Esercitazioni di Analisi 2

EDO LINEARI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Equazioni omogenee

1. Determina tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali omogenee (nelle soluzioni C_1 e C_2 sono costanti reali arbitrarie):

   (a) $y'' - 4y = 0$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x}\right]$

   (b) $y'' - 2y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = e^x \left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)\right]$

   (c) $y'' + 4y = 0$ $\quad \left[y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right]$

   (d) $y'' + 5y' - 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{x}\right]$

   (e) $4y'' + 4y' + y = 0$ $\quad \left[y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 + C_2 x\right)\right]$

   (f) $*y'' + 7y' + 10y = 0$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-5x}\right]$

   (g) $y'' + 2\sqrt{7}y' + 7y = 0$ $\quad \left[y = e^{\sqrt{7}x} \left(C_1 + C_2 x\right)\right]$

   (h) $y'' + y' + y = 0$ $\quad \left[y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]$

   (i) $3y'' - 2\sqrt{6}y' + 2y = 0$ $\quad \left[y = e^{\sqrt{\frac{2}{3}}x} \left(C_1 + C_2 x\right)\right]$

   (j) $3y'' + 5y' - 2y = 0$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\frac{1}{3}x}\right]$

2. $*$Scrivi un'equazione differenziale lineare omogenea del II ordine che abbia tra le proprie soluzioni ϕ_1 e ϕ_2 definite da $\phi_1(t) = e^{3t}$ e $\phi_2(t) = 3e^{-2t} + 2e^{3t}$ $\quad [y'' - y' - 6y = 0]$

3. Determina tutte le soluzioni dell'equazione $y'' - 2y' - 3y = 0$ tali che $\lim_{x \longrightarrow +\infty} y(x) = 0$ $\quad [y = ke^{-x};\ k \in \mathbb{R}]$

4. $*$Scrivi un'equazione lineare omogenea a coefficienti costanti di ordine 2 che abbia $\phi_1(t) = e^{2t}$ e $\phi_2(t) = te^{2t}$ tra le proprie soluzioni. $\quad [y'' - 4y' + 4y = 0]$

5. Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} y'' + y' - 6y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = -1 \end{cases}$ $\quad \left[y = \frac{1}{5}e^{-3x+3} - \frac{1}{5}e^{2x-2}\right]$

   (b) $\begin{cases} y'' - 2y' + \frac{5}{4}y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ $\quad \left[y = -2e^{-x} \sin \frac{x}{2}\right]$

(c) $\begin{cases} 100y'' - 20y' + y = 0 \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = -1 \end{cases}$ $\left[y = -(x+1)\, e^{\frac{x+1}{10}} \right]$

6. Data l'equazione $y''(t) + 2\alpha y'(t) + 4y(t) = 0$ determina per quali valori di α :

(a) tutte le soluzioni sono infinitesime per $t \longrightarrow +\infty$ $[\alpha > 0]$

(b) tutte le soluzioni divergono a $+\infty$ per $t \longrightarrow +\infty$ $[\alpha \leq -2]$

(c) tutte le soluzioni sono periodiche $[\alpha = 0]$

(d) tutte le soluzioni non ammettono limite per $t \longrightarrow +\infty$ $[-2 < \alpha < 0]$

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono tratti da temi d'esame.