$ e, poiché $(e, e) \in R^2$, abbiamo che $(z, z) \in R^2$. Analogamente se $(e, z) \in R^2$, allora necessariamente $z = e$ e, poiché $(e, e) \in R^2$, abbiamo che $(z, z) \in R^2$. Quindi la formula B è soddisfatta se $x = d$ oppure $x = e$. Se $x \neq d$ e $x \neq e$ allora l'antecedente di B è non soddisfatto e pertanto l'intera formula B è soddisfatta. Pertanto B è soddisfatta per ogni assegnamento di valori ad x e quindi, essendo la formula assegnata la chiusura universale di B segue che la formula assegnata è vera. Ovviamente tale formula non è soddisfacibile ma non vera dato che è chiusa e non è neppure logicamente contraddittoria dato che nella precedente interpretazione la formuala è vera. Rimane da verificare se è logicamente valida. Per fare questo basta prendere l'interpretazione che ha per dominio l'insieme $Y = \{a, b\}$ e dove A è interpretata dalla relazione $T = \{(a, b), (b, a)\}$, allora l'antecedente della precedente formula è sempre vera, ma il conseguente no, infatti prendendo $x = a$, abbiamo che z è necessariamente uguale a b, ma $(b, b) \notin T$, quindi il conseguente è falso, rendendo falsa la formula.

(d) Per verificare se la precedente formula è logicamente contraddittoria dobbiamo vedere se dalle clausole che si ottengono dalla formula data si può ottenere la clausola vuota. La forma normale prenessa della precedente formula è:

$$\forall x \exists y \forall z \forall w \,((\, A(y, x) \Rightarrow (A(x, z) \Rightarrow A(z, z))\,) \wedge \neg A(x, w))$$

da cui la sua forma di Skolem è

$$\forall x \forall z \forall w \,((\, A(f(x), x) \Rightarrow (A(x, z) \Rightarrow A(z, z))\,) \wedge \neg A(x, w))$$

dove $f(x)$ è una nuova lettera funzionale. Quindi portando la matrice della formula in forma normale congiuntiva otteniamo:

$$\forall x \forall z \forall w \,(\,(\neg A(f(x), x) \vee \neg A(x, z) \vee A(z, z)\,) \wedge \neg A(x, w))$$

e qundi otteniamo due sole clausole $\{\neg A(f(x), x), \neg A(x, z), A(z, z)\}, \{\neg A(x, w)\}$, ora una qualunque risolvente ottenuta usando queste due clausole e le eventuali ottenute conterranno sempre un letterale positivo della forma $A(,)$ e uno negativo del tipo $\neg A(,)$, oppure solamente un letterale negativo del tipo $\neg A(,)$. Quindi non si potrà mai ottenere una clausola contenente solo letterali della forma $A(,)$. Quindi non si può ottenere la clausola vuota, da cui deduciamo che la formula non è logicamente contraddittoria.

3. Si consideri l'insieme A delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi in $\mathbb{Z}_7$ strutturato ad anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di matrici. Si consideri il sottoinsieme B di A così definito

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & [0]_7 \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z}_7 \right\}$$

(a) Si mostri che B è un anello commutativo;

(b) Si determinino i divisori dello zero di B.

(c) Si consideri ora la seguente formula della logica del primo ordine

$$\forall x\, (\,\exists y\, (\neg E(x,a) \wedge \neg E(y,a) \wedge E(p(x,y),a)) \Rightarrow \forall z \neg E(p(x,z),b)\,)$$

e si dica se è vera, falsa, soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione che ha come dominio B e nella quale la lettera predicativa E sia da interpretare come l'uguaglianza, la lettera funzionale p come il prodotto tra matrici, la costante a sia la matrice nulla e b la matrice identica. La formula è logicamente valida?

Soluzioni:

(a) Dato che il testo dice già che A è un anello e B è un suo sottoinsieme, ci basta applicare il criterio per i sottoanelli. Siano $M_1, M_2 \in B$ con:

$$M_1 = \begin{pmatrix} a & [0] \\ b & a \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} c & [0] \\ d & c \end{pmatrix}$$

allora abbiamo

$$M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} a & [0] \\ b & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & [0] \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-c & [0] \\ b-d & a-c \end{pmatrix}$$

che è ancora una matrice di B dato che gli elementi sulla diagonale principale sono uguali fra loro e tutti gli elementi sono sempre classi di resto modulo 7. Dunque B è un anello e per verificare che è commutativo basta osservare quanto segue:

$$\begin{pmatrix} a & [0] \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & [0] \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & [0] \\ cb+da & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & [0] \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & [0] \\ b & a \end{pmatrix}$$

(b) Per cercare i divisori dello zero dobbiamo impostare l'equazione:

$$\begin{pmatrix} a & [0] \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & [0] \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{pmatrix}$$

dove almeno uno tra b e a deve essere diverso da $[0]$. La precedente uguaglianza implica che deve valere $xa = [0]$ e $bx + ay = [0]$. Ora, se $a \neq [0]$, dato che $\mathbb{Z}_7$ é un campo, dalla prima equazione otteniamo che necessariamente $x = [0]$ e quindi la seconda equazione si riduce a $ay = [0]$. Deduciamo allora che $y = [0]$, quindi in questo caso non abbiamo divisori dello zero. Supponiamo che $a = [0]$ e $b \neq [0]$, in questo caso le precedenti equazioni si riducono a $bx = [0]$ che ha soluzioni per $x = [0]$. Si deduce che in questo caso i divisori dello zero sono della forma

$$\begin{pmatrix} [0] & [0] \\ b & [0] \end{pmatrix}, b \neq [0]$$

(c) La formula si traduce nel seguente modo: se una matrice $x \in B$ non è la matrice nulla ed esiste una matrice $y \in B$ sempre non-nulla tale che il prodotto xy è la matrice nulla, allora per tutti gli z, xz non è la matrice identità. In parole povere la formula mi dice che se x è un divisore dello zero allora non è invertibile, che è vero in ogni anello. Oppure, dato che l'anello in questione è finito, è noto che i divisori dello zero di un anello finito sono tutti e soli gli elementi non invertibili. Quindi la formula è vera ed essendo chiusa non può essere soddisfacibile ma non vera. La formula non è logicamente valida, infatti basta prendere come interpretazione quella avente come dominio l'insieme dei numeri interi ed in cui la relazione che interpreta la lettera predicativa E è la relazione $\geq$, l'operazione che interpreta la lettera funzionale p è la moltiplicazione e in cui la costante a è interpretata dal numero 0 e la costante b dal numero 1. Allora la traduzione della formula in questa interpretazione è la seguente: 'per ogni intero x, se esiste un intero y tale che $x < 0$, $y < 0$ e $xy \geq 0$ allora, per ogni intero z, $xz < 1$'. Se si assegna ad x il valore -2 allora l'affermazione 'esiste un intero y tale che $x < 0$, $y < 0$ e $xy \geq 0$' è sempre verificata (basta prendere negativo anche y) mentre la frase 'per ogni intero z, $xz < 1$' non è verificata ad esempio da $z = -1$. Segue che l'intera formula è falsa in questa interpretazione poiché non è soddisfatta da tutti gli assegnamenti di valori ad x.