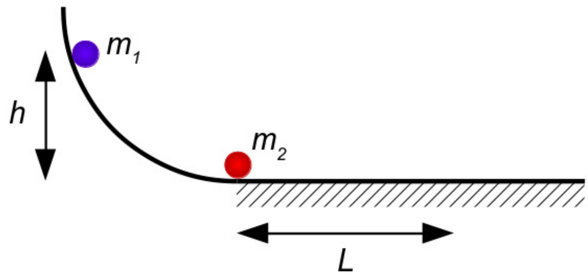
Form 3 - Domande a risposta aperta `[tot. 8 pt]`

Un corpo puntiforme di massa m_1 cade da una quota $h = 10$ m scivolando lungo una guida circolare liscia. Giunto in fondo alla guida, urta un secondo corpo puntiforme di massa $m_2 = 2\, m_1$, inizialmente in quiete. Dopo l'urto, il secondo corpo si muove lungo un piano orizzontale scabro, con coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = \frac{1}{2}$, arrestandosi dopo un tratto di lunghezza $L = \frac{2}{9}h$.



1. Si determini la velocità del corpo di massa m_1 prima dell'urto. `[2 pt]`

   - Applichiamo la conservazione dell'energia al moto di discesa lungo la guida liscia (senza attrito):

   $$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

   $$\boxed{v_1 = \sqrt{2gh} = 14.0 \text{ m/s}}$$

   avendo indicato con v_1 la velocità del corpo di massa m_1 prima dell'urto.

2. Si determini la velocità del corpo di massa m_2 dopo l'urto. `[4 pt]`

   - Per studiare il moto sul piano scabro, fissiamo un sistema di riferimento con asse x parallelo al piano, avente l'origine all'inizio di esso. L'asse y è verticale e orientato verso l'alto.
   - Il corpo di massa m_2 è sottoposto alle seguenti forze:

$\vec{P} = -m_2 g \vec{u}_y$	forza peso
$\vec{R}_n = -\vec{P} = m_2 g \vec{u}_y$	reazione normale del piano di appoggio
$\vec{F}_a = -\mu_d \lvert\vec{R}_n\rvert \vec{u}_x = -\mu_d m_2 g \vec{u}_x$	forza di attrito radente

   - La forza risultante è dunque $\vec{F}_{ris} = \vec{F}_a = -\mu_d m_2 g \vec{u}_x$.
   - Applichiamo il teorema delle forze vive al moto del corpo di massa m_2 lungo il piano scabro, sapendo che esso si arresta dopo un tratto di lunghezza L. Detta V_2 la velocitá del corpo di massa m_2 dopo l'urto avremo:

   $$-\mu_d m_2 g L = 0 - \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$

   $$V_2 = \sqrt{2\mu_d g L}$$

   Sostituendo $\mu_d = 1/2$ e $L = (2/9)h$ ricaviamo:

   $$\boxed{V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh} = 4.67 \text{ m/s}}$$

3. Si determini la velocità del corpo di massa m_1 dopo l'urto. `[2 pt]`

   - Applichiamo all'urto la conservazione della quantitá di moto, ricordando che inizialmente il corpo di massa m_2 è fermo, dunque $v_2 = 0$.

$$m_1 v_1 = m_1 V_1 + m_2 V_2$$

$$V_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} V_2$$

   - Ora, $m_2/m_1 = 2$, $v_1 = \sqrt{2gh}$ e $V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh}$. Si ricava dunque:

$$V_1 = \sqrt{2gh} - \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

$$\boxed{V_1 = V_2 = \frac{1}{3}\sqrt{2gh} = 4.67 \text{ m/s}}$$

Form 4 - Domande a risposta aperta `[tot. 8 pt]`

Due bombole a pareti rigide di uguale volume V_0 sono collegate tramite una valvola inizialmente chiusa. La prima bombola è adiabatica ed inizialmente contiene n moli di un gas perfetto biatomico alla pressione p_0 e ad una certa temperatura iniziale T_0. La seconda, inizialmente vuota, è in contatto termico con un termostato ad una temperatura $T_0/2$. A un certo punto la valvola viene aperta lentamente finché il gas non raggiunge un nuovo stato di equilibrio termodinamico. Si calcolino le seguenti quantità in funzione di p_0, V_0, n ed R.

1. La pressione finale del gas p_f. `[2 pt]`

   - Nella trasformazione il gas raddoppia il volume $V_f = 2V_0$ e, raggiungendo l'equilibrio termico con il termostato, dimezza la sua temperatura assoluta $T_f = T_0/2$.
   - Dall'equazione di stato dei gas ideali:

$$p_f V_f = nRT_f$$

$$p_f = \frac{nRT_f}{V_f} = \frac{nRT_0}{2 \cdot 2V_0} = \frac{1}{4}\frac{nRT_0}{V_0}$$

   - Poiché per lo stato iniziale $nRT_0 = p_0 V_0$, possiamo concludere:

$$\boxed{p_f = \frac{1}{4} p_0}$$

2. Il calore Q scambiato dal gas con il termostato. `[2 pt]`

   - Durante la trasformazione il gas non compie lavoro (espansione libera) e la variazione di energia interna può essere valutata tramite la sua definizione:

$$\Delta U = nc_V \Delta T = nc_V \left(\frac{T_0}{2} - T_0\right) = -\frac{1}{2} nc_V T_0$$

   - Dal Primo Principio della Termodinamica:

$$Q = \mathcal{L} + \Delta U = \Delta U = -\frac{1}{2} nc_V T_0$$

- Per un gas ideale biatomico $c_V = \frac{5}{2}R$, perciò:

$$Q = -\frac{5}{4}nRT_0$$

e applicando sempre la legge di stato dei gas ideali:

$$\boxed{Q = -\frac{5}{4}p_0V_0}$$

3. La variazione di entropia dell'ambiente. `[2 pt]`

- L'ambiente coincide con il termostato. La sua variazione di entropia può essere calcolata valutando l'integrale di Clausius su una trasformazione reversibile equivalente. Sarà una trasformazione isoterma (del termostato) che scambia una quantità di calore $-Q$.

$$\Delta S_{amb} = \int_{rev} \frac{\delta Q}{T} = -\frac{Q}{T_f} = -\frac{1}{T_0/2} \cdot \left(-\frac{5}{4}nRT_0\right)$$

$$\boxed{\Delta S_{amb} = \frac{5}{2}nR}$$

4. La variazione di entropia del gas. `[2 pt]`

- La variazione di entropia di un gas ideale che compie una trasformazione tra (p_0, V_0) e (p_f, V_f) può essere calcolata tramite la seguente espressione:

$$\Delta S_{gas} = nc_V \ln\frac{p_f}{p_0} + nc_p \ln\frac{V_f}{V_0}$$

- Sostituendo $p_f = \frac{1}{4}p_0$, $V_f = 2V_0$, $c_V = \frac{5}{2}R$ e $c_p = \frac{7}{2}R$ otteniamo:

$$\Delta S_{gas} = n\frac{5}{2}R\ln\frac{1}{4} + n\frac{7}{2}R\ln 2$$

$$\Delta S_{gas} = \frac{1}{2}nR\,(-5\ln 4 + 7\ln 2) = \frac{1}{2}nR\,(-10\ln 2 + 7\ln 2)$$

$$\boxed{\Delta S_{gas} = -\frac{3}{2}nR\ln 2}$$