Durata della prova: 1h 30'

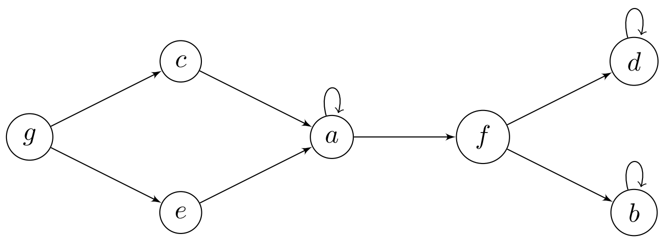
Esame di Logica e Algebra, 19 Gennaio 2023

Politecnico di Milano – Ingegneria Informatica –

Docente:	**Cognome:**	**Nome:**	**Codice persona:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. (Punteggio:(a)4, (b) 3, (c) 2, (d)4)
Sia $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo di adiacenza:



(a) Si determini, se possibile, la minima relazione d'ordine S contenente R e si dica quali sono, se esistono, gli elementi massimali e minimali, massimo e minimo di X rispetto a S.

(b) Si consideri la relazione binaria ρ su X definita nel seguente modo: per ogni $x, y \in X$, $(x, y) \in \rho$ se e solo se esiste $z \in X$ tale che $(x, z) \in R$ e $(y, z) \in R$. Si stabilisca quali proprietà soddisfa ρ e se ne disegni il grafo di adiacenza. Si costruisca infine la relazione d'equivalenza T generata da ρ e l'insieme quoziente X/T.

(c) Si stabilisca quante sono le funzioni da X ad X contenute in R e se fra queste funzioni ce ne sono alcune che ammettono inversa sinistra oppure inversa destra.

(d) Data la seguente formula della logica del primo ordine

$$\forall x(A(x, x) \Leftrightarrow \exists y \exists z(A(y, x) \wedge A(z, x)))$$

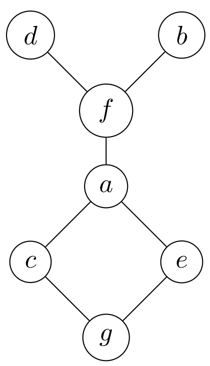
si determini se essa è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio X e in cui A sia da interpretare come la relazione R.
Si scriva la forma normale prenessa della formula assegnata e si stabilisca se essa è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione precedente.

Soluzione:

(a) Chiudendo transitivamente e riflessivamente R otteniamo la relazione

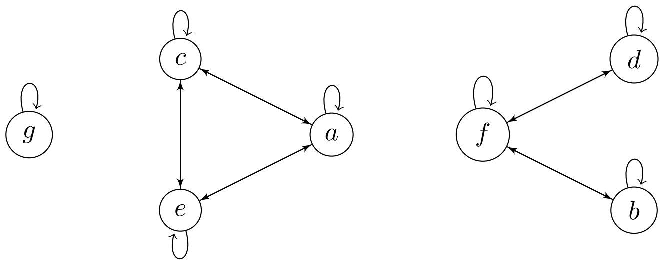
$$S = R \cup \{(g, a), (g, f), (g, d), (g, b), (c, f), (c, d), (c, b), (e, f), (e, d), (e, b), (a, d), (a, b)\} \cup \{(x, x) : x \in X\}$$

Notiamo che S è antisimmetrica, quindi S è la minima relazione d'ordine che contiene R. Il diagramma di Hasse è il seguente:



da cui vediamo che g è un minimo che è anche minimale, mentre $\{d, b\}$ è l'insieme dei massimali e non c'è massimo.

(b) Il grafo d'adiacenza di ρ è il seguente:



che è riflessiva, simmetrica e seriale. La sua chiusura d'equivalenza T è $\rho \cup \{(d,b),(b,d)\}$. L'insieme quoziente è $X/T = \{[g],[c],[b]\}$ con $[g] = \{g\}$ $[c] = \{c,e,a\}, [b] = \{b,d,f\}$.

(c) Necessariamente una funzione $f \subseteq R$ deve contenere le coppie $(c,a),(e,a),(d,d),(b,b)$, metre per g possiamo avere le due coppie $(g,c),(g,e)$ e similmente per a possiamo scegliere una delle coppie $(a,a),(a,f)$ e per f le coppie $(f,d),(f,b)$. Quindi abbiamo $2 \times 2 \times 2 = 8$ possibilità. Quindi ci sono 8 possibili funzioni contenute in R. Nessuna di queste può essere iniettiva poiché se scegliamo la funzione f_1 che contiene la coppia (f,d) avendo $(d,d) \in f_1$, f_1 non può essere iniettiva. Similmente se consideriamo la funzione f_2 che contiene la coppia (f,b), avendo $(b,b) \in f_2$, otteniamo che anche f_2 non può essere iniettiva. Quindi nessuna funzione contenuta in R è iniettiva e poiché stiamo considerando funzioni su di uno stesso insieme finito, non ci possono nemmeno essere funzioni suriettive. Dunque nessuna funzione ammette né inversa sinistra né inversa destra.

(d) La formula si interpreta come xRx se e solo se esistono y,z tale che yRx e zRx. La formula è falsa in questa interpretazione basta infatti considerare $x = f$, infatti in questo caso f non è in relazione con se stesso, rendendo falso la prima parte della formula prima del "se e solo se", ma prendendo $y = z = a$ abbiamo che aRf e aRf, rendendo vera la seconda parte. Abbiamo le seguenti equivalenze semantiche:

$$\begin{aligned}
&\forall x(A(x,x) \Leftrightarrow \exists y \exists z(A(y,x) \wedge A(z,x))) \\
&\equiv \forall x\,(\,(A(x,x) \Rightarrow \exists y \exists z(A(y,x) \wedge A(z,x))) \wedge \exists y \exists z(A(y,x) \wedge A(z,x)) \Rightarrow A(x,x)\,) \\
&\equiv \forall x\,(\,\exists y \exists z(A(x,x) \Rightarrow (A(y,x) \wedge A(z,x))) \wedge \forall y \forall z\,((A(y,x) \wedge A(z,x)) \Rightarrow A(x,x))\,) \\
&\equiv \forall x \exists y \exists z \forall t \forall v\,(\,(A(x,x) \Rightarrow (A(y,x) \wedge A(z,x))) \wedge ((A(t,x) \wedge A(v,x)) \Rightarrow A(x,x))\,)
\end{aligned}$$

dato che la forma normale prenessa preserva l'equivalenza semantica, anche quest'ultima sarà falsa nella precedente interpretazione.

2. (Punteggio: 3+5)

Si considerino le seguenti affermazioni

a) Se Cinzia non è bionda allora Anna non è mora e Barbara non è rossa.

b) Se Anna è mora allora Cinzia non è bionda.

c) Cinzia è bionda o Anna non è mora.

Si mostri prima utilizzando la definizione e poi la teoria della risoluzione che l'affermazione c) è conseguenza semantica di a) e b).

Soluzione: Indichiamo con C la proposizione "Cinzia non è bionda", A come "Anna non è mora" e B come "Barbara non è rossa". Allora le precedenti frasi si traducono rispettivamente come: $C \Rightarrow A \wedge B$, $\neg A \Rightarrow C$, $\neg C \vee A$. Dobbiamo prima mostrare per via semantica che $\{C \Rightarrow A \wedge B, \neg A \Rightarrow C\} \models \neg C \vee A$. Ora i modelli dell'insieme $\Gamma = \{C \Rightarrow A \wedge B, \neg A \Rightarrow C\}$ sono $C = 0, A = 0$ e $B \in \{0, 1\}$, oppure $C = 1, A = B = 1$. Questi sono chiaramente anche modelli di $\neg C \vee A$ e quindi vale $\{C \Rightarrow A \wedge B, \neg A \Rightarrow C\} \models \neg C \vee A$.
Usando la risoluzione dobbiamo invece mostrare che l'insieme $\Lambda = \{C \Rightarrow A \wedge B, \neg A \Rightarrow C, C \wedge \neg A\}$ è insoddisfacibile usando il teorema di correttezza e completezza per refutazione $\Lambda^c \vdash \Box$. Le clausole di Λ sono:

$$\Lambda^c = \{\{\neg C, A\}, \{\neg C, B\}, \{A, C\}, \{C\}, \{\neg A\}\}$$

Ora la clausola $\{A\}$ si ottiene come risolvente dalle due clausole $\{\neg C, A\}$ e $\{C\}$, infine la clausola vuota $\Box$ si ottiene come risolvente delle clausole $\{A\}$ e $\{\neg A\}$.

3. (Punteggio: (a)4, (b) 2, (c) 2, (d)2)

Si consideri l'insieme A sottoinsieme dell'anello $\mathbb{Z}$ degli interi così definito

$$A = \{4h, h \in \mathbb{Z}\}$$

(a) Si mostri che A è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto di interi.

(b) Si mostri che il sottoinsieme B di A così definito

$$B = \{8h, h \in \mathbb{Z}\}$$

è un suo ideale.

(c) Si consideri ora la relazione ρ su A così definita: $a\rho b$ se e solo se $a - b \in B$, e si dica se è una congruenza su A.

(d) Si consideri ora la seguente formula della logica del primo ordine

$$\forall x \forall y \forall z \forall t\, (\, R(x, y) \wedge R(z, t) \Rightarrow R(f(x, z), f(y, t)) \wedge R(g(x, z), g(y, t))\,)$$

e si dica se è vera, falsa, soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione che ha come dominio l'insieme A, la lettera predicativa R sia da interpretare come la relazione ρ sopra definita, mentre le lettere funzionali $f(x, y)$ e $g(x, y)$ siano da interpretare rispettivamente come le operazioni di somma e prodotto di interi.

Soluzione:

(a) Dato che A è sottoinsieme dell'anello $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ usiamo il criterio per i sottoanelli: quindi prendiamo due elementi $a, b \in A$ e mostriamo che $a - b \in A$ e $a \cdot b \in A$. Dato che a, b sono entrambi multipli di 4 anche la differenza $a - b$ sarà multiplo di 4 e quindi $a - b \in A$, similmente il prodotto $a \cdot b$ sarà un intero multiplo di 4 e quindi $a \cdot b \in A$.

(b) Notiamo che $B = \{2x : x \in A\}$, quindi B è un sottoisnieme di A. Ora usando lo stesso argomento di prima si mostra che B è un sottoanello di A, mentre per verificare se è un ideale di B basta prendere un generico $a \in A$ e $b \in B$ e mostrare che $a \cdot b, b \cdot a \in B$. Ora se $b \in B$ sappiamo $b = 2x$, per un qualche intero $x \in A$, quindi se moltiplichiamo a sinistra e a destra per un generico elemento $a \in A$ avremo $a \cdot b = b \cdot a = 2(ax) \in B$ dato che $ax \in A$ essendo ancora un multiplo di 4 (dato che a lo è).

(c) È noto dalla teoria che dato un ideale I la relazione $a\rho b$ se $a - b \in I$ è una congruenza di anelli. L'esercizio segue da questa osservazione e dal precedente punto.

(d) La formula descrive la seguente proprietà: se $x\rho y$ e $z\rho t$, allora $x+z\rho y+t$ e $x\cdot z\rho y\cdot t$ che è esattamente la definizione di congruenza di un anello.