Geometria e algebra lineare, novembre 2020, parte A

Ogni domanda ha un'unica risposta corretta.

* This form will record your name, please fill your name.

1.
(1 Point)

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

- [x] ha rango 2
- [ ] ha rango 3
- [ ] ha rango 1
- [ ] ha rango 4

2.
(1 Point)

Dati $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, il sistema lineare $\begin{cases} hx + y + z = h \\ hz = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$

- [ ] non ammette mai soluzione
- [ ] ammette soluzione per ogni $h \in \mathbb{R}$
- [ ] ammette soluzione in quanto è un sistema omogeneo
- [x] se $h = 1$ ha soluzione $(1, -1, 1)^T$

3.
(1 Point)

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

- [ ] è invertibile perché ha rango massimo
- [x] nessuna delle altre risposte è corretta
- [ ] è invertibile se $a \neq d$
- [ ] è invertibile se a, b, c, d non sono nulli

4.
(1 Point)

Il rango r di una matrice A di tipo 3×4 soddisfa:

- [x] $0 \leq r \leq 3$
- [ ] $1 \leq r \leq 3$
- [ ] $r = 4$ se e solo se i vettori riga di A sono linearmente indipendenti
- [ ] $r = 0$ se e solo se i vettori colonna di A sono linearmente dipendenti

5.
(1 Point)

Sia V lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 4. La dimensione di V è

- [ ] 4
- [x] 10
- [ ] 6
- [ ] 16

6.

(1 Point)

Se V è lo spazio vettoriale dei polinomi di $\mathbb{R}[x]$ di grado minore o uguale a tre, allora

- ○ $\{x, x^2, x^3\}$ è un insieme di generatori di V
- ● $\{3, x, x^2, x^3 - x^2\}$ è una base di V
- ○ $\{3, x, x^2, x^3\}$ è un insieme di generatori di V, ma non è una base
- ○ $\{1, x, x^2, x^3\}$ non è una base di V

7.

(1 Point)

Data la base $B = \{1, x + x^2, x - x^2\}$ dello spazio $\mathbb{R}[x]_2$ dei polinomi di grado minore o uguale a due,

- ○ nessuna delle altre risposte è corretta
- ● il polinomio $p(x) = 1 + 2x$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B
- ○ il polinomio nullo non ha coordinate
- ○ il polinomio $p(x) = 1 + x + x^2$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto a B

8.

(1 Point)

Sia W l'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 con rango uguale a 2.

- ○ W è uno spazio vettoriale di dimensione 3
- ● W non è uno spazio vettoriale
- ○ W è uno spazio vettoriale di dimensione 4
- ○ W è l'insieme vuoto

9.

(1 Point)

La funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = x + kxy + (k - 1)y - k$ è lineare per:

- ○ nessun valore di k
- ○ ogni valore di k
- ○ nessuna delle altre risposte è corretta
- ● un solo valore di k

10.

(1 Point)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f((x, y)) = (x + y,\ x - y,\ 2x)^T$.
La matrice che rappresenta l'applicazione lineare rispetto alle basi canoniche è

- ○ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
- ● $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$
- ○ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

11.

(1 Point)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare rappresentata, rispetto alla base canonica, dalla matrice
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- ○ f è iniettiva, ma non suriettiva
- ○ f è iniettiva e suriettiva
- ● f non è ne iniettiva, ne suriettiva
- ○ f è suriettiva, ma non iniettiva

12.
(1 Point)

Le rette r, s di $\mathbb{R}^3$ definite da $r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

- sono sghembe
- si intersecano nel punto $(1, 2, 3)$
- sono parallele
- si intersecano nel punto $(1, 0, 0)$

13.
(1 Point)

Sia k un parametro reale. In $\mathbb{R}^3$ consideriamo la retta $r: \begin{cases} x = k - t \\ y = 2 \\ z = 1 - kt \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R}$.

- esistono valori di k per i quali la retta interseca il piano $y = 0$
- esistono valori di k per i quali la retta è parallela al vettore $(2, 0, 2)$
- esistono valori di k per i quali la retta passa per l'origine
- per $k = 0$, passa per il punto $(1, 0, 1)$

14. Domanda
(1 Point)

In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il punto $P = (1, 2, 3)$. Possiamo affermare che:

- nessuna delle altre risposte è corretta
- non esistono piani contenenti P e l'asse delle y
- esiste un unico piano passante per P e parallelo all'asse delle y
- esistono infinite rette passanti per P e parallele all'asse delle y

2021-01-21 Geometria parte A

* This form will record your name, please fill your name.

1.
(1 Point)

Sia $V \neq 0$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo; se 0 è un autovalore di f allora

- ● $\ker f \neq 0$
- ○ f è iniettiva
- ○ f è suriettiva
- ○ nessuna delle altre affermazioni è vera

2.
(1 Point)

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un endomorfismo e $v \in \mathbb{R}^n$ è un vettore non nullo tale che $f(v) = -v$, allora $(f \circ f)(2v)$ è uguale a

- ● $2v$
- ○ v
- ○ $-2v$
- ○ 0

3.
(1 Point)

Si considerino le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- ● A e B sono simili.
- ○ A e B hanno gli stessi autospazi.
- ○ A e B non sono diagonalizzabili.
- ○ A e B non soddisfano nessuna delle altre proprietà elencate.

4.
(1 Point)

Supponiamo di sapere che il polinomio caratteristico di $A \in Mat_3(\mathbb{R})$ è $p(t) = -t^3 + t^2$; allora sicuramente

- ● la molteplicità geometrica di 0 come autovalore di A è minore o uguale a 2.
- ○ la molteplicità geometrica di 1 come autovalore di A può essere diversa da 1.
- ○ la molteplicità geometrica e la molteplicità algebrica di 0 sono uguali.
- ○ nessuna delle altre affermazioni è vera.

5.
(1 Point)

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo non diagonalizzabile, allora sicuramente

- ● la somma delle molteplicità geometriche è minore di 4.
- ○ nessun autovalore ha le due molteplicità uguali.
- ○ la somma delle molteplicità algebriche è minore di 4.
- ○ nessuna delle altre affermazioni è vera.

6.
(1 Point)

La distanza tra il punto $(1, 0, 1)$ ed il piano $x + y - z = 5$ è

- [x] $5/\sqrt{3}$.
- [ ] $5/3$.
- [ ] 0.
- [ ] nessuna delle altre.

7.
(1 Point)

In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard, dato $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$, quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- [x] Il complemento ortogonale $U^\perp$ è il sottospazio generato da $(1, 1, -1)^t$ e $(-1, 1, 1)^t$.
- [ ] Il complemento ortogonale $U^\perp$ è il sottospazio generato da $(1, 1, -1)^t$.
- [ ] La proiezione ortogoale su U di (x, y, z) è $P_U(x, y, z) = (x + z, 0, x + z)$.
- [ ] Nessuna delle altre.

8.
(1 Point)

In V uno spazio Euclideo dotato di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ siano $v, w \in V$ due vettori non nulli e perpendicolari tra loro; quale delle seguenti affermazioni è sicuramente corretta?

- [x] $\langle v + w, v - w \rangle = \|v\|^2 - \|w\|^2$.
- [ ] $\langle v + w, v - w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2$.
- [ ] $\langle v + w, v - w \rangle = \|w\|^2 - \|v\|^2$.
- [ ] $\langle v + w, v - w \rangle = 0$.

9.
(1 Point)

Sia A una matrice 3×3 simmetrica con autovalori 1 e 2, se l'autospazio V_2 relativo all'autovalore 2 è dato dal piano $\pi : x + y - 2z = 0$ allora l'autospazio V_1 è dato da:

- [x] $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.
- [ ] Non ci sono abbastanza informazioni per ricavarlo.
- [ ] $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.
- [ ] $\text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

10.
(1 Point)

Si considerino le matrici $A_k \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ dipendenti dal parametro k: $\begin{pmatrix} 1 & k^2 & 1 \\ -k + 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Allora A_k è ortogonalmente diagonalizzabile per

- [x] $k = 1, -2$.
- [ ] solo per $k = 1$.
- [ ] $k = 1, 2$.
- [ ] solo per $k = -2$.

11.

(1 Point)

La matrice simmetrica associata alla forma quadratica: $q(x, y, z) = 2x^2 - 3y^2 - 4xy - 6zx$, è:

- [x] $\begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -4 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

12.

(1 Point)

Sia $q_k(x) = x^t A_k x$ la forma quadratica di $\mathbb{R}^3$ dipendente dal parametro $k \in \mathbb{R}$ con matrice associata

$$A_k = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Allora $q_k(x)$ ha segnatura $(2, 1, 0)$ per

- [x] $k = 1$.
- [ ] $k = 3$.
- [ ] $k = 2$.
- [ ] per nessun k.

13.

(1 Point)

La quadrica di equazione: $x^2 - y^2 - 3z^2 + xy = 1$

- [x] ha centro nell'origine.
- [ ] non è a centro.
- [ ] ha centro diverso dall'origine.
- [ ] è degenere (e cioè la forma quadratica definita dalla matrice completa è degenere).

14.

(1 Point)

La direzione di uno degli assi di simmetria per la conica $3x^2 + 3y^2 + 4xy - 1 = 0$ è

- [x] $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- [ ] $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- [ ] Nessuna delle altre risposte è corretta

2021-02 Geometria A

* This form will record your name, please fill your name.

1.
(1 Point)
Quale di questi endomorfismi di $\mathbb{R}^2$ non è diagonalizzabile?

- la riflessione ortogonale rispetto ad una retta
- l'identità
- la rotazione di π
- la rotazione di $\pi/2$

2.
(1 Point)
Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la proiezione ortogonale su un piano H passante per l'origine, allora:

- nessuna delle altre
- il nucleo di f è contenuto in H
- f ha rango 1
- il nucleo di f è ortogonale ad H

3.
(1 Point)
Sia $Ax = b$ un sistema lineare in cui il numero delle incognite è uguale al rango di A.
Possiamo affermare che il sistema ammette:

- una e una sola soluzione
- nessuna soluzione
- almeno una soluzione
- al più una soluzione

4.
(1 Point)
Una forma quadratica $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ha determinante negativo e $q(v) > 0$ per un vettore $v \in \mathbb{R}^3$.
Allora la matrice di q ha:

- tre autovalori negativi
- tre autovalori positivi
- due autovalori negativi e uno positivo
- due autovalori positivi e uno negativo

5.
(1 Point)
Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ lo spazio dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 2.
Consideriamo la base

$$B = \{1 - x^2, \quad 1 + x - x^2, \quad 1 + x^2\}$$

e un generico $p(x) \in V$. Quale delle seguenti affermazione è corretta?

- Nessuna delle altre.
- Se le coordinate di $p(x)$ rispetto a B sono $(0, 1, 1)$, allora $p(x)$ ha grado esattamente 2.
- Se le coordinate di $p(x)$ rispetto a B sono $(1, 0, 1)$, allora $p(x)$ ha grado esattamente 2.
- Se le coordinate di $p(x)$ rispetto a B sono $(1, 1, 1)$, allora $p(x)$ ha grado esattamente 2.

6.
(1 Point)

Sia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare lineare tale che

$$T(e_1) = e_2 \qquad T(e_2) = e_3 + e_1 \qquad T(e_3) = e_1 + e_2 + e_3$$

Qual è la matrice associata a T rispetto alla base canonica $\{e_1, e_2, e_3\}$?

- ◯ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ◯ Non ci sono abbastanza informazioni per determinarla univocamente.
- ● $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7.
(1 Point)

Per quali $k \in \mathbb{R}$ la funzione $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita dalla formula

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx - k \\ x(kx+2) \end{pmatrix}$$

è lineare?

- ◯ Solo per $k = -2$
- ● Solo per $k = 0$
- ◯ Per infiniti valori di k
- ◯ Solo per $k = 1$

8.
(1 Point)

Determinare la distanza fra le rette

$$r : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad s : \begin{cases} y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

- ◯ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ◯ $\frac{1}{2}$
- ◯ $\sqrt{2}$
- ● 1

9.
(1 Point)

Determinare molteplicità algebrica e geometrica di 0 come autovalore della matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- ◯ $a_0 = 4, \qquad g_0 = 3$
- ◯ $a_0 = 3, \qquad g_0 = 2$
- ● $a_0 = 4, \qquad g_0 = 2$
- ◯ $a_0 = 3, \qquad g_0 = 3$

10.
(1 Point)

Sia $V = \mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 4 e sia

$$W = \{p(x) \in V \ : \ p(1) = p(0) = p(-1) = 0\}.$$

Allora

- ◯ W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 3$
- ◯ W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 1$
- ● W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 2$
- ◯ W non è un sottospazio vettoriale di V.

11.
(1 Point)
Determinare l'angolo tra i vettori $(2,1,2)^T$ e $(4,-1,1)^T$.

- $\pi/2$
- $\pi/4$
- $\pi/3$
- Nessuna delle precedenti

12.
(1 Point)
Si consideri il sottospazio U di $\mathbb{R}^3$ descritto dall'equazione $x - y - z = 0$.
Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

- $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortogonale di $U^\perp$
- Il vettore $(1,-1,-1)^T$ è generatore di U
- Il vettore $(-1,1,1)^T$ è un generatore di $U^\perp$
- $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ è una base ortogonale di U

13.
(1 Point)
Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera?

- T non è suriettiva.
- T è iniettiva.
- T è suriettiva.
- T non è iniettiva.

14.
(1 Point)
Si consideri la quadrica di equazione

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1.$$

Quale affermazione è corretta?

- È un ellissoide.
- Non ha centro.
- $\text{È di rotazione.$
- Un suo piano di simmetria è parallelo a $y + 2z = 0$.

2021-06 Geometria A

Per ogni domanda esiste un'unica risposta corretta. Per inviare il test è obbligatorio rispondere a tutte le domande. Tempo di svolgimento 30 minuti.

* Required

* This form will record your name, please fill your name.

1. *

(1 Point)

Siano A, B matrici quadrate dello stesso ordine invertibili, e sia $C = AB$. Allora:

- ○ $C^{-1} = A^T B^{-1}$
- ● $\det(C) \neq 0$
- ○ $C^{-1} = A^{-1} B^{-1}$
- ○ $C^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$

2. *

(1 Point)

Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
$V_1 = \text{Span}((1,1,0),(2,1,1),(3,2,1))$
$V_2 = \{(a,b,a+b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$
$V_3 = \{(x,y,z) \mid x-y-z=0\}$.
Allora:

- ○ $\dim(V_1) = 3$, $\dim(V_2) = 2$, $\dim(V_3) = 1$
- ○ V_1 è un sottospazio proprio di V_3
- ● $\dim(V_1) = \dim(V_2) = \dim(V_3) = 2$
- ○ $\dim(V_1) = \dim(V_2) = 2$, $\dim(V_3) = 1$

3. *

(1 Point)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_2$ dei polinomi di grado al più 2, e sia $\mathrm{B} = \{x^2 + 2x, 1 - x, 2\}$ una base. Le coordinate del polinomio $2x^2 + 5x + 1$ rispetto alla base B sono

- ○ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ● $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. *

(1 Point)

Sia $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{cases} f(\mathbf{e_1}) = 2\mathbf{e_1} - 3\mathbf{e_2} \\ f(\mathbf{e_2}) = \mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} - \mathbf{e_3} \\ f(\mathbf{e_3}) = -\mathbf{e_1} + 2\mathbf{e_2} + 2\mathbf{e_3} \end{cases}$$

Allora

- [x] $f((1,1,1)) = (2,0,1)$
- [ ] $(1,1,1)$ è un autovettore
- [ ] $f((1,1,1)) = (1,0,1)$
- [ ] $(1,1,1) \in \ker(f)$

5. *

(1 Point)

Sia $f : V \to W$ una applicazione lineare e sia

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice rappresentativa rispetto alla basi B di V e B$'$ di W. Allora:

- [x] $\dim(V) = 3$
- [ ] $\dim(W) = 3$
- [ ] $\dim(F(V)) = 1$
- [ ] nessuna delle altre risposte è corretta

6. *

(1 Point)

Consideriamo la matrice $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Allora:

- [x] la matrice non è diagonalizzabile per nessun $k \in \mathbb{R}$
- [ ] la matrice è diagonalizzabile per ogni $k \in \mathbb{R}$
- [ ] nessuna delle altre risposte è corretta
- [ ] la matrice è diagonalizzabile per infiniti $k \in \mathbb{R}$ ma non per tutti

7. *

(1 Point)

Sia f un endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ avente $\mathbf{v_1} = (1,-1,0)$, $\mathbf{v_2} = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v_3} = (0,1,-1)$ come autovettori. Allora:

- [x] nessuna delle altre risposte è corretta
- [ ] f non può essere l'applicazione identità
- [ ] f è ortogonalmente diagonalizzabile
- [ ] f è diagonalizzabile

8. *

(1 Point)

Nello spazio $\mathbb{R}^3$ si considerino i seguenti tre piani dipendenti dai parametri $h, k \in \mathbb{R}$:
$\pi_1 : x - y + hz = 1,$
$\pi_2 : 2x - 2y + (h + k)z = 2,$
$\pi_3 : 4x - 4y + 4kz = 4.$
Allora questi si intersecano in una stessa retta se:

- [x] $h \neq k$
- [ ] $h = 2, k = 1$
- [ ] $h = k$
- [ ] $h + k = 0$

9. *

(1 Point)

Nello spazio $V = \mathbb{R}^3$ con prodotto scalare euclideo, una base ortonormale di $U = \text{Span}((1, 0, 1), (1, -1, 1))$ è:

- [x] $\text{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (0, -1, 0) \right\}$
- [ ] $\text{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$
- [ ] $\text{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}$
- [ ] $\text{B} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\}$

10. *

(1 Point)

La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- [x] ha tre autospazi distinti ed ortogonali tra loro
- [ ] non è diagonalizzabile sul campo reale
- [ ] rispetto ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ rappresenta una rotazione di un angolo π
- [ ] è simile alla matrice identità.

11. *

(1 Point)

Sia $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una funzione lineare e sia

$V_2 : x + y + 3z - w = 0$

l'autospazio relativo all'autovalore 2. Quale delle seguenti affermazioni è sicuramente vera:

- [x] $T(1, 1, 0, 2) = (2, 2, 0, 4)$
- [ ] T è sicuramente diagonalizzabile
- [ ] $T(1, 1, 1, 1) = (4, 4, 4, 4)$
- [ ] $T(1, 1, 0, 2) = (1, 1, 0, 2)$

12. *

(1 Point)

La distanza della retta $r : (x, y, z) = (-1, 0, 0) + t \cdot (1, 1, 1)$ dal punto $P = (0, 1, 1)$ è:

- 0
- 1
- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{6}$

13. *

(1 Point)

La forma quadratica definita dalla matrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ è

- definita positiva
- semidefinita positiva
- definita negativa
- non classificabile, in quanto dipende dalla base rispetto a cui è associata la matrice

14. *

(1 Point)

Sia γ_k la conica di equazione $x^2 + kxy + x = 0$, in funzione di $k \in \mathbb{R}$. Allora

- γ_k è degenere per ogni k
- γ_k è un'iperbole per infiniti valori di k
- γ_k ha solo punti immaginari per almeno un valore di k
- γ_k non si spezza mai in due rette parallele.

2021-07 Geometria A

* This form will record your name, please fill your name.

1.

(1 Point)

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un endomorfismo e $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono tali che $f(v) = 3w$ ed $f(w) = 3v$, allora è sempre vero che

- v, w sono autovettori.
- $v - 3w$ è autovettore.
- $v - w$ è autovettore.
- $3v - w$ è autovettore.

2.

(1 Point)

Le matrici $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

- Hanno gli stessi autovalori ma non sono simili.
- Sono simili.
- Sono diagonalizzabili ma non sono simili.
- Non hanno gli stessi autovalori ma sono simili.

3.

(1 Point)

Sia q la forma quadratica su $\mathbb{R}^3$ indotta dalla matrice
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
La segnatura di q (nell'ordine positivo, negativo, nullo) è:

- $(2, 1, 0)$
- $(1, 2, 0)$
- $(1, 1, 1)$
- $(0, 1, 2)$

4.

(1 Point)

In $\mathbb{R}^3$, sia U il sottospazio generato dal vettore $[1, -1, 3]^t$. Allora:

- L'insieme $\mathrm{B} = \{[1, 1, 0]^t, [-3, 0, 1]^t\}$ è una base di $U^\perp$.
- $U^\perp$ è generato dai vettori $[3, 0, -1]^t$ e $[1, 1, 1]^t$.
- U è un piano ed $U^\perp$ è una retta.
- $U^\perp$ ha equazione $3x + y - z = 0$.

5.

(1 Point)

La quadrica Q di equazione $y^2 + 3z^2 - 2x = 0$:

- è degenere
- è un paraboloide iperbolico.
- è un parabolide ellittico.
- ha un centro di simmetria.

6.
(1 Point)

In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare canonico, si considerino
il sottospazio U generato da $u = [1, 2, 3]^t$ e il punto $A = (1, 0, 0)$.

- ○ Esiste un unico piano passante per A e parallelo ad u.
- ○ Il piano passante per A e perpendicolare a u ha equazione $x + 2y + 3z = 0$.
- ● La distanza di A da $U^\perp$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
- ○ La distanza di A da U è maggiore di 1.

7.
(1 Point)

Sia C una parabola che ha come asse di simmetria la retta $2x + y + 1 = 0$
e sia A la matrice associata alla parte quadratica di C.
Quale delle rette seguenti è l'autospazio E_0 di A?

- ○ $y = 2x$
- ○ $x = -2y$
- ● $y = -2x$
- ○ $x = 2y$

8.
(1 Point)

Se $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ è la proiezione ortogonale su un sottospazio di dimensione 2, allora:

- ○ $\dim(\operatorname{im} f) = 3$
- ● $\dim(\ker f) = 3$
- ○ $\dim(\ker f) = \dim(\operatorname{im} f)$
- ○ $\dim(\ker f) = 2$

9.
(1 Point)

Se $Ax = B$ è un sistema lineare non omogeneo che ammette soluzioni distinte v e w, allora

- ○ $v + w$ è ancora soluzione del sistema.
- ○ Il sistema non ha soluzioni.
- ○ $v - w$ è ancora soluzione del sistema.
- ● $v - w$ è soluzione del sistema $Ax = 0$.

10.
(1 Point)

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la funzione lineare definita dalle formule

$$f(e_1) = e_3, \qquad f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3, \qquad f(e_2) = 0.$$

La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è:

- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$
- ● $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- ○ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

11.
(1 Point)

Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ due funzioni lineari.

- ○ La matrice associata ad $f \circ g$ ha tre righe e due colonne.
- ● La matrice associata a $g \circ f$ ha due righe e due colonne.
- ○ La matrice associata ad $f \circ g$ ha due righe e tre colonne.
- ○ La matrice associata a $g \circ f$ ha tre righe e tre colonne.

12.
(1 Point)

Sia V lo spazio delle matrici reali 2×3, e sia

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & y \end{bmatrix} \in V : x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

- ○ W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 1$.
- ○ W non è un sottospazio vettoriale di V.
- ○ W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 3$.
- ● W è un sottospazio vettoriale di V e $\dim W = 2$.

13.
(1 Point)

Sia A una matrice con determinante uguale a 2.
Allora $\det(AA^tA^{-2})$ è uguale a

- ○ $\det A^t$
- ○ 2
- ● 1
- ○ 0

14.
(1 Point)

Sia $C = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base di $\mathbb{R}^3$.
Si considerino le matrici $A = [v_1|v_2|v_3]$ e $B = [v_3|v_1|v_2]$. Allora è sicuramente vero che

- ● $\det(A) = \det(B)$
- ○ $\det(A) = \det(B) = 1$
- ○ $\det(A) = -\det(B)$
- ○ $\det(A) = \det(B) = 0$

2021-09 Geometria A

* Required

* This form will record your name, please fill your name.

1. Domanda *
(1 Point)

Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, risulta:

- $AA^T = I$
- $AA^T = A$
- $A^{-1} = A$
- $A^2 = A$

2. *
(1 Point)

Sia A una matrice quadrata, quale delle seguenti matrici può non essere simmetrica?

- $(A + A^T)^T$
- $A - A^T$
- AA^T
- $A + A^T$

3. *
(1 Point)

La conica di equazione $2yx - 2y + x - 1 = 0$

- è degenere e rappresenta una coppia di rette incidenti.
- non è degenere e rappresenta un'iperbole.
- è degenere e rappresenta una coppia di rette parallele.
- non ha punti reali.

4. Domanda *
(1 Point)

Sia k un parametro reale. L'insieme di vettori $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ se e solo se:

- $k \neq -1$
- $k \neq 1$
- per tutti i valori di $k \in \mathbb{R}$
- $k = -1$

5. Domanda *
(1 Point)

Sia A una matrice 3×3 reale con autospazio V_1, relativo all'autovalore 1, di dimensione $\dim(V_1) = 2$. Possiamo affermare che:

- se $\det A = 0$, allora A è diagonalizzabile.
- se $\det A \neq 0$, allora A è diagonalizzabile.
- se $\det A = 0$, allora A non è diagonalizzabile.
- se $\det A \neq 0$, allora A non è diagonalizzabile.

6. Domanda *
(1 Point)

Siano U, V due sottospazi di $\mathbb{R}^7$ tali che $\dim(U) = 4$ e $\dim(V) = 5$ allora è sempre vero che

- ● $\dim(U \cap V) \geq 2$
- ○ $\dim(U + V) = 7$
- ○ $\dim(U \cap V) \leq 2$
- ○ $\dim(U \cap V) = 2$

7. Domanda *
(1 Point)

Sia $B = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ una base di uno spazio vettoriale V. Sia $f : V \to V$ l'applicazione lineare definita da $f(\mathbf{u}) = \mathbf{u}, f(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, f(\mathbf{w}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$.
Possiamo affermare che:

- ○ f è iniettiva.
- ● $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{w} \in \ker(f)$
- ○ $\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \ker(f)$
- ○ f è suriettiva.

8. Domanda *
(1 Point)

Il sottospazio $V_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - 3z = 0\}$ è l'autospazio associato all'autovalore 1 della matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$. Possiamo affermare che:

- ○ non è possibile stabilire se A ammetta un altro autovalore.
- ● A ammette un altro autovalore il cui autospazio è $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle$.
- ○ A non ammette un altro autovalore.
- ○ A ammette un altro autovalore il cui autospazio è $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$.

9. Domanda *
(1 Point)

Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica $A \in M_3(\mathbb{R})$ è $p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2$, dunque la segnatura di A è

- ● $\sigma(A) = (2, 1, 0)$.
- ○ $\sigma(A) = (1, 2, 0)$.
- ○ $\sigma(A) = (1, 1, 1)$.
- ○ $\sigma(A) = (0, 1, 2)$.

10. Domanda *
(1 Point)

Sia V uno spazio vettoriale, $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ una sua base di V e $f : V \to V$ un endomorfismo. Sapendo che la matrice rappresentativa di f rispetto alla base B, scelta sia per il dominio che per il codominio, è $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, possiamo dire che

- ● $f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3$
- ○ $f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$
- ○ $f(\mathbf{v}_1) = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$
- ○ $f(\mathbf{v}_1) = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$

11. Domanda *
(1 Point)

Sia A una matrice 2×3 reale. Se il sistema lineare non omogeneo $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette almeno una soluzione, allora

- ○ $r(A) \neq r([A|\mathbf{b}])$.
- ● il sistema ammette infinite soluzioni.
- ○ il sistema ammette un'unica soluzione.
- ○ non ci sono abbastanza informazioni per stabilire se ci sono infinite oppure un'unica soluzione.

12. Domanda *
(1 Point)

Sia $V := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^3$. La proiezione ortogonale del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sul sottospazio V è:

- ◯ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- ● $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- ◯ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

13. Domanda *
(1 Point)

La conica di equazione $x^2 + 2y^2 + 6xy - 1 = 0$ è:

- ● una iperbole.
- ◯ una ellisse immaginaria.
- ◯ una ellisse reale.
- ◯ una parabola.

14. Domanda *
(1 Point)

Le due rette di $\mathbb{R}^3$ rappresentate parametricamente da

$$r : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad , \qquad s : \begin{cases} x = s \\ y = 1 + s \\ z = 2 \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

risultano essere:

- ◯ sghembe.
- ● incidenti (in un solo punto).
- ◯ sovrapposte.
- ◯ parallele e distinte.

2022-01-18 Geometria / parte A

* This form will record your name, please fill your name.

1.
(1 Point)

Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice seguente è diagonalizzabile ortogonalmente?

$$\begin{pmatrix} k & k & 0 \\ 2-k & 1 & k^2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

- ○ Solo per $k = 0$.
- ○ Per $k = 0, 1$.
- ○ Per $k = \pm 1$.
- ● Solo per $k = 1$.

2.
(1 Point)

Supponiamo che A sia una matrice simmetrica di ordine 3 con autovalori 0 e 1
Se l'autospazio E_0 è il piano $x + y - 2z = 0$, allora l'autospazio E_1

- ○ Non ci sono abbastanza informazioni per determinarlo.
- ● È generato da $(1, 1, -2)^T$
- ○ È generato da $(-1, -1, 1)^T$.
- ○ È generato da $(1, 1, 1)^T$ e da $(0, 2, 1)^T$.

3.
(1 Point)

Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la forma quadratica rappresentata dalla matrice seguente ha segnatura $(2, 1, 0)$?

$$\begin{pmatrix} k-2 & 0 & 0 \\ 0 & 1-k & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ● Per $k < \frac{1}{2}$ e $k > 2$.
- ○ Solo per $k = \frac{1}{2}$ o $k = 2$.
- ○ Per $\frac{1}{2} < k < 2$
- ○ Per $\frac{1}{2} \leq k \leq 2$.

4.
(1 Point)

Un sistema lineare di tre equazioni in due incognite:

- ● Può ammettere infinite soluzioni
- ○ Ammette una e una sola soluzione
- ○ Non ammette mai soluzione
- ○ Ammette sempre infinite soluzioni

5.
(1 Point)

La matrice a coefficienti reali

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

- ○ Non è invertibile quando $k = 0$ e $k = 1$.
- ○ Ha rango 2 se $k = 1$
- ○ Non ha mai rango 3
- ● Non è invertibile se $k = 0$

6.
(1 Point)

Sia V uno spazio Euclideo e siano v, w versori ortogonali fra loro $(v \cdot w = 0)$.
Quale delle uguaglianze seguenti è vera?

○ $(v + w) \cdot (v - w) = 2$

○ $(v - w) \cdot (v - w) = 0$

○ $(v + w) \cdot (v - w) = 1$

● $(2v + w) \cdot (v - 3w) = -1$

7.
(1 Point)

La quadrica di equazione $x^2 - y^2 - 3z^2 = 0$

○ E' un ellissoide immaginario.

○ E' l'unione di due piani reali.

● E' un cono.

○ E' un paraboloide iperbolico.

8.
(1 Point)

Se A è una matrice 3×3 con polinomio caratteristico $p(t) = -t + 2t^2 - t^3$, allora
(a_t e g_t sono le molteplicità algebrica e geometrica dell'autovalore t)

○ Nessuna delle altre affermazioni è vera

○ $g_1 = a_1$

○ A ammette autovalore 0 e $g_0 \neq 1$.

● A ammette autovalore 1 e $g_1 \leq 2$.

9.
(1 Point)

Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Se $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la funzione lineare definita dalle formule

$$f(e_1) = e_3, \qquad f(e_2) = e_1, \qquad f(e_3) = 2e_1 - e_2 + e_3$$

allora $f((1, 2, 3)^T)$ è il vettore

○ $(4, -3, 8)^T$

○ $(-3, 8, 4)^T$

○ $(4, 8, -3)^T$

● $(8, -3, 4)^T$

10.
(1 Point)

Se

$$v = (1, 0, 0, 1)^T, \qquad u = (0, 0, 1, 0)^T,$$

quali delle seguenti sono equazioni cartesiane per il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato da v e u?

○ $\begin{cases} x_2 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{cases}$

● $\begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

○ $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_4 = 1 \end{cases}$

○ $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_4 \end{cases}$

11.
(1 Point)

Se $U \subseteq \mathbb{R}^3$ è il sottospazio generato da $(1, 2, 3)^T$, allora

○ $U^\perp$ è generato da $(-1, -2, 3)^T$.

○ La proiezione ortogonale di $x \in \mathbb{R}^3$ su U è $(x_1 + x_3, 0, x_1 + x_3)^T$.

○ Nessuna delle altre affermazioni è vera.

● $U^\perp$ è generato da $(1, 1, -1)^T$ e $(-3, 0, 1)^T$.

12.

(1 Point)

Le rette di $\mathbb{R}^3$ di equazioni

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}$$

- ○ Sono incidenti.
- ○ Non sono ortogonali.
- ● Sono ortogonali e sghembe.
- ○ Sono ortogonali e incidenti.

2022-02 Geometria A

* This form will record your name, please fill your name.

1.
(1 Point)
Determinare la dimensione del nucleo della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 6 & -3 & 9 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

- ○ 2
- ○ 0
- ○ 3
- ● 1

2.
(1 Point)
Se il sistema lineare $Ax = b$ di 3 equazioni in 2 incognite ha una sola soluzione, allora:

- ○ $\det(A) \neq 0$
- ○ $\ker(A) \neq 0$
- ○ $\mathrm{rk}(A) = 3$
- ● $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A|b)$

3.
(1 Point)
Se V è uno spazio vettoriale di dimensione 8
e $U, U' \subseteq V$ sono sottospazi di dimensione 4 e 5 rispettivamente, allora:

- ○ $U + U' = V$
- ○ $U \subseteq U'$
- ● $U \cap U' \neq 0$
- ○ $\dim(U \cap U') = 1$

4.
(1 Point)
Quale delle funzioni seguenti è lineare?
($\mathbf{R}[x]_n$ è lo spazio dei polinomi di grado minore di n e $p'(x)$ è il derivato di $p(x)$)

- ○ $\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) \\ M & \mapsto & M^T + I \end{array}$
- ○ $\begin{array}{ccc} \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array}$
- ○ $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[x]_3 & \to & \mathbf{R}[x]_3 \\ p(x) & \mapsto & x + p'(x) \end{array}$
- ● $\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[x]_3 & \to & \mathbf{R}^2 \\ p(x) & \mapsto & (p(1), p(2)) \end{array}$

5.
(1 Point)
La funzione lineare associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- ○ nessuna delle altre
- ○ è un isomorfismo
- ○ è iniettiva ma non suriettiva
- ● è suriettiva ma non iniettiva

6.
(1 Point)
Se $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ ha polinomio caratteristico $p(x) = -x(x+1)^2$, allora

- ● $\det(A) = 0$
- ○ A è necessariamente diagonalizzabile
- ○ A è invertibile
- ○ -1 è un autovalore di A con molteplicità geometrica 2

7.
(1 Point)
Quale delle matrici seguenti è simile a

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

- ○ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- ● $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
- ○ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

8.
(1 Point)
Trovare l'angolo formato dai vettori $(1,-1,1,-1)^T,\ (0,2,-2,0)^T \in \mathbf{R}^4$.

- ○ $\frac{1}{3}\pi$
- ○ $\frac{2}{3}\pi$
- ● $\frac{3}{4}\pi$
- ○ $\frac{1}{4}\pi$

9.
(1 Point)
Trovare il complemento ortogonale in $\mathbf{R}^4$ del sottospazio

$$U = \langle (1,0,1,0)^T, \quad (1,-1,0,0)^T, \quad (0,-1,-1,0)^T \rangle$$

- ○ $U^\perp = \langle (1,1,-1,0)^T \rangle$
- ● $U^\perp = \langle (0,0,0,1)^T, \quad (1,1,-1,0)^T \rangle$
- ○ $U^\perp = \langle (1,0,-1,0)^T, \quad (0,1,-1,0)^T, \quad (1,1,0,0)^T \rangle$
- ○ $U^\perp = \langle (1,0,-1,0)^T \rangle$

10.
(1 Point)
Quale delle forme quadratiche seguenti ha la stessa segnatura di

$$x_1^2 + x_2x_3?$$

- ○ $x_1^2 + x_2^2$
- ○ $x_1^2 - x_2^2$
- ● $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$
- ○ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

11.
(1 Point)
In $\mathbf{R}^3$ si considerino la retta L e il piano H di equazioni

$$L: \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = -t + 2 \end{cases} \qquad H: 2x - y + 3z = 6.$$

- ○ $L \subseteq H$
- ○ L e H sono incidenti ma non ortogonali
- ● L e H sono paralleli
- ○ L e H sono ortogonali

12.
(1 Point)
La quadrica $Q \subseteq \mathbf{R}^3$ di equazione $2xy + 2yz - 6 = 0$ è:

- ○ un iperboloide iperbolico
- ○ un cilindro ellittico
- ● un cilindro iperbolico
- ○ un iperboloide ellittico

2022-06 Geometria A

Hi, Luca. When you submit this form, the owner will see your name and email address.

1

(1 Point)

Si consideri il sistema lineare $Ax = b$ con $A \in \mathrm{Mat}_n(k)$ e $b \in k^n$

- ○ $Ax = b$ ha soluzioni se e solo se $\mathrm{rk}(A) = n$
- ○ $Ax = b$ ha un'unica soluzione se e solo se $\mathrm{rk}(A|b) = n + 1$
- ○ L'insieme delle soluzioni del sistema è un sottospazio di k^n
- ● Se il sistema ha soluzioni, allora $b \in \mathrm{Col}(A)$

2

(1 Point)

Sia $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{R})$ una matrice triangolare alta.

- ○ La molteplicità algebrica e geometrica di ogni autovalore di A coincidono
- ○ A è invertibile
- ● La somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è 4
- ○ $\det(A) = 0$

3

(1 Point)

In $\mathbf{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

- ○ Esiste un'unica scelta dei coefficienti c_i tale che $\sum_{i=1}^4 c_i v_i = 0$
- ● Esiste una funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ tale che $f(e_i) = v_i$ per ogni $1 \leq i \leq 4$
- ○ È possibile estrarre una base di $\mathbf{R}^3$ da $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$
- ○ I vettori v_i sono ortogonali a due a due

4

(1 Point)

Stabilire per quali valori di k è lineare la funzione $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ definita dalla formula

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + k + 1 \\ (k-1)x_1 \end{pmatrix}.$$

- ○ Nessun $k \in \mathbf{R}$
- ○ $k = 1$
- ● $k = -1$
- ○ $k = 1, -1$

5

(1 Point)

Determinare la dimensione del complemento ortogonale del sottospazio di $\mathbf{R}^3$

$$H = \langle (1,1,1)^{\mathrm{t}},\ (1,0,1)^{\mathrm{t}},\ (1,1,0)^{\mathrm{t}},\ (0,1,1)^{\mathrm{t}} \rangle$$

- ● $\dim H^\perp = 0$
- ○ $\dim H^\perp = 2$
- ○ $\dim H^\perp = 1$
- ○ $\dim H^\perp = 3$

6

(1 Point)

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ un endomorfismo e siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{R}^3$ vettori non nulli tali che

$$f(v_1) = v_1, \quad f(v_2) = 2v_2, \quad f(v_3) = 3v_3.$$

Allora

- ○ $v_1 + v_2 - v_3 \in \ker(f)$
- ● v_1, v_2, v_3 formano una base di $\mathbf{R}^3$
- ○ Il polinomio caratteristico di f è $p = -x^3 + x^2 + 2x + 3$
- ○ $\dim \mathrm{im}(f) = 2$

7

Question (1 Point)

Sia $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbf{R})$ una matrice con polinomio caratteristico $p = x^2 + 2x + 3$.

- ○ $\mathrm{tr}(A) = 3$
- ○ $\ker(A) \neq 0$
- ○ $\det(A) = 2$
- ● A non è simmetrica

8

Question (1 Point)

Determinare la posizione reciproca fra le rette di $\mathbf{R}^3$

$$r_1 : \langle (0,3,0)^{\mathrm{t}},\ (1,0,-1)^{\mathrm{t}} \rangle^\perp, \qquad r_2 : (2,0,2)^{\mathrm{t}} + \langle (1,1,1)^{\mathrm{t}} \rangle$$

- ○ sono parallele
- ○ sono perpendicolari
- ○ sono sghembe
- ● sono incidenti ma non perpendicolari

9

(1 Point)

Sia $H \subseteq \mathbf{R}^n$ un sottospazio e $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$ una matrice della proiezione ortogonale su H in $\mathbf{R}^n$.

- ○ $\ker(A) = H$
- ● $A^2 = A$
- ○ A è invertibile
- ○ -1 è un autovalore di A

10

(1 Point)

Siano $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R}),\ B \in \mathrm{Mat}_{n \times p}(\mathbf{R})$ tali che $A^T B = 0$.

- ○ $\mathrm{Row}(A) \perp \mathrm{Col}(B)$
- ○ $\mathrm{Col}(A) \perp \mathrm{Row}(B)$
- ○ $\mathrm{Row}(A) \perp \mathrm{Row}(B)$
- ● $\mathrm{Col}(A) \perp \mathrm{Col}(B)$

11

(1 Point)

Sia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ un'isometria lineare rispetto al prodotto scalare standard $\cdot$ in $\mathbf{R}^n$.

- ● $|f(v) - f(w)| = |v - w|$ per ogni $v, w \in \mathbf{R}^n$
- ○ f è diagonalizzabile
- ○ La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è simmetrica
- ○ $v \cdot f(w) = w \cdot f(v)$ per ogni $v, w \in \mathbf{R}^n$

12

(1 Point)

Sia $q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ una forma quadratica tale che $q(x, 0) = 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$ e $q(0, y) \geq 0$ per ogni $y \in \mathbf{R}$.

- ● Con le informazioni date non è possibile determinare il segno di q
- ○ q è definita positiva
- ○ q è semidefinita positiva
- ○ q è indefinita

☐ Send me an email receipt of my responses

Submit

2022-07 Geometria A

Hi, Luca. When you submit this form, the owner will see your name and email address.

1

(1 Point)

Qual è il rango della matrice A?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 2
- 4
- 1
- 3

2

(1 Point)

Se $A \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(\mathbf{R})$, $b \in \mathbf{R}^m$ e il sistema lineare $Ax = b$ ammette infinite soluzioni, allora

- $\mathrm{rank}(A) < \mathrm{rank}(A|b)$
- $m \leq n$
- $m \geq n$
- $\mathrm{rank}(A) < n$

3

(1 Point)

Il vettore $(1,0,1)^t$ ha coordinate $(1,2,3)^t$ rispetto alla base $B = (v_1, v_2, v_3)$. Se $v_1 = (1,1,1)^t$ e $v_2 = (1,0,0)^t$, allora:

- $v_3 = (-2/3, 0, -1/3)^T$
- $v_3 = (-1/3, -2/3, 0)^T$
- $v_3 = (0, -2/3, -1/3)^T$
- $v_3 = (-2/3, -1/3, 0)^T$

4

(1 Point)

Se $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ è la funzione lineare

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

allora l'immagine diretta del sottospazio $U = \langle (1,1,1)^t,\ (2,0,1)^t \rangle \subseteq \mathbf{R}^3$ lungo f è:

- $\mathbf{R}^2$
- $\langle (4,2)^T \rangle$
- $\langle (2,1,0)^T \rangle$
- 0

5

(1 Point)

Se l'immagine della funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ è generata dai vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

allora la dimensione del nucleo di f è:

- 3
- 0
- 2
- 1

6

(1 Point)

Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ un endomorfismo con polinomio caratteristico $p = x^2(1 - x^2)$. Se

$$\mathrm{im}(f) = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$$

allora

- $(1,1,1,1)^T$ è un autovettore
- $\ker(f) = (\mathrm{im}(f))^\perp$
- f è diagonalizzabile
- l'autospazio E_1 ha dimensione 2

7

(1 Point)

Sia $A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbf{R})$ una matrice simmetrica con due solo autovalori distinti. Se un autospazio di A è generato dai vettori

$$(3,2,1,0)^t, \qquad (0,1,1,1)^t,$$

allora le equazioni cartesiane dell'altro autospazio sono

- $3x + 2y + z = y + z + w = 0$
- $2x + 2y + z = x + z + w = 0$
- $z - 1 = x + y - 1 = 0$
- $2y = 3x + y - z = 0$

8

(1 Point)

Qual è la distanza del punto $P = (1,1,1)$ dalla retta r?

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 2t \end{cases}$$

- $\sqrt{3/2}$
- $\sqrt{6/5}$
- 0
- $\sqrt{2/5}$

9

(1 Point)

Il piano contenente la retta di equazioni $x + y = z = 1$ e il punto $P = (-1,-1,-1)$ ha equazione

- $2x + 2y - 3z + 1 = 0$
- $x - z = 0$
- $x - z + 1 = 0$
- $x + y + z + 3 = 0$

10

(1 Point)

Determinare i valori di $k \in \mathbf{R}$ per cui la forma quadratica $p = kx^2 + 2xz - 4yz$ è indefinita.

- Per tutti i valori di k
- $k \geq 0$
- Per nessun valore di k
- $k \leq 0$

11

(1 Point)

Quante matrici ortogonali di ordine 2 ci sono che hanno $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})^T$ come prima colonna?

- 0
- infinite
- 2
- 1

12

(1 Point)

La conica di equazione $y^2 - xy + x - 2y + 1 = 0$ è

- una coppia di rette incidenti

◯ un'iperbole

◯ una coppia di rette parallele

◯ un'ellisse

☐ Send me an email receipt of my responses

Submit

2022-09 Geometria A

...

Hi, Luca. When you submit this form, the owner will see your name and email address.

1

(1 Point)

Se $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 4}(\mathbf{R})$ e $b \in \mathrm{Mat}_{3\times 1}(\mathbf{R})$, allora il sistema lineare $Ax = b$:

- Non ammette mai soluzioni
- Ammette sempre infinite soluzioni
- Non ammette mai un'unica soluzione
- Ammette sempre al più una soluzione

2

(1 Point)

Date tre matrici $A, B, C \in \mathrm{Mat}_n(\mathbf{R})$, la matrice $(A + BC)^T$ è uguale a

- $A^T + B^T C^T$
- $A^T + C^T B^T$
- $B^T C^T + A^T$
- $A + C^T B^T$

3

(1 Point)

I vettori di $\mathbf{R}^3$: $(1,2,0)^T$, $(1,0,1)^T$, $(8,6,5)^T$:

- Formano un insieme di generatori per $\langle (1,2,0)^T \rangle$

- [ ] Formano una base di $\mathbf{R}^3$
- [ ] Formano un insieme di generatori per $\langle (1,2,0)^T,\ (0,0,1)^T \rangle$
- [x] Formano un insieme di generatori per $\langle (1,0,1)^T,\ (7,4,5)^T \rangle$

4

(1 Point)

La funzione lineare $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ indotta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 10 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- [ ] È un isomorfismo
- [ ] È iniettiva
- [x] Non è né iniettiva né suriettiva
- [ ] È suriettiva

5

(1 Point)

Sia $V = \{p \in \mathbf{R}[x] : \deg p \leq 2\}$ lo spazio dei polinomi di grado minore o uguale a 2. Se $f : V \to V$ è la funzione lineare definita dalle formule

$$f(1) = 1 + x, \qquad f(x) = 1 - x, \qquad f(x^2) = 2x^2 + 1,$$

allora $f(3x^2 + x + 2)$ è il polinomio

- [ ] $6x^2 - x + 4$
- [x] $6x^2 + x + 6$
- [ ] 2
- [ ] $6x^2 + 2x + 5$

6

(1 Point)

Per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ la matrice seguente è diagonaizzabile?

$$\begin{pmatrix} t & 1 \\ 2 & t \end{pmatrix}$$

- ○ Solo se $t = 0$
- ○ Solo se $t \geq 0$
- ○ Per nessun valore di t
- ● Per tutti i valori di t

7

(1 Point)

Sia f un endomorfismo di $\mathbf{R}^4$ per cui la cui somma delle molteplicità geometriche degli autovalori è 3. Se f ammette un autovalore di molteplicità algebrica 2 allora:

- ○ f ha 3 autovalori distinti
- ○ f ha 2 autovalori distinti
- ○ f ha 4 autovalori distinti
- ● non è possibile stabilire il numero di autovalori distinti di f

8

(1 Point)

Cosa si può dire di una matrice $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ cha ha due autovalori distinti con autospazi

$$E_1 = \langle (1,1,0)^t,\ (1,2,1)^t \rangle, \qquad E_2 = \langle (1,-1,1)^t \rangle?$$

- ○ A non è diagonalizzabile
- ● A è ortogonalmente diagonalizzabile
- ○ Non si può stabilire se A è diagonalizzabile o ortogonalmente diagonalizzabile
- ○ A è diagonalizzabile ma non ortogonalmente

9

(1 Point)

Se $P \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ è la matrice della proiezione ortogonale sul sottospazio

$$H = \langle (2,2,1)^{\mathrm{t}},\ (1,3,1)^{\mathrm{t}} \rangle$$

allora

- ○ $\ker(P) = \langle (3,-1,0)^T \rangle$
- ○ $\ker(P) = \langle (1,-1,0)^T,\ (3,-1,0)^T \rangle$
- ○ $\ker(P) = \langle (1,-1,0)^T \rangle$
- ● $\ker(P) = \langle (1,1,-4)^T \rangle$

10

(1 Point)

Quali dei seguenti sistemi lineari rappresenta una retta passante per $P = (2,-2,2)^{\mathrm{t}}$ e perpendicolare alla retta

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 3y + z = 0. \end{cases}$$

- ○ $y + 2 = z - x = 0$
- ● $y - x + 4 = z - 2 = 0$
- ○ $y + x = z - x = 0$
- ○ $2x + y - z = x + 2y + 3z + 1 = 0$

11

(1 Point)

Le matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- ○ Sono simili e congruenti
- ○ Sono simili ma non congruenti
- ○ Non sono né simili né congruenti
- ● Sono congruenti ma non simili

12

(1 Point)

La conica di equazione $4x^2 + y^2 - 4xy - 14x - 8y + 11 = 0$

- è una parabola con asse di simmetria di direzione $(-2, 1)^T$
- è un'ellisse con asse di simmetria di direzione $(-2, 1)^T$
- è una parabola con asse di simmetria di direzione $(1, 2)^T$
- è un'ellisse con asse di simmetria di direzione $(1, 2)^T$

Send me an email receipt of my responses

Submit