Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)
Prof. Fredy Ruiz, Appello del 16 Febbraio 2022

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$x_1(k+1) = x_1(k)\,(1 - x_2(k)) + u(k)$$
$$x_2(k+1) = x_2(k)\,(1 + x_1(k)) - u(k)$$
$$y(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

dove $x_1(k) \in R$, $x_2(k) \in R$

1. Classificare il sistema.

- SISO, $u(k) \in \mathbb{R}$, $y(k) \in \mathbb{R}$, Strettamente proprio
- ordine due
- tempo discreto
- Non lineare, ci sono prodotti fra $x_1(k) \cdot x_2(k)$

2. Determinare il valore di ingresso $u(k) = \bar{u}$ richiesto per ottenere come stati di equilibrio $\bar{x}_1 = 1$ e $\bar{x}_2 = 5$.

In equilibrio $\left.\begin{array}{l} x_1(k+1) = x_1(k) = \bar{x}_1 \Rightarrow \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{u} \\ x_2(k+1) = x_2(k) = \bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_2 = \bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{u} \end{array}\right\} \bar{u} = \bar{x}_1\bar{x}_2$

per $\bar{x}_1 = 1$, $\bar{x}_2 = 5$ risulta:

$$\bar{u} = \bar{x}_1\bar{x}_2 = 5$$

3. Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio trovato nel punto precedente.

Matrici del sistema linearizzato:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1-\bar{x}_2 & -\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 & 1+\bar{x}_1 \end{bmatrix}; \quad B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.C = [1 \quad 1], \quad D = 0\right\} \text{equazione di uscita lineare.}$$

Nel equilibrio:

$$\begin{bmatrix} \delta x_1(k+1) \\ \delta x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \delta u(k)$$

$$\delta y(k) = [1 \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} \delta x_1(k) \\ \delta x_2(k) \end{bmatrix}$$

4. Studiare la stabilità del sistema linearizzato ricavato al punto 3 e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

Polinomio caratteristico $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

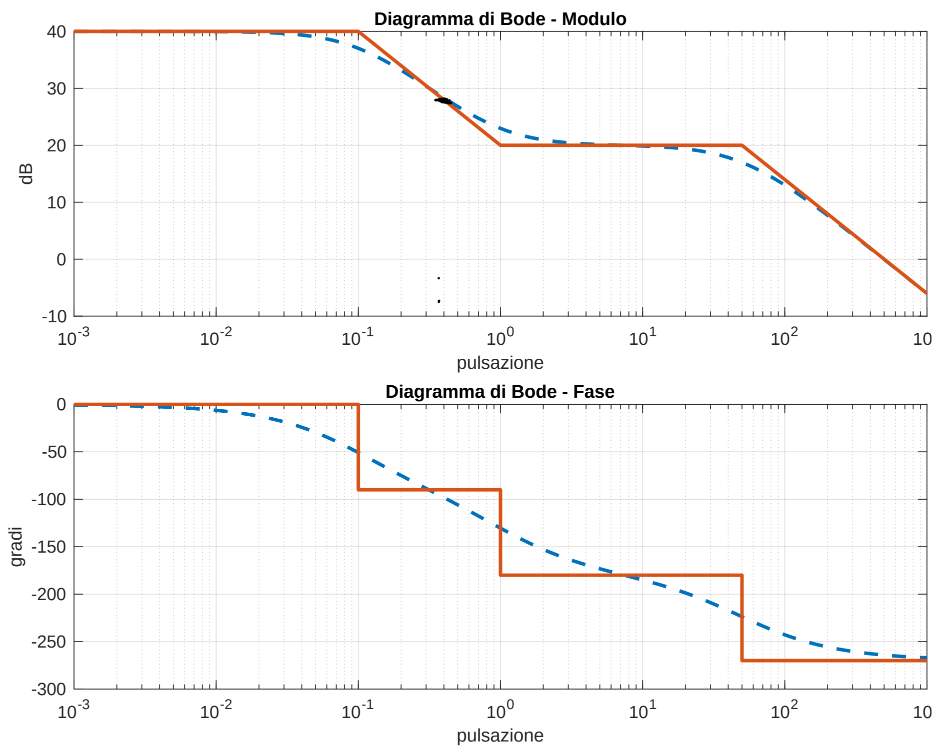
$$\varphi(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda+4 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 8 + 5 = \lambda^2 + 2\lambda - 3$$

autovalori: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1$

$|\lambda_1| = 3 > 1$, : Il sistema linearizzato e anche il movimento di equilibrio del sistema non lineare sono Instabili.

ESERCIZIO 2

In figura sono rappresentati i diagrammi di Bode del modulo e della fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.



1. Determinare ordine, tipo, poli, zeri e guadagno (statico o generalizzato) di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

Ci sono singolarità in $\omega_1 = 0,1$ rad/s, $\omega_2 = 1$ rad/s, $\omega_3 = 50$ rad/s.

ω_1: Pendenza 0 a -20 dB/dec $\Rightarrow$ Polo, Fase 0 a $-90°$ $\Rightarrow$ stabile

ω_2: Pendenza -20 dB/dec a 0 $\Rightarrow$ zero, Fase $-90°$ a $-180°$ $\Rightarrow$ Fase non minima

ω_3: Pendenza 0 a -20 dB/dec $\Rightarrow$ Polo, Fase $-180°$ a $-270°$ $\Rightarrow$ stabile

Pendenza iniziale $0 \Rightarrow$ tipo 0

Guadagno statico $40dB \Rightarrow \mu = 100$

$$G(s) = 100 \frac{1-s}{(1+s/50)(1+s/0{,}1)}$$

I due poli ~~hanno~~ hanno parte reale negativa allora il sistema è asintoticamente stabile.

2. Si dica, approssimativamente, quanto vale a regime l'uscita $y(t)$ del sistema a fronte di un ingresso $u(t)$ pari a:
1) $u(t) = 5\text{sca(t)}$
2) $u(t) = -3\sin(0.4\,t)$
3) $u(t) = 4\sin(20\,t)$.

Per $u(t) = 5\,sca(t)$.

$$y_1(\infty) = 5 \cdot G(0) = 500$$

Per $u(t) = -3\sin(0{,}4t)$, $\omega = 0{,}4\ rad/s$

$$|G(j0{,}4)| \cong 27dB,\ \arg(G(j0{,}4)) \cong -100° (-1{,}74 rad)$$

$$y_2(t) \cong -(22{,}4)\cdot 3\sin(0{,}4t - 1{,}74)$$

Per $u(t) = 4\sin(20t)$, $\omega = 20\ rad/s$

$$|G(j20)| \cong 19dB,\ \arg(G(j20)) \cong -200° (-3{,}5 rad)$$

$$y_3(t) \cong (8{,}9)\cdot 4\sin(20t - 3{,}5)$$

ESERCIZIO 3

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{1}{s(s+5)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti. Si supponga che il sistema venga retroazionato come in figura.

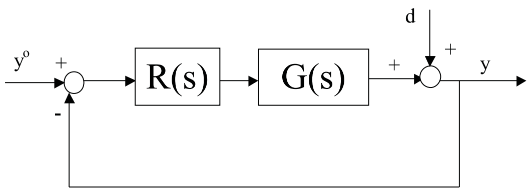


Figura 1: Esercizio 3 - Sistema di controllo

Per ognuno dei seguenti regolatori:

$$R_1(s) = 5; \qquad R_2(s) = 500\frac{s+5}{s+50}$$

Rispondere:

1. Determinare la funzione di anello $L(s)$ e calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $L(s)$.

$L_1(s) = R_1(s) \cdot G(s)$

$L_1(s) = \frac{5}{s(s+5)}$

Tipo 1, $\mu_g = 1$

poli $= \{0, -5\}$

Zeri = Non ci sono

$L_2(s) = R_2(s)\, G(s)$

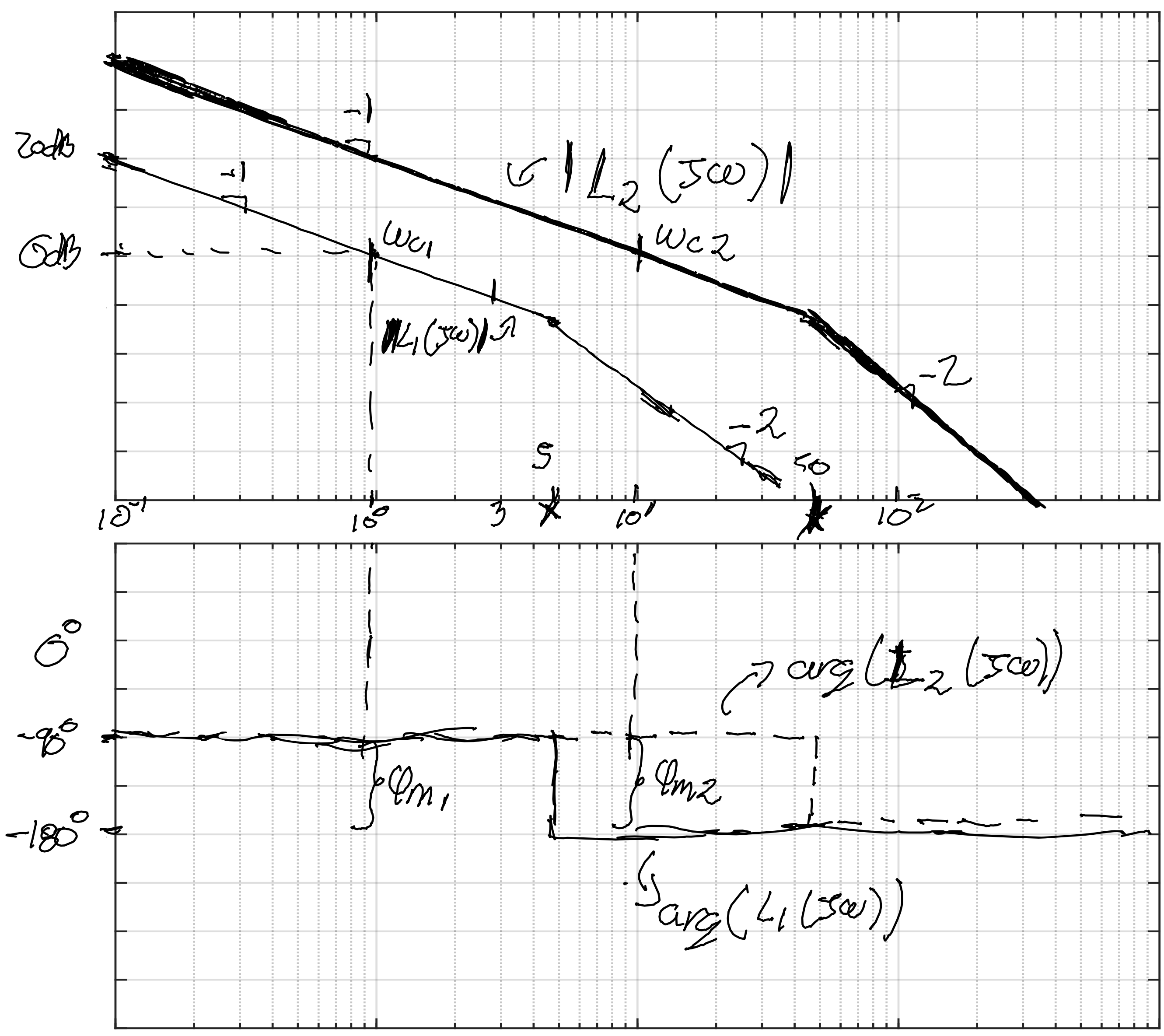
$L_2(s) = \frac{500}{s(s+50)}$

Tipo 1, $\mu_g = 10$

Poli $= \{0, -50\}$, più polo nascosto in -5

Zeri = Non ci sono, (cancellazione)

2. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $L(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.



$\omega_{c1} = 1\,rad/s$

$\varphi_{m1} \simeq 90°$

$K_{m1} = +\infty$

$\omega_{c2} = 10\,rad/s$

$\varphi_{m2} \simeq 90°$

$K_{m2} = +\infty$

3. Verificare che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e determinare il margine di fase e di guadagno.

Per entrambi i sistemi si applica il criterio della piccola fase;

- $L(s)$ non ha poli a parte reale positiva
- $\mu_g > 0$
- $|\arg(L(j\omega))| < 180°$
- Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

4. Determinare quanto vale l'ampiezza di regime dell'uscita $y(t)$ quando $y^o(t) = 10 + 3\sin(3t) + \sin(20t)$.

$$\boxed{Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} U(s)}$$

• $L_1(s)$:

- $y_1^o(t) = 10 \, sca(t)$

$L_1(s)$ tipo 1, allora $y_1^\infty = 10$

- $y_2^o(t) = 3\sin(3t)$

$\omega_{c1} = 1 rad/s < \omega = 3$

$|L(3j)| \cong 0{,}1 \Rightarrow |y_2^\infty(t)| \cong 0{,}3$

- $y_3^o(t) = \sin(20t)$, $20 \gg \omega_{c1}$

$|L(20j)| \cong 0{,}01 \Rightarrow |y_3^\infty(t)| \cong 0{,}01$

$|y^\infty(t)| \leq 10 + 0{,}3 + 0{,}01 = 10{,}31$

• $L_2(s)$

- $y_1^o(t) = 10 \, sca(t)$

$L_2(s)$ tipo 1, allora $y_2^\infty = 10$

- $y_2^o(t) = 3\sin(3t)$

$\omega_{c2} = 10 rad/s > 3 rad/s$

$|y_2^\infty(t)| \cong 1 \cdot |y_2^o| = 3$

- $y_3^o(t) = \sin(20t)$, $20 > \omega_{c2}$

$|y_3^\infty| \cong |L(20j)| \cdot 1 \cong 0{,}5$

$|y^\infty(t)| \leq 10 + 3 + 0{,}5 \cong 13{,}5$

5. Quale, tra i due regolatori considerati, offre delle prestazioni migliori in termini di Stabilità robusta, errore statico di fronte a ingressi di riferimento tipo scalino, errore di regime di fronte a ingressi di riferimento tipo sinusoide? Giustificare le risposte.

• I due regolatori offrono margini di stabilità simili, $\varphi_m \cong 90°$, $k_m = +\infty$.

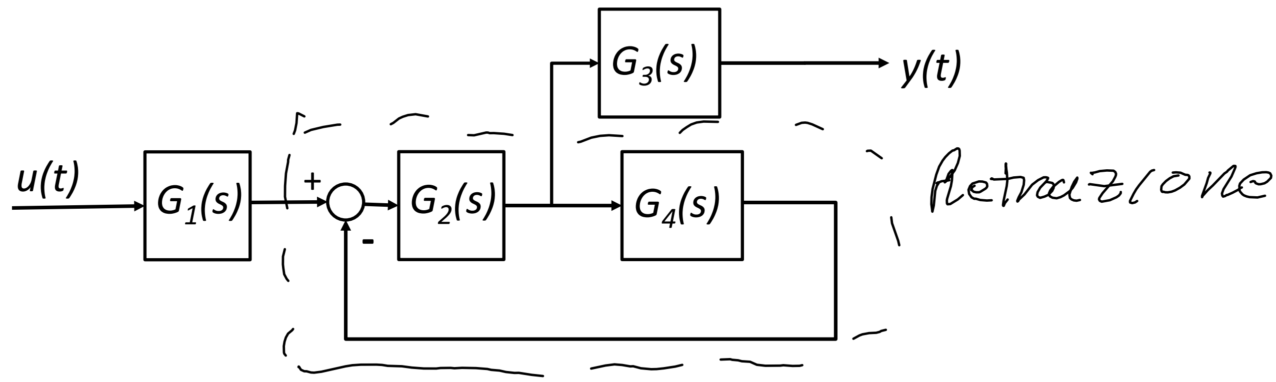
• I due ~~r~~egolatori garantiscono errore zero di fronte a ingressi di riferimento ~~tipo~~ scalino perchè $L(s)$ è tipo 1.

• Per ingressi di tipo sinusoidale, il regolatore $L_2(s)$ offre prestazioni migliori perchè $\omega_{c2} = 10 rad/s \gg \omega_{c1} = 1 rad/s$, allora, il modulo del errore a regime è:

$$|e^\infty| \cong \frac{1}{|L(j\omega)|}$$ fino a $10 rad/s$ mentre per $R_1(s)$, questo vale solo fino a $1 rad/s$

ESERCIZIO 4

Si consideri il seguente schema



1. Determinare la funzione di trasferimento da $U(s)$ a $Y(s)$.

$$G_E(s) = G_1(s) \cdot \left(\frac{G_2(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_4(s)} \right) \cdot G_3(s)$$

$$= \frac{G_1(s)\, G_2(s)\, G_3(s)}{1 + G_2(s) \cdot G_4(s)}$$

2. Posto $G_1(s) = 1/(1+s)$, $G_2(s) = 1/(s^2+s-2)$, $G_3(s) = 2/(s+1)$, $G_4(s) = k$ valutare la funzione di trasferimento da $U(s)$ a $Y(s)$ e studiare la stabilità del sistema al variare di $k \in \mathcal{R}$.

$$G_E(s) = \frac{2}{(1+s)^2} \cdot \frac{\frac{1}{s^2+s-2}}{1 + \frac{k}{s^2+s-2}} = \frac{2}{(1+s)^2 \cdot (s^2+s+k-2)}$$

- I due poli in -1, non dipendono di K (Non sono nell'anello di retroazione)
- $s^2+s+K-2$: per il criterio di Routh, sistema Asint. stabile se $K-2>0 \Rightarrow \underline{K>2}$

3. È possibile affermare che, per $G_2(s)$ e $G_4(s)$ asintoticamente stabili, il sistema equivalente sarà sempre asintoticamente stabile? giustificare la risposta.

Non è possibile, $G_2(s)$ e $G_4(s)$ sono collegati in retroazione, allora i poli del sistema equivalenti sono diversi dai poli di $G_2(s)$ e $G_4(s)$.

ESERCIZIO 5

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) \\ y(t) = x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

1. Scrivere il sistema in forma matriciale e classificare il sistema.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [1]\, u(t)$$

- Tempo continuo
- ordine 2
- SISO
- Lineare
- Proprio
- tempo invariante

2. Determinare per quali valori del parametro α il sistema risulta asintoticamente stabile.

$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}$, matrice triangolare

autovalori $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -\alpha$.

Il sistema è asint. stabile per $\alpha > 0$.

3. Posto ora $\alpha = 1$ calcolare il movimento forzato dello stato e dell'uscita per $u(t) = 2sca(t)$.

Movimento forzato. $x(0) = 0$

Formula di Lagrange: $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$

$\dot{x}_2(t)$ è indipendente di $u(t)$ e di $x_1(t)$ allora

$x_2(t) = 0$,

$\dot{x}_1(t) = -3x_1(t) + 2sca(t)$.

$x_1(t) = \int_0^t e^{-3(t-\tau)} \cdot 2sca(\tau) d\tau = \frac{2}{3}(1 - e^{-3t}) sca(t)$

$y(t) = u(t) = 2sca(t)$