Analisi Matematica 2 – luglio 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome (stampato maiuscolo leggibile):	Nome:	Matricola:

Parte A	Es.1	Es.2	Es.3	Tot. Es.	Totale	Voto

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A≥ 4, parte B≥ 12, totale≥ 18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B $= 100$ minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Definire i coefficienti di Fourier relativi ad una funzione 2π-periodica. Successivamente, enunciare e dimostrare il teorema sul calcolo dei coefficienti di Fourier per funzioni 2π-periodiche.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Date le seguenti tre equazioni differenziali nell'incognita $y(t)$:

$$y'(t) + 3\sin\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) y(t) + 5\log 3 = 0, \qquad y'(t) = 2y(t) - 0.3\, y^2(t), \qquad y'(t) = ty^5(t),$$

si ha che:
(a) le equazioni differenziali sono rispettivamente del primo, del secondo e del quinto ordine
(b) tutte le equazioni sono equazioni di Bernoulli
(c) tutte le equazioni ammettono almeno una soluzione costante $\boxed{\text{V}}$
(d) tutte le soluzioni delle tre equazioni sono definite su tutto $\mathbb{R}$

(2) Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo 2π e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, consideriamo il polinomio di Fourier F_m di ordine $m \in \mathbb{N}$ associato a f. Abbiamo che:
(a) $F_m(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$ per $m \to +\infty$
(b) può esistere $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che il limite di $F_m(x_0)$ per $m \to +\infty$ non esiste
(c) F_m converge in norma quadratica a f per $m \to +\infty$ $\boxed{\text{V}}$
(d) se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty$, allora F_m converge totalmente in $\mathbb{R}$ e la sua somma è derivabile termine a termine

(3) Sia $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le y \le 1\right\}$ e sia f continua in D. Allora $\displaystyle\iint_D f(x, y)\, dx\, dy =$
(a) $\int_0^1 \left(\int_y^1 f(x, y)dx\right) dy$
(b) $\int_0^1 \left(\int_0^x f(x, y)dy\right) dx$
(c) $\int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y)dy\right) dx$ $\boxed{\text{V}}$
(d) $\int_x^1 \left(\int_0^1 f(x, y)dx\right) dy$

(4) Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto. Data una curva regolare $\mathbf{r} : I \to A$ e una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A, consideriamo la funzione composta $F := f \circ \mathbf{r} : I \to \mathbb{R}$. Abbiamo che:
(a) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) >$ per ogni $t \in I$, $\boxed{\text{V}}$
(b) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}'(t)), \mathbf{r}(t) >$ per ogni $t \in I$,
(c) F è derivabile in I e $F'(t) =< \nabla f(\mathbf{r}'(t)), \mathbf{r}'(t) >$ per ogni $t \in I$,
(d) non è sempre vero che F sia derivabile in I,
dove $< \cdot, \cdot >$ denota il prodotto scalare tra vettori in $\mathbb{R}^2$.

PARTE B. Esercizi ($3 \times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 Sia data la funzione di due variabili $g(x,y) = e^{x^2 y} - 1$.
(a) (4 punti) Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di g sul vincolo

$$\mathcal{Z} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

(b) (4 punti) Stabilire se esista il limite

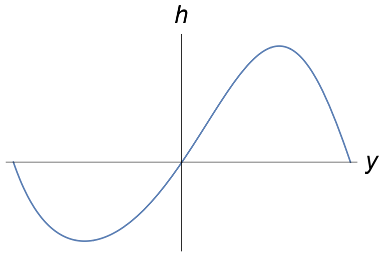
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2};$$

in caso affermativo, determinare tale limite.

(S) (a) Notiamo che g è simmetrica rispetto all'asse y, cioè $g(-x,y) = g(x,y)$. Per questo motivo possiamo studiare g nel semipiano $\{x \geq 0\}$ e poi ragionare per simmetria nell'altro semipiano. Utilizzando il metodo di sostituzione otteniamo:

$$h(y) = g(1-y^2, y) = e^{(1-y^2)y} - 1 = e^{y-y^3} - 1 \quad \text{per } y \in [-1,1].$$

Dallo studio della funzione h in $[-1,1]$ si evince:



$$h(-1) = h(0) = h(1) = 0$$
$$h'(y) = e^{y-y^3}(1-3y^2)$$
$$h'(y) = 0 \text{ se e solo se } y = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\min_{y\in[-1,1]} h(y) = h\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = e^{-\frac{2}{3\sqrt{3}}} - 1$$
$$\max_{y\in[-1,1]} h(y) = h\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}} - 1$$

In conclusione, il minimo assoluto di g sul vincolo $\mathcal{Z}$ è assunto nei due punti $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e vale $e^{-\frac{2}{3\sqrt{3}}} - 1$, mentre il massimo assoluto di g sul vincolo $\mathcal{Z}$ è assunto nei punti $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e vale $e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}} - 1$. Sarebbe stato ugualmente possibile svolgere l'esercizio applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

(b) È richiesto di determinare il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{x^2+y^2},$$

dopo averne appurato l'esistenza. Essendo $g(x,y)$ identicamente nulla lungo gli assi cartesiani, se il limite esiste vale 0. Applicando il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2y}-1}{x^2y} \cdot \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}.$$

Passando in coordinate polari:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}\right| = \left|r\cos^2\theta\sin\theta\right| \leq r \;\to 0 \text{ quando } r \to 0^+.$$

Concludiamo che il limite richiesto esiste e vale 0.

Esercizio 2 Scrivere lo sviluppo in serie di potenze centrato nell'origine della funzione $f(x) = \log(1 + x^2)$, seguendo lo schema di seguito riportato:

(a) (2 punti) utilizzando le proprietà viste sulla serie geometrica, scrivere lo sviluppo in serie di potenze di $\frac{1}{1+x^2}$;

(b) (1 punto) dedurre dallo sviluppo trovato al punto precedente lo sviluppo di $\frac{2x}{1+x^2}$;

(c) (3 punti) utilizzando le proprietà viste per le serie di potenze reali dedurre dallo sviluppo trovato al punto precedente lo sviluppo in serie di potenze di $\log(1 + x^2)$;

(d) (2 punti) specificare l'intervallo di convergenza dello sviluppo trovato al punto precedente.

(S)

(a) Siccome, per le proprietà viste della serie geometrica, $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ con convergenza puntuale per $q \in (-1, 1)$, ponendo $q = -x^2$ otteniamo che

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

con convergenza puntuale per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che $-x^2 \in (-1, 1)$, ovvero per $x \in (-1, 1)$.

(b) Pertanto, moltiplicando per $2x$ si ha che

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2x + \sum_{n=1}^{+\infty} 2x(-x^2)^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n+1}$$

per ogni $x \in (-1, 1)$.

(c) Mediante integrazione indefinita termine a termine in tale intervallo, lecita per le proprietà delle serie di potenze, otteniamo

$$\log(1+x^2) = \int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \int x^{2n+1}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{n+1}.$$

(d) Poiché l'operazione di integrazione termine a termine conserva il raggio di convergenza, il raggio di convergenza della serie trovata al punto precedente è 1. D'altra parte, sia per $x = 1$ che per $x = -1$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$, che converge in virtù del criterio di Leibniz. Pertanto, l'intervallo di convergenza della serie trovata è $[-1, 1]$.

Esercizio 3 Viene assegnata l'equazione differenziale

$$y'(t) = y^n(t)\big(2y(t) - 1\big), \tag{*}$$

dove n è un intero positivo ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

(a) (1 punto) Giustificare l'esistenza e l'unicità locale della soluzione per tutti i possibili problemi di Cauchy associati all'equazione (*).

(b) (3 punti) Posto $n = 1$, determinare l'espressione della soluzione di (*) che soddisfa $y(0) = 1$.

(c) (3 punti) Posto $n = 2$, disegnare il grafico qualitativo della soluzione dell'equazione (*) che soddisfa $y(0) = 1/4$, tenendo conto della sua monotonia e della sua convessità.

(d) (1 punto) Rappresentare la linea della fasi associata all'equazione autonoma (*), al variare dell'intero positivo n (è sufficiente distinguere il caso n pari dal caso n dispari).

(S) (a) Siccome n è un intero positivo, il secondo membro $f(t, y) = y^n(2y - 1)$ è di classe C^1 su tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto in ogni punto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ vale il teorema di esistenza e unicità locale di Cauchy: qualunque problema di Cauchy associato ad (*) possiede un'unica soluzione locale.
(b) È richiesto di risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = 2y^2(t) - y(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

A tal fine, determiniamo prima l'integrale generale dell'equazione. Le soluzioni costanti sono $y = 0$ e $y = 1/2$, ma nessuna delle due è soluzione del problema di Cauchy richiesto. La ricerca di soluzioni non costanti può essere effettuata considerando l'equazione come Bernoulli o a variabili separabili.
Bernoulli. Dividendo per y^2 e ponendo $z(t) = 1/y(t)$, si ottiene che il problema di Cauchy richiesto è equivalente al seguente

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) - 2 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

L'equazione in z è ora lineare. Applicando la formula risolutiva per EDO del primo ordine lineari ed imponendo la condizione iniziale si trova $z(t) = 2 - e^t$. Tornando all'incognita iniziale y, si deduce che

$$y(t) = \frac{1}{2 - e^t}.$$

Variabili separabili. Separando le variabili ed integrando si ottiene

$$\int_0^t \frac{y'(x)}{y(x)(2y(x) - 1)}\, dx = \int_0^t 1\, dx.$$

Per integrare il lato sinistro, effettuiamo l'usuale cambio di variabile $y(x) = k$ ed osserviamo che

$$\frac{1}{k(2k - 1)} = \frac{2}{2k - 1} - \frac{1}{k}, \qquad y'(x)\, dx = dk,$$

mentre gli estremi d'integrazione diventano $y(0) = 1$ (data la condizione iniziale) e $y(t)$. Quindi

$$\int_1^{y(t)} \left(\frac{2}{2k - 1} - \frac{1}{k}\right) dx = \int_0^t 1\, dx.$$

Integrando si ottiene

$$\ln\left|\frac{2y(t) - 1}{y(t)}\right| = t \qquad \text{da cui} \qquad y(t) = \frac{1}{2 - e^t}.$$

(c) È richiesto lo studio qualitativo della soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = y^2(t)\big(2y(t) - 1\big) \\ y(0) = 1/4. \end{cases}$$

Per l'unicità studiata al punto (a), la soluzione richiesta non può intersecare le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = 1/2$ ed assume perciò necessariamente valori compresi tra 0 e 1/2:

$$0 < y(t) < \frac{1}{2} \qquad \text{per ogni } t.$$

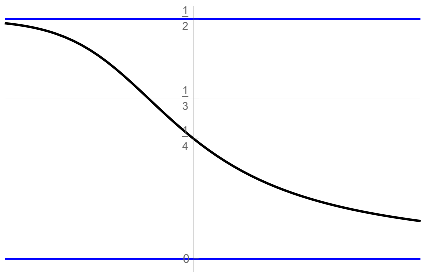
Da ciò si deduce che $y^2(t)(2y(t) - 1) < 0$, cioè $y'(t) < 0$ per ogni t, dunque la soluzione è decrescente.
Essendo inoltre $y'(t) = 2y^3(t) - y^2(t)$, derivando si ottiene

$$y''(t) = \big[6y^2(t) - 2y(t)\big]y'(t) = 2\,y(t)\big[3y(t) - 1\big]y'(t).$$

Essendo $y(t) > 0$ e $y'(t) < 0$ per ogni t, si ottiene che

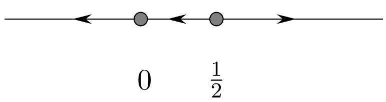
$$y''(t) \begin{cases} < 0 & \text{per } 1/3 < y < 1/2 \\ = 0 & \text{per } y = 1/3 \\ > 0 & \text{per } 0 < y < 1/3. \end{cases}$$

Il grafico qualitativo della soluzione richiesta è quindi:



(d) Rappresentiamo le soluzioni costanti $y = 0$ e $y = 1/2$ con dei punti (punti di equilibrio) sulla linea delle fasi.
n pari. Il segno del secondo membro dell'equazione coincide con il segno di $2y - 1$, quindi

$$y'(t) \begin{cases} < 0 & \text{per } y < 1/2 \ (y \neq 0) \\ > 0 & \text{per } y > 1/2 \end{cases}$$



n dispari. Il segno del secondo membro dell'equazione coincide con il segno di $y(2y - 1)$, cioè

$$y'(t) \begin{cases} < 0 & \text{per } 0 < y < 1/2 \\ > 0 & \text{per } y < 0 \ \text{ o } \ y > 1/2 \end{cases}$$