*POLITECNICO DI MILANO*

# FONDAMENTI DI AUTOMATICA
# (Ingegneria Gestionale)
# Prof. Fredy O. Ruiz-Palacios

Anno Accademico 2022/23

Appello del 09/06/2023

COGNOME........................................................................................

NOME ..........................................................................................

CODICE PERSONA ...............................................................................

FIRMA .........................................................................................

- Consegnare esclusivamente il presente fascicolo.
- Utilizzare, per la minuta, i fogli bianchi forniti in aggiunta a questo fascicolo.
- Non si possono consultare libri, appunti, dispense, ecc.
- Si raccomandano chiarezza, precisione e concisione nelle risposte.

**Fondamenti di Automatica (Ing. Gestionale)**
**Prof. Fredy Ruiz**
**Appello del 9 giugno 2023**

# ESERCIZIO 1

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$
\begin{aligned}
\dot{x_1}(t) &= \alpha x_2^2(t) - \beta x_1(t) + u(t) \\
\dot{x_2}(t) &= 3x_1(t) \\
\dot{x_3}(t) &= -5x_1(t) \\
y(t) &= x_2(t) + x_3(t)
\end{aligned}
$$

dove $\alpha$ e $\beta$ e sono costanti reali diverse da zero.

1. Classificare il sistema

- a tempo continuo, tempo invariante
- terzo ordine
- SISO
- Non lineare ($\alpha x_2^2(t)$)
- strettamente proprio

2. Determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u}$. È possibile trovare degli equilibri per un qualsiasi valore di $\bar{u}$?

In equilibrio $\dot{x} = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} 0 = \alpha \bar{x}_2^2 - \beta \bar{x}_1 + \bar{u} \\ 0 = 3\bar{x}_1 \\ 0 = -5\bar{x}_1 \end{cases}$

$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \pm\sqrt{-\frac{\bar{u}}{\alpha}}$, $\bar{x}_3 \in \mathbb{R}e$

gli equilibri esistono se $\boxed{-\frac{\bar{u}}{\alpha} \geq 0}$ $\quad \alpha < 0 \Rightarrow \bar{u} > 0$ $\quad \alpha > 0 \Rightarrow \bar{u} < 0$

se $\bar{u} = 0$, c'é un solo punto di equilibrio

$\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$, $\bar{y} = 0$

altrimenti, ce ne sono due.

3. Determinare le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 0$.

Matrici Jacobiane: $A = \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\beta & 2\alpha\bar{x}_2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $B = \frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Sistema linearizzato attorno a $\bar{u}=0$: $\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \\ \dot{\tilde{x}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tilde{u}$; $\tilde{y} = [0 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$

4. Studiare la stabilità del sistema linearizzato trovato al punto precedente al variare dei parametri $\alpha$ e $\beta$. Se possibile, determinare la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

A è triangolare inferiore, autovalori:

$\left.\lambda_1 = -\beta;\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 0\right\}$ due autovalori in zero.

- Sistema linearizzato instabile se $\beta < 0$.
- Per $\beta > 0$, ci sono due autovalori in 0, e uno A. stabile.

$A - \lambda I = A = \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, rank$(A - \lambda I) = 1$, null $= 2$.

multiplicità algebrica e geometrica di $\lambda = 0$, sono uguali, sistema semplicemente stabile.

- Per $\beta = 0$, tre autovalori in zero, ma:

rank$(A) = 1$, null $= 2$, mult. geometrica inferiore a quella algebrica, allora sistema instabile.

- Non si può concludere sul sistema non lineare perché ci sono poli nell'origine.

## ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -\alpha x_2(k) + u_1(k) - u_2(k) \\ x_2(k+1) = -\alpha x_1(k) + u_2(k) \\ y_1(k) = x_1(k) + u_1(k) \\ y_2(k) = x_2(k) + u_2(k) \end{cases}$$

1. Scrivere in forma matriciale e classificare il sistema.

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$Y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- sistema lineare, secondo ordine, MIMO, proprio
- tempo invariante

2. Studiare la stabilità del sistema al variare del parametro $\alpha$.

$$\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \alpha^2 = \emptyset$$

$$\lambda_{1,2} = \pm|\alpha|$$

Il sistema é: A. stabile se $|\alpha| < 1$

- semp. stabile se $|\alpha| = 1$
- Instabile se $|\alpha| > \emptyset$

3. Posto $\alpha = 0.5$ determinare i modi del sistema.

per $\alpha = \emptyset,5$, gli autovaloni di A sono

$\lambda_{1,2} = \pm 0,5$, allora i modi sono

$$m_1 = (0,5)^k$$

$$m_2 = (-0,5)^k$$

4. Fissato $\alpha = 0.5$, determinare gli stati di equilibrio per un ingresso costante $u_1(k) = \bar{u}_1$ e $u_2(k) = 0$.

in equilibrio $x(k+1) = x(k) = \bar{x}$

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -0{,}5\,\bar{x}_2 + \bar{u}_1 \\ \bar{x}_2 &= -0{,}5\,\bar{x}_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{x}_1 &= 1{,}3\hat{3}\,\bar{u}_1 \\ \bar{x}_2 &= -0{,}\hat{6}\,\bar{u}_1 \end{aligned}$$

$$\bar{y}_1 = \bar{x}_1 + \bar{u}_1 = 2{,}\hat{3}\,\bar{u}_1$$

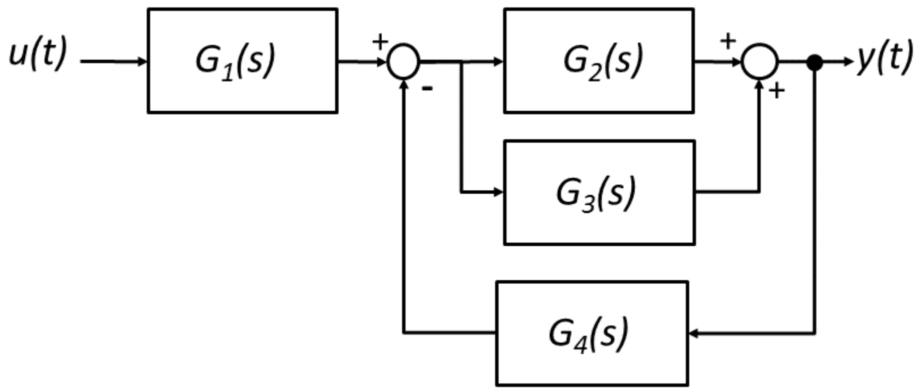
$$\bar{y}_2 = \bar{x}_2 + \bar{u}_2 = -0{,}\hat{6}\,\bar{u}_1$$

5. Fissato $\alpha = 0.5$, calcolare i primi 5 campioni del movimento dello stato e dell'uscita per $u_1(k) = 0, u_2(k) = 0, \forall k \geq 0$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

| $k$ | $x_1(k)$ | $x_2(k)$ | $x_1(k+1)$ | $x_2(k+1)$ | $y_1(k)$ | $y_2(k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | -0,5 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | -0,5 | +0,25 | 0 | 0 | -0,5 |
| 3 | 0,25 | 0 | 0 | -0,125 | 0,25 | 0 |
| 4 | 0 | -0,125 | 0,0625 | 0 | 0 | -0,125 |
| 5 | 0,0625 | 0 | 0 | 0,03125 | 0,0625 | 0 |

## ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema:




1. Determinare la funzione di trasferimento equivalente $G_E(s)$ da $U(s)$ a $Y(s)$.

$$Y(s) = \underbrace{\left[ \frac{G_2 + G_3}{1 + (G_2 + G_3) \cdot G_4} \cdot G_1 \right]}_{G_E} \cdot U(s)$$

2. Posto $G_1(s) = 100/(s + 100)$, $G_2(s) = k/(s + 2)$, $G_3(s) = 5/(s + 2)$ e $G_4(s) = 1$, valutare la funzione di trasferimento e determinare i valori del parametro $k$ per i quali la $G_E(s)$ è asintoticamente stabile.

$$G_E(s) = \frac{100}{s+100} \cdot \frac{\frac{K+5}{s+2}}{1 + \frac{K+5}{s+2}} = \frac{100\,(K+5)}{(s+100)(s+7+K)}$$

$$\left.\begin{matrix} p_1 = -100 \\ p_2 = -7-K \end{matrix}\right\} \text{Sistema As. stabile se } -7-K < 0 \quad \boxed{K > -7}$$

3. È possibile trarre conclusioni sulla stabilità del sistema complessivo analizzando solo la funzione di trasferimento $G_E(s)$ appena ricavata? Giustificare.

Non è possibile, c'è un polo nascosto in $s=-2$. Il ordine di $G_E(s)$ è due, mentre l'insieme $\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ è di ordine 3.

4. Posto $k = 5$, per un ingresso $u(t)$ tipo scalino determinare la trasformata di Laplace dell'uscita $Y(s)$ e i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$ . Tracciare *qualitativamente* l'andamento dell'uscita. È possibile fare una approssimazione a poli dominanti? Giustificare la risposta.

Per $k=5$, $G_E(s) = \dfrac{1000}{(s+100)(s+12)}$

$$Y(s) = G_E(s) \cdot U(s)$$

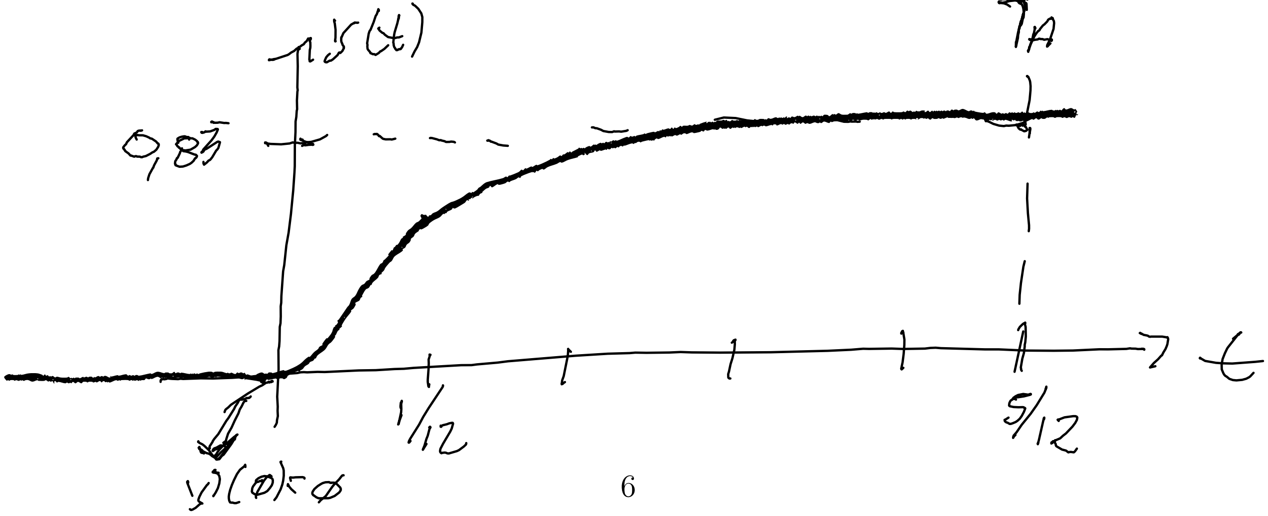
$$\boxed{Y(s) = \frac{1000}{(s+100)(s+12)\cdot s}}$$

TVI, TVF

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} s\cdot Y(s) = 0, \quad y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 0{,}8\bar{3}$$

TVI

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2 Y(s) = 0$$

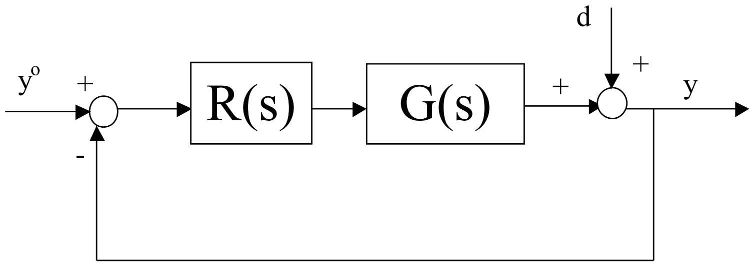


## ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{3}{(s+1)(0.2s+1)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti e il sistema di controllo in figura:



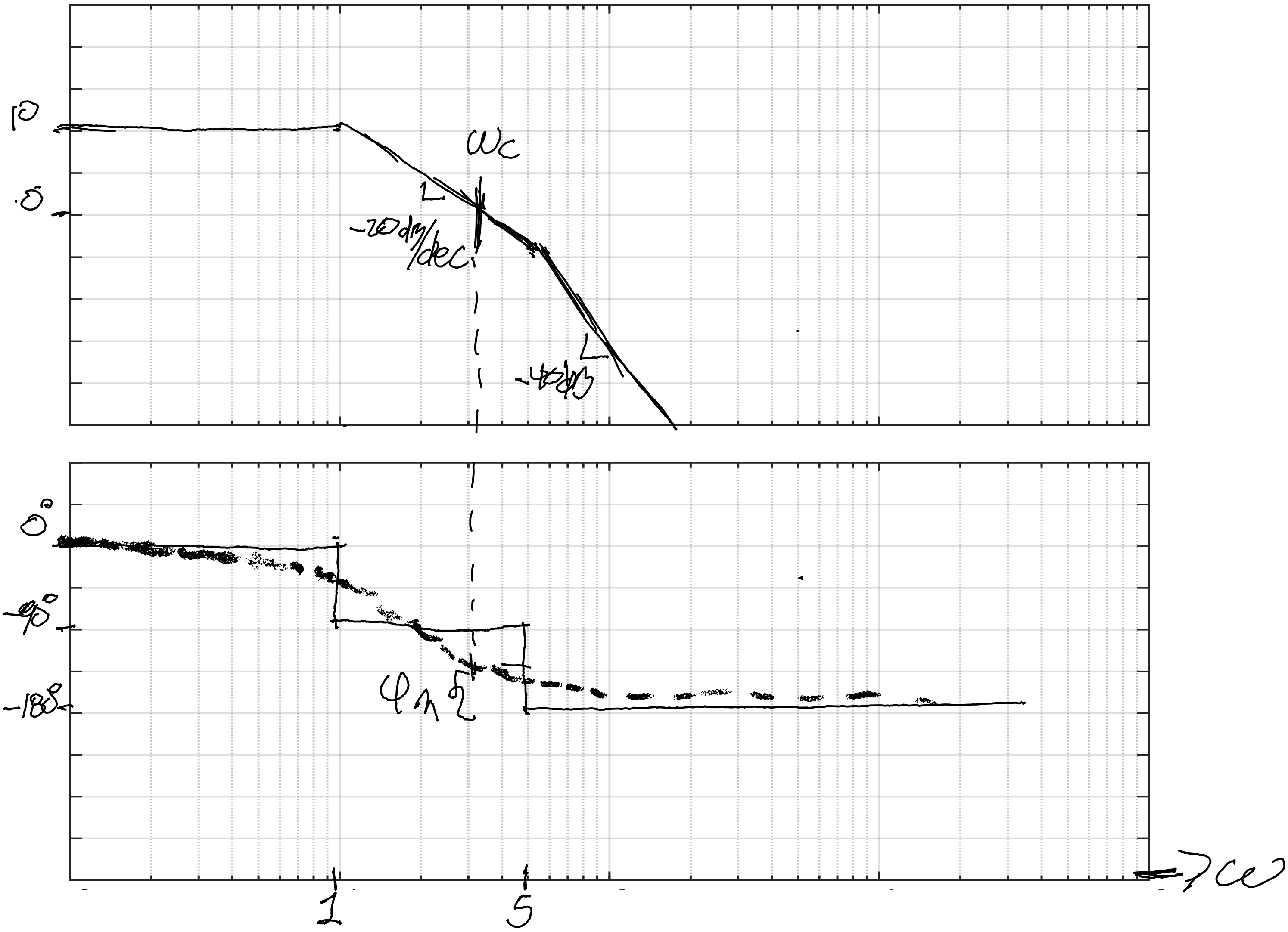

1. Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

poli $\{-1, -5\}$, zeri non ci sono, sistema A. stabile

$\mu = 3$

2. Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.

$M_{dB} = 20 \cdot \log_{10}(3) = 9{,}542\ldots\ dB \cong 10\,dB$




3. Per un regolatore $R_1(s) = 1$, determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato e trovare in maniera approssimata i margini di fase e di guadagno.

$\mu > 0$, sistema non ha poli a parte reale positiva allora:

per il teorema della piccola fase il sistema retroazionato è As. Stabile.

dalla risposta in frequenza:

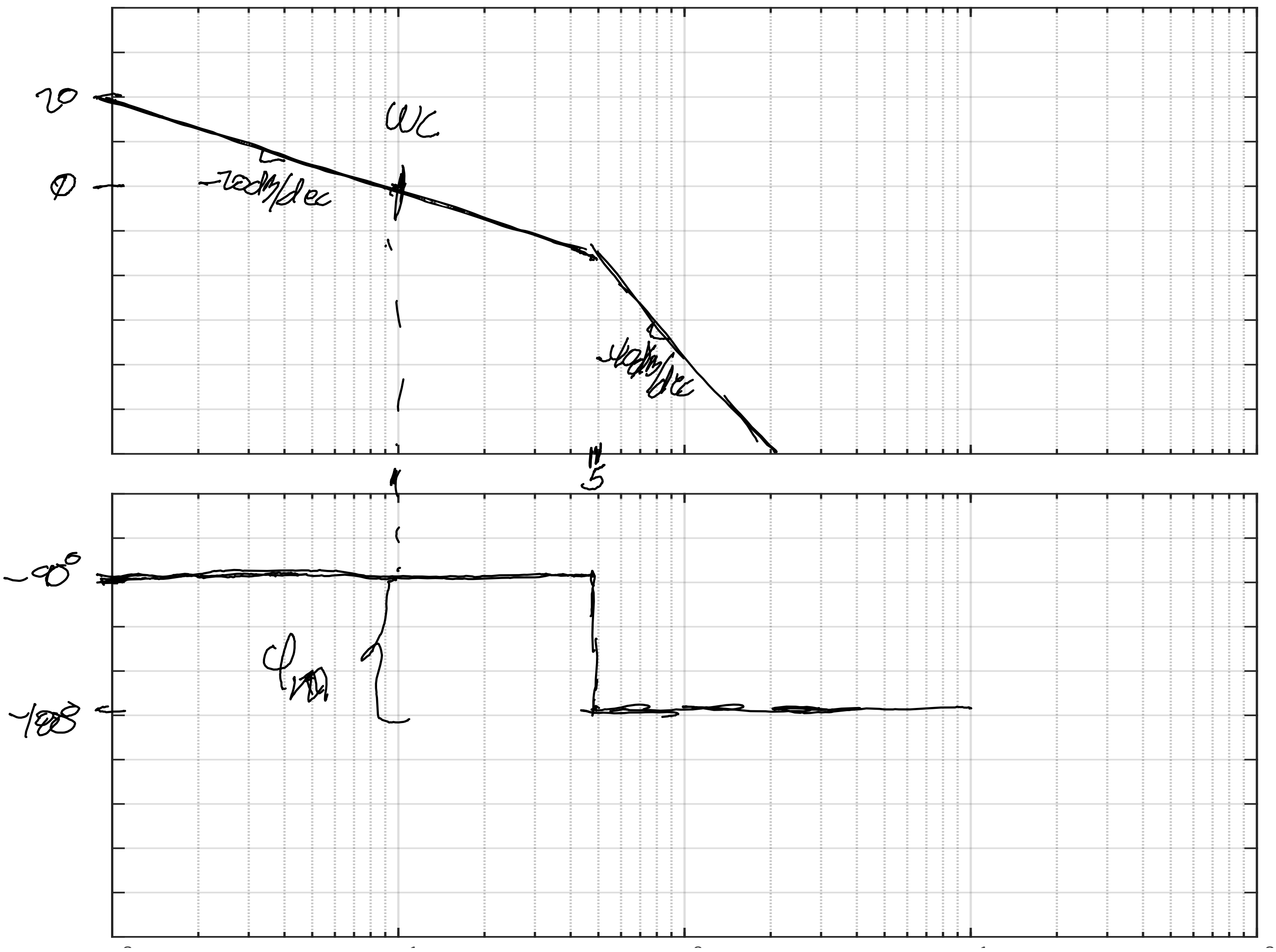
$\omega_\pi$ non definita allora $K_m = +\infty$

$\omega_c \cong 3$ rad/sec $\Rightarrow$ $\varphi_m \cong 45°$

4. Per un regolatore

$$R_2(s) = \frac{1}{3}\frac{s+1}{s},$$

determinare le proprietà di stabilità del sistema retroazionato e trovare in maniera approssimata i margini di fase e di guadagno.




$$L(s) = \frac{1}{\cancel{3}}\frac{\cancel{(s+1)}}{s}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{(s+1)}(0{,}25s+1)} = \frac{1}{s(0{,}25s+1)}.$$

$\mu_g = 1$, poli $\{p_1 = 0,\ p_2 = -5\}$

- $\mu_g > 0$, sistema semp. stabile.

- Teorema piccola fase: sistema retroazionato As. stabile.

$K_m = +\infty$ , $\varphi_m \cong 90°$

5. Considerando i due regolatori analizzati in precedenza, discutere quale dei due sistemi di controllo garantisce un minore errore a regime $|e_\infty|$ a fronte di:

   a) Un ingresso di riferimento tipo scalino $y^0(t) = sca(t)$.

sistema 1: tipo 0, $e_\infty = \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{4}$

sistema 2, tipo 1. $e_\infty = 0$.

$\boxed{e_\infty^2 < e_\infty^1}$

   b) Un ingresso di disturbo $d(t) = sin(0.1t)$. $\omega = 0{,}1\ \text{rad}/\text{sec} << \omega_c = 1\ \text{rad/s}$

$E(s) = -S(s) \cdot D(s)$

$S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$,

$|S(j\omega)| \simeq \frac{1}{|L(j\omega)|}$ per $\omega << \omega_c$

$|e_\infty| \cong \frac{1}{|L(0{,}1j)|}$

sistema 1 $|e_\infty| \cong \frac{1}{3}$

sistema 2 $|e_\infty| \cong \frac{1}{10}$

$|e_\infty^2| < |e_\infty^1|$