Analisi Matematica 2 – agosto 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Parte A	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Totale**

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A≥ 4, parte B≥ 12, totale≥ 18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B $= 100$ minuti.

PARTE A. Teoria (4 punti). Enunciare e dimostrare il criterio della matrice Hessiana.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze reale e si denoti con R il suo raggio di convergenza. Si ha:
(a) se $R=0$, la serie non converge puntualmente in nessun punto
(b) se $R=+\infty$, la serie converge totalmente in ogni sottointervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$
(c) $R=\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, se tale limite esiste
(d) nessuna delle altre

(2) Sia $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ \log(xy)\leq 1\}$. Allora
(a) Nessuna delle altre affermazioni è corretta $\boxed{\text{V}}$ (b) Ω è aperto (c) Ω è chiuso (d) Ω è limitato

(3) Sia $\Omega = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ :\ x^2+y^2\leq 4,\ y\leq x+2,\ x\leq 0\right\}$ e sia f continua in Ω. Allora $\displaystyle\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy =$
(a) $\int_{-2}^{0}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{x+2} f(x,y)dydx$ $\boxed{\text{V}}$ (b) $\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\int_0^2 f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)d\rho d\theta$
(c) $\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{0}\int_{-2}^{2} f(x,y)dydx$ (d) $\int_{-2}^{0}\int_0^{x+2} f(x,y)dydx$

(4) Data una serie di funzioni $\sum_n f_n$ con $f_n : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, I non vuoto, si ha
(a) se $f_n(x)\to 0$ per ogni $x\in I$, allora la serie data converge puntualmente in I
(b) se esiste $x_0\in I$ tale che $f_n(x_0)\not\to 0$, allora la serie data non converge totalmente in I $\boxed{\text{V}}$
(c) se la serie data converge puntualmente su I, allora è integrabile termine a termine su I
(d) se $|f_n(x)|\leq 1/n$ per ogni $x\in I$ ed ogni n, allora la serie data converge totalmente in I

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 (i) (6 punti) Determinare l'integrale generale del sistema omogeneo $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) (2 punti) Determinare la soluzione $\underline{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))$ di tale sistema che soddisfa $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = -1$.

(S) (i) Per risolvere il sistema determiniamo autovalori e autovettori della matrice A. Il polinomio caratteristico è

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 3,$$

avente zeri complessi e coniugati $1 \pm i\sqrt{2}$. Scegliendo ad esempio l'autovalore $\lambda = 1 + i\sqrt{2}$, l'autovettore associato $\underline{v} = (v_1, v_2)$ è soluzione del sistema

$$\begin{pmatrix} 2-(1+i\sqrt{2}) & 3 \\ -1 & -(1+i\sqrt{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

che è equivalente alla condizione $v_1 = -(1+i\sqrt{2})v_2$. Un possibile autovettore associato a λ è

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} -(1+i\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{quindi} \qquad e^{\lambda t}\underline{v} = e^t \left(\cos(\sqrt{2}t) + i\sin(\sqrt{2}t)\right) \begin{pmatrix} -(1+i\sqrt{2}) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgendo i conti si ottiene

$$e^{\lambda t}\underline{v} = \begin{pmatrix} e^t\left(\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - \cos(\sqrt{2}t)\right) \\ e^t\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -e^t\left(\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \\ e^t\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

L'integrale generale del sistema lineare omogeneo è perciò

$$\underline{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t\left(\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) - \cos(\sqrt{2}t)\right) \\ e^t\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -e^t\left(\sin(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t)\right) \\ e^t\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
(ii) Essendo $y_1(0) = -c_1 - \sqrt{2}c_2$ e $y_2(0) = c_1$, per risolvere il problema di Cauchy imponiamo le condizioni

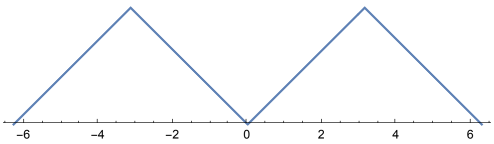
$$\begin{cases} -c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \\ c_1 = -1, \end{cases}$$

da cui $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$, che fornisce la soluzione

$$\begin{pmatrix} e^t\left(\cos(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t)\right) \\ -e^t\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 Sia f la funzione 2π-periodica, pari, definita in $[0,\pi]$ da $f(x)=x$.
(i) (1 punto) Rappresentare f sull'intervallo $[-2\pi, 2\pi]$.
(ii) (4 punti) Calcolare la serie di Fourier di f.
(iii) (3 punti) Relativamente a tale serie: determinare l'insieme di convergenza puntuale e la funzione somma della serie; stabilire se la convergenza sia totale in tutto $\mathbb{R}$; discutere la convergenza in media quadratica.

(S) (i)



(ii) Essendo f pari, $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$. Inoltre:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n\pi)-1}{n^2} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2},$$

cioè $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi(2k+1)^2}$ per $k \geq 0$, mentre $a_{2k} = 0$ per ogni $k \geq 1$. In conclusione, la serie di Fourier di f è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos((2k+1)x)}{(2k+1)^2}.$$

(iii) Essendo f regolare a tratti sul suo periodo, concludiamo che la sua serie di Fourier converge puntualmente in tutto $\mathbb{R}$ e che si ha convergenza in media quadratica in ogni intervallo limitato. Essendo inoltre f continua in tutto $\mathbb{R}$, la funzione somma coincide con f stessa e la convergenza è totale in tutto $\mathbb{R}$.

Esercizio 3 Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = -\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} + 2.$$

(i) (3 punti) Motivando la risposta, dire se f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$. Detto I_1 l'insieme di livello 1 di f, determinare un vettore ortogonale ad I_1 nel punto $P_0 = \left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

(ii) (2 punti) Immaginando che la regione $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le f(x,y)\}$ rappresenti una montagna, calcolare la direzione di minima pendenza (crescita) della montagna nel punto P_0,

(iii) (3 punti) Considerare l'insieme $\gamma = \{(x,y,1) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in I_1\}$ come sostegno di una curva in $\mathbb{R}^3$ e, immaginando che si scavi un fossato sulle pendici della montagna lungo γ, calcolare la massa totale del materiale rimosso per lo scavo nel caso in cui la densità di massa $\delta : M \to \mathbb{R}$ sia definita per ogni $(x,y,z) \in M$ da

$$\delta(x,y,z) = \frac{x^2|y|}{\sqrt{\frac{4}{9}x^2 + \frac{9}{4}y^2}}.$$

(S) Le risposte ai quesiti sono:

(i) La funzione f è definita in $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f esistono e sono continue in $\mathbb{R}^2$, in quanto sono date da:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{9}x \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{y}{2},$$

quindi $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Per il teorema del differenziale totale, f risulta quindi differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

Osserviamo che I_1 è dato dai punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ appartenenti all'ellisse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

che è il sostegno della curva regolare $\mathbf{r}(\theta) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{r}(\theta) = (3\cos\theta, 2\sin\theta)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$. Pertanto, sappiamo dal teorema sull'ortogonalità del gradiente agli insiemi di livello, che

$$\mathbf{v} = \nabla f(P_0) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

è un vettore ortogonale a I_1.

(ii) Siccome $\nabla f(P_0) \neq (0,0)$, possiamo utilizzare il teorema sulle direzioni di massima e minima crescita e ottenere che la direzione di minima pendenza della montagna nel punto P_0 è

$$\mathbf{v}_{\min} = -\frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} = \frac{9}{2\sqrt{19}}\left(\frac{2}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{19}}(1, 3\sqrt{2}).$$

(iii) Definita la curva $\widetilde{\mathbf{r}}(\theta) : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ con $\widetilde{\mathbf{r}}(\theta) = (3\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$ per ogni $\theta \in [0, 2\pi)$, si ha

$$\widetilde{\mathbf{r}}'(\theta) = \begin{pmatrix} -3\sin\theta \\ 2\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \|\widetilde{\mathbf{r}}'(\theta)\| = \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}$$

e

$$\delta(\widetilde{\mathbf{r}}(\theta)) = \frac{9\cos^2\theta\, 2|\sin\theta|}{\sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta}}.$$

La massa totale del materiale rimosso è data dal valore dell'integrale curvilineo:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \delta\, ds &= \int_0^{2\pi} \delta(\widetilde{\mathbf{r}}(\theta))\|\widetilde{\mathbf{r}}'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{2\pi} 9(\cos\theta)^2 2|\sin\theta|\, d\theta \\ &= 36\int_0^{\pi} (\cos\theta)^2 \sin\theta\, d\theta = 36\int_{-1}^{1} u^2\, du = 36\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = 24\end{aligned}$$

dove abbiamo usato il cambio di variabili $u = \cos\theta$.