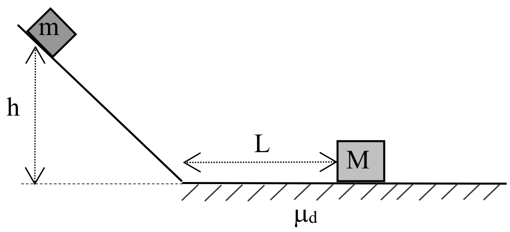
Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

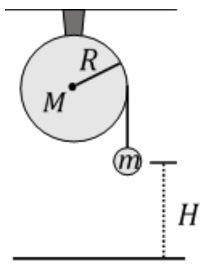
FISICA
I Appello del 12 luglio 2019
Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti, Puppin

1.
Un corpo di massa m=0.5 kg inizialmente fermo viene lasciato scivolare da una quota h=50cm lungo un piano inclinato liscio, al termine del quale si trova su un piano orizzontale scabro (coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2). Ad una distanza L=80 cm dalla congiunzione dei due piani si trova una massa M=2kg in quiete. Determinare:



a) la velocità del corpo di massa m alla base del piano inclinato;
b) la velocità dei due corpi subito dopo l'urto, ipotizzando che m urti M in modo completamente anelastico;

2.
Un corpo puntiforme di massa m è sospeso ad un'altezza H dal suolo tramite una fune ideale (inestensibile e priva di massa). La fune è avvolta su di un cilindro omogeneo di massa M e raggio R (vedi figura). Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete per mezzo di un freno che all'istante $t = 0$ s viene rimosso. Si calcoli:



a) la velocità v con cui il corpo impatta al suolo;
b) l'accelerazione angolare α del cilindro.

3.
Una macchina termica reversibile ciclica funziona con tre sorgenti di calore A, B e C, alle temperature T_A, T_B e T_C, con $T_A = 3T_B$ e $T_C = T_B/2$. Il lavoro prodotto dalla macchina in un ciclo di funzionamento è pari a $L = 3$ kJ e il calore ceduto alla sorgente più fredda è pari a $Q_C = -1$ kJ. Si calcolino:
a) il calore scambiato con le sorgenti A e B specificandone il segno;
b) il rendimento della macchina.

4.
Si consideri un sistema di N punti materiali di masse m_i e vettori posizione $\vec{r}_i$, con $i = 1\ldots N$, rispetto a un sistema di riferimento inerziale.
a) Si definisca il vettore posizione del centro di massa del sistema.
b) Si dimostri che l'energia cinetica totale del sistema si può scrivere come somma di due termini: un termine relativo al moto del centro di massa e un termine relativo al moto rispetto ad un sistema di riferimento solidale con il centro di massa (Teorema di König per l'energia cinetica).

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Fisica - Appello del 12/07/19 - Traccia di soluzione

Quesito 1

a) Nello scivolamento sul piano inclinato agiscono sul corpo di massa m solo forze conservative. Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale e l'istante in cui il corpo raggiunge la fine del piano inclinato.

$$E_{in} = E_{fin}$$
$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2$$
$$\boxed{v_1 = \sqrt{2gh}}$$

b)
- Nel moto di scivolamento sul piano scabro per un tratto L, la forza d'attrito compie un lavoro:

$$\mathcal{L}_{att} = \int \vec{F}_{att} \cdot d\vec{r} = -\int_0^L \mu_d \, |\vec{R}_n| \, dx = -\mu_d \, |\vec{R}_n| \, L = -\mu_d \, mgL$$

- Applicando il Teorema dell'Energia Cinetica tra l'istante in cui il corpo si trova all'inizio del piano scabro e l'istante appena prima dell'urto si ottiene:

$$\Delta E_K = \mathcal{L}_{ris} = \mathcal{L}_{att}$$
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\mu_d \, mgL$$
$$v_2^2 = v_1^2 - 2\mu_d \, gL = 2gh - 2\mu_d \, gL$$
$$v_2 = \sqrt{2g\,(h - \mu_d L)}$$

- Nell'urto anelastico si conserva la quantità di moto: imponendo tale conservazione si può ricavare la velocità dopo l'urto V:

$$mv_2 = (m + M)\,V$$
$$V = \frac{m}{m+M} v_2$$
$$\boxed{V = \frac{m}{m+M}\sqrt{2g\,(h - \mu_d L)}}$$

Quesito 2

a)-b)
- L'unica forza che dà momento meccanico non nullo sulla carrucola è la tensione della fune T:

$$M_{ris} = I_z \alpha = R \cdot T$$

dove I_z è il momento di inerzia della carrucola rispetto al suo asse vincolato di rotazione ed α è la sua accelerazione angolare (qui considerata positiva se la carrucola accelera in verso orario).

- Per un cilindro omogeneo di massa M:

$$I_z = \frac{1}{2}MR^2$$

Da cui:

$$\frac{1}{2}MR^2\,\alpha = RT$$
$$T = \frac{1}{2}MR\alpha$$

- Studiando le forze applicate alla massa m possiamo scrivere (proiettando $\vec{F} = m\vec{a}$ su un asse verticale):
$$P - T = ma$$
dove $P = mg$ è la forza peso, T è la tensione della fune ed a è considerata positiva se la massa accelera verso il basso.
- Il moto rotatorio della carrucola è vincolato tramite la fune al moto lineare della massa m. Per le convenzioni scelte per i versi positivi di α e a vale:
$$a = R\alpha$$
- Mettendo insieme quanto ricavato nei passaggi precedenti:
$$P - T = ma \qquad \Rightarrow \qquad mg - \frac{1}{2}MR\alpha = mR\alpha$$
da cui si può ricavare α:
$$\boxed{\alpha = \frac{2m}{2m+M}\frac{g}{R}}$$
- L'accelerazione lineare della massa m è:
$$a = \frac{2m}{2m+M}g$$
che è dunque costante nel tempo. Per un moto uniformemente accelerato, tra un istante i e un istante f, vale la relazione:
$$v_f^2 - v_i^2 = 2as$$
dove s è lo spazio percorso. In questo caso $s = H$ e $v_i = 0$. Ricaviamo:
$$\boxed{v_f = \sqrt{2aH} = \sqrt{\frac{4m}{2m+M}gH}}$$

Quesito 3

a)
- Per il Primo Principio della Termodinamica, in un ciclo termodinamico il calore netto scambiato dal sistema equivale al lavoro netto compiuto:
$$Q_{tot} = Q_A + Q_B + Q_C = \mathcal{L}$$
- Per un ciclo termodinamico reversibile, dal Teorema di Clausius si ha:
$$\sum \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_A}{T_A} + \frac{Q_B}{T_B} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$$
- Da quest'ultima relazione ricaviamo
$$Q_A = T_A \cdot \left(-\frac{Q_B}{T_B} - \frac{Q_C}{T_C}\right)$$
che sostituita nell'espressione data dal Primo Principio consente di ricavare:
$$-\frac{T_A}{T_B}Q_B - \frac{T_A}{T_C}Q_C + Q_B + Q_C = \mathcal{L}$$
$$Q_B\left(\frac{T_B - T_A}{T_B}\right) = \mathcal{L} + Q_C\left(\frac{T_A - T_C}{T_C}\right)$$

- Ma $T_A = 3T_B$ e $T_C = T_B/2$ quindi:

$$Q_B\left(\frac{T_B - 3T_B}{T_B}\right) = \mathcal{L} + Q_C\left(\frac{3T_B - T_B/2}{T_B/2}\right)$$

  Si ricava allora:

$$\boxed{Q_B = -\frac{1}{2}\mathcal{L} - \frac{5}{2}Q_C = 1 \text{ kJ}} > 0$$

- Per Q_A invece possiamo scrivere:

$$Q_A = \mathcal{L} - Q_B - Q_C = \mathcal{L} - \frac{1}{2}\mathcal{L} - \frac{5}{2}Q_C + Q_C$$

$$\boxed{Q_A = \frac{1}{2}\mathcal{L} - \frac{3}{2}Q_C = 3 \text{ kJ}} > 0$$

b) Per definizione il rendimento di una macchina termica è:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}}$$

Il calore assorbito nel ciclo (ovvero la somma dei contributi positivi) è:

$$Q_{ass} = Q_A + Q_B = -4Q_C$$

perciò:

$$\boxed{\eta = -\frac{\mathcal{L}}{4Q_C} = \frac{3}{4}}$$

Quesito 4

Vedi dispense del docente.