



**POLITECNICO**  
MILANO 1863

# Fondamenti di Automatica – A.A. 2023/2024

## Esercitazione 09: Stabilità e prestazioni dei sistemi retroazionati

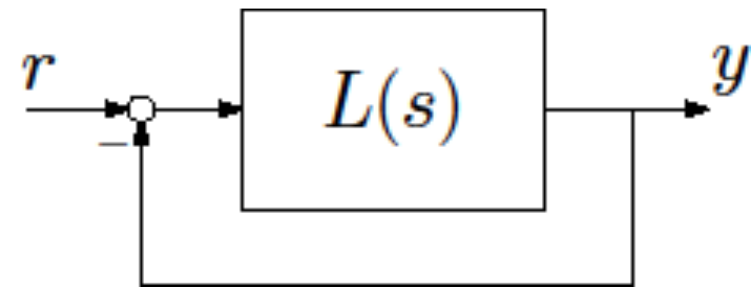
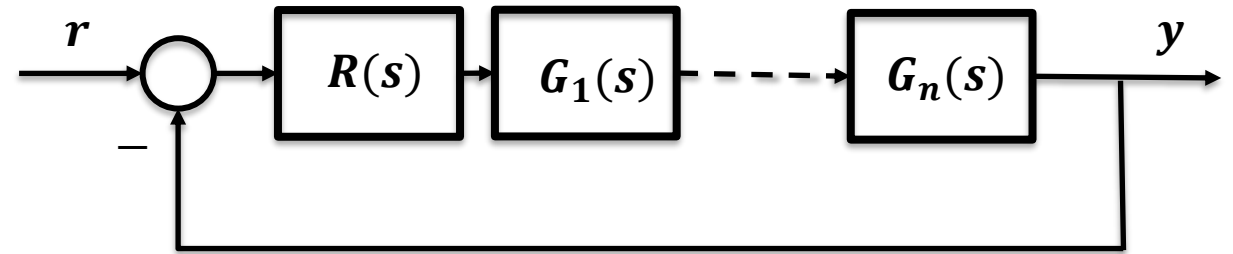
Ingegneria Informatica  
Prof. Fredy Ruiz

Milano, 14 Maggio 2024

# Criteri per stabilità in anello chiuso

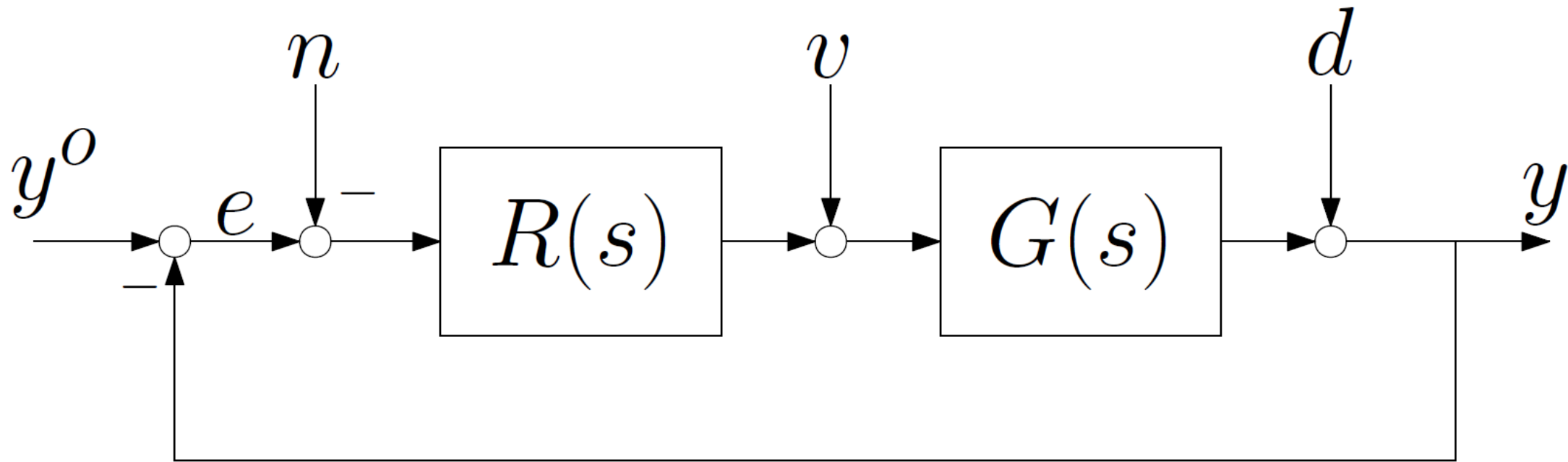
Come possiamo analizzare la stabilità di sistemi complessi interconnessi in retroazione?

- **Criterio di Nyquist**
- **Criterio di Bode**



NOTA: Ovviamente è sempre possibile valutare i poli di  $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$

# Funzioni di sensitività



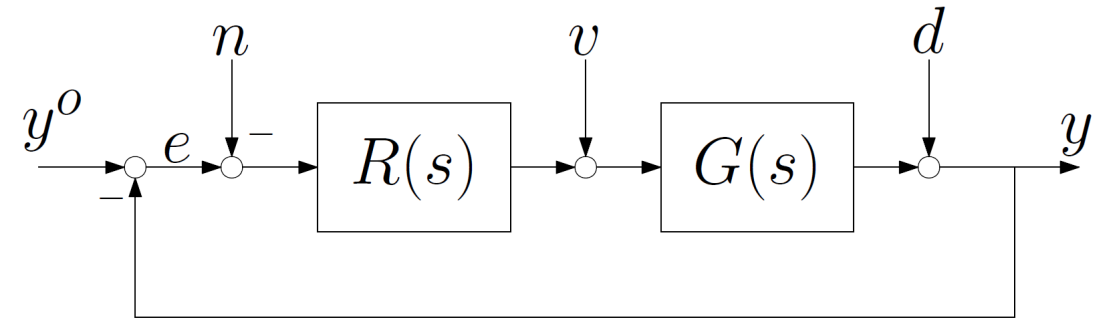
# Funzioni di sensitività

Analizzando lo schema di controllo in figura, si possono ottenere le seguenti relazioni:

$$Y(s) = F(s)Y^0(s) + S(s)D(s) - F(s)N(s)$$

$$E(s) = S(s)Y^0(s) - S(s)D(s) + F(s)N(s)$$

$$U(s) = Q(s)Y^0(s) - Q(s)D(s) - Q(s)N(s)$$



- Sentitività complementare

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

- Sentitività

$$S(s) = \frac{1}{1 + R(s)G(s)}$$

- Sentitività del controllo

$$Q(s) = \frac{R(s)}{1 + R(s)G(s)}$$

# Requisiti di un sistema di controllo

- **Asintotica stabilità:** Criteri di Nyquist e di Bode
- **Prestazioni statiche:** valutano l'andamento dell'errore di controllo  $e(t)$  a transitorio esaurito a fronte di disturbi (disturbi non sinusoidali).
- **Prestazioni dinamiche:** riguardano il comportamento durante il transitorio del sistema. Ci riferiremo soltanto all'attenuazione di disturbi a una determinata frequenza, (disturbi sinusoidali) oppure all'approssimazione ai poli dominanti della sensitività.

# Prestazioni statiche (segnali non sinusoidali)

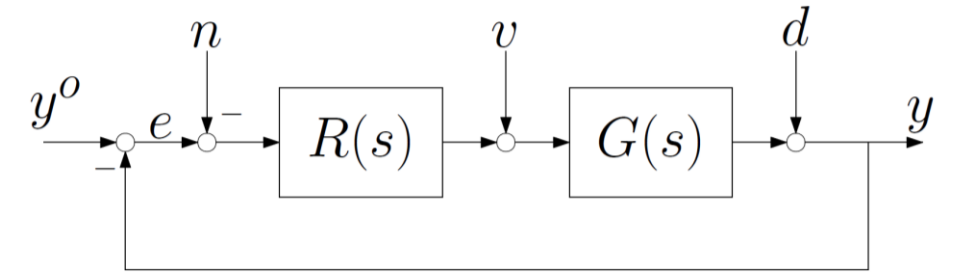
Vogliamo valutare l'andamento di  $e(t)$ , a fronte di una variazione di  $y(t) = Asca(t)$



## Teorema del valor finale

Consideriamo una generica  $L(s)$

E la funzione di sensitività complementare



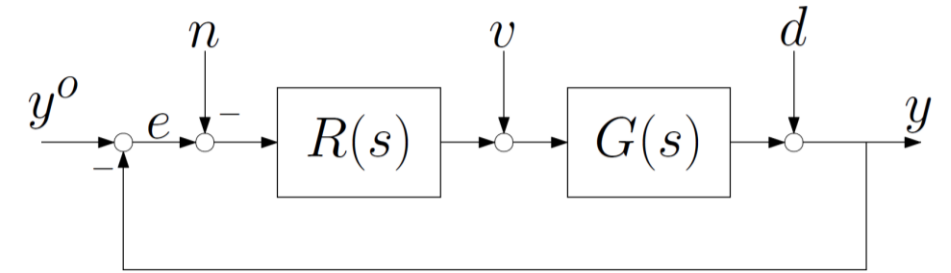
$$L(s) = \frac{\mu_L \prod_i (1 + \tau_i s) \prod_i (1 + \frac{2\zeta_i s}{\alpha_{ni}} + s^2 \alpha_{ni}^2)}{s^{g_L} \prod_i (1 + T_i s) \prod_i (1 + \frac{2\xi_i s}{\omega_{ni}} + s^2 \omega_{ni}^2)}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_L}}{s^{g_L} + \mu_L}$$

# Prestazioni statiche (segnali non sinusoidali)

Vogliamo valutare l'andamento di  $e(t)$ , a fronte di una variazione di  $y(t) = Asca(t)$



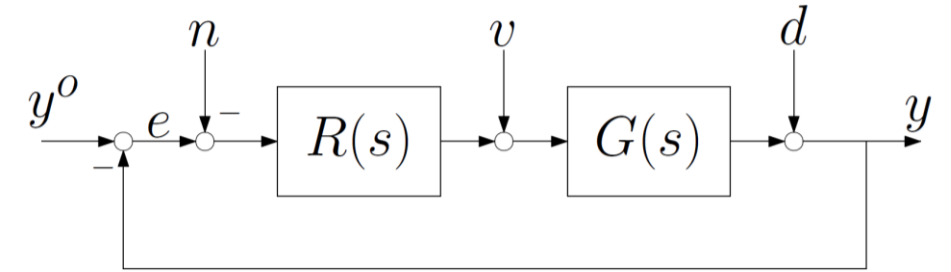
## Teorema del valor finale

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{A}{s} S(s) = \lim_{s \rightarrow 0} A F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_L}}{s^{g_L} + \mu_L} A$$

Il valore dell'errore dipende solo da **guadagno**, dal **tipo** e dall'**ampiezza** del disturbo.

# Prestazioni statiche (segnali non sinusoidali)

Vogliamo valutare l'andamento di  $e(t)$ , a fronte di una variazione dei disturbi



$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_L}}{s^{g_L} + \mu_L} \frac{A}{s^{r-1}}$$

A fronte di segnali  $y^o(t)$  e  $d(t)$  tali che  $Y^o(s) = \frac{A_1}{s^{r_1}}$  e  $D(s) = \frac{A_2}{s^{r_2}}$ , possiamo ottenere la seguente **tabella**, per  $r_i = 1, 2, 3$ , che determina l'entità dell'errore a transitorio esaurito in funzione del tipo  $g_L$  e del guadagno  $\mu_L$  della funzione  $L(s)$ .

Segnale $y^o(t)$ o $d(t)$	$Asca(t)$	$Aram(t)$	$Apar(t)$
$g_L = 0$	$\frac{A}{1+\mu_L}$	$\infty$	$\infty$
$g_L = 1$	0	$\frac{A}{\mu_L}$	$\infty$
$g_L = 2$	0	0	$\frac{A}{\mu_L}$
$g_L = 3$	0	0	0

**Nota: Con un ingresso  $r > 0$  avrò  $e(\infty) = 0$  solo se  $g_L \geq r$ .**

Tuttavia abbondare di poli nell'origine potrebbe portare ad un cattivo margine di fase...



# Prestazioni dinamiche (segnali sinusoidali)

Per analizzare il comportamento dinamico, dobbiamo studiare, alla frequenza del disturbo, cosa succede alla funzione di trasferimento (alle sensitività).

## Teorema della risposta in frequenza

Consideriamo un disturbo sinusoidale su  $n(t) = A \sin(\bar{\omega}t)$

$$|e(\infty)| = |F(j\bar{\omega})|A$$

Nota: andremo a considerare sempre solo l'effetto sul modulo dell'errore (non consideriamo la fase)

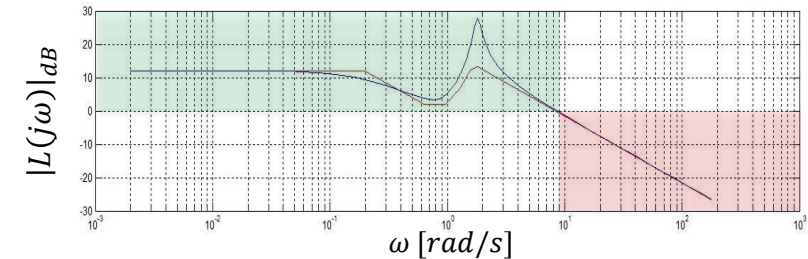


Cerchiamo di capire come ricavare il modulo di  $|F(j\bar{\omega})|$  partendo dal diagramma di Bode di  $L(j\omega)$

# Approssimazione delle sensitività

1) Supponiamo siano verificate le condizioni di applicabilità del criterio di Bode

$$\hookrightarrow \begin{cases} |L(j\omega)|_{dB} > 0 & |L(j\omega)| > 1 & \omega < \omega_c \text{ Amplifica} \\ |L(j\omega)|_{dB} < 0 & |L(j\omega)| < 1 & \omega > \omega_c \text{ Attenua} \end{cases}$$



➤ Consideriamo un generico disturbo alla pulsazione  $\bar{\omega}$  e cerchiamo il termine “dominante” al denominatore

$$|F(j\bar{\omega})| = \frac{|L(j\bar{\omega})|}{|1| + |L(j\bar{\omega})|} \cong \begin{cases} \text{per } \bar{\omega} < \omega_c & |L(j\bar{\omega})| > 1 & \rightarrow \frac{|L(j\bar{\omega})|}{|L(j\bar{\omega})|} = 1 \\ \text{per } \bar{\omega} > \omega_c & |L(j\bar{\omega})| < 1 & \rightarrow \frac{|L(j\bar{\omega})|}{1} = |L(j\bar{\omega})| \end{cases}$$

# Approssimazione delle sensitività

- Con lo stesso principio possiamo approssima tutte le funzioni di sensitività

$$|F(j\bar{\omega})| \cong \begin{cases} 1, & \bar{\omega} < \omega_c \\ |L(j\bar{\omega})|, & \bar{\omega} > \omega_c \end{cases} \quad |S(j\bar{\omega})| \cong \begin{cases} \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|}, & \bar{\omega} < \omega_c \\ 1, & \bar{\omega} > \omega_c \end{cases}$$

$$|Q(j\bar{\omega})| \cong \begin{cases} \frac{1}{|G(j\bar{\omega})|}, & \bar{\omega} < \omega_c \\ |R(j\bar{\omega})|, & \bar{\omega} > \omega_c \end{cases}$$

# Prestazioni dinamiche (approssimazione ai poli dominanti)

- Sotto l'ipotesi di applicabilità del criterio di Bode e di asintotica stabilità del sistema retroazionato, possiamo approssimare la  $F(s)$  ai poli dominanti:

$$F(s) \cong \begin{cases} \frac{\mu_F}{1 + \frac{s}{\omega_c}}, & \text{Sistema del prim'ordine} \\ \frac{\mu_F}{1 + 2\xi_F \frac{s}{\omega_c} + \frac{s^2}{\omega_c^2}}, & \text{Sistema del second'ordine} \end{cases}$$

$\varphi_m \geq 75^\circ$

$\varphi_m \leq 75^\circ$

# Prestazioni dinamiche (approssimazione ai poli dominanti)

Dove il guadagno di  $F(s)$  si calcola come:

$$\mu_F \cong \begin{cases} \frac{\mu_L}{1 + \mu_L}, & g_L = 0 \\ 1, & g_L > 0 \end{cases}$$

E lo smorzamento come:

$$\xi_F = \sin\left(\frac{\varphi_m}{2}\right) \approx \varphi_m/100$$

# Prestazioni dinamiche (approssimazione ai poli dominanti)

La durata dei transitori è quindi:

$$T_a \cong \begin{cases} \frac{5}{\omega_c}, & \varphi_m \geq 75^\circ \\ \frac{5}{\xi_F \omega_c}, & \varphi_m < 75^\circ \end{cases}$$

Nel caso di approssimazione a polo reale, i transitori non introducono oscillazioni o sovraelongazioni, mentre nel caso di approssimazione a poli complessi coniugati, si ha che la sovraelongazione percentuale  $S\%$  e il periodo di oscillazione  $T_p$  sono, rispettivamente

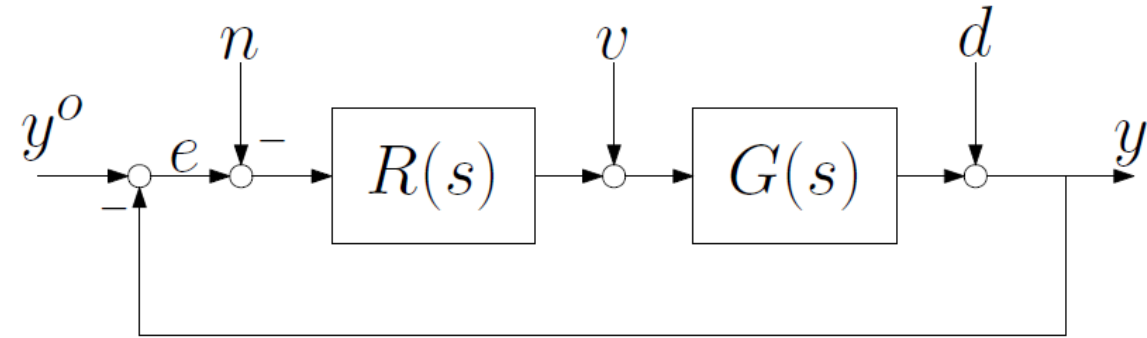
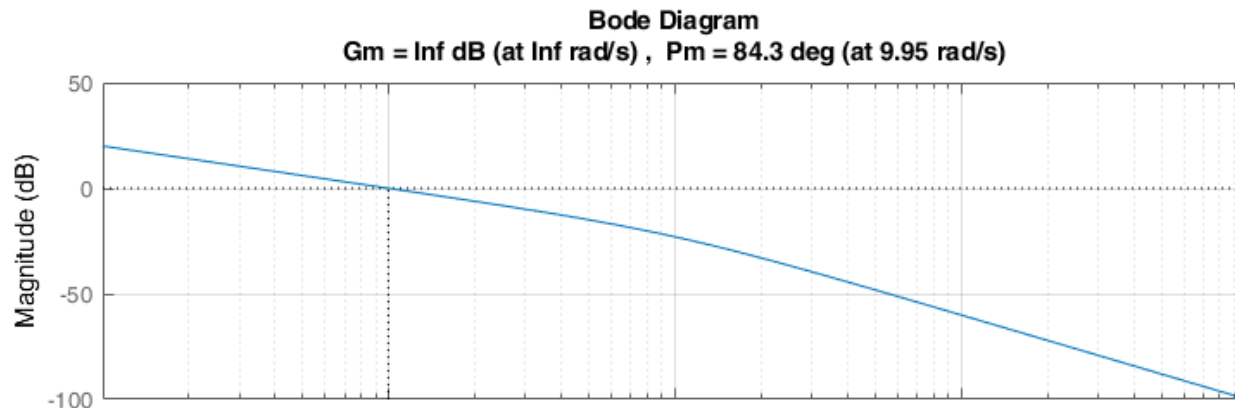
$$S\% = 100e^{-\frac{\xi_F \pi}{\sqrt{1 - \xi_F^2}}}$$

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_c \sqrt{1 - \xi_F^2}}$$

# Esempio

$$y^o = 10sca(t) \quad L(s) = \frac{10}{s(1 + 0.01s)}$$

➤ Il criterio di Bode è applicabile



$$\omega_c = 9.95 \frac{rad}{s}$$

$$\varphi_m = 84.3^\circ$$

➤ Possiamo approssimare  $F(s)$  come una funzione del prim'ordine ( $\varphi_m \geq 75^\circ$ )

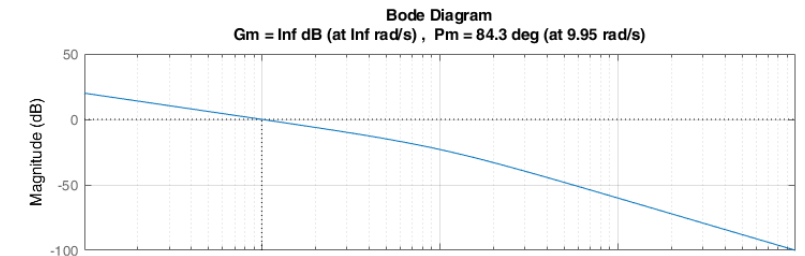
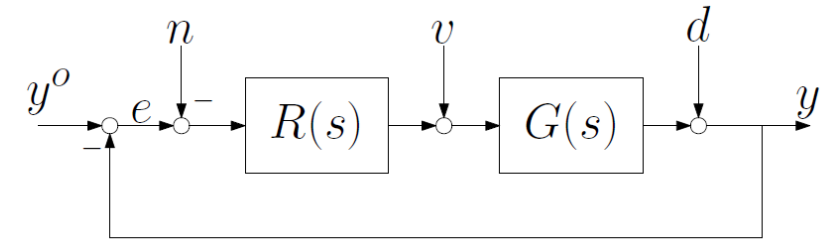
# Esempio

$$y^o = 10sca(t) \quad L(s) = \frac{10}{s(1 + 0.01s)}$$

➤ Il criterio di Bode è applicabile

$$F(s) \approx \frac{\mu_F}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$$

$$\mu_F = 1 \text{ dato che il tipo } g_L = 1 \rightarrow T_a = \frac{5}{\omega_c}$$



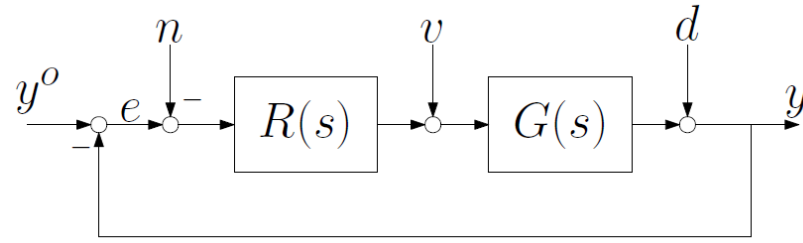
$$\omega_c = 9.95 \frac{rad}{s} \quad \varphi_m = 84.3^\circ$$

➤ Possiamo approssimare  $F(s)$  come una funzione del prim'ordine ( $\varphi_m \geq 75^\circ$ )



# Esempio

$$y^o = 10sca(t)$$



$$L(s) = \frac{10}{s(1 + 0.01s)}$$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)}$$

➤ Approssimazione ai poli dominanti di  $F(s)$

$$F(s) \approx \frac{1}{1 + \frac{s}{9.95}}$$

$$T_a \approx \frac{5}{9.95} \approx 0.5s$$

