Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)

Prof. Fredy Ruiz

Appello del 20 gennaio 2021

ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t)$$

$$\dot{x_2}(t) = x_1^2(t) - \alpha x_1(t) + u^2(t)$$

$$y(t) = x_1(t) + u(t)$$

1.1 **(2 punti)** Calcolare gli equilibri dello stato e dell'uscita in funzione di α per $\bar{u} = 1$.

1.2 **(3 punti)** Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno allo stato di equilibrio corrispondente a $\alpha = 2$.

1.3 **(1 punti)** Classificare il sistema linearizzato.

1.4 **(2 punti)** Studiare la stabilità del sistema linearizzato per $\alpha = 2$ e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

1,1 Equilibrio

Condizione $\dot{x}_1 = \emptyset \Rightarrow \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 = \emptyset$

$\dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow \bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_1 + \bar{u}^2 = \emptyset$

da $\dot{x}_2 = \emptyset \Rightarrow$ $\bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_1 + 1 = \emptyset$

$$\bar{x}_1 = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4}}{2} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1}$$

Casi: - se $\frac{\alpha^2}{4} < 1$, $|\alpha| < 2 \Rightarrow$ Non ci sono equilibri

- se $\alpha = \pm 2 \Rightarrow \bar{x}_1 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$ c'è un solo equilibrio

- se $\frac{\alpha^2}{4} > 1 \Rightarrow |\alpha| > 2 \Rightarrow$ ci sono due equilibri

da $\dot{x}_1 = \emptyset$, se $\bar{x}_1 \neq \emptyset$, $\bar{x}_2 = \emptyset$

mentre se $\bar{x}_1 = \emptyset$, $\bar{x}_2 \in \mathbb{R}$

Questo acade se $\bar{x}_1 = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - 1} = \emptyset$

1.2 Sistema linearizzato

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_2 & \bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_1 - \alpha & \emptyset \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 2\bar{u} \end{bmatrix}$$

L'equazione d'uscita è lineare

$C = [1 \quad \emptyset]$, $D = [1]$

Per $\alpha = 2$, $\left.\begin{matrix}\bar{x}_1 = 1 \\ \bar{x}_2 = \emptyset\end{matrix}\right\}$ c'è un solo equilibrio

$$A = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \emptyset \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C = [1 \quad \emptyset]$, $D = [1]$

- 1,3, Sistema
  - SISO
  - Proprio ($D \neq \emptyset$)
  - tempo invariante
  - secondo ordine

- 1,4, Stabilità:

La matrice $A = \begin{bmatrix} \emptyset & 1 \\ \emptyset & \emptyset \end{bmatrix}$ è triangolare superiore con $\lambda_1 = \lambda_2 = \emptyset$, due autovalori in zero, $\mathrm{Re}(\lambda) = \emptyset$, e formano un blocco di Jordan, allora sistema <u>INSTABILE</u>

Non si può concludere sulla stabilità del equilibrio del sistema non lineare perché $\mathrm{Re}(\lambda) = \emptyset$

ESERCIZIO 2

Si consideri un sistema lineare tempo invariante senza autovalori nascosti con funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3 - s}{(s + 10)(s + 0.5)}$$

2.1 **(1 punti)** Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

2.2 **(2 punti)** Calcolare la trasformata di Laplace dell'uscita forzata del sistema $y(t)$ per $u(t) = sca(t)$ e tracciare *qualitativamente* la risposta scalino, specificando i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$.

2.3 **(2 punti)** Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$

2.4 **(3 punti)** Si supponga ora che il sistema venga retroazionato come in Fig. 1, con $L(s) = kG(s)$, essendo k un parametro reale. Determinare per quali valori di k il sistema retroazionato risulta asintoticamente stabile.

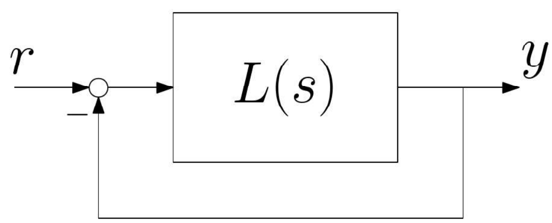


Figura 1: Esercizio 2 - Sistema retroazionato.

2.1;

$$G(s) = \frac{3 - s}{(s+10)(s+0,5)}$$

- Poli $p_1 = -10$, $p_2 = -0,5 \Rightarrow \mathrm{Re}(p_i) < 0$ $\left\{ \text{Sistema asintoticamente stabile} \right.$

- Zeri $z_1 = 3$, $\mathrm{Re}(z) > 0$ $\left\{ \text{Sistema a fase non minima} \right.$

- Guadagno: $G(0) = \frac{3}{10 \cdot 0,5} = 0,6$

- Tipo, $g = 0$, Non cisono poli in $s = 0$

2.2 Per $u(t)=sca(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s)=\frac{1}{s}$

$$Y(s)=G(s)\cdot U(s)=\frac{3-s}{(s+10)(s+0,5)s}$$

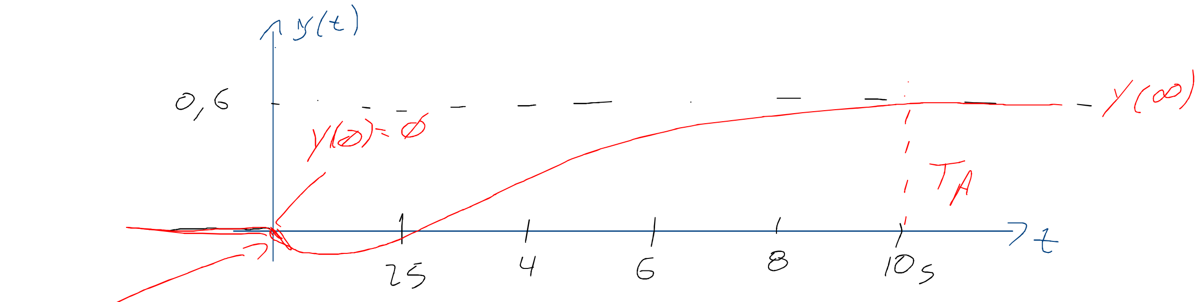
TVI

$$y(0)=\lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{3-s}{(s+10)(s+0,5)}=0$$

$$\dot y(0)=\lim_{s\to\infty} s\,\overbrace{(sY(s))}^{\mathcal{L}\{y'(t)\}}=\lim_{s\to\infty}\frac{3-s^2}{(s+10)(s+0,5)}=-1$$

TVF

$$y(\infty)=\lim_{s\to 0} sY(s)=\lim_{s\to 0}\frac{3-s}{(s+10)(s+0,5)}=\overbrace{0,6}^{\mu}$$

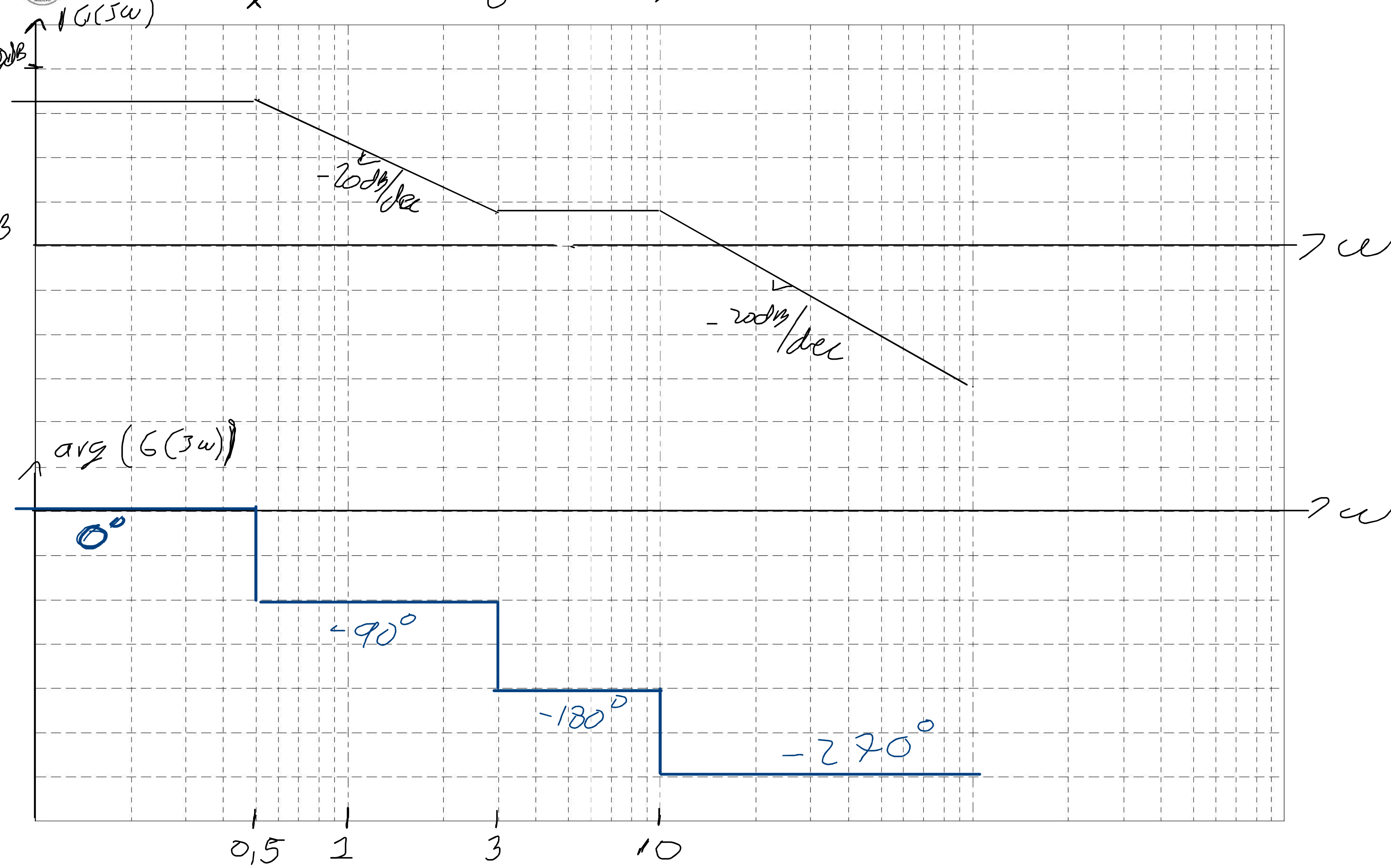


Polo dominante $p_2=0,5$ con costante di tempo $\tau_2=1/0,5=2s$ e tempo di assestamento $T_A \cong 5\tau_2=10s$

Politecnico di Milano
Dipartimento di Elettronica e Informazione

$$G(s) = \frac{3-s}{(s+10)(s+0,5)}$$

$0,6 = -4,4dB$



$G(0) = 0,6 > 0$

$\arg(G(0)) = 0^\circ$

- Sistema retroazionato

$$L(s) = KG(s)$$

La Funzione di trasferimento di anello chiuso è

$$T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Il denominatore è

$$D(s) = 1+KG(s) = 1+K\frac{3-s}{(s+10)(s+0,5)}$$

Poli di anello chiuso: $D(s) = 0$

$$(s+10)(s+0,5) + K(3-s) = 0$$

$$s^2 + 10,5s + 5 + 3K - Ks = 0$$

Criterio di Routh:

$$s^2 + (10,5-K)s + (5+3K) = 0$$

$$10,5 - K > 0 \Rightarrow K < 10,5$$

$$5 + 3K > 0 \Rightarrow K > -5/3$$

Il sistema retroazionato è stabile asintoticamente per $-5/3 < K < 10,5$

ESERCIZIO 3

Si consideri il sistema a tempo discreto:

$$\begin{cases} v(k+1) = 0.5v(k) - w(k) + 7u(k) \\ w(k+1) = -w(k) - 9u(k) \\ y(k) = v(k) - w(k) \end{cases}$$

3.1 **(1 punti)** Classificare il sistema

3.2 **(2 punti)** Calcolare gli stati e l'uscita di equilibrio associati a $u(k) = \bar{u} = 2$.

3.3 **(2 punti)** Studiare la stabilità del sistema

3.4 **(3 punti)** Determinare gli autovettori del sistema e scrivere la risposta libera quando lo stato iniziale appartiene a ognuno di essi.

3.1. Classifica: Sistema SISO

Lineare

Tempo invariante

strettamente proprio

3.2. Equilibrio:

Sistema in forma matriciale

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 7 \\ -9 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k)$$

In equilibrio $x(k+1) = x(k)$, $\bar{u} = 2$

$$\begin{cases} \bar{v} = 0,5\bar{v} - \bar{w} + 7\bar{u} \\ \bar{w} = -\bar{w} - 9\bar{u} \Rightarrow \bar{w} = -\frac{9}{2}\bar{u} = -9 \\ \Rightarrow \bar{v} = 2(7\bar{u} - \bar{w}) = 46 \end{cases}$$

L'uscita di equilibrio è

$$\bar{y} = \bar{v} - \bar{w} = 46 + 9 = 55$$

- Stabilità

$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A è triangolare superiore $\lambda_1 = 0,5$; $\lambda_2 = -1$

c'è un autovalore con $|\lambda| = 1$ e l'altro ha $|\lambda| < 1$, allora il sistema è semplicemente stabile.

3.4 Autovettori

$$(\lambda I - A)v = \emptyset$$

per λ_1:
$$\left[\begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \emptyset$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1,5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \emptyset, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix}$$

La risposta libera è della forma

$$x(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ \emptyset \end{bmatrix}(0,5)^k$$

---

per λ_2
$$\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,5 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \emptyset$$

$$\begin{pmatrix} -1,5 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \emptyset \Rightarrow -1,5v_1 + v_2 = \emptyset$$

$$v_2 = 1,5v_1$$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}$, Soluzione mov. Libero $x(k) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,5 \end{bmatrix}(-1)^k$

ESERCIZIO 4

Si consideri il sistema di controllo in Fig. 2, con

$$G(s) = \frac{0.1}{(0.2s+1)(0.002s+1)}$$

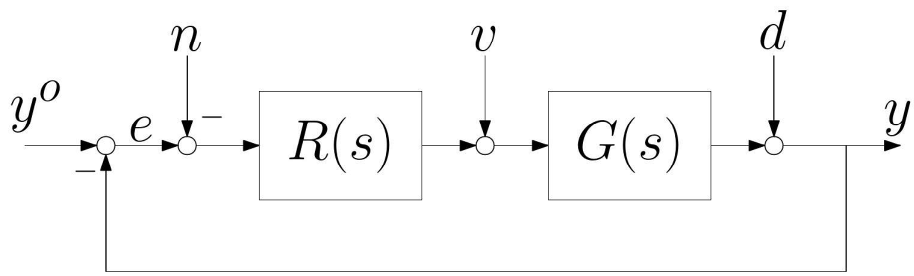


Figura 2: Esercizio 4 - Sistema di controllo

4.1 **(4 punti)** Per ognuno dei regolatori

$$R_1(s) = 100$$

e

$$R_2(s) = \frac{10(0.2s+1)}{s}$$

Verificare che il anello chiuso sia asintoticamente stabile.

4.2 **(2 punti)** Scegliere il controllore che garantisca il minore valore di regime dell'errore $|e_\infty|$, a fronte di un ingresso di riferimento tipo scalino $y^0(t) = sca(t)$. Motivare la risposta.

Per il controllore scelto determinare:

4.3 **(1 punti)** I margini di fase e di guadagno.

4.4 **(1 punti)** Il modulo dell'errore a transitorio esaurito a fronte di $d(t) = sin(\omega t)$ con $\omega = 0.1 rad/s$.

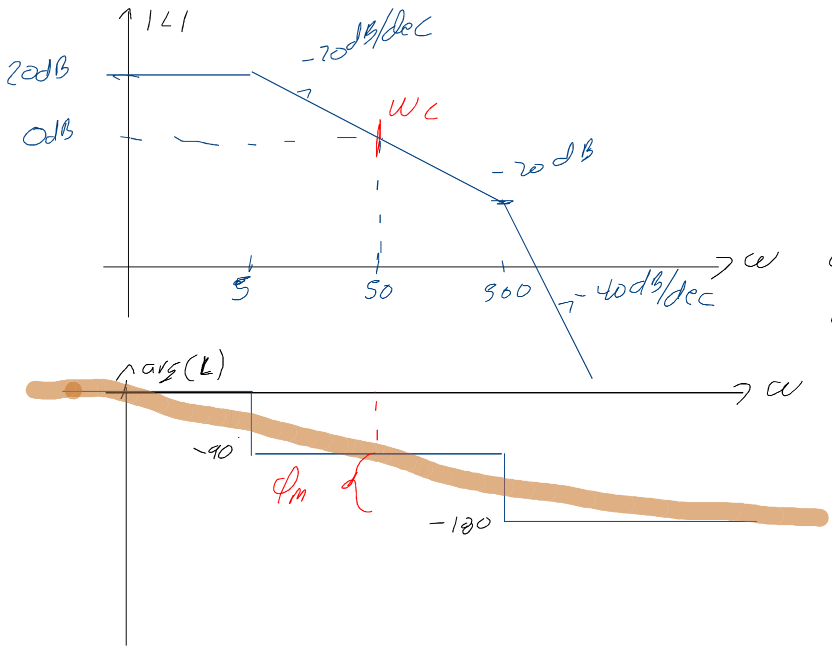
4.5 **(1 punti)** Il modulo dell'uscita a transitorio esaurito a fronte di $n(t) = 0.1 sin(\omega t)$ con $\omega = 10 rad/s$.

$$G(s) = \frac{0,1}{(0,2s+1)(0,002s+1)}$$

$G(s)$ é Asint. stabile, poli $p_1 = -5$, $p_2 = -500$, $\mu = 0,1$

- $R_1(s) = 100$, Risposta in frequenza

$$L(s) = \frac{10}{(0,2s+1)(0,002s+1)}$$



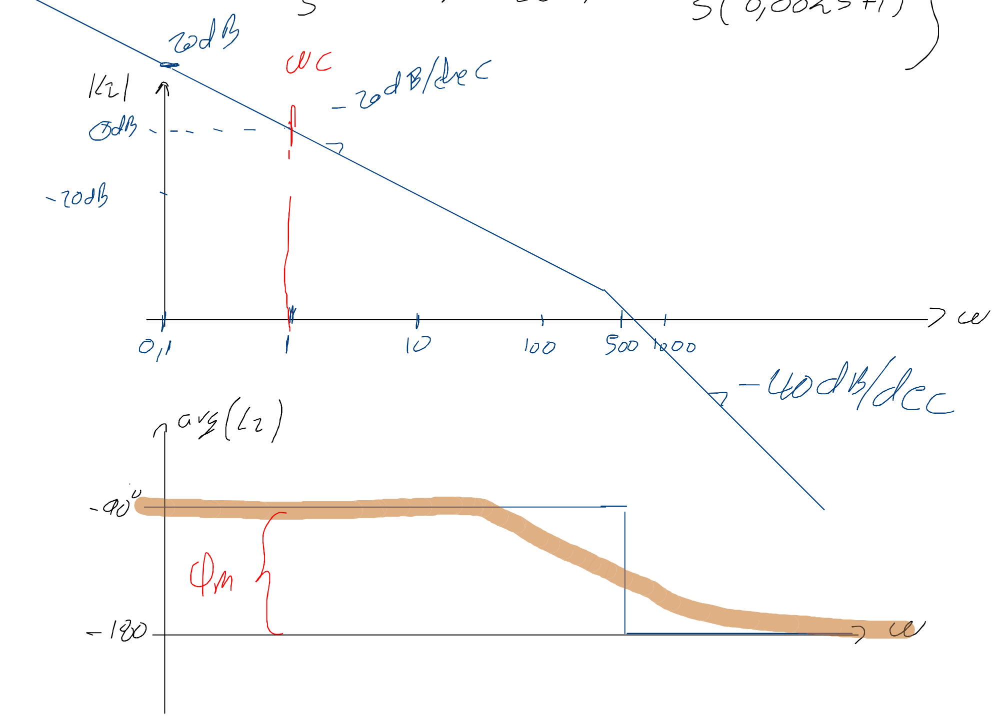
Per il criterio della piccola fase il anello chiuso é asintoticamente stabile

$$|\arg(G(j\omega))| < 180°$$

- $$R_2(s) = \frac{10(0,2s+1)}{s}, \quad L_2(s) = \frac{1}{s(0,002s+1)}$$

Tipo 1

$L_2(s) = 1 \Rightarrow 0dB$



Per il criterio della piccola fase il sistema é asintoticamente stabile.

4.2. Con $R_1(s)$ il anello è tipo 0, quindi l'errore a regime è finito

$\boxed{\text{Con } R_2(s) \text{ il anello è tipo 1, quindi l'errore a regime è zero.}}$

$R_2(s)$ garantisce minore errore

4.3 Dal diagramma di Bode, per $R_2(s)$

$$\omega_c = 1 \text{ rad/s}, \quad \varphi_m \cong 90^\circ$$

$$\omega_\pi = \infty, \quad K_m = \infty$$

4.4. $E(s) = -S(s) \cdot D(s)$, $\omega = 0{,}1$ rad/s $\ll \omega_c$

allora $S(j\omega) = \dfrac{1}{1+L(j\omega)} \cong \dfrac{1}{|L(j\omega)|}$

quindi $|e_\infty(t)| \cong \dfrac{1}{|L(j0{,}1)|} \overset{\text{da Bode}}{=} 0{,}1$

4,5 $Y(s) = -T(s)\,N(s)$, $\omega = 10$ rad/s $\gg \omega_c$

allora $T(j\omega) = \dfrac{L(j\omega)}{1+L(j\omega)} \cong L(j\omega)$

quindi $|e_\infty(t)| \cong |L(j10)| \overset{\text{da Bode}}{=} 0{,}1$