Durata della prova: 1h 30'

# Esame di Logica e Algebra

**Politecnico di Milano – Ingegneria Informatica – Appello telematico 6 Luglio 2020**

**Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti in bella copia su fogli e poi scannerizzati con lo stesso ordine di svolgimento dell'esame. Il primo foglio deve contenere nome cognome e matricola, mentre tutti i fogli devono essere numerati. Il numero massimo di fogli ammessi è di 7 pagine. Il file da caricare deve essere in formato pdf e quando lo salvate sul vostro OneDrive va rinominato come "vostro-codice-persona.pdf".**

1. Si considerino le seguenti proposizioni:

   (a) se Anna è una pittrice, allora Giorgio è uno scrittore oppure Silvia è una insegnante;

   (b) se Giorgio è uno scrittore, allora Lucia non fa la commessa oppure Silvia è una insegnante;

   (c) se Lucia fa la commessa, allora Anna è una pittrice;

   (d) Lucia fa la commessa;

   (e) Silvia è una insegnante.

   Si mostri sia per via semantica che utilizzando la teoria della risoluzione, che e) è deducibile da a), b), c), d).

   **Soluzione:** Consideriamo le seguenti lettere predicative:

   - $A$ interpreta "Anna è una pittrice";
   - $S$ interpreta "Silvia è un' insegnante";
   - $G$ interpreta "Giorgio è uno scrittore";
   - $L$ interpreta "Lucia fa la commessa".

   A questo punto le precedente frasi possono essere riscritte in logica proposizionale nel seguente modo:

   a) $A \Rightarrow (G \vee S)$;

   b) $G \Rightarrow (\neg L \vee S)$;

   c) $L \Rightarrow A$

   d) $L$;

   e) $S$;

   Dobbiamo verificare sia usando la risoluzione che per via semantica che $a), b), c), d) \models e)$.
   Mediante la risoluzione, per il teorema di correttezza e completezza per refutazione dobbiamo verificare che

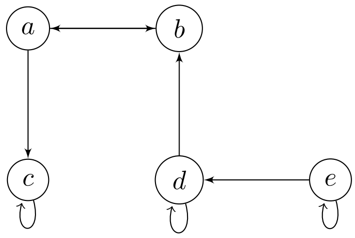
   $$\{a), b), c), d), \neg e)\}^c \vdash_R \square$$

   Per ricavare le clausole, trasformiamo trasformiamo in forma a clausole le precedenti formule, ricordandoci di negare la e), ottenendo da a) la clausola $\{\neg A, G, S\}$, da b) $\{\neg G, \neg L, S\}$, da c), $\{\neg L, A\}$, da d) $\{L\}$ e da $\neg e)$ la clausola $\{\neg S\}$. Un possibile modo per ottenere la clausola vuota è dato dalla seguente derivazione per risoluzione:

$$\begin{tikzcd}
\{\neg A, G, S\} \arrow[d] & \{\neg G, \neg L, S\} \arrow[d] & \{\neg S\} \arrow[dll] \arrow[dl] & \{L\} \arrow[dr] \arrow[ddll] & \{\neg L, A\} \arrow[d] \\
\{\neg A, G\} \arrow[dd] & \{\neg G, \neg L\} \arrow[d] & & & \{A\} \arrow[dddlll] \\
& \{\neg G\} \arrow[dl] & & & \\
\{\neg A\} \arrow[dr] & & & & \\
& \square & & &
\end{tikzcd}$$

   Usando invece la semantica, dobbiamo mostrare che ogni modello di $a), b), c), d)$ è anche modello di $e)$, si può fare la solita tabella, oppure si ragiona per assurdo. Infatti, supponiamo che questo non sia vero e che esista un modello $v$ di $a), b), c), d)$ che non lo sia per $e)$, cioè $v(S) = 0$. Dato che è modello di $d), c)$ abbiamo anche che $v(L) = 1$ e $v(\neg L \vee A) = 1$, da cui deduciamo che necessariamente $v(A) = 1$. Dato che è modello di $a)$ abbiamo $v(A \Rightarrow (G \vee S)) = 1$ e quindi necessariamente $v(G) = 1$, e quindi poichè $v(G \Rightarrow (\neg L \vee S)) = 1$, deduciamo che $v(\neg L) = 1$, da cui l'assurdo $v(L) = 0$.

2. Sia $R \subseteq X \times X$, con $X = \{a, b, c, d, e\}$ la relazione descritta dal seguente grafo d'incidenza:



**Notare la doppia freccia tra $a$ e $b$**

(a) Costruire la chiusura $\overline{T}$ d'equivalenza di $T = R \setminus \{(d, b)\}$ e calcolarne il quoziente $X/\overline{T}$.

(b) Disegnare il grafo d'incidenza di $R^2$. Quali proprietà soddisfa?

(c) Dire se può esistere la chiusura d'ordine di $R^2$, ed eventualmente disegnare il suo diagramma di Hasse e trovare i il massimo. minimo, massimali e minimali.

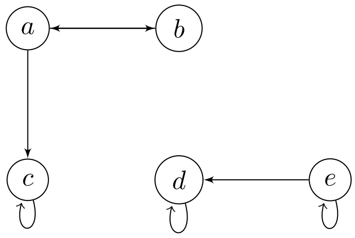
(d) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\mathcal{F} = \exists x \forall y \, (A(x, y) \Rightarrow \exists z (A(y, z) \wedge A(z, y)))$$

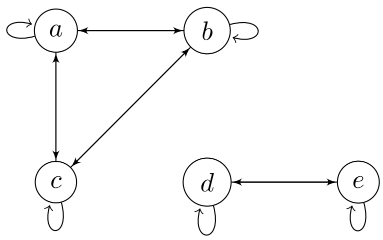
Si stabilisca se $\mathcal{F}$ è vera, falsa o soddisfacibile ma non vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme $X$ e in cui la lettera predicativa $A(x, y)$ è interpretata dalla relazione $R$ su $X$. $\mathcal{F}$ è logicamente valida?

**Soluzione:**

a) Il grafo di adiacenza di $T$ è il seguente:

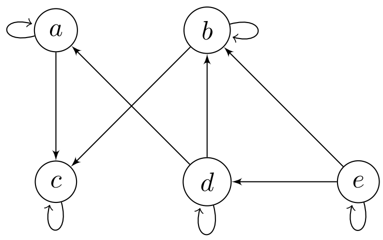


La chiusura d'equivalenza $\overline{T}$ si ottiene aggiungendo tutte le possibili frecce nelle componenti connesse, quindi:



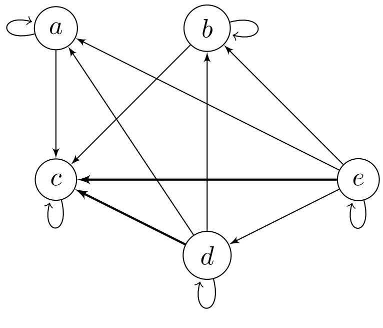
Quindi il quoziente $X/\overline{T} = \{\{a, b, c\}, \{d, e\}\}$.

b) Il grafo di incidenza di $R^2$ è il seguente:

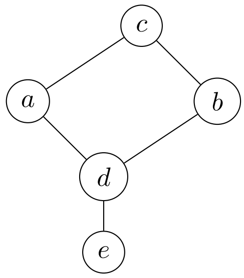


La relazione $R^2$ è sia riflessiva che antisimmetrica e seriale.

c) Dato che $R^2$ è sia riflessiva che antisimetrica, potrebbe esistere la chiusura d'ordine. Per verificarlo chiudiamola transitivamente (è già riflessiva), il grafo d'incidenza della sua chiusura transitiva è il seguente:



che è ancora antissimetrica, dunque esiste la chiusura d'ordine e il suo diagramma di Hasse è il seguente:




Chiaramente $c$ è sia massimo che massimale, mentre $e$ è sia minimo che minimale.

d) La formula è chiusa, quindi nell'interpretazione data può essere solo o vera o falsa. In questo caso è vera, infatti prendendo $x = b$, allora l'unico elemento $y$ tale che $(b, y) \in R$ è $y = a$, ed in questo caso il coseguente è vero prendendo $z = b$, infatti in questo caso è vero che $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$. La formula non è logicamente valida, infatti basta interpretare $A(x, y)$ mediante la relazione su due elementi $\{a, b\}$ definita da $H = \{(a, b)\}$.

3. Sia $G$ il gruppo delle matrici invertibili di ordine 2 a coefficienti in $\mathbb{Z}_5$ (gruppo rispetto al prodotto righe per colonne), e si consideri il suo sottoinsieme

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_5,\ ac = [1]_5 \right\}$$

a) Si mostri che $H$ è un sottogruppo di $G$;

b) Si calcoli la cardinalità di $H$ e si stabilisca se $H$ può contenere sottogruppi di cardinalità 3;

c) Si considerino la seguente formula della logica del primo ordine:

$$\forall x \forall y\, (\, E(y, h(x)) \Leftrightarrow (\, E(f(x,y), b) \wedge E(f(y,x), b) \wedge E(\, h(f(x,y)), f(h(y), h(x))\,)\,)\,)$$

e un'interpretazione avente come dominio l'insieme $H$ e in cui la lettera predicativa $E$ è interpretata dalla relazione di uguaglianza e la lettera funzionale $f$ dall'operazione interna dell sottogruppo $H$ vista nei punti precedenti. Si stabilisca come si possono interpretare la lettera funzionale $h$ e la costante $b$ affinché la formula assegnata risulti vera nell'interpretazione considerata.

**Soluzione:**

a) Usiamo il criterio per i sottogruppi: mostriamo che per ogni $g, h \in H$, $gh^{-1} \in H$. Per trovare l'inverso del generico elemento $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in H$ o impostiamo l'equazione

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppure ci ricordiamo che $\mathbb{Z}_5$ è un campo e l'inversa di una matrice $2 \times 2$ si calcola come

$$det(h)^{-1} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = [ac]_5^{-1} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

dato che $[ac]_5 = [1]_5$. Quindi:

$$gh^{-1} = \begin{pmatrix} d & f \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cd & af - bd \\ 0 & ae \end{pmatrix}$$

dato che $g \in H$ abbiamo $[de]_5 = 1$, quindi $[cd]_5 \cdot [ae]_5 = [ca]_5 \cdot [de]_e = [1]_5 \cdot [1]_5 = [1]_5$, da cui $\begin{pmatrix} cd & af - bd \\ 0 & ae \end{pmatrix} \in H$.

b) Dobbiamo calcolare i possibili valori di $a, c$ tale che $[a]_5 \cdot [c]_5 = [1]_5$ cioè:

- $a = c = [1]_5$;
- $a = [2]_5, c = [3]_5$;
- $a = [3]_5, c = [2]_5$;
- $a = [4]_5, c = [4]_5$.

cioè 4 possibili valori, il parametro $b$ invece può assumere tutti i valori di $\mathbb{Z}_5$, cioè 5, quindi la cardinalità di $|H| = 5 \cdot 4 = 20$. Ora per il Teorema di Lagrange sappiamo che la cardinalità di ogni sottogruppo $S$ di $H$ deve dividere la cardinalità di $G$. Quindi, poiché la cardinalità di $H$ è 20, e 3 non divide 20, possiamo concludere che non possono esistere sottogruppi $S$ di $H$ di cardinalità 3.

d) La formula precedente si traduce nell'interpretazione data come:

$$\forall x \forall y\ y = h(x) \ \Leftrightarrow\ (xy = b \ \wedge\ yx = b \ \wedge\ h(xy) = h(y)h(x))$$

se prendiamo $b = I$ come l'unità del gruppo $H$, e $h(x) = x^{-1}$ cioè la funzione che considera l'inverso allora la formula precedente è vera perchè dice che $y = x^{-1}$ se solo se $yx = I$, $yx = I$ e $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.