Michela Eleuteri

ESERCIZIARIO DI ANALISI MATEMATICA II

Università degli Studi di Verona, Facoltà di Scienze MM.FF.NN.

Corso di Laurea in Informatica

a.a. 2011/2012

A Giulia

con la speranza che almeno nella matematica

non assomigli al papà ☺

Indice

CAPITOLO 1

Esercizi riguardanti equazioni differenziali ordinarie

1.1. Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine

1.1.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 1.1.1.** *Si determini la soluzione* $y(t)$ *del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{y^2+4}t \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Inoltre si determini il valore $\alpha > 0$ *per cui* $\dfrac{y(t)}{t^\alpha}$ *tende a un numero finito e non nullo per* $t \to +\infty$.

Si tratta di un'equazione non lineare del primo ordine a variabili separabili. Integrando si ottiene subito

$$\int \left(\frac{y^2+4}{y^2}\right) dy = \int t\,dt + C$$

da cui

$$y - \frac{4}{y} = \int \left(1 + \frac{4}{y^2}\right) dy = \int \left(\frac{y^2+4}{y^2}\right) dy = \frac{t^2}{2} + C$$

quindi imponendo il dato di Cauchy, si ha immediatamente $C = 0$. Dunque si ha

$$\frac{y^2 - 4 - \frac{t^2 y}{2}}{y} = 0.$$

Il numeratore può essere visto come un'equazione di secondo grado in y. Quindi risolvendo si ha

$$y(t) = \frac{t^2/2 \mp \sqrt{\frac{t^4}{4} + 16}}{2} = \frac{t^2 \mp \sqrt{t^4 + 64}}{4}.$$

Siccome il dato di Cauchy è incompatibile con la scelta del segno meno (si avrebbe $y(0) = -2$) la soluzione richiesta del problema di Cauchy proposto è

$$y(t) = \frac{t^2 + \sqrt{t^4 + 64}}{4}.$$

Ora, siccome $\sqrt{t^4 + 64} \sim t^2$ per $t \to +\infty$, si ha che $y(t) \sim \frac{x^2}{2}$ quindi il valore di α richiesto è $\alpha = 2$.

✍ **Esercizio 1.1.2.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t^2 + t}{2e^{2y} + 6e^y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'equazione differenziale non-lineare, del primo ordine, a variabili separabili. Si ottiene

$$e^{2y} + 6e^y = \int (2e^{2y} + 6e^y)\, dy = \int (t^2 + t)\, dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + C.$$

Imponendo il dato di Cauchy si ottiene $C = 7$ da cui

$$e^{2y} + 6e^y - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} - 7 = 0.$$

A questo punto dobbiamo cercare di ricavare la y. Poniamo $z = e^y$. Allora cercando di ricostruire un quadrato si ottiene

$$(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9 = 9 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 7.$$

da cui

$$e^y = z = -3 \mp \sqrt{16 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}.$$

Il segno meno della radice deve essere scartato a causa della positività dell'esponenziale e anche della incompatibilità del dato di Cauchy. In conclusione dunque

$$y(t) = \log\left(-3 + \sqrt{16 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}}\right).$$

✍ **Esercizio 1.1.3.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3e^x - y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino all'origine ha:

□ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;*

□ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;*

□ *concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;*

□ *concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa*

Si tratta di un problema di Cauchy in cui compare un'equazione differenziale del primo ordine *non lineare* e *non a variabili separabili.* Quindi in linea di principio non sappiamo come ricavare la soluzione. Ma ai fini dell'esercizio è importante soprattutto conoscere non tanto la forma esatta dell'equazione quanto il comportamento della stessa *localmente*, in particolare vicino al punto $x_0 = 1$. Allora considerando l'equazione si ottiene:

$$y'(0) = 3 - 0 = 3 > 0$$

quindi ricordando il significato geometrico della derivata prima, l'informazione $y'(0) > 0$ ci dice che vicino a $x_0 = 1$ la soluzione ha retta tangente con pendenza positiva. Inoltre derivando l'equazione si ottiene

$$y'' = 3e^x - 2y\,y'$$

da cui

$$y''(0) = 3 - 2y(0)\,y'(0) = 3 - 2 \cdot 1 \cdot 3 = -3 < 0.$$

Per cui ricordando il significato geometrico della derivata seconda, questa informazione ci dice che vicino al punto $x_0 = 1$ la soluzione ha concavità verso il basso. La risposta esatta è dunque la seconda.

1.1.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.1.4.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-x}\sqrt{y+1}}{e^{-x}+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

➼ **R.**

$$y = \left[-\frac{1}{2}\log(e^{-x}+1) + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\log 2 \right]^2 - 1.$$

✍ **Esercizio 1.1.5.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (e^{-3y}+1)(2x-1) \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

➼ **R.**

$$y(t) = \frac{1}{3}\log\left[(1+e^{-3})e^{3x^2-3x} - 1 \right].$$

✍ **Esercizio 1.1.6.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = (3+27y^2)\left(xe^{3x} - 2x^2\right) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

➼ **R.**

$$y(t) = \frac{1}{3}\tan\left(3t\,e^{3t} - e^{3t} - 6t^3 + 1\right).$$

✍ **Esercizio 1.1.7.** *Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale* $y' = 2xe^{-3y}$.

1.1.3. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 1.1.8.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y}{t+1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora $y(1) =$

☐ e;

☐ 2;

☐ $\sqrt{2}$;

☐ $\sqrt{e}$.

✍ **Esercizio 1.1.9.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' - (t+2)\left(1 + \dfrac{1}{y}\right) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino all'origine ha:

☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;

☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;

☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;

☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa

➻ **R.** Concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva.

✍ **Esercizio 1.1.10.** *Sia $y(t)$ la soluzione del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y' = 3\sin t + y^2 \\ y(0) = \pi \end{cases}$$

Allora il grafico di $y(t)$ vicino a $x_0 = 0$ ha:

☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva;

☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza positiva;

☐ concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza negativa;

☐ concavità verso il basso e retta tangente con pendenza negativa

➻ **R.** Concavità verso l'alto e retta tangente con pendenza positiva.

1.2. Equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine

1.2.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 1.2.1.** *Si determini la soluzione* $y(t)$ *del seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 3t + 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Si tratta di una equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine, a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata è

$$r^2 - 6r + 9 = 0$$

che dà come soluzioni $r = 3$ con doppia molteplicità. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$z(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Ora cerco una soluzione dell'equazione non omogenea associata. Per il metodo di somiglianza, la cerco nella forma $\overline{y}(t) = At + B$. Quindi $\overline{y}'(t) = A$ e $\overline{y}''(t) = 0$. Inserendo questi dati nell'equazione di partenza si ottiene dunque

$$0 - 6A + 9(At + B) = 3t + 2$$

da cui si deduce (uguagliando tra loro i coefficienti del termine di primo grado e uguagliando tra loro i termini noti)

$$A = \frac{1}{3}, \qquad B = \frac{4}{9}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione non omogenea di partenza è:

$$y(t) = z(t) + \overline{y}(t) = c_1\, e^{3t} + c_2\, t\, e^{3t} + \frac{1}{3}\, t + \frac{4}{9},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto impongo i dati di Cauchy per risolvere il problema associato. Prima di tutto si ha

$$-1 = y(0) = c_1 + \frac{4}{9}; \tag{1.2.1}$$

in secondo luogo, ricordando che

$$y'(t) = 3\, c_1\, e^{3t} + 3\, c_2\, t\, e^{3t} + c_2\, e^{3t} + \frac{1}{3}$$

si ha
$$2 = y'(0) = 3c_1 + c_2 + \frac{1}{3}. \tag{1.2.2}$$
A questo punto si deve risolvere il sistema lineare non omogeneo a coefficienti costanti costituito da (1.2.1)–(1.2.2). Ricavando c_1 dalla (1.2.1) e inserendo il risultato nella (1.2.2), si ottiene con semplici calcoli
$$c_1 = -\frac{13}{9}, \qquad c_2 = 2 - \frac{1}{3} - 3c_1 = \frac{5}{3} + \frac{13}{3} = 6.$$
Concludendo, la soluzione del problema di Cauchy proposto è:
$$y(t) = -\frac{13}{9}e^{3t} + 6\,t\,e^{3t} + \frac{1}{3}t + \frac{4}{9}.$$

✍ **Esercizio 1.2.2.** *Sia* $y(t)$ *la soluzione del problema di Cauchy*
$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$
Allora $\lim_{t\to+\infty} y(t) =$
□ 0;
□ non esiste;
□ $+\infty$;
□ $-\infty$

L'equazione $y'' + 2y' - 3$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti omogenea. L'equazione caratteristica associata è $r^2 + 2r - 3 = 0$ che dà come soluzioni $r = 1$ e $r = -3$ da cui la soluzione generale dell'equazione risulta
$$y(t) = c_1\,e^t + c_2\,e^{-3t},$$
al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto impongo i dati di Cauchy; si ottiene
$$0 = y(0) = c_1 + c_2$$
mentre osservando che $y'(t) = c_1\,e^t - 3c_2\,e^{-3t}$ si deduce
$$1 = y'(0) = c_1 - 3c_2$$
quindi
$$c_1 = \frac{1}{4}; c_2 = -\frac{1}{4}.$$

Quindi la soluzione generale dell'equazione di partenza risulta

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}e^{-3t}.$$

A questo punto chiaramente

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

quindi la risposta corretta è la terza.

✍ **Esercizio 1.2.3.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \cos(2t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione $y'' - y' - 2y = \cos(2t)$ è un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea. L'equazione caratteristica associata alla corrispondente equazione omogenea è

$$r^2 - r - 2 = 0$$

che dà come soluzioni $r = -1$ e $r = 2$. Quindi la soluzione generale dell'equazione omogenea è

$$z(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. A questo punto, dal metodo di somiglianza, cerco una soluzione particolare dell'equazione non omogenea del tipo

$$\overline{y}(t) = \alpha \sin(2t) + \beta \cos(2t).$$

Prima di tutto si ha

$$\overline{y}'(t) = 2\alpha \cos(2t) - 2\beta \sin(2t); \qquad \overline{y}''(t) = -4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t).$$

A questo punto, inserendo i dati ottenuti nell'equazione di partenza, si ottiene

$$-4\alpha \sin(2t) - 4\beta \cos(2t) - 2\alpha \cos(2t) + 2\beta \sin(2t) - 2\alpha \sin(2t) - 2\beta \cos(2t) = \cos(2t)$$

da cui, con semplici calcoli

$$(-6\alpha + 2\beta) \sin(2t) + (-2\alpha - 6\beta) \cos(2t) = \cos(2t)$$

da cui uguagliando i coefficienti dei termini simili si ha

$$\begin{cases} -6\alpha + 2\beta = 0 \\ -2\alpha - 6\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{1}{20} \\ \beta = -\dfrac{3}{20}. \end{cases}$$

Quindi una soluzione particolare dell'equazione si partenza è data da

$$\overline{y}(t) = -\frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

da cui la soluzione generale ha la forma

$$y(t) = c_1\, e^{-t} + c_2\, e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

Imponendo i dati di Cauchy, con semplici calcoli si ottiene la seguente soluzione del problema di Cauchy proposto

$$y(t) = \frac{11}{15}\, e^{-t} + \frac{5}{12}\, e^{2t} - \frac{1}{20}\sin(2t) - \frac{3}{20}\cos(2t).$$

> ✍ **Esercizio 1.2.4.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*
>
> $$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = e^{-2t} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

➻ **R.** Equazione differenziale ordinaria lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. Equazione caratteristica $r^2 - 4r + 8 = 0$ da cui $r = 2 \mp 2i$.
Soluzione generale dell'omogenea

$$y(t) = c_1\, e^{2t}\sin(2t) + c_2\, e^{2t}\,\cos(2t).$$

Cerchiamo una soluzione particolare della non omogenea nella forma $\overline{y}(t) = A\, e^{-2t}$ da cui inserendo nell'equazione tale espressione assieme all'espressione delle sue derivate si ottiene facilmente $A = 1/20$.
La soluzione generale della non omogenea è dunque

$$y(t) = c_1\, e^{2t}\sin(2t) + c_2\, e^{2t}\,\cos(2t) + \frac{1}{20}\, e^{-2t}.$$

Imponendo i dati di Cauchy si ottiene facilmente che la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$y(t) = \frac{11}{10}\, e^{2t}\sin(2t) - \frac{21}{20}\, e^{2t}\,\cos(2t) + \frac{1}{20}\, e^{-2t}.$$

1.2.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 1.2.5.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = \sin(2t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

➻ **R.**

$$y(t) = -\frac{7}{15}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{2t} - \frac{3}{20}\sin(2t) + \frac{1}{20}\cos(2t).$$

✍ **Esercizio 1.2.6.** *Determinate la soluzione generale dell'equazione differenziale* $y'' - 4y' + 13y = 4x$.

✍ **Esercizio 1.2.7.** *Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale*

$$2y'' + 3y' + 4y = 0.$$

✍ **Esercizio 1.2.8.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y'' + 6y' + 8y = e^{4t} + t^2, \qquad y(1) = 2, \qquad y'(1) = 3.$$

✍ **Esercizio 1.2.9.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + 2(\tan t)y = t, \qquad y(-1) = 4.$$

✍ **Esercizio 1.2.10.** *Si determini la soluzione $y(t)$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + y' - 2y = -e^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

➻ **R.**

$$y(t) = \frac{1}{9}e^t - \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{3}t\,e^t$$

✍ **Esercizio 1.2.11.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + 3(\cot t)y = t, \qquad y(-1) = -\pi.$$

✍ **Esercizio 1.2.12.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y'' + 6y' + 8y = e^{2t} + \sqrt{\pi}t^2, \qquad y(1) = 0, \qquad y'(-1) = 2.$$

✍ **Esercizio 1.2.13.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' - 6(\cot t)y = t, \qquad y(2) = \pi.$$

✍ **Esercizio 1.2.14.** *Si risolva il seguente problema di Cauchy:*

$$y' + (\tan t)y = 2t^2, \qquad y(1) = 3.$$

✍ **Esercizio 1.2.15.** *Si consideri l'equazione differenziale*

$$y^{(3)} - 2y'' + 5y' = 0.$$

(i) Se ne determini l'integrale generale.
(ii) Trovare, se esistono, tutte le soluzioni $y(t)$ tali che

$$\lim_{t \to -\infty} y(t) = \pi.$$

(iii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(3)} - 2y'' + 5y' = 3te^t.$$

✍ **Esercizio 1.2.16.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 9y = \cos(\sqrt{2}t).$$

✍ **Esercizio 1.2.17.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 4y' + 13y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 13y = 1 + e^{2t}.$$

✍ **Esercizio 1.2.18.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y''' + y' = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''' + y' = 1 + e^{t}.$$

✍ **Esercizio 1.2.19.** *(i) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale*

$$y'' - 2y' + 17y = 0.$$

(ii) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + 17y = \sin(2t).$$

CAPITOLO 2

Esercizi riguardanti il calcolo infinitesimale per le curve

2.1. Funzioni a valori vettoriali e curve

2.1.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 2.1.1.** *Sia* γ *la curva piana una cui parametrizzazione in coordinate polari è* $\rho(\vartheta) = \vartheta^2 + 1$, *on* $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$. *Dopo aver disegnato sommariamente il sostegno di* γ, *determinare i versori tangente e normale al sostegno di* γ *nel punto* $\gamma(\pi)$ *e scrivere un'equazione della retta tangente nello stesso punto.*

Si ha

$$\begin{cases} x(\vartheta) = (\vartheta^2 + 1)\cos\vartheta \\ y(\vartheta) = (\vartheta^2 + 1)\sin\vartheta \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'(\vartheta) = 2\vartheta\cos\vartheta - (\vartheta^2 + 1)\sin\vartheta \\ y'(\vartheta) = 2\vartheta\sin\vartheta + (\vartheta^2 + 1)\cos\vartheta \end{cases}$$

$$\varphi'(\pi) = (-2\pi, -(\pi^2 + 1)).$$

Versore tangente:

$$T(\pi) = \left(\frac{-2\pi}{\sqrt{\pi^4 + 6\pi^2 + 1}}, -\frac{\pi^2 + 1}{\sqrt{\pi^4 + 6\pi^2 + 1}}\right)$$

Versore normale:

$$N(\pi) = \left(-\frac{\pi^2+1}{\sqrt{\pi^4+6\pi^2+1}}, \frac{2\pi}{\sqrt{\pi^4+6\pi^2+1}} \right).$$

Retta tangente: equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -(\pi^2+1) - 2\pi t \\ y = -t(\pi^2+1) \qquad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Retta tangente: equazione cartesiana

$$y = \frac{\pi^2+1}{2\pi} x + \frac{(\pi^2+1)^2}{2\pi}.$$

✍ **Esercizio 2.1.2.** *Determinare una parametrizzazione della curva chiusa γ che si ottiene percorrendo prima da sinistra verso destra il grafico di $f(x) = (1/3)(2x-1)^{3/2}$ per $1/2 \le x \le 1$ e poi da destra a sinistra il segmento congiungente gli estremi del grafico di f stessa. Disegnare quindi il sostegno di γ e calcolarne la lunghezza.*

Si ha

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3}(2t-1)^{3/2} \qquad \frac{1}{2} \le t \le 1; \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}t \\ y = \frac{1}{3}(2-t) \qquad 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Si ha

$$\gamma_1'(t) = (1, \sqrt{2t-1}).$$

Da cui

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2) = \int_{1/2}^{1} \sqrt{1+(2t-1)}\, dt + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= \int_{1/2}^{1} \sqrt{2t}\, dt + \frac{\sqrt{13}}{6} = \left[\sqrt{2}\, \frac{2}{3}\, t^{3/2} \right]_{1/2}^{1} + \frac{\sqrt{13}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$$

✍ **Esercizio 2.1.3.** *Data la curva γ avente equazione in coordinate polari $\rho = 2\theta^2$ con $-\pi \le \theta \le \pi$, determinate la lughezza di γ; determinate poi un versore tangente alla curva nel punto corrispondente a $\theta = \varepsilon$ e calcolate il limite per $\varepsilon \to 0^+$ di questo versore.*

Uno può calcolare direttamente la lunghezza della curva con la formula che coinvolge le coordinate polari oppure passando per una rappresentazione parametrica della curva. In questo caso, posto

$$\Phi(t) = (\rho(t)\cos t, \rho(t)\sin t) = (2t^2\cos t, 2t^2\sin t)$$

con $-\pi \leq t \leq \pi$, si ha

$$\Phi'(t) = (4t\cos t - 2t^2\sin t, 4t\sin t + 2t^2\cos t)$$

da cui

$$|\Phi'(t)|^2 = 16t^2 + 4t^4 \qquad |\Phi'(t)| = \sqrt{4t^2(4+t^2)} = 2|t|\sqrt{4+t^2},$$

per cui

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} 2|t|\sqrt{4+t^2}\,dt = 2\int_0^{\pi}\sqrt{t^2+4}\,2t\,dt = \left[\frac{4}{3}(t^2+4)^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{3}(\pi^2+4)^{3/2} - \frac{32}{3}.$$

Il versore cercato risulta

$$\frac{\Phi'(\varepsilon)}{|\Phi'(\varepsilon)|} = \frac{(4\varepsilon\cos\varepsilon - 2\varepsilon^2\sin\varepsilon, 4\varepsilon\sin\varepsilon + 2\varepsilon^2\cos\varepsilon)}{2|\varepsilon|\sqrt{4+\varepsilon^2}}$$

quindi se $\varepsilon > 0$, allora

$$\tau(\varepsilon) = \left(\frac{2\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} - \frac{\varepsilon\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}, \frac{2\sin\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}} + \frac{\varepsilon\cos\varepsilon}{\sqrt{4+\varepsilon^2}}\right) \to (1,0)$$

✍ **Esercizio 2.1.4.** *Data la curva γ parametrizzata da $(e^t\cos t, e^t\sin t)$ con $-2\pi \leq t \leq 2\pi$, determinate la lunghezza di γ; determinate poi la retta tangente alla curva nel punto corrispondente a $t=0$.*

Se $\Phi(t) = (e^t\cos t, e^t\sin t)$ allora $\Phi'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$, quindi

$$|\Phi'(t)| = e^t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + 2\sin t\cos t} = e^t\sqrt{2}.$$

Allora

$$L(\gamma) = \int_{-2\pi}^{2\pi} e^t\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}(e^{2\pi} - e^{-2\pi}).$$

Poi per $t=0$ si ha $\Phi(0) = (1,0)$ e $\Phi'(0) = (1,1)$, e la tangente cercata ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \end{cases}$$

o cartesiana $y = x - 1$.

✍ **Esercizio 2.1.5.** *Data la curva la cui equazione in coordinate polari è $\rho = 2\theta$, determinare un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde a $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ e scrivere l'equazione cartesiana della retta tangente nello stesso punto.*

Determiniamo un'equazione parametrica della curva data in coordinate polari. Si ha

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta = 2\theta\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta = 2\theta\sin\theta. \end{cases}$$

A questo punto, un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde al generico θ è dato da

$$\begin{cases} x'(\theta) = 2\cos\theta - 2\theta\sin\theta \\ y'(\theta) = 2\sin\theta + 2\theta\cos\theta. \end{cases}$$

da cui un vettore tangente alla curva nel punto che corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$ è dato da

$$\begin{cases} x'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -\pi \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2. \end{cases}$$

A questo punto, l'equazione cartesiana della retta tangente al punto corrispondente al generico θ_0 è

$$y'(\theta_0)(x - x(\theta_0)) = x'(\theta)(y - y(\theta_0))$$

per cui, se $\theta_0 = \dfrac{\pi}{2}$, si ha

$$2(x - 0) = -\pi(y - \pi) \qquad\qquad 2x + \pi y = \pi^2.$$

2.1.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 2.1.6.** *Si calcoli la lunghezza l_γ della curva*

$$\underline{\gamma}(t) = \left(\frac{2+3t}{8t}, 2t - 1, \ln(t)\right), \qquad \frac{1}{2} \le t \le 2.$$

Si calcolino inoltre le equazioni della retta r tangente alla curva nel punto $\underline{\gamma}(1)$ e del piano π perpendicolare alla curva nello stesso punto.

✍ **Esercizio 2.1.7.** *Si consideri la curva in $\mathbb{R}^3$ definita dalle equazioni parametriche*

$$x = t\,e^{2t}, \qquad y = 3\,t\,e^{2t}, \qquad z = 2\,t\,e^{2t} \qquad t \in [0,1].$$

Determinare la retta tangente alla curva nel punto corrispondente al valore del parametro $t = 1/2$. Determinare il piano ortogonale alla curva nello stesso punto.

✍ **Esercizio 2.1.8.** *Si consideri la curva piana:*

$$\gamma(t) := (x(t), y(t)) = \left(\frac{5t^3}{3}, \frac{5t^2}{2} - 1\right), \qquad t \geq 0.$$

a) Se $A = \gamma(0)$, trovare un punto $B = \gamma(s)$, tale che la lunghezza dell'arco AB sia esattamente $\dfrac{5(\sqrt{8}-1)}{3}$.
b) Scrivere le equazioni della retta tangente e della retta normale a γ nel punto B.

✍ **Esercizio 2.1.9.** *Si consideri la curva nello spazio:*

$$\gamma(t) := (x(t), y(t), z(t)) = (e^t\,\cos t, e^t\,\sin t, e^t\,\sqrt{3}), \qquad t \in (-\infty, +\infty).$$

a) Trovare il numero t_0 per il quale la distanza di $\gamma(t_0)$ dall'origine è 2.
b) Trovare il numero t_1 per il quale la lunghezza dell'arco avente estremi $\gamma(t_0)$ e $\gamma(t_1)$ è $2\sqrt{5}$.
c) Trovare l'equazione del piano normale e della retta tangente a $\gamma(t)$ nel punto $\gamma(t_1)$.

✍ **Esercizio 2.1.10.** *Si consideri la curva*

$$\gamma(t) = \left(\cos 2t + 2t\sin 2t, \sin 2t - 2t\cos 2t, \frac{2}{3}t^3\right) \qquad t \in [0, +\infty).$$

a) Determinare il punto $\bar{t} > 0$ per il quale la lunghezza dell'arco di estremi $\gamma(0)$ e $\gamma(\bar{t})$ è $\dfrac{38}{3}$.
b) Scrivere l'equazione del piano σ normale alla curva nel punto $\gamma\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2.2. Integrali di prima specie

2.2.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 2.2.1.** *Parametrizzate il tratto del grafico della funzione e^x compreso tra $x = 0$ e $x = 1$; detta γ tale curva, calcolate l'integrale su γ di $f(x, y) = ye^x$; calcolate infine la lunghezza di γ.*

Una parametrizzazione di γ è data da

$$\gamma = \begin{cases} x(t) = t & t \in [0, 1] \\ y(t) = e^t; \end{cases}$$

si ha inoltre

$$\gamma'(t) = (1, e^t).$$

A questo punto

$$\int_\gamma f(x, y) ds = \int_0^1 e^t\, e^t \sqrt{1 + e^{2t}} = \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + e^{2t})^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} [(1 + e^2)^{3/2} - 1].$$

Infine

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt.$$

Troviamo $\displaystyle\int \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt$ effettuando il cambio di variabile $\sqrt{1 + e^{2t}} =: z$ da cui $2t = \log(z^2 - 1)$. Si ha

$$\int \sqrt{1 + e^{2\,t}}\, dt = \int z \frac{z}{z^2 - 1}\, dz = \int \left(1 + \frac{1}{z^2 - 1}\right) dz = z + \frac{1}{2} \log\left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) + C.$$

Allora

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt = \left[\sqrt{1 + e^{2t}} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{1 + e^{2t}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2t}} + 1}\right)\right]_0^1$$

$$= \sqrt{1 + e^2} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{1 + e^2} - 1}{\sqrt{1 + e^2} + 1}\right) - \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right).$$

✍ **Esercizio 2.2.2.** *Data la curva γ parametrizzata da $\Phi(t) = (t\cos 2t, -t\sin 2t)$, determinate la retta tangente alla curva nel punto che corrisponde a $t = 0$ e calcolate l'integrale della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ sulla parte di curva con $-1 \le t \le 1$.*

Si ha $\Phi'(t) = (\cos 2t - 2t\sin 2t, -\sin 2t - 2t\cos 2t)$, dunque $\Phi'(0) = (1, 0)$; essendo $\Phi(0) = (0, 0)$ la retta tangente passa per $(0, 0)$ con direzione $(1, 0)$, ed è pertanto l'asse x. Si ha poi

$$|\Phi'(t)|^2 = \cos^2 2t + 4t^2\sin^2 2t - 4t\sin 2t\cos 2t + \sin^2 2t + 4t^2\cos^2 2t + 4t = 1 + 4t^2$$

quindi $|\Phi'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$. Allora l'integrale diventa

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} \sqrt{t^2\cos^2 2t + t^2\sin^2 2t}\,|\Phi'(t)|\,dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{t^2}\sqrt{1 + 4t^2}\,dt = \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1 + 4t^2}\,dt\\ =&2\int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2}\,t\,dt = \frac{1}{4}\int_1^5 \sqrt{s}\,ds = \frac{1}{4}\frac{2}{3}[s\sqrt{s}]_1^5 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1).\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.2.3.** *Considerate la curva γ parametrizzata da $(\sin t, t, 1)$ con $0 \le t \le 2\pi$; determinare il vettore tangente a γ in ciascuno dei punti corrispondenti a $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, disegnate accuratamente γ e calcolate l'integrale su γ della funzione $xyz\sqrt{1 + \cos^2 y}$.*

γ è il grafico della funzione $\sin x$ sul piano $z = 1$. Si ha $\gamma'(t) = (\cos t, 1, 0)$ $\gamma'(0) = (1, 1, 0)$ $\gamma'(\pi/2) = (0, 1, 0)$ $\gamma'(\pi) = (-1, 1, 0)$.

$$\begin{aligned}\int_\gamma xyz\sqrt{1 + \cos^2 y}\,ds &= \int_0^{2\pi} \sin t\,t\,(1 + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} t\sin t\,dt + \int_0^{2\pi} t\sin t\cos^2 t\,dt\\ &=[-t\cos t + \sin t]_0^{2\pi} + \left[-t\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{1}{3}\sin t - \frac{\sin^3 t}{9}\right]_0^{2\pi} = -\frac{8}{3}\pi.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 2.2.4.** *Calcolare l'integrale (curvilineo) di*

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{4+x^2}}$$

lungo la curva γ *il cui sostegno è il bordo* ∂E *di*

$$E = \left\{(x,y) : x \geq 0, x^2+y^2 \geq 1, 0 \leq y \leq 1 - \frac{x^2}{4}\right\}$$

e determinare la retta tangente a γ *nel punto* $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

$$\int_\gamma f(x,y) = \int_{\gamma_1} f(x,y) + \int_{\gamma_2} f(x,y) + \int_{\gamma_3} f(x,y)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \qquad 1 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_1} f(x,y) = 0$$

$$\gamma_2 = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\int_{\gamma_2} f(x,y) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cos t}{\sqrt{4+\cos^2 t}}\, dt = [-\sqrt{4+\cos^2 t}]_0^{\pi/2} = [-2+\sqrt{5}] = \sqrt{5}-2$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} x = t \\ y = 1 - \dfrac{t^2}{4} \qquad 0 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

$$\sqrt{(x')^2+(y')^2} = \sqrt{1+\frac{t^2}{4}} = \frac{\sqrt{4+t^2}}{2}.$$

$$\int_{\gamma_3} f(x,y) = \int_0^2 \frac{t(1-\frac{t^2}{4})}{\sqrt{4+t^2}} \cdot \frac{\sqrt{4+t^2}}{2}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 \left(t - \frac{t^3}{4}\right) dt = \frac{1}{2}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f(x,y) = \sqrt{5} - \frac{3}{2}.$$

Nel punto $\left(1, \dfrac{3}{4}\right)$ c'è il tratto di parabola

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - \dfrac{t^2}{4} \qquad 0 \leq t \leq 2; \end{cases}$$

si ha $x' = 1,\ y' = -\dfrac{t}{2}$ e $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ si trova per $t = 1$
forma parametrica retta tangente

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}t \qquad t \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

forma cartesiana (anche dal grafico)

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}.$$

✍ **Esercizio 2.2.5.** *Si calcoli l'integrale curvilineo di prima specie della funzione* $f(x, y) = x\,y$ *sulla parte dell'ellisse*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1\right\}$$

contenuta nel primo quadrante. [Sugerimento: nel corso del procedimento potrebbe venire utile un cambiamento di variabile del tipo $s = \sin t \ldots$*]*

Una parametrizzazione della curva γ che descrive la parte di ellisse contenuta nel primo quadrante data dal problema è

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x = 3\,\cos\theta \\ y = 2\,\sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

da cui

$$\gamma'(\theta) = \begin{cases} x = -3\,\sin\theta \\ y = 2\,\cos\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e

$$|\gamma'(\theta)| = \sqrt{9\sin^2\theta + 4\cos^2\theta} = \sqrt{5\sin^2\theta + 4}.$$

Quindi

$$\int_\gamma f\,ds = \int_0^{\pi/2} f(\gamma(\theta))\,|\gamma'(\theta)|\,ds = \int_0^{\pi/2} 6\,\sin\theta\,\cos\theta\,\sqrt{5\sin^2\theta + 4}\,d\theta$$

$$= \frac{3}{5}\int_0^{\pi/2} 10\sin\theta\,\cos\theta\,\sqrt{5\sin^2\theta + 4}\,d\theta = \frac{3}{5}\left[\frac{(5\,\sin^2\theta + 4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{38}{5}.$$

✍ **Esercizio 2.2.6.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_\alpha z\,ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t\,\cos t, t\,\sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(-\pi, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).*

Poniamo

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = (t\,\cos t, t\,\sin t, t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

da cui

$$\alpha'(t) = (\cos t - t\,\sin t, \sin t + t\,\cos t, 1)$$

e

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + t^2\,\sin^2 t - 2\,t\,\sin t\,\cos t + \sin^2 t + t^2\,\cos^2 t + 2\,t\,\sin t\,\cos t + 1} = \sqrt{t^2+2}.$$

Allora, per definizione di integrale curvilineo di prima specie, posto $f(x, y, z) = z$ si ha

$$\int_\alpha z\,ds = \int_0^{2\pi} f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\,|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} t\,\sqrt{t^2+2}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{(t^2+2)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\,[(4\pi^2+2)^{3/2} - 2^{3/2}].$$

L'equazione cartesiana del piano normale alla curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$(x - x_0)\,\alpha_1'(t_0) + (y - y_0)\,\alpha_2'(t_0) + (z - z_0)\,\alpha_3'(t_0) = 0$$

e quindi inserendo i nostri parametri si ottiene

$$(x + \pi)\,\alpha_1'(\pi) + (y - 0)\,\alpha_2'(\pi) + (z - \pi)\,\alpha_3'(\pi) = 0$$

da cui

$$z - x - y\,\pi = 2\,\pi.$$

✍ **Esercizio 2.2.7.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t\,\sin t, t\,\cos t, 2\,t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(\pi/2, 0, \pi)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).*

Poniamo

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = (t\,\sin t, t\,\cos t, 2\,t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

da cui

$$\alpha'(t) = (\sin t + t\,\cos t, \cos t - t\,\sin t, 2)$$

e

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + t^2\,\cos^2 t + 2\,t\,\sin t\,\cos t + \cos^2 t + t^2\,\sin^2 t - 2\,t\,\sin t\,\cos t + 4} = \sqrt{t^2+5}.$$

Allora, per definizione di integrale curvilineo di prima specie, posto $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ si ha

$$\int_\alpha \sqrt{x^2+y^2}\,ds = \int_0^{2\pi} f(\alpha_1(t),\alpha_2(t),\alpha_3(t))\,|\alpha'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} t\,\sqrt{t^2+5}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{(t^2+5)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{3}\,[(4\pi^2+5)^{3/2} - 5^{3/2}].$$

L'equazione cartesiana del piano normale alla curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$(x - x_0)\,\alpha_1'(t_0) + (y - y_0)\,\alpha_2'(t_0) + (z - z_0)\,\alpha_3'(t_0) = 0$$

e quindi inserendo i nostri parametri si ottiene

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,\alpha_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) + (y-0)\,\alpha_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) + (z-\pi)\,\alpha_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

da cui

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,1 + (y-0)\,\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 2\,(z-\pi) = 0$$

e quindi

$$2x - \pi\,y + 4\,z = 5\,\pi.$$

✍ **Esercizio 2.2.8.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (rispetto all'ascissa curvilinea) $\int_\alpha \sqrt{x}\,ds$, ove α è la curva di parametrizzazione $\alpha(t) = (t^2, \cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Si determini inoltre il piano normale ad α nel punto $(\pi^2, -1, 0)$ (ovvero il piano normale alla retta tangente in quel punto).*

Poniamo

$$\alpha(t) := (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t)) = (t^2, \cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

da cui

$$\alpha'(t) = (2t, -\sin t, \cos t)$$

e

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{4t^2 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{4t^2+1}.$$

Allora, per definizione di integrale curvilineo di prima specie, posto $f(x,y,z) = \sqrt{x}$ si ha

$$\int_\alpha \sqrt{x}\, ds = \int_0^{2\pi} f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))\, |\alpha'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} t\, \sqrt{4\,t^2+1}\, dt = \frac{1}{8}\, \frac{(4\,t^2+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{12}\, [(16\pi^2+1)^{3/2} - 1].$$

L'equazione cartesiana del piano normale alla curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ nel punto (x_0, y_0, z_0) è data da

$$(x - x_0)\, \alpha_1'(t_0) + (y - y_0)\, \alpha_2'(t_0) + (z - z_0)\, \alpha_3'(t_0) = 0$$

e quindi inserendo i nostri parametri si ottiene

$$(x - \pi^2)\, \alpha_1'(\pi) + (y + 1)\, \alpha_2'(\pi) + (z - 0)\, \alpha_3'(\pi) = 0$$

da cui

$$(x - \pi^2)\, 2\,\pi - z = 0$$

e quindi

$$z = 2\,\pi\, x - 2\,\pi^3.$$

CAPITOLO 3

Calcolo differenziale
Funzioni di più variabili

3.1. Insiemi di livello e domini: esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.1.1.** *Calcolare le curve di livello delle seguenti funzioni*

$$\begin{aligned} 1) f(x,y) &= 3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right) \\ 2) f(x,y) &= x^2-y^2 \\ 3) f(x,y) &= \frac{x-y}{x+y} \end{aligned}$$

Per la prima funzione le curve di livello di f sono segmenti delle seguenti rette

$$3\left(1-\frac{x}{2}-\frac{y}{4}\right)=C$$

ossia

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1-\frac{C}{3} \qquad 0 \leq C \leq 3$$

che stanno nel primo quadrante. Per la seconda sono le curve $x^2-y^2=C$; per $C=0$ la curva di livello è costituita in realtà dalla coppia di rette $x=y$ e $x=-y$, mentre per gli altri valori di C le curve di livello sono iperboli equilatere aventi queste rette come asintoti. Per la terza funzione infine le curve di livello sono rette per l'origine.

✍ **Esercizio 3.1.2.** *Si rappresenti nel piano il dominio della funzione*

$$f(x, y) = \arcsin(xy - y - 2x)$$

Sappiamo che la funzione $\arcsin x$ è definita per $x \in [-1, 1]$ quindi il dominio di f è l'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xy - y - 2x \leq 1\}.$$

Si verifica direttamente che i punti della retta $x = 1$ non stanno in D. Quindi se $x < 1$ si ha che $(x, y) \in D$ se e solo se

$$\frac{1 + 2x}{x - 1} \leq y \leq \frac{2x - 1}{x - 1}$$

mentre se $x > 1$ si ha che $(x, y) \in D$ se e solo se

$$\frac{2x - 1}{x - 1} \leq y \leq \frac{2x + 1}{x - 1}$$

In conclusione il dominio di f è indicato dalla zona tratteggiata in figura 3.1.

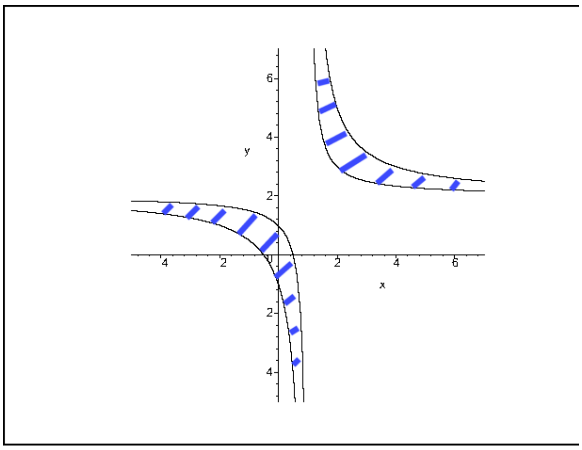

Figura 3.1: Dominio di f.

✍ **Esercizio 3.1.3.** *Si rappresenti nel piano il dominio della funzione*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{(x^2-2x-y)(x^2-2x+y)}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2} + \ln\frac{x+1}{2-x}$$

Occorrono: non negatività del radicando, positività dell'argomento del logaritmo e denominatore diverso da zero. Tutto ciò è equivalente al sistema

$$\begin{cases} (x^2-2x-y)(x^2-2x+y) \geq 0 \\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0 \\ \frac{x+1}{2-x} > 0 \end{cases}$$

il quale a sua volta è equivalente a

$$\begin{cases} -x^2+2x \leq y \leq x^2-2x \\ x \neq \frac{3}{2}, \;\; y \neq \frac{1}{2} \\ -1 < x < 2. \end{cases}$$

Il dominio della funzione è indicato in figura 3.2.

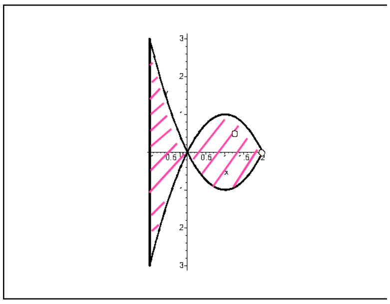

Figura 3.2: Dominio di f.

✍ **Esercizio 3.1.4.** *Si rappresentino nel piano gli insiemi di livello della funzione*

$$f(x,y) = \frac{1+xy}{x^2}$$

Ricordiamo che l'insieme di livello c con $c \in \mathbb{R}$ di una funzione $z = f(x,y)$ è definito come l'insieme dei punti del piano in cui f ha valore c, cioè l'insieme

$$E_c = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad f(x,y) = c\}.$$

Naturalmente se c non appartiene all'immagine di f allora l'insieme E_c è vuoto. Nei casi più comuni E_c è costituito da una o più curve nel piano, che perciò prendono il nome di curve di livello.

Ponendo

$$\frac{1+xy}{x^2} = c, \qquad c \in \mathbb{R}$$

si trova facilmente la famiglia di curve di equazione

$$y = cx - \frac{1}{x}, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Il grafico evidenzia qualche curva appartenente alla precedente famiglia.

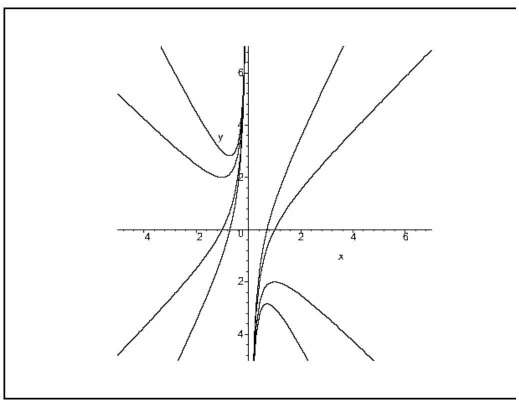

Figura 3.3: Alcune curve di livello per la funzione f.

✍ **Esercizio 3.1.5.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \sqrt{x-1} + \ln(y-1) + \sqrt{xe^y - ye^x}$

Innanzitutto le due radici devono esistere e quindi i loro argomenti devono essere maggiori o uguali a 0; inoltre deve esistere la funzione logaritmo e quindi il suo argomento deve essere maggiore di 0. Quindi

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xe^y - ye^x \geq 0\}.$$

L'unico problema è capire come è fatto il terzo insieme. Osserviamo che

$$xe^y - ye^x \geq 0 \Leftrightarrow xe^y \geq ye^x \Leftrightarrow xe^{-x} \geq ye^{-y}.$$

Studiamo la funzione $f(x) = xe^{-x}$. Il dominio è $\mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ mentre $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$; $f'(x) = e^{-x}[1-x]$ quindi f ammette un massimo in $x = 1$ che vale $1/e$. In figura 3.4. è riportato il grafico di f.

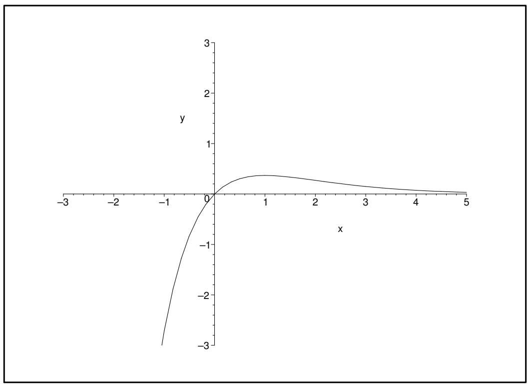

Figura 3.4: Grafico di $f(x) = xe^{-x}$.

Quindi se $x \geq 1$ si ha che $f(x)$ è decrescente, cioè:

$$1 \leq x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Leftrightarrow xe^{-x} \geq ye^{-y}.$$

Tenendo conto dunque della restrizione dovuta all'esistenza dei primi due termini, senza esplicitare completamente il terzo insieme possiamo dire che

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq y\} \setminus \{(1,1)\}.$$

Il punto $(1,1)$ deve essere tolto perché $y \geq x$ e $y \neq 1$.

✍ **Esercizio 3.1.6.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \arcsin \dfrac{4xy}{x^2+y^2}$

La funzione $\arcsin x$ è definita in $[-1,1]$ quindi il dominio della funzione data è l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \frac{4xy}{x^2+y^2} \leq 1\right\}.$$

Vediamo di capire meglio chi è questo insieme. Si ha

$$-1 \leq \frac{4xy}{x^2+y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4xy \geq 0 \\ 4xy - x^2 - y^2 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4xy \geq 0 \\ x^2+y^2-4xy \geq 0. \end{cases}$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\begin{cases} \rho^2[1+4\cos\theta\sin\theta] \geq 0 \\ \rho^2[4\sin\theta\cos\theta - 1] \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin(2\theta) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta} \leq 1$$

da cui, ponendo $t := \tan\theta$ si ha

$$\begin{cases} t^2+4t+1 \geq 0 \\ 4t - t^2 - 1 \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -2-\sqrt{3} \quad \vee \ t \geq -2+\sqrt{3} \\ t \leq 2-\sqrt{3} \quad\ \ \vee \ t \geq 2+\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow |t| < 2-\sqrt{3} \vee |t| \geq 2+\sqrt{3}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} D =& \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2-\sqrt{3})|y| \leq |x| \leq (2+\sqrt{3})|y|\} \\ =& \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2-\sqrt{3})|x| \leq |y| \leq (2+\sqrt{3})|x|\}. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 3.1.7.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \arccos(xye^{-x^2-y^2})$

La funzione arccos è definita in $[-1,1]$, quindi il dominio della funzione data è l'insieme

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq xye^{-x^2-y^2} \leq 1\right\}.$$

Vediamo di capire meglio chi è questo insieme. Si ha

$$-1 \leq xye^{-x^2-y^2} \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{xy}{e^{x^2+y^2}}\right| \leq 1.$$

Passando a coordinate polari, questo è equivalente a cercare le coppie $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tali che

$$\left|\frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{e^{\rho^2}}\right| \leq 1.$$

Studiamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{x^2}{e^{x^2}}$. Si ha che f è pari e sempre non negativa, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ e $f'(x) = e^{-x^2}(2x)(1-x^2)$ da cui $x = 0$ è punto di minimo locale (e assoluto) mentre i punti $x = \pm 1$ sono di massimo locale (e assoluto) e $f(\pm 1) = 1/e$. In figura 3.5 è mostrato il grafico di f.

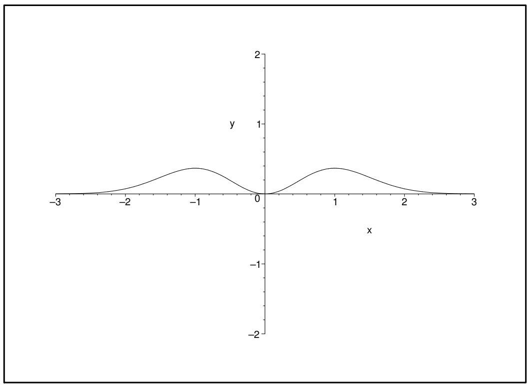

Figura 3.5: Grafico di $f(x) = x^2 e^{-x^2}$.

A noi interessa la parte relativa alle $x \geq 0$ perché nel nostro caso $\rho \geq 0$. D'altra parte, dall'analisi condotta finora

$$\left|\frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{e^{\rho^2}}\right| \leq |f(\rho)| \leq \frac{1}{e} \leq 1.$$

Dunque $D = \mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 3.1.8.** *Si determini il dominio di definizione delle seguenti funzioni:*

$$f(x,y) = \sin(\tan e^{\sqrt{xy}}), \qquad g(x,y) = |\sqrt{\sin(xy)}| \tan e^{\sqrt{x}},$$

Le funzioni $\sin z$ e e^z sono definite per ogni z reale. La funzione $\tan z$ è definita per $z \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$ mentre la funzione $\sqrt{z}$ è definita per $z \geq 0$. Quindi

$$\mathrm{dom} f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x\,y \geq 0 \text{ e } e^{\sqrt{xy}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

In realtà se $k \in \mathbb{Z}^-$ di sicuro $e^{\sqrt{xy}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ quindi è sufficiente porre

$$e^{\sqrt{xy}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

D'altra parte questo è equivalente a

$$xy \neq \left[\log \left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi \right) \right]^2 \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Quindi

$$\mathrm{dom}\, f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, xy \geq 0 \text{ e } xy \neq \left[\log \left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi \right) \right]^2 \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \right\}.$$

La condizione $xy \geq 0$ rappresenta l'unione del primo e terzo quadrante, assi inclusi. D'altra parte per ogni $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fissato, la condizione

$$xy = \left[\log \left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi \right) \right]^2$$

rappresenta un'iperbole equilatera, quindi il dominio di f è costituito dal primo e dal terzo quadrante a cui viene tolta una famiglia di iperboli equilatere.

Per quanto riguarda la funzione g, di nuovo possiamo dire che le funzioni e^z e $\sin z$ sono definite per ogni z reale, la funzione $\tan z$ è definita per ogni $z \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$. Quindi

$$\mathrm{dom}\, g = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \sin(xy) \geq 0 \text{ e } e^{\sqrt{x}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se $k \in \mathbb{Z}^-$ allora di sicuro $e^{\sqrt{x}} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$, quindi

$$\mathrm{dom}\, g = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 2\,h\,\pi \leq x\,y \leq \pi + 2\,h\,\pi \text{ e } x \neq \left[\log \left(\frac{\pi}{2} + \, k\,\pi \right) \right]^2 \text{ con } h,k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \right\}.$$

Si tratta dell'unione di infinite regioni comprese tra due iperboli equilatere a cui sono stati tolti i punti che appartengono a infinite rette parallele all'asse y.

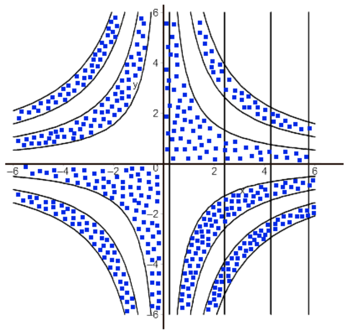

Figura 3.6: Dominio della funzione g.

✍ **Esercizio 3.1.9.** *Si determini il dominio di definizione delle seguenti funzioni:*

$$f(x,y)=\log(2e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}}),\qquad g(x,y)=\sqrt{\frac{\tan x}{1-e^y}}.$$

Le funzioni e^z e $\sin z$ sono definite per ogni $z\in\mathbb{R}$, la funzione $\log z$ è definita per $z>0$ e infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per $z\geq 0$. D'altra parte, essendo $\log(a\,b)=\log a+\log b$ si ha

$$\log(2\,e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}})=\log 2+\log\,e^{\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}}=\log 2+\sqrt{2+\sin[(xy)]^2}$$

quindi l'unica condizione da imporre è $2+\sin[(xy)]^2\geq 0$. Essendo $-1\leq\sin z\leq 1$ per ogni $z\in\mathbb{R}$, si ha che questa condizione è verificata per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Quindi $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}^2$.

D'altra parte, per quanto riguarda la funzione g si ha che di nuovo la funzione e^z è definita per ogni z reale, la funzione $\tan z$ è definita per $z\neq\dfrac{\pi}{2}+k\,\pi$ e infine la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z\geq 0$. Quindi

$$\operatorname{dom} g=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \frac{\tan x}{1-e^y}\geq 0\ \text{con}\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi\ \text{al variare di}\ k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Scendiamo più nei dettagli. Si ha, al variare di $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\tan x}{1-e^y} \geq 0 \Leftrightarrow [\tan x \geq 0 \ \wedge \ 1-e^y > 0] \ \vee \ [\tan x \leq 0 \ \wedge \ 1-e^y < 0]$$

$$\Leftrightarrow \left[k\,\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ \wedge \ y < 0\right] \ \vee \ \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi \leq x \leq \pi + k\,\pi \ \wedge \ y > 0\right].$$

A questo insieme vanno tolte le rette $x = \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ per $k \in \mathbb{Z}$, quindi

$$\operatorname{dom} g = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left[k\,\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\,\pi \ \wedge \ y < 0\right] \right.$$
$$\left. \vee \ \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi < x \leq \pi + k\,\pi \ \wedge \ y > 0\right] \text{ per } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

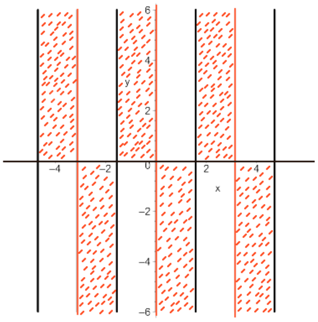

Figura 3.7: Dominio della funzione g.

✍ **Esercizio 3.1.10.** *Si determini il dominio di definizione delle seguenti funzioni:*

$$f(x,y) = \tan\sqrt{1-|yx|}, \qquad g(x,y) = \sqrt{\sqrt{1-|yx|}-1}.$$

La funzione $\tan z$ è definita per $z \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ mentre la funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$.

Quindi si ha

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |y\,x| \geq 0 \ \vee \ \sqrt{1 - |yx|} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

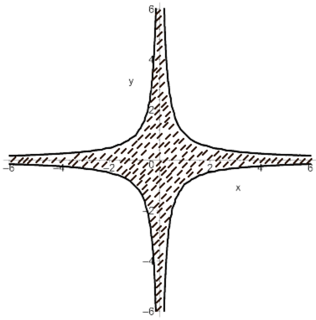

Figura 3.8: Dominio della funzione f.

Scendiamo più nei dettagli. Si ha

$$1 - |y\,x| \geq 0 \Leftrightarrow |x\,y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x\,y \leq 1$$

inoltre, se $k \in \mathbb{Z}^-$ di sicuro si ha $\sqrt{1 - |x\,y|} \neq \dfrac{\pi}{2} + k\,\pi$ quindi basta chiedere

$$\sqrt{1 - |x\,y|} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \qquad \text{con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

da cui

$$|yx| \neq 1 - \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2;$$

dato che $k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, di sicuro la quantità $1 - \left[\dfrac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2$ è negativa e allora si avrà sicuramente

$$|y\,x| \neq 1 - \left[\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right]^2.$$

Quindi

$$\operatorname{dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x\,y \leq 1\}.$$

Per quanto riguarda la funzione g si può ancora dire che $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$, quindi

$$\operatorname{dom} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{1-|y\,x|}-1 \geq\ 0\ \wedge\ 1-|y\,x| \geq\ 0\}.$$

Scendiamo nei dettagli. Si ha

$$1-|y\,x| \geq\ 0 \Leftrightarrow |x\,y| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x\,y \leq 1.$$

D'altra parte

$$\sqrt{1-|yx|}-1 \geq\ 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-|yx|} \geq 1 \Leftrightarrow 1-|y\,x| \geq 1 \Leftrightarrow |y\,x| \leq\ 0 \Leftrightarrow x=0\ \vee\ y=0.$$

Quindi

$$\operatorname{dom} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x=0\ \vee\ y=0\}.$$

✍ **Esercizio 3.1.11.** *Si determini il dominio di definizione delle seguenti funzioni:*

$$f(x,y) = \log\sqrt{1-|yx|}, \qquad g(x,y) = \sqrt{|\sqrt{1-|yx|}-1|}.$$

La funzione $\sqrt{z}$ è definita per ogni $z \geq 0$, mentre la funzione $\log z$ è definita per ogni $z > 0$. Quindi, per quanto riguarda la funzione f si ha

$$\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1-|x\,y| > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 < x\,y < 1\}.$$

Invece, per quanto riguarda la funzione g si ha

$$\operatorname{dom} g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ |\sqrt{1-|y\,x|}-1| \geq\ 0\ \wedge\ 1-|y\,x| \geq\ 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ -1 \leq x\,y \leq 1\}.$$

3.2. Insiemi di livello e domini: esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.2.1.** *Si rappresentino nel piano gli insiemi di livello delle seguenti funzioni:*

$$1) f(x,y) = \frac{x}{y}e^{-x}$$
$$2) f(x,y) = y(\log y - x)$$

✍ **Esercizio 3.2.2.** *Si descrivano (senza rappresentarli) gli insiemi di livello delle funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&1) f(x,y) = \frac{xy - y^2}{2x^2 + y^2} \\
&2) f(x,y) = (x^2 + y^2)\log(1 + x^2 + y^2) \\
&3) f(x,y,z) = e^{x^2+2y^2+3z^2} \\
&4) f(x,y,z) = \log\frac{z}{x^2 + y^2} \\
&5) f(x,y,z) = \arctan\frac{x^2 + y^2}{(z-1)^2}
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 3.2.3.** *Si rappresentino nel piano i domini delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&1) f(x,y) = \sqrt{(x^2 + 4y^2 - 3)} \\
&2) f(x,y) = \sqrt{|x|((x+1)^2 - (y-1)^2)} \\
&3) f(x,y) = \sqrt{x\sin(x^2 + y^2)} \\
&4) f(x,y) = \frac{\sqrt{2x - y(y - |y|)}}{\log(1 - (x^2 + y^2))}
\end{aligned}
$$

✍ **Esercizio 3.2.4.** *Siano A e B rispettivamente gli insiemi di definizione delle seguenti funzioni:*

$$
\begin{aligned}
&1) f(x,y) = \log(1 - x^2) - \log(y^2 - 4) \\
&2) g(x,y) = \log\frac{1 - x^2}{y^2 - 4}
\end{aligned}
$$

Si determinino A e B e dica se $A = B$, $A \subset B$, $B \subset A$.

✍ **Esercizio 3.2.5.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $\quad f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x - \ln y}$

✍ **Esercizio 3.2.6.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \sin\frac{x+y}{x-y} + \sqrt{x-y}$

✍ **Esercizio 3.2.7.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \sqrt{xy(xy-1)}$

✍ **Esercizio 3.2.8.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione* $f(x,y) = \sqrt{xy}\sqrt{xy-1}$

✍ **Esercizio 3.2.9.** *Trovare l'insieme di definizione della funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{(xy-1)xy}$$

3.3. Limiti e continuità: esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.3.1.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\dfrac{x}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Innanzitutto osserviamo che $\arctan x$ è una funzione continua e dunque la funzione data è sicuramente continua per $(x,y) \neq (0,0)$ mentre per studiare il problema nell'origine è sufficiente studiare il comportamento dell'argomento della funzione arcotangente. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$$

non esiste. Infatti se consideriamo la curva $y = x$ otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2x} = \pm\infty$$

a seconda che x tenda a zero da sinistra o da destra. Dunque in corrispondenza di queste scelte,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \arctan\frac{x}{x^2+y^2} = \pm\frac{\pi}{2}$$

a seconda che x tenda a zero da sinistra o da destra. In particolare il limite cercato non esiste (e in ogni caso non è sempre uguale al valore della funzione nell'origine) quindi la funzione non è continua nell'origine.

✍ **Esercizio 3.3.2.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0,$$

visto che $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Il teorema dei due carabinieri permette di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 3.3.3.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^3+y^3} & x \neq -y \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

In primo luogo occorre notare che per $x \neq -y$ la funzione data è continua; resta dunque da studiare la continuità in $(0,0)$. Per fare questo occorre studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3}$$

e vedere se questo esiste e fa 0. In tal caso f sarà continua anche nel punto $(0,0)$; in caso contrario non sarà continua in quel punto. (Osserviamo tra l'altro che non è ovviamente possibile dire che $\dfrac{x^3}{x^3+y^3} \leq 1$).

Se si considera il limite lungo le curve che di solito vengono utilizzate, esempio $y = x^{\alpha}$, $\alpha > 0$ si vede che il limite considerato esiste e fa 0. Anche lungo tutte le rette passanti per l'origine

il limite esiste e fa 0. Questo potrebbe erroneamente portare a concludere che il limite della funzione esista e faccia 0. Tale conclusione è errata: infatti il limite dato non esiste.
Come si può arrivare a intuire questa conclusione? Innanzitutto si vede che se $y = -x$ il denominatore si annulla mentre il numeratore tende a zero, questo potrebbe indurre a pensare che ci sia un modo per far andare a zero il denominatore più velocemente del numeratore. Si esprime in termini rigorosi questo concetto considerando la successione

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^\beta}\right)$$

dove $\beta > 0$; questa successione di punti sta lungo una curva che risulta essere una perturbazione della curva $y = -x$ che annulla il denominatore della funzione data. L'idea è cercare un β in modo che il limite lungo tale successione di punti venga diverso da 0. Dopo alcune ricerche si vede che ad esempio $\beta = 5$ fa al caso nostro. Allora se prendiamo in esame la successione

$$\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5}\right)$$

si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^3+y^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\dfrac{1}{n^3}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^5}\right)^3}{\dfrac{3}{n^7} + \dfrac{3}{n^{11}} + \dfrac{1}{n^{15}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1 - \dfrac{3}{n^4} - \dfrac{3}{n^8} - \dfrac{1}{n^{12}}}{\dfrac{3}{n} + \dfrac{3}{n^5} + \dfrac{1}{n^9}} = -\infty.$$

Questo permette di concludere che il limite dato non esiste e dunque f non è continua in $(0,0)$.

✍ **Esercizio 3.3.4.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3|\,|y|}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| \frac{x^4+y^2}{2(x^4+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|}{2} = 0$$

visto che $x^2|y| \leq \frac{1}{2}(x^4+y^2)$ (questo deriva dal fatto che $(x^2+|y|)^2 \geq 0$). Il teorema dei due carabinieri e il fatto che

$$|f| \to 0 \Longleftrightarrow f \to 0$$

ci permettono di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 3.3.5.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\,x|\,|y^3|}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\,xy|\,\frac{y^2}{x^4+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |\,xy| = 0$$

visto che $\dfrac{y^2}{x^4+y^2} \leq 1$. Il teorema dei due carabinieri e il fatto che

$$|f| \to 0 \Longleftrightarrow f \to 0$$

ci permettono di concludere che il limite cercato esiste e fa 0, dunque la funzione data è continua anche nell'origine.

✍ **Esercizio 3.3.6.** *Dire se la seguente funzione è continua nel suo dominio di definizione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione data è continua sicuramente per $(x,y) \neq (0,0)$. Per vedere se è continua nell'origine, è sufficiente studiare il limite di f per $(x,y) \to (0,0)$ per vedere se esso esiste e se coincide con il valore della funzione in $(0,0)$. Si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

non esiste. Infatti se consideriamo la curva $y = x$ otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^4+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

mentre se prendiamo in esame la curva $y = x^2$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Questo basta a concludere che la funzione data non è continua nell'origine (in realtà per concludere che la funzione non è continua nell'origine bastava solo considerare una curva tale che il limite preso lungo quella curva non fosse uguale a zero, nel nostro caso bastava dunque l'esame del limite lungo la curva $y = x^2$).

✍ **Esercizio 3.3.7.** *Calcolare*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3 - 2\sin(x^2 y)\cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

Il limite dato può essere riscritto come

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2 y)\cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

a patto che questi ultimi due limiti esistano, finiti o infiniti ma tali da non dar luogo alla forma di indecisione $[+\infty, -\infty]$. Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

prendendo i valori assoluti e utilizzando la nota disuguaglianza $|x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x||y^3|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0.$$

Quindi dal teorema dei due carabinieri e utilizzando il fatto che

$$f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$$

si ottiene che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^2}$$

esiste e fa 0.
Per quanto riguarda

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2 y)\cos(x + 2y)}{x^2 + y^2}$$

si osserva immediatamente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x + 2y) = 1;$$

d'altra parte, utilizzando il fatto che $|\sin z| \leq |z| \quad \forall\, z \in \mathbb{R}$ e il fatto ovvio che $x^2 \leq x^2 + y^2$ si ottiene, prendendo i valori assoluti

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2|\sin(x^2y)|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2|y| = 0.$$

Il teorema dei due carabinieri unito al fatto che

$$f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$$

ci dà

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)}{x^2+y^2} = 0$$

e dunque anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2\sin(x^2y)\cos(x+2y)}{x^2+y^2} = 0.$$

Allora anche il limite proposto in partenza esiste e fa 0.

✍ **Esercizio 3.3.8.** *Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xye^x \sin(\pi/4 + xy)}{2x^2+y^2}.$$

La funzione

$$f(x,y) = \frac{xye^x \sin(\pi/4 + xy)}{2x^2+y^2}$$

di cui dobbiamo calcolare il limite è definita su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e sull'asse x (come sull'asse y) è identicamente 0. Quindi il limite, se esiste, deve essere 0. Tuttavia sulla bisettrice $y = x$ si ottiene

$$f(x,x) = \frac{x^2e^x \sin(\pi/4 + x^2)}{3x^2} = \frac{e^x \sin(\frac{\pi}{4} + x^2)}{3} \to \frac{1 \cdot \sqrt{2}/2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{6},$$

quindi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

non esiste.

✍ **Esercizio 3.3.9.** *Si calcoli*

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2}$$

SOLUZIONE 1. Ricordiamo che

$$f \to 0 \Longleftrightarrow |f| \to 0$$

a questo punto dunque, osservando che $\dfrac{y^2}{z^2+y^2} \le 1$ per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2|\log x|}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(z,y)\to(0,0)} \frac{y^2|\log(z+1)|}{z^2+y^2} \le \lim_{(z,y)\to(0,0)} |\log(z+1)| = 0.$$

Il teorema dei due carabinieri ci permette allora di concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2 \log x}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$

SOLUZIONE 2. Si può anche passare a coordinate polari ponendo $x = 1+\rho\cos\theta,\ \ y = \rho\sin\theta$. Si ottiene

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \sin^2\theta \log(1+\rho\cos\theta)}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} \rho \sin^2\theta\cos\theta = 0$$

poiché $\sin^2\theta\cos\theta$ è una quantità limitata in modulo da 1.

✍ **Esercizio 3.3.10.** *Si dimostri, usando la restrizione di f su opportune curve, che le seguenti funzioni non hanno limite per $(x,y) \to (0,0)$:*

1) $f(x,y) = xe^{-y/x}$

2) $f(x,y) = \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^4}$

1) Se considero la curva $y = x$ allora si ha

$$\lim_{(x,y)\to 0} x\, e^{-y/x} = \lim_{x\to 0} x\, e^{-1} = 0.$$

D'altra parte se considero la curva $y = -\sqrt{x}$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to 0} x\, e^{-y/x} = \lim_{x\to 0} x\, e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = +\infty.$$

Avendo trovato due curve lungo le quali il limite di f ha due valori diversi, si conclude che il limite dato non esiste.

2) Se considero la curva $y = x$ allora si ha

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0.$$

D'altra parte se considero la curva $y = \sqrt{x}$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x\sqrt{x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x}} = +\infty.$$

✍ **Esercizio 3.3.11.** *Sia data la funzione:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

a) Si stabilisca se f è continua in $(0,0)$.
b) Si stabilisca se è continua in $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x \leq 1\}$

a) Per $x \neq 0$ la funzione è continua. Per concludere occorre analizzare la conitnuità della funzione data lungo la retta $x = 0$. Per fare questo bisogna calcolare il limite per $x \to 0$ con y qualunque di $f(x,y)$ e verificare se esso è 0 che è il valore assunto lungo l'asse delle y. Questo è falso dato che se consideriamo la curva $y = \sqrt{x}$ allora $f(x,y)$ vale costantemente 1 e dunque non può tendere a 0 al tendere di x a 0. Dunque la funzione data non è continua in 0.
b) Usando la condizione imposta dal dominio D si ottiene

$$0 \leq \lim_{x\to 0} \frac{y^2}{x} \leq \lim_{x\to 0} x = 0,$$

dove osserviamo che non abbiamo avuto bisogno di considerare i valori assoluti delle quantità in gioco dato che $x \in D \Rightarrow x \geq 0$. A questo punto il teorema dei carabinieri permette di concludere che il limite considerato esiste e fa 0, dunque la funzione f è continua in D. Notiamo che questo esempio mostra che una funzione può essere discontinua in un punto mentre una sua restrizione può essere continua nello stesso punto. Ciò non deve stupire, in quanto, restringendo una funzione ad un sottoinsieme del suo dominio, si può escludere un insieme rilevante di curve lungo le quali calcolare i limiti.

✍ **Esercizio 3.3.12.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \frac{2x - y}{3x + 4y}$$

si verifichi che:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) \neq \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

Si verifica facilmente che

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

che è chiaramente diverso da

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}.$$

✍ **Esercizio 3.3.13.** *Si calcolino i limiti:*

1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}}$

2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)}$

1) Innanzitutto ricordiamo il limite notevole

$$\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z} = 1.$$

Allora, dal teorema sul limite della composizione di funzioni (oppure passando a coordinate polari) otteniamo facilmente che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2} = -1.$$

D'altra parte, visto che $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ si ha $x^4+y^4 \geq y^4$, abbiamo anche

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,y^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,y^2}{\sqrt{y^4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0.$$

Dal teorema dei due carabinieri e dal fatto che

$$f \to 0 \iff |f| \to 0$$

si conclude che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0;$$

dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{\sqrt{x^4+y^4}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-e^{xy^2}}{xy^2}\cdot\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0.$$

2) Vogliamo dimostrare che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)} = 0.$$

Prima di tutto ricordiamo i limiti notevoli

$$\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2}; \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\log(1+z)}{z} = 1.$$

Quindi, dal teorema sul limite della composizione di funzioni (oppure passando a coordinate polari), si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} = \frac{1}{2} \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = 1.$$

D'altra parte, visto che $\dfrac{y^2}{x^2+y^2} \leq 1$, si ottiene

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0.$$

Il teorema dei carabinieri ci permette di concludere che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

Dunque, riassumendo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{\log(1+x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(xy)}{x^2y^2} \cdot \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{\log(1+x^2+y^2)} = 0.$$

✍ **Esercizio 3.3.14.** *Si consideri la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2\,(y-x)}{(x^2+y^2)^\alpha}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Si determini se esiste (e in caso affermativo si calcoli)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

quando $\alpha = 1$ *e quando* $\alpha = 2$.

Sia $\alpha = 1$. Allora

$$f(x,y) = \frac{x^2\,(y-x)}{x^2+y^2}.$$

Proviamo che il limite dato esiste e fa zero.
Per dimostrare questo ci occupiamo separatamente dei due casi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$$

dimostrando che entrambi esistono e sono uguali a zero. Useremo la seguente maggiorazione

$$x^2 \leq x^2+y^2.$$

Si ha

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,|y|}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0.$$

Dunque dal teorema dei due carabinieri e dal fatto che $|f| \to 0 \Leftrightarrow f \to 0$ si ha che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,y}{x^2+y^2} = 0.$$

Analogamente

$$0 \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x^3|}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|\,x^2}{x^2+y^2} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$$

da cui anche

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0.$$

Allora

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

perché dato dalla differenza dei limiti precedenti.

Sia ora $\alpha = 2$. Dimostriamo invece che in questo caso il limite dato non esiste. Per fare questo è sufficiente considerare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione ammetta limite diverso. Sia ad esempio $y = 2\,x$. Allora

$$f(x,2\,x) = \frac{x^2\,(2\,x - x)}{(x^2+4\,x^2)^2} = \frac{x^3}{25\,x^4} = \frac{1}{25\,x}$$

e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,2\,x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x,2\,x) = -\infty.$$

Questo è già sufficiente per concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 3.3.15.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := x^{-1}(x^3+y^2)\cos(\sqrt{1-\tan x})$$

e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ mentre l'argomento della radice deve essere positivo o nullo. Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \pi k - \frac{\pi}{2} < x \le \arctan 1 + k\,\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}\ \wedge\ x \neq 0\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x, y) \to (0, 0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3 + y^2)\ \cos\sqrt{1 - \tan x}}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Ad esempio, si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 + x)\ \cos\sqrt{1 - \tan x}}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2 + 1)\ \cos\sqrt{1 - \tan x} = \cos 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 + x^2)\ \cos\sqrt{1 - \tan x}}{x} = \lim_{x\to 0}(x^2 + x)\ \cos\sqrt{1 - \tan x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 3.3.16.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x, y) := \frac{(x^3 + y^2)\sin(\sqrt{1 - \tan x})}{x^2 + y^2}$$

e studiarne il comportamento per $(x, y) \to (0, 0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan x$ è definita per $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ mentre l'argomento della radice deve essere positivo o nullo. Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi k - \frac{\pi}{2} < x \leq \arctan 1 + \pi k \ \ k \in \mathbb{Z} \ \wedge \ (x, y) \neq (0, 0)\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x, y) \to (0, 0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^3 + y^2)\ \sin\sqrt{1 - \tan x}}{x^2 + y^2}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Ad esempio si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 + x)\ \sin\sqrt{1 - \tan x}}{x^2 + x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1}\right)\ \sin\sqrt{1 - \tan x} = \sin 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3 + x^2)\ \sin\sqrt{1 - \tan x}}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x + 1}{2}\right)\ \sin\sqrt{1 - \tan x} = \frac{1}{2}\ \sin 1.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 3.3.17.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := x^{-1}[(\sin x)^2 + y^2]\tan(e^{x+y})$$

e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan e^{x+y}$ è definita per $e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $k \in \mathbb{Z}^-$ questo è sicuramente verificato, quindi basterà imporre

$$e^{x+y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \neq \log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right) \;\; k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \;\wedge\; x \neq 0\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y) \to (0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{((\sin x)^2 + y^2)\ \tan(e^{x+y})}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Si ha ad esempio (utilizzando un noto limite notevole)

$$\lim_{x\to 0} f(x,\sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{[(\sin x)^2 + x]\ \tan(e^{x+\sqrt{x}})}{x} = \tan 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{((\sin x)^2 + x^2)\ \tan e^{2x}}{x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

✍ **Esercizio 3.3.18.** *Determinare il dominio di definizione della funzione*

$$f(x,y) := \{[(\sin x)^3 + y^2]\tan(e^{-y})\}/x$$

e studiarne il comportamento per $(x,y) \to (0,0)$.

Innanzitutto la funzione $\tan e^{-y}$ è definita per $e^{-y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Se $k \in \mathbb{Z}^-$ questo è sempre verificato, quindi basta porre

$$e^{-y} \neq \frac{\pi}{2} + k\,\pi, \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}.$$

Inoltre il denominatore di f deve essere diverso da zero, dunque

$$\operatorname{dom} f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x \neq 0 \ \wedge \ y \neq -\log\left(\frac{\pi}{2} + k\,\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\right\}.$$

Per quanto riguarda il comportamento di f per $(x,y) \to (0,0)$, dimostriamo che il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{((\sin x)^3 + y^2)\,\tan(e^{-y})}{x}$$

non esiste. A tale scopo basta trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione data ammetta limite diverso. Si ha ad esempio (utilizzando un noto limite notevole)

$$\lim_{x\to 0} f(x, \sqrt{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{((\sin x)^3 + x)\,\tan(e^{-\sqrt{x}})}{x} = \tan 1.$$

D'altra parte

$$\lim_{x\to 0} f(x, x) = \lim_{x\to 0} \frac{((\sin x)^3 + x^2)\,\tan(e^{-x})}{x} = 0.$$

Questo basta a concludere che il limite dato non esiste.

3.4. Gradiente, derivate parziali e piano tangente: esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.4.1.** *Si determini per quale valore di α il piano tangente al grafico di $z = f(x,y) = \sin(\alpha x + y^2)$ nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ è parallelo alla retta $x = y = 2z$. Esistono valori di α per cui è perpendicolare?*

Si ha

$$f_x(x,y) = \alpha \cos(\alpha x + y^2), \qquad f_y(x,y) = 2y \cos(\alpha x + y^2),$$

da cui

$$f_x(0, \sqrt{\pi}) = -\alpha, \qquad f_y(0, \sqrt{\pi}) = -2\sqrt{\pi}.$$

Il piano tangente alla superficie nel punto $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ ha equazione

$$z = -\alpha x - 2\sqrt{\pi}(y - \sqrt{\pi}).$$

La retta parallela a $x = y = 2z$ passante per $(0, \sqrt{\pi}, 0)$ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = \sqrt{\pi} + 2t \\ z = t \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Tale retta giace sul piano tangente se, sostituendo x, y, z in funzione di t nell'equazione di tale piano si ottiene un'identità, cioè se

$$t = -2\alpha t - 4\sqrt{\pi}t, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R},$$

che implica

$$\alpha = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{\pi}.$$

Una maniera alternativa di procedere è la seguente. Un vettore normale alla superficie è

$$\mathbf{v} = (-f_x(0, \sqrt{\pi}), -f_y(0, \sqrt{\pi}), 1) = (\alpha, 2\sqrt{\pi}, 1);$$

tale vettore è perpendicolare al vettore $\mathbf{w} = (2, 2, 1)$ che individua la direzione della retta se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$ da cui si ricava

$$2\alpha + 4\sqrt{\pi} + 1 = 0, \qquad \alpha = -\frac{1}{2} - 2\sqrt{\pi}.$$

I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ non sono mai paralleli quindi il piano tangente non è perpendicolare alla retta per alcun valore di α.

✍ **Esercizio 3.4.2.** *Sia* $f(x, y) = \log(1 + \sqrt{x^2 + 2y})$; *calcolate il gradiente* ∇f *nel punto* $(2, 0)$ *e scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra lo stesso punto.*

Scriviamo il gradiente della funzione nel generico punto (x, y). Si ha

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2y}} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2y}}, \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 2y}} \frac{2}{2\sqrt{x^2 + 2y}}\right)$$

dunque

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 2y} + x^2 + 2y}, \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2y} + x^2 + 2y}\right)$$

e

$$\nabla f(2, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

L'equazione del piano tangente al grafico di f nel generico punto (x_0, y_0) è

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Nel nostro caso $x_0 = 2, y_0 = 0$, e $f(2, 0) = \log 3$ da cui l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(2, 0)$ è

$$z = \log 3 + \frac{2}{3}(x - 2) + \frac{1}{3}y$$

o anche

$$2x + y - 3z = 4 - 3\log 3.$$

✍ **Esercizio 3.4.3.** *Calcolare le derivate parziali della seguente funzione*

$$f(x, y) = \frac{xy}{x + y}$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x(x+y) - xy}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

✍ **Esercizio 3.4.4.** *Calcolare le derivate parziali della seguente funzione*

$$f(x, y) = (x + y^2)\log(x - y)$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \log(x - y) + \frac{x + y^2}{x - y}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\log(x - y) - \frac{x + y^2}{x - y}.$$

✍ **Esercizio 3.4.5.** *Calcolare le derivate parziali della seguente funzione*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Per $(x, y) \neq (0, 0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Invece se $(x, y) = (0, 0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

✍ **Esercizio 3.4.6.** *Calcolare le derivate parziali della seguente funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

Per $y \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2+x^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Per $y = 0$ si ha invece

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan \frac{x}{h} - \frac{\pi}{2}}{h}.$$

A questo punto, se $x = 0$ tale limite non esiste (in particolare tende a $\pm\infty$ a seconda che h tenda a $0^{\mp}$ rispettivamente); se $x > 0$ e $h \to 0^-$ di nuovo il limite non esiste e anche per $x < 0$ e $h \to 0^+$. Insomma quest'ultimo limite non esiste per nessun valore di x dunque $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ non esiste.

✍ **Esercizio 3.4.7.** *Calcolare le derivate parziali della seguente funzione*

$$f(x,y) = x + \log \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{x^2+y^2}{y} \cdot \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = 1 - \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2+y^2}{y} \cdot \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{y(x^2+y^2)}.$$

3.5. Gradiente, derivate parziali e piano tangente: esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.5.1.** *Delle seguenti funzioni si calcoli ∇f nel punto a fianco indicato:*

$f(x, y) = \sin x \cos y$ $\quad P = (\pi/3, \pi/3)$
$f(x, y, z) = \log(xy/z)$ $\quad P = (3, 2, 2)$

✍ **Esercizio 3.5.2.** *Si calcolino le derivate seconde delle funzioni:*

a) $f(x, y) = \log(2x^2 - 3y^2)$

b) $f(x, y) = xe^{xy}$.

✍ **Esercizio 3.5.3.** *Se f è una funzione di una variabile, differenziabile ovunque, mostrare che $z = f(x/y)$ soddisfa l'equazione alle derivate parziali*

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x} + y\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

✍ **Esercizio 3.5.4.** *Calcolare un vettore normale e le equazioni del piano tangente e della retta normale al grafico di $z = \sin(xy)$ nel punto in cui $x = \pi/3$ e $y = -1$.*

✍ **Esercizio 3.5.5.** *Quale piano orizzontale è tangente alla superficie*

$$z = x^2 - 4xy - 2y^2 + 12x - 12y - 1$$

e qual è il punto di tangenza?

3.6. Differenziabilità, differenziale e approssimazione: esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.6.1.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$f(x,y)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{2}x^2y & y\geq 0\\ \dfrac{e^{xy}-1}{y} & y<0\end{cases}$$

Se si considerano i punti (x,y) con $y\neq 0$ allora la funzione è differenziabile perché somma e prodotto di funzioni differenziabili. Resta da studiare la differenziabilità nei punti $(x,0)$ con $x\in\mathbb{R}$. Proviamo a studiare la differenziabilità in tali punti usando i teoremi noti.
Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}.$$

A questo punto, se $h>0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+\frac{1}{2}x^2h-x}{h}=\frac{x^2}{2}$$

mentre se $h<0$ allora

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{xh}-1}{h}-x}{h}.$$

Usando due volte il teorema di De l'Höpital si ottiene

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{xh}-1}{h}-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{xh}-1-xh}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{xe^{xh}-x}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2e^{xh}}{2}=\frac{x^2}{2}.$$

Quindi in ogni caso

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\frac{x^2}{2}.$$

D'altra parte, se $y>0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=1+xy$$

che tende a 1 per $y \to 0$, mentre se $y < 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{y}(ye^{xy}) = e^{xy}$$

che pure tende a 1 per $y \to 0$. Inoltre, sempre per $y > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{2}$$

e per $y < 0$ si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(xy - 1)e^{xy} + 1}{y^2};$$

usando il teorema di de l'Höpital si vede immediatamente che anche questo termine tende a $\dfrac{x^2}{2}$.

Dunque le derivate parziali esistono e sono continue, allora la funzione è differenziabile in tutto $\mathbb{R}^2$.

✍ **Esercizio 3.6.2.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$x^{3/2} + (xy)^{3/2}$$

Di nuovo usiamo i teoremi noti. Allora si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{3}{2}(xy)^{1/2}y$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3}{2}(xy)^{1/2}x$$

dunque le derivate parziali esistono in tutti i punti del dominio della funzione e sono ivi continue, allora la funzione è differenziabile in tutti i punti del suo dominio.

✍ **Esercizio 3.6.3.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

La funzione è sicuramente differenziabile in tutti i punti $(x, y) \neq (0, 0)$. Studiamo la differenziabilità in $(0, 0)$ con la definizione. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h}.$$

Allora, bisogna vedere se il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$

esiste e fa 0. Ma se si considera la curva $h = k$ allora si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2\sqrt{2}h^4|h|}$$

e quindi il limite precedente non esiste e la funzione non è dunque differenziabile in $(0, 0)$.

✍ **Esercizio 3.6.4.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \dfrac{x}{y} & y \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & y = 0 \end{cases}$$

La funzione è sicuramente differenziabile nei punti (x, y) con $y \neq 0$. Studiamo prima di tutto l'esistenza delle derivate parziali nei punti $(x, 0)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\arctan \frac{x}{h} - \frac{\pi}{2}}{h}$$

e questo limite non esiste per ogni valore di x reale, basta considerare prima $h \to 0^+$ e poi $h \to 0^-$. Quindi la funzione non può essere differenziabile nei punti $(x, 0)$ con $x \in \mathbb{R}$.

✍ **Esercizio 3.6.5.** *Si verifichi, in base alla definizione, che la funzione*

$$f(x,y) = |x| \log(1+y)$$

è differenziabile in (0,0).

Prima di tutto si ha $f(0, 0) = 0$. Inoltre

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0.$$

Allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|x|\log(1+y)}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|x||y|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2};$$

il teorema dei carabinieri ci permette di concludere che il limite dato esiste e fa zero e dunque f è differenziabile in $(0,0)$. (Quest'ultimo limite si poteva risolvere anche passando a coordinate polari).

✍ **Esercizio 3.6.6.** *Si calcolino le derivate prime e seconde della funzione $f(x,y) = x^y$ e si scriva $d^2 f(1,2)$ (differenziale di ordine 2).*

Si ha

$$f_x(x,y) = yx^{y-1}, \qquad f_y(x,y) = x^y \log x,$$

e inoltre

$$f_{xx}(x,y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{xy}(x,y) = x^{y-1}(1 + y\log x), \quad f_{yy}(x,y) = x^y \log^2 x$$

e in particolare

$$f_{xx}(1,2) = 2, \qquad f_{xy}(1,2) = 1, \qquad f_{yy}(1,2) = 0$$

per cui

$$d^2 f(1,2) = 2dx^2 + dx\,dy.$$

✍ **Esercizio 3.6.7.** *Per la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1+y}} - y\sqrt{1+x}$$

si calcolino il differenziale primo e secondo nell'origine.

soluzione 1. Calcolando le derivate direttamente si ha

$$f_x(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+y}} - \frac{y}{2\sqrt{1+x}} \qquad f_y(x,y) = -\frac{x}{2}(1+y)^{-3/2} - \sqrt{1+x}$$

e inoltre

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{y}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} \;\; f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2}\left[(1+y)^{-\frac{3}{2}} + (1+x)^{-\frac{3}{2}}\right] \;\; f_{yy}(x,y) = \frac{3}{4}(1+y)^{-\frac{5}{2}};$$

a questo punto allora

$$f_x(0,0) = 1 \qquad f_y(0,0) = -1$$

e anche

$$f_{xx}(0,0) = 0 \qquad f_{xy}(0,0) = -1 \qquad f_{yy}(0,0) = 0$$

da cui

$$df(0,0) = dx - dy; \qquad d^2 f(0,0) = -2dxdy.$$

soluzione 2. Poiché $y \to 0$ si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}y + o(y)$$

e per $x \to 0$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

da cui

$$f(x,y) = x - y - xy + xo(y) + yo(x).$$

Si osserva ora che, essendo

$$\frac{|xy|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2} \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

si ha

$$\frac{|xo(y)|}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}\left|\frac{o(y)}{y}\right| \to 0$$

per $(x,y) \to (0,0)$ e dunque $xo(y)$ è infinitesimo di ordine superiore a x^2+y^2. Stesso ragionamento e stessa conclusione valgono per $yo(x)$. Dalla

$$f(x,y) = x - y - xy + xo(y) + yo(x)$$

si ricava dunque subito che

$$df(0,0) = dx - dy; \qquad d^2 f(0,0) = -2dxdy.$$

3.7. Differenziabilità, differenziale e approssimazione: esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.7.1.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$\frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

✍ **Esercizio 3.7.2.** *Dire se la seguente funzione è differenziabile*

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2-y^2}} & x^2+y^2<1 \\ 0 & x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

✍ **Esercizio 3.7.3.** *Si scrivano le formule di Mac Laurin arrestate all'ordine $n=3$ con il resto secondo Peano per le seguenti funzioni:*

a) $f(x,y) = \sin x \sin y$;

b) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$

c) $f(x,y,z) = 2x - yz + z^3 + 3x^4 - y^2z^2$

✍ **Esercizio 3.7.4.** *Delle seguenti funzioni si calcolino il differenziale primo e secondo nel punto indicato:*

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2} \qquad P=(1,0)$;
b) $f(x,y,z) = e^{2x+y} - \cos(3x+z) \qquad P=(0,0,0)$.

✍ **Esercizio 3.7.5.** *Si scrivano i polinomi di Mac Laurin di terzo grado che approssimano le funzioni:*

a) $f(x,y) = x\cos(x+y)$

b) $f(x,y,z) = \sin(2x+y-z)$.

3.8. Derivate direzionali: esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.8.1.** *Data la funzione $f(x,y) = y^4e^{3x}$, si determini per quale versore v, $D_vf(0,-1)$ è massima e per quale è nulla.*

Poiché f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$ (è prodotto di funzioni elementari), il gradiente indica la direzione ed il verso di massima pendenza. Si ha

$$f_x(x,y) = 3y^4e^{3x}, \qquad f_y(x,y) = 4y^3e^{3x}$$

quindi

$$f_x(0,-1) = 3, \qquad f_y(0,-1) = -4$$

e dunque

$$\nabla f(0,-1) = (3,-4), \qquad ||\nabla f(0,-1)|| = 5.$$

La direzione di massima pendenza è quella individuata dal versore $\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. La direzione in cui la derivata direzionale è nulla è ortonale al gradiente. Si può scegliere

$$\mathbf{v}^1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right), \qquad \mathbf{v}^2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).$$

Si può anche verificare il risultato ponendo $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ con $\alpha \in [0, 2\pi)$ e calcolando $D_{\mathbf{v}}f(0,-1)$ e studiandone la variazione in funzione di α. Poiché f è differenziabile, si ha, applicando la formula del gradiente

$$D_{\mathbf{v}}f(0,-1) = D(\alpha) = 3\cos\alpha - 4\sin\alpha.$$

Si verifica facilmente che $D(\alpha) = 0$ per

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \pm\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

e che $D'(\alpha) = 0$ per

$$(\cos\alpha, \sin\alpha) = \pm\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

I versori

$$\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \qquad \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

indicano rispettivamente le direzioni di massima e minima crescita.

✍ **Esercizio 3.8.2.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt[3]{x^2(y-1)} + 1$$

a) si verifichi che non è differenziabile in (0,1)
b) si calcolino tutte le derivate direzionali $D_v f(0,1)$ (v versore di $\mathbb{R}^2$)

a) Si ha $f(0,1) = 1$ e poiché $f(x,1) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0,y) = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ si deduce che

$$f_x(0,1) = f_y(0,1) = 0.$$

Occorre calcolare

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,1+k) - f(0,1) - \langle \nabla f(0,1),(h,k)\rangle}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2 k}}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Questo limite non esiste (in particolare non è zero) basta considerare il limite lungo la curva $h = k$ e si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{\sqrt{2}|h|}$$

e quindi f non è differenziabile in $(0,1)$.

b) Non essendo f differenziabile in $(0,1)$ per calcolare le derivate direzionali in quel punto non è possibile sfruttare la formula del gradiente. Bisogna utilizzare la definizione. Si ha

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\alpha, 1+t\sin\alpha) - f(0,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt[3]{t^2\cos^2\alpha(t\sin\alpha)}}{t} = \sqrt[3]{\cos^2\alpha\sin\alpha}.$$

Si può anche procedere nel seguente modo: porre $g(t) := f(t\cos\alpha, 1+t\sin\alpha)$; in questo modo si verifica facilmente che $D_{\mathbf{v}}(0,1) = g'(0) = \sqrt[3]{\cos^2\alpha\sin\alpha}$.

✍ **Esercizio 3.8.3.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & |y| > x^2 \vee y = 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

si calcoli $D_v f(0,0)$ $\forall v \in \mathbb{R}^2$ *versore e si verifichi che*

$$D_v f(0,0) =< \nabla f(0,0), v > .$$

La funzione è differenziabile in (0,0)?

Poiché $f = 1$ sull'asse x, si ha $f_x(0,0)$. Si osserva poi che, per ogni versore $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ diverso da $(1,0)$ l'intersezione tra l'insieme $\{(x,y) : \ |y| > x^2\}$ e la retta per l'origine di direzione $\mathbf{v}$ è un segmento centrato nell'origine. Poiché su tale segmento $f(x,y)$ ha valore 1 si ha

$$D_{\mathbf{v}} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Perciò $\nabla f(0,0) = 0$ e la formula del gradiente è verificata.
La funzione non è differenziabile nell'origine in quanto non è nemmeno continua in quel punto. Infatti ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 1, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x,x^3) = 0.$$

✍ **Esercizio 3.8.4.** *Si scriva l'equazione del piano tangente al grafico della funzione*

$$f(x,y) = e^{2x-y} + \sqrt{3 + x^2 + 3y^2}$$

nel punto $(1,2,5)$. *Si calcoli poi* $D_{\boldsymbol{v}} f(1,2)$ *essendo* $\boldsymbol{v}$ *il versore che individua la direzione della retta* $y = \sqrt{3}x$ *orientata nel verso delle* x *decrescenti.*

3.9. Derivate direzionali: esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.9.1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \sqrt[5]{y^3(\sin x)^2}.$$

a) Si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(0,0)$ per qualunque direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$);
b) si stabilisca se esiste il piano tangente in $(0,0)$.

✍ **Esercizio 3.9.2.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = x^y - 2y + 2x$$

si determini per quale direzione $\boldsymbol{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ *si ha* $D_{\boldsymbol{v}} f(1,1) = 2$. *Qual è la direzione lungo la quale la funzione cresce di più "vicino" a* $(1,1)$?

✍ **Esercizio 3.9.3.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{x^2}(\alpha x - y^3) \qquad \alpha \in \mathbb{R};$$

si determini α in modo che:

a) la direzione di massima crescita in $(0,1)$ sia lungo la tangente alla parabola $y = (x+1)^2$ nel verso negativo dell'asse x;
b) il piano tangente in $(0,1)$ sia perpendicolare alla retta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = z$.

✍ **Esercizio 3.9.4.** *Calcolare la rapidità di variazione di*

$$f(x,y) = y^4 + 2xy^3 + x^2y^2$$

in $(0,1)$ misurata in ciascuna delle seguenti direzioni:

$$a)\mathbf{i} + 2\mathbf{j} \qquad b)\mathbf{j} - 2\mathbf{i} \qquad c)3\mathbf{i} \qquad d)\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

✍ **Esercizio 3.9.5.** *Calcolare $\nabla f(a,b)$ per la funzione differenziabile $f(x,y)$ conoscendo le sue derivate direzionali*

$$D_{(\mathbf{i}+\mathbf{j})/\sqrt{2}} f(a,b) = 3\sqrt{2} \qquad D_{(3\mathbf{i}-4\mathbf{j})/5} f(a,b) = 5.$$

✍ **Esercizio 3.9.6.** *La temperatura nel punto (x,y) in una regione del piano xy è T (misurata in gradi centigradi), dove*

$$T(x,y) = x^2\, e^{-y}.$$

In quale direzione aumenta più rapidamente la temperatura nel punto $(2,1)$? Con quale rapidità aumenta T in quella direzione?

3.10. Teorema di Schwarz: esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.10.1.** *Si verifichi che per la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

si ha che $f_{xy}(0,0) = 1 \neq f_{yx}(0,0) = 0$. f è di classe $\mathcal{C}^2$?

✍ **Esercizio 3.10.2.** *Si dimostri che non esiste alcuna funzione $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ tale che*

$$f_x(x,y) = x \sin y \qquad\qquad f_y(x,y) = y \cos x$$

✍ **Esercizio 3.10.3.** *Sia data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Verificare che $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Calcolare le derivate seconde miste nell'origine e mostrare che sono diverse.

3.11. Esercizi di ricapitolazione riguardanti relazioni tra continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità

3.11.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 3.11.1.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^{-2} y \arctan(x^2+y^2) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) si stabilisca se è continua in (0,0)
(b) si calcolino le derivate parziali in (0,0).

(a) La funzione non è continua nell'origine. Per vederlo basta considerare la curva $x = y^{3/2}$. Infatti

$$f(y^{3/2}, y) = \frac{y \arctan(y^3+y^2)}{y^3} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot \frac{y^3+y^2}{y^2} = \frac{\arctan(y^3+y^2)}{y^3+y^2} \cdot (1+y) \to 1$$

e dunque non tende a zero che è il valore della funzione nell'origine.

(b) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0.$$

Questo esercizio mostra che una funzione può avere derivate parziali in un punto ma non essere continua in quel punto.

✍ **Esercizio 3.11.2.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = |y| \sin(x^2 + y^2)$$

si stabilisca in quali punti di $\mathbb{R}^2$

a) è continua
b) ammette derivate parziali
c) è differenziabile

(a) f è continua in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ in quanto composizione di funzioni continue.

(b) Se $y > 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\cos(x^2 + y^2)$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sin(x^2 + y^2) + 2y^2\cos(x^2 + y^2).$$

Invece se $y < 0$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2xy\cos(x^2 + y^2)$$

e anche

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin(x^2 + y^2) - 2y^2\cos(x^2 + y^2).$$

Infine se $y = 0$ abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,0) - f(x,0)}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x,h) - f(x,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|\sin(x^2 + h^2)}{h}$$

e quest'ultimo limite vale $\sin x^2$ se $h > 0$ mentre vale $-\sin x^2$ se $h < 0$, pertanto se $x = \pm\sqrt{n\pi}$ si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ esiste e fa 0, altrimenti non esiste.

(c) Analizziamo le derivate parziali. Se $y \neq 0$ le derivate parziali sono chiaramente continue perché composizione di funzioni continue. Dunque f è differenziabile per $y \neq 0$. Se $y = 0$ e $x = \pm\sqrt{n\pi}$ allora le derivate parziali esistono e sono continue, dunque f ancora una volta è differenziabile, mentre se $y = 0$ ma $x \neq \pm\sqrt{n\pi}$ le derivate parziali non esistono come si è visto in precedenza e dunque f non è differenziabile.

✍ **Esercizio 3.11.3.** *Per le funzioni*

$$f(x,y) = \begin{cases} |y|^\alpha \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{z^4(x^2+y^2)^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

si studi al variare del parametro reale α positivo continuità, derivabilità (derivate direzionali), differenziabilità nell'origine.

a) Proviamo a calcolare con le coordinate polari

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|y|^\alpha \cos x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-1}|\sin\theta|^\alpha \cos(\rho\cos\theta);$$

dunque se $\alpha > 1$ questo limite esiste e fa 0; per $\alpha \leq 1$ vogliamo far vedere che il limite dato non esiste. Questo è facilmente verificabile visto che se $y \equiv 0$ il limite è identicamente zero, mentre lungo la bisettrice del primo e terzo quadrante il limite vale 1/2 per $\alpha = 1$ e $+\infty$ per $\alpha < 1$. Dunque la funzione data è continua solo se $\alpha > 1$.
Per la derivabilità si ottiene, ponendo $\mathbf{v} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t\cos\varphi, t\sin\varphi) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|^{\alpha-1}|\sin\varphi|^\alpha \cos(t\cos\varphi)}{t} = \begin{cases} \text{non esiste} & 0 < \alpha < 2 \\ \text{non esiste} & \alpha = 2 \\ 0 & \alpha > 2 \end{cases}$$

(più precisamente, se $0 < \alpha < 2$ il limite fa $\pm\infty$ a seconda che t tenda a $0^\pm$, mentre se $\alpha = 2$ il limite non esiste perché dipende dal versore φ).
Si conclude che le derivate direzionali esistono e sono nulle per ogni $\alpha > 2$. Se $\alpha \leq 2$ nessuna derivata direzionale esiste e pertanto, in questo caso, f non è differenziabile.
Se invece $\alpha > 2$, si calcola

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha-2}|\sin\theta|^\alpha \cos(\rho\cos\theta) = 0.$$

Si conclude che f è differenziabile per $\alpha > 2$.

b) Essendo

$$f(x,0,0)=0 \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}, \qquad f(0,y,0)=0 \qquad \forall\, y\in\mathbb{R}, \qquad f(0,0,z)=0 \qquad \forall\, z\in\mathbb{R},$$

si conclude che

$$f_x(0,0,0)=f_y(0,0,0)=f_z(0,0,0)=0$$

ovvero che $\nabla f(0,0,0)=(0,0,0)$. Posto poi $\mathbf{h}=(h_1,h_2,h_3)$ si ottiene

$$\lim_{\mathbf{h}\to(0,0,0)} \frac{f(\mathbf{h})-f(0,0,0)-\langle \nabla f(0,0,0),\mathbf{h}\rangle}{||\mathbf{h}||} = \lim_{\mathbf{h}\to(0,0,0)} \frac{h_3^4(h_1^2+h_2^2)^\alpha}{\sqrt{(h_1^2+h_2^2+h_3^2)^3}}.$$

Questo limite si calcola facilmente utilizzando le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$: si pone

$$h_1=\rho\sin\psi\cos\theta, \quad h_2=\rho\sin\psi\sin\theta, \quad h_3=\rho\cos\psi$$

e si ottiene

$$\lim_{\mathbf{h}\to(0,0,0)} \frac{f(\mathbf{h})-f(0,0,0)-\langle \nabla f(0,0,0),\mathbf{h}\rangle}{||\mathbf{h}||} = \lim_{\rho\to 0}\rho^{2\alpha+1}(\cos\psi)^4(\sin\psi)^{2\alpha}=0 \qquad \forall\,\alpha>0$$

visto che $\rho^{2\alpha+1}\to 0$ e $|(\cos\psi)^4(\sin\psi)^{2\alpha}|\le 1$. In conclusione f è differenziabile in $(0,0,0)$ per ogni $\alpha>0$; in particolare f è continua e derivabile lungo ogni direzione con tutte le derivate direzionali nulle in $(0,0,0)$.

✍ **Esercizio 3.11.4.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

è continua e dotata di derivate parziali $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ ma non è differenziabile in (0,0).

Di sicuro la funzione è continua per $(x,y)\neq(0,0)$. Invece, per quanto riguarda la continuità nell'origine osserviamo che

$$0\le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right| = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|y|(x^2y^2)}{x^4+y^4} \le \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{2}|y|=0;$$

dunque

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}=0$$

dal teorema dei due carabinieri e pertanto la funzione è continua anche nell'origine. D'altra parte, per $(x,y)\neq(0,0)$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^3(x^4+y^4)-4x^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2}=\frac{2xy^7-2x^5y^3}{(x^4+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3y^2x^2(x^4+y^4) - 4y^3x^2y^3}{(x^4+y^4)^2} = \frac{3x^6y^2 - y^6x^2}{(x^4+y^4)^2}$$

mentre nell'origine si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Allora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k^3}{(h^4+k^4)\sqrt{h^2+k^2}}$$

e questo limite non esiste, basta considerare il limite lungo la curva $h = k$: in questo caso si ottiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^5}{2\sqrt{2}h^4|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{h}{|h|}$$

e dunque se $h > 0$ si ottiene $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ mentre se $h < 0$ si ottiene $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

✍ **Esercizio 3.11.5.** *Si consideri la seguente funzione* $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$*:*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + 3|x|xy + y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

i) f è continua in $(0,0)$?
ii) Esistono le derivate parziali di f in $(0,0)$? In caso affermativo calcolarle.
iii) Esiste la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione della bisettrice del primo quadrante? In caso affermativo calcolarla.

(i) Conviene passare a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + 3\,|x|\,x\,y + y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\,\cos^3\theta + 3\,\rho^3\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta + \,\rho^4\,\sin^4\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta \,+\, \rho^2\,\sin^4\theta].\end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho\,\cos^3\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\cos^3\theta| \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |3\,\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| = \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho\,||\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta| \le \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho^2\,\sin^4\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta \le \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0.$$

Dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta = 0$$

da cui anche

$$\lim_{\rho\to 0}[\rho\cos^3\theta + 3\rho\,|\cos\theta|\,\cos\theta\,\sin\theta \,+\, \rho^2\,\sin^4\theta] = 0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$.

(ii) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^3}{h^2}\,\frac{1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^4}{h^2}\,\frac{1}{h} = 0.$$

(iii) La direzione della bisettrice del primo quadrante coincide con la direzione individuata dal versore

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

quindi

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t\,v_1, t\,v_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,t^2\,|t|\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + t^4\,\frac{1}{4}}{t^2}\,\frac{1}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}} + 3\,\frac{|t|}{t}\,\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{t}{4}\right] \end{aligned}$$

e questo ultimo limite non esiste in quanto vale $\sqrt{2}$ per $t \to 0^+$ mentre vale $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ per $t \to 0^-$.

✍ **Esercizio 3.11.6.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin y & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si stabilisca per quali valori del parametro reale α

a) f è continua

b) f è dotata di derivate parziali

c) f è differenziabile nell'origine

(a) Di sicuro la funzione è continua per $x \neq 0$; vediamo come si comporta nell'origine al variare del parametro α. Per $\alpha \geq 0$ si ha

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^\alpha|\sin y| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|^\alpha |y| = 0$$

dunque dal teorema dei carabinieri il limite esiste e fa zero; questo ci dice che f è continua anche nell'origine.

Sia ora $\alpha < 0$; allora ponendo $\beta := -\alpha$ si ottiene

$$f(x,y) = \frac{\sin y}{|x|^{\beta}}.$$

Dimostriamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin y}{|x|^{\beta}}$$

non esiste. A tale scopo prendiamo il limite lungo la curva $x = y^{\frac{1}{\beta}}$.

✍ **Esercizio 3.11.7.** *Data la funzione*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{yz^2}{x^2+y^2+z^2}\cos\dfrac{x}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

si stabilisca se è continua e differenziabile nell'origine.

La funzione data è continua nell'origine, infatti

$$\begin{aligned} 0 \ &\leq \ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left| \frac{yz^2}{x^2+y^2+z^2}\cos\frac{x}{z} \right| \leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|z||yz|}{x^2+y^2+z^2} \\ &\leq \ \frac{1}{2}\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |z| \cdot \frac{y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} |z| = 0. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h,0)-f(0,0,0)}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0,h)-f(0,0,0)}{h} = 0 \end{aligned}$$

da cui

$$\lim_{(h,k,j)\to(0,0,0)} \frac{kj^2}{h^2+k^2+j^2} \cdot \cos\frac{h}{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2+j^2}}$$

e questo limite non esiste, ad esempio basta prendere $k = h = j$ che ci porta a

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^3}{3h^2} \cdot \cos 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3h^2}}}$$

e questo vale $\dfrac{\cos 1}{3\sqrt{3}}$ per $k \to 0^+$ mentre vale $-\dfrac{\cos 1}{3\sqrt{3}}$ per $k \to 0^-$, dunque f non è differenziabile nell'origine.

✍ **Esercizio 3.11.8.** *Si consideri la seguente funzione di* $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3xy^2+y^4}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dire se
i) f *è continua in* $(0,0)$;
ii) *esistono le derivate parziali di* f *in* $(0,0)$ *ed eventualmente calcolarle;*
iii) f *è differenziabile in* $(0,0)$.

(i) Conviene passare a coordinate polari. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3\,x\,y^2+y^4}{x^2+y^2} &= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\,\cos^3\theta + 3\,\rho^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta + \,\rho^4\,\sin^4\theta}{\rho^2} \\ &= \lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta\, +\, \rho^2\,\sin^4\theta].\end{aligned}$$

Osserviamo innanzitutto che

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho\,\cos^3\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho\,|\cos^3\theta| \le \lim_{\rho\to 0} \rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta| = \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho\,|\cos\theta\,\sin^2\theta| \le \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho = 0$$

$$0 \le \lim_{\rho\to 0} |\rho^2\,\sin^4\theta| = \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta \le \lim_{\rho\to 0} \rho^2 = 0.$$

Dal teorema dei carabinieri e dal fatto che $f \to 0 \Leftrightarrow |f| \to 0$ si ottiene facilmente che

$$\lim_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} 3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta = 0 \qquad \lim_{\rho\to 0} \rho^2\,\sin^4\theta = 0$$

da cui anche

$$\lim_{\rho\to 0} [\rho\,\cos^3\theta + 3\,\rho\,\cos\theta\,\sin^2\theta\, +\, \rho^2\,\sin^4\theta] = 0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$.

(ii) Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3}{h^2}\,\frac{1}{h} = 1$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2}\,\frac{1}{h} = 0.$$

(iii) Per vedere se f è differenziabile in $(0,0)$ occorre vedere se esiste e fa zero il seguente limite

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\, f_x(0,0) - k\, f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - h\, f_x(0,0) - k\, f_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3+3hk^2+k^4}{h^2+k^2} - 0 - h - 0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3+3hk^2+k^4-h^3-hk^2}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2hk^2+k^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Dimostriamo che questo limite non esiste. Per fare questo è sufficiente trovare due curve passanti per l'origine lungo le quali la funzione

$$g(h,k) = \frac{2hk^2+k^4}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

assuma valori diversi. Prendiamo ad esempio $h = k$. Si ha

$$g(h,h) = \frac{2h^3+h^4}{2h^2\sqrt{2}\,|h|} = \frac{2h+h^2}{2\sqrt{2}\,|h|}.$$

Quindi se $h \to 0^+$ allora $g(h,h) \to 1/\sqrt{2}$, se invece $h \to 0^-$ allora $g(h,h) \to -1/\sqrt{2}$ e questo basta a concludere che f non è differenziabile nell'origine.

3.11.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 3.11.9.** *Mostrare che la seguente funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

non è continua nell'origine ma ammette entrambe le derivate parziali in $(0,0)$.

✍ **Esercizio 3.11.10.** *Data la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}e^{-y^2/x^4} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

si verifichi che in (0,0)
a) f è continua
b) f è derivabile lungo ogni direzione
c) vale la formula

$$D_v f(0,0) =< \nabla f(0,0), v > \qquad \forall v \in \mathbb{R}^n \qquad ||v|| = 1$$

d) f non è differenziabile

✍ **Esercizio 3.11.11.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x,y,z) = \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)\sin(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

è differenziabile pur avendo le derivate parziali discontinue in (0,0,0).

✍ **Esercizio 3.11.12.** *Dire se la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

è continua e/o differenziabile in $(0,0,0)$.

CAPITOLO 4

Esercizi riguardanti funzioni definite implicitamente e applicazioni del teorema del Dini

4.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 4.1.1.** *Verificare che l'equazione*

$$2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x = 0$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ *in un intorno di* $(1, 0, 0)$. *Scrivere poi l'equazione del piano tangente in* $(1, 0, 0)$ *alla superficie di equazione* $z - g(x, y) = 0$.

L'idea è quella di applicare il teorema del Dini. Verifichiamo che questo teorema è applicabile nell'intorno del punto $P = (1, 0, 0)$. Si ha $f(x, y, z) := 2x^3 + y^4 + z^3 - xz - 2x$. Abbiamo $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$, $f(1, 0, 0) = 0$ e $f_z(x, y, z) = 3z^2 - x$ da cui $f_z(1, 0, 0) = -1 \neq 0$. Dunque dal teorema del Dini ho che esiste un intorno I del punto $(1, 0)$ e una funzione $g : I \to \mathbb{R}$ tale che $f(x, y, g(x, y)) = 0$ per ogni $(x, y) \in I$. Si ha inoltre $g(1, 0) = 0$ e che

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = 4 \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(1,0) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0,0)}{\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,0,0)} = 0.$$

L'equazione del piano tangente è

$$z = g(1,0) + \frac{\partial g}{\partial x}(1,0)\,(x-1) + \frac{\partial g}{\partial y}(1,0)\,(y-0)$$

cioè $z = 4(x-1)$.

✍ **Esercizio 4.1.2.** *Si discuta la possibilità di definire la funzione $y = h(x)$ implicitamente mediante la equazione $x \cos y = y^2$. Si calcoli $h'(x)$ (in termini di $x, h(x)$).*

Poniamo innanzitutto $f(x,y) := x\,\cos y - y^2$. In quali punti tale equazione definisce implicitamente una funzione $y = h(x)$ della sola variabile x? L'idea è quella di applicare il teorema del Dini. Occorre innanzitutto che f sia di classe $\mathcal{C}^1$ e questo è vero. Poi occorre che i punti in cui $f(x,y) = 0$ non soddisfino l'equazione $f_y(x,y) = -x\,\sin y - 2\,y = 0$ cioè è possibile applicare il teorema del Dini solo nell'intorno dei punti che non soddisfano il sistema

$$\begin{cases} x\,\cos y - y^2 = 0 \\ -x\,\sin y - 2\,y = 0. \end{cases}$$

La discussione richiesta dal testo dell'esercizio potrebbe fermarsi qui e a questo punto si può direttamente passare a ricavare $h'(x)$ in base al teorema del Dini. Per completezza riportiamo invece la soluzione del precedente sistema.
Se $\cos y = 0$ allora dalla prima equazione si legge $y = 0$ assurdo, dunque di sicuro $\cos y \neq 0$ e allora posso ricavare dalla prima equazione x in funzione di y e sostituire il risultato nella seconda equazione. Si ha

$$\begin{cases} x = \dfrac{y^2}{\cos y} \\ -y\,[y\,\tan y - 2] = 0. \end{cases}$$

La seconda equazione ci dà $y = 0$ oppure $y\,\tan y = 2$. La prima condizione fornisce il punto $(0,0)$; nell'intorno di questo punto dunque l'equazione $f(x,y) = 0$ non descrive implicitamente alcuna funzione $h(x)$. Studiamo l'altra condizione.
Trovare gli y che soddisfano $y\,\tan y = 2$ equivale a trovare gli zeri della funzione $j(y) := y\,\tan y - 2$. Studiamo brevemente tale funzione. Essa è pari, quindi posso studiarla solo per $y \geq 0$, ammette infiniti asintoti verticali per $y = \pi/2 + k\pi$ al variare di $k \in \mathbb{Z}$. Inoltre

$$j'(y) = \tan y + \frac{y}{\cos^2 y} = \frac{\sin y\,\cos y + y}{\cos^2 y}.$$

Si nota che se $x \leq \pi/2$ allora $\sin y\,\cos y \geq 0$ mentre per $y > \pi/2$ allora $j'(y) > \pi/2 - 1$ dunque si ha che $j'(y) > 0$ per ogni y, cioè la funzione j è sempre crescente. Vediamo se ci sono flessi con lo studio della derivata seconda. Si ha

$$
\begin{aligned}
j''(y) =& \frac{[1+\cos^2 y - \sin^2 y]\ \cos^2 y + 2\ \cos y\ \sin y\,(x + \sin y\ \cos y)}{\cos^4 y} \\
=& \frac{\cos^2 y + \cos^4 y - \sin^2 y\ \cos^2 y + 2\,x\ \cos y\ \sin y + 2\ \cos^2 y\ \sin^2 y}{\cos^4 y} \\
=& \frac{2\,y\ \cos y\ \sin y + \cos^2 y\ \sin^2 y + \cos^4 y + \cos^2 y}{\cos^4 y} \\
=& \frac{2\,y\ \cos y\ \sin y + \cos^2 y\,[\sin^2 y + \cos^2 y] + \cos^2 y}{\cos^4 y} \\
=& \frac{\cos y\,[2\ \cos y + 2\,y\ \sin y]}{\cos^4 y} = 0 \Leftrightarrow \cos y + y\ \sin y = 0
\end{aligned}
$$

quindi ci sono infiniti flessi. Il grafico approssimativo è dato in figura.

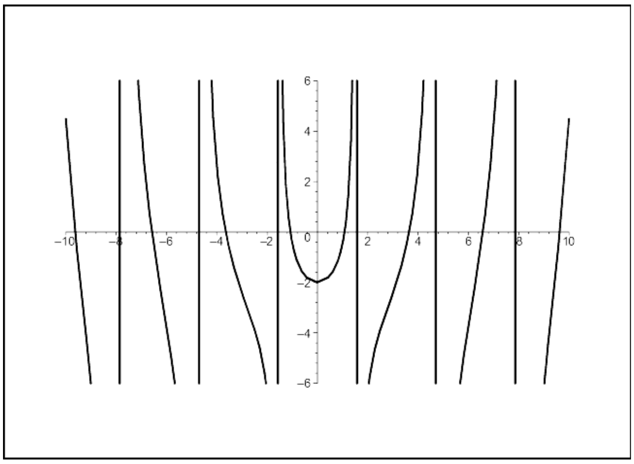

Figura 4.1: Grafico della funzione j.

Quindi abbiamo infiniti zeri, che corrispondono a infiniti valori di y; questi a loro volta inseriti nella prima equazione ci danno infiniti punti che soddisfano il precedente sistema. Nell'intorno di questi punti non si può applicare il teorema del Dini nel senso che l'equazione $f(x, y) = 0$ non descrive implicitamente alcuna funzione $h(x)$.

Adesso, in base al teorema dei Dini, per ogni punto (x, y) per cui è possibile, si ha

$$
h'(x) = -\frac{f_x(x, h(x))}{f_y(x, h(x))} = -\frac{\cos h(x)}{-x\ \sin h(x) - 2\,h(x)} = \frac{\cos h(x)}{x\ \sin h(x) + 2\,h(x)}.
$$

Questo conclude l'esercizio.

✍ **Esercizio 4.1.3.** *Per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\ \log(\sin y) + (y-1)\ \tan(x^2) = 0$$

permette di rappresentare y come funzione di x, ovvero $y = y(x)$, in un intorno del punto $(1,1)$. Si calcoli $y'(1)$.

Verifico che effettivamente si possa applicare il teorema del Dini. Poniamo

$$f(x,y) = (x-1)\ \log(\sin y) + (y-1)\ \tan(x^2);$$

si ha che f è di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di $(1,1)$. Poi si ha $f(1,1) = 0$ e infine

$$f_y(x,y) = (x-1)\,\frac{\cos y}{\sin y} + \tan(x^2)$$

da cui $f_y(1,1) = \tan 1 \neq 0$.
Allora il teorema del Dini ci assicura che esiste un intorno I di $x = 1$ ed esiste $y = y(x)$ definita su I a valori reali tale che $f(x, y(x)) = 0$. Si ha inoltre

$$y'(x) = -\frac{f_x(x,y(x))}{f_y(x,y(x))} \qquad \forall\, x \in I$$

da cui

$$f_x(x,y) = \log(\sin y) + (y-1)\,(1+\tan^2(x^2))\,2\,x$$

e quindi

$$y'(1) = -\frac{\log(\sin 1)}{\tan 1}.$$

✍ **Esercizio 4.1.4.** *Sia $F(x,y) := xe^y - ye^x$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e la funzione G sia definita implicitamente dall'equazione $F(x,G(x)) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Si rappresenti $G'(x)$ mediante il teorema di Dini. Posto poi $H(u) := (\sin u)^2$ per ogni $u \in \mathbb{R}$, si calcoli $\dfrac{d}{du}[G(H(u))]$.*

L'esercizio dato è piuttosto semplice se ci si limita a rappresentare $G'(x)$ mediante il teorema del Dini senza preoccuparsi di verificare se effettivamente il teorema del Dini possa essere applicato. Poiché il testo è ambiguo, l'esercizio può essere risolto limitandosi a questa prima parte.

Si pone innanzitutto $\tilde{F}(x,y) = F(x,y) - 1 = x\,e^y - y\,e^x - 1$. Allora G è definita implicitamente dall'equazione $\tilde{F}(x, G(x)) = 0$ e quindi il teorema del Dini si applica a $\tilde{F}$ e non a F. Si ha poi

$$G'(x) = -\frac{\tilde{F}_x(x, G(x))}{\tilde{F}_y(x, G(x))}$$

da cui

$$\tilde{F}_x(x,y) = e^y - y\,e^x \qquad \tilde{F}_x(x, G(x)) = e^{G(x)} - G(x)\,e^x$$

e

$$\tilde{F}_y(x,y) = x\,e^y - e^x \qquad \tilde{F}_y(x, G(x)) = x\,e^{G(x)} - e^x.$$

Quindi

$$G'(x) = -\frac{e^{G(x)} - G(x)\,e^x}{x\,e^{G(x)} - e^x}.$$

D'altra parte, per la regola di derivazione delle funzioni composte, si ha

$$\frac{d}{du}(G(H(u))) = G'(H(u)) \cdot H'(u)$$

ma $H'(u) = 2\,\sin u\,\cos u$ dunque

$$\frac{d}{du} G(H(u)) = -\frac{e^{G(H(u))} - G(H(u))\,e^{H(u)}}{H(u)\,e^{G(H(u))} - e^{H(u)}}\,H'(u) = -\frac{e^{G(\sin^2 u)} - G(\sin^2 u)\,e^{\sin^2 u}}{\sin^2 u\,e^{G(\sin^2 u)} - e^{\sin^2 u}}\,(\sin(2u)).$$

Qui termina la prima parte dell'esercizio. La parte complicata sembra essere quella di verificare che il teorema del Dini può essere applicato in tutti i punti tali che $\tilde{F}(x,y) = 0$.
Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tilde{F}(x,y) = 0\}$. Si dovrebbe dimostrare che:
$\tilde{F} \in \mathcal{C}^1(A)$ e questo è vero perché $\tilde{F} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ e che $\tilde{F}_y(x,y) \neq 0$ per ogni $(x,y) \in A$ e quest'ultima richiesta è la più difficile da verificare. Infatti si dovrebbe far vedere che il sistema

$$\begin{cases} x\,e^y - y\,e^x - 1 = 0 \\ x\,e^y - e^x = 0 \end{cases}$$

non ha soluzioni. Proviamo a risolverlo.
Sostituendo la seconda equazione nella prima si ha

$$e^x(1-y) - 1 = 0. \tag{4.1.1}$$

Dovremmo far vedere che non esiste nessun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tale che (4.1.1) sia verificata.
Se $y \geq 1$, allora non c'è nessuna x tale che (x,y) soddisfi (4.1.1). Infatti se $y \geq 1$ allora $1 - y \leq 0$ e allora $e^x(1-y) \leq 0$ da cui $e^x(1-y) - 1 < 0$.
Rimane da studiare il caso $y < 1$. Si può esplicitare x in funzione di y nella (4.1.1), quindi si ha

$$x = \log\left(\frac{1}{1-y}\right)$$

da cui sostituendo nella prima equazione del nostro sistema si ottiene

$$\log\left(\frac{1}{1-y}\right)e^y - \frac{1}{1-y} = 0. \tag{4.1.2}$$

Dobbiamo mostrare che nessun $y < 1$ soddisfa la precedente equazione. Se $y < 0$ allora

$$\log\left(\frac{1}{1-y}\right)e^y - \frac{1}{1-y} < 0$$

mentre nel caso $0 < y < 1$ si ha $e^y < e$ da cui

$$\log\left(\frac{1}{1-y}\right)e^y - \frac{1}{1-y} < \log\left(\frac{1}{1-y}\right)e - \frac{1}{1-y}$$

quest'ultima funzione è sempre negativa e si annulla in un solo punto (per vedere ciò basta studiare la funzione $g(z) := e\log z - z$); siccome nella precedente disuguaglianza c'è il minore stretto, allora questo basta a concludere che è effettivamente possibile applicare il teorema del Dini alla nostra funzione $\tilde{F}$.

✍ **Esercizio 4.1.5.** *Si consideri l'equazione*

$$\frac{x^2}{2} + xy - \log\left(1 + x^2 + y^2\right) + y = 0.$$

Provare che $(0,0)$ *soddisfa l'equazione e che esiste una funzione* $\varphi : I \to J$, *con* I *e* J *intorni di zero, tale che* $\varphi(0) = 0$ *e* $\frac{x^2}{2} + x\varphi(x) - \log\left(1 + x^2 + \varphi^2(x)\right) + \varphi(x) = 0$ *per ogni* $x \in I$.

Per verificare che $(0,0)$ soddisfa l'equazione basta sostituire il punto in essa.
Posto

$$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy - \log\left(1 + x^2 + y^2\right) + y$$

l'equazione data è, ovviamente, $f(x,y) = 0$. Tale f è di classe C^∞ su $\mathbb{R}^2$.
Verifichiamo le ipotesi del teorema di Dini:

$$\begin{aligned}
&f(0,0) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + y - \frac{2x}{1+x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{2y}{1+x^2+y^2} + 1 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1.
\end{aligned}$$

Le ipotesi sono verificate, dunque posso esplicitare y in funzione di x in un intorno di $x_0 = 0$. La funzione implicita $\varphi : I \to J$ è quella richiesta (ovvero quella che verifica le richieste fatte). Per quanto riguarda l'andamento di φ, osserviamo che

$$\varphi'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} = 0.$$

Inoltre, dalla formula

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$$

si ha

$$\varphi''(x) = -\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right)\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,\varphi(x))\right)}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\right)^2}.$$

Quindi

$$\varphi''(0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Essendo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 1 - \frac{2\left(1+x^2+y^2\right) - 4x^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1,$$

abbiamo che $\varphi''(0) = -(-1) = 1 > 0$, quindi 0 è un punto di minimo per φ.

4.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 4.2.1.** *Utilizzando il teorema di Dini mostrare che, nei casi sotto riportati, l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente una funzione derivabile $y = \varphi(x)$ in un intorno di x_0 tale che $\varphi(x_0) = y_0$. Calcolare poi $\varphi'(x_0)$.*

(a) $f(x,y) = x + 2y + x\sin y, \quad (x_0,y_0) = (0,0)$;
(b) $f(x,y) = xe^y + y + 2, \quad (x_0,y_0) = (0,-2)$;
(c) $f(x,y) = xy + \log(xy) - 1, \quad (x_0,y_0) = (1,1)$;
(d) $f(x,y) = y^5 + \log\left(\frac{x+y}{2}\right) - xy, \quad (x_0,y_0) = (1,1)$.

✍ **Esercizio 4.2.2.** *Applicare il teorema di Dini all'equazione $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 2y = 0$ e discutere nell'intorno di quali punti essa definisce una funzione implicita rispetto all'una o all'altra variabile.*

✍ **Esercizio 4.2.3.** *Data la funzione* $y = y(x)$ *definita implicitamente da*

$$x^2y^2 + y^3 + x + y = 0,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x}{x^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.4.** *Verificare che l'equazione*

$$y \log\left(\frac{x}{y}\right) + y^2 - x = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $(1, 1)$*. Calcolare*

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) - 1}{(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.5.** *Verificare che l'equazione*

$$x^3 + y^3 - 3x + y = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$*. Studiarne il grafico*

✍ **Esercizio 4.2.6.** *Verificare che l'equazione*

$$x^2 + y - e^{x^2-y} = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$*. Determinare gli eventuali punti stazionari e la loro natura.*

✍ **Esercizio 4.2.7.** *Verificare che l'equazione*

$$y^3 + y^2 + x^2 + x + y = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$. *Tracciare un grafico approssimativo di* $y = y(x)$ *nell'intervallo* $[-2, 1]$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x}{x^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.8.** *Verificare che l'equazione*

$$2x + \int_x^y e^{-(t-x)^2}\, dt = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $x = 0$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x + x^2}{\cos x - 1}.$$

✍ **Esercizio 4.2.9.** *Verificare che l'equazione*

$$x\cos(xy) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{2y(x) - \pi(2 - x)}{(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.10.** *Si provi che l'equazione*

$$e^{x+y+\cos(x+y)} + e^{x+y+\sin(x+y)} - e = 1$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$ *e la si determini.*

✍ **Esercizio 4.2.11.** *Verificare che l'equazione*

$$xy^2 + z^3 - xy + 2z = 0$$

definisce implicitamente una funzione $z = g(x, y)$ *su tutto* $\mathbb{R}^2$. *Determinare i punti singolari e la loro natura.*

✍ **Esercizio 4.2.12.** *Data la funzione* $y = y(x)$ *definita implicitamente da*

$$x^2 + x(y^2 - 1) + y(y^2 + 1) = 0$$

calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) + x - 1}{(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.13.** *Verificato che l'equazione*

$$x^2 + x(y^2 - 1) + y(y^2 + 1) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $x = 0$, *calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) - x}{x^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.14.** *Verificato che l'equazione*

$$x^3 + y^3 + x^2 - xy + x + y = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $x = 0$, *calcolare*

$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x) + x}{x^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.15.** *Verificare che l'equazione*

$$(x+y)^3 - x + y = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$. *Tracciarne il grafico.*

✍ **Esercizio 4.2.16.** *Verificare che l'equazione*

$$x^2 - y - e^{x^2+y} = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$. *Determinare gli eventuali punti stazionari e la loro natura.*

✍ **Esercizio 4.2.17.** *Verificare che l'equazione*

$$x \sin(xy) = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *in un intorno di* $(1, 0)$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x)}{(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.18.** *Verificare che l'equazione*

$$(x+y)^3 - 3(x-y) + 2 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ *su tutto* $\mathbb{R}$. *Determinare gli eventuali punti stazionari e la loro natura.*

✍ **Esercizio 4.2.19.** *Si discuta la possibilita' di definire la funzione* $y = h(x)$ *implicitamente mediante la equazione* $x \sin y = y^2$. *Si calcoli* $h'(x)$ *(in termini di* $x, h(x)$*).*

✍ **Esercizio 4.2.20.** *Sia*

$$f(x,y) = x - y - e^{x+y} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Si provi che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ su tutto $\mathbb{R}$.
2) Si determini l'unico punto critico della funzione $y = y(x)$ e la sua natura.

✍ **Esercizio 4.2.21.** *Dato il campo scalare*

$$f(x,y) = \log x \log y - 1 \qquad (x,y) \in (1,+\infty) \times (1,+\infty),$$

si provi che l'equazione $f(x,y) = 0$ definisce implicitamente un'unica funzione $y = y(x)$ per ogni $x \in (1,+\infty)$. Si calcoli inoltre

$$\lim_{x \to e} \frac{y(x) - x}{4(x-e)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.22.** *Verificare che l'equazione*

$$f(x,y) = x - 1 + \int_x^y e^{-(x+y-t)^2}\, dt = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ in un intorno di $x = 1$. Calcolare

$$\lim_{x \to 1} \frac{y(x) - x(1-e) - e}{e(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.23.** *Si provi che l'equazione*

$$f(x,y,z) = x + y + \int_x^z e^{-(t-x)^2}\, dt + \int_y^z e^{(t-y)^2}\, dt + 2 = 0$$

definisce implicitamente una funzione $z = z(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Se ne determinino i punti critici e si scriva l'equazione del piano tangente a $z = z(x,y)$ in tali punti.

✍ **Esercizio 4.2.24.** *Verificare che l'equazione*

$$\int_{x^2+2y}^{0} e^{-t^2}\,dt = 0$$

definisce implicitamente una funzione $y = y(x)$ su tutto $\mathbb{R}$. Calcolare

$$\lim_{x\to 1} \frac{y(x) + x^2 - x + \frac{1}{2}}{(x-1)^2}.$$

✍ **Esercizio 4.2.25.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 0$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ in un intorno di $(0, 1, 0)$. Scrivere poi l'equazione del piano tangente in $(0, 1, 0)$ alla superficie di equazione $z - g(x, y) = 0$.

➾ **R.** $z = 4(y-1)$.

✍ **Esercizio 4.2.26.** *Verificare che l'equazione*

$$x^4 + 2y^3 + z^3 - yz - 2y = 1$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ in un intorno di $(0, 0, 1)$. Scrivere poi l'equazione del piano tangente in $(0, 0, 1)$ alla superficie di equazione $z - g(x, y) = 0$.

➾ **R.** $z = 1 + \dfrac{1}{3}\,y$.

✍ **Esercizio 4.2.27.** *Verificare che l'equazione*

$$-2x^2 + 2y^3 + z^3 - yx - 2y = 1$$

definisce implicitamente $z = g(x, y)$ in un intorno di $(0, 0, 1)$. Scrivere poi l'equazione del piano tangente in $(0, 0, 1)$ alla superficie di equazione $z - g(x, y) = 0$.

➾ **R.** $z = 1 + \dfrac{2}{3}\,y$.

✍ **Esercizio 4.2.28.** *Per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\,\log(\cos y) + (y-1)\,e^{(x^2)} = 0$$

permette di rappresentare y *come funzione di* x*, ovvero* $y = y(x)$*, in un intorno del punto* $(1,1)$*. Si calcoli* $y'(1)$*.*

➻ **R.**

$$y'(1) = -\frac{\log(\cos 1)}{e^1}.$$

✍ **Esercizio 4.2.29.** *Per il teorema del Dini, l'equazione*

$$(x-1)\,\sin(\sin y) + (y-1)\,\sin\left(x^2\right) = 0$$

permette di rappresentare y *come funzione di* x*, ovvero* $y = y(x)$*, in un intorno del punto* $(1,1)$*. Si calcoli* $y'(1)$*.*

➻ **R.**

$$y'(1) = -\frac{\sin(\sin 1)}{\sin 1}.$$

✍ **Esercizio 4.2.30.** *Sia* $f(u,v) := ue^v - ve^u - 1$ *per ogni* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$*, e la funzione* g *sia definita implicitamente dall'equazioni* $f(u,g(u)) = 0$ *per ogni* $u \in \mathbb{R}$*. Si rappresenti* $g'(u)$ *mediante il teorema di Dini. Posto poi* $h(z) := \dfrac{1}{(z^3+1)}$ *per ogni* $z \in \mathbb{R}$*, si calcoli* $\dfrac{d}{dz}[g(h(z))]$*.*

➻ **R.**

$$\frac{d}{dz} g(h(z)) = -\frac{e^{g(h(z))} - g(h(z))\,e^{h(z)}}{h(z)\,e^{g(h(z))} - e^{h(z)}}\,h'(z) = -\frac{e^{g\left(\frac{1}{z^3+1}\right)} - g\left(\frac{1}{z^3+1}\right)\,e^{\frac{1}{z^3+1}}}{\frac{1}{z^3+1}\,e^{g\left(\frac{1}{z^3+1}\right)} - e^{\frac{1}{z^3+1}}}\,\left(-\frac{3\,z^2}{(z^3+1)^2}\right).$$

CAPITOLO 5

Esercizi riguardanti ottimizzazione libera e vincolata

5.1. Ottimizzazione libera

5.1.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 5.1.1.** *Studiare, al variare di k, le forme quadratiche*

$$(a) q_1(x, y) = k^2x^2 + (k + 1)y^2 + 12xy,$$
$$(b) q_2(x, y, z) = -x^2 + y^2 + 2z^2 + 2kxz + 2yz$$

R. Hint: (a) Mi metto nel caso $k \neq 0$, dunque $a = k^2 > 0 \forall k$. Abbiamo $\det A = (k - 3)(k^2 + 4k + 12)$. Quindi per $k > 3$ ho $\det A > 0$, mentre per $k < 3$ ho $\det A < 0$. Di conseguenza:
a) $k > 3$: definita positiva
b) $k < 3$: indefinita
c) $k = 3$: $\det A = 0$, $a > 0$, quindi semidefinita positiva
d) $k = 0$: La matrice è (per righe) $(0, 6), (6, 1)$, dunque $c = 1 > 0$ e $\det A = -36 < 0$, quindi indefinita (vedi anche sopra).
La f.q. non è mai definita negativa.
(b) $\det A = -1 - k^2 < 0$ per ogni k. quindi la forma quadratica è sempre indefinita.

✍ **Esercizio 5.1.2.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2.$$

Siccome la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, gli eventuali punti di estremo libero di f devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y)2 = 4x^3 - 4x + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 4(x-y)$$

dunque per trovare i punti critici devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 4(x-y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) = 0. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le due equazioni si ottiene $x^3 + y^3 = 0$ che ci dà $x = -y$. Sostituendo quanto trovato nella seconda equazione si ottiene facilmente

$$4y^3 - 8y = 0 \;\Leftrightarrow\; y[y^2-2] = 0 \;\Leftrightarrow\; y = 0 \vee y = \pm\sqrt{2}.$$

Dunque i punti critici sono

$$(0,0) \qquad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 4.$$

Dunque

$$H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 24-4 & 4 \\ 4 & 24-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) =$ Det $H_f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 400 - 16 > 0$ e $f_{xx} > 0$. Questo implica che i punti $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sono di minimo locale. D'altra parte

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(0,0) = 0$ e il test della matrice Hessiana si rivela inefficace per il punto $(0,0)$. Per determinare la natura di questo punto critico occorre cambiare metodo. Proviamo a studiare il segno dell'incremento della funzione, cioè studiamo il segno di

$$\triangle f(x,y) = f(x,y) - f(0,0) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

Ora, se $x = y$ allora

$$\triangle f = x^4 + x^4 = 2x^4 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

mentre se consideriamo la curva $y = -x$ si ha

$$\triangle f = 2x^4 - 8x^2 \leq 0 \qquad \text{se}|x| \leq 2.$$

Questo ci dice che in ogni intorno dell'origine ci sono sia punti in cui f ha valori maggiori di $2 = f(0,0)$ e sia punti in cui f ha valori minori di 2 e dunque il punto $(0,0)$ è un punto di sella.

✍ **Esercizio 5.1.3.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y) = \sinh(x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2).$$

La funzione $f(x,y) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed è composta dalle funzioni $\sinh t$ e $t = t(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2$. Poiché la funzione $\sinh t$ è strettamente crescente, i punti di estremo di $f(x,y)$ sono tutti e soli i punti di estremo di $t(x,y)$. (Notiamo che analoghe considerazioni possono essere fatte per funzioni del tipo $f(x,y) = e^{t(x,y)}$, $f(x,y) = (t(x,y))^3$ ecc...).
Si può studiare pertanto la funzione

$$t(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque gli eventuali punti di estremo libero di t devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di t. Si ha

$$\frac{\partial t}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 8x \qquad \frac{\partial t}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y$$

dunque per trovare i punti critici devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 4x^3 - 8x = 4x[x^2 - 2] = 0 \\ 3y^2 - 6y = 3y[y-2] = 0. \end{cases}$$

Dunque i punti critici sono

$$(0,0) \qquad (0,2) \qquad (\pm\sqrt{2},0) \qquad (\pm\sqrt{2},2).$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 8 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x}(x,y) = 0 \qquad \frac{\partial^2 t}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 6.$$

Dunque

$$H_t(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(0,0) = 48 > 0$ mentre $t_{xx} < 0$. Questo implica che il punto $(0,0)$ è di massimo locale. D'altra parte

$$H_t(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(0,2) = -48 < 0$ e dunque $(0,2)$ è un punto di sella. Inoltre

$$H_t(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(\pm\sqrt{2},0) = -96 < 0$ e dunque anche $(\pm\sqrt{2},0)$ sono punti di sella. Infine

$$H_t(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_t(\pm\sqrt{2},2) = 96 > 0$ mentre $t_{xx}(\pm\sqrt{2},2) = 16 > 0$ e dunque $(\pm\sqrt{2},2)$ sono punti di minimo locale.

✍ **Esercizio 5.1.4.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y).$$

Si ha

$$\begin{aligned} f(x,y) =& \sin(x+y) - \cos(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y - \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ =& \sin x[\cos y - \sin y] - \cos x[\cos y - \sin y] = [\cos y - \sin y] \cdot [\sin x - \cos x] \\ =& 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos y - \sin y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x - \cos x)\right] = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

A questo punto, visto che

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

si vede subito che il massimo di f è 2 ed è assunto in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

oppure in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{4}\pi + 2\pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Invece il minimo di f è -2 ed è assunto in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{4}\pi + 2\pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

oppure in corrispondenza dei punti

$$\begin{cases} x = \frac{7}{4}\pi + 2\pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{\pi}{4} + 2\pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Per vedere se f non ha altri punti di estremo, si calcolano gli ulteriori punti critici di f risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\ f_y(x,y) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono i punti

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}\pi + \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi h & h \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

precedentemente trovati e i punti

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k & k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3}{4}\pi + \pi h & h \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

In tali punti f si annulla ed è facile vedere che cambia segno in ogni loro intorno. Questi punti sono perciò di sella.

✍ **Esercizio 5.1.5.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$$

La funzione f è a simmetria radiale, cioè è funzione solo della distanza dall'origine $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Come conseguenza, le curve di livello di f sono circonferenze con centro nell'origine. In casi come questo si può semplificare la ricerca degli estremi studiando la funzione di una sola variabile

$$g(r) = r^2 e^{-r^2} \qquad r \geq 0.$$

Si ha $g(0) = 0$ e anche $g(r) \geq 0$ per ogni r anzi più precisamente $g(r) > 0$ per ogni $r \neq 0$. Inoltre

$$\lim_{r\to+\infty} g(r) = 0$$

e dunque $r = 0$ è punto di minimo globale. D'altra parte

$$g'(r) = 2r(1-r^2)e^{-r^2}$$

e dunque $g'(r) = 0$ se $r = 1$. Perciò se $r = 1$ è punto di massimo globale.
Per trasferire i risultati ottenuti per g a f basta osservare che $r = 0$ corrisponde all'origine $(0,0)$ mentre $r = 1$ corrisponde alla circonferenza unitaria centrata in $(0,0)$. Di conseguenza il valore minimo è assunto in $(0,0)$ mentre il valore massimo è assunto in tutti i punti della circonferenza unitaria.

✍ **Esercizio 5.1.6.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = x\sqrt[3]{(y-x)^2}.$$

La funzione f è definita e continua in $\mathbb{R}^2$. Dimostriamo che in tutti i punti dell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ tranne l'origine si ha che f non è differenziabile. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,x) - f(x,x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)\sqrt[3]{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} xh^{-1/3} + \lim_{h\to 0} \sqrt[3]{h^2}.$$

Il limite del primo addendo, per $x \neq 0$ non esiste e quindi sicuramente f non è differenziabile nei punti (x,x) con $x \neq 0$. nell'origine invece si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\sqrt[3]{(-h)^2}}{h} = 0$$

mentre

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$$

dunque

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h\sqrt[3]{(k-h)^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

e questo limite esiste e fa 0, dunque in $(0,0)$ f è differenziabile. I punti di estremo andranno cercati tra i punti critici e i punti della bisettrice del primo e terzo quadrante (origine esclusa). Allora

$$f_x(x,y) = \frac{3y-5x}{3\sqrt{y-x}} \qquad f_y(x,y) = \frac{2x}{3\sqrt{y-x}}$$

e dunque il gradiente di f è diverso da zero in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = x\}$. Pertanto possono essere punti di estremo solo i punti della retta $y = x$ (origine esclusa). Su tale retta si ha $f(x,y) = 0$. Studiando il segno di $f(x,y)$ si ricava che i punti della bisettrice del primo quadrante sono di minimo locale mentre i punti della bisettrice del terzo quadrante sono di massimo locale. Infatti $f(x,y) \geq 0$ per $x > 0$ e $f(x,y) \leq 0$ per $x < 0$. Per curiosità l'origine è punto di sella. Non ci sono estremi globali perché la funzione è illimitata superiormente e inferiormente. Ad esempio:

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} f(x,y) = +\infty$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,0)} f(x,y) = -\infty.$$

✍ **Esercizio 5.1.7.** *Si determinino gli eventuali estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2$$

nel suo dominio.

Il dominio di f è l'insieme aperto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > -1\}.$$

In questo insieme f è una funzione di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. Gli eventuali punti di estremo locale devono perciò essere soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(\log(1+y) + y^2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2\left(\dfrac{1}{1+y} + 2y\right) = 0. \end{cases}$$

Si ha sicuramente $x = 0$; inoltre deve aversi

$$\log(1+y) + y^2 = 0$$

e

$$\frac{1}{1+y} + 2y = 0.$$

La prima equazione ci dà come soluzione $y = 0$ mentre dalla seconda equazione deriviamo $2y^2 + 2y + 1 = 0$ che non ci dà soluzioni reali. Quindi il sistema ammette come soluzioni gli infiniti punti $(0,k)$ con $k > -1$. Su tali punti si ha $f(x,y) = 0$. Proviamo il test della matrice Hessiana.

$$f_{xx}(x,y) = 2(\log(1+y) + y^2) \qquad f_{yy}(x,y) = x^2\left(2 - \frac{1}{(1+y)^2}\right)$$

e

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2x\left(\frac{1}{1+y} + 2y\right);$$

dunque

$$H_f(0,k) = \begin{pmatrix} \log(1+k) + k^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e dunque il test della matrice Hessiana si rivela inefficace.
Proviamo a valutare

$$\triangle f(x,y) = f(x,y) - f(0,k) = f(x,y) = x^2\log(1+y) + x^2y^2 = x^2[\log(1+y) + y^2].$$

Studiamo il segno del termine $\log(1+y) + y^2 =: g(y)$. È immediato verificare che

$$g(y) < 0 \Leftrightarrow -1 < y < 0, \qquad g(y) \Leftrightarrow y = 0, \qquad g(y) > 0 \Leftrightarrow y > 0.$$

Da questo è possibile concludere che:
se $k > 0$ allora i punti $(0,k)$ sono punti di minimo locale;
se $k = 0$ allora l'origine è un punto di sella;
se $-1 < k < 0$ allora i punti $(0,k)$ sono punti di massimo locale.
Osserviamo infine che f non ha punti di estremo globale in quanto

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} +\infty & y_0 > 0 \\ -\infty & -1 < y_0 < 0 \end{cases}$$

e perciò

$$\sup f(x,y) = +\infty \qquad \inf f(x,y) = -\infty.$$

✍ **Esercizio 5.1.8.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y) = x^2(y-1)^3(z+2)^2.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = 2x(y-1)^3(z+2)^2 = 0 \\ f_y(x,y,z) = 3x^2(y-1)^2(z+2)^2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2x^2(y-1)^3(z+2) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono i punti dei piani $x = 0$, $y = 1$ e $z = -2$, cioè rispettivamente si ottengono i punti $(0, h, k), (l, 1, k), (l, h, -2)$ con $l, h, k \in \mathbb{R}$. In tali punti f si annulla. Anziché ricorrere allo studio del differenziale secondo, è conveniente esaminare il segno di f in un intorno dei punti indicati. I punti $(l, 1, k)$ sono di sella in quanto attraversando il piano $y = 1$ f cambia segno. I punti $(0, h, k)$ e $(l, h, -2)$ sono di massimo locale per $h < 1$ in quanto f è negativa per $h < 1$ e di minimo locale per $h > 1$ in quanto f è positiva per $h > 1$.

✍ **Esercizio 5.1.9.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y,z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x = 0,\ y = 0,\ z = 0\})$.
I punti critici si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = -\dfrac{1}{x^2} + yz = 0 \\ f_y(x,y,z) = -\dfrac{1}{y^2} + xz = 0 \\ f_z(x,y,z) = -\dfrac{1}{z^2} + xy = 0. \end{cases}$$

Moltiplichiamo la prima equazione per x, la seconda equazione per y e sottraiamo. Si ottiene

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow x - y = 0;$$

analogamente, se moltiplichiamo la seconda equazione per y, la terza equazione per z e sottraiamo, si ha

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0 \quad \Rightarrow x = y = z.$$

Allora sostituendo questo risultato in una qualunque delle equazioni si ha rapidamente

$$-\frac{1}{x^2} + x^2 = 0 \qquad x^4 = 1.$$

Allora in definitiva i punti critici sono $(1, 1, 1)$ e $(-1, -1, -1)$. Per stabilire la natura di questi due punti critici proviamo il test della matrice Hessiana:

$$f_{xx}(x, y, z) = \frac{2}{x^3} \qquad f_{xy}(x, y, z) = f_{yx}(x, y, z) = z \qquad f_{yy}(x, y, z) = \frac{2}{y^3}$$

$$f_{zz}(x, y, z) = \frac{2}{z^3} \qquad f_{xz}(x, y, z) = f_{zx}(x, y, z) = y \qquad f_{yz}(x, y, z) = f_{zy}(x, y, z) = x.$$

Allora

$$H_f(1, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2. \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali di Nord-Ovest sono rispettivamente

$$H_1 = 2 > 0 \qquad H_2 = 3 > 0 \qquad H_3 = 4 > 0$$

quindi $(1, 1, 1)$ è punto di minimo locale per f. Invece

$$H_f(-1, -1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2. \end{pmatrix}$$

I determinanti dei minori principali di Nord-Ovest sono rispettivamente

$$H_1 = -2 < 0 \qquad H_2 = 3 > 0 \qquad H_3 = -4 < 0$$

quindi $(-1, -1, -1)$ è punto di massimo locale per f. Questo risultato poteva essere previsto dato che $f(x, y, z) = f(-x, -y, -z)$.

✍ **Esercizio 5.1.10.** *Si determini, al variare del parametro reale k, il segno della forma quadratica: $q(x, y, z) = x^2 + 2kxy + y^2 + 2kyz + z^2$;*

Alla forma quadratica q è associata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 1 & k \\ 0 & k & 1. \end{pmatrix}$$

(Notiamo che da $2kxy$ si ottiene che l'elemento della matrice $a_{12} = k$ e coincide con l'elemento della matrice a_{21} perché la matrice è simmetrica). I determinanti dei minori principali nord-ovest sono:

$$A_1 = 1 \qquad A_2 = 1 - k^2 \qquad A_3 = \text{ Det } A = 1 - 2k^2.$$

A questo punto:
$|k| > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora $A_3 < 0$ e siccome $A_1 > 0$ si ha che la forma quadratica è indefinita;
$|k| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora tutti gli A_i sono positivi e dunque la forma quadratica è definita positiva;
$|k| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ allora la forma quadratica è

$$q(x,y,z) = \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y + z\right)^2$$

e dunque è semidefinita positiva, cioè $q(x,y,z) \geq 0$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^n$ e $q(x,y,z) = 0$ nei punti $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}h, h, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}h\right)$.

✍ **Esercizio 5.1.11.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3.$$

La funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque gli eventuali punti di estremo libero di f devono anche essere punti critici, cioè punti che annullano il gradiente di f. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3y - x^4 2y - x^3 3y^2$$

dunque per trovare i punti critici devo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x^2y^2[3 - 4x - 3y] = 0 \\ x^3y[2 - 2x - 3y] = 0. \end{cases}$$

Dunque tra i punti critici ci sono sicuramente

$$(k, 0) \qquad (0, h) \qquad \text{con } k, h \in \mathbb{R}.$$

Inoltre bisogna vedere se si può risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3 - 4x - 3y = 0 \\ 2 - 2x - 3y = 0. \end{cases}$$

Questo sistema ammette come soluzione il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$. Alla fine i punti critici sono:

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) \qquad (k,0) \qquad (0,h) \qquad \text{con } k,h\in\mathbb{R}.$$

Per determinare la natura dei punti critici proviamo a calcolare la matrice Hessiana nei punti suddetti. Si ha

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6xy^2-12x^2y^2-6xy^3$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial^2 t}{\partial y\partial x}(x,y)=6x^2y-8x^3y-9x^2y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2x^3-2x^4-6x^3y.$

Dunque

$$H_f(k,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k^3-2k^4 \end{pmatrix}$$

quindi Det $H_f(k,0)=0$ e il test della matrice Hessiana si rivela inefficace per studiare la natura di questi punti. Siccome $f(k,0)=0$, possiamo provare a studiare il segno di

$$\triangle f(x,y)=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)=x^3y^2-x^4y^2-x^3y^3=x^3y^2[1-x-y].$$

In figura in azzurro è evidenziata la regione in cui f ha segno positivo, in rosa la regione in cui f ha segno negativo. Da ciò si deduce immediatamente che i punti $(k,0)$ per $k>1\vee k<0$ sono punti di massimo locale visto che è sempre possibile trovare un intorno di questi punti in cui f sia sempre positiva. Allo stesso modo è facile vedere che se $0<k<1$ i punti $(k,0)$ sono di minimo locale in quanto si riesce a trovare un intorno di questi punti in cui f è negativa. Analogamente si vede che i punti $(0,h)$ e $(1,0)$ sono punti di sella visto che in ogni loro intorno ci sono sia punti in cui f è positiva che punti in cui f è negativa. Infine per il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ si può provare il test della matrice Hessiana. Si ha

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{12} & \frac{1}{72} \end{pmatrix}$$

e dunque essendo $f_{xx}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ e Det $H_f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)>0$ si ha che il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ è un punto di massimo locale.

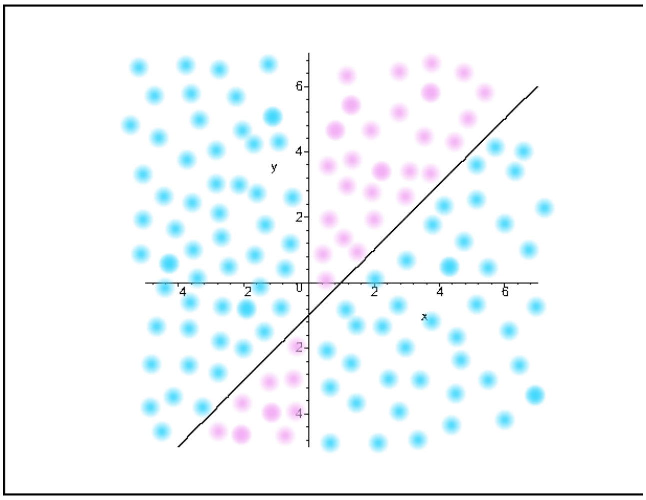

Figura 5.1: Grafico che evidenza il segno di f.

✍ **Esercizio 5.1.12.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x, y) = |xy|(x + y - 1).$$

Dimostriamo che f non è differenziabile nei punti $(0, h)$ e $(k, 0)$ con $h, k \in \mathbb{R}$ (tranne che nei punti $(0, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 0)$ in cui invece è differenziabile). Infatti se ci troviamo nel primo o nel terzo quadrante (assi esclusi) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + y^2 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 2xy - x$$

mentre se ci troviamo nel secondo o nel quarto quadrante (assi esclusi) si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2xy - y^2 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 - 2xy + x.$$

D'altra parte

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,h)-f(0,h)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|th|(t+h-1)}{t}$$

dunque se $h=0$ oppure $h=1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) = 0,$$

negli altri casi il limite precedente non esiste e dunque la derivata parziale rispetto a x non esiste. Analogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(k,t)-f(k,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|kt|(k+t-1)}{t}$$

dunque se $k=0$ oppure $k=1$ si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial y}(k,0) = 0,$$

negli altri casi il limite precedente non esiste e dunque la derivata parziale rispetto a y non esiste. Quindi di sicuro i punti $(0,h)$ e $(k,0)$ con $k,h \neq 0,1$ sono punti di non differenziabilita' per f. Invece in $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-hf_x(0,0)-kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|hk|(h+k-1)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

La stessa cosa avviene nei punti $(1,0)$ e $(0,1)$ che dunque sono punti di differenziabilità per f. Dopo questa analisi passiamo a considerare i punti critici per f. Supponiamo di essere nel primo o nel terzo quadrante (compresi i punti degli assi cartesiani in cui f risulta differenziabile). I punti critici devono risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - y = 0 \\ x^2 + 2xy - x = 0 \end{cases}$$

che ci dà come soluzioni i punti $(0,0),(0,1),(1,0)$ e il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Se invece ci troviamo nel secondo o nel quarto quadrante il sistema che dobbiamo risolvere è lo stesso quindi non riusciamo a trovare ulteriori punti critici.

Per l'ultimo punto si può applicare il test della matrice Hessiana e si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2y \qquad f_{xy}(x.y) = 2x + 2y - 1 \qquad f_{yy}(x,y) = 2x$$

dunque

$$H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

ed essendo $f_{x}x\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) > 0$ e Det $H_f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0$ si ha che il punto $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ è un punto di minimo locale.
Per i primi 3 punti non può essere applicato il test della matrice Hessiana perché bisognerebbe avere almeno f di classe $\mathcal{C}^2(A)$ con A intorno aperto di uno dei tre punti e ciò ovviamente non è vero. Allora per questi 3 punti e per gli altri punti degli assi cartesiani, che sono punti di non differenziabilità per f, occorre studiarne la natura osservando il segno dell'incremento di f, o meglio il segno di f visto che f sugli assi cartesiani vale 0. In figura la zona arancione

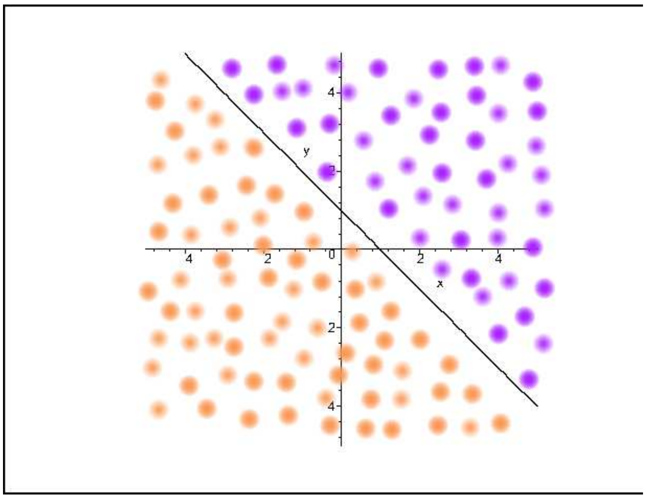

Figura 5.2: Grafico che evidenza il segno di f.

evidenzia la regione in cui f ha segno negativo mentre la zona viola evidenzia la regione in cui f ha segno positivo. Quindi questo implica che se $h > 1$ c'è un intorno del punto $(0, h)$ che sta tutto nel semipiano $y > -x + 1$ dove f è positiva. Quindi tutti i punti $(0, h)$ sono tutti punti di minimo locale. Ragionando in modo analogo si trova che i punti $(0, h)$ con $h < 1$ sono tutti punti di massimo locale, i punti $(1, 0)$ e $(0, 1)$ sono punti di sella, i punti $(k, 0)$ con $k > 1$ sono punti di minimo locale e infine i punti $(0, k)$ sono punti di massimo locale.

✍ **Esercizio 5.1.13.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione*
$$f(x,y) = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4.$$

La funzione data è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$. I punti critici si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -8xy^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 8y - 8x^2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

che ci dà come soluzioni i punti $(k,0)$ con $k \in \mathbb{R}$ e i punti $(0, \pm\sqrt{2})$. Proviamo il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = -8y^2 \qquad f_{xy} = -16xy \qquad f_{yy}(x,y) = 8 - 8x^2 - 12y^2$$

ma per i punti $(k,0)$ si ha Det $H_f(k,0) = 0$ e quindi il test della matrice Hessiana è inefficace. Occorre studiare il segno di

$$\triangle f(x,y) = f(x,y) - f(k,0) = f(x,y) = y^2[4 - 4x^2 - y^2].$$

In figura la zona azzurra è la regione in cui f ha segno positivo mentre la zona verde è la regione in cui f ha segno negativo. Da ciò si deduce che se $|k| > 1$ i punti $(k,0)$ sono di massimo locale per f mentre se $|k| < 1$ i punti $(k,0)$ sono punti di minimo locale. Inoltre i punti $(\pm1, 0)$ sono di sella.
Infine per i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ si può provare il test della matrice Hessiana e si ottiene

$$H_f(0, \pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$$

e quindi i punti $(0, \pm\sqrt{2})$ sono punti di massimo locale. Vogliamo mostrare che sono anche punti di massimo globale per f. Basta far vedere che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$f(x,y) - 4 \leq 0$$

ma questo è vero perché

$$f(x,y) - 4 = 4y^2 - 4x^2y^2 - y^4 - 4 = -4x^2y^2 - (y^2-2)^2 \leq 0.$$

Dunque f è limitata superiormente. Invece

$$\lim_{(x,y)\to(-\infty,1)} f(x,y) = -\infty$$

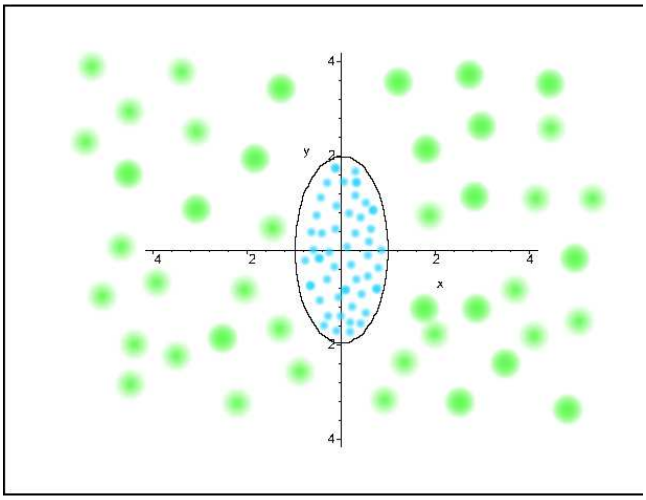

Figura 5.3: Grafico che evidenza il segno di f.

quindi

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty.$$

Quindi non ci sono punti di minimo globale ed f non è limitata inferiormente.

✍ **Esercizio 5.1.14.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione*

$$f(x,y) = e^{x^4-4x^2y+3y^2}.$$

La funzione $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed è data dalla composizione della funzione e^x con $g(x,y) = x^4 - 4x^2y + 3y^2$. Essendo la funzione esponenziale crescente, i punti stazionari di f sono tutti e soli quelli di g. Quindi occorre risolvere il sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 4x^3 - 8xy = 0 \\ g_y(x,y) = -4x^2 + 6y = 0 \end{cases}$$

che ci dà come unica soluzione l'origine $(0,0)$. Studiamo il segno di

$$\triangle g(x,y) = g(x,y) - g(0,0) = x^4 - 4x^2y + 3y^2.$$

Se ci muoviamo lungo la curva $y = 2x^2$ si ha

$$g(x, 2x^2) = x^4 - 8x^4 + 6x^4 = -x^4 \leq 0$$

mentre se ci spostiamo lungo la curva $y = \frac{x^2}{3}$ si ottiene

$$x^4 - \frac{4}{3}x^4 + x^4 = \frac{2}{3}x^4 > 0$$

e dunque l'origine è un punto di sella.
D'altra parte non ci sono estremi globali per f nel senso che ad esempio

$$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} f(x,y) = +\infty$$

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x, 2x^2) = 0$$

quindi f non è limitata superiormente mentre è limitata inferiormente ma $0 = \inf_{\mathbb{R}^2} f(x,y)$ e non è un minimo.

5.1.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 5.1.15.** *Calcolare la matrice Hessiana della funzione*

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$

nel punto $(-4, 2)$ *e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.*

✍ **Esercizio 5.1.16.** *Calcolare la matrice Hessiana della funzione*

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$$

nel punto $(2, -1)$ *e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.*

✍ **Esercizio 5.1.17.** *Calcolare la matrice Hessiana della funzione*

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

nei punti $(0,0)$ *e* $(1,1)$ *e studiare il segno della corrispondente forma quadratica.*

✍ **Esercizio 5.1.18.** *Classificare, utilizzando il metodo dei minori principali oppure il metodo degli autovalori, le forme quadratiche su* $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} q_1(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz, \\ q_2(x,y,z) &= 2xz - 2xy - y^2 - 2yz \\ q_3(x,y,z,t) &= -2x^2 + ky^2 - z^2 - t^2 + 2xz + 4yt + 2kzt. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 5.1.19.** *Studiare la natura degli eventuali punti stazionari in* $\mathbb{R}^2$ *delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} &1) f(x,y) = 3x^2 - 2y^2 \\ &2) f(x,y) = (y-2)\, e^{xy} \\ &3) f(x,y) = (x+1)\, e^{-xy} \\ &4) f(x,y) = e^y\,(x^2+1) - y \\ &5) f(x,y) = 3x^2y - y^3 + x^2 \\ &6) f(x,y) = 3y^3 - x^2y - x^2 \\ &7) f(x,y) = -4xy + 4x \\ &8) f(x,y) = 4y + 4xy \\ &9) f(x,y) = \log(1 + y^2 - xy + 2x^2) \\ &10) f(x,y) = \log(1 + 4y^2 - 2xy + x^2) \\ &11) f(x,y) = 2y^2 + x^2 - y \\ &12) f(x,y) = \arctan(3x^2 + y^2) \\ &13) f(x,y) = -8x^2 - 2y^2 - 2xy + 2 \end{aligned}$$

➾ **R.**

1)$(0,0)$ sella
2)$(1/2,0)$ sella
3)$(0,1)$ sella
4)$(0,0)$ minimo
5)$(0,0)$ sella, $(-1/3,-1/3)$ sella, $(1/3,-1/3)$ minimo
6)$(0,0)$ sella, $(3,-1)$ sella, $(-3,-1)$ sella
7)$(0,1)$ sella
8)$(-1,0)$ sella
9)$(0,0)$ minimo
10)$(0,0)$ minimo
11)$(0,4)$ minimo
12)$(0,0)$ minimo
13)$(0,0)$ massimo

✍ **Esercizio 5.1.20.** *Si calcolino al variare di n gli eventuali estremi liberi della funzione*

$$f_n(x,y) = (x^2 + 3xy^2 + 2y^4)^n \qquad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

✍ **Esercizio 5.1.21.** *Si determini la natura dell'origine per la funzione*

$$f(x,y) = \log(1+x^2) - x^2 + xy^2 + y^3 + 2.$$

✍ **Esercizio 5.1.22.** *Si verifichi che l'equazione*

$$f(x,y,z) = x\sin x + \log(1+y^2) - z - \int_0^z e^{t^2}\,dt = 0$$

definisce in un intorno di $(0,0,0)$ *un'unica funzione* $z = z(x,y)$ *e che per tale funzione l'origine è punto di minimo locale.*

✍ **Esercizio 5.1.23.** *Si verifichi che l'equazione*

$$x^2 + xu^2 + y^2 + e^{xu} - z + y^2 e^z = 0$$

determina un'unica funzione $z = z(x, y, u)$ *tale che* $z(0, 0, 0) = 1$ *e che per tale funzione* $(0, 0, 0)$ *è punto critico. Si determini la natura di tale punto.*

✍ **Esercizio 5.1.24.** *Si considerino le funzioni:*

a) $f_1(x, y, z) = [\sin(x - z)]^2 + y^2 - xyz$;

b) $f_2(x, y, z) = [\sin(x - z)]^2 + y^2 + y^2 z$;
si verifichi che per entrambe $(0, 0, 0)$ *è punto stazionario; si determinino poi il differenziale secondo e terzo e si deduca la natura di* $(0, 0, 0)$.

✍ **Esercizio 5.1.25.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo locale e globale della funzione*

$$f(x, y) = (x^4 + y^4)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

✍ **Esercizio 5.1.26.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 + 1}.$$

✍ **Esercizio 5.1.27.** *Si determinino gli estremi locali e globali della seguente funzione al variare di* $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^\alpha \log(x^2 + y^2) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.1.28.** *Si calcoli la distanza tra le due rette in* $\mathbb{R}^3$:

$$x = y = 0$$

e

$$\begin{cases} x = 3 \\ z = 2y. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.1.29.** *Si determini al variare del parametro reale k la natura dell'origine per la funzione*

$$f(x,y) = 2 + kx^2 + 4xy + (k-3)y^2 + (2x+y)^4.$$

✍ **Esercizio 5.1.30.** *Si determini la natura dell'origine per la funzione*

$$f(x,y) = \arctan(x^2+y^2) - \log(1+x^2) - \log(1+y^2).$$

✍ **Esercizio 5.1.31.** *Si verifichi che l'equazione*

$$(y-1)z + e^z + (x^2+x)\log y - 1 = 0$$

determina un'unica funzione $z = z(x,y)$ *in un intorno di ogni punto della retta* $y = 1$*. Si dica se tale funzione ammette sulla retta* $y = 1$ *punti di massimo o di minimo locale.*

✍ **Esercizio 5.1.32.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2 + \log(1+z^2).$$

✍ **Esercizio 5.1.33.** *Si determinino gli eventuali punti di estremo libero della funzione*

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)^2 - xy + z^2.$$

✍ **Esercizio 5.1.34.** *Si determini, al variare del parametro reale k, il segno delle seguenti forme quadratiche:*

a) $q(x, y, z) = kx^2 + ky^2 + kz^2 + 2xy + 2yz$;

b) $q(x, y, z, t) = -x^2 + xy - y^2 + z^2 - 2xz - 2yz + kt^2$.

✍ **Esercizio 5.1.35.** *Si determini al variare del parametro reale k la natura dell'origine per la funzione*

$$f(x, y) = 5 + kx^2 + 2xy + 4kxz - 6y^2 - 3z^2.$$

✍ **Esercizio 5.1.36.** *Sono assegnate le coppie distinte (x_i, y_i) per $i = 1, \ldots, n$. Si determinino a, b, c in modo che sia minima la somma*

$$\sum_{i=1}^{n} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2.$$

✍ **Esercizio 5.1.37.** *Trovare i punti stazionari delle funzioni che seguono e dire se si tratta di punti di massimo o di minimo relativo.*

$$x^3 + 3x^2 + 4xy + y^2$$
$$y^2 - x^2y$$
$$x^2y^2(1 - x - y)$$
$$x^2 + y^2 + z^3 - 2x - 3z$$
$$x^3 + xy + y^2 + yz + z^3$$
$$|x^2 + y^2 - 4y| + x$$
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$
$$x^4 + ax^2y + y^2$$
$$\frac{x + y - 1}{x^2 + y^2}$$
$$(2x + y)e^{-x^2-y^2}$$
$$x^4 - x^3 + y^2$$
$$xy\log(xy^2) + x^2y$$
$$x^2 + y^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$$
$$(x + 3y)e^{-xy}$$
$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$
$$x^3 + 6xy + y^2$$
$$x^2ye^{x+py}$$
$$x\log(x + y)$$
$$x^2 + y^2 + 2z^2 + xyz$$
$$\sin(x + y)\cos(x - y)$$
$$xy^2 - x^2 - y^2$$

✍ **Esercizio 5.1.38.** *Trovare l'insieme di definizione E della funzione*

$$f(x,y) = \sqrt{2(x+2y) - x^2 - 2y^2 - 1}.$$

Trovare inoltre, se esistono, il massimo e il minimo assoluti di f in E.

✍ **Esercizio 5.1.39.** *La funzione* $\sin^2 x + y^2 + 2axy$ *ha un punto stazionario nell'origine. Dire se si tratta di un punto di massimo o di minimo relativo.*

✍ **Esercizio 5.1.40.** *Trovare, se esistono, il massimo e il minimo della funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^3 y}{x^4 + y^4}$$

in $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

✍ **Esercizio 5.1.41.** *Trovare e classificare i punti critici delle funzioni indicate*

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4x + 4y$$
$$f(x,y) = xy - x + y$$
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$
$$f(x,y) = x^4 + y^4 4xy$$
$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{8}{x} - y$$
$$f(x,y) = \cos(x+y)$$
$$f(x,y) = x \sin y$$
$$f(x,y) = \cos x + \cos y$$
$$f(x,y) = x^2 y e^{-(x^2+y^2)}$$
$$f(x,y) = \frac{xy}{2 + x^4 + y^4}$$
$$f(x,y) = xe^{-x^3+y^3}$$
$$f(x,y) = \frac{1}{1 - x + y + x^2 + y^2}$$
$$f(x,y) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$
$$f(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$
$$f(x,y,z) = xy + x^2 z - x^2 - y - z^2$$

✍ **Esercizio 5.1.42.** *Mostrare che* $f(x,y,z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4$ *ha un valore massimo locale nel punto* $(1,1,1)$.

✍ **Esercizio 5.1.43.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo di* $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$.

✍ **Esercizio 5.1.44.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo di*

$$f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$$

✍ **Esercizio 5.1.45.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo di* $f(x,y,z) = xyze^{-x^2-y^2-z^2}$. *Come si può essere certi che tali valori esistono?*

✍ **Esercizio 5.1.46.** *Determinare il valore minimo di*

$$f(x,y) = x + 8y + \frac{1}{xy}$$

nel primo quadrante $x > 0, y > 0$. *Come si può essere certi che un minimo esiste?*

✍ **Esercizio 5.1.47.** *Determinare e classificare i punti critici della funzione* $z = g(x,y)$ *che soddisfano l'equazione*

$$e^{2zx-x^2} - 3e^{2zy+y^2} = 2.$$

✍ **Esercizio 5.1.48.** *Sia*

$$f(x,y) = (y-x^2)(y-3x^2).$$

Mostrare che l'origine è un punto critico di f *e che la restrizione di* f *a qualunque linea retta passante per l'origine ha un valore minimo locale nell'origine (mostrare cioè che* $f(x,kx)$ *ha un valore minimo locale in* $x = 0$ *per ogni* k *e che* $f(0,y)$ *ha un valore minimo locale in* $y = 0$.*) La funzione* $f(x,y)$ *ha un valore minimo locale nell'origine?*

✍ **Esercizio 5.1.49.** *È dato il campo scalare* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = (|x| + y)e^{-xy}.$$

Trovare i punti stazionari e determinarne la natura.

✍ **Esercizio 5.1.50.** *Si determinino i massimi e i minimi relativi ed assoluti del campo scalare*

$$f(x,y) = (x^4 + y^4)\exp\left(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right).$$

✍ **Esercizio 5.1.51.** *Determinare la natura dei punti stazionari di*

$$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + 5xy - z^2 + 2z$$

in tutto lo spazio. Determinare gli estremi superiore ed inferiore di f.

✍ **Esercizio 5.1.52.** *Si determinino i massimi e i minimi relativi ed assoluti dei campi scalari*

$$f(x,y) = e^{-x-y} + e^x + e^{y+1}$$

e

$$g(x,y) = f(x^2, -y).$$

5.2. Ottimizzazione vincolata

5.2.1. Test a risposta multipla

✍ **Esercizio 5.2.1.** *Se $D = \{(x,y,z) : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4\}$ e $f(x,y,z)$ è una funzione tale che $\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)$ per ogni (x,y,z), allora:*

- □ f ha un punto di massimo in D
- □ f ha due punti di massimo in D
- □ f ha infiniti punti di massimo in D
- □ f non ha punti di massimo in D

L'idea è quella di utilizzare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Abbiamo il vincolo

$$g(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 - 4 = 0.$$

Si vede che non ci sono punti singolari per il vincolo.
La funzione Lagrangiana è data da

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\, g(x,y,z).$$

A questo punto troviamo i punti critici per $\mathcal{L}$. Si ha

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\lambda\,2(x-1)=0 \\ 1+\lambda\,2\,(y-2)=0 \\ 1+\lambda\,2(z+1)=0 \\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=0 \end{cases}$$

che porta a

$$\nabla\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2(1-x)} = 0 \\ 1+\frac{(y-2)}{(1-x)}=0 \\ 1+\frac{(z+1)}{(1-x)}=0 \\ 3(x-1)^2=4 \end{cases}$$

Quindi i candidati ad essere punti di estremo assoluto sono

$$\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}, 2-\frac{2}{\sqrt{3}}, -1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \qquad \left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}, 2+\frac{2}{\sqrt{3}}, -1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

siccome la funzione non può essere costante (altrimenti avrebbe gradiente nullo) e non ci sono altri punti candidati, uno sarà il punto di minimo assoluto, l'altro di massimo assoluto.

✍ **Esercizio 5.2.2.** *Per quali valori del parametro α il punto $(0,0)$ è un punto di minimo per la funzione $g(x,y) = (x+5y)(2x-\alpha y)$?*

□nessuno □ -10 □5 □0

È sufficiente studiare la matrice Hessiana di f in $(0,0)$, quindi andiamo a calcolare le derivate seconde della funzione. Si ha

$$f_x(x,y) = 4x-\alpha y+10y \qquad f_y(x,y) = -\alpha x+10x-10\alpha y$$

da cui

$$f_{xx}(x,y)=4 \quad f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=10-\alpha \quad f_{yy}(x,y)=-10\alpha$$

da cui chiaramente

$$f_{xx}(0,0) = 4 \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(0,0) = 10 - \alpha \quad f_{yy}(0,0) = -10\alpha$$

Siccome $f_{xx}(0,0) > 0$, affinché $(0,0)$ sia minimo per f, è sufficiente che il determinante della matrice Hessiana sia > 0. Quindi si ha che

$$\det Hf(0,0) = -40\alpha - (10-\alpha)^2 = -\alpha^2 - 20\alpha - 100 = -(\alpha - 10)^2 \leq 0$$

quindi per nessun valore di α l'origine è minimo per f.

✍ **Esercizio 5.2.3.** *Per quali valori del parametro β il punto $(0,0,0)$ è punto di sella per la funzione $F(x,y,z) = 2x^2 + \beta\, y^2 + (\beta - 1)\, z^2$?*

$$\square \beta < 1 \quad \square \beta \geq 0 \quad \square \beta < 2 \quad \square \beta \geq 1$$

Bisogna calcolare la matrice Hessiana di f in $(0,0,0)$. Si ha immediatamente che tutte le derivate miste sono nulle mentre

$$f_{xx}(x,y,z) = 4 \qquad f_{yy}(x,y,z) = 2\,\beta \qquad f_{zz}(x,y,z) = 2(\beta - 1)$$

cioè la matrice Hessiana corrispondente è una matrice diagonale e quelli trovati sono i 3 autovalori della matrice. Quindi affinché $(0,0,0)$ sia un punto di sella per f basta che i tre autovalori abbiano segni diversi, quindi in particolare non si può avere $\beta > 0$ e $\beta > 1$. Se fosse $\beta > 1$ allora si avrebbe per forza $\beta > 0$ che abbiamo escluso, quindi deve essere $\beta < 1$ (può essere indifferentemente $\beta < 0$ o $0 < \beta < 1$). Se $\beta = 0$ allora gli autovalori sono $4, 0, -2$ e quindi $(0,0,0)$ è una sella, quindi $\beta = 0$ va incluso; d'altra parte se $\beta = 1$ allora gli autovalori sono $4, 2, 0$ e quindi $(0,0,0)$ non è più una sella.

✍ **Esercizio 5.2.4.** *La funzione $f(x,y) = (y-1)(y-x^2)$ in $\mathbb{R}^2$ ha:*

□un minimo e due massimi	□un massimo e due selle
□un minimo e due selle	□una sella e due massimi

Si ha

$$f_x(x,y) = -2xy + 2x \qquad f_y = 2y - x^2 - 1$$

da cui

$$f_{xx}(x,y) = -2y+2 \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -2x \qquad f_{yy}(x,y) = 2$$

a questo punto i punti stazionari sono:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \;\; \Leftrightarrow \;\; 2x(1-y) = 0 \;\wedge\; 2y = x^2+1 \;\; \Leftrightarrow \;\; (x,y) = (0,1/2),\; (x,y) = (1,1),\; (x,y) = (-1,1)$$

e perciò:

$$Hf(0,1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui $(0,1/2)$ è punto di minimo locale; poi

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$Hf(0,1/2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi i punti $(\pm 1, 1)$ sono due selle.

✍ **Esercizio 5.2.5.** *Per quali valori del parametro α il punto $(0,0)$ è un punto di minimo per la funzione $f(x,y) = (x+5y)(2x-\alpha y)$?*

□ − 10 □0 □5 □nessuno

È sufficiente studiare la matrice Hessiana di f in $(0,0)$, quindi andiamo a calcolare le derivate seconde della funzione. Si ha

$$f_x(x,y) = 4x - \alpha y + 10y \qquad f_y(x,y) = -\alpha x + 10x - 10\alpha y$$

da cui

$$f_{xx}(x,y) = 4 \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 10 - \alpha \quad f_{yy}(x,y) = -10\alpha$$

da cui chiaramente

$$f_{xx}(0,0) = 4 \quad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(0,0) = 10 - \alpha \quad f_{yy}(0,0) = -10\alpha$$

Siccome $f_{xx}(0,0) > 0$, affinché $(0,0)$ sia minimo per f, è sufficiente che il determinante della matrice Hessiana sia > 0. Quindi si ha che

$$\det Hf(0,0) = -40\alpha - (10-\alpha)^2 = -\alpha^2 - 20\alpha - 100 = -(\alpha+10)^2 \leq 0$$

quindi l'unico valore dubbio per cui serve un ulteriore controllo è $\alpha = -10$. Per tale valore di α il determinante della matrice Hessiana di f in $(0,0)$ si annulla, quindi occorre studiare il segno della funzione nell'intorno dell'origine.

Si ha

$$f(x,y) = (x+5y)(2x+10y) = 2(x+5y)^2 \geq 0;$$

visto che $f(0,0) = 0$ si ha chiaramente che l'origine è un punto di minimo; quindi la risposta corretta è $\alpha = -10$.

✍ **Esercizio 5.2.6.** *La funzione* $f(x,y) = e^{-x^2}(x^2+y^2)$ *sul dominio* $x > 0$, $-1 < y < 1$ *ha*

□nessun punto critico □un minimo locale □un punto critico □un massimo locale

✍ **Esercizio 5.2.7.** *Quanti sono i punti stazionari vincolati della funzione* $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ *con vincolo la retta di equazione* $y + x = 1$*?*

□0 □infiniti □1 □2

✍ **Esercizio 5.2.8.** *Se* $f(x,y) = xy$ *e* $g(x,y) = x+y$*, quale e' sempre vera?*

□fg ha massimo □$g^2 - 2f$ ha minimo □$2f + g^2$ ha massimo □$2g + f^2$ ha minimo

5.2.2. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 5.2.9.** *Sia data la funzione* $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + \frac{1}{2}x$.

(i) Si determinino i suoi punti stazionari in $\mathbb{R}^2$, *e se ne studi la natura.*
(ii) Si dica se essa ammette massimo assoluto e minimo assoluto nell'insieme (ellisse)

$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4\,y^2 \leq 4\right\},$$

e in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.

(i) I punti stazionari per una funzione sono quelli che annullano il gradiente della funzione stessa. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(2x + \frac{1}{2}, 6y\right)$$

da cui

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

Quindi $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è l'unico punto stazionario per f.
Proviamo a studiarne la natura con il test della matrice Hessiana. Si ha

$$f_{xx}(x,y) = 2 \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 0 \qquad f_{yy}(x,y) = 6$$

da cui

$$Hf\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Poiché il determinante della matrice Hessiana uguale a $12 > 0$ e $f_{xx}\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = 2 > 0$, si può senz'altro dire che $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è un punto di minimo relativo per f.

(ii) La funzione data è continua, l'insieme dato (che è un'ellisse e che chiameremo d'ora in avanti E) è chiuso e limitato, quindi il massimo e il minimo assoluto della funzione su E esistono per il teorema di Weierstrass.
$\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ è l'unico punto che annulla il gradiente di f come visto al punto (i), ed appartiene ad E; la funzione è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ e dunque non ci sono punti singolari; resta quindi da studiare il comportamento lungo il bordo dell'ellisse, che possiamo riscrivere come $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1$.
Per fare ciò parametrizziamo il bordo:

$$\begin{cases} x = 2\cos\vartheta \\ y = \sin\vartheta \end{cases}$$

Possiamo perciò riscrivere

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4\cos^2\vartheta + 3\sin^2\vartheta + \cos\vartheta \\ &= 4\cos^2\vartheta + 3 - 3\cos^2\vartheta + \cos\vartheta \\ &= \cos^2\vartheta + \cos\vartheta + 3 \\ &= \tilde{f}(\vartheta) \end{aligned}$$

Allora $\tilde{f}'(\vartheta) = -2\cos\vartheta\sin\vartheta - \sin\vartheta = -\sin\vartheta\,(2\cos\vartheta + 1)$, dunque la derivata sul bordo si annulla quando $\sin\vartheta = 0$ oppure $\cos\vartheta = -1/2$, dunque per

$$\vartheta = 0\ ,\ \pi\ ,\ \frac{2}{3}\pi\ ,\ \frac{4}{3}\pi.$$

Resta perciò da calcolare il valore della funzione nei punti corrispondenti a tali valori di ϑ:

$$\begin{aligned} &\tilde{f}(0) = 5 = f(2,0) \\ &\tilde{f}(\pi) = 3 = f(-2,0) \\ &\tilde{f}\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{29}{4} = f\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\tilde{f}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{29}{4} = f\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

Inoltre sappiamo che $f\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{1}{16}$.
Possiamo concludere che il massimo assoluto di f su E vale $\frac{29}{4}$ ed è assunto nei punti $\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(-1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, mentre il punto di minimo assoluto, in cui f vale $-\frac{1}{16}$, è $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$.

✍ **Esercizio 5.2.10.** *Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di*

$$f(x,y) = x^2y + xy^2 - xy$$

sull'insieme $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$.

Prima di tutto osserviamo che la funzione data è continua, il vincolo proposto è un insieme chiuso e limitato quindi dal Teorema di Weierstrass esistono il massimo e il minimo assoluti di f su T. Osserviamo inoltre che $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$ quindi non esistono punti di non differenziabilità. Cerchiamo i punti stazionari della funzione:

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy + y^2 - y, x^2 + 2xy - x\right),$$

quindi

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x+y-1)=0 \\ x(x+2y-1)=0 \end{cases}.$$

I punti che soddisfano questo sistema sono $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ e $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, e sono quindi i punti critici della funzione. I primi tre sono sulla frontiera di T, mentre il quarto è interno ad esso. In questo punto la funzione vale $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}$. Invece, essendo $f(x,y) = xy(x+y-1)$, abbiamo che $f(x,y)$ è identicamente nulla sulla frontiera di T.
Quindi il punto di minimo assoluto è $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, mentre il massimo assoluto della funzione è zero e viene assunto sulla frontiera di T.

5.2.3. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 5.2.11.** *Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se le seguenti funzioni ammettono massimo assoluto e minimo assoluto negli insiemi chiusi e limitati rispettivamente indicati e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.*

1)$f(x,y) = 2x^2 - 3xy + y^2$ su $Q = [-1,1]\times[-1,1]$
2)$f(x,y) = x + y + xy$ su $S = \{(x,y) : x \geq 0,\ \ y \geq 0,\ \ x^2+y^2 \leq 1\}$
3)$f(x,y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2$ su $S = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$
4)$f(x,y) = xy + y^2 - y\sqrt{x}$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
5)$f(x,y) = (x-1)^2 y + (y-2)^2 - 4$ su $E = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 9 - (x-1)^2\}$
6)$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$ su $E = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ \ x-5 \leq y \leq 0\}$
7)$g(x,y) = x^2 - y^2$ su $Q = [-1,1]\times[-1,1]$
8)$f(x,y) = (x-1)\,e^{xy}$ su $R = [0,3]\times[-1,0]$
9)$f(x,y) = 3\,y^2\,x - x^3 + y^2$ su $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq 1\}$
10)$f(x,y) = 4\,x\,y + 4\,x$ su $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 5x^2 + 5\,y^2 - 6\,x\,y - 6\,x + 10\,y + 4\ \leq\ 0\}$

R.

1) $\min_Q f = -\frac{1}{8} = f\left(\frac{3}{4}, 1\right)$, $\max_Q f = 6 = f(-1, 1)$

2) $\min f = f(0, 0) = 0$ $\max f = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$.

3) $\max f = 1 = f(\pm 1, 0)$ $\min f = -2 = f(0, \pm 1)$

4) $\max_A f = 1 = f(1, 1)$ $\min_A f = -\frac{1}{64} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$

5) $\min_E f = -4 = f(1, 2)$, $\max_E f = 45 = f(1, 9)$

6) $\min_E f(x, y) = f(1, -3) = -10$ $\max_E f(x, y) = f(0, 0) = f(2, 0) = 0$

7) $\max_Q g = 1 = g(1, 0) = g(-1, 0)$ $\min_Q g = -1 = g(0, -1) = g(0, 1)$

8) $\max_R f = 2 = f(3, 0)$ $\min_R f = -1 = f(0, y),\ y \in [-1, 0]$

9) $\min_R f = -8 = f(2, 0)$ $\max_R f = 3 = f(1, 1)$

10) $\max_E f = 1 = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ $\min_E f = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}\right) = f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right)$

Esercizio 5.2.12. *Si dica, giustificando la risposta sulla base della teoria, se le seguenti funzioni ammettono massimo assoluto e minimo assoluto negli insiemi chiusi e limitati rispettivamente indicati e, in caso di risposta affermativa, determinare punti e valore di massimo assoluto e di minimo assoluto.*

11) $f(x, y) = \log(1 + x^2 - xy + 2y^2)$ su triangolo chiuso di vertici $(-1, -1), (-1, 1)$ e $(2, 1)$

12) $f(x, y) = 2x^2 + y^2 + x$ su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

13) $f(x, y, z) = e^{x+y^2+z}$ su $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 - x - z - 1 = 0\}$

14) $f(x, y) = x - e^x(y^2 + 1)$ su $R = [-1, 1] \times [-\sqrt{e-1}, \sqrt{e-1}]$

15) $f(x, y) = 8x^2 + 2y^2 + 2xy - 1$ su quadrato chiuso di centro l'origine degli assi e lato 2

16) $f(x, y) = \arctan(x^2 + 2\,y^2)$ su $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 2 - x\}$

17) $f(x, y) = e^{x\,y}\, x\, y$ su $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}$

18) $f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2\,(y^2 - 5) + y^2\,(x^2 - 5) + 6$ su $D = \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right] \times \left[-\sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{5}{2}}\right]$.

➠ **R.**

11) $\max_T f(x,y) = f(-1,1) = f(2,1) = \log 5$ $\min_T f(x,y) = f(0,0) = 0$
12) $\max_C f = 3 = f(1,0)$ $\min_C f = -1/8 = f(-1/4,0)$
13) $\max_S f = e^3 = f(1,1,1) = f(1,-1,1)$ $\min_S f = e^{1-\sqrt{3}} = f\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$
14) $\min_R f(x,y) = 1-e^2 = f(1,\pm\sqrt{e-1})$ $\max_R f(x,y) = -1 = f(0,0)$
15) $\min_Q f = -1 = f(0,0)$ $\max_Q f = 11 = f(-1,-1) = f(1,1)$
16) $\min_A f(x,y) = \arctan\frac{8}{3} = f\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$ $\max_A f(x,y) = \arctan 8 = f(0,2)$
17) $\max_A f = \frac{1}{2}e^{1/2} = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\min_A f = -\frac{1}{2}e^{-1/2} = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
18) $\min_D f = -1/4 = f(\pm\sqrt{5/2},0) = f(0,\pm\sqrt{5/2})$,
$\max_D f = 6 = f(0,0)$
$= f(\pm\sqrt{5/2},\pm\sqrt{5/2}) = f(\mp\sqrt{5/2},\pm\sqrt{5/2})$

✍ **Esercizio 5.2.13.** *Trovare, se esistono, i punti dell'insieme*

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 - xy + y^2 - z = 1 \ , \ x^2 + y^2 = 1\right\}$$

che hanno minima e massima distanza dall'origine $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$. *(Suggerimento: poiché i punti che rendono minima/massima la distanza sono anche punti di minimo/massimo per il quadrato della distanza, si tratta di ottimizzare la funzione* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ *soggetta ai vincoli che definiscono* M*...)*

➠ **R.** I punti che hanno massima distanza dall'origine (pari a 3/2) sono $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ e $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$.
I punti che hanno minima distanza dall'origine sono $(\pm 1, 0, 0)$ e $(0, \pm 1, 0)$, e la distanza vale 1.

✍ **Esercizio 5.2.14.** *Dato l'insieme chiuso e limitato* $Q = [0,1] \times [0,1] := \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ *determinare il massimo e il minimo su* Q *delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned} &a) f(x,y) = x^2 + 3y^2 - xy - y \\ &b) f(x,y) = \frac{1}{2}x - y \\ &c) f(x,y) = e^{x+y} \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 5.2.15.** *Dato il triangolo chiuso T di vertici $P_1 = (1,0), P_2 = (0,1), P_3 = (-1,0)$ determinare il massimo e il minimo su T delle seguenti funzioni:*

$$a) f(x,y) = x^2 + 3y^2 - x$$
$$b) f(x,y) = x^4 + 4xy - 2y^2$$
$$c) f(x,y) = x(x+y)e^{y-x}$$
$$d) f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$$

✍ **Esercizio 5.2.16.** *Dato l'insieme chiuso e limitato $A = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 2\}$, determinare massimo e minimo su A delle seguenti funzioni:*

$$a) f(x,y) = x + xy^2 - x^2y$$
$$b) f(x,y) = x^2 + \alpha y^2 (\alpha \in \mathbb{R} \text{ fissato})$$
$$c) f(x,y) = (y+1)e^{xy}$$
$$d) f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$$

✍ **Esercizio 5.2.17.** *Dato l'insieme chiuso e limitato $A = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$, determinare massimo e minimo su A delle seguenti funzioni:*

$$a) f(x,y) = x^4 + y^4$$
$$b) f(x,y) = x^m y^n (m,n > 0 \text{ fissati})$$
$$c) f(x,y) = e^{x+y}$$

✍ **Esercizio 5.2.18.** *Dato gli insiemi chiusi e limitati* $V_1 = \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1\}$ *e* $V_2 = \{(x,y) : x^2 - xy + y^2 \leq 1\}$ *ìdeterminare massimo e minimo su* V_1 *e* V_2 *delle seguenti funzioni:*

$$a) f(x,y) = xy$$
$$b) f(x,y) = x^2 + 3y$$

✍ **Esercizio 5.2.19.** *Dato l'insieme chiuso e limitato* $A = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ *determinare massimo e minimo su* A *delle funzioni*

$$a) f(x,y,z) = xyz$$
$$b) f(x,y,z) = x + y - z$$

✍ **Esercizio 5.2.20.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2$$

nell'insieme chiuso e limitato $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

✍ **Esercizio 5.2.21.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = e^{-x^2+y-z^2}$$

nell'insieme chiuso e limitato $S = \{(x,y,z) : x^2/4 + y^2 + 3z^2 \leq 1\}$.

✍ **Esercizio 5.2.22.** *Trovare il massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 - \frac{1}{2}xy$$

nell'insieme chiuso e limitato $x^2 + 4y^2 - 4 \leq 0$.

✍ **Esercizio 5.2.23.** *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

è dotata di massimo e di minimo. Si determinino tali valori.

✍ **Esercizio 5.2.24.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y,z) = (x + y + z)^2$$

sotto la condizione $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.25.** *Si determinino i punti della superficie*

$$f(x,y,z) = z^2 - xy - 1 = 0$$

più vicini all'origine.

✍ **Esercizio 5.2.26.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 + xy)^2$$

sotto la condizione $x^2 + y^2 = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.27.** *Si dimostri che la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2 + 3xy + y^2}{2x^2 + 3xy + 2y^2}$$

è dotata di massimo e di minimo. Si determinino tali valori.

✍ **Esercizio 5.2.28.** *Si determini il rettangolo con i lati paralleli agli assi, iscrivibile nell'ellisse di equazione*

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

che ha area massima.

✍ **Esercizio 5.2.29.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + y^2 - 1$$

nell'insieme chiuso e limitato $\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

✍ **Esercizio 5.2.30.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x,y) = |y - 1|(2 - y - x^2)$$

nell'insieme chiuso e limitato $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2 - x^2 - y^2\}$.

✍ **Esercizio 5.2.31.** *Siano*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{4 - x^2 - y^2} & x^2 + y^2 \neq 4 \\ 1 & x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

e $D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq \sqrt{2}\ \ a \in (0, \sqrt{2})\}$. *Si calcolino massimo e minimo di* f *in* D_a *e poi si determini estremo superiore e inferiore di* f *in* $D_{\sqrt{2}}$.

✍ **Esercizio 5.2.32.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x, y) = \log(1 + x + y + \sqrt{y^2 - x})$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -y < x < y^2,\ y \leq 2\}$.

✍ **Esercizio 5.2.33.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x, y) = e^{x^2+y^2} - \frac{1}{2}x^2 - y^2$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 4y^2 \leq 4,\ \ y \geq \frac{1}{2}\}$.

✍ **Esercizio 5.2.34.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x, y) = y^2(x^2 + y^2 - 2x)$$

nell'insieme chiuso e limitato $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 4,\ \ x^2+y^2-2x-2y < 0,\ \ y > 0\}$.

✍ **Esercizio 5.2.35.** *Si determinino il massimo e il minimo di*

$$f(x, y) = x^2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

nella sfera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

✍ **Esercizio 5.2.36.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x, y) = 4x(x^2 - y^2) - 3x^2 + y^2$$

vincolati a

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{4}.$$

✍ **Esercizio 5.2.37.** *Siano $f(x,y) = x$ e $g(x,y) = y^2 - x^3$. Mostrare che $(0,0)$ è di minimo per f vincolato a $g(x,y) = 0$, ma che non è critico per f cioè non esiste alcun λ che verifichi l'uguaglianza*

$$\nabla f(0,0) = \lambda \nabla g(0,0).$$

✍ **Esercizio 5.2.38.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x,y) = (y - x^2)^3$$

nella regione

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.39.** *In un riferimento cartesiano ortogonale si consideri l'ellisse γ intersezione dell'iperboloide di equazione $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ col piano di equazione $x + y + 2z = 0$; si determinino i punti di γ aventi quota minima e massima.*

✍ **Esercizio 5.2.40.** *Siano $f(x,y) = (y - x^2)(x - y^2)$ e $g(x,y) = y - x$. Si determinino i punti di estremo per f vincolati a $g = 0$. I punti trovati sono anche di estremo libero per f?*

✍ **Esercizio 5.2.41.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = (1 - x^2 - 4y^2)^2$$

nel quadrato

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, \ \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.42.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

nel dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} - 1 \le y \le \frac{1-|x|}{2}\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.43.** *Applicando il metodo delle curve di livello, si determinino gli estremi locali e globali della funzione*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$$

nel dominio

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-2)^2 \le 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.44.** *Si determinino, al variare di $m \in \mathbb{R}$, gli estremi della funzione*

$$f(x,y) = y - mx$$

nel dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ y \le 3 - x,\ \ y \le 1 - \frac{x}{4}\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.45.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(2 + x^2 + y^2)^2}$$

è dotata di estremi assoluti nella striscia

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le y \le 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.46.** *Si verifichi che la funzione*

$$f(x,y) = e^{-x^2-2y} - e^{-2x^2-y}$$

è dotata di estremi assoluti nell'insieme

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \;\; y \geq 0\}.$$

Si calcolino tali estremi.

✍ **Esercizio 5.2.47.** *Si determinino gli estremi della funzione*

$$f(x,y) = (x^3y^2 + xy)e^{-x^2y}$$

nel dominio

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq xy\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.48.** *Studiare il campo scalare*

$$f(x,y) = \sin(x+y) - \cos(x-y)$$

su

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq \frac{\pi}{2}, \;\; |y| \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.49.** *Determinare i valori di massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.50.** *Determinare, se esistono, i massimi e i minimi assoluti della funzione*

$$f(x, y) = xye^{x-y}$$

sul dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, \ \ y > 0\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.51.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 - z^2)}$$

sull'insieme

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{2} + y^2 + 3z^2 \leq 1\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.52.** *Si studi la funzione:*

$$f(x, y) = (1 - x^2)(x^2 + y^2)$$

nel dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x + 2\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.53.** *Studiare la funzione:*

$$f(x, y) = |x - 1|\sqrt{x^2 + y^2}$$

nel dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x \leq 3\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.54.** *Studiare la funzione:*

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(2+x^2)^2}$$

sulla striscia

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.55.** *Sia $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo vettoriale:*

$$G(x,y,z) = (G_1(x,y,z), G_2(x,y,z), G_3(x,y,z)) = (e^x + \arctan(y+z) - 1, y^3 + y + z^3, e^z)$$

e $f : \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ il campo scalare:

$$h(x,y,z) = (f \circ G)(x,y,z) = f(G(x,y,z))$$

si provi che h è definito su tutto $\mathbb{R}^3$ e che è non negativo. Si determini inoltre l'unico punto stazionario di h e si provi che è un minimo assoluto.

✍ **Esercizio 5.2.56.** *Si studi la funzione*

$$z = f(x,y) = |2x^2 - 4x + y^2|$$

sul dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.57.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione:*

$$f(x,y) = 4x^2 - y^2 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{4}y^4$$

definita in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, \ \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.58.** *Determinare massimi e minimi assoluti della funzione:*

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2 + 2x$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y - 3 \leq 0\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.59.** *Studiare la funzione:*

$$f(x, y) = |y + 1|\sqrt{x^2 + y^2}$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2y \leq 3\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.60.** *Studiare la funzione:*

$$f(x, y) = 3x^2 + 3xy + y^3$$

definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, \quad |y| \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.61.** *Sia* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (x,y) \in S \\ \arctan \dfrac{1}{(x^2+y^2-1)^2} & (x,y) \notin S \end{cases}$$

dove

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Provare che:
a) f *è differenziabile su tutto* $\mathbb{R}^2$*;*
b) f *è non negativa e limitata e determinare* $f(\mathbb{R}^2)$*;*
c) calcolare i punti stazionari di f *e determinarne la natura (si lascino in funzione di* $x, y, (x^2+y^2-1)$ *le derivate seconde;*
d) f *ha massimo assoluto e non ha minimo assoluto. Determinare* $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

✍ **Esercizio 5.2.62.** *Dato il campo scalare* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = \sqrt{|x| + y^2 + z^2}$$

a) determinare il dominio e il codominio di f*;*
b) determinare il massimo aperto $A \subset \mathbb{R}^3$ *dove* f *è differenziabile e gli eventuali punti critici;*
c) f *ammette massimo e minimo assoluti?*
Inoltre definita

$$\tilde{f}(x,y,z) = \min\{f(x,y,z), \sqrt{2}\}$$

ammette $\tilde{f}$ *massimo e minimo assoluti? In entrambi i casi, se la risposta è affermativa, determinarli.*

✍ **Esercizio 5.2.63.** *Dato il seguente campo scalare*

$$f(x,y,z) = \log x \log y + \log y \log z - \log z \log x$$

se ne determinino:

a) il dominio di definizione D*;*
b) i punti stazionari interni e la loro natura;
c) i valori di $\sup_D f$ *e* $\inf_D f$.

✍ **Esercizio 5.2.64.** *Sia f il campo scalare*

$$f(x,y,z) = 2xy + xz^2$$

e sia

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \;\; x^2 + z^2 - y^2 \leq 1\}.$$

Si provi che f non ammette massimi o minimi relativi interni a D, mentre ammette massimo e minimo assoluti su D.

✍ **Esercizio 5.2.65.** *Studiare la continuità, la derivabilità, la differenziabiltà e determinare i punti di massimo e minimo relativi ed assoluti del campo scalare*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|y^2}{x^2 + y^2} & (x,y) \in D, \;\; (x,y) \notin (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

dove

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.66.** *Si determinino il massimo e il minimo del campo scalare*

$$f(x,y) = (x^2 + y^2 - 4)^2 + 4x^2y^2 - 8$$

sul dominio

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.67.** *Si studi la funzione*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + y & x > 0 \\ 2x + ye^{-x^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

nel dominio

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.68.** *Determinare i massimi e i minimi relativi ed assoluti del campo scalare*

$$f(x,y) = x(y^2 - 1) + z^2 + 2$$

sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 \leq 1\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.69.** *Studiare il campo scalare*

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$$

sul dominio

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + 32y^2 \leq \pi^2\right\}.$$

✍ **Esercizio 5.2.70.** *Calcolare il valore massimo della derivata direzionale della funzione*

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{5}}{6}x^4 + \frac{\sqrt{5}}{12}y^4$$

secondo la direzione del vettore $\boldsymbol{v} = (1,2)$ *al variare di* (x,y) *sulla circonferenza* $x^2 + y^2 = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.71.** *Determinare i massimi e i minimi della funzione*

$$f(x,y,z) = yz$$

per i punti (x,y,z) *che appartengono alla varietà unidimensionale definita dal sistema*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y+z=1 \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.2.72.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y,z) = x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9}$$

per i punti che appartengono alla varietà bidimensionale

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.73.** *Determinare la minima distanza dal punto* $(0,0,1)$ *dei punti appartenenti alle superfici*

$$x^2 + (y-1)^2 + z = 0, \qquad x^2 + y^2 + z + 1 = 0.$$

Determinare poi la massima distanza per i punti che in più soddisfano $x \in [-1,1]$.

✍ **Esercizio 5.2.74.** *Calcolare il valore massimo e minimo della funzione*

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2$$

sulla superficie

$$g(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2 + 2x - 2y + z = 0.$$

✍ **Esercizio 5.2.75.** *Determinare il valore massimo e minimo della derivata direzionale della funzione*

$$f(x, y, z) = x^3 + \frac{y^3}{2} + z^3$$

secondo la direzione del vettore $(2, 2, 1)$ *al variare di* (x, y, z) *sulla superficie* $x^2yz = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.76.** *Determinare i punti dello spazio* $\mathbb{R}^3$ *che hanno massima e minima distanza dall'asse* z *e che inoltre appartengono alla varietà unidimensionale definita dalle equazioni*

$$x^2 + y^2 + 7z^2 = 1, \qquad x + y + z = 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.77.** *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x, y) = y$ *per punti che soddisfano la condizione:*

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4x^2 - 1 = 0.$$

✍ **Esercizio 5.2.78.** *Determinare il valore massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2 + y - 4z$$

nell'insieme G *varietà unidimensionale definita da:*

$$\begin{cases} 2x^2 + 2z^2 = y \\ \sqrt{2}x + 4z = y. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.2.79.** *Determinare i punti e i valori di massimo e minimo del campo scalare:*

$$f(x,y) = \int_0^{x+y^2} e^{-t^2}\,dt$$

quando il punto $P(x,y)$ *appartiene alla curva*

$$2x^2 + y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.80.** *Si determinino i massimi e i minimi assoluti del campo scalare*

$$f(x,y,z) = \arctan(x^2y^2z)$$

sulla curva γ *determinata dall'intersezione delle superfici di equazione, rispettivamente*

$$x^2 - z = 0, \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.81.** *Determinare massimo e minimo della funzione* $f(x,y) = x$ *per punti che soddisfano alla condizione*

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 4y^2 - 1 = 0.$$

✍ **Esercizio 5.2.82.** *Determinare i punti e i valori di massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x,y,z) = xy^2$$

per i punti $P(x,y,z)$ *appartenenti alla varietà unidimensionale:*

$$x^2 + y^2 = 4, \qquad z = x + 2.$$

✍ **Esercizio 5.2.83.** *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ il campo scalare*

$$f(x, y, z) = 2xy - xz^2$$

a) si determinino il valore massimo e minimo che f assume sulle curve di equazione rispettivamente:

$$\gamma_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

e

$$\gamma_2 : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

b) si provi poi che le due curve γ_1, γ_2 coincidono con l'intersezione delle due superfici

$$\sigma_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 3, \qquad \sigma_2 : x^2 + z^2 - y^2 = 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.84.** *Si determinino i massimi e minimi del campo scalare*

$$f(x, y, z) = 3x^2 + (y - 1)z^3 + xz[\arctan y - \sin y]$$

vincolati ad appartenere alla varietà unidimensionale γ definita dall'intersezione delle due superfici di equazione, rispettivamente

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1, \qquad x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 5.$$

✍ **Esercizio 5.2.85.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = 1 - 4y - 4x^2$$

sulla varietà unidimensionale definita dal sistema

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2 \\ y(1 + x^2) = 4. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.2.86.** *Determinare il valore massimo e minimo del campo scalare*

$$f(x, y, z) = z^2 - x$$

sulla varietà unidimensionale definita dal sistema

$$\begin{cases} 2y^2 + z^2 = 1 \\ x(1 + z^2) = 4. \end{cases}$$

✍ **Esercizio 5.2.87.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = x - x^2 + y^2$$

nel rettangolo

$$0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.88.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy - 2x$$

nel rettangolo

$$-1 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.89.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = xy - y^2$$

nel disco

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.90.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = x + 2y$$

nel disco

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.91.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = xy - x^3y^2$$

nel quadrato

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

✍ **Esercizio 5.2.92.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = xy(1 - x - y)$$

nel triangolo con vertici $(0,0), (1,0), (0,1)$.

✍ **Esercizio 5.2.93.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x,y) = \sin x \cos y$$

nella regione triangolare chiusa delimitata dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = 2\pi$.

✍ **Esercizio 5.2.94.** *Determinare il valore massimo di*

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

nel triangolo delimitato dagli assi coordinati e dalla retta $x + y = \pi$.

✍ **Esercizio 5.2.95.** *La temperatura in tutti i punti del disco* $x^2 + y^2 \leq 1$ *è data da*

$$T = (x + y)e^{-x^2 - y^2}.$$

Determinare la temperatura massima e la temperatura minima nel disco.

✍ **Esercizio 5.2.96.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = \frac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$$

nel semipiano superiore $y \geq 0$.

✍ **Esercizio 5.2.97.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xy^2 + yz^2$$

nella palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

✍ **Esercizio 5.2.98.** *Determinare i valori massimo e minimo di*

$$f(x, y) = xz + yz$$

nella palla $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

✍ **Esercizio 5.2.99.** *Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per massimizzare* $f(x, y) = x^3y^5$ *soggetta al vincolo* $x + y = 8$.

✍ **Esercizio 5.2.100.** *Determinare la distanza minima del punto* $(3,0)$ *dalla parabola* $y = x^2$ *riducendo il problema a un problema svincolato in una variabile e usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

✍ **Esercizio 5.2.101.** *Determinare la distanza dell'origine dal piano* $x + 2y + 2z = 3$ *mediante un ragionamento puramente geometrico, riducendo il problema a un problema senza vincoli in due variabili e usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.*

✍ **Esercizio 5.2.102.** *Determinare il valore massimo e il valore minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y - z$$

sulla superficie sferica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.103.** *Usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per determinare la distanza massima e quella minima del punto* $(2, 1, -2)$ *dalla superficie sferica di equazione* $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.104.** *Determinare la distanza minima dell'origine dalla superficie* $xyz^2 = 2$.

✍ **Esercizio 5.2.105.** *Determinare* a, b, c *in modo che il volume* $V = 4\pi abc/3$ *di un ellissoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

passante per il punto $(1, 2, 1)$ *sia il più piccolo possibile.*

✍ **Esercizio 5.2.106.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = xyz$$

sulla sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 12$.

✍ **Esercizio 5.2.107.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

sull'ellissoide $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq 108$.

✍ **Esercizio 5.2.108.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x$$

sulla curva di intersezione del piano $z = x + y$ *con l'ellissoide* $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 8$.

✍ **Esercizio 5.2.109.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sull'ellisse che risulta dall'intersezione del cono $z^2 = x^2 + y^2$ *con il piano* $x - 2z = 3$.

✍ **Esercizio 5.2.110.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = 4 - z$$

sull'ellisse che risulta dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 8$ *con il piano* $x + y + z = 1$.

✍ **Esercizio 5.2.111.** *Determinare i valori massimo e minimo della funzione*

$$f(x, y, z) = x + y^2 z$$

soggetta ai vincoli $y^2 + z^2 = 2$ *e* $z = x$.

✍ **Esercizio 5.2.112.** *Determinare i punti critici di*

$$f(x, y) = (x - 1)^2 y + (y - 2)^2 - 4$$

per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e studiarne la natura. Disegnare quindi l'insieme*

$$E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 9 - (x - 1)^2\}$$

e determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f *in* E *dopo averne dimostrato l'esistenza.*

✍ **Esercizio 5.2.113.** *Determinare i punti critici di*

$$f(x, y) = (x - 2)^2 y + (y - 2)^2 - 4$$

per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *e studiarne la natura. Disegnare quindi l'insieme*

$$E = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 9 - (x - 2)^2\}$$

e determinare i punti di minimo e di massimo assoluto di f *in* E *dopo averne dimostrato l'esistenza.*

✍ **Esercizio 5.2.114.** *Sia* $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 6y$. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra il punto* $(3, -1)$ *e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di* f *sull'insieme* $E = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2,\ \ x - 5 \leq y \leq 0\}$.

✍ **Esercizio 5.2.115.** *Sia* $f(x,y) = x^2+y^2+2x-6y$. *Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di* f *sopra il punto* $(-2,4)$ *e determinare gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti di* f *sull'insieme* $E = \{(x,y) : -2 \leq x \leq 0, \ \ 0 \leq y \leq x+5\}$.

CAPITOLO 6

Esercizi riguardanti integrali doppi e tripli

6.1. Integrali doppi

6.1.1. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 6.1.1.** *Calcolate l'integrale di* $3xy^2 + x^2y$ *sul rettangolo* $[1,3] \times [0,1]$.

SOLUZIONE. Il dominio è sia $x-$semplice che $y-$semplice. Si ha dunque

$$I = \int_1^3 \left(\int_0^1 (3x\,y^2 + x^2\,y)\,dy \right) dx = \int_1^3 \left[3\,x\,\frac{y^3}{3} + x^2\,\frac{y^2}{2} \right]_0^1 dx = \int_1^3 \left(x + \frac{x^2}{2} \right) dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right]_1^3 = \frac{9}{2} + \frac{27}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{25}{3}.$$

✍ **Esercizio 6.1.2.** *Si calcoli l'integrale della funzione* $f(x,y) = x^2\,y$ *esteso al triangolo di vertici* $(0,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi,0)$.

Sia T il triangolo dato dal problema. Il dominio T è sia $x-$semplice che $y-$semplice. Ad esempio può essere descritto nel modo seguente

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le x \le \pi \;\vee\; 0 \le y \le \pi - x\}$$

allora

$$\begin{aligned}\int_T x^2\, y\, dx\, dy &= \int_0^\pi dx \int_0^{\pi-x} dy\, x^2\, y = \int_0^\pi x^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\pi-x} = \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2(\pi-x)^2\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{2}\int_0^\pi x^2\, dx - \pi\int_0^\pi x^3\, dx + \frac{1}{2}\int_0^\pi x^4\, dx = \frac{\pi^2}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi - \pi\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi^5}{6} - \frac{\pi^5}{4} + \frac{\pi^5}{10} = \frac{\pi^5}{60}.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 6.1.3.** *Calcolare*

$$\int\int_E f(x,y)dxdy,$$

dove $f(x,y) = x+y$ *e*

$$E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0\right\}\cup\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ xy\ge 0\right\}.$$

Osserviamo che E non è semplice, però è regolare. Infatti, detti

$$\begin{aligned}E_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x,y\ge 0\right\}\\ E_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ y\ge 0,\ x\le 0\right\}\\ E_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 1\le x^2+y^2\le 4,\ x,y\le 0\right\},\end{aligned}$$

allora possiamo scrivere $E = E_1\cup E_2\cup E_3$, e poiché questi tre insiemi sono x-semplici, abbiamo che E è regolare.
Inoltre, E_1, E_2 e E_3 si intersecano vicendevolmente solo sul bordo (quindi $E_i\cap E_j$ ha area nulla). Perciò, grazie a una proprietà dell'integrale doppio,

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_1} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{E_3} f(x,y)dxdy.$$

Notiamo subito che, per simmetria,

$$\int\int_{E_1} f(x,y)dxdy \;=\; -\int\int_{E_3} f(x,y)dxdy \;:$$

infatti, E_1 ed E_3 sono simmetrici rispetto all'origine, mentre f è dispari; ovvero:

$$\begin{gathered}(x,y)\in E_1 \Leftrightarrow (-x,-y)\in E_3\\ f(x,y) = -f(-x,-y).\end{gathered}$$

Ne consegue che i due integrali sono opposti. Perciò è sufficiente calcolare

$$\int\int_E f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy.$$

Per calcolare l'integrale su E_2 scomponiamo ulteriormente questo dominio in $E_2 = E_2' \cup E_2''$, dove

$$\begin{aligned} E_2' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -2 \le x \le -1,\; 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\} \\ E_2'' &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; -1 \le x \le 0,\; \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}. \end{aligned}$$

A loro volta questi due insiemi sono semplici e si intersecano solo sul bordo; quindi

$$\int\int_{E_2} f(x,y)dxdy \;=\; \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy \;+\; \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy.$$

Ora,

$$\begin{aligned} \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy \;&=\; \int_{-2}^{-1}\int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)dydx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-2}^{-1} \left(x\sqrt{4-x^2} + \frac{4-x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + 2x - \frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{-1} \\ &= \frac{5}{6} - \sqrt{3}, \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy \;&=\; \int_{-1}^{0}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x+y)dydx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^{0} \left(x\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{1-x^2} + \frac{4-x^2-1+x^2}{2}\right) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}(4-x^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + \frac{3}{2}x\right)\Bigg|_{-1}^{0} \\ &= \sqrt{3} - \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int\int_E f(x,y)dxdy = \int\int_{E_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{E_2'} f(x,y)dxdy + \int\int_{E_2''} f(x,y)dxdy = 0.$$

✍ **Esercizio 6.1.4.** *Si calcoli l'integrale doppio*

$$\int\int_D (x^2+1)\,dx\,dy,$$

ove D è la parte dell'ellisse $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+4\,y^2 \le 1\}$ contenuta nel primo quadrante.

Descriviamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di coordinate

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \dfrac{1}{2}\,\rho\,\sin\theta \end{cases}$$

con le seguenti limitazioni per le variabili ρ e θ

$$0 \le \rho \le 1 \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Calcoliamo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione. Si ha

$$J = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\sin\theta \\ \dfrac{1}{2}\,\sin\theta & \dfrac{1}{2}\,\rho\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J = \frac{1}{2}\,\rho\,\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\rho\,\sin^2\theta = \frac{1}{2}\,\rho.$$

Quindi

$$\int\int_D (x^2+1)\,dx\,dy = \int_0^1 d\,\rho \int_0^{\pi/2} d\theta\,\frac{1}{2}\,\rho\,(\rho^2\,\cos^2\theta+1) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\int_0^1 \rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} d\,\theta\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^1 \left(\frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{2}\,\sin\theta\cos\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} + \frac{1}{2}\,\frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^1\,\theta\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{32}+\frac{\pi}{8} = \frac{5}{32}\,\pi.$$

Come appendice ricordiamo due modi di calcolare la primitiva di $\cos^2\theta$.

primo modo.

$$\int\cos^2\theta\,d\theta = \int\cos\theta\,\cos\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int\sin^2\theta\,d\theta = \cos\theta\,\sin\theta + \int(1-\cos^2\theta)\,d\theta$$

da cui

$$2 \int \cos^2\theta \, d\theta = \theta + \cos\theta \, \sin\theta.$$

SECONDO MODO.

$$\int \cos^2\theta \, d\theta = \int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \, d\theta = \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{2} \int \cos(2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{4}\, \sin(2\theta) = \frac{1}{2}\,\theta + \frac{1}{2}\, \sin\theta\, \cos\theta.$$

Esercizio 3

Calcolare il seguente integrale doppio

$$\int\int_C (2x^2 + 8y^2 + 3x + 6y)\, dx\, dy,$$

dove

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 2x^2 + 8y^2 \le 1\}.$$

SOLUZIONE. Parametrizziamo l'ellisse attraverso il seguente cambio di variabili:

$$\begin{cases} x = \rho\, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta \\ y = \rho\, \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi] \;\; 0 \le \rho \le 1.$$

Si verifica facilmente che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione di coordinate vale $\frac{1}{4}\,\rho$.

Quindi

$$\begin{aligned}
&\int\int_C (2x^2 + 8y^2 + 3x + 6y)\, dx\, dy \\
=& \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\rho^2 \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\theta + 3\,\rho\, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\theta + 6\,\rho\, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\theta \right) \frac{\rho}{4}\, d\rho\, d\theta \\
=& \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^3\, d\rho\, d\theta + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \cos\theta + \frac{3}{\sqrt{2}} \sin\theta \right] d\theta\, d\rho \\
=& \frac{1}{4} \left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) + \frac{3}{4\sqrt{2}} \left(\int_0^1 \rho^2\, d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} (\cos\theta + \sin\theta)\, d\theta \right) \\
=& \left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \left.\frac{\rho^3}{3}\right|_0^1 \left[\sin\theta - \cos\theta\right]\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\, [0] = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 6.1.5.** *Calcolare* $\iint_A (|x|y^2 - 3|x|)dxdy$, *ove* $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 9,\ |y| \le x,\ x \ge 0\}$.

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari. Si ha

$$A = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) :\ 1 \le \rho \le 3\ \wedge\ [0 \le \theta \le \pi/4\ \vee\ 7/4\,\pi \le \theta \le 2\,\pi]\}$$

ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che

$$A = \{(\rho, \theta) :\ 1 \le \rho \le 3\ \wedge\ -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_A (|x|y^2 - 3|x|)\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^3 d\rho\,\rho\,\rho^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta - \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^3 3\,\rho\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,\rho$$

$$= \left(\int_1^3 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\right) - 3\left(\int_1^3 \rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta\,d\theta\right)$$

$$= \frac{\rho^5}{5}\bigg|_1^3 \frac{\sin^3\theta}{3}\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} - 3\,\frac{\rho^3}{3}\bigg|_1^3 \sin\theta\bigg|_{-\pi/4}^{\pi/4} = \left[\frac{243}{5} - \frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] - 3\left[9 - \frac{1}{3}\right] 2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{269}{15}\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 6.1.6.** *Calcolare il seguente integrale*

$$\int\int_A (30xy^2 + 3x)\,dx\,dy,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ |y| \le x,\ x \ge 0\right\}.$$

Parametrizziamo l'insieme A per mezzo delle coordinate polari.
Si ha

$$A = \{(\rho, \theta) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ [0 \le \theta \le \pi/4\ \vee\ 7/4\,\pi \le \theta \le 2\,\pi]\}$$

ma data la periodicità delle funzioni $\sin\theta$ e $\cos\theta$ possiamo senz'altro scrivere che

$$A = \{(\rho, \theta) :\ 1 \le \rho \le 2\ \wedge\ -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}.$$

Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione vale ρ. Dunque si ha

$$\int\int_A (30xy^2+3x)\,dx\,dy = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_1^2 d\rho\,\rho\,30\,\rho^3\,\cos\theta\,\sin^2\theta + \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_1^2 3\,\rho\,\cos\theta\,d\rho\,d\theta\,\rho$$

$$= 30\left(\int_1^2 \rho^4\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta\,\sin^2\theta\,d\theta\right) + 3\left(\int_1^2\rho^2\,d\rho\right)\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\cos\theta d\theta\right)$$

$$= 30\,\frac{\rho^5}{5}\Big|_1^2\,\frac{\sin^3\theta}{3}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} + 3\,\frac{\rho^3}{3}\Big|_1^2\,\sin\theta\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 30\,\left[\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right]\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right] + 3\left[\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right]2\,\frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 6.1.7.** *Calcolare*

$$\int\int_D \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$$

con

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \geq 2,\ 0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq \frac{\sqrt{3}}{2}x\right\}$$

Prima di tutto, integrando per parti si ha

$$\begin{aligned}\int \frac{y^3}{(x^2+y^2)^3}\,dy &= \int \frac{y^2}{2}\,\frac{2y}{(x^2+y^2)^3}\\ &= \frac{y^2}{2}\,\frac{(x^2+y^2)^{-2}}{-2} + \int \frac{y}{2}\,\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dy\\ &= -\frac{y^2}{4(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{4(x^2+y^2)} + C\end{aligned}$$

A questo punto poniamo

$$A = \{(x,y) : \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq 2,\ \sqrt{\frac{1}{2}} \leq\ y \leq \sqrt{\frac{1}{3}}x\}$$

$$B = \{(x,y) :\ \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x \leq \sqrt{2},\ \ \sqrt{2-x^2} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$$

$$C = \{(x,y) :\ \sqrt{2} \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{2}}\}$$

e si ha

$$\int\int_D f(x,y) = \int\int_A f(x,y) + \int\int_B f(x,y) + \int\int_C f(x,y)$$

A questo punto

$$\int\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^2 x^2 \int_{\sqrt{\frac{1}{2}}}^{\sqrt{\frac{1}{3}}x} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^3} = ...$$

Esercizio 3
Si calcoli l'integrale della funzione $f(x,y) = x^3 y - e^{x+y} y$ esteso al triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,\pi)$ $(2\pi,0)$.

Il triangolo dato dal problema (che d'ora in poi chiameremo T) può essere visto come dominio $x-$semplice o $y-$semplice. Si ha

$$\int\int_T (x^3\,y - e^{x+y}\,y)\,dx\,dy = I + II.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
I =& \int_0^{2\,\pi} dx \int_0^{-\frac{1}{2}\,x+\pi} x^3\,y\,dy = \int_0^{2\,\pi} x^3\,dx \int_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x} y\,dy = \int_0^{2\,\pi} x^3\,dx \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x} \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{2\,\pi} x^3\left(\pi - \frac{1}{2}\,x\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\,\pi} x^3\left[\pi^2 - \pi\,x + \frac{1}{4}\,x^2\right] dx \\
=& \frac{1}{2}\int_0^{2\,\pi} (\pi^2\,x^3 - \pi\,x^4 + \frac{1}{4}\,x^5)\,dx = \frac{1}{2}\,\pi^2 \frac{x^4}{4}\Big|_0^{2\,\pi} - \frac{\pi}{2}\,\frac{x^5}{5}\Big|_0^{2\,\pi} + \frac{1}{8}\,\frac{x^6}{6}\Big|_0^{2\,\pi} \\
=& \frac{\pi^2}{8}\,16\,\pi^4 - \frac{\pi}{10}\,32\,\pi^5 + \frac{1}{8}\,\frac{1}{6}\,64\,\pi^6 = \pi^6\left[2 - \frac{16}{5} + \frac{4}{3}\right] = \frac{2}{15}\,\pi^6.
\end{aligned}$$

D'altra parte

$$\begin{aligned}
II =& -\int\int_T e^{x+y}\,y\,dx\,dy = -\int_0^{2\,\pi}\int_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x} e^x\,e^y\,y\,dy\,dx = -\int_0^{2\,\pi} e^x\left\{[y\,e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x} - [e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x}\right\} \\
=& -\int_0^{2\,\pi} e^x\,[(y-1)\,e^y]\Big|_0^{\pi-\frac{1}{2}\,x} = -\int_0^{2\,\pi} e^x\left\{\left[\pi - \frac{1}{2}\,x - 1\right] e^{\pi-\frac{1}{2}\,x} + 1\right\} \\
=& -\int_0^{2\,\pi}\left(e^{x+\pi-\frac{1}{2}\,x}\left(\pi - \frac{1}{2}\,x - 1\right) + e^x\right) dx = -(\pi-1)\int_0^{2\,\pi} e^{\pi+\frac{1}{2}\,x}\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} e^{\pi+\frac{1}{2}\,x}\,x\,dx - \int_0^{2\,\pi} e^x\,dx = -(\pi-1)\,e^\pi\,2\,e^{\frac{1}{2}\,x}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\,e^\pi\,[2(x-2)\,e^{\frac{1}{2}\,x}]\Big|_0^{2\,\pi} \\
&- [e^x]\Big|_0^{2\,\pi} = -2\,(\pi-1)\,e^\pi\,(e^\pi - 1) + e^\pi\,[(2\,\pi - 2)\,e^\pi + 2] - e^{2\,\pi} + 1 = -e^{2\,\pi} + 2\,\pi\,e^\pi + 1.
\end{aligned}$$

I conti risultato più semplici se vediamo II come integrale su un dominio $x-$semplice. Si ha infatti

$$-\int\int_T e^{x+y} y\,dx\,dy = -\int_0^{\pi}\int_0^{2(\pi-y)} e^x\,e^y\,y\,dx\,dy = -e^{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-y}\,y\,dy + [(y-1)\,e^y]\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\,e^{2\pi}\,[-(y+1)\,e^{-y}]\Big|_0^{\pi} + (\pi-1)\,e^{\pi}+1 = e^{2\pi}\,[(\pi+1)\,e^{-\pi}-1] + (\pi-1)\,e^{\pi}+1$$

$$= -\,e^{2\pi} + 2\,\pi\,e^{\pi} + 1.$$

Quindi riassumendo

$$\int\int_T (x^3y - e^{x+y}y)\,dx\,dy = \frac{2}{15}\,\pi^6 - e^{2\pi} + 2\,\pi\,e^{\pi} + 1.$$

6.1.2. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 6.1.8.** *Dopo aver verificato l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato, si calcoli l'integrale* $\iint_D f$

$$a) f(x,y) = \frac{1}{(x+y)^2} \qquad D = [3,4]\times[1,2]$$

$$b) f(x,y) = \begin{cases} x+y & x+y-1\geq 0 \\ 2x-y^2 & x+y-1<0 \end{cases} \qquad D = [0,1]\times[0,1]$$

$$c) f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2/2 \leq y \leq x^2,\ \ 1<x<2\}$$

$$d) f(x,y) = \frac{\sin y^2}{y} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq y^2,\ \ 0<y\leq\sqrt{\pi}\}$$

$$e) f(x,y) = xy \qquad T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq 2x-x^2\}$$

$$f) f(x,y) = e^{x+y} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|\leq 1\}$$

$$g) f(x,y) = |y-x| \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\leq x\leq 1,\ \ x^2\leq y\leq 1\}$$

✍ **Esercizio 6.1.9.** *Si calcoli l'integrale di*

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$$

sulla regione

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x, \;\; 1 < x^2+y^2 < 4\}.$$

✍ **Esercizio 6.1.10.** *Si calcoli l'integrale della funzione* $f(x,y) = yx^2 + 2e^{x+y}x$ *esteso al triangolo di vertici* $(0,0)$*,* $(0,\pi)$ $(2\pi,0)$*.*

✍ **Esercizio 6.1.11.** *Si calcoli l'integrale della funzione* $f(x,y) = x\,y^2$ *esteso al triangolo di vertici* $(0,0)$, $(0,-\pi)$, $(-\pi,0)$.

✍ **Esercizio 6.1.12.** *Calcolare* $\iint_A (xy^2 - 3|x|)dxdy$*, ove* $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \;\; |y| \leq x, \;\; x \geq 0\}$.

✍ **Esercizio 6.1.13.** *Calcolare il seguente integrale*

$$\int\int_A (30x^2y + 3y)\,dx\,dy,$$

dove

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, \, |x| \leq y, \, y \geq 0\right\}.$$

✍ **Esercizio 6.1.14.** *Dati gli insiemi*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

determinare l'area di $A \cap B$.

✍ **Esercizio 6.1.15.** *Dato l'insieme* $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$ *si calcolino gli integrali:*

$$a) \int_E y \arcsin x dxdy$$
$$b) \int_E x\sqrt{1 - y^2} dxdy$$
$$c) \int_E xe^y dxdy$$

✍ **Esercizio 6.1.16.** *Dato il triangolo* T *di vertici* $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ *si calcolino gli integrali:*

$$a) \int_T \frac{y}{1 + x + y} dxdy$$
$$b)^* \int_T \frac{y}{\sqrt{1 + x^2}} dxdy$$

✍ **Esercizio 6.1.17.** *Si calcoli l'integrale della funzione* $f(x, y) = e^{x+y}x - yx^2$ *esteso al triangolo di vertici* $(0, 0)$, $(0, \pi)$ (π, π).

✍ **Esercizio 6.1.18.** *Dati gli insiemi*

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1\right\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

determinare l'area di $A \cap B$.

✍ **Esercizio 6.1.19.** *Sia E il settore del cerchio di centro l'origine e raggio 1 delimitato dalle semirette di equazione:* $y = \pm\sqrt{3}x, \;\; x \geq 0$. *Calcolare gli integrali:*

$$a) \int_E x^2 dxdy$$
$$b) \int_E xe^{2y} dxdy$$

✍ **Esercizio 6.1.20.** *Sia E la porzione di corona circolare di raggi 1 e 2 contenuta nel primo quadrante. Calcolare gli integrali:*

$$a) \int_E \frac{2x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dxdy$$
$$b) \int_E xe^{y} dxdy$$
$$c) \int_E x \arctan \frac{x}{y} dxdy$$

✍ **Esercizio 6.1.21.** *Si calcoli*

$$\iint_T xy \sin(xy) dxdy$$

con

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, \;\; \frac{2}{x}\pi \leq y \leq \frac{3}{x}\pi, \;\; x > 0\}$$

utilizzando un cambiamento di variabili che trasformi T in un rettangolo.

✍ **Esercizio 6.1.22.** *Si calcoli l'area della regione di piano*

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq x^2, \;\; \frac{y^2}{2} \leq x \leq y^2\}$$

✍ **Esercizio 6.1.23.** *Si calcoli, utilizzando un'opportuna trasformazione*

$$\iint_T x^2(y-x^3)e^{y+x^3}dxdy$$

dove

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 \leq y \leq 3, \quad x \geq 1\}$$

✍ **Esercizio 6.1.24.** *Determinare l'area racchiusa dall'ellisse di equazione:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

✍ **Esercizio 6.1.25.** *Dato l'insieme* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x,\ 1 < xy < 2\}$ *calcolare gli integrali:*

$$a) \int_E dxdy$$
$$b) \int_E (x+y)dxdy$$

✍ **Esercizio 6.1.26.** *Si calcoli l'integrale doppio*

$$\int\int_D (y^2+1)\,dx\,dy,$$

ove D *è la parte dell'ellisse* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2/4 + y^2 \leq 1\}$ *contenuta nel secondo quadrante.*

✍ **Esercizio 6.1.27.** *Dato l'insieme E delimitato dalle rette $y = x$, $y = 2x$, $y + x = 2$, $y + 2x = 2$, calcolare gli integrali:*

$$a) \int_E \frac{dxdy}{x^2 y}$$
$$b) \int_E \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$c) \int_E dxdy$$

(N.B. Osservare che si ha: $1 < y/x < 2,\ 1 < (2-y)/x < 2$)

✍ **Esercizio 6.1.28.** *Dato l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ye^{-x} \leq 2, 2 \leq ye^{x} \leq 3\}$ calcolare gli integrali:*

$$a) \int_E dxdy$$
$$b) \int_E ydxdy$$
$$c) \int_E e^x ydxdy$$

6.2. Integrali tripli

6.3. Esercizi svolti

✍ **Esercizio 6.3.1.** *Calcolate il volume della regione interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 \leq 4$ e compresa tra i piani $z = x - 1$ e $z = 1 - x$.*

Si ha che

$$\min\{x-1, 1-x\} = x-1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1.$$

Allora si ponga

$$A = \{(x,y) : \, x^2 + y^2 \leq \, 4, \;\; x \leq 1\}$$

e

$$B = \{(x,y) : \, x^2 + y^2 \leq \, 4, \;\; x \geq 1\}$$

Allora

$$V(C) = \int\int_A \int_{x-1}^{1-x} \, dx \, dy + \int\int_B \int_{1-x}^{x-1} \, dx \, dy = \int\int_A (2-2x) + \int\int_B (2x-2) =: I + II.$$

Prima di tutto si ha

$$I := \int\int_A (2-2x) = 2\text{area (A)} - 2\int\int_A x \, dx \, dy$$

Poniamo

$$A_2 = \{(x,y) : \, 0 \leq x \leq 1, \;\; -\sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3}x\}$$

e $A_1 := A \setminus A_2$. Allora è chiaro che l'area di A è l'area di A_1 che è $2/3\,\pi\,4$ unita all'area di A_2 che è (essendo un triangolo) $2\sqrt{3}\,1\,1/2 = \sqrt{3}$.
D'altra parte

$$II := \int\int_B (2x-2) \, dx \, dy = 2\int\int_B x - 2\text{area (B)}.$$

Ora analogamenta a prima l'area di B è l'area del settore circolare sotteso a un angolo di 120 gradi (che chiameremo S) che è $1/3\pi\,4$ a cui si toglie l'area del triangolo A_2 cioè $\sqrt{3}$.
Riassumendo

$$\begin{aligned} V(C) &= -2\int\int_A x + 2\int\int_B x + 2\text{area (A)} - 2\text{area(B)} \\ &= -2\int\int_{A_1} x - 2\int\int_{A_2} x + 2\int\int_S x - 2\int\int_{A_2} x + 2\left(\frac{8}{3}\pi + \sqrt{3}\right) - 2\left(\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right) \\ &= -2\int\int_{A_1} x - 4\int\int_{A_2} x + 2\int\int_S x + \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

A questo punto parametrizzo A_1 e S con coordinate polari; si ha

$$A_1 = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2, \;\; \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]\}$$

e

$$S = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2, \;\; \theta \in \left[0, \frac{5}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right]\}$$

Quindi, essendo il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione uguale a ρ, si ha

$$-2\int\int_{A_1} x\,dx = -2\int_0^2\int_{\pi/3}^{5/3\pi} \rho^2\,\cos\theta d\theta d\rho = -2\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^2 \sin\theta\bigg|_{\pi/3}^{5/3\pi} = \frac{16}{3}\sqrt{3}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} 2\int\int_S x\,dx &= 2\int_0^2\int_0^{\pi/3} \rho^2\,\cos\theta d\theta d\rho + 2\int_0^2\int_{5/3\pi}^{2\pi} \rho^2\cos\theta\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\frac{\rho^3}{3}\bigg|_0^2 \left(\sin\theta\bigg|_0^{\pi/3} + \sin\theta\bigg|_{5/3\pi}^{2\pi}\right) = \frac{16}{3}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Infine

$$-4\int\int_{A_2} x = -4\int_0^1\int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} x\,dx\,dy = -4\int_0^1 2\sqrt{3}x^2\,dx = -8\sqrt{3}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = -\frac{8}{3}\sqrt{3}.$$

Quindi riassumendo

$$V(C) = \frac{16}{3}\sqrt{3} - \frac{8}{3}\sqrt{3} + \frac{16}{3}\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3} + \frac{8}{3}\pi.$$

✍ **Esercizio 6.3.2.** *Calcolate il volume del solido V limitato dal cilindro ellittico di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ e dai piani di equazione $z = 1 - \sqrt{3}x - 3y$ e $z = 1$.*

Si ha che

$$\min\{1 - \sqrt{3}x - 3y, 1\} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad y \le -\frac{1}{\sqrt{3}}\,x$$

quindi ponendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \ \wedge \ y \le -\frac{1}{\sqrt{3}}x\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \frac{x^2}{4} + y^2 \le 1 \ \wedge \ y \ge -\frac{1}{\sqrt{3}}x\}$$

si ha

$$\begin{aligned} V(C) &= \int\int_A\int_1^{1-\sqrt{3}x-3y} dz\,dx\,dy + \int\int_B\int_{1-\sqrt{3}x-3y}^1 dz\,dx\,dy \\ &= \int\int_A (-\sqrt{3}x - 3y)\,dx\,dy + \int\int_B (\sqrt{3}x + 3y)\,dx\,dy. \end{aligned}$$

Ora passo in coordinate polari: si pone $x = 2\,\rho\cos\theta$ e $y = \rho\sin\theta$ con $0 \le \rho \le 1$ e $\theta \in [0, 2\pi]$, da cui

$$A = \{(\rho,\theta) : \ 0 \le \rho \le 1, \ \theta \in \left[\frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right]\}$$

e

$$B = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho 1, \; \theta \in \left\{ \left[0, \frac{5}{6}\pi\right] \cup \left[\frac{11}{6}\pi, 2\pi\right] \right\} \}$$

Quindi, ricordando che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è 2ρ, si ha

$$\begin{aligned}
V(C) &= \int_0^1 \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2\rho \, (-\sqrt{3}\, 2\rho \, \cos\theta - 3\rho \, \sin\theta) \, d\rho \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_0^{\frac{5}{6}\pi} 2\,\rho \, (\sqrt{3}\, 2\rho \, \cos\theta + 3\rho \, \sin\theta) \, d\rho \, d\theta \\
&\quad + \int_0^1 \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} 2\rho \, (\sqrt{3} 2\rho \, \cos\theta + 3\rho \, \sin\theta) \, d\rho \, d\theta =: I + II + III.
\end{aligned}$$

Ora,

$$\begin{aligned}
I &:= \int_0^1 \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} 2\rho \, (-\sqrt{3}\, 2\rho \, \cos\theta - 3\rho \, \sin\theta) \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^1 -4\sqrt{3}\, \rho^2 d\rho \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \cos\theta \, d\theta - \int_0^1 6\rho^2 \, d\rho \int_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \sin\theta \, d\theta \\
&= \left(-4\sqrt{3}\, \frac{\rho^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) \left(\sin\theta \Bigg|_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \right) - (2\rho^3 \Big|_0^1) \, (-\cos\theta) \Big|_{\frac{5}{6}\pi}^{\frac{11}{6}\pi} \\
&= -\frac{4}{3}\sqrt{3}\,(-1) + 2\sqrt{3} = \frac{10}{3}\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}
II &:= \int_0^1 \int_0^{\frac{5}{6}\pi} 2\rho \, (\sqrt{3}\, 2\rho \, \cos\theta + 3\rho \, \sin\theta) \, d\rho \, d\theta \\
&= \int_0^1 4\sqrt{3}\, \rho^2 d\rho \int_0^{\frac{5}{6}\pi} \cos\theta \, d\theta + \int_0^1 6\rho^2 \, d\rho \int_0^{\frac{5}{6}\pi} \sin\theta \, d\theta \\
&= \left(4\sqrt{3}\, \frac{\rho^3}{3} \Bigg|_0^1 \right) \left(\sin\theta \Bigg|_0^{\frac{5}{6}\pi} \right) + (2\rho^3 \Big|_0^1) \, (-\cos\theta) \Big|_0^{\frac{5}{6}\pi} \\
&= \frac{5}{3}\sqrt{3} + 2
\end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} III &:= \int_0^1 \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} 2\rho\,(\sqrt{3}\,2\rho\,\cos\theta + 3\rho\,\sin\theta)\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^1 4\sqrt{3}\,\rho^2 d\rho \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} \cos\theta\,d\theta + \int_0^1 6\rho^2\,d\rho \int_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} \sin\theta\,d\theta \\ &= \left(4\sqrt{3}\,\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^1\right)\left(\sin\theta\Bigg|_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi}\right) + (2\rho^3\Big|_0^1)\,(-\cos\theta)\Big|_{\frac{11}{6}\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

Quindi riassumendo

$$V(C) = \frac{20}{3}\sqrt{3}.$$

✍ **Esercizio 6.3.3.** *Assegnati il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ ed il piano di equazione $z = 4x - 12y$ si calcoli il volume racchiuso dalle due superifici.*

Sia S il volume racchiuso dalle due superfici considerate. Si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int\int_A \int_{x^2+y^2}^{4x-12y} dz\,dx\,dy$$

dove

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4x - 12y \geq\ x^2 + y^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-2)^2 + (y+6)^2 \leq\ 40\}$$

Quindi si ha

$$\mathrm{Vol}(S) = \int\int_A (4x - 12y - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

Faccio il seguente cambio di coordinate:

$$\begin{cases} x - 2 = \rho\,\cos\theta \\ y + 6 = \rho\,\sin\theta \end{cases}$$

con le limitazioni $0 \leq\ \rho \leq\ \sqrt{40}$ e $\theta \in [0, 2\pi]$. Il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è ρ, dunque si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(S) &= \int\int_A (4x - 12y - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{40}} \int_0^{2\pi} (40 - \rho^2)\,\rho\,d\rho\,d\theta \\ &= 2\pi\left(20\,\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{40}} = 2\pi(800 - 400) = 800\pi. \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 6.3.4.** *Se* $C = \{x^2 + y^2 - 2z^2 \leq 0, \;\; 0 \leq z \leq 4\}$ *quale delle seguenti condizioni implica che*

$$\int\int\int_C f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0?$$

$$(a) f(x,-y,-z) = -f(x,y,z); \qquad (b) f(x,-y,z) = f(x,y,z);$$
$$(c) f(-x,y,z) = -f(x,y,z); \qquad (d) f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z)$$

Si ha

$$C \cap \{\text{primo ottante}\} = C_1 = \{(x,y,z) \in C;\; x,y \;\geq 0\};$$

$$C \cap \{\text{secondo ottante}\} = C_2 = \{(x,y,z) \in C;\; x, \leq \;0,\; y \geq \;0\};$$

$$C \cap \{\text{terzo ottante}\} = C_3 = \{(x,y,z) \in C;\; x \leq \;0,\; y \leq \;0\};$$

$$C \cap \{\text{quarto ottante}\} = C_4 = \{(x,y,z) \in C;\; x \geq \;0, y \leq \;0\}.$$

Allora

$$\begin{aligned}\int\int\int_C f\,dx\,dy\,dz \;\; &= \;\; \int\int\int_{C_1} f\,dx\,dy\,dz + \int\int\int_{C_2} f\,dx\,dy\,dz \\ &\quad + \int\int\int_{C_3} f\,dx\,dy\,dz + \int\int\int_{C_4} f\,dx\,dy\,dz.\end{aligned}$$

Se $f(-x,y,z) = -f(x,y,z)$ allora

$$\int\int\int_{C_1} f\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int_{C_2} f\,dx\,dy\,dz$$

e

$$\int\int\int_{C_4} f\,dx\,dy\,dz = -\int\int\int_{C_3} f\,dx\,dy\,dz$$

quindi

$$\int\int\int_C f\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Infatti, per esempio, C_1 e C_2 sono simmetrici rispetto all'asse y (ribaltamento da x a $-x$) e f è dispari rispetto a x e quindi cambia di segno, ma resta uguale in valore assoluto tra (x,y,z) e il suo simmetrico rispetto all'asse y che è $(-x,y,z)$. Se ne deduce che ciò che integro di f su C_1 è l'opposto di ciò che integro su C_2.
Consideriamo il cambiamento di variabili

$$\varphi : C_2 \to C_1 \qquad (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$$

con $C_2 = \varphi^{-1}(C_1)$. Allora $|\det J_\varphi(x,y,z)| = 1$. Quindi

$$\iiint_{C_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\varphi^{-1}(C_1)} f(\varphi(x,y,z))\,|\det J_\varphi(x,y,z)|\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iiint_{C_2} f(-x,y,z)\,dx\,dy\,dz = -\iiint_{C_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

N.B.: la terna $(x,y,z) \in C_2$ gioca il ruolo della terna (u,v,w), nuove coordinate nell'usuale formulazione del cambiamento di variabili. Qui abbiamo mantenuto lo stesso nome (x,y,z) per semplicità.

✍ **Esercizio 6.3.5.** *Sia*

$$V = \left\{(x,y,z) : \, z^2 \geq \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2, \ \ 0 \leq z \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}.$$

Calcolate

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz$$

La condizione sulla z rimane

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} \leq \ z \leq 1 - \frac{x}{2}.$$

Inoltre

$$\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2} = \ z \leq 1 - \frac{x}{2} \ \Leftrightarrow \ \frac{3}{4}x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \ \Leftrightarrow \ x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1.$$

Poniamo

$$A = \left\{(x,y) : \, x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} \leq \ 1\right\}$$

Osserviamo che dalla condizione su z si deduce che deve essere $x \leq \ 2$, che va bene in A. Allora si ha

$$\iiint_V z\,dx\,dy\,dz = \iint_A \int_{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2}}^{1-\frac{x}{2}} z\,dz\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_A \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}x^2 - y^2\right)\,dx\,dy.$$

Passiamo in coordinate polari ponendo

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\sin\theta \end{cases} \qquad 0 \leq \rho \leq 1, \ \ \theta \in [0, 2\pi)$$

Tenendo conto che il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è $\frac{\sqrt{3}}{2}\rho$, si deduce

$$\int\int\int_V z\,dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{4}\int\int_0^1\int_0^{2\pi}\rho\,(1-\rho^2)\,d\rho\,d\theta = \frac{3}{8}\sqrt{3}\,\pi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{32}\sqrt{3}\,\pi.$$

✍ **Esercizio 6.3.6.** *Sia*

$$A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 1,\ \ 0\le z\le 3\sqrt{x^2+y^2}\};$$

a) disegnate l'insieme A;
b) determinare il volume di A;
c) calcolate l'integrale su A della funzione

$$\frac{z}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

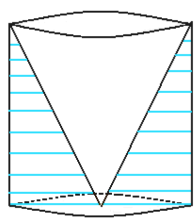

Figura 6.1: Insieme A.

a) L'insieme A è costituito da un cilindro (di equazione $x^2+y^2\le 1$) a cui è stato tolto il dominio di $\mathbb{R}^3$ occupato da un cono circolare retto di vertice nell'origine (e di equazione $z = 3\sqrt{x^2+y^2}$).

b) Si ha
$$\text{Vol}\ A = \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz.$$
Data la simmetria del problema operiamo un cambio di coordinate. Passiamo a considerare le coordinate cilindriche
$$\begin{cases} x = \rho\, \cos\theta \\ y = \rho\, \sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$
L'insieme A viene allora descritto nel seguente modo nelle nuove coordinate
$$A = \{(\rho, \theta, z) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} : 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le z \le 3\,\rho\}$$
mentre il determinante della matrice Jacobiana della trasformazione è ρ. Si ha allora
$$\begin{aligned}\text{Vol}\ A &= \iiint_A 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{2\,\pi} \int_0^{3\,\rho} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho \\ &= 2\,\pi \int_0^1 \rho\, [z]_0^{3\rho}\, d\rho = 2\,\pi \int_0^1 3\,\rho^2\, d\rho = 2\,\pi.\end{aligned}$$
c) Invece (di nuovo passo a coordinate cilindriche)
$$\iiint_A \frac{z}{(1+x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{3\,\rho} \frac{z}{(1+\rho^2)\,\rho} \rho\, dz\, d\theta\, d\rho$$
$$= 2\,\pi \int_0^1 \frac{1}{1+\rho^2} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{3\,\rho} d\rho = 9\,\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1+\rho^2}\, d\rho = 9\,\pi \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+\rho^2}\right) d\rho$$
$$= 9\,\pi - 9\,\pi\, [\arctan\rho]_0^1 = 9\,\pi (1 - \arctan 1).$$

✍ **Esercizio 6.3.7.** *Sia* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le e^{-x}\sqrt{x}\}$ *e sia* V *il solido generato dalla rotazione di* A *intorno all'asse* x*;*

a) disegnate gli insiemi A *e* V*;*
b) determinate il volume di V*;*
c) calcolate l'integrale su V *della funzione* $\dfrac{\sqrt{z^2+y^2}}{x\sqrt{x}}$.

Se poniamo $f(x) = e^{-x}\sqrt{x}$ si ha $f(0) = 0$, $f(1) = 1/e$, $f'(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ dunque
$$f'_+(0) = +\infty, \qquad f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}.$$

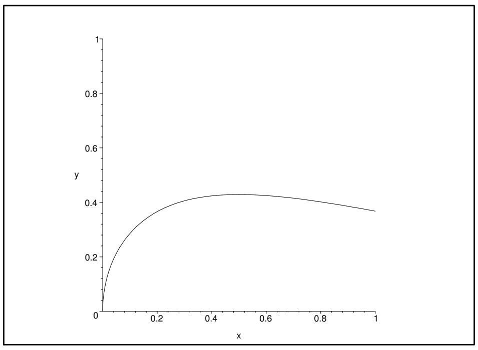

Figura 6.2: Insieme A.

Volume di V :

$$\mathrm{vol(V)} = \int_V 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_{S_x} 1\,dy\,dz \right) dx,$$

ma $S_x = \{(y,z) : \sqrt{y^2+z^2} \le e^{-x}\sqrt{x}\}$ è un cerchio di raggio $e^{-x}\sqrt{x}$ quindi ha area $\pi x e^{-2x}$, da cui

$$\mathrm{vol(V)} = \int_0^1 \pi x e^{-2x}\,dx = \left[-\pi e^{-2x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4e^2}.$$

Invece per l'integrale, usando su S_x le coordinate polari (in y e z) si ha

$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x\sqrt{x}}\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \left(\int_{S_x} \sqrt{z^2+y^2}\,dy\,dz \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} \left[\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{e^{-x}\sqrt{x}} \rho\,\rho\,d\rho \right) d\theta \right] dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\, 2\pi \left(\int_0^{\sqrt{x}e^{-x}} \rho^2\,d\rho \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}\, 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{x}e^{-x}} dx \\
&= \int_0^1 \frac{2\pi}{3} e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{2\pi}{9} e^{-3x} \right]_0^1 = \frac{2\pi}{9}(1-e^{-3}).
\end{aligned}$$

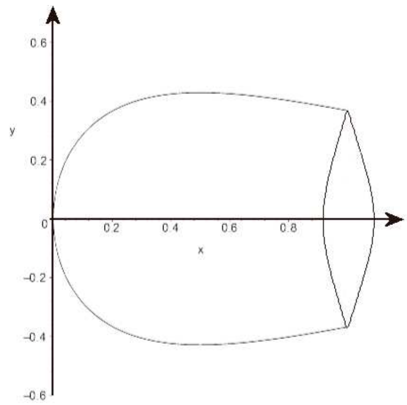

Figura 6.3: Insieme V.

✍ **Esercizio 6.3.8.** *Sia* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ \ 0 \leq y \leq x^2,\ \ 0 \leq z \leq (x-1)^2\}$;

a) disegnate A;
b) determinate il volume di A;
c) degli "spigoli" di A, *ve n'è uno che non giace su alcuno dei piani coordinati; trovatene una parametrizzazione e determinate la retta tangente a tale spigolo nel punto corrispondente a* $x = 0$.

L'insieme A sta "sotto" alla superficie $z = (x-1)^2$ e "a sinistra" di $y = x^2$.

$$\text{Vol(A)} = \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^{(x-1)^2} dz\, dy\, dx = \int_0^1 x^2(x-1)^2\, dx = \int_0^1 x^4 - 2x^3 + x^2\, dx = \frac{1}{30}.$$

Una parametrizzazione dello spigolo richiesto dal testo è $(x, x^2, (x-1)^2$, quindi il vettore tangente è $(1, 2x, 2x-2)$, che per $x = 0$ vale $(1, 0, -2)$. Poiché il unto corrispondente a $x = 0$ è $(0, 0, 1)$ la retta è $(0, 0, 1) + t(1, 0, -2)$.

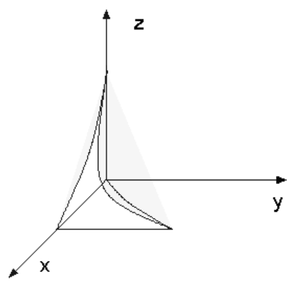

Figura 6.4: Insieme A.

✍ **Esercizio 6.3.9.** *Sia* $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2,\ \ 0 \le z \le 2,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \ge 1\}$. *Disegnate* C *e determinatene il volume.*

Si ha il cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$ al quale è stata tolta l'intersezione con la sfera unitaria di centrata nell'origine (cioè un ottavo di sfera). Il volume si calcola con facili integrali oppure semplicemente scrivendo

$$V = 2^3 - \frac{1}{8}\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 8 - \frac{\pi}{6}.$$

✍ **Esercizio 6.3.10.** *Dato l'insieme* $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4,\ \ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\}$, *disegnatelo e descrivetelo a parole, quindi calcolate*

$$\int_T x^2 z^2 \, dx \, dy \, dz.$$

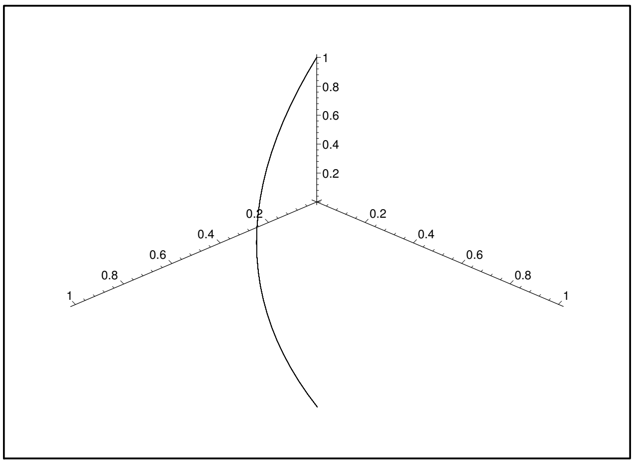

Figura 6.5: Lo spigolo che non appartiene ad alcun piano coordinato.

$x^2 + y^2 \leq 4$ è il cilindro di asse l'asse z e $R = 2$. Invece $z = \sqrt{x^2+y^2}$ è il cono circolare di vertice l'origine. T è il cilindro (con $0 \leq z \leq 2$ al quale si toglie il cono).

$$\begin{aligned}\int_T x^2 z^2\,dx\,dy\,dz &= \int_{x^2+y^2\leq 4} dx\,dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} x^2 z^2\,dz = \int_{x^2+y^2\leq 4} x^2 \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dx\,dy \\ &= \int_{x^2+y^2\leq 4} \frac{x^2(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}{3}\,dx\,dy = \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{\rho^6\cos^2\theta}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{\rho^7}{7}\right]_0^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta = \frac{128}{21}\left[\frac{1}{2}(\theta + \sin\theta\cos\theta)\right]_0^{2\pi} = \frac{128}{21}\pi.\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 6.3.11.** *Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da*

$$E = \{(x,y,z) : -1 \leq y \leq 0,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2\}.$$

Calcolate:

a) il volume di E;
b) l'integrale di $f(x,y,z) = x(1-y)$ su E.

$$\text{Volume di } E = \text{area di base} \cdot \text{altezza} = \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx \cdot h = \frac{32}{3}.$$

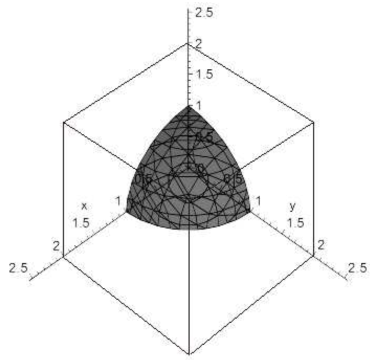

Figura 6.6: Insieme C.

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Infatti

$$\iint_{[-2,2]\times[-1,0]} x(1-y)\,dx\,dy \int_0^{4-x^2} dz = \left(\int_{-2}^{2} x(4-x^2)\,dx\right)\cdot\left(\int_{-1}^{0}(1-y)\,dy\right)$$
$$= \left(\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-2}^{2}\right)\cdot\left(\left[y-\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right) = 0\cdot\frac{3}{2} = 0.$$

✍ **Esercizio 6.3.12.** *Sia T il triangolo contenuto nel piano xy, con vertici $(-1,3)$, $(-1,-3)$, $(2,0)$. Calcolare il volume del solido S interno al prisma retto di base T e compreso tra le superfici di equazioni $z = 2 - x^2$ e $z = 1$.*

Prima di tutto vediamo quando $2 - x^2 \geq 1$. Questo accade quando $x^2 \leq 1$ cioè $-1 \leq x \leq 1$. D'altra parte, il triangolo T è un dominio y-semplice che può essere descritto come

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq \ x \leq 2 \ \ x - 2 \leq y \leq -x + 2\}$$

Quindi si ha (integrazione per fili)

$$\begin{aligned}
V(S) &= \int\int\int_S 1\, dx\, dy\, dz = \int_{-1}^{1}\int_{x-2}^{2-x}\int_{1}^{2-x^2} \ \ dz\, dy\, dx + \int_{1}^{2}\int_{x-2}^{2-x}\int_{2-x^2}^{1} \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{x-2}^{2-x}(2 - x^2)\, dx\, dy + \int_{1}^{2}\int_{x-2}^{2-x}(x^2 - 2) \\
&= \int_{-1}^{1} 2(2 - x^2)(2 - x)\, dx + \int_{1}^{2} 2(x^2 - 2)(2 - x)\, dx \\
&= \int_{-1}^{1}(8 - 4x - 4x^2 + 2x^3)\, dx + \int_{1}^{2}(4x^2 - 2x^3 - 8 + 4x)\, dx \\
&= \left(8x - 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^4}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} - 8x + 2x^2\right)\Bigg|_{1}^{2} \\
&= 8 - 2 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 8 + 2 - \frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{32}{3} - 8 - 16 + 8 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + 8 - 2 \\
&= 6 + \frac{20}{3} + \frac{1}{2} = \frac{36 + 40 + 3}{6} = \frac{79}{6}.
\end{aligned}$$

Esercizio (domanda tipo test - 29/06/2007)
Se $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 - 2z^2 \leq \ 0, \ \ 0 \leq z \leq 4\}$ quale delle seguenti condizioni implica che

$$\int\int\int_C f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0?$$

$$(a) f(x, -y, -z) = -f(x, y, z) \qquad (b) f(x, -y, z) = f(x, y, z)$$

$$(c) f(-x, y, z) = -f(x, y, z) \qquad (d) f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z)$$

Si ha che C è il cono con $0 \leq z \leq 4$. Affinché l'integrale di f su C sia 0, devo avere f dispari in x oppure in y, quindi l'unica risposta corretta è la (c).

6.3.1. Esercizi proposti

✍ **Esercizio 6.3.13.** *Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z delimitata dal piano* $z = 0$ *e dalla porzione di superficie di equazione* $z = (x^2 + y^2)y$ *che si proietta in*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq R^2,\ x^2 + 4y^2 \leq 4R^2\}$$

✍ **Esercizio 6.3.14.** *Dato il tetraedro* T *di vertici* $(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, *calcolare gli integrali*

$$\iint_T x(y + z)dxdydz$$
$$\iint_T xye^z dxdydz$$
$$\iint_T \frac{dxdydz}{1 + x + y + z}$$

✍ **Esercizio 6.3.15.** *Dopo aver verificato l'integrabilità delle funzioni sottoassegnate sull'insieme indicato, si calcoli l'integrale* $\iiint_S f$

$$a) f(x, y, z) = \frac{x + y}{z} \qquad S = [0, 1] \times [0, 1] \times [1, 2]$$
$$b) f(x, y, z) = y^2 z \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq xy\}$$
$$c) f(x, y, z) = \frac{1}{(y + 1)^3} \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1,\ 0 < z < 1,\ 0 < y < x + z\}$$
$$d) f(x, y, z) = xyz \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 2,\ 0 < y < x,\ 0 < z < y\}$$
$$e) f(x, y, z) = y(x + e^x) \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 + 1 \geq 0,\ |y| \leq 1 - x^2\}$$

✍ **Esercizio 6.3.16.** *Si calcoli il volume della regione S interna al cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$, compresa tra il paraboloide $z = x^2 + y^2 - 2$ ed il piano $x + y + z = 4$.*

✍ **Esercizio 6.3.17.** *Si calcolino gli integrali:*

$$a) \iiint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dxdydz$$
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z^2 - x^2 - y^2 \leq 0,\ z \geq 0\}$$
$$b) \iiint_S \frac{x^2}{x^2 + z^2}\,dxdydz \qquad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 2,\ x^2 - y^2 + z^2 < 0,\ y > 0\}$$

utilizzando opportuni cambiamenti di variabili, dopo aver verificato che l'integrale esiste.

✍ **Esercizio 6.3.18.** *Si calcoli il volume del cilindroide a generatrici parallele all'asse z compreso tra il dominio*

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2,\ \ x \geq 1/2\}$$

e la parte di superficie di equazione $z = \log(xy)$ che si proietta su T.

✍ **Esercizio 6.3.19.** *Dato l'insieme $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ 0 \leq z \leq y - x\}$ si calcolino gli integrali:*

$$a) \int_E (x + \sin z)\,dxdydz$$
$$b) \int_E \arctan(x + y)\,dxdydz$$

✍ **Esercizio 6.3.20.** *Dato l'insieme* $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, *calcolare gli integrali:*

$$a) \int_B x^2 dxdydz$$
$$b) \int_B \log(1 + x^2 + y^2 + z^2) dxdydz$$

✍ **Esercizio 6.3.21.** *Calcolare il volume racchiuso dall'ellissoide di equazione:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

✍ **Esercizio 6.3.22.** *Determinare il volume dei seguenti sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^3$:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4,\ x^2 + y^2 + z^2 < 16\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z^2,\ x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$$
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2(x^2 + y^2) < z^2 < x^2 + y^2 + 25\}$$

6.4. Integrali superficiali

✍ **Esercizio 6.4.1.** *Calcolare l'area della superficie sferica* $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ *situata nella regione individuata da* $\{z \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\}$.

Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \\ z = \pm\sqrt{2-\rho^2}. \end{cases}$$

Siccome la nostra superficie sta nella regione $\{z \geq \sqrt{2}/2\}$, si prenderà la seguente parametrizzazione per Σ

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta), z(\rho,\theta)) = (\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta, \sqrt{2-\rho^2}) \qquad \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Imponendo che $z \geq 0$, si ottiene la seguente restrizione su ρ

$$\rho^2 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] :\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{2},\ \ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{\rho}{\sqrt{2-\rho^2}}\right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho\,\sin\theta, \rho\,\cos\theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{-\rho}{\sqrt{2-\rho^2}} \\ -\rho\,\sin\theta & \rho\,\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\rho^2\,\cos\theta}{\sqrt{2-\rho^2}}, \frac{\rho^2\,\sin\theta}{\sqrt{2-\rho^2}}, \rho\right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{\rho^4}{2-\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{\rho^4 + 2\rho^2 - \rho^4}{2-\rho^2}} = \sqrt{2}\,\rho\,\frac{1}{\sqrt{2-\rho^2}}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma 1\,dS \quad = \quad \int\!\!\int_A \sqrt{2}\,\rho\,\frac{1}{\sqrt{2-\rho^2}}\,d\theta\,d\rho = \sqrt{2}\,\pi\,(-\sqrt{2-\rho^2})\Big|_0^{\sqrt{2}} = 2\,\pi.$$

✍ **Esercizio 6.4.2.** *Calcolare l'integrale superficiale*

$$\int_\Sigma z\, d\sigma$$

dove Σ *è la porzione di ellissoide di equazione*

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1,$$

racchiusa dentro al cilindro

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \, x^2 + y^2 \le \frac{1}{2}\right\}$$

e situata nel semispazio $\{z \ge 0\}$.

soluzione. Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \\ z = \pm\sqrt{2(1-\rho^2)}. \end{cases}$$

Siccome la nostra superficie sta nel semispazio $\{z \ge 0\}$ si prenderà la seguente parametrizzazione per Σ

$$r : (\rho, \theta) \mapsto (x(\rho, \theta), y(\rho, \theta), z(\rho, \theta)) = (\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta, \sqrt{2(1-\rho^2)}) \qquad \rho \in \mathbb{R}^+,\ \theta \in [0, 2\pi].$$

Imponendo che la superficie sia racchiusa dal cilindro, si ottiene la seguente restrizione su ρ

$$\rho^2 \le \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \le \rho \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : \, 0 \le \rho \le 1/\sqrt{2},\ \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left(\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2}\,\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\,(-2\rho)\right) = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{\sqrt{2}\,\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho\,\sin\theta, \rho\,\cos\theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{-\sqrt{2}\,\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\rho\,\sin\theta & \rho\,\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}\,\rho^2\,\cos\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\,\rho^2\,\sin\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho \right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{2\,\rho^4}{1-\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{2\rho^4 + \rho^2 - \rho^4}{1-\rho^2}} = \sqrt{\frac{\rho^4+\rho^2}{1-\rho^2}} = \rho\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}.$$

Quindi

$$\int_\Sigma z\,dS = \int\int_A \sqrt{2}\,\sqrt{1-\rho^2}\,\rho\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\rho\,d\theta = \int_0^{1/\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\rho\,\sqrt{\rho^2+1}\,d\theta\,d\rho$$

$$= \sqrt{2}\,\pi\,\frac{2}{3}\,(\rho^2+1)^{3/2}\Big|_0^{1/\sqrt{2}} = 2\,\pi\,\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} - 1\right).$$

✍ **Esercizio 6.4.3.** *Calcolare l'integrale superficiale $\int_\Sigma (z+1)dS$, dove Σ è la porzione di ellissoide di equazione $x^2+y^2+\frac{z^2}{2}=1$ racchiusa nel cilindro $\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \middle| x^2+y^2\le\frac{1}{4}\right\}$ e situata nel semispazio $\{z\ge 0\}$.*

soluzione. Dobbiamo innanzitutto determinare una parametrizzazione della superficie considerata. Risolveremo l'esercizio in due modi, lavorando con due diverse parametrizzazioni della superficie.

primo modo. Poniamo

$$\begin{cases} x = \rho\,\cos\theta \\ y = \rho\,\sin\theta \\ z = \pm\sqrt{2(1-\rho^2)}. \end{cases}$$

Siccome la superficie sta nel semispazio $\{z\ge 0\}$ si prenderà la seguente parametrizzazione per Σ

$$r : (\rho,\theta) \mapsto (x(\rho,\theta), y(\rho,\theta), z(\rho,\theta)) = (\rho\,\cos\theta, \rho\,\sin\theta, \sqrt{2(1-\rho^2)}) \qquad \rho\in\mathbb{R}^+,\ \theta\in[0,2\pi].$$

Imponendo che la superficie sia racchiusa dal cilindro, si ottiene la seguente restrizione su ρ

$$\rho^2 \le \frac{1}{4} \Rightarrow 0\le\rho\le\frac{1}{2}.$$

Sia allora

$$A := \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] : \, 0 \le \rho \le 1/2, \;\; \theta \in [0,2\pi]\}.$$

Si ha

$$r_\rho = \left(\cos\theta, \sin\theta, \sqrt{2}\,\frac{1}{2\,\sqrt{1-\rho^2}}\,(-2\rho)\right) = \left(\cos\theta, \sin\theta, -\frac{\sqrt{2}\,\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

e

$$r_\theta = (-\rho\,\sin\theta, \rho\,\cos\theta, 0)$$

quindi

$$r_\rho \wedge r_\theta = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & \dfrac{-\sqrt{2}\,\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ -\rho\,\sin\theta & \rho\,\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{2}\,\rho^2\,\cos\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \frac{\sqrt{2}\,\rho^2\,\sin\theta}{\sqrt{1-\rho^2}}, \rho\right).$$

Allora

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{\frac{2\,\rho^4}{1-\rho^2} + \rho^2} = \sqrt{\frac{2\rho^4 + \rho^2 - \rho^4}{1-\rho^2}} = \sqrt{\frac{\rho^4+\rho^2}{1-\rho^2}} = \rho\,\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int_\Sigma (z+1)\,dS &= \int\!\!\int_A (\sqrt{2}\,\sqrt{1-\rho^2}+1)\,\rho\,\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\rho\,d\theta \\ &= \int_0^{1/2}\!\!\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\rho\,\sqrt{\rho^2+1}\,d\theta\,d\rho + \int_0^{1/2}\!\!\int_0^{2\pi} \rho\,\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\theta\,d\rho. \end{aligned}$$

Osserviamo che si ha

$$\int 2\,\rho\,\sqrt{\rho^2+1}\,d\rho = \frac{2}{3}\,(\rho^2+1)^{3/2} + C;$$

ora troviamo la seguente primitiva

$$\int \rho\,\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\rho.$$

Prima di tutto effettuiamo il seguente cambio di variabile

$$z = \sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}} \qquad \rho = \sqrt{\frac{z^2-1}{1+z^2}} \qquad d\rho = \frac{2z}{(z^2+1)^2}\,\sqrt{\frac{z^2+1}{z^2-1}}$$

da cui

$$\int \rho\,\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\rho = \int \sqrt{\frac{z^2-1}{z^2+1}}\,z\,\frac{2z}{(z^2+1)^2}\,\sqrt{\frac{z^2+1}{z^2-1}}\,dz = \int \frac{2z^2}{(z^2+1)^2}\,dz.$$

Adesso integrando per parti si ottiene

$$\int \frac{2z^2}{(z^2+1)^2}\,dz = \int \frac{2z}{(z^2+1)^2}\,z\,dz = -\frac{z}{z^2+1} + \arctan z.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\Sigma (z+1)\,dS =& \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\rho\,\sqrt{\rho^2+1}\,d\theta\,d\rho + \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\theta\,d\rho \\ =& \sqrt{2}\,\pi\,\frac{2}{3}\,(\rho^2+1)^{3/2}\Big|_0^{1/2} + 2\,\pi\left(-\frac{z}{z^2+1}+\arctan z\right)\Big|_1^{\sqrt{5/3}} \\ =& 2\,\pi\left[\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}-1\right) - \sqrt{\frac{5}{3}}\,\frac{3}{8} + \arctan\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{2} - \arctan 1\right]\end{aligned}$$

secondo modo. Alternativamente possiamo porre

$$\begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = \pm\sqrt{2(1-s^2-t^2)} \end{cases}$$

e visto che la superficie Σ sta nel semipiano superiore, si sceglie $z \geq 0$, da cui

$$r : (s,t) \mapsto (x(s,t), y(s,t), z(s,t)) = (s, t, \sqrt{2(1-s^2-t^2)}) \qquad s^2+t^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Allora si ha

$$r_s = \left(1, 0, -\frac{2s}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}}\right)$$

e

$$r_t = \left(0, 1, -\frac{2t}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}}\right)$$

quindi

$$r_s \wedge r_t = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -\frac{2s}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}} \\ 0 & 1 & -\frac{2t}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}} \end{pmatrix} = \left(\frac{2s}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}}, \frac{2t}{\sqrt{2(1-s^2-t^2)}}, 1\right).$$

Allora

$$|r_s \wedge r_t| = \sqrt{\frac{2+2s^2+2t^2}{2(1-s^2-t^2)}}$$

da cui

$$\int_{\Sigma}(z+1)\,dS = \int\int_{s^2+t^2\leq\frac{1}{4}}(\sqrt{2(1-s^2-t^2)}+1)\sqrt{\frac{2+2s^2+2t^2}{2(1-s^2-t^2)}}\,ds\,dt.$$

Passando in coordinate polari si ottiene

$$\int_{\Sigma}(z+1)\,dS = \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,\rho\,\sqrt{\rho^2+1}\,d\theta\,d\rho + \int_0^{1/2}\int_0^{2\pi}\rho\sqrt{\frac{\rho^2+1}{1-\rho^2}}\,d\theta\,d\rho$$

da cui si può procedere come nel caso precedente.

✍ **Esercizio 6.4.4.** *Calcolare l'area della superficie $\mathcal{S}$ intersezione della "sella $\Sigma := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,z=2xy\}$ con il solido cilindrico $C := \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,|\,x^2+y^2\leq 9\}$.*

soluzione. Si tratta di un integrale superficiale. Prima di tutto occorre determinare una parametrizzazione della superficie Σ. Scegliamo ad esempio

$$r : A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \qquad r(\rho,\theta)=(x(\rho,\theta),y(\rho,\theta),z(\rho,\theta))$$

dove

$$\begin{cases} x=\rho\,\cos\theta \\ y=\rho\,\sin\theta \\ z=2\,\rho^2\,\sin\theta\,\cos\theta. \end{cases}$$

Il fatto che la sella Σ si interseca con il solido cilindrico ci dà la variabilità dei parametri ρ e θ : si ha infatti $0\leq\rho\leq 3$ e $\theta\in[0,2\,\pi]$.

Allora si ha

$$\begin{aligned} r(\rho,\theta) &= (\rho\,\cos\theta,\rho\,\sin\theta,2\,\rho^2\,\sin\theta\,\cos\theta)\\ r_\rho(\rho,\theta) &= (\cos\theta,\sin\theta,4\rho\,\sin\theta\,\cos\theta)\\ r_\theta(\rho,\theta) &= (-\rho\,\sin\theta,\rho\,\cos\theta,2\,\rho^2\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{aligned}$$

e

$$r_\rho\wedge r_\theta = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \cos\theta & \sin\theta & 4\,\rho\,\sin\theta\,\cos\theta\\ -\rho\,\sin\theta & \rho\,\cos\theta & 2\,\rho^2\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{vmatrix}$$

quindi

$$\begin{aligned} r_\rho\wedge r_\theta =& \mathbf{i}\,2\,\rho^2\,(\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta-2\,\sin\theta\cos^2\theta)+\mathbf{j}\,(-2\,\rho^2)\,(2\,\sin^2\theta\,\cos\theta+\cos^3\theta-\cos\theta\sin^2\theta)\\ &+\mathbf{k}\,(\rho\,\cos^2\theta+\rho\,\sin^2\theta)=(-2\,\rho^2\,\sin\theta)\,\mathbf{i}+(-2\,\rho^2\,\cos\theta)\,\mathbf{j}\,+\rho\,\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Da questo si deduce che

$$|r_\rho \wedge r_\theta| = \sqrt{4\,\rho^4 + \rho^2} = \rho\,\sqrt{4\,\rho^2 + 1}.$$

Quindi

$$\int\int_\Sigma 1\,dS = \int_0^3 \int_0^{2\,\pi} \rho\,\sqrt{4\,\rho^2+1}\,d\theta\,d\rho = \frac{\pi}{4}\,\frac{(4\,\rho^2+1)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^2 = \frac{\pi}{6}\,[(16)^{3/2} - 1] = \frac{21}{2}\,\pi.$$

✍ **Esercizio 6.4.5.** *Sia $C \subset \mathbb{R}^3$ la superficie cilindrica*

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + z^2 = 4\}.$$

Si calcoli l'area della superficie S data dalla intersezione di C con $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4,\ z \geq 0\}$.

CAPITOLO 7

Esercizi riguardanti matrice Jacobiana, rotore e divergenza

7.1. Matrice Jacobiana

✍ **Esercizio 7.1.1.** *Siano* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *date da*

$$F(u, v, w) = (\sin u, v\, w) \qquad \forall\, (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$
$$G(x, y) = (3\, x, e^{x\, y}) \qquad \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si scriva esplicitamente la funzione composta $G \circ F$ *e se ne calcoli la matrice Jacobiana.*

La funzione composta $G \circ F$ ha senso perché il codominio di F coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di G.

Si ha $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $H(u, v, w) = (3\, \sin u, e^{(v\, w)\, \sin u})$.

Poniamo

$$H_1(u, v, w) = 3\, \sin u \qquad H_2(u, v, w) = e^{(v\, w)\, \sin u}.$$

La funzione H è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.

Si ha

$$J_H(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & \dfrac{\partial H_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u} & \dfrac{\partial H_2}{\partial v} & \dfrac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos u & 0 & 0 \\ e^{(v\,w)\,\sin u}(v\,w)\,\cos u & e^{(v\,w)\,\sin u}\,w\,\sin u & e^{(v\,w)\,\sin u}\,v\,\sin u \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Le funzioni F e G sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di F e G. Poniamo $F_1(u,v,w) = \sin u$, $F_2(u,v,w) = v\,w$, $G_1(x,y) = 3\,x$ e $G_2(x,y) = e^{x\,y}$.
Quindi si ha

$$J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ y\,e^{x\,y} & x\,e^{x\,y} \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di G va calcolata nel punto $F(u,v,w) = (\sin u, v\,w)$ e si ha dunque

$$J_G[F(u,v,w)] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ v\,w\,e^{(v\,w)\,\sin u} & \sin u e^{(v\,w)\,\sin u} \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u,v,w) := J_G[F(u,v,w)] \cdot J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ v\,w\,e^{(v\,w)\,\sin u} & \sin u e^{(v\,w)\,\sin u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & 0 & 0 \\ 0 & w & v \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cos u & 0 & 0 \\ e^{(v\,w)\,\sin u}(v\,w)\,\cos u & e^{(v\,w)\,\sin u}\,w\,\sin u & e^{(v\,w)\,\sin u}\,v\,\sin u \end{pmatrix}.$$

✍ **Esercizio 7.1.2.** *Siano*

$$f(x,z) = \sin(x\,z) \qquad \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \qquad g(x) = \cos(x\,e^x) \qquad \forall\,x \in \mathbb{R}.$$

Si calcolino la matrice Jacobiana ed il determinante Jacobiano (quando è possibile) delle seguenti funzioni:

$$F(x,z) = (\sin z, f(x,z)) \qquad \forall\,(x,z) \in \mathbb{R}^2, \qquad G(x,y) = (3\,e^{y-x}, g(x)) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le funzioni F e G sono differenziabili perché le loro componenti sono funzioni differenziabili. Inoltre la matrice Jacobiana in entrambi i casi è una matrice quadrata; allora ha senso calcolare in entrambi i casi il determinante Jacobiano. Poniamo

$$F_1(x,z) = \sin z \qquad F_2(x,z) = \sin(x\,z) \qquad G_1(x,y) = 3\,e^{y-x} \qquad G_2(x,y) = \cos(x\,e^x)$$

da cui

$$J_F(x,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \cos z \\ z\,\cos(x\,z) & x\,\cos(x\,z) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J_F(x,z) = -z\,\cos(x\,z)\,\cos z.$$

D'altra parte

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\,e^{y-x} & 3\,e^{y-x} \\ -\sin(x\,e^x)\,e^x\,(x+1) & 0 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\det J_G(x,y) = 3\,e^{y-x}\,e^x\,(x+1)\,\sin(x\,e^x) = 3\,e^y\,(x+1)\,\sin(x\,e^x).$$

✍ **Esercizio 7.1.3.** *Siano* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *date da*

$$F(u,v,w) = (u+v, e^w) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3,$$
$$G(x,y) = (y-x, \sin x) \qquad \forall\,(x,y) \in [0,2\pi]^2.$$

Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ *hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.*

La funzione composta $G \circ F$ ha senso perché il codominio di F coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di G. La funzione composta $F \circ G$ non ha senso perché il codominio di G ha dimensione 2 mentre il dominio di F ha dimensione 3.
Si ha $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $H(u, v, w) = (e^w - u - v, \sin(u + v))$.
Poniamo

$$H_1(u, v, w) = e^w - u - v \qquad H_2(u, v, w) = \sin(u + v).$$

La funzione H è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.
Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Si ha

$$J_H(u, v, w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & \dfrac{\partial H_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u} & \dfrac{\partial H_2}{\partial v} & \dfrac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Le funzioni F e G sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di F e G. Poniamo $F_1(u, v, w) = u + v$, $F_2(u, v, w) = e^w$, $G_1(x, y) = y - x$ e $G_2(x, y) = \sin x$.
Quindi si ha

$$J_F(u, v, w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$J_G(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos x & 0 \end{pmatrix}$$

A questo punto la matrice Jacobiana di G va calcolata nel punto $F(u, v, w) = (u + v, e^w)$ e si ha dunque

$$J_G[F(u, v, w)] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u,v,w) := J_G[F(u,v,w)] \cdot J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ **Esercizio 7.1.4.** *Siano $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ date da*

$$H(u,v,w) = (u+v, e^w) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$L(x,y) = (y-x, \sin x, y, y) \qquad \forall\,(x,y) \in [0,2\pi]^2.$$

Le composizioni $H \circ L$, $L \circ H$ hanno senso? Per quella (o quelle) che lo avessero, si calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta $L \circ H$ ha senso perché il codominio di H coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di L. La funzione composta $H \circ L$ non ha senso perché il codominio di L ha dimensione 4 mentre il dominio di H ha dimensione 3.
Si ha $F := L \circ H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ con $F(u,v,w) = (e^w - u - v, \sin(u+v), e^w, e^w)$.
Poniamo

$$F_1(u,v,w) = e^w - u - v \qquad F_2(u,v,w) = \sin(u+v) \qquad F_3(u,v,w) = e^w \qquad F_4(u,v,w) = e^w.$$

La funzione F è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti. La matrice Jacobiana di F può essere calcolata in due modi in analogia con quanto visto nella versione A del tema. Qui presentiamo per brevità solo uno dei due modi.
Si ha

$$J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \\ \frac{\partial F_3}{\partial u} & \frac{\partial F_3}{\partial v} & \frac{\partial F_3}{\partial w} \\ \frac{\partial F_4}{\partial u} & \frac{\partial F_4}{\partial v} & \frac{\partial F_4}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & e^w \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) & 0 \\ 0 & 0 & e^w \\ 0 & 0 & e^w \end{pmatrix}$$

✍ **Esercizio 7.1.5.** *Siano* $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *e* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *date da*

$$F(u,v,w) = (u(w^2)^\pi, e^v) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(x,y) = (y-x, x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ *hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la matrice Jacobiana.*

La funzione composta $G \circ F$ ha senso perché il codominio di F coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di G. La funzione composta $F \circ G$ non ha senso perché il codominio di G ha dimensione 2 mentre il dominio di F ha dimensione 3.
Si ha $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $H(u,v,w) = (e^v - u\,w^{2\,\pi}, u\,w^{2\,\pi})$.
Poniamo

$$H_1(u,v,w) = e^v - u\,w^{2\,\pi} \qquad H_2(u,v,w) = u\,w^{2\,\pi}.$$

La funzione H è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.
Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Si ha

$$J_H(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & \dfrac{\partial H_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u} & \dfrac{\partial H_2}{\partial v} & \dfrac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w^{2\,\pi} & e^v & -u\,2\,\pi\,w^{2\,\pi-1} \\ w^{2\,\pi} & 0 & u\,2\,\pi\,w^{2\,\pi-1} \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Le funzioni F e G sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di F e G. Poniamo $F_1(u,v,w) = u\,w^{2\,\pi}$, $F_2(u,v,w) = e^v$, $G_1(x,y) = y - x$ e $G_2(x,y) = x$.
Quindi si ha

$$J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2\,\pi} & 0 & u\,2\,\pi\,w^{2\,\pi-1} \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u,v,w) := J_G[F(u,v,w)] \cdot J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{2\pi} & 0 & u\,2\,\pi\,w^{2\pi-1} \\ 0 & e^v & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -w^{2\pi} & e^v & -u\,2\,\pi\,w^{2\pi-1} \\ w^{2\pi} & 0 & u\,2\,\pi\,w^{2\pi-1} \end{pmatrix}.$$

✍ **Esercizio 7.1.6.** *Siano $f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ date da*

$$f(u,v,w) = (e^{(e^u)} w, \sqrt{-v}) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3,$$
$$g(x,y) = (y,x) + (x-y, 2x) \qquad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si dica se le composizioni $g \circ f$, $f \circ g$ hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta, se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice Jacobiana, e si indichi l'insieme in cui la funzione composta è differenziabile.

La funzione composta $g \circ f$ ha senso perché il codominio di f ha la stessa dimensione del dominio di g. La funzione composta $f \circ g$ non ha senso perché il codominio di g ha dimensione 2 mentre il dominio di f ha dimensione 3.
Si ha $h := g \circ f : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $h(u,v,w) = (e^{(e^u)} w, 3\,e^{(e^u)} w)$. L'insieme di definizione A della funzione composta $h = g \circ f$ è

$$A = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \; v \le 0\}.$$

Poniamo

$$h_1(u,v,w) = e^{(e^u)} w \qquad h_2(u,v,w) = 3\,e^{(e^u)} w.$$

Si ha

$$J_h(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial u} & \dfrac{\partial h_1}{\partial v} & \dfrac{\partial h_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial u} & \dfrac{\partial h_2}{\partial v} & \dfrac{\partial h_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & e^{(e^u)} \\ 3\,e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & 3\,e^{(e^u)} \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di h. Poniamo $f_1(u,v,w) = e^{(e^u)} w$, $f_2(u,v,w) = \sqrt{-v}$, $g_1(x,y) = x$ e $g_2(x,y) = 3\,x$. Quindi si ha

$$J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u} & \dfrac{\partial f_1}{\partial v} & \dfrac{\partial f_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u} & \dfrac{\partial f_2}{\partial v} & \dfrac{\partial f_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & e^{(e^u)} \\ 0 & (-1)\,\dfrac{1}{2\sqrt{-v}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_h(u,v,w) := J_g[f(u,v,w)] \cdot J_f(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & e^{(e^u)} \\ 0 & (-1)\,\dfrac{1}{2\sqrt{-v}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & e^{(e^u)} \\ 3\, e^{(e^u)}\, e^u\, w & 0 & 3\, e^{(e^u)} \end{pmatrix}.$$

L'insieme in cui h è differenziabile è

$$\mathring{A} = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 : \ v < 0\}.$$

✍ **Esercizio 7.1.7.** *Siano* $\boldsymbol{G}$ *e* $\boldsymbol{H}$ *le seguenti funzioni:*

$$\boldsymbol{G}(u,v,w) = (u^2\, w, \sqrt{-u\, v}), \qquad \boldsymbol{H}(x,y) = (y, x, x).$$

Si dica se le composizioni $\boldsymbol{G} \circ \boldsymbol{H}$ *e* $\boldsymbol{H} \circ \boldsymbol{G}$ *hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta e se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice jacobiana, e si indichi l'insieme in cui la funzione composta è differenziabile.*

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione ha la stessa dimensione del dominio della seconda.
Prima di tutto si ha che

$$\mathbf{F} := \mathbf{G} \circ \mathbf{H} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{F}(x,y) = (y^2 x, \sqrt{-yx}) \ \ \forall\, (x,y) \in A.$$

L'insieme di definizione è

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy \le 0\}$$

che è l'unione del secondo e del quarto quadrante, assi compresi. Posto

$$\mathbf{F}_1(x,y) = y^2\, x \qquad \mathbf{F}_2(x,y) = \sqrt{-yx}$$

si ha inoltre

$$J_{\mathbf{F}}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 & 2yx \\ -\dfrac{y}{2\sqrt{-yx}} & -\dfrac{x}{2\sqrt{-yx}} \end{pmatrix}$$

Si vede facilmente inoltre che l'insieme in cui $\mathbf{F}$ è differenziabile è

$$\mathring{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, xy < 0\}$$

che è l'unione del secondo e quarto quadrante, assi esclusi.
D'altra parte

$$\mathbf{L} := \mathbf{H} \circ \mathbf{G} : B \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad L(u, v, w) = (\sqrt{-uv}, u^2w, u^2w) \;\; \forall\, (u, v, w) \in B.$$

L'insieme di definizione è

$$B = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \, uv \leq 0\}.$$

Posto

$$\mathbf{L}_1(u, v, w) = \sqrt{-uv} \qquad \mathbf{L}_2(u, v, w) = u^2w \qquad \mathbf{L}_3(u, v, w) = u^2w$$

si ha inoltre

$$J_{\mathbf{L}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_2}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathbf{L}_3}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{v}{2\sqrt{-uv}} & -\dfrac{u}{2\sqrt{-uv}} & 0 \\ 2uw & 0 & u^2 \\ 2uw & 0 & u^2 \end{pmatrix}.$$

Si vede facilmente inoltre che l'insieme in cui $\mathbf{L}$ è differenziabile è $\mathring{B}$.

✍ **Esercizio 7.1.8.** *Siano $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ e $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ date da*

$$F(u, v, w) = (u(w^2)^e, \pi^v) \qquad \forall (u, v, w) \in \mathbf{R}^3,$$
$$G(x, y) = (y + x, y) \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la matrice Jacobiana.

La funzione composta $G \circ F$ ha senso perché il codominio di F coincide (e quindi ha la stessa dimensione) del dominio di G. La funzione composta $F \circ G$ non ha senso perché il codominio di G ha dimensione 2 mentre il dominio di F ha dimensione 3.
Si ha $H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $H(u, v, w) = (\pi^v + uw^{2e}, \pi^v)$.
Poniamo

$$H_1(u, v, w) = \pi^v + uw^{2e} \qquad H_2(u, v, w) = \pi^v.$$

La funzione H è differenziabile in tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ perché la stessa cosa vale per tutte le sue componenti.

Primo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Si ha

$$J_H(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H_1}{\partial u} & \dfrac{\partial H_1}{\partial v} & \dfrac{\partial H_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial H_2}{\partial u} & \dfrac{\partial H_2}{\partial v} & \dfrac{\partial H_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2e} & \pi^v \log \pi & u\,(2e)\,w^{2e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

Secondo modo per calcolare la matrice Jacobiana di H.
Le funzioni F e G sono differenziabili in quanto lo sono tutte le loro componenti. Quindi ha senso calcolare le matrici Jacobiane di F e G. Poniamo $F_1(u,v,w) = u\,w^{2\,e}$, $F_2(u,v,w) = \pi^v$, $G_1(x,y) = y + x$ e $G_2(x,y) = y$.
Quindi si ha

$$J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v} & \dfrac{\partial F_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v} & \dfrac{\partial F_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^{2\,e} & 0 & u\,2\,e\,w^{2\,e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_G(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} & \dfrac{\partial G_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} & \dfrac{\partial G_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

quindi

$$J_H(u,v,w) := J_G[F(u,v,w)] \cdot J_F(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{2\,e} & 0 & u\,2\,e\,w^{2\,e-1} \\ 0 & \pi^v \log \pi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} w^{2\,e} & \pi^v\,\log \pi & u\,2\,e\,w^{2\,e-1} \\ 0 & \pi^v\,\log \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

✍ **Esercizio 7.1.9.** *Siano* $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{G}$ *date da:*

$$\mathbf{H}(u,v,w) = (\log(-u), \cos(\sin w)) \quad , \quad \mathbf{G}(x,y) = (y,x) + (x-y,-x)\ .$$

Si dica se le composizioni $\mathbf{G} \circ \mathbf{H}$ *e* $\mathbf{H} \circ \mathbf{G}$ *hanno senso. In caso affermativo si scriva esplicitamente la funzione composta, se ne indichi l'insieme di definizione, se ne calcoli la matrice jacobiana.*

La funzione composta $\mathbf{G} \circ \mathbf{H}$ ha senso perché il codominio di $\mathbf{H}$ ha la stessa dimensione

del dominio di $\mathbf{G}$. La funzione composta $\mathbf{H} \circ \mathbf{G}$ non ha senso perché il codominio di $\mathbf{G}$ ha dimensione 2 mentre il dominio di $\mathbf{H}$ ha dimensione 3.
Si ha $\mathbf{F} := \mathbf{G} \circ \mathbf{H} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $\mathbf{F}(u, v, w) = (\log(-u), 0)$. L'insieme di definizione A della funzione composta $\mathbf{F} = \mathbf{G} \circ \mathbf{H}$ è

$$A = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : \ u < 0\}.$$

Poniamo

$$\mathbf{F}_1(u, v, w) = \log(-u) \qquad \mathbf{F}_2(u, v, w) = 0.$$

Si può calcolare la matrice Jacobiana nel modo seguente

$$J_{\mathbf{F}}(u, v, w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial v} & \dfrac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.2. Rotore e divergenza

✍ **Esercizio 7.2.1.** *Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ date da*

$$F(u, v, w) = u - w \qquad \forall\, (u, v, w) \in \mathbb{R}^3,$$
$$G(x) = (2x, -x, x^3) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito $G \circ F$ e $F \circ G$. Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad H(u, v, w) = (2(u - w), w - u, (u - w)^3) \qquad \forall\, (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad L(x) = 2x - x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Quindi, posto

$$H_1(u, v, w) = 2(u - w) \qquad H_2(u, v, w) = w - u \qquad H_3(u, v, w) = (u - w)^3$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial u} + \frac{\partial H_2}{\partial v} + \frac{\partial H_3}{\partial w} = 2 + 0 - 3\,(u-w)^2 = 2 - 3\,u^2 + 6uw - 3w^2.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'opertore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(x) = 2 - 3\,x^2.$$

✍ **Esercizio 7.2.2.** *Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ date da*

$$\begin{aligned} F(u,v,w) &= w - v \qquad && \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3, \\ G(x) &= (x, -x, x^2) \qquad && \forall\, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli il rotore (se ha senso).

Entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito $G \circ F$ e $F \circ G$. Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad H(u,v,w) = (w - v, v - w, (w-v)^2) \qquad \forall\,(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad L(x) = x^2 + x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

L'operatore rotore si applica a campi vettoriali da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Quindi ha senso calcolare $\operatorname{rot} H$. Posto

$$H_1(u,v,w) = w - v \qquad H_2(u,v,w) = v - w \qquad H_3(u,v,w) = (w-v)^2$$

si ha

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_u & \partial_v & \partial_w \\ w-v & v-w & (w-v)^2 \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H =\ & \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial v}(w-v)^2 - \frac{\partial}{\partial w}(v-w)\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial w}(w-v) - \frac{\partial}{\partial u}(w-v)^2\right) \\ & + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial u}(v-w) - \frac{\partial}{\partial v}(w-v)\right) = \mathbf{i}\,(-2(w-v)+1) + \mathbf{j}\,(1-0) + \mathbf{k}\,(0+1) \\ =\ & (1 - 2\,w + 2\,v, 1, 1). \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 7.2.3.** *La funzione $F(x, y, z)$ sia definita implicitamente dall'equazione $\log[F(x, y, z)^3] = y + x$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; inoltre sia $G(u) = (u, -2u, 1)$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).*

Si può facilmente esplicitare F. Si ha

$$F(x, y, z) = e^{\frac{y+x}{3}}.$$

Inoltre $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mentre $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito $G \circ F$ e $F \circ G$. Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad H(x, y, z) = \left(e^{\frac{y+x}{3}}, -2\, e^{\frac{y+x}{3}}, 1\right) \qquad \forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad L(u) = e^{-u/3} \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Quindi ha senso calcolare $\operatorname{div} H$. Posto

$$H_1(x, y, z) = e^{\frac{y+x}{3}} \qquad H_2(x, y, z) = -2\, e^{\frac{y+x}{3}} \qquad H_3(x, y, z) = 1$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = e^{\frac{y+x}{3}}\, \frac{1}{3} - 2\, e^{\frac{y+x}{3}}\, \frac{1}{3} + 0 = -\frac{1}{3}\, e^{\frac{y+x}{3}}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'opertore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = -\frac{1}{3}\, e^{-u/3}.$$

✍ **Esercizio 7.2.4.** *Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale*

$$w(x, y, z) = (\cos(e^{y+x}), \sin(y + z), e^{x^2+z^2}).$$

Posto

$$v_1(x, y, z) = \cos(e^{y+x}) \qquad v_2(x, y, z) = \sin(y + z) \qquad v_3(x, y, z) = e^{x^2+z^2}$$

si ha

$$\operatorname{rot} w = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \cos(e^{y+x}) & \sin(y + z) & e^{x^2+z^2} \end{pmatrix}$$

da cui

$$\operatorname{rot} w = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\sin(y+z)\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\cos(e^{y+x}) - \frac{\partial}{\partial x}e^{x^2+z^2}\right)$$

$$+\mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin(y+z) - \frac{\partial}{\partial y}\cos(e^{y+x})\right) = \mathbf{i}\,(0-\cos(y+z)) + \mathbf{j}\,(0 - e^{x^2+z^2}\,2\,x)$$

$$+\mathbf{k}\,(0+\sin(e^{y+x})\,e^{y+x}) = \left(-\cos(y+z), -2\,x\,e^{x^2+z^2}, \sin(e^{y+x})\,e^{y+x}\right).$$

Inoltre

$$\operatorname{div} w = \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial y} + \frac{\partial w_3}{\partial z} = -\sin(e^{y+x})\,e^{y+x} + \cos(y+x) + e^{x^2+z^2}\,2\,z.$$

✍ **Esercizio 7.2.5.** *La funzione $F(x,y,z)$ sia definita implicitamente dall'equazione $e^{2\,F(x,y,z)} = 1 + y^2 + z^2$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; inoltre sia $G(u) = (2u, 1, u)$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).*

Si può facilmente esplicitare F. Si ha

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}\,\log(1+y^2+z^2).$$

Inoltre $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mentre $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito $G \circ F$ e $F \circ G$. Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad H(x,y,z) = \left(\log(1+y^2+z^2), 1, \frac{1}{2}\,\log(1+y^2+z^2)\right) \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad L(u) = \frac{1}{2}\,\log(2+u^2) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Quindi ha senso calcolare $\operatorname{div} H$. Posto

$$H_1(x,y,z) = \log(1+y^2+z^2) \qquad H_2(x,y,z) = 1 \qquad H_3(x,y,z) = \frac{1}{2}\,\log(1+y^2+z^2)$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0 + 0 + \frac{1}{2}\,\frac{2z}{1+y^2+z^2} = \frac{z}{1+y^2+z^2}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'opertore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = \frac{1}{2}\,\frac{2u}{2+u^2} = \frac{u}{2+u^2}.$$

✍ **Esercizio 7.2.6.** *Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale*

$$v(x,y,z) = (\sin(e^{z+x}), e^{y^2+z^2}, \cos(x+z)).$$

Posto

$$v_1(x,y,z) = \sin(e^{z+x}) \qquad v_2(x,y,z) = e^{y^2+z^2} \qquad v_3(x,y,z) = \cos(x+z)$$

si ha

$$\operatorname{rot} v = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ \sin(e^{z+x}) & e^{y^2+z^2} & \cos(x+z) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\operatorname{rot} v = \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} \cos(x+z) - \frac{\partial}{\partial z} e^{y^2+z^2} \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} \sin(e^{z+x}) - \frac{\partial}{\partial x} \cos(x+z) \right)$$

$$+ \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^{y^2+z^2} - \frac{\partial}{\partial y} \sin(e^{z+x}) \right) = \mathbf{i}\,(0 - 2\,z\,e^{y^2+z^2}) + \mathbf{j}\,(\cos(e^{z+x})\,e^{z+x} + \sin(x+z))$$

$$+ \mathbf{k}\,(0-0) = \ (-2\,z\,e^{y^2+z^2}, \cos(e^{z+z})\,e^{z+x} + \sin(x+z), 0).$$

Inoltre

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = \cos(e^{z+x})\,e^{z+x} + e^{y^2+z^2}\,2\,y - \sin(x+z).$$

✍ **Esercizio 7.2.7.** *Siano $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni*

$$F(x,y,z) = (e^y, x) \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G(u,v) = (u, u \sin v, v) \qquad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli il rotore della funzione $G \circ F$.

Si ha

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad H(x,y,z) = (e^y, e^y \sin x, x)\ \ \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Posto

$$H_1(x,y,z) = e^y \qquad H_2(x,y,z) = e^y \sin x \qquad H_3(x,y,z) = x$$

si ha

$$\operatorname{rot} H = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^y & e^y \sin x & x \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} H = {} & \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial y} x - \frac{\partial}{\partial z} e^y \sin x \right) + \mathbf{j} \left(\frac{\partial}{\partial z} e^y - \frac{\partial}{\partial x} x \right) \\ & + \mathbf{k} \left(\frac{\partial}{\partial x} e^y \sin x - \frac{\partial}{\partial y} e^y \right) = (0, -1, e^y (\cos x - 1)). \end{aligned}$$

✍ **Esercizio 7.2.8.** *La funzione $F(x,y,z)$ sia definita implicitamente dall'equazione $\tan[4\,F(x,y,z)] = 1 + y^2 + x^2$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; inoltre sia $G(u) = (2, -u, u)$ per ogni $u \in \mathbb{R}$. Le composizioni $G \circ F$, $F \circ G$ hanno senso? Si espliciti quella (o quelle) che lo avessero, e se ne calcoli la divergenza (se ha senso).*

Si può facilmente esplicitare F. Si ha

$$F(x,y,z) = \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2).$$

Inoltre $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mentre $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ quindi entrambe le composizioni hanno senso perché il codominio della prima funzione coincide (e quindi in particolare ha la stessa dimensione) del dominio della seconda funzione. Esplicito $G \circ F$ e $F \circ G$. Si ha, per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$H := G \circ F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad H(x,y,z) = \left(2, -\frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2), \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2)\right)$$

e

$$L := F \circ G : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad L(u) = \frac{1}{4} \arctan(u^2 + 5) \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

L'operatore divergenza si può applicare a campi vettoriali da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$. Quindi ha senso calcolare $\operatorname{div} H$. Posto

$$H_1(x,y,z) = 2 \quad H_2(x,y,z) = -\frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2) \quad H_3(x,y,z) = \frac{1}{4} \arctan(1 + y^2 + x^2)$$

si ha

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial H_1}{\partial x} + \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0 - \frac{1}{4} \frac{2\,y}{1 + (y^2 + x^2)^2} + 0 = -\frac{1}{2} \frac{y}{1 + (y^2 + x^2)^2}.$$

Nel caso di funzioni scalari, l'opertore divergenza si riduce alla derivata prima. Dunque si ha

$$L'(u) = \frac{1}{4}\,\frac{2\,u}{1+(u^2+5)^2} = \frac{u}{2\,(1+(u^2+5)^2)}.$$

✍ **Esercizio 7.2.9.** *Si calcolino il rotore e la divergenza del campo vettoriale*

$$u(x,y,z) = (e^{x^2+y^2}, \cos(y+z), \sin(e^{y+z})).$$

Posto

$$u_1(x,y,z) = e^{x^2+y^2} \qquad u_2(x,y,z) = \cos(y+z) \qquad u_3(x,y,z) = \sin(e^{y+z})$$

si ha

$$\operatorname{rot} u = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ e^{x^2+y^2} & \cos(y+z) & \sin(e^{y+z}) \end{pmatrix}$$

da cui

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u = {} & \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin(e^{y+z}) - \frac{\partial}{\partial z}\cos(y+z)\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}e^{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial x}\sin(e^{y+z})\right) \\ & + \mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos(y+z) - \frac{\partial}{\partial y}e^{x^2+y^2}\right) = \mathbf{i}\,(\cos(e^{y+z})\,e^{y+z} + \sin(y+z)) + \mathbf{j}\,(0-0) \\ & + \mathbf{k}\,(0 - e^{x^2+y^2}\,2\,y) = (\cos(e^{y+z})\,e^{y+z} + \sin(y+z), 0, -2\,y\,e^{x^2+y^2}). \end{aligned}$$

Inoltre

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} = 2\,x\,e^{x^2+y^2} - \sin(y+z) + \cos(e^{y+z})\,e^{y+z}.$$

✍ **Esercizio 7.2.10.** *Siano $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ le funzioni*

$$f(x,y,z) = (e^{x-y}, 2y) \qquad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
$$g(u,v) = (v, u\cos v, v) \qquad \forall\,(u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Si calcoli il rotore della funzione $g \circ f$.

Si ha

$$h := g\circ f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad h(x,y,z) = (2y, e^{x-y}\cos(2y), 2y)\ \ \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Posto

$$h_1(x,y,z) = 2y \qquad h_2(x,y,z) = e^{x-y}\cos(2y) \qquad h_3(x,y,z) = 2y$$

si ha

$$\operatorname{rot} h = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2y & e^{x-y}\cos(2y) & 2y \end{pmatrix}$$

da cui

$$\operatorname{rot} h = \mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}(2y) - \frac{\partial}{\partial z}e^{x-y}\cos(2y)\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}(2y) - \frac{\partial}{\partial x}(2y)\right)$$
$$+\,\mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}e^{x-y}\cos(2y) - \frac{\partial}{\partial y}(2y)\right) = \mathbf{i}\,(2-0) + \mathbf{j}\,(0-0) + \mathbf{k}\,(e^{x-y}\cos(2y) - 2)$$
$$= (2, 0, e^{x-y}\cos(2y) - 2).$$

✍ **Esercizio 7.2.11.** *Siano* $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ *e* $\mathbf{G} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ *le funzioni*

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (e^y, x) \quad , \quad \mathbf{G}(u,v) = (u, u\sin v, v).$$

Si calcolino rotore e divergenza della funzione $\mathbf{G} \circ \mathbf{F}$.

Si ha

$$\mathbf{G} \circ \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad (\mathbf{G} \circ \mathbf{F})(x,y,z) = (e^y, e^y \sin x, x).$$

Poniamo $\mathbf{H} := \mathbf{G} \circ \mathbf{F}$ e $\mathbf{H}_1(x,y,z) = e^y$, $\mathbf{H}_2(x,y,z) = e^y \sin x$, $\mathbf{H}_3(x,y,z) = x$. Si ha

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{H}_1 & \mathbf{H}_2 & \mathbf{H}_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$
$$= (0, -1, e^y(\cos x - 1)).$$

Inoltre

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{H}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{H}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}_3}{\partial z} = e^y \sin x.$$

CAPITOLO 8

Esercizi riguardanti campi vettoriali

✍ **Esercizio 8.0.12.** *Dato il campo vettoriale*

$$\boldsymbol{v}(x, y, z) = (z\, e^{x\, z}, 1 + z^2 \cos y, x\, e^{x\, z} + 2\, z \sin y),$$

(i) si verifichi, sulla base di risultati teorici, che esso ammette un potenziale scalare;
(ii) si determini un potenziale scalare di $\boldsymbol{v}$*.*

(i) Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale scalare è che valga la condizione delle derivate in croce (in questo caso, ciò è equivalente a chiedere che $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sia irrotazionale) e che il dominio di $\mathbf{v}$ sia semplicemente connesso. È facile vedere che il dominio di $\mathbf{v}$ è $\mathbb{R}^3$ che è semplicemente connesso. Vediamo se vale anche la condizione delle derivate in croce.
Poniamo

$$v_1(x, y, z) = z\, e^{x\, z} \qquad v_2(x, y, z) = 1 + z^2 \cos y \qquad v_3(x, y, z) = x\, e^{x\, z} + 2\, z \sin y.$$

Si ha

$$\partial_y v_3 = 2\, z \cos y = \partial_z v_2 \qquad \partial_z v_1 = e^{x\, z} + x\, z\, e^{x\, z} = \partial_x v_3 \qquad \partial_x v_2 = 0 = \partial_y v_1.$$

Quindi il campo considerato è conservativo.
(ii) Per determinare un potenziale scalare U di $\mathbf{v}$ è sufficiente osservare che si deve avere

$$U_x(x, y, z) = z\, e^{x\, z}$$
$$U_y(x, y, z) = 1 + z^2 \cos y$$
$$U_z(x, y, z) = x\, e^{x\, z} + 2\, z \sin y$$

da cui

$$
\begin{aligned}
U(x,y,z) &= \int z\, e^{x\,z}\, dx = e^{x\,z} + c_1(y,z)\\
U(x,y,z) &= \int (1+z^2\ \cos y)\, dy = y + z^2\ \sin y + c_2(x,z)\\
U(x,y,z) &= \int (x\, e^{x\,z} + 2\,z\ \sin y)\, dz = e^{x\,z} + z^2\ \sin y + c_3(x,y).
\end{aligned}
$$

Possiamo scegliere $c_1(y,z) = y + z^2\ \sin y$, $c_2(x,z) = e^{x\,z}$ e $c_3(x,y) = y$.
Quindi un potenziale scalare per $\mathbf{v}$ è $U(x,y,z) = e^{x\,z} + y + z^2\ \sin y$ e tutti gli altri potenziali per $\mathbf{v}$ differiscono da U per una costante arbitraria.

✍ **Esercizio 8.0.13.** *Dato il campo vettoriale*

$$F(x,y) := \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5y^2, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10xy \right),$$

i) dire se ammette un potenziale in tutto il dominio di definizione ed eventualmente calcolarlo;
ii) calcolare l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma F \cdot d\gamma$, *dove* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t\pi) + t^2, 1 + t^2)$.

(i) Condizione necessaria e sufficiente affinché un campo vettoriale ammetta potenziale scalare è che valga la condizione delle derivate in croce e che il dominio di F sia semplicemente connesso. È facile vedere che il dominio di F è $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ che non è semplicemente connesso. Vediamo se vale la condizione delle derivate in croce.
Poniamo

$$F_1(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5\,y^2 \qquad\qquad F_2(x,y,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10\,x\,y.$$

Si ha

$$\partial_x F_2 = -\frac{1}{2}\,\frac{2\,x\,y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 10\,y = \partial_y F_1.$$

Quindi il campo considerato potrebbe essere conservativo ma per stabilirlo devo provare a calcolare un potenziale con la definizione.
Per determinare un potenziale scalare U di F è sufficiente osservare che si dovrebbe avere

$$
\begin{aligned}
U_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 5\,y^2\\
U_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 10\,x\,y
\end{aligned}
$$

da cui

$$U(x,y)=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+5\,y^2\right)\,dx=\sqrt{x^2+y^2}+5\,x\,y^2+c_1(y)$$
$$U(x,y)=\int\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+10\,x\,y\right)\,dy=\sqrt{x^2+y^2}+5x\,y^2+c_2(x)$$

Possiamo scegliere $c_1(y)=c_2(x)=0$.
Quindi il campo dato è conservativo e un potenziale scalare per F è $U(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+5\,x\,y^2$ e tutti gli altri potenziali per F differiscono da U per una costante arbitraria.

(ii) Visto che il campo F è conservativo, si ha

$$\int_\gamma F\cdot d\,\gamma=U(\gamma(1))-U(\gamma(0)).$$

Allora

$$\gamma(1)=(0,2)\qquad\gamma(0)=(1,1)$$

e

$$\int_\gamma F\cdot d\,\gamma=U(\gamma(1))-U(\gamma(0))=-3-\sqrt{2}.$$

✍ **Esercizio 8.0.14.** *Si calcoli l'integrale curvilineo (il lavoro) del campo vettoriale*

$$v(x,y)=(\sin(y+x),\cos(x-y))$$

lungo la curva data dai lati del triangolo di vertici $(0,0),(1,0)$ *e* $(0,1)$, *percorsi in senso antiorario.*

Questo esercizio può essere risolto in due modi.
PRIMO MODO. Siano

$$\gamma_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=1-x\ \wedge\ 0\le x\le 1\}$$
$$\gamma_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=0\ \wedge\ 0\le x\le 1\}$$
$$\gamma_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x=0\ \wedge\ 0\le y\le 1\}$$

Troviamo una parametrizzazione di questi tre segmenti. Si ha

$$\gamma_1(t)=\begin{cases}x=1-t\\ y=t\end{cases}\qquad 0\le t\le 1\qquad \gamma_1'(t)=(-1,1).$$

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - t \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2 \qquad \gamma_2'(t) = (0, -1).$$

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 0 \end{cases} \qquad 2 \le t \le 3 \qquad \gamma_3'(t) = (1, 0).$$

A questo punto

$$L = \int_\gamma v(x,y) \cdot dS = \int_{\gamma_1} v + \int_{\gamma_2} v + \int_{\gamma_3} v = \int_0^1 \{\sin[(1-t)+t]\,(-1) + \cos[(1-t)-t]\,1\}\,dt$$

$$+ \int_1^2 \{\sin[(2-t)+0]\,0 + \cos(t-2+0)\,(-1)\}\,dt$$

$$+ \int_2^3 \{\sin[t-2+0]\,1 + \cos(t-2-0)\,0\}\,dt = \int_0^1 [-\sin 1 + \cos(1-2t)]\,dt$$

$$+ \int_1^2 -\cos(t-2)\,dt + \int_2^3 \sin(t-2)\,dt$$

$$= -\sin 1 - \frac{1}{2}\sin(1-2t)\Big|_0^1 - \sin(t-2)\Big|_1^2 - \cos(t-2)\Big|_2^3 = -\sin 1 - \frac{1}{2}\sin(-1) + \frac{1}{2}\sin 1$$

$$+ \sin(-1) - \cos 1 + 1 = 1 - \sin 1 - \cos 1.$$

secondo modo. Utilizzo la formula di Gauss-Green nel piano: sia D un dominio limitato in $\mathbb{R}^2$ che sia semplice rispetto ad entrambi gli assi. Se $v = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} \in \mathcal{C}^1(D)$, allora vale la formula

$$\int\int_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{\partial^+ D} P\,dx + Q\,dy,$$

dove $\partial^+ D$ è il bordo di D orientato in senso antiorario. Nel nostro caso $P = \sin(y + x)$,

$Q = \cos(x-y)$, D è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Allora

$$\int_\gamma v \cdot dS = \int\int_D [-\sin(x-y) - \cos(y+x)]\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{1-x} -\sin(x-y)\, dx\, dy$$

$$+ \int_0^1 \int_0^{1-x} -\cos(y+x)\, dy\, dx = \int_0^1 [-\cos(x-y)]\Big|_0^{1-x} dx + \int_0^1 [-\sin(y+x)]\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 (-\cos(x-1+x) + \cos x)\, dx + \int_0^1 (-\sin 1 + \sin x)\, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin(2x-1)\right]\Bigg|_0^1 + \sin x\Big|_0^1 - \sin 1 + (-\cos x)\Big|_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 1 + \frac{1}{2}\sin(-1) + \sin 1 - \sin 1 - \cos 1 + 1 = 1 - \cos 1 - \sin 1.$$

✍ **Esercizio 8.0.15.** *Sia γ la curva chiusa in $\mathbb{R}^3$ formata dai tre segmenti che uniscono, nell'ordine, i punti*

$$P_1 = (1,0,0), \qquad P_2 = (0,3,0), \qquad P_3 = (0,0,4).$$

(i) Calcolare

$$\int_\gamma z^2\, ds.$$

(ii) Sia V il campo vettoriale definito da $V(x,y,z) = x^2\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$. Calcolare

$$\oint_\gamma V \cdot d\gamma$$

e commentare il risultato.

(i) Sia $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, dove γ_1 è il segmento che unisce nell'ordine P_1 e P_2, γ_2 è il segmento che unisce nell'ordine P_2 e P_3 e γ_3 è il segmento che unisce nell'ordine P_3 e P_1. Bisogna trovare una parametrizzazione di γ. Dopo di che si avrà

$$\int_\gamma z^2\, ds = \int_{\gamma_1} z^2\, ds + \int_{\gamma_2} z^2\, ds + \int_{\gamma_3} z^2\, ds$$

ma γ_1 è tale che $z = 0$ quindi

$$\int_{\gamma_1} z^2\, ds = 0.$$

D'altra parte, troviamo ora una parmetrizzazione di γ_2. Si ha

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{12-3t}{4} \\ z = t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 4 \qquad \gamma_2'(t) = \left(0, -\frac{3}{4}, 1\right) \qquad |\gamma_2'(t)| = \frac{5}{4}$$

quindi

$$\int_{\gamma_2} z^2\, ds = \int_0^4 t^2 \, \frac{5}{4}\, dt = \frac{5}{4}\, \frac{t^3}{3}\bigg|_0^4 = \frac{80}{3}$$

Infine

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = -4t + 4 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \gamma_3'(t) = (1, 0, -4) \qquad |\gamma_3'(t)| = \sqrt{17}$$

quindi

$$\int_{\gamma_3} z^2\, ds = \int_0^1 (4-4t)^2 \sqrt{17}\, dt = \int_0^1 \sqrt{17}\, 16\, (1-t)^2\, dt = \sqrt{17}\, 16 \left[t - t^2 + \frac{t^3}{3}\right]\bigg|_0^1 = \frac{16}{3}\sqrt{17}.$$

Quindi riassumendo

$$\int_\gamma z^2\, ds = \frac{16}{3}[5 + \sqrt{17}].$$

(ii) Si vede immediatamente che il campo vettoriale V è conservativo perché irrotazionale su $\mathbb{R}^3$ e il suo dominio (che è $\mathbb{R}^3$) è semlicemente connesso. Allora

$$\oint_\gamma V \cdot d\,\gamma = 0.$$

Verifichiamo questo risultato utilizzando la definizione. Utilizziamo la seguente parametrizzazione per γ_1

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} x = 1 - t/3 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 3 \qquad \gamma_1'(t) = \left(-\frac{1}{3}, 1, 0\right).$$

Si ha

$$\oint_\gamma V\cdot d\gamma=\int_{\gamma_1} V\cdot d\gamma+\int_{\gamma_2} V\cdot d\gamma+\int_{\gamma_3} V\cdot d\gamma=\int_0^3\left(1-\frac{t}{3}\right)^2\left(-\frac{1}{3}\right)\,dt+\int_0^3 t\,dt$$

$$+\int_0^4\left(\frac{12-3t}{4}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)\,dt+\int_0^4 t\,dt+\int_0^1 t^2\,dt+\int_0^1(-4)\,(-4t+4)\,dt$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^3\left[1-\frac{2}{3}t+\frac{t^2}{9}\right]\,dt+\frac{t^2}{2}\Big|_0^3-\frac{3}{4}\int_0^4\left(3-\frac{3}{4}t\right)\,dt+\frac{t^2}{2}\Big|_0^4+\frac{t^3}{3}\Big|_0^1+16\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^1-16=-1$$

$$+\frac{2}{9}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^3-\frac{1}{27}\,\frac{t^3}{3}\Big|_0^3+\frac{9}{2}-9+\frac{9}{16}\,\frac{t^2}{2}\Big|_0^4+8+\frac{1}{3}+8-16=-1+1-\frac{1}{3}+\frac{9}{2}-9+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}=0$$

✍ **Esercizio 8.0.16.** *Sia γ la curva piana definita da $\gamma(t)=(t\,\sin t,2\,t)$ e sia $W(x,y)=(-y,x)$ un campo vettoriale piano.*

- *Calcolate il lavoro $L:=\int_{P_0\,P_1} W\cdot d\gamma$ del campo W lungo il tratto della curva γ congiungente $P_0=(0,0)$ e $P_1=(0,2\,\pi)$.*
- *Calcolate il lavoro di W lungo il segmento congiungente P_0 e P_1.*

Ci chiediamo innanzitutto se il campo W è conservativo. Posto

$$W_1(x,y)=-y\qquad W_2(x,y)=x,$$

si ha che

$$\partial_y W_1=-1\neq 1=\partial_x W_2.$$

Il campo W non soddisfa la condizione delle derivate in croce dunque non è conservativo. Allora il lavoro l deve essere calcolato con la definizione.

• Nel caso della curva congiungente P_0 e P_1, si ha che $P_0=(0,0)$ è raggiunto per $t=0$ mentre $P_1=(0,2\,\pi)$ è raggiunto per $t=\pi$. Dunque il tratto di curva γ considerata è quella per cui $0\leq t\leq\pi$. Si ha inoltre

$$\gamma'(t)=(\sin t+t\,\cos t,2).$$

Allora (integrando due volte per parti)

$$l=\int_0^\pi([-2\,t]\,[\sin t+t\,\cos t]+2\,t\sin t)\,dt=\int_0^\pi -2\,t^2\cos t\,dt=[-2t^2\,\sin t]\Big|_0^\pi+\int_0^\pi 4\,t\,\sin t\,dt$$

$$=4\int_0^\pi t\,\sin t\,dt=4\,[-t\,\cos t]\Big|_0^\pi+4\int_0^\pi\cos t\,dt=4\,(-\pi\,\cos\pi)+4\,\sin t\Big|_0^\pi=4\,\pi.$$

• Parametrizziamo il segmento. Si ha

$$\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) = (0, 2\,\pi\,t) \qquad 0 \leq t \leq 1.$$

Si ha $\tilde{\gamma}'(t) = (0, 2\,\pi)$ da cui

$$l = \int_0^1 (-2\,\pi\,t)0 + 0\,(2\,\pi)\,dt = 0.$$

✍ **Esercizio 8.0.17.** *(i) Sia dato il campo vettoriale*

$$F(x, y) = \left(\frac{f(x)y^2}{x} + 5y^2, -y\cos x + 10xy\right),$$

si stabilisca se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ può essere scelta in modo tale che F ammetta un potenziale in tutto il suo dominio di definizione, e nel caso calcolarlo.

(ii) Si calcoli l'integrale curvilineo $\int_\gamma G \cdot d\gamma$, dove

$$G(x, y) = \big(y\sin x, -\cos x\big)e^{y(\cos x)}, \qquad \gamma : [0, 1] \to \mathbf{R}^2, \quad t \mapsto (\cos(t\pi) + t^3, 1 + t^4).$$

(i) È chiaro che l'insieme di definizione del campo vettoriale F dipende dalla scelta della funzione f. Una condizione necessaria affinché il campo F ammetta potenziale è che valga la condizione delle derivate in croce. Imponiamo questa condizione e vediamo cosa implica su f. Si dovrebbe avere

$$D_x(-y\cos x + 10xy) = D_y\left(\frac{f(x)\,y^2}{x} + 5y^2\right)$$

da cui

$$y\sin x + 10y = \frac{f(x)}{x}\,2\,y + 10y$$

e questo implica allora che $f(x) = \dfrac{1}{2}\,x\,\sin x$.
Con questa scelta di f vale la condizione delle derivate in croce e si ha

$$F(x, y) = \left(\frac{1}{2}\,\sin x\,y^2 + 5\,y^2, -y\,\cos x + 10\,x\,y\right)$$

da cui si vede immediatamente che F è definito su tutto $\mathbb{R}^2$ che è un dominio semplicemente connesso. Quindi la teoria ci assicura che il campo dato è conservativo. Calcolo un potenziale U. Si deve avere

$$U_x = \frac{1}{2}\,\sin x\,y^2 + 5\,y^2 \qquad U_y = -y\,\cos x + 10\,x\,y$$

da cui
$$U = \int \left(\frac{1}{2}\sin x\, y^2 + 5\,y^2\right)\,dx = \frac{1}{2}\,y^2(-\cos x) + 5\,x\,y^2 + C_1(y)$$
ma anche
$$U = \int (-y\,\cos x + 10\,x\,y)\,dy = -\frac{y^2}{2}\,\cos x + 5\,x\,y^2 + C_2(x).$$
A questo punto posso senz'altro scegliere $C_1(y) = C_2(x) = 0$ e
$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\,y^2\,\cos x + 5\,x\,y^2.$$
(ii) Si tratta di calcolare un integrale curvilineo di seconda specie, cioè un integrale di un campo vettoriale. Vediamo se il campo G è conservativo. Il suo dominio di definizione è $\mathbb{R}^2$ che è semplicemente connesso; vediamo se vale la condizione delle derivate in croce. Dovrebbe essere
$$D_x(-\cos x\, e^{y(\cos x)}) = D_y(e^{y(\cos x)}\,y\,\sin x)$$
da cui
$$\sin x\, e^{y(\cos x)} + \cos x\, e^{y(\cos x)}\,\sin x\, y = e^{y(\cos x)}\,\cos x\, y\,\sin x + e^{y(\cos x)}\,\sin x.$$
Quindi la teoria ci assicura che il campo G è conservativo. Troviamo un potenziale U. Deve essere
$$U_x = y\,\sin x\, e^{y(\cos x)} \qquad U_y = -\cos x\, e^{y(\cos x)}$$
da cui
$$U = \int (y\,\sin x\, e^{y(\cos x)})\,dx = -e^{y(\cos x)} + C_1(y)$$
e anche
$$U = \int (-\cos x\, e^{y(\cos x)})\,dy = -e^{y(\cos x)} + C_2(x)$$
quindi posso senz'altro scegliere $C_1(y) = C_2(x) = 0$ e $U(x,y) = -e^{y(\cos x)}$.
A questo punto
$$\int_\gamma G \cdot d\,\gamma = U(\gamma(1)) - U(\gamma(0))$$
da cui
$$\gamma(1) = (0,2) \qquad \gamma(0) = (1,1)$$
e
$$\int_\gamma G \cdot d\,\gamma = -e^2 + e^{\cos 1}.$$

✍ **Esercizio 8.0.18.** *Calcolare il lavoro del campo* $F(x,y) = (3y, 1+x)$ *sulla curva* γ *parametrizzata da* $\Phi(t) = (t^2, t + \arctan t)$ *con* $0 \le t \le 2$.

Si tratta di un integrale curvilineo di seconda specie. Sia $F_1(x,y) = 3y$ e $F_2(x,y) = 1+x$. Allora

$$\int_\gamma F = \int_0^2 F_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + F_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t)\, dt$$

dove

$$\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)) = \left(2t, 1 + \frac{1}{1+t^2}\right).$$

Allora

$$\int_\gamma F = \int_0^2 \left(6t + \frac{6t}{1+t^2} + 1 + 2t + \frac{1}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}\right) dt = \int_0^2 \left(1 + 8t + \frac{8t}{1+t^2} + \frac{1}{1+t^2}\right) dt$$

da cui

$$\int_\gamma F = \left[t + 4t^2 + 4\log(1+t^2) + \arctan t\right]_0^2 = 18 + 4\log 5 + \arctan 2.$$

✍ **Esercizio 8.0.19.** *Considerate il campo vettoriale*

$$F(x,y) = \left[\left(3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\right), \left(3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right)\right]$$

a) dite se vale la condizione delle derivate in croce;
b) dite se F è conservativo, e in caso affermativo calcolate un potenziale;
c) calcolate l'integrale di F sulla metà superiore dell'ellisse di equazione $x^2+4y^2 = 4$ percorsa in verso antiorario.

(a) Verifichiamo che vale la condizione delle derivate in croce. Si deve avere

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\right).$$

D'altra parte si ha

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(3 + \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}\right) = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}\right)$$

e quindi vale la condizione delle derivate in croce.
(b) Si ha che F è conservativo perché vale la condizione delle derivate in croce e perché il suo dominio di definizione (che è $\mathbb{R}^2$) è semplicemente connesso. Troviamo un potenziale di F. Se U è un potenziale, deve senz'altro essere

$$U_x = 3x^2 + \frac{2xy^2}{1+x^2y^2}$$

da cui

$$U(x,y) = x^3 + \log(1+x^2y^2) + c_1(y).$$

D'altra parte deve anche essere

$$U_y = 3 + \frac{2x^2y}{1 + x^2y^2}$$

da cui

$$U(x, y) = 3y + \log(1 + x^2y^2) + c_2(x).$$

Allora un potenziale si ottiene scegliendo $c_1(y) = 3y$ e $c_2(x) = x^3$.
(c) Parametrizziamo la parte superiore dell'ellisse. Si ha

$$\gamma(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, \pi].$$

Da cui

$$\gamma'(\theta) = (-2\sin\theta, \cos\theta).$$

Quindi, dette rispettivamente $F_1(x, y)$ e $F_2(x, y)$ le due componenti del campo, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_\gamma F\,ds &= \int_0^\pi [F_1(x(\theta), y(\theta)) \cdot \gamma_1'(\theta) + F_2(x(\theta), y(\theta)) \cdot \gamma_2'(\theta)]\,d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[-24\cos^2\theta\sin\theta - \frac{8\cos\theta\sin^3\theta}{1 + 4\cos^2\theta\sin^2\theta} + 3\cos\theta + \frac{8\cos^3\theta\sin\theta}{1 + 4\cos^2\theta\sin^2\theta}\right] d\theta \\ &= 8\,[\cos^3\theta]_0^\pi + 3\,[\sin\theta]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{4\sin(2\theta)\cos(2\theta)}{1 + [\sin(2\theta)]^2} d\theta = -16 + [\log(1 + [\sin(2\theta)]^2)]_0^\pi = -16\end{aligned}$$

✍ **Esercizio 8.0.20.** *Considerate i campi* $F_1(x, y) = (2xy, x^2)$ *e* $F_2(x, y) = (-y, x)$;

a) dite per quali campi vale la condizione delle derivate in croce;
b) dite se i campi sono conservativi (o se almeno uno lo è) e in caso affermativo calcolate un potenziale;
c) calcolate l'integrale di $F_1 + F_2$ *sul bordo del rettangolo* $[0, 3] \times [0, 1]$ *percorso in verso antiorario.*

Per F_1 si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x = \frac{\partial}{\partial x}x^2,$$

quindi per F_1 vale la condizione delle derivate in croce su tutto $\mathbb{R}^2$, pertanto è conservativo. Un potenziale si trova subito ed è x^2y.
Invece per F_2 si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1 \neq 1 = \frac{\partial}{\partial x}x,$$

quindi per F_2 non vale la condizione delle derivate in croce quindi non è conservativo.
Dato che il bordo del rettangolo è una curva chiusa, l'integrale di F_1 è nullo. Resta solo da calcolare quello di F_2. Parametrizziamo i quattro lati:

$$l_1 := \phi_1(t) = (t, 0), \qquad 0 \le t \le 3 \qquad \int_{l_1} F_2 = \int_0^3 0\, dt = 0;$$

$$l_2 := \phi_2(t) = (3, t), \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \int_{l_2} F_2 = \int_0^1 3\, dt = 3;$$

$$l_3 := \phi_3(t) = (3 - t, 1), \qquad 0 \le t \le 3 \qquad \int_{l_3} F_2 = \int_0^3 1\, dt = 3;$$

$$l_4 := \phi_4(t) = (0, 1 - t), \qquad 0 \le t \le 1 \qquad \int_{l_4} F_2 = \int_0^1 0\, dt = 0.$$

da cui

$$\int F_2 = 6.$$

✍ **Esercizio 8.0.21.** *Considerate il campo vettoriale* $F(x, y) = (-y, 3x)$

a) dite se per F *vale la condizione delle derivate in croce;*
b) dite se esiste un numero c *tale che* $F(x, y) - c(x, -y)$ *sia conservativo;*
c) calcolate l'integrale di F *sulla curva che si ottiene percorrendo nell'ordine il segmento verticale da* $(4, 0)$ *a* $(4, 2)$*, poi tre quarti della circonferenza centrata in* $(2, 2)$ *fino a* $(2, 0)$*, infine la metà superiore della circonferenza centrata in* $(3, 0)$ *fino a tornare al punto di partenza.*

Si ha $F = -y\, dx + 3x\, dy$ e

$$\frac{\partial(-y)}{\partial y} = -1 \neq 3 = \frac{\partial(3x)}{\partial x},$$

quindi F non è conservativo. Dato che il dominio di $F - c(x\, dy - y\, dx)$ è $\mathbb{R}^2$, per dire che è conservativo basta vedere se vale la condizione delle derivate in croce, ma

$$F - c(x\, dy - y\, dx) = (c - 1)y\, dx + (3 - c)x\, dy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}[(c - 1)y] = c - 1; \qquad \frac{\partial}{\partial x}[(3 - c)x] = 3 - c,$$

quindi vale

$$\Leftrightarrow c - 1 = 3 - c \Leftrightarrow 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2.$$

Chiamiamo ora $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ rispettivamente il segmento, i 3/4 di circonferenza e la semicirconferenza orientati come prescritto e parametrizzati in questo modo:
$\gamma_1 : (4, t) \qquad 0 \le t \le 2;$

$\gamma_2 : (2+2\cos t, 2+2\sin t), \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$
$\gamma_3 : (3-\cos t, \sin t) \qquad 0 \le t \le \pi.$

$$\int_{\gamma_1} F = \int_0^2 12\, dt = 24$$

$$\int_{\gamma_2} F = \int_0^{3\pi/2} 12\cos t + 12\cos^2 t + 4\sin t + 4\sin^2 t\, dt = [12\sin t - 4\cos t + 8t + 4\sin t\cos t]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 12\pi - 8$$

$$\int_{\gamma_3} = \int_0^{\pi} -9\cos t - 3\cos^2 t - \sin^2 t\, dt = [-9\sin t - 2 - \sin t\cos t]_0^{\pi} = -2\pi$$

e la somma vale $10\pi + 16$.

✍ **Esercizio 8.0.22.** *Considerate il campo vettoriale $F(x,y,z) = (z,x,y)$;*

a) dite se per il campo F vale la condizione delle derivate in croce;
b) calcolate l'integrale di F sulla curva che si ottiene percorrendo (nell'ordine) prima la curva γ parametrizzata da $(\cos t, \sin t, t)$ con $0 \le t \le 2\pi$ e poi il segmento che parte dal secondo estremo di γ e arriva al primo estremo di γ.

Per F non vale la condizione delle derivate in croce; infatti la derivata in x del coefficiente di $d\,y$ è 1, quella in y del coefficiente di dx è 0. Calcoliamo l'integrale sull'elica:

$$\int_0^{2\pi} (z\,dx + x\,dy + y\,dz)\,dt = \int_0^{2\pi} (t\,(-\sin t) + \cos t\,(\cos t) + \sin t\,1)\,dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-t\sin t + \cos^2 t + \sin t)\,dt = \left[(t\cos t - \sin t) + \frac{t + \sin t + \cos t}{2} - \cos t\right]_0^{2\pi} = 3\pi.$$

Invece sul segmento che parte da $(1,0,2\pi)$ e arriva a $(1,0,0)$ ed è quindi parametrizzato da $(1,0,2\pi - t)$ con $0 \le t \le 2\pi$ si ha

$$\int_0^{2\pi} (z\,dx + x\,dy + y\,dz)\,dt = \int_0^{2\pi} (1\,0 + 0\,(-1) + (2\pi - t)\,0)\,dt = 0,$$

quindi il valore finale è 3π.

✍ **Esercizio 8.0.23.** *Sia F il campo vettoriale $F(x,y) = (2x\sin y - 3y, x^2\cos y)$ e sia γ la curva costituita dalla metà inferiore della circonferenza di centro $(\pi,0)$ e raggio π, percorsa da $(0,0)$ a $(2\pi,0)$, seguita dalla parte del grafico della funzione $\sin x$ con $x \in [0,2\pi]$, percorsa da $(2\pi,0)$ a $(0,0)$;*

a) dite se per il campo F valgono le condizioni delle derivate in croce;
b) dite se F è conservativo;
c) scrivete F come somma $F_0 + F_1$ di due campi vettoriali con F_0 conservativo;
d) Calcolate $\int_\gamma F \cdot d\gamma$.

a) $\dfrac{\partial A}{\partial y} = 2x\cos y - 3 \neq \dfrac{\partial B}{\partial x} = 2x\cos y$ quindi per F non vale la condizione delle derivate in croce.
b) F non è conservativo perché non vale la condizione delle derivate in croce (che è condizione necessaria).
c) $F = 2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy - 3y\,dx$ dove $F_0 := 2x\sin y\,dx + x^2\cos y\,dy$ e $F_1 := -3y\,dx$. Si ha che F_0 è conservativo perché vale la condizione delle derivate in croce su $\mathbb{R}^2$ semplicemente connesso.
d) $\int_\gamma F = \int_\gamma F_1$ perché F_0 è conservativo e γ chiusa.

$$\gamma_1 \begin{cases} x = \pi(1+\cos t) \\ y = \pi\sin t \qquad -\pi \le t \le 0, \end{cases}$$

$$\gamma_2 \begin{cases} x = t \\ y = \sin t \qquad 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Dunque si ha

$$\int_\gamma F = \int_{\gamma_1} F - \int_{\gamma_2} F = 3\pi^2 \int_{-\pi}^{0} sin^2 t\,dt + \int_0^{2\pi} 3\sin t\,dt = \frac{3}{2}\pi^3 + 0 = \frac{3}{2}\pi^3.$$

✍ **Esercizio 8.0.24.** *Calcolare*

$$\int_\gamma ye^x\,dx + \left(e^x + \frac{2}{y}\log y\right)\,dy$$

ove γ è la curva piana di equazione cartesiana $y = (1-e)x^2 + e$ per $0 \le x \le 1$ percorsa nel verso delle x crescenti.

Il campo

$$F = ye^x\,dx + \left(e^x + \frac{2}{y}\log y\right)\,dy$$

è tale che vale la condizione delle derivate in croce:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Inoltre è definito sull'insieme $\{(x,y) : y > 0\}$ che è un semipiano aperto e quindi semplicemente connesso. Allora F è conservativo nel suo dominio.
Potenziale:

$$f(x,y) = ye^x + (\log y)^2 + c.$$

La curva è una parabola di vertice $(0,e)$.

$$\int_\gamma w = f(1,1) - f(0,e) = e - [e+1] = -1.$$

CAPITOLO 9

Esercizi riguardanti serie di potenze e serie di Fourier

9.1. Serie di potenze

✍ **Esercizio 9.1.1.** *Trovare l'insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze (quando possibile, discuterne il comportamento agli estremi):*

$$
\begin{array}{ll}
1)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n & 2)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2} \\
3)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} & 4)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (2^n+3^n)x^n \\
5)\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n+3} & 6)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\log(1+n)} \\
7)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\sqrt{n}}x^n & 8)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+3^n} \\
9)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^2-n}x^n & 10)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right)x^n \\
11)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3x^{2n+1} & 12)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{n+1}\right)^n x^{2n} \\
13)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+4}e^{nx} & 14)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n+1}}{(x+1)^n}
\end{array}
$$

9.2. Serie di Fourier

✍ **Esercizio 9.2.1.** (variazioni dell'onda quadra) *Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$*

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ 0 & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$

R. Ragionando per linearità rispetto all'onda quadra si ottiene

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

✍ **Esercizio 9.2.2.** (variazioni dell'onda quadra) *Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$

R.

$$-\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

✍ **Esercizio 9.2.3.** (variazioni dell'onda quadra) *Determinare i coefficienti di Fourier della funzione, per $A > 0$*

$$f(x) = \begin{cases} A & x \in [0, \pi) \\ -A & x \in [\pi, 2\pi) \end{cases}$$

prolungata a una funzione $2\pi-$periodica su $\mathbb{R}$. Discutere la convergenza della serie di Fourier.

R.

$$\frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin((2n+1)x)$$

Essa converge a $f(x)$ per $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ mentre converge a 0 per $x = -\pi, 0, \pi$.

✍ **Esercizio 9.2.4.** *Sviluppare in serie di Fourier*

$$f(x) = 4 - 2\sin x + 3\cos(3x)$$

➻ **R.** Si nota che f è un polinomio trigonometrico, quindi confrontando

$$4 - 2\sin x + 3\cos(3x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

si ottiene

$$a_n = \begin{cases} 8 & n = 0 \\ 3 & n = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$b_n = \begin{cases} -2 & n = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente in questo caso non si pongono problemi di convergenza della serie di Fourier.

✍ **Esercizio 9.2.5.** *Sviluppare in serie di Fourier*

$$f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x$$

➻ **R.** Usando le formule di duplicazione si ottiene

$$f(x) = \sin^3 x + \sin^2 x = \sin x \sin^2 x + \sin^2 x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 3x$$

quindi f si riduce a un polinomio trigonometrico, quindi confrontando

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 3x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

si ottiene

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ -1/2 & n = 2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$b_n = \begin{cases} 3/4 & n = 1 \\ -1/4 & n = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ovviamente anche in questo caso non si pongono problemi di convergenza della serie di Fourier.

✍ **Esercizio 9.2.6.** *Sviluppare in serie di Fourier*

$$f(x) = x^2 \qquad x \in [-1, 1)$$

prolungata a una funzione 2-periodica su $\mathbb{R}$

➻ **R.** Le uniche osservazioni da fare sono che f è pari, dunque $b_n = 0$ e che il periodo non è 2π ma $T = 2$. Quindi usando le formule

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\,\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)\,dx = \int_{-1}^1 x^2\,\cos(\pi n x)\,dx$$

si ottiene

$$a_0 = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

mentre integrando due volte per parti

$$a_n = \frac{4\cos(\pi n)}{\pi^2 n^2} = (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2}$$

Dunque la serie di Fourier associata alla funzione è

$$\frac{1}{3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(\pi n x).$$

✍ **Esercizio 9.2.7.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione* $f(x) = |x|$ *definita su* $[-\pi, \pi]$ *e prolungata a una funzione* 2π*-periodica su* $\mathbb{R}$*. Discutere la convergenza della serie di Fourier e utilizzare i risultati ottenuti per verificare che*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

➻ **R.** La funzione è pari per cui $b_n = 0$ mentre $a_0 = \pi/2$ e

$$a_n = \begin{cases} 0 & n \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

per cui la serie di Fourier è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$$

C'è convergenza totale - teorema del confronto con la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

c'è convergenza puntuale in ogni punto e c'è anche convergenza in norma quadratica. Per il calcolo della somma richiesta, è sufficiente calcolare lo sviluppo di Fourier in $x = 0$.

✍ **Esercizio 9.2.8.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = |\sin x|$ definita su $[0, \pi]$ e prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.*

➼ **R.** Si ha

$$f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

C'è convergenza totale su $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza puntuale e in norma quadratica.

✍ **Esercizio 9.2.9.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione*

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

definita su $[-\pi, \pi]$ e prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.

➼ **R.** Si ha (ricavandola dall'esercizio precedente)

$$g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)} \cos(2nx)$$

Anche in questo caso c'è convergenza totale su $\mathbb{R}$ e quindi anche convergenza puntuale e in norma quadratica.

✍ **Esercizio 9.2.10.** *Sviluppare in serie di Fourier la funzione $f(x) = x$ definita su $[0, 2\pi)$ e prolungata a una funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$. Discuterne la convergenza.*

➼ **R.**

$$\pi - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \sin(kx)$$

Converge a $f(x) = x$ per $x \in (0, 2\pi)$ mentre converge a π per $x = 0$, $x = 2\pi$.

✍ **Esercizio 9.2.11.** *Sviluppare in serie di Fourier delle funzioni* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = x^4$ *definite su* $[-\pi, \pi]$ *e prolungate a funzioni* 2π*-periodiche su* $\mathbb{R}$*. Discuterne la convergenza. Quanto valgono le somme*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}?$$

R.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^2} \cos(kx)$$

$$g(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{4}{k^2} - \frac{48}{k^4} \right) \cos(kx)$$