ANALISI MATEMATICA 2

PROF. E. MALUTA

19 GENNAIO 2018

SVOLGIMENTO (COMPITO A)

$f(x,y) = \sqrt{3}\,x + y - 2$

sulla circonferenza $V = \{x^2+y^2-2y=0\}$ cioè su

$x^2+(y-1)^2 = 1$ $\quad f \in \mathcal{C}(V)$ - $V$ chiuso e limitato $\Rightarrow \exists \begin{cases} \operatorname{Min}_V f \\ \operatorname{Max}_V f \end{cases}$

$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t + 1 \end{cases}$ $\quad \tilde{f}(t) = f(x(t), y(t)) = \sqrt{3}\cos t + \sin t - 1$

$\tilde{f}'(t) = -\sqrt{3}\sin t + \cos t$ $\quad \tilde{f}'(t) = 0 \iff \tan t = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$\tan t = \frac{\pi}{6}$ $\quad (x,y) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\quad f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right) = 1$

$\tan t = \frac{7}{6}\pi$ $\quad (x,y) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -3$

$\operatorname{Max}_V f = 1$ $\quad$ punto di massimo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$\operatorname{Min}_V f = -3$ $\quad$ " " minimo $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

SI Il grafico di $f$ è un piano; $\operatorname{Max}_{\bar{C}} f$ e $\operatorname{Min}_{\bar{C}} f$ sono assunti sul bordo, $V = \partial C$ -

(c) poiché $f$ cambia segno, ed è continua, deve annullarsi su $C$ convesso – quindi

$\min\limits_C |f| = 0$ mentre $\max\limits_C |f| = \max\{1, 3\} = 3$

$\max\limits_C |f| = |f|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Poiché $f(x,y) = 0 \iff y = 2 - \sqrt{3}\,x$

$\min\limits_C |f|$ è assunto in tutti i punti del segmento intersezione di $C$ con la retta $y = 2 - \sqrt{3}\,x$,

cioè su $y = 2 - \sqrt{3}\,x$ con $x \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

2) $f$ è continua su $\overline{D}$; infatti il piano $x = 0$,

su cui $f$ non è definita, non ha intersezioni con $\overline{D}$.

Passando a coordinate cilindriche

$$\int_{D} \frac{z\sqrt{x^2+y^2}}{x^2(z^2+1)}\,dx\,dy\,dz = \int_{\tilde{D}} \frac{z\,\rho}{\rho^2\cos^2\vartheta\,(z^2+1)}\,\rho\,d\rho\,d\vartheta\,dz$$

dove

$$\tilde{D} = \left\{(\rho,\vartheta,z) : 1 \le \rho \le 3 \;\wedge\; 0 \le z \le \rho \;\wedge\; 0 < \vartheta < \frac{\pi}{6}\right\}$$

$$= \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta \int_1^3 \left(\int_0^{\rho} \frac{z}{z^2+1}\,dz\right) d\rho = \left[\tan\vartheta\right]_0^{\pi/6} \int_1^3 \frac{1}{2}\log(\rho^2+1)\,d\rho =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{2}\left[\rho\log(\rho^2+1) - \int\frac{2\rho^2}{\rho^2+1}\,d\rho\right]_1^3 = \frac{\sqrt{3}}{6}\left[\rho\log(\rho^2+1) - 2\rho + 2\arctan\rho\right]_1^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}\left(3\log 10 - \log 2 - 4 + 2\arctan 3 - \frac{\pi}{2}\right)$$

(3) $(*)\begin{cases} y' = \dfrac{2x}{1+(\tan y)^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$y' = f(x)\,g(y)$

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

(a)

$g \in \mathcal{C}^\infty\left(\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}\right)$

osservo che $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}+k\pi} g(y) = 0$ e $\lim_{y \to \frac{\pi}{2}+k\pi} g'(y) = 0$

quindi $g$ prolungabile di classe $\mathcal{C}^1$ su $\mathbb{R}$ –

$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\exists!$ soluzione locale di $*$

(b) $(1+(\tan y)^2)\,dy = 2x\,dx$ $\tan y = x^2 + c$

$\varphi(x) = \arctan(x^2 + c)$ (e le sue traslate $\varphi(x) = \arctan(x^2+c) + k\pi$

$\varphi(1) = \arctan(1+c) = 0 \iff c = -1$

$\varphi_1(x) = \arctan(x^2 - 1)$ C.E. $\mathbb{R}$

(c) $\varphi_2(0) = -\pi$ $\Rightarrow \varphi(x) = -\pi + \arctan(x^2 + c)$

$\varphi(0) = -\pi \iff c = 0$

$\varphi_2(x) = \arctan x^2 - \pi$