Politecnico di Milano **Anno Accademico 2020-21**

Cognome:	Nome:	Matricola:	Punti:

Analisi Matematica 2, Ing. Informatica e Telecomunicazioni
Esame del 16 febbraio 2021

Durata: 90 minuti

Pagina 1: Esercizio 1 - Tempo consigliato: 20 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Sia $f(x)$ la funzione 2π-periodica, dispari, definita su $[0, \pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x & x \in (0, \pi] \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

e sia $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ la sua serie di Fourier.

(1) **(2 punti)** Tale serie:

- ☐ converge puntualmente alla funzione f in ogni $x \in \mathbb{R}$
- ☐ converge puntualmente per ogni $x \in \mathbb{R}$
- ☐ converge totalmente in tutto $\mathbb{R}$
- ☐ converge totalmente a f in $[-1, 1]$
- ☐ converge in media quadratica ad f nell'intervallo $[-\pi, \pi]$

(2) **(3 punti)** Calcolando i coefficienti di Fourier di f si ottiene

- ☐ $b_n = \frac{1}{n}$ per ogni $n \geq 1$
- ☐ $a_0 = 0$
- ☐ $a_n = 0$ per ogni $n \geq 1$
- ☐ $b_1 = 2$
- ☐ $a_n = \frac{2}{n}$ per ogni $n \geq 1$

(2) **(3 punti)** Scritta la serie di Fourier per f, possiamo dedurre che

- ☐ dall'identità di Parseval discende $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$
- ☐ calcolando la serie di Fourier di f in $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} = \frac{\pi}{2}$
- ☐ dall'identità di Parseval discende $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
- ☐ calcolando la serie di Fourier di f in $x = \frac{\pi}{2}$ otteniamo $\displaystyle 2\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}$
- ☐ calcolando la serie di Fourier di f in $x = 0$ otteniamo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

Pagina 2: Esercizio 2. Tempo consigliato: 25 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Viene assegnata la funzione $f(x,y) = x^3 - 2xy + y^2$. Tale funzione, considerata nel suo insieme di definizione,

(1) **(2 punti)** Si ha

- ☐ possiede esattamente due punti critici liberi
- ☐ possiede un punto critico libero di tipo sella
- ☐ possiede un minimo relativo
- ☐ possiede esattamente un solo punto critico libero
- ☐ possiede un massimo relativo

(2) **(3 punti)** Per quanto riguarda i valori di massimo e di minimo assoluto di f nel quadrato $Q = [-1,1] \times [-1,1]$, assunti per il teorema di Weierstrass,

- ☐ uno di essi è assunto su ∂Q, l'altro nell'interno di Q
- ☐ il minimo assoluto è strettamente negativo
- ☐ il minimo assoluto è 0
- ☐ essi vengono assunti entrambi su ∂Q
- ☐ il massimo assoluto è strettamente positivo

(3) **(2 punti)** Sia D la regione limitata di piano compresa tra la parabola di equazione $y = x^2$ e la retta orizzontale $y = 1$.

Si ha $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy =$

- ☐ $\dfrac{3}{5}$
- ☐ $\dfrac{4}{7}$
- ☐ $\dfrac{13}{21}$
- ☐ $\displaystyle\int_{x^2}^{1} \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int \left(\int_{x^2}^{1} f(x,y)\,dy \right) dx$

Pagina 3: Esercizio 3. Tempo consigliato: 20 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Si consideri l'equazione differenziale omogenea $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0$.

(1) **(2 punti)** Quali affermazioni sono corrette?

- ☐ L'integrale generale di tale equazione è generato dalle funzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$
- ☐ L'integrale generale di tale equazione è generato dalle funzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $y_2(x) = x\mathrm{e}^x$
- ☐ L'origine è una sella per il sistema differenziale autonomo equivalente
- ☐ L'integrale generale di tale equazione è generato dalle funzioni $y_1(x) = \mathrm{e}^x \cos x$, $y_2(x) = \mathrm{e}^x \sin x$
- ☐ L'origine è un nodo a due tangenti per il sistema differenziale autonomo equivalente

(2) **(2 punti)** Si consideri ora l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x^2.$$

Si ha:

- ☐ $y(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ è una soluzione particolare di tale equazione
- ☐ le soluzioni di tale equazione costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione 2
- ☐ $y(x) = x^2 + x$ è una soluzione particolare di tale equazione
- ☐ ciascuna soluzione di tale equazione è somma di una soluzione particolare e di un elemento di uno spazio vettoriale di dimensione 2
- ☐ $y(x) = x^3 + x^2 - 1$ è una soluzione particolare di tale equazione

(3) **(3 punti)** Si consideri infine il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = x^2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

e si denoti con Y la sua soluzione. Si ha:

- ☐ $Y'(-\pi) = 0$
- ☐ $Y'(\pi) > 0$
- ☐ $Y(\pi) = \pi^2$
- ☐ $Y''(0) < 0$
- ☐ $Y(-\pi) = \dfrac{\pi^2 + 1 - \mathrm{e}^{-\pi}}{2} - \pi$

Pagina 4: Domande di teoria. Tempo consigliato: 15 minuti

Le domande 1 e 2 ammettono una o più risposte corrette.

Domanda 1 (3 punti)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ una serie di potenze reale. Si ha:

- ☐ detto $R > 0$ il raggio di convergenza di tale serie, la somma della serie è ben definita e derivabile termine a termine in $(x_0 - R, x_0 + R)$
- ☐ detto $R > 0$ il raggio di convergenza di tale serie, la serie converge totalmente in $[x_0 - R, x_0 + R]$
- ☐ detto $R > 0$ il raggio di convergenza di tale serie, per ogni $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ la somma della serie è ben definita e integrabile termine a termine in $[a, b]$
- ☐ esiste sempre un unico raggio di convergenza $R \in [0, +\infty]$ (ovvero $R \geq 0$, eventualmente $R = +\infty$) per tale serie
- ☐ se $\lim_{n\to+\infty} a_n = R$, allora R è il raggio di convergenza di tale serie

Domanda 2 (3 punti)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $\underline{x} \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Si ha:

- ☐ se f è differenziabile in $\underline{x}$, allora in direzione ortogonale a $\nabla f(\underline{x})$ le derivate direzionali di f sono nulle
- ☐ se f è differenziabile in $\underline{x}$, allora f è continua in $\underline{x}$
- ☐ se f è di classe C^1 in A, allora f ammette derivate direzionali in ogni direzione in $\underline{x}$
- ☐ se f ammette derivate direzionali in ogni direzione in $\underline{x}$, allora f è differenziabile in $\underline{x}$
- ☐ se f è derivabile in $\underline{x}$ e $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0}$, allora f è continua in $\underline{x}$

La domanda 3 ammette una e una sola risposta corretta.

Domanda 3 (1 punto)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Allora:

- ☐ se $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < +\infty$, la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente ad f in $[0, 2\pi]$
- ☐ se la serie di Fourier di f converge in media quadratica ad f su $[0, 2\pi]$, allora converge totalmente ad f su $[0, 2\pi]$
- ☐ se $a_n \sim 1/n^{3/2}$ e $b_n \sim 1/n^{3/2}$ per $n \to +\infty$, allora la serie di Fourier associata ad f converge totalmente in $[0, 2\pi]$
- ☐ se $f(x) = x^2$ per $x \in [0, \pi]$, allora $b_n = 0$ per ogni n

Pagina 5: Domande di teoria. Tempo consigliato: 10 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una e una sola risposta corretta.

Domanda 4 (1 punto)

Si consideri il sistema differenziale in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si ha:

- ☐ se $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$, le soluzioni del sistema sono periodiche
- ☐ esiste un valore delle costanti a, b, c, d tale che $x(t) = \cos(t), y(t) = e^t$ è soluzione.
- ☐ se gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sono entrambi reali, le soluzioni del sistema sono periodiche
- ☐ tutte le soluzioni di tale sistema sono definite per ogni $t \in \mathbb{R}$

Domanda 5 (1 punto)

Sia $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti e sia $\psi : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una sua riparametrizzazione. Allora:

- ☐ φ e ψ hanno necessariamente lo stesso verso di percorrenza
- ☐ φ e ψ hanno necessariamente la stessa lunghezza
- ☐ φ e ψ hanno, punto per punto, vettori tangenti aventi uguale norma
- ☐ il sostegno di φ non coincide necessariamente con il sostegno di ψ

Domanda 6 (1 punto)

Il teorema di Fermat afferma che, per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ovunque derivabile,

- ☐ se $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$, allora (x_0, y_0) è punto di estremo relativo per f
- ☐ se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di estremo relativo per f, allora $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$
- ☐ se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di estremo relativo per f, allora l'Hessiana $H_f(x_0, y_0)$ ha determinante non nullo
- ☐ se $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è punto di minimo relativo per f, l'Hessiana $H_f(x_0, y_0)$ possiede autovalori tutti strettamente positivi