Analisi Matematica 2 – 8 giugno 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Parte A	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Totale**

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A$\geq$4, parte B$\geq$12, totale$\geq$18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, e sia $(x_0, y_0) \in A$. Scrivere la definizione di differenziabilità per f in (x_0, y_0) e dimostrare che se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora è continua in tale punto.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ la serie di Fourier della funzione $f(x) = \cos x \, \sin x$. Allora:
(a) $a_2 = b_2 = 1/2$ (b) $a_2 = b_2 = 0$ (c) $a_2 = 0$ e $b_2 = 1$ (d) $a_2 = 0$ e $b_2 = 1/2$ $\boxed{\text{V}}$

(2) Siano $E \subset \mathbb{R}^2$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora:
(a) se $x_0 \in E$, allora x_0 è un punto interno ad E (b) se $x_0 \in \partial E$, allora $x_0 \notin E$
(c) se x_0 è un punto esterno ad E, allora $x_0 \notin E$ $\boxed{\text{V}}$ (d) nessuna delle altre

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un suo punto critico. Si denoti con $H_f(x_0)$ la matrice Hessiana di f calcolata in x_0. Allora:
(a) se 2 è un autovalore di $H_f(x_0)$, allora x_0 non può essere un punto di massimo relativo per f $\boxed{\text{V}}$
(b) se $\det H_f(x_0) < 0$, il punto x_0 può essere un punto di minimo relativo per f
(c) se i termini sulla diagonale principale di $H_f(x_0)$ sono gli unici nulli, x_0 può essere estremo relativo per f
(d) nessuna delle altre

(4) Sia $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Quale tra le seguenti curve percorre il sostegno di φ due volte in senso orario, mantenendo il punto iniziale e il punto finale di φ?
(a) $\psi(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [0, \pi]$ (b) $\psi(s) = (\cos(2s), -\sin(2s))$, $s \in [0, 2\pi]$ $\boxed{\text{V}}$ (c) $\psi(s) = (\cos(2s), -\sin(2s))$, $s \in [0, \pi]$ (d) $\psi(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [0, 2\pi]$

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 (a) (4 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t)+2y'(t)+y(t) = e^{-2t}$.
(b) (2 punti) Stabilire se tale equazione possieda soluzioni y tali che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$; in caso affermativo, determinarle tutte.

(c) (2 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

(S) (a) Per prima cosa risolviamo l'equazione omogenea associata $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$. Per far ciò, determiniamo il polinomio caratteristico e le sue radici:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2, \qquad\qquad p(\lambda) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -1.$$

Trattandosi di una radice doppia, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_o(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}$, al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Cerchiamo adesso una soluzione particolare dell'equazione completa. La forzante è di tipo esponenziale, con coefficiente dell'esponente -2, che non risulta essere uno zero del polinomio caratteristico. Quindi una soluzione particolare ha la forma $z(t) = Ae^{-2t}$, per un opportuno $A \in \mathbb{R}$. Per determinare A, sostituiamo z nell'equazione completa:

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = 4z(t) - 4z(t) + z(t) = z(t) = Ae^{-2t} \overset{\text{impongo}}{=} e^{-2t},$$

da cui $A = 1$. In conclusione, una soluzione particolare ha la forma $y_p(t) = e^{-2t}$. Dunque, per il teorema di struttura, l'integrale generale dell'equazione completa è

$$y(t) = y_o(t) + y_p(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + e^{-2t},$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
(b) Essendo

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-t} = \lim_{t\to+\infty} te^{-t} = \lim_{t\to+\infty} e^{-2t} = 0,$$

tutte le soluzioni dell'equazione data verificano $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$.
(c) Per risolvere il problema di Cauchy, calcoliamo la derivata dell'integrale generale:

$$y'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 te^{-t} - 2e^{-2t}$$

e imponiamo le due condizioni iniziali: $\begin{cases} y(0) = C_1 + 1 = 1 \\ y'(0) = -C_1 + C_2 - 2 = -1, \end{cases}$ da cui deduciamo $C_1 = 0$, $C_2 = 1$. La soluzione del problema di Cauchy è perciò $te^{-t} + e^{-2t}$.

Esercizio 2 Sia $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi^2 & x \in [0, \pi/2) \\ -x^2 + \pi^2 & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

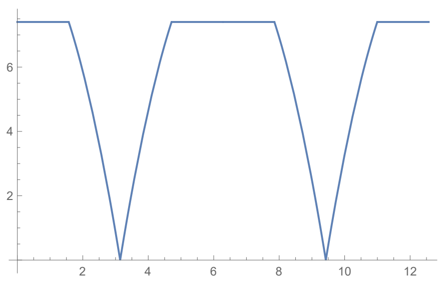
Sia $g_p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ l'estensione pari di g, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'estensione 2π-periodica di g_p.

(a) (1 punto) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[0, 4\pi]$.

(b) (4 punti) Scrivere la serie di Fourier di f.

(c) (3 punti) Discutere convergenza puntuale, convergenza in media quadratica e convergenza totale della serie trovata.

(S) (a) Il grafico di f su $[0, 4\pi]$ è riportato in figura:



(b) Scrivendo la serie di Fourier nella forma $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$, calcoliamo i coefficienti a_0, a_n, b_n. Poiché f è pari, $b_n = 0$ per ogni n. Si ha poi

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{3}{4}\pi^2\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x^2 + \pi^2)\, dx\right) = \frac{7}{12}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{3}{4}\pi^2 \cos(nx)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x^2 + \pi^2)\, \cos(nx) dx\right) = \frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4\cos(n\pi)}{n^2} - \frac{4}{n^3\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

procedendo per esempio per parti nel secondo integrale. Segue che la serie di Fourier associata ad f si scrive come

$$\frac{7}{12}\pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4(-1)^n}{n^2} - \frac{4}{n^3\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right) \cos(nx).$$

Si può eventualmente notare che $a_1 = (4/n^2 - 4/(n^3\pi))$, $a_2 = -6/n^2$, $a_3 = (4/n^2 + 4/(n^3\pi))$, $a_4 = -2/n^2$ e tali coefficienti si ripetono ciclicamente ($a_1 = a_5 = a_9 = \ldots$, $a_2 = a_6 = a_{10} = \ldots$ e così via).

(c) La funzione f è 2π-periodica, regolare a tratti e continua su $\mathbb{R}$. Pertanto, la serie di Fourier determinata al punto precedente converge totalmente e quindi anche puntualmente ad f su tutto $\mathbb{R}$. Poiché f è regolare a tratti, la serie di Fourier di f converge ad f anche in media quadratica.

Esercizio 3 Calcolare

$$I = \iiint_D z\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\, dz \quad \text{con} \quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ z^2 \le x^2+y^2 \le 4z^2\}.$$

(S) In coordinate cilindriche (o, equivalentemente, tramite integrazione per strati e passaggio a coordinate polari), l'integrale diventa

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_z^{2z} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho \right) z dz = 2\pi \int_0^1 z \left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2} \right]_z^{2z} dz = -\pi \int_0^1 z \left[e^{-4z^2} - e^{-z^2} \right] dz \\ &= -\pi \left\{ \int_0^1 z\, e^{-4z^2}\, dz - \int_0^1 z\, e^{-z^2}\, dz \right\} = -\pi \left[-\frac{e^{-4z^2}}{8} + \frac{e^{-z^2}}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{8} e^{-4} - \frac{\pi}{2} e^{-1} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$