Seconda prova in itinere

Logica e Algebra

03 Febbraio 2017

Esercizio 1 *Si consideri la seguente f.b.f.*

$$\mathcal{F} = \forall x(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x)) \Rightarrow \forall x(A_1^2(f_1^2(a,b),x))$$

1. *Dire se* $\mathcal{F}$ *è vera, falsa, soddisfacibile ma non vera nelle struttura interpretativa con dominio l'insieme dei numeri naturali, in cui* a *sia interpretato come* 2*,* b *come* 3*,* f_1^2 *come operazione di prodotto ed* $A_1^2(x,y)$ *sia interpretato come* x *divide* y*.*

2. *Dire se* $\mathcal{F}$ *è logicamente valida.*

3. *Portare* $\mathcal{F}$ *in forma di Skolem.*

4. *Dire se ogniqualvolta la* $\mathcal{F}$ *è vera, risulta vera anche la f.b.f.*

$$(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x)) \Rightarrow \forall x(A_1^2(f_1^2(a,b),x))$$

Esercizio 2 *Sia* $G = \mathbb{Z} \times \{1,-1\}$*, e definiamo su* G *la seguente operazione interna:*

$$(m,\alpha)\cdot(n,\beta) = (m+\alpha n, \alpha\beta)$$

1. *Mostrare che* G *è un gruppo.*

2. G *è abeliano?*

3. *L'insieme* $\{1,-1\}$ *dotato dell'usuale prodotto tra interi, è un gruppo. Mostrare che la funzione* $\varphi : G \to \{1,-1\}$ *definita da*

$$\varphi(m,\alpha) := \alpha$$

è un epimorfismo di gruppi.

Ogni risposta deve essere motivata

Esercizio 1

1. La formula $\mathcal{F}$ è vera nell'interpretazione data in quanto il suo antecedente è falso, infatti non tutti gli interi naturali sono divisibili per 2 e per 3.

2. La formula $\mathcal{F}$ non è logicamente valida. basta infatti considerare l'interpretazione avente come dominio l'insieme dei naturali, in cui le costanti a e b sono entrambe interpretate come 1, la lettera funzionale f_1^2 è l'operazione di somma e il predicato $A_1^2(x,y)$ è interpretato come x divide y. Ovviamente per ogni intero naturale x, il numero 1 divide x, mentre non per tutti gli interi naturali x, 2 divide x, pertanto l'antecedente della formula è vero, mentre il conseguente è falso e la formula risulta falsa. L'esercizio si può anche svolgere usando invece la risoluzione, provando cioè che $\neg\mathcal{F}$ è soddisfacibile. Per prima cosa si porta $\neg\mathcal{F}$ in forma prenessa: $\neg\mathcal{F} \equiv \neg(\exists x\forall y(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(a,b),y))) \equiv \forall x\exists y\neg(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(a,b),y))$, la cui forma di Skolem diventa $\neg(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(a,b),f_{Sk}^1(x)))$. La forma a clusole della formula skolemizzata è allora $\{\{A_1^2(a,x)\},\{A_1^2(b,x)\},\{\neg A_1^2(f_1^2(a,b),f_{Sk}^1(x))\}\}$. Letterali opposti in clausole diverse non possono essere unificati per cui non si può ottenere la clausola vuota ed è dunque soddisfacibile. Pertanto la formula $\neg\mathcal{F}$ è anch'essa soddisfacibile.

3. La formula $\mathcal{F}$ in forma normale prenessa è $\exists x\forall y(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(a,b),y))$; la sua forma di Skolem è allora $\forall y(A_1^2(a,c_{Sk}) \wedge A_1^2(b,c_{Sk}) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(a,b),y))$.

4. Essendo $\mathcal{F} \equiv \exists x(A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow \forall x A_1^2(f_1^2(a,b),x))$, la formula $\mathcal{F}$ è la chiusura esistenziale di $\mathcal{G} \equiv A_1^2(a,x) \wedge A_1^2(b,x) \Rightarrow \forall x A_1^2(f_1^2(a,b),x)$, pertanto $\mathcal{F}$ può essere vera anche se $\mathcal{G}$ è solo soddisfacibile, come avviene ad esempio nella interpretazione data al punto 1. Infatti come già visto in tale interpretazione $\mathcal{F}$ è vera, mentre $\mathcal{G}$ ha il conseguente falso (non tutti i naturali sono divisibili per 6) mentre l'antecedente è soddisfatto da tutti e soli gli assegnamenti che assegnino ad x un valore multiplo di 6, pertanto è soddisfacibile e la formula $\mathcal{G}$ è a sua volta soddisfacibile, ma non vera perché non è soddisfatta dagli assegnamenti che assegnino ad x un valore multiplo di 6.

Esercizio 2

1. Il testo dice già che l'operazione $\cdot$ è un'operazione interna (ed ovviamente binaria) su G, per dimostrare che G è un gruppo, basterà quindi verificare che $\cdot$ gode della proprietà associativa, che esiste in G l'elemento neutro e che ogni elemento di G ammette in G un inverso rispetto a $\cdot$.

   - Proprietà associativa. Siano $(m,\alpha),(n,\beta),(t,\gamma)$ tre generici elementi di G, si ha:
     $((m,\alpha)\cdot(n,\beta))\cdot(t,\gamma) = (m+\alpha n,\alpha\beta)\cdot(t,\gamma) = (m+\alpha n+\alpha\beta t,(\alpha\beta)\gamma)$,
     $(m,\alpha)\cdot((n,\beta)\cdot(t,\gamma)) = (m,\alpha)\cdot(n+\beta t,\beta\gamma) = (m+\alpha(n+\beta t),\alpha(\beta\gamma))$,
     da cui tenendo conto che in $\mathbb{Z}$ valgono la proprietà associativa del prodotto e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma si ha $((m,\alpha)\cdot(n,\beta))\cdot(t,\gamma) = (m,\alpha)\cdot((n,\beta)\cdot(t,\gamma))$.

- Esistenza dell'elemento neutro. Cerchiamo un elemento (x, χ) con $x \in \mathbb{Z}, \chi \in \{-1, +1\}$ tale che per ogni $(m, \alpha) \in G$ sia $(m, \alpha) \cdot (x, \chi) = (m, \alpha)$, ovvero $m + \alpha x = m$ e $\alpha\chi = \alpha$ il che implica $x = 0$ e $\alpha = 1$. Poiché $(m, \alpha) \cdot (1, 0) = (m, \alpha)$, $(0, 1)$ è elemento neutro destro (si verifica facilmente che è anche elemento neutro sinistro, ma questa verifica si può omettere per la riduzione dei postulati di gruppo).
- Esistenza dell'inverso. Per ogni $(m, \alpha) \in G$ dobbiamo cercare un elemento (x, χ) tale che $(m, \alpha) \cdot (x, \chi) = (0, 1)$, cioè $m + \alpha x = 0$ e $\alpha\chi = 1$. Poiché $\alpha \in \{-1, +1\}$, la seconda condizione è verificata per $\chi = \alpha$ e la prima per $x = -\frac{m}{\alpha} = -\alpha m$. Poiché $(m, \alpha) \cdot (-\alpha m, \alpha) = (m - \alpha^2 m, \alpha^2) = (0, 1)$, $(-\alpha m, \alpha)$ (che appartiene a G) è elemento inverso destro di (m, α) (si verifica facilmente che è anche inverso sinistro, ma questa verifica si può omettere per la riduzione dei postulati di gruppo). dunque G è gruppo rispetto a $\cdot$

2. Essendo $(1, 1) \cdot (1, -1) = (2, -1)$ e $(1, -1) \cdot (1, 1) = (0, -1)$, G non è ovviamente abeliano.

3. Mostriamo per prima cosa che φ è un omomorfismo di gruppo. Siano $(m, \alpha), (n, \beta)$ due generici elementi di G, si ha: $\varphi((m, \alpha)(n, \beta)) = \varphi((m + \alpha n, \alpha\beta)) = \alpha\beta$, $\varphi((m, \alpha)) = \alpha$, $\varphi((n, \beta)) = \beta$ e dunque $\varphi((m, \alpha)(n, \beta)) = \varphi((m, \alpha))\varphi((n, \beta))$. Ovviamente la funzione φ è suriettiva, infatti ogni $\alpha \in \{-1, 1\}$ ha come controimmagine in G ogni elemento del tipo (n, α) $(n \in \mathbb{Z})$.

.