Analisi Matematica 2 – luglio 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome (stampato maiuscolo leggibile):	**Nome:**	**Matricola:**

Parte A	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Tot. Es.**	**Totale**	**Voto**

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A≥ 4, parte B≥ 12, totale≥ 18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Definire i coefficienti di Fourier relativi ad una funzione 2π-periodica. Successivamente, enunciare e dimostrare il teorema sul calcolo dei coefficienti di Fourier per funzioni 2π-periodiche.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Date le seguenti tre equazioni differenziali nell'incognita $y(t)$:

$$y'(t) + 3\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) y(t) + 5\log 3 = 0, \qquad y'(t) = 2y(t) - 0.3\,y^2(t), \qquad y'(t) = ty^5(t),$$

si ha che:
(a) le equazioni differenziali sono rispettivamente del primo, del secondo e del quinto ordine
(b) tutte le equazioni sono equazioni di Bernoulli
(c) tutte le equazioni ammettono almeno una soluzione costante
(d) tutte le soluzioni delle tre equazioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$

(2) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, consideriamo il polinomio di Fourier F_m di ordine $m \in \mathbb{N}$ associato a f. Abbiamo che:
(a) $F_m(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ per $m \to +\infty$
(b) può esistere $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che il limite di $F_m(x_0)$ per $m \to +\infty$ non esiste
(c) F_m converge in norma quadratica a f per $m \to +\infty$
(d) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, allora F_m converge totalmente in $\mathbb{R}$ e la sua somma è derivabile termine a termine

(3) Sia $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le y \le 1\right\}$ e sia f continua in D. Allora $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy =$
(a) $\int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y)dx\right) dy$
(b) $\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y)dy\right) dx$
(c) $\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y)dy\right) dx$
(d) $\int_x^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dx\right) dy$

(4) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Data una curva regolare $\mathbf{r} : I \to A$ e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A, consideriamo la funzione composta $F := f \circ \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$. Abbiamo che:
(a) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) >$ per ogni $t \in I$,
(b) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}'(t)), \mathbf{r}(t) >$ per ogni $t \in I$,
(c) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}'(t)), \mathbf{r}'(t) >$ per ogni $t \in I$,
(d) non è sempre vero che F sia derivabile in I,
dove $< \cdot, \cdot >$ denota il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$.

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Sia data la funzione di due variabili $g(x,y) = e^{x^2 y} - 1$.
(a) (4 punti) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di g sul vincolo

$$\mathcal{Z} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

(b) (4 punti) Stabilire se esista il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2};$$

in caso affermativo, determinare tale limite.

Esercizio 2 Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrato nell'origine della funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$, seguendo lo schema di seguito riportato:

(a) (2 punti) utilizzando le proprietà viste sulla serie geometrica, scrivere lo sviluppo in serie di potenze di $\dfrac{1}{1+x^2}$;

(b) (1 punto) dedurre dallo sviluppo trovato al punto precedente lo sviluppo di $\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(c) (3 punti) utilizzando le proprietà viste per le serie di potenze reali dedurre dallo sviluppo trovato al punto precedente lo sviluppo in serie di potenze di $\log(1 + x^2)$;

(d) (2 punti) specificare l'intervallo di convergenza dello sviluppo trovato al punto precedente.

Esercizio 3 Viene assegnata l'equazione differenziale

$$y'(t) = y^n(t)\big(2y(t) - 1\big), \tag{*}$$

dove n è un intero positivo ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

(a) (1 punto) Giustificare l'esistenza e l'unicità locale della soluzione per tutti i possibili problemi di Cauchy associati all'equazione (*).

(b) (3 punti) Posto $n = 1$, determinare l'espressione della soluzione di (*) che soddisfa $y(0) = 1$.

(c) (3 punti) Posto $n = 2$, disegnare il grafico qualitativo della soluzione dell'equazione (*) che soddisfa $y(0) = 1/4$, tenendo conto della sua monotonia e della sua convessità.

(d) (1 punto) Rappresentare la linea della fasi associata all'equazione autonoma (*), al variare dell'intero positivo n (è sufficiente distinguere il caso n pari dal caso n dispari).