Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)
Prof. Fredy Ruiz
Appello del 29 giugno 2023

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= \alpha x_1(t) + 2x_2(t) + u(t) \\
\dot{x_2}(t) &= \beta x_2(t) + 5u(t) \\
y(t) &= x_1(t) + x_2(t) + u(t)
\end{aligned}
$$

dove α e β e sono costanti reali.

1. Classificare il sistema

   - Lineare
   - SISO
   - semplicemente proprio
   - tempo invariante
   - ordine 2

2. Studiare la stabilità del sistema al variare dei parametri α e β.

   matrice $A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$; diagonale superiore $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = \beta$

   - $\alpha < 0 \wedge \beta < 0$: sistema Asintoticamente stabile
   - $\alpha > 0 \vee \beta > 0$: sistema instabile
   - $(\alpha < 0 \wedge \beta = 0) \vee (\alpha = 0 \wedge \beta < 0)$: stabile ma non asintoticamente
   - $\alpha = 0 \wedge \beta = 0$ Instabile (Jordan)

3. Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. È possibile trovare degli equilibri per un qualsiasi valore di α e β?

   Cond. di equilibrio $\dot{x} = 0$

   $$\left.\begin{aligned} \alpha \bar{x}_1 + 2\bar{x}_2 + \bar{u} &= 0 \\ \beta \bar{x}_2 + 5\bar{u} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \bar{x}_1 = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{10}{\beta} - 1\right)\bar{u} \qquad \bar{x}_2 = -\frac{5}{\beta}\bar{u}$$

   Se $\alpha \neq 0 \wedge \beta \neq 0$

- Se $\beta = \emptyset \wedge \alpha \neq \emptyset \Rightarrow \bar{u} = \emptyset$ e $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x}_1 = -\frac{2}{\alpha}\bar{x}_2$

- Se $\alpha = \emptyset \wedge \beta \neq \emptyset \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bar{x}_2 = -\frac{1}{2}\bar{u} \\ \wedge \\ \bar{x}_2 = -\frac{5}{\beta}\bar{u} \end{array}\right\}$ $\exists$ equilibrio solo se $\frac{5}{\beta} = \frac{1}{2}$

- Se $\alpha = \emptyset \wedge \beta = \emptyset \Rightarrow \bar{u} = \emptyset$, $\bar{x}_2 = \emptyset$, $\bar{x}_1 \in \mathbb{R}$

4. Fissando i valori dei parametri $\alpha = 1$, $\beta = -1$ trovare gli autovalori, autovettori e la risposta del movimento libero dello stato per $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 1$.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ / sistema instabile

- $(A - \lambda_1 I)v_1 = \emptyset \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \emptyset \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- $(A - \lambda_2 I)v_2 = \emptyset \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \emptyset \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- Mov. libero sistema triangolare: sol a cascata.

$\dot{x}_2 = -x_2,\ x_2(\emptyset) = 1 \Rightarrow x_2(t) = e^{-t} \cdot x_2(\emptyset) = e^{-t}$

$\dot{x}_1 = x_1(t) + 2x_2(t) \Rightarrow \dot{x}_1 = x_1(t) + 2e^{-t}$

$x_1(t) = \cancel{e^{t} \cdot x_1(\emptyset)} + \int_0^t e^{t-\tau}\, 2 e^{-\tau} d\tau$

$x_1(t) = e^{t} - e^{-t}$

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \alpha x_1^2(k) + u(k) \\ y_1(k) = x_1(k) + u(k) \end{cases}$$

dove α è una costante reale *Positiva*.

1. Classificare il sistema.

- Non lineare (x_1^2) - Tempo invariante
- tempo discreto
- SISO
- Semp. proprio
- Ordine uno

2. Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(k) = \bar{u}$. È possibile trovare degli equilibri per un qualsiasi valore di $\bar{u}$?

In equilibrio $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$\bar{x} = \alpha \bar{x}^2 + \bar{u}$

$\alpha \bar{x}^2 - \bar{x} + \bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha\bar{u}}}{2\alpha}$

$\exists\, \bar{x} \in \mathbb{R}$ se $1 - 4\alpha\bar{u} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\alpha\bar{u} \leq 1/4}$

se $\alpha\bar{u} = 1/4$ c'è una soluzione di equilibrio

se $\alpha\bar{u} < 1/4$ ci sono due equilibri

3. Posto $\alpha = 0.25$, determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = -3$.

equilibrio $\bar{x}^1 = 6$, $\bar{x}^2 = -2$ (due soluzioni)

sistema linearizzato

$\tilde{x}(k+1) = \dfrac{\partial f}{\partial x} \tilde{x}(k) + \dfrac{\partial f}{\partial u} \tilde{u}(k)$ per $\tilde{x} = x - \bar{x}$, $\tilde{u} = u - \bar{u}$

$\tilde{x}(k+1) = 2\alpha\bar{x}\, \tilde{x}(k) + \tilde{u}(k)$

- Per $\bar{x}^1 = 6$

$$\tilde{x}(k+1) = 3\,\tilde{x}(k) + \tilde{u}(k)$$

- Per $\bar{x}^2 = -2$

$$\tilde{x}(k+1) = -1 \cdot \tilde{x}(k) + \tilde{u}(k)$$

- Uscita

$$\tilde{y}(k) = \tilde{x}(k) + \tilde{u}(k)$$

4. Determinare i modi e studiare la stabilità di ognuno dei punti di equilibrio trovati al punto precedente.

Per $\bar{x}^1 = 6$

$A = 3,\ \lambda = 3 \Rightarrow$ modo $m_1(k) = 3^k$

$|\lambda| > 1$

Punto di equilibrio instabile

Per $\bar{x}^2 = -2$

$A = -1,\ \lambda = -1 \Rightarrow$ modo $m_2(k) = (-1)^k$

$|\lambda| = 1$

- sistema linearizzato semp. stabile
- Non possiamo concludere sulla stabilità del punto di equilibrio

5. Fissato $\alpha = 0.25$, calcolare i primi 5 campioni del movimento dello stato del sistema non lineare per $u(k) = -3, \forall k \geq 0$ e $x_1(0) = -1$.

k	u	x_1
0	-3	-1
1	-3	-2,75
2	-3	-1,11
3	-3	-2,69
4	-3	-1,19
5	-3	-2,65

ESERCIZIO 3

Si consideri la funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{s-2}{s^2+11s+10}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti.

1. Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

FdT. di secondo ordine, poli: $\{p_1 = -1, p_2 = -10\}$ Asint. stabile

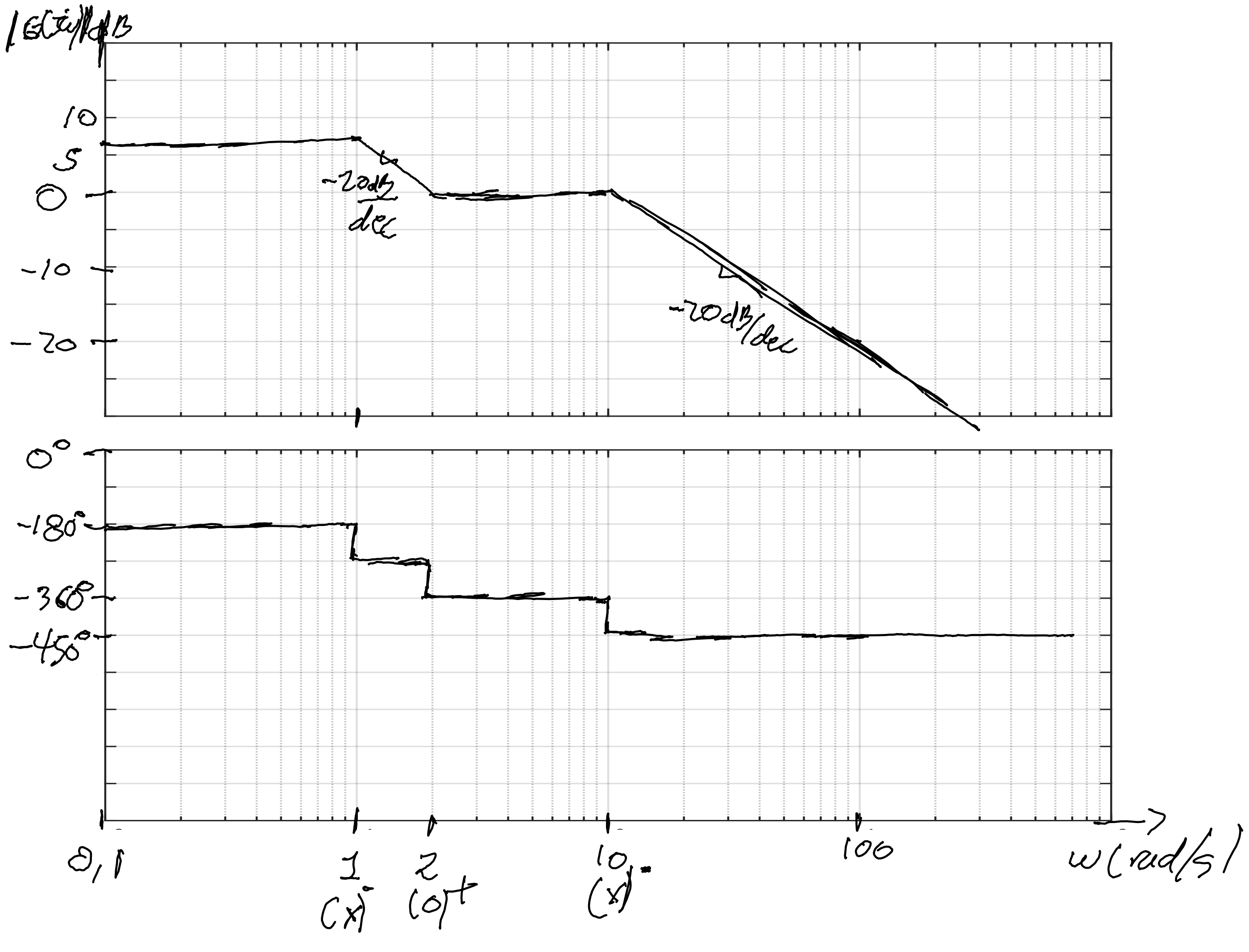
a fase non minima   zeri: $\{z_1 = 2\}$

Tipo $\emptyset$,

$\mu = G(\emptyset) = -2 \simeq \mu_{dB} = 6dB$

$arg(\mu) = -180°$

2. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$.



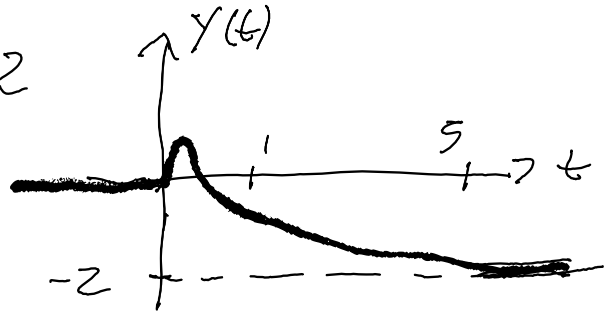
3. Per un ingresso $u(t)$ tipo scalino determinare l'espressione analitica dell'uscita $y(t)$ e i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$. Tracciare *qualitativamente* l'andamento dell'uscita. È possibile fare una approssimazione a poli dominanti? Giustificare la risposta.

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = 10\,\frac{s-2}{s^2+11s+10}\cdot\frac{1}{s} = \frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{C}{s+10}$$

$$A=-2,\ B=\frac{10}{3},\ C=-\frac{4}{3} \Rightarrow y(t) = -2+\frac{10}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{-10t},\ t\geq 0$$

$$y(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s) = 0,\quad y'(0) \overset{TVI}{=} \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 10$$

$$y(\infty) \underset{TVF}{=} \lim_{s\to 0} s\cdot Y(s) = -2$$



- Polo dominante in -1
- è possibile trascurare il polo in -10

4. Determinare, giustificando la risposta, quanto vale l'uscita $y(t)$ di regime del sistema lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(s)$ associata agli ingressi:

- $u_1(t) = 4sin(0.1t)$
- $u_2(t) = 10sin(10t)$

Teorema: per $u(t) = A\sin(\omega t)$

a regime $y(t) = A\,|G(j\omega)|\cdot\sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$

- $u_1(t) = 4\sin(0{,}1t)$, per $\omega = 0{,}1 \Rightarrow |G(j0{,}1)| \cong 2$, $\arg(G(j0{,}1)) \cong -180$

$$y(t) = 8\sin(0{,}1t - \pi)$$

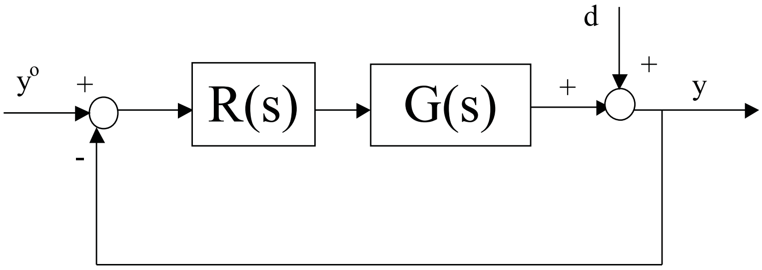
- $u_2(t) = 10\sin(10t)$, $\omega = 10 \Rightarrow |G(j10)| \cong 0dB$ aprox

$-3dB \Leftarrow$ da funzione

$\arg(G(j10)) \cong$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo in figura



dove

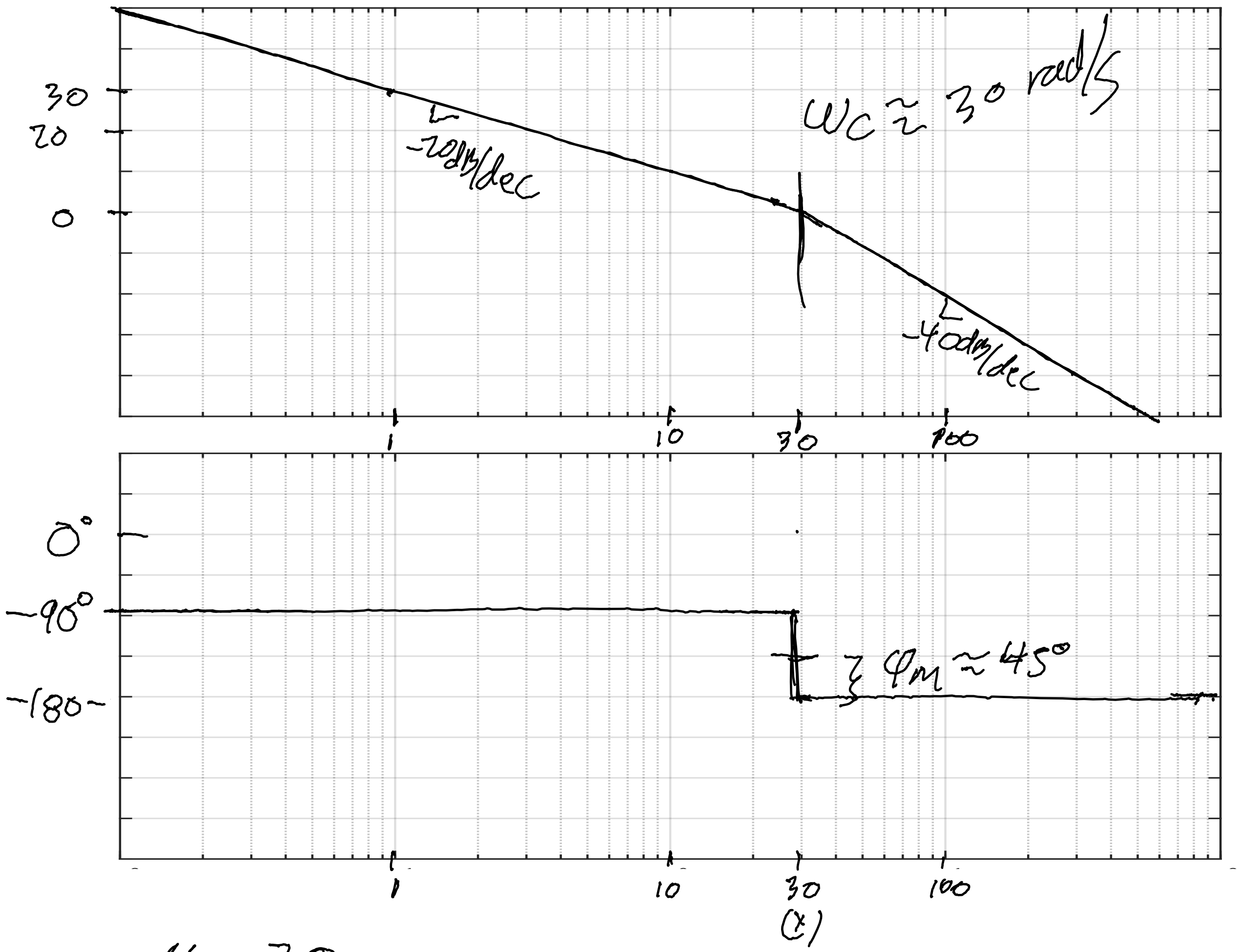
$$G(s) = \frac{9}{(s+30)(s+5)}$$

$$L(s) = \frac{900}{s(s+30)}$$

e

$$R(s) = 100\frac{s+5}{s}.$$

1. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di anello $L(s)$.



$\mu = 30$, $\mu_{dB} \simeq 29{,}5$

$g = 1$

2. Determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato e trovare in maniera approssimata i margini di fase e di guadagno.

$\mu > 0$, $L(s)$ non ha poli instabili

Le cancellazioni sono di poli stabili

Per il criterio di piccola fase, il sistema retroazionato è Asintoticamente stabile.

Dal grafico di Bode $\varphi_m \cong 45°$, $K_m = +\infty$

3. Determinare l'errore a transitorio esaurito a fronte di un ingresso di riferimento $y^o(t) =$ 5sca(t).

$L(s)$ tipo 1, allora per ingresso tipo scalino si ha:

$$e^{\infty} = 0.$$

4. Determinale il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di un disturbo $d(t) = \sin(\omega t)$, con $\omega = 10 rad/s$.

$$E(s) = -S(s) \cdot D(s) = -\frac{1}{1+L(s)} D(s)$$

$\omega = 10\, rad/s < \omega_c = 30\, rad/s$, allora

$$|S(j\omega)| \cong \frac{1}{|L(s)|}$$

dal grafico di Bode: $|L(j10)| \cong 10\, dB$

allora $|e_\infty| \cong \dfrac{1}{3{,}16} = 0{,}32$

5. Dire, giustificando la risposta, quanto vale l'ampiezza dell'uscita $y(t)$ di regime associata all'ingresso $y^o(t) = 4\sin(0.1t) - 10\sin(100\,t)$ con $d(t) = 0$.

$$Y(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}\, Y_o(s) ,$$

- Per $\omega = 0{,}1 \ll \omega_c$, $\left|\frac{L}{1+L}\right| \simeq 1$

- Per $\omega = 100 \gg \omega_c$, $\left|\frac{L}{1+L}\right| \simeq |L|$

allora $|y^o| \simeq 4\cdot(1) + 10\cdot|L(j100)| \rightarrow -20dB$

$$|y^o| \simeq 4 + 10\cdot(0{,}1) = \underline{\underline{5}}$$