Informazione e stima – 15/02/2023

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, codice persona, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato
- Esercizio da escludere dal punteggio finale:

1. Si supponga di avere una scatola con 100 biglie numerate da 1 a 100. Si estraggano 2 biglie senza reinserimento. Qual è la probabilità che la somma dei numeri sulle biglie estratte sia 101?

2. Si hanno due v.a. discrete X e Y con legge congiunta $p_{X,Y}$ come in tabella

	$x = 0$	$x = 2$	$x = 3$
$y = 2$	$1/10$	0	$2/10$
$y = 3$	0	$2/10$	$2/10$
$y = 4$	$1/10$	?	$1/10$

   (a) Determinare la probabilitá mancante $p_{X,Y}(2, 4)$.
   (b) Determinare la legge di X dato $Y = 2$, $p_{X|Y}(x|2)$ per ogni x.
   (c) Calcolare $\mathsf{E}[Y|X = 0]$ e $\mathsf{Var}[Y|X = 0]$.
   (d) Le v.a. X e Y sono indipendenti? E se condizioniamo all'evento $X \neq 2$?

3. Sia $X \sim \mathcal{U}[0, 1]$. Determinare la legge di $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$.

4. Si supponga di avere due macchine automatiche per la produzione di bottiglie di plastica, che funzionano in modo indipendente l'una dall'altra. Ad ogni ciclo di lavoro, indipendentemente dagli altri cicli, le due macchine hanno una probabilità di produrre una bottiglia senza difetti $p = 0.98$ e $q = 0.95$, rispettivamente. Entrambe le macchine lavorano per 100 cicli in maniera sincronizzata. Qual è la probabilità che entrambe le macchine producano bottiglie con difetti in più di un ciclo di lavoro?

5. Si supponga di avere un dado a 6 facce. Si vuole capire se il dado è ben bilanciato. A questo scopo, si lancia il dado n volte e si registra il numero X di volte che occorre la faccia 1. Il dado si considera ben bilanciato se $\Pr\left(|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}| < 0.1\right) > 0.95$. Supponendo che effettivamente il dado sia ben bilanciato, qual è, secondo il teorema fondamentale del limite, il valore minimo di n che soddisfa l'intervallo fiduciario?

6. Si considerino lanci indipendenti di una moneta con $\Pr(\text{Testa}) = 0.4$. Si vogliono scrivere i risultati dei lanci in un file. Esiste un metodo migliore rispetto allo scrivere uno 0 per ogni testa ottenuta e un 1 per ogni croce ottenuta? Giustificare la risposta.

Soluzioni

Problema 1

Dobbiamo prima calcolare il numero di coppie di biglie che soddisfano la condizione di avere somma 101. Ci sono 50 coppie di biglie che soddisfano questa condizione:

$$(1,100),(2,99),(3,98),\ldots,(50,51). \tag{1}$$

Ognuna di queste coppie è come se formasse una biglia unica da dover estrarre per soddisfare l'evento di interesse. Il numero totale di modi per scegliere 2 biglie tra 100 è $\binom{100}{2}$.

Quindi, la probabilità richiesta è

$$\frac{50}{\binom{100}{2}} = \frac{50}{\frac{100\cdot 99}{2}} = \frac{1}{99}. \tag{2}$$

Problema 2

1. La probabilità mancante è 1/10, giacchè tutte le altre probabilità sommano a 9/10.
2. Si ha
$$\Pr(X=x|Y=2) = \frac{\Pr(X=x,Y=2)}{\Pr(Y=2)} = \frac{\Pr(X=x,Y=2)}{\sum_{x'}\Pr(X=x',Y=2)} = \begin{cases} \frac{1/10}{3/10} & x=0 \\ 0 & x=2 \\ \frac{2/10}{3/10} & x=3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3} & x=0 \\ 0 & x=2 \\ \frac{2}{3} & x=3 \end{cases}$$
3. Condizionando a $X=0$, abbiamo una legge di probabilità simmetrica rispetto al valore $Y=3$, quindi
$$\mathsf{E}[Y|X=0]=3.$$
Per il calcolo della varianza, si può notare che le distanze delle realizzazioni a probabilità non nulla, cioè $Y=2$ e $Y=4$, dal baricentro sono sempre pari a 1, pertanto si ha:
$$\mathsf{Var}[Y|X=0] = \mathsf{E}[(Y-3)^2|X=0] = 1.$$
4. Le v.a. X e Y non possono essere indipendenti, ad esempio $\Pr(X=2,Y=2)=0$ esclude questa possibilitá.
Se si condiziona all'evento $X\neq 2$, si puó notare che $\Pr(Y=3,X=0|X\neq 2)=0$, quindi le v.a. X e Y non possono essere indipendenti condizionatamente a $X\neq 2$.

Problema 3

Innanzitutto si noti che $Y\in(0,1)$ e che la funzione $y=g(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ è monotona crescente e positiva per $x\in(0,1)$. Utilizzando il metodo della cumulata, si ha:

$$F_Y(y) = \Pr(Y\le y) = \Pr\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)\le y\right) \tag{3}$$
$$= \Pr\left(X \le \frac{2}{\pi}\arcsin(y)\right) \tag{4}$$
$$= F_X\left(\frac{2}{\pi}\arcsin(y)\right), \qquad y\in(0,1). \tag{5}$$

Derivando rispetto a y si ottiene la densità di probabilità:

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = f_X\left(\frac{2}{\pi}\arcsin(y)\right)\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}, \qquad y\in(0,1), \tag{6}$$

e $f_Y(y)=0$ altrove.

Problema 4

Le produzioni di bottiglie sono due processi di Bernoulli indipendenti con probabilità di successo (bottiglia non difettosa) per ciclo pari a $p=0.98$ e $q=0.95$. Per risolvere il problema si può considerare il processo merge che ha probabilità di successo per ciclo (almeno una bottiglia non difettosa) pari a $p+q-pq=0.999$. Sia X il numero di cicli su 100 dove entrambe le macchine producono bottiglie difettose, allora dalla teoria sappiamo che $X\sim \mathrm{Bin}(100, 1-0.999)$. La probabilità cercata è:

$$\Pr(X>1) = 1-\Pr(X=0)-\Pr(X=1) = 1-\binom{100}{0}0.001^0 0.999^{100} - \binom{100}{1}0.001^1 0.999^{99} \tag{7}$$
$$\approx 0.0046 \tag{8}$$

Problema 5

Dal testo del problema si ha che X è una v.a. binomiale con $\mathsf{E}[X] = n/6$, $\mathsf{Var}[X] = n\frac{1}{6}\frac{5}{6}$, pertanto si ha anche $\mathsf{E}[X/n] = 1/6$, $\mathsf{Var}[X/n] = \frac{5}{36n}$. L'evento di interesse nella probabilità

$$\Pr\left(\left|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}\right| < 0.1\right) \geq 0.95$$

si può standardizzare come

$$\Pr\left(\frac{|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}|}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} < \frac{0.1}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) \geq 0.95$$

$$\Pr\left(\frac{|\frac{X}{n} - \frac{1}{6}|}{\sqrt{\frac{5}{36n}}} \geq \frac{0.1}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) \leq 1 - 0.95 = 0.05$$

e applicando l'approssimazione suggerita dal teorema fondamentale del limite, con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, si ha

$$\Pr\left(|Z| \geq \frac{0.1}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{5}{36n}}}\right)\right) \leq 0.05$$

ovvero

$$\Phi(0.2683\sqrt{n}) \geq 0.975$$

$$0.2683\sqrt{n} \geq \Phi^{-1}(0.975) \approx 1.96$$

$$n \geq (1.96/0.2683)^2 = 53.3668$$

quindi il più piccolo valore di n che soddisfa la richiesta è $n = 54$.

Problema 6

Il teorema della codifica di sorgente dice che è possibile scrivere i risultati in un file mediamente non più lungo di $nH(X)$ bits, dove n sono i lanci di moneta e $X \sim \text{Bern}(0.4)$. L'entropia si può calcolare come

$$H(X) = -0.4 \log_2 0.4 - 0.6 \log_2 0.6 \approx 0.971 \text{ bit}. \tag{9}$$

Pertanto, per ogni lancio di moneta bastano 0.971 bit. Per raggiungere questo limite è necessario codificare più lanci di moneta insieme, assegnando parole di codice più lunghe a stringhe meno probabili e parole di codice più corte a stringhe più probabili.