**Politecnico di Milano** **Anno Accademico 2020-21**

| **Cognome:** | **Nome:** | **Matricola:** | **Punti:** |
|---|---|---|---|
| | | | |

# Analisi Matematica 2, Ing. Informatica e Telecomunicazioni
# Esame del 10 giugno 2021

**Durata: 90 minuti**

## Pagina 1: Esercizio 1 (7 punti). Tempo consigliato: 25 minuti

*Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.*

Siano $f(x,y) = 3x^3 + xy^2 - x$,

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ -1 \leq y \leq x\}.$$

(1) **(3 punti)** E' vero che

- ☐ $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3,\ \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -\frac{2}{9}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $\max_{(x,y)\in D} f(x,y) = 3,\ \min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -3$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ il massimo di $f$ in $D$ è assunto in due punti
- ☐ $f$ non ha massimo in $D$, $\min_{(x,y)\in D} f(x,y) = -\frac{2}{9}$
- ☐ $f$ ha un punto di sella in $(x,y) = (0,0)$

(2) **(4 punti)** È vero che

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $f$ ha un punto di minimo locale in $D$ per $(x,y) = (\frac{1}{3}, 0)$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{2}{3}$
- ☐ $f$ ha un punto di sella per $(x,y) = (\frac{1}{3}, 0)$
- ☐ $f$ ha un punto di minimo locale in $D$ per $(x,y) = (1,0)$
- ☐ $\iint_D f(x,y)\,dxdy = \frac{8}{3}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $f$ è convessa sull'intersezione di $D$ col semipiano $y > 0$, ma non su tutto $D$

**Pagina 2: Esercizio 2 (8 punti). Tempo consigliato: 20 minuti**

*Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.*

Sia $f(x) = \pi - x$ per $x \in [0, \pi]$, estesa in modo pari in $(-\pi, 0)$ e poi prolungata per $2\pi$-periodicità in tutto $\mathbb{R}$. Sia poi

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la sua serie di Fourier.

(1) **(3 punti)** Si ha

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $a_0 = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $a_1 = \dfrac{4}{\pi}$
- ☐ $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ per ogni $n \geq 1$
- ☐ $b_n = \dfrac{2}{n}$ per ogni $n \geq 1$

(2) **(2 punti)** La serie di Fourier di $f$

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge puntualmente a $f$ per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge totalmente a $f$ in tutto $\mathbb{R}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge in media quadratica ad $f$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge totalmente a $f$ in $[-1, 1]$

(3) **(3 punti)** Scritta la serie di Fourier per $f$, possiamo dedurre che

- ☐ dall'uguaglianza di Parseval discende $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ calcolando la serie di Fourier di $f$ in $x = 0$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$
- ☐ dall'uguaglianza di Parseval discende $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- ☐ calcolando la serie di Fourier di $f$ in $x = \pi/2$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n^2} = \frac{\pi^2}{4}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ calcolando la serie di Fourier di $f$ in $x = \pi$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

**Pagina 3: Esercizio 3 (7 punti ). Tempo consigliato: 20 minuti**

*Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.*

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y'(x) = x\sin(y(x)).$$

(1) **(2 punti)** Scrivendola nella forma $y'(x) = f(x, y(x))$ e denotando $A$ il dominio di definizione di $f$, si ha

- ☐ $A = \mathbb{R}$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $A = \mathbb{R}^2$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ il teorema di esistenza e unicità locale si applica in ogni punto di $A$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ l'equazione è a variabili separabili

(2) **(2 punti)** Riguardo alle soluzioni di questa EDO

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ esistono infinite soluzioni costanti
- ☐ se $y_1$ e $y_2$ sono soluzioni allora $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ è soluzione
- ☐ se $y(x)$ è soluzione allora $z(x) = y(x + c)$ è soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$
- ☐ esiste una soluzione che cambia segno
- ☐ esiste un'unica soluzione costante

(3) **(3 punti)** Si consideri ora il seguente problema di Cauchy, al variare di $a \in (0, \pi)$,

$$\begin{cases} y'(x) = x\sin(y(x)) \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Detta $y_a$ una soluzione di questo problema di Cauchy e sapendo che essa è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$,

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $y_a$ ammette asintoti orizzontali a $+\infty$ e a $-\infty$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $y_a'$ cambia segno esattamente una volta
- ☐ $y_a$ è monotona su tutto $\mathbb{R}$
- ☐ $y_a$ è convessa su tutto $\mathbb{R}$
- ☐ $y_a$ è concava su tutto $\mathbb{R}$

**Pagina 4: Domande di teoria (7 punti). Tempo consigliato: 15 minuti**

*Le domande 1 e 2 ammettono una o più risposte corrette.*

### Domanda 1 (3 punti)

La serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

- ☐ ha come insieme di convergenza puntuale $[-1, 1)$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ verifica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ per ogni $x \in (-1, 1)$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge assolutamente in $(-1, 1)$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ converge totalmente in ogni intervallo del tipo $[-\delta, \delta]$, con $0 < \delta < 1$
- ☐ converge totalmente in $(-1, 1)$

### Domanda 2 (3 punti)

Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definite rispettivamente da

$$f(x, y) = x \log y, \qquad \underline{r}(t) = (t^2 - 1, t).$$

Sia poi $F(t) = f(\underline{r}(t)) = f \circ \underline{r}(t)$. Allora

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $F'(1) = 0$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $F'(1) = \langle \nabla f(\underline{r}(1)), \underline{r}'(1) \rangle$
- ☐ $F(t)$ non è derivabile in $t = 1$
- ☐ $F'(1) = 1$
- ☐ $F(1)$ è una quantità non ben definita

*La domanda 3 ammette una e una sola risposta corretta.*

### Domanda 3 (1 punto)

L'integrale curvilineo di una funzione continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lungo una curva $\gamma$ avente parametrizzazione $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \varphi(t) = (x(t), y(t))$, è definito come:

- ☐ $\int_\gamma f(x, y) dx dy$
- ☐ $\int_a^b f(x(t), y(t)) \varphi'(t) \, dt$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ $\int_a^b f(x(t), y(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt$
- ☐ $\int_\gamma f(x, y) \|\varphi'(x, y)\| \, ds$

## Pagina 5: Domande di teoria (3 punti). Tempo consigliato: 10 minuti

*Tutte le domande in questa pagina ammettono una e una sola risposta corretta.*

### Domanda 4 (1 punto)

Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (\mathrm{e}^x + 1)y(x)^{3/2} \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

con $x_0 \in \mathbb{R}$, , $y_0 \geq 0$, si ha:

- ☐ $\boxed{\text{V}}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ ed ogni $y_0 \geq 0$, la sua soluzione locale esiste ed è unica
- ☐ la sua soluzione esiste sempre, ma è unica soltanto se $y_0 > 0$
- ☐ la sua soluzione è sempre definita su tutto $\mathbb{R}$
- ☐ esistono scelte di $x_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \geq 0$ per cui non esiste soluzione

### Domanda 5 (1 punto)

Un generico sistema differenziale lineare $\underline{y}'(x) = A\underline{y}(x)$ in $\mathbb{R}^2$, con $A$ matrice costante $2 \times 2$ reale,

- ☐ ha sempre soluzioni del tipo $\underline{y}(x) = \underline{v}_1 e^{\lambda_1 x} + \underline{v}_2 e^{\lambda_2 x}$, con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ opportuni vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ se $A$ è simmetrica, ha solamente soluzioni del tipo $\underline{y}(x) = \underline{v}_1 e^{\lambda_1 x} + \underline{v}_2 e^{\lambda_2 x}$, con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ opportuni vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ se $A$ è invertibile, ha solamente soluzioni del tipo $\underline{y}(x) = \underline{v}_1 e^{\lambda_1 x} + \underline{v}_2 e^{\lambda_2 x}$, con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ opportuni vettori di $\mathbb{R}^2$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ se $A$ è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$, può avere soluzioni periodiche

### Domanda 6 (1 punto)

Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni, con $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivabile per ogni $n$, $a < b$. Quale affermazione risulta vera?

- ☐ se $f_n(x) \leq \frac{1}{n^2}$ per ogni $x \in [a, b]$ e per ogni $n$, allora la serie assegnata converge totalmente
- ☐ se la serie assegnata converge puntualmente in $[a, b]$, si può integrare termine a termine in $[a, b]$
- ☐ se la serie assegnata converge totalmente in $[a, b]$, si può derivare termine a termine in $[a, b]$
- ☐ $\boxed{\text{V}}$ se la serie assegnata converge assolutamente in $[a, b]$, allora converge puntualmente in $[a, b]$