Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 7 luglio 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

Tempo: 2 ore e 10 minuti. È richiesto di giustificare tutti i passaggi.
La prova è sufficiente se e solo se le seguenti tre soglie sono tutte raggiunte: esercizi 12 punti, teoria 4 punti, punteggio totale 18.

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(5 punti)* Calcolare il volume di

$$\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 0\,,\ x \ge 0\}\,.$$

Esercizio 2 *(7,5 punti)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita: $f(x, y) = y^2 \left(x^2 + y^2 - 1\right)$.

2.1 (1 punto) Studiare il segno di f.

2.2 (1,5 punti) Determinare tutti i punti critici liberi di f.

2.3 (3 punti) Se esistono, determinare i valori di massimo e di minimo assoluto di f nel quadrato $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

2.4 (2 punti) Determinare la direzione tangente alla curva di livello $f(1, 1) = 1$, nel punto $(1, 1)$. Calcolare inoltre la massima derivata direzionale di f in $(1, 1)$.

Esercizio 3 *(6 punti)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita su $(-\pi, \pi]$ come

$$f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [0, \pi], \\ -x^2 & \text{per } x \in (-\pi, 0). \end{cases}$$

3.1 (2,5 punti) In riferimento alla serie di Fourier di f, discutere: convergenza in media quadratica, convergenza puntuale (specificando sia l'insieme di convergenza che la somma della serie), convergenza totale (sull'insieme di convergenza puntuale).

3.2 (3,5 punti) Calcolare la serie di Fourier di f.

Esercizio 4 *(5,5 punti)*

4.1 (1,5 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = 0$.

4.2 (2 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = \sin t$. Esistono soluzioni periodiche? In caso affermativo, individuarle tutte.

4.3 (2 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) = \sin t - 2$. Esistono soluzioni limitate in $(-\infty, 0)$? In caso affermativo, individuarle tutte.

TEORIA: 8 punti.

Risolvere i quesiti **T.1-5** *(nota bene: ogni quesito a crocette ammette una e una sola risposta corretta).*

T.1 (1 punto) Si consideri il problema di Cauchy: $\begin{cases} y'(t) = (\log t)^{1/3} y(t) \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$

1. Non è possibile dire se il problema ha soluzione.
2. Il problema ammette un'unica soluzione, costante.
3. Il problema ammette un'unica soluzione, non costante.
4. Il problema ammette più di una soluzione.

T.2 (1 punto) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

1. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $\det H_f(x_0, y_0) > 0$, allora (x_0, y_0) è punto di minimo di f.
2. Se $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$ e $H_f(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} 0 & c \\ c & 0 \end{bmatrix}$ con $c \neq 0$, allora (x_0, y_0) è punto di sella di f.
3. Se f ammette estremi assoluti in $A \subset \mathbb{R}^2$, allora A è chiuso e limitato.
4. Se (x_0, y_0) è punto di estremo libero per f, allora f è differenziabile in (x_0, y_0).

T.3 (1 punto) Sia $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ una curva regolare a tratti avente sostegno γ; sia poi $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

1. Se la curva $\underline{r}$ è regolare, l'integrale curvilineo di f lungo γ è nullo.
2. L'integrale curvilineo di f lungo γ potrebbe non essere definito.
3. L'integrale curvilineo di f lungo γ è definito come $\displaystyle\int_a^b f(\underline{r}(t))\,\mathrm{d}t\,.$
4. Se $\underline{v}$ è una parametrizzazione equivalente, avente sostegno δ, allora lunghezza(γ)=lunghezza(δ).

T.4 (2 punti) Data una funzione f di due variabili derivabile due volte nel suo dominio, si fornisca la definizione di matrice Hessiana di f in un punto di tale dominio e si enunci il teorema relativo alla formula di Taylor al secondo ordine.

T.5 (3 punti) Sia A una matrice $n \times n$ costante (cioè indipendente da t) e diagonalizzabile. Come si scrive l'integrale generale del sistema differenziale lineare $\underline{y}'(t) = A\,\underline{y}(t)$? Dimostrare.