Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 21 gennaio 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(5,5 punti)*

1) (3 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y(t) = \cos(2t) + 8.$$

2) (1 punto) Stabilire se esiste una soluzione limitata (in tutto il suo dominio di definizione) di tale equazione.

3) (1,5 punti) Tra le soluzioni trovate al punto 1), determinare quella il cui grafico passa per il punto $(\pi, 0)$, la cui retta tangente in tale punto ha coefficiente angolare π.

Risposte

1) Consideriamo in primo luogo l'omogenea associata $y'' + 4y = 0$; l'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4 = 0$, da cui $\lambda = \pm 2i$. Segue che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da $y_o(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
Per il principio di sovrapposizione, cerchiamo separatamente una soluzione particolare di $y'' + 4y = \cos(2t)$ e una soluzione particolare di $y'' + 4y = 8$. Per quanto riguarda $y'' + 4y = \cos(2t)$, siccome $2i$ è radice semplice dell'equazione caratteristica, per il metodo di somiglianza dobbiamo cercare la soluzione nella forma $z(t) = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$. Calcolandone la derivata seconda e sostituendo nell'equazione differenziale, otteniamo

$$-4A\sin(2t) - 4At\cos(2t) + 4B\cos(2t) - 4Bt\sin(2t) + 4At\cos(2t) + 4Bt\sin(2t) = \cos(2t)$$
$$\Rightarrow \quad A = 0,\ B = \frac{1}{4}.$$

Per il metodo di somiglianza, la soluzione particolare di $y'' + 4y = 8$ è invece un polinomio di grado 0, cioè una costante k; deve perciò essere $(k)'' + 4k = 4k = 8$, cioè $k = 2$. L'integrale generale dell'equazione data è perciò

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t) + 2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) La soluzione $y(t)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$; poiché la funzione $t \mapsto \frac{t}{4}\sin(2t)$ non è limitata mentre tutti gli altri addendi nell'espressione di $y(t)$ sono limitati, non esistono soluzioni $y(t)$ limitate dell'equazione assegnata.

3) Si richiede cioè che $y(\pi) = 0$ e $y'(\pi) = \pi$; poiché dall'espressione di $y(t)$ deduciamo $y'(t) = -2c_1\sin(2t) + 2c_2\cos(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t)$, deve essere soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} (y(\pi) =)\ c_1 + 2 = 0 \\ (y'(\pi) =)\ 2c_2 + \frac{\pi}{2} = \pi, \end{cases}$$

da cui $c_1 = -2$, $c_2 = \pi/4$ e la soluzione richiesta è

$$y(t) = -2\cos(2t) + \frac{\pi}{4}\sin(2t) + \frac{t}{4}\sin(2t) + 2.$$

Esercizio 2 *(7 punti)*

1) (5 punti) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(x) = \arctan(x^2)$, seguendo lo schema di seguito riportato:

   a- a partire dalle note proprietà della serie geometrica, scrivere lo sviluppo in serie di potenze di $\dfrac{1}{1+x^4}$; dedurne lo sviluppo di $\dfrac{2x}{1+x^4}$;

   b- dal momento che $(\arctan(x^2))' = \dfrac{2x}{1+x^4}$, usare le proprietà viste per le serie di potenze reali per dedurre lo sviluppo in serie di potenze di $\arctan(x^2)$ e specificarne l'intervallo di convergenza.

2) (2 punti) Determinare l'intervallo di convergenza della serie di potenze reale

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n \cdot 2^n}(x-1)^n.$$

Risposte

1) Siccome, per le note proprietà della serie geometrica, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ per $q \in (-1,1)$, ponendo $q = -x^4$ si ha

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^4)^n = \frac{1}{1+x^4}$$

per $-x^4 \in (-1,1)$ (cioè $x \in (-1,1)$), da cui

$$\frac{2x}{1+x^4} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x(-x^4)^n = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{4n+1}.$$

Come detto, tale sviluppo vale per $x \in (-1,1)$; mediante integrazione indefinita termine a termine in tale intervallo, lecita per le proprietà delle serie di potenze, otteniamo

$$\arctan(x^2) = \int \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \int x^{4n+1}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{4n+2}}{2n+1}.$$

Poiché l'operazione di integrazione termine a termine conserva il raggio di convergenza, il raggio di convergenza di tale serie è 1; d'altra parte, sia per $x = 1$ che per $x = -1$ si ottiene la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$, che converge in virtù del criterio di Leibniz. Pertanto, l'intervallo di convergenza della serie trovata è $[-1,1]$.

2) Si noti che la serie di potenze è centrata in $x = 1$ e che i coefficienti sono $a_n = \frac{\log n}{n2^n}$. Il raggio di convergenza R della serie assegnata è

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\log n}{n2^n}\cdot\frac{(n+1)2^{n+1}}{\log(n+1)}\right] = \lim_{n\to+\infty}\left[2\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\log n}{\log(n+1)}\right] = 2.$$

Pertanto $R = 2$ e la serie converge per $|x-1| < 2$, cioè $x \in (-1,3)$, e non converge per $|x-1| > 2$. Per quanto riguarda gli estremi dell'intervallo $(-1,3)$, per $x = -1$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n\cdot 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\log n}{n},$$

che converge per il criterio di Leibniz, essendo $(\log n)/n$ decrescente ed infinitesima; per $x = 3$ otteniamo la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\log n}{n},$$

che diverge per confronto con la serie armonica. Pertanto, l'intervallo di convergenza richiesto è $[-1,3)$.

Esercizio 3 *(6 punti)*

Sia f la funzione di due variabili definita da

$$f(x,y) = \frac{y}{x^4+y^4}.$$

1) (1 punto) Determinare il dominio di f e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.

2) (2 punti) Determinare la derivata direzionale di f in direzione $(3/5, 4/5)$ nel punto $(1,-1)$. Determinare il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1,f(1,-1))$.

3) (3 punti) Stabilire se esistono il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul quadrato chiuso Q di vertici $(0,1)$, $(1,1)$, $(1,2)$, $(0,2)$ e, in caso affermativo, determinarli.

Risposte

1) Dovrà essere $x^4+y^4 \neq 0$, perciò $(x,y) \neq (0,0)$. Il dominio di f è dato quindi da $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \neq (0,0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Tale insieme è aperto (non contiene alcun punto della sua frontiera perché la sua frontiera si riduce al punto $(0,0)$, che non appartiene a $\operatorname{dom} f$); è inoltre ovviamente illimitato (contiene tutti i punti del piano a meno dell'origine).

2) Nel suo dominio, f è di classe C^1 perché quoziente di polinomi; vale perciò la regola del gradiente. Essendo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{-4x^3y}{(x^4+y^4)^2}, \frac{x^4-3y^4}{(x^4+y^4)^2} \right),$$

avremo $\nabla f(1,-1) = (1,-1/2)$ e quindi, posto $\underline{v} = (3/5, 4/5)$,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,-1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \rangle = 3/5 - 2/5 = 1/5.$$

Essendo poi $f(1,-1) = -1/2$, il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,-1,f(1,-1))$ risulta avere equazione

$$z = -1/2 + \langle \nabla f(1,-1), (x-1, y+1) \rangle = x - \frac{y}{2} - 2.$$

3) Essendo f continua su tutto il suo dominio ed essendo Q chiuso e limitato, il massimo e il minimo assoluti di f su Q esistono per il teorema di Weierstrass. Per determinarli, indaghiamo in primo luogo i punti critici liberi di f nell'interno di Q; poiché $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $-4x^3y = 0$ e $x^4 - 3y^4 = 0$ allo stesso tempo, l'unico punto critico libero di f è $(0,0)$, che però non appartiene a Q. Non ci sono perciò punti critici liberi di f nell'interno di Q. Esaminiamo allora la frontiera di Q, chiamando l_1 il lato di estremi $(0,1)$, $(1,1)$, l_2 il lato di estremi $(1,1)$, $(1,2)$, l_3 il lato di estremi $(1,2)$, $(0,2)$ e l_4 il lato di estremi $(0,2)$, $(0,1)$. Si ha:

- $f\big|_{l_1} = f(x,1) = 1/(x^4+1)$, che è ovviamente decrescente in $x \in [0,1]$ e quindi f su l_1 assume massimo in $(0,1)$, uguale a $1/(0^4+1) = 1$, e minimo in $(1,1)$, uguale a $1/(1^4+1) = 1/2$;
- $f\big|_{l_2} = f(1,y) = y/(1+y^4)$ per $y \in [1,2]$; detta $g(y) = y/(1+y^4)$, si ha $g'(y) = (1-3y^4)/(1+y^4)^2$, che si annulla in $y = 1/\sqrt[4]{3} < 1$ ed è negativa per $y > 1/\sqrt[4]{3}$. Per $y \in [1,2]$, g' è quindi negativa e quindi $f\big|_{l_2}$ è decrescente; f assume massimo su l_2 in $(1,1)$, uguale a $1/(1+1^4) = 1/2$, e minimo in $(1,2)$, uguale a $2/(1+2^4) = 2/17$;
- $f\big|_{l_3} = f(x,2) = 2/(x+16)$ per $x \in [0,1]$, che è ovviamente decrescente in $x \in [0,1]$ e quindi f su l_3 assume massimo in $(0,2)$, uguale a $2/(0+16) = 1/8$, e minimo in $(1,2)$, uguale a $2/17$;
- $f\big|_{l_4} = f(0,y) = 1/y^3$ per $y \in [1,2]$, che è ovviamente decrescente in $y \in [1,2]$ e quindi f su l_4 assume massimo in $(0,1)$, uguale a $1/1^3 = 1$, e minimo in $(0,2)$, uguale a $1/2^3 = 1/8$.

Il minimo tra i valori minimi trovati sui quattro lati è $\min\{1/2, 2/17, 1/8\} = 2/17$, il massimo è $\max\{1, 1/2, 1/8\} = 1$. Pertanto,

$$\min_Q f = f(1,2) = 2/17, \qquad \max_Q f = f(0,1) = 1.$$

Esercizio 4 *(5,5 punti)*

Calcolare l'integrale triplo

$$\iiint_\Sigma xz\,dxdydz,$$

dove

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le z \le 4-(x^2+y^2),\ x \ge 0\}.$$

Risposte

Dalla disuguaglianza $x^2+y^2 \le 4-(x^2+y^2)$ deduciamo che dovrà essere $2(x^2+y^2) \le 4$, cioè $x^2+y^2 \le 2$. Il dominio di integrazione Σ può pertanto essere scritto come dominio z-semplice:

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le 2, x^2+y^2 \le z \le 4-(x^2+y^2),\ x \ge 0\}.$$

Posto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2, x \ge 0\}$, integriamo perciò per fili paralleli a z:

$$\iiint_\Sigma xz\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} xz\,dz \right) dxdy = \iint_D x \left(\frac{z^2}{2}\Big|_{x^2+y^2}^{4-(x^2+y^2)} \right) dxdy =$$

$$= \iint_D x \left(\frac{(4-x^2-y^2)^2}{2} - \frac{(x^2+y^2)^2}{2} \right) dxdy.$$

Passando a coordinate polari, l'integranda assume la forma $\rho\cos\theta[(4-\rho^2)^2/2 - \rho^4/2]$, mentre il dominio D si scrive come $D = \{(\rho,\theta) \mid 0 \le \rho \le \sqrt{2}, \theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. Ricordando di moltiplicare l'integranda per il modulo dello jacobiano del cambiamento di coordinate (ρ) abbiamo quindi

$$\iiint_\Sigma xz\,dxdydz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2[(4-\rho^2)^2/2 - \rho^4/2]\,d\rho$$

$$= (\sin\theta)_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{\rho^6}{2} - 4\rho^4 + 8\rho^2 - \frac{\rho^6}{2} \right) d\rho = \frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

TEORIA: 8 punti.

Tutte le domande a crocette ammettono una e una sola risposta corretta.

1) *(1 punto)* Data un'equazione differenziale a variabili separabili $y'(t) = a(t)b(y(t))$, con a, b funzioni continue,

A se $a(t)$ non è identicamente nulla e $b(y) > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, essa non ha soluzioni costanti $\boxed{\text{V}}$

B se $a(t_0) = 0$ per un opportuno $t_0 \in \mathbb{R}$, essa ha la soluzione costante $y(t) = t_0$ per ogni t

C se $b(y) = |y|$, essa è lineare

D le sue soluzioni sono sempre definite su tutto $\mathbb{R}$

2) *(1 punto)* Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$. Denotiamo con a_0, a_n, b_n $(n \geq 1)$ i suoi coefficienti di Fourier e sia

$$F_m(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Si ha:

A per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{m\to+\infty} F_m(x) = f(x)$

B $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (F_m(x) - f(x))^2\, dx = 0$ $\boxed{\text{V}}$

C può esistere $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $\lim_{m\to+\infty} F_m(x_0)$ non esiste

D se $\sum_n (|a_n| + |b_n|) < +\infty$, allora la serie di Fourier di f è derivabile termine a termine ed inoltre converge in ogni punto di $\mathbb{R}$ ad $f'(x)$

3) *(1 punto)* Data una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1 e dato un vincolo $\mathcal{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : G(x, y) = 0\}$, con G di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$,

A se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ per cui $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla G(x_0, y_0)$ e $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora (x_0, y_0) è estremo relativo vincolato per f su $\mathcal{Z}$

B se $(x_0, y_0) \in \mathcal{Z}$ è estremo relativo vincolato per f su $\mathcal{Z}$ e $\nabla G(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla G(x_0, y_0)$ $\boxed{\text{V}}$

C se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, allora (x_0, y_0) è un estremo relativo vincolato per f su $\mathcal{Z}$

D nessuna delle altre

4) *(2 punti)* Enunciare il teorema di convergenza puntuale delle serie di Fourier. Indicare, eventualmente mediante rappresentazione grafica, un esempio di funzione periodica e non continua su tutto $\mathbb{R}$ a cui tale teorema può essere applicato.

5) *(3 punti)* Dare la definizione di differenziabilità per una funzione di 2 variabili e dimostrare che la differenziabilità in un punto implica la continuità in tale punto.