Esame di Logica e Algebra-Giugno 2021

Durata della prova: 1h 30'

1. (Punteggio: 9)
Usando la risoluzione per la logica del primo ordine dedurre che se una relazione binaria $R \subseteq X \times X$ soddisfa le seguenti proprietà:

   i) Se x è in relazione R con un elemento y, allora y è in relazione con se stesso (cioè $(y, y) \in R$);
   ii) Esiste un elemento x tale che non è in relazione R con se stesso;

   allora:

   iii) Esiste un elemento y tale che nessun x è in relazione R con questo y (cioè $(x, y) \notin R$).

Soluzione: Sia $R(x, y)$ la lettera predicativa che interpreta la relazione binaria R, allora:

a) $\forall x \forall y\, (R(x, y) \Rightarrow R(y, y))$;
b) $\exists x\, \neg R(x, x)$;
c) $\exists y \forall x\, \neg R(x, y)$

Verifichiamo usando il teorema di correttezza e completezza per refutazione che $a), b) \vDash c)$. Dalla prima formula ricaviamo la clausola $\{\neg R(x, y), R(y, y)\}$, mentre dalla seconda formula portata in forma di Skolem ricaviamo la clausola $\{\neg R(a, a)\}$, dove a è la nuova costante che aggiungiamo quando Skolemizziamo $b)$. Infine neghiamo $c)$ ottenendo $\neg\, \exists y \forall x\, \neg R(x, y) \equiv \forall y \exists x\, R(x, y)$, la sua forma di Skolem è $\forall y R(f(y), y)$, dove $f(y)$ è una nuova lettera funzionale che aggiungiamo durante la Skolemizzazione. Da questa formula, la clausola che otteniamo è $\{R(f(y), y)\}$. Mostriamo che $\{\{\neg R(x, y), R(y, y)\}, \{\neg R(a, a)\}, \{R(f(y_1), y_1)\}\} \vdash_R \square$. Infatti da $\{\neg R(x, y), R(y, y)\}, \{\neg R(a, a)\}$ usando la sostituzione a/y, otteniamo la clausola $\{\neg R(x, a)\}$ da quest'ultima clausola insieme a $\{R(f(y_1), y_1)\}$ con la sostituzione $a/y_1, f(a)/x$ otteniamo la clausola vuota $\square$.

2. (Punteggio: 12)

a) 3 punti b) 2 punti c) 3 punti d) 4 punti

Sia $R \subseteq X \times X$, con $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ la relazione così definita:

$$R = \{(a, d), (b, a), (c, a), (d, d), (e, f)\}$$

(a) Disegnare il grafo d'adiacenza della chiusura d'equivalenza T della relazione R. Si determinino le classi d'equivalenza di T.

(b) Quante funzioni contengono R? Quante funzioni sono contenute in R?

(c) Dire (motivando la risposta) se può esistere la chiusura d'ordine di R, ed eventualmente disegnare il suo diagramma di Hasse, trovandone, se esistono, i punti di massimo, minimo, massimali e minimali.

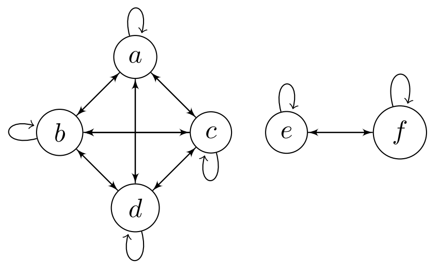
(d) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\mathcal{F}_1 = \forall x \forall y \forall z\, ((A(x, y) \wedge A(z, y)) \Rightarrow \exists z A(y, z))$$

Si stabilisca se $\mathcal{F}_1$ è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme X e in cui la lettera predicativa $A(x, y)$ è interpretata dalla relazione R su X. $\mathcal{F}_1$ è logicamente valida o logicamente contraddittoria?

Soluzione:

(a) Ricordiamo che per chiudere transitivamente basta completare le clique del grafo d'adiacenza di R, quindi otteniamo che il grafo d'adiacenza di T è:



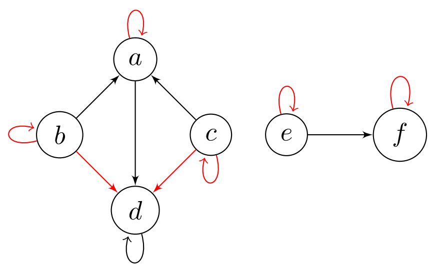
Le classi di equivalenza sono quindi $[b]_T = \{a, b, c, d\}$, e $[e]_T = \{e, f\}$.

(b) La matrice d'adiacenza di R è la seguente:

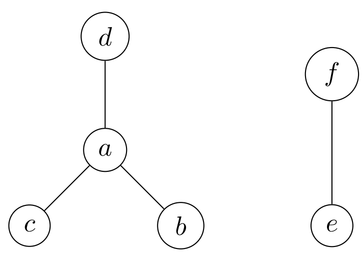
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

nessuna relazione è contenuta in R poichè l'elemento f non è in relazione con nessun elemento (l'ultima riga ha tutti valori nulli). Mentre, le funzioni che possono contenere R sono 6 dato che le prime 5 righe della matrice sono tutte occupate con un unico 1 e quindi non ho scelte possibili da fare, mentre l'ultima riga essendo vuota posso aggiungere un uno in una posizione arbitraria, e quindi ho 6 scelte.

(c) Dato che R è antisimmetrica, potrebbe esistere la sua chiusura d'ordine, chiudiamo R riflessivamente e transitivamente ottenendo la relazione H descritta dal seguente grafo d'adiacenza:



che rimane antisimmetrica, e quindi H è la chiusura d'ordine di R. Il suo diagramma di Hasse è il seguente:



Non ci sono né massimi né minimi, l'insieme dei massimali è $\{d, f\}$, l'insieme dei minimali è $\{c, b, e\}$.

(d) La formula è chiusa, quindi può essere o vera o falsa, ma non soddisficibile ma non vera. Nell'interpretazione data la formula è falsa, dato che se si considera $x = z = e$ e $y = f$ abbiamo che l'antecedente della formula è vero, mentre il conseguente $\exists z A(y, z)$ no, dato che non esiste nessun elemento $z \in X$ che soddisfi $(f, z) \in R$. Quindi la formula non è logicamente valida, ma nemmeno logicamente contraddittoria. Infatti basta mostrare una interpretazione in cui sia vera. In questo caso, basta rendere il consequente della formula sempre vero, per esempio interpretando $A(x, y)$ come una qualunque relazione riflessiva (o anche seriale).

3. (Punteggio: 10)
a) 4 punti b) 2 punti c) 4 punti

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello con unità (unitario). Si consideri su A una nuova operazione $\star$ così definita

$$\forall a, b \in A: \ a \star b = a + b + a \cdot b$$

(a) Si provi che $(A, \star)$ è un monoide.

(b) Si consideri l'applicazione $f : (A, \star) \to (A, \cdot)$ così definita

$$\forall a \in A : f(a) = a + e$$

dove e è l'unità dell'anello A. Provare che f è un isomorfismo tra il monoide $(A, \star)$ e il monoide $(A, \cdot)$.

(c) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\mathcal{F}_2 = \forall x \forall y \forall z \, (\, E \, (f(x, s(y, z)), s(f(x, y), f(x, z))) \,)$$

Si stabilisca se $\mathcal{F}_2$ è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme A e in cui la lettera predicativa $E(x, y)$ è interpretata dalla relazione di uguaglianza su A, mentre $f(x, y)$ interpreta l'operazione $\star$ descritta sopra, e $s(x, y)$ l'operazione di somma $+$ dell'anello $(A, +, \cdot)$. $\mathcal{F}_2$ è logicamente valida o logicamente contraddittoria?

Soluzione:

(a) Dato che non c'è scritto nel testo, dobbiamo prima verificare che $\star$ sia interna. Ma questo è ovvio perchè essendo A un anello abbiamo che $a + b + (a \cdot b)$ è per definizione un elemento di A per ogni coppia $a, b \in A$. Per verificare che sia un semigruppo, verifichiamo che sia associativa. Usando la definizione e le proprietà distributive dell'anello A otteniamo le seguenti due uguaglianze:

$$a \star (b \star c) = a \star (b + c + b \cdot c) = a + (b + c + b \cdot c) + a \cdot (b + c + b \cdot c) = a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

$$(a \star b) \star c = (a + b + a \cdot b) \star c = a + b + a \cdot b + c + (a + b + a \cdot b) \cdot c = a + b + c + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + a \cdot b \cdot c$$

dove ovviamente si è usata la commutatività di $+$ essendo A un anello. L'elemento neutro di $\star$ è lo 0 dell'anello, infatti $a \star 0 = a + 0 + (a \cdot 0) = a + 0 + 0 = a$ e similmente $0 \star a = a$ (oppure si dimostra che $\star$ è commutativa, ma non è richiesto nell'esercizio).

(b) Mostriamo prima che f è un omomorfismo. Abbiamo che

$$f(a \star b) = f(a + b + a \cdot b) = a + b + a \cdot b + e$$

che dobbiamo confrontare con

$$f(a) \cdot f(b) = (a + e) \cdot (b + e) = a \cdot b + a \cdot e + e \cdot b + e \cdot e = a + b + a \cdot b + e$$

dove si è usata la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione e il fatto che e è l'elemento neutro della moltiplicazione $\cdot$. Da queste uguaglianze deduciamo che $f(a \star b) = f(a) \cdot f(b)$, quindi f è un omomorfismo di semigrouppi. Per mostrare che è un omomorfismo anche di monoidi dobbiamo mostrare che $f(0) = e$, ma questo è banale dato che $f(0) = 0 + e = e$. Per mostrare che sia un isomorfismo, mostriamo che è iniettiva, infatti $f(a) = f(b)$ implica che $a + e = b + e$ che implica $a = b$ dato che $(A, +)$ è un gruppo. Inoltre f è suriettiva infatti, per ogni $a \in A$, f manda $a + (-e)$ in a, infatti $f(a + (-e)) = (a + (-e)) + e = a$.

(c) Anche in questo caso la formula è chiusa, quindi è vera o falsa. In questa interpretazione la formula afferma che per ogni x, y, z vale la distributività di $\star$ rispetto all'addizione: $x \star (y + z) = x \star y + x \star z$. In questo caso la formula non è vera infatti

$$x \star (y + z) = x + (y + z) + x \cdot (y + z) = x + y + z + x \cdot y + x \cdot z$$

mentre con un calcolo simile:

$$x \star y + x \star z = x + y + x \cdot y + x + z + x \cdot z$$

Queste ultime due uguaglianze forniscono lo stesso risultato se e solo se $x = 0$ e quindi non sempre. Segue che la formula è falsa nell'interpretazione assegnata e pertanto non è logicamente valida. Non è neppure contraddittoria dato che esprime la legge di distributività, quindi basta interpretare la lettera funzionale $f(x, y)$ come la moltiplicazione $\cdot$ che sappiamo essere distributiva rispetto all'addizione.