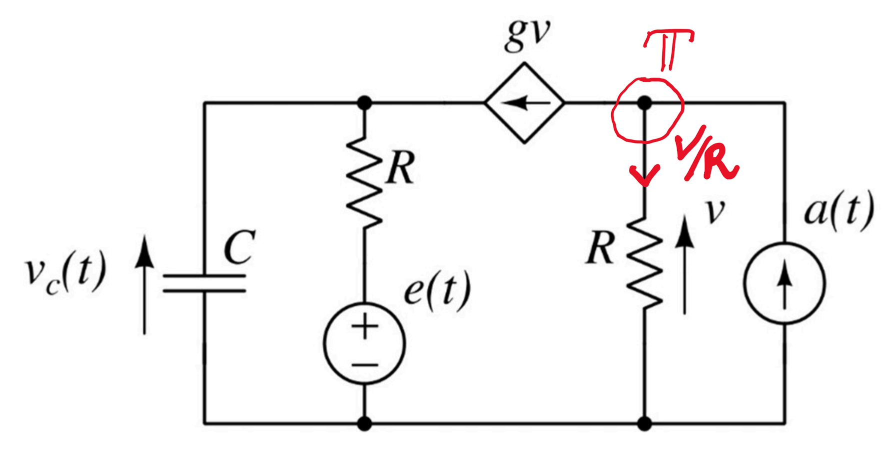
Soluzione tema di esame del 21 giugno 2019

giovedì 20 giugno 2019 14:37

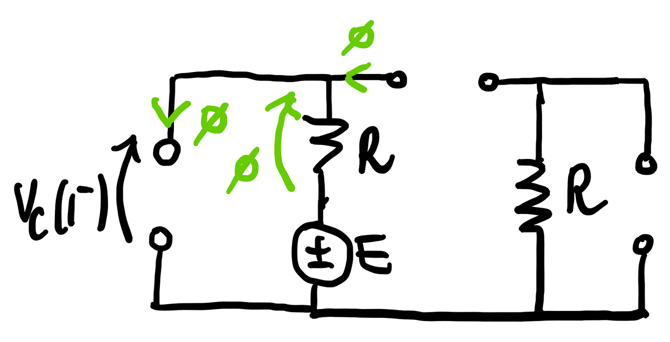
E1

Sapendo che il circuito evolve a regime per $t = 1^-$, assumendo $a(t) = \begin{cases} 0, & t \le 1 \\ A, & t > 1 \end{cases}$ ed $e(t) = \begin{cases} E, & t \le 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$, si determini $v_c(t)$ in $t = 1^-$ e per $t > 1$.



KCL π : $gV + \frac{V}{R} = a(t)$ $\qquad V = \frac{R\,a(t)}{1+Rg}$

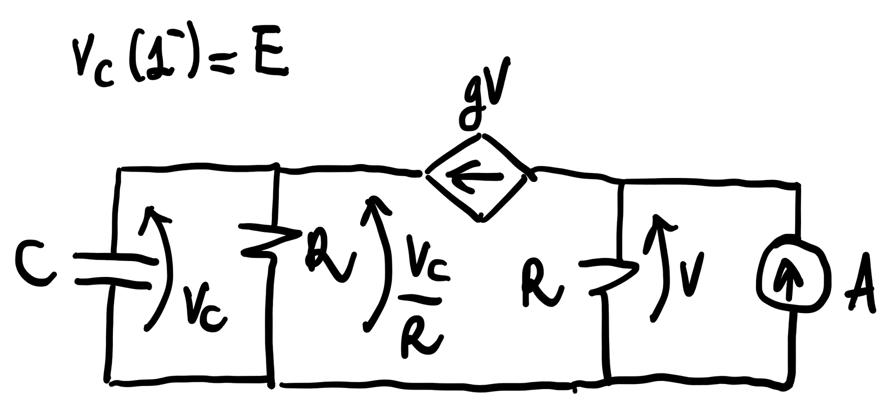
• $t=1^-$ in $t=1^-$ il circuito è a regime quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto



$V(1^-) = \emptyset$ infatti $a(1^-) = \emptyset$.
quindi $gV(1^-) = \emptyset$

$V_c(1^-) = E$

• $t>1$



$V = \frac{RA}{1+Rg}$

$$C\frac{dV_c}{dt} = gV - \frac{V_c}{R} = -\frac{V_c}{R} + \frac{Rg}{1+Rg}A$$

$$\frac{dV_c}{dt} = -\frac{1}{RC}V_c + \frac{RgA}{C(1+Rg)}$$

$$V_c(t) = K e^{-\frac{t-1}{RC}} + H$$

$$\cancel{\frac{dH}{dt}}^{\,\emptyset} = -\frac{H}{RC} + \frac{RgA}{C(1+Rg)} \qquad H = \frac{gR^2A}{1+Rg}$$

$V_c(1^-) = V_c(1^+)$ continuità delle variabili di stato rispetto agli ingressi

$E = K + H \qquad K = E - H$

$$V_c(t)\Big|_{t\ge 1} = (E-H)e^{-\frac{t-1}{RC}} + H =$$

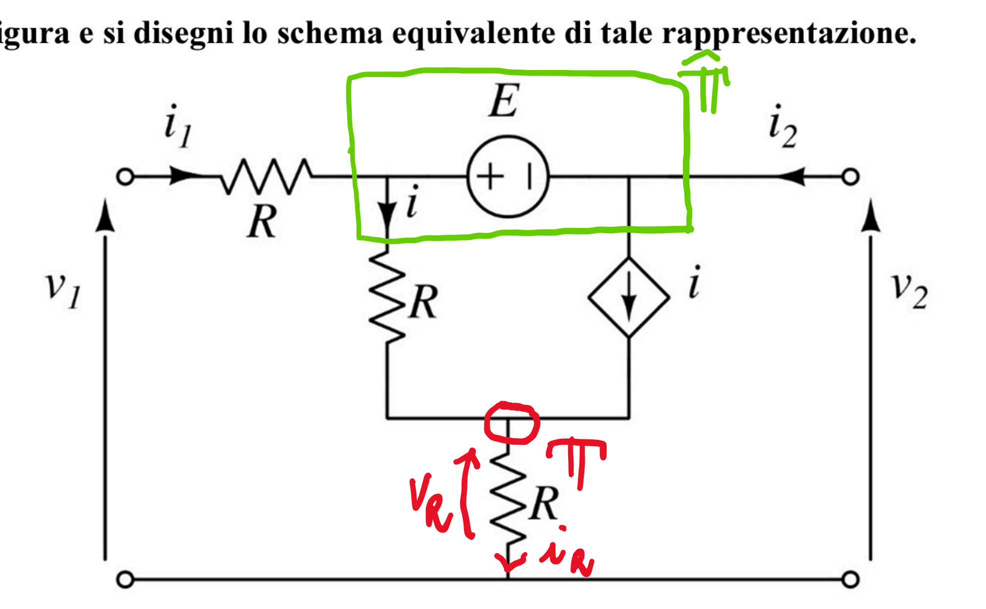
$$= \left(E - \frac{gR^2A}{1+gR}\right)e^{-\frac{t-1}{RC}} + \frac{gR^2A}{1+gR}$$

E2

Si determinino in forma letterale i parametri della rappresentazione

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

del doppio-bipolo in figura e si disegni lo schema equivalente di tale rappresentazione.



KCL π : $i_R = 2i \;\longrightarrow\; V_R = 2Ri$

$$V_1 = Ri_1 + Ri + 2Ri = Ri_1 + 3Ri$$

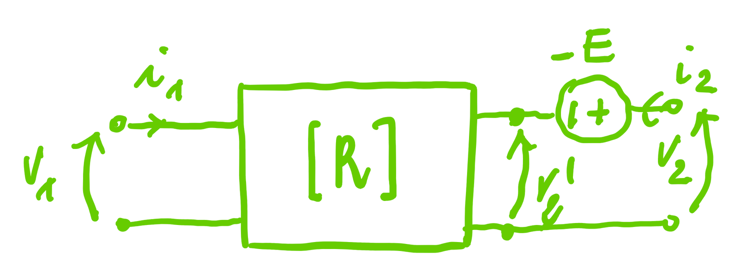
KCL $\hat{\pi}$: $i_1 + i_2 = 2i \qquad i = (i_1 + i_2)\frac{1}{2}$

$$V_1 = Ri_1 + \frac{3}{2}R(i_1 + i_2) = \frac{5}{2}Ri_1 + \frac{3}{2}Ri_2$$

$V_2 + E + Ri_1 - V_1 = 0 \qquad V_2 = V_1 - Ri_1 - E$

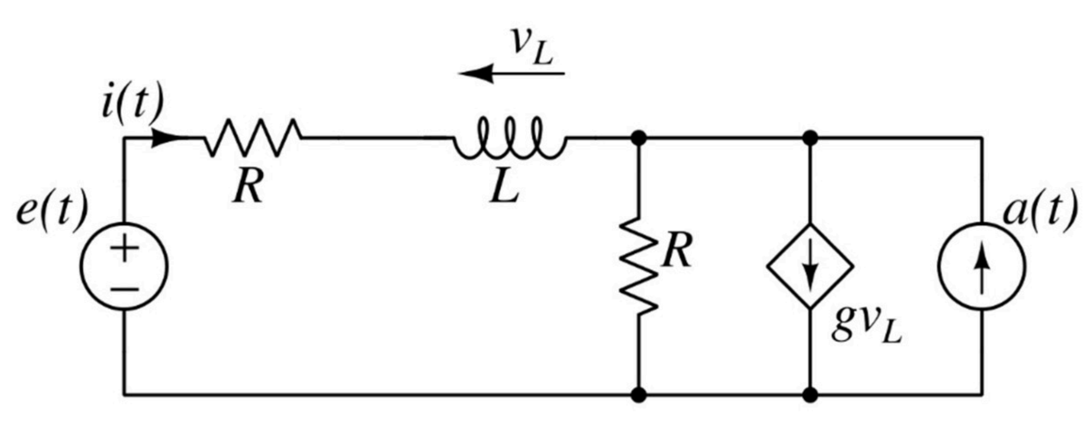
$$V_2 = \frac{3}{2}Ri_1 + \frac{3}{2}Ri_2 - E$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{R\begin{bmatrix} 5/2 & 3/2 \\ 3/2 & 3/2 \end{bmatrix}}_{[R]}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -E \end{bmatrix}$$

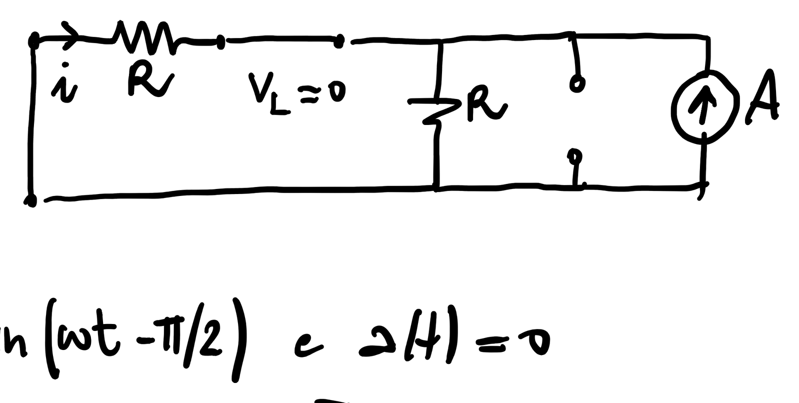


E3

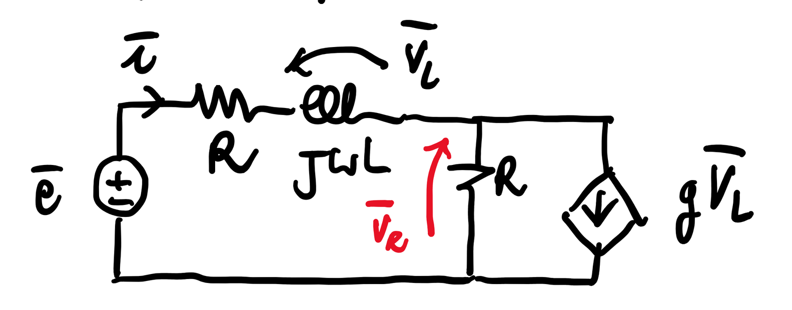
Con $e(t) = E\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$ e $a(t) = A$, il circuito in figura evolve a regime. Si determini simbolicamente la corrente $i(t)$. Assumendo poi $A = 0$, si determini il valore da assegnare a g tale che il generatore indipendente di tensione eroghi solo potenza attiva.



① $e(t) = 0$ e $a(t) = A$ $\qquad i^A(t) = -A/2$



② $e(t) = E\sin(\omega t - \pi/2)$ e $a(t) = 0$



$e(t) = E\sin(\omega t - \pi/2)$
$= E\cos(\omega t + \pi)$
$\bar{e} = -E$

$$\bar{i} = \frac{\bar{e} - \bar{V}_L - \bar{V}_R}{R}$$

$\bar{V}_L = j\omega L\,\bar{i} \qquad \bar{V}_R = R(\bar{i} - g\bar{V}_L)$
$= R(\bar{i} - j\omega Lg\,\bar{i})$
$= \bar{i}\,(1 - j\omega Lg)R$

$$R\bar{i} = \bar{e} - j\omega L\bar{i} - \bar{i}\,(1 - j\omega Lg)R$$

$$\bar{i} = \frac{-E}{2R + j\omega L(1 - gR)}$$

$$\bar{i} = -\frac{E}{4R^2 + \omega^2L^2(1-gR)^2}\left(2R + j\omega L(Rg - 1)\right)$$

$$i^E(t) = \mathrm{Re}\{\bar{i}\,e^{j\omega t}\}$$

$$i^E(t) = -\frac{E}{4R^2 + (\omega L(1-gR))^2}\left(2R\cos\omega t + (1-Rg)\omega L\,\mathrm{sen}\,\omega t\right)$$

$$i(t) = i^A(t) + i^E(t)$$

Con $a(t) = A$ si ottiene un circuito in regime sinusoidale

$\hat{A}_e^E = \frac{1}{2}\bar{e}\,\bar{i}^* \qquad$ dato che $\bar{e} \in \mathbb{R}$, se $\bar{i} \in \mathbb{R}$ allora $\hat{A}_e^E \equiv P_e^E$

$$\bar{i} \in \mathbb{R} \;\leftrightarrow\; \mathrm{Im}\{\bar{i}\} = 0 \;\leftrightarrow\; Rg = 1 \;\leftrightarrow\; g = \frac{1}{R}$$