Durata della prova: 1h 30'

Esame di Logica e Algebra

Politecnico di Milano – Ingegneria Informatica – 13 Febbraio 2020

Voto Lab. precedente & docente:	**Cognome:**	**Nome:**	**Matricola:**

Tutte le risposte devono essere motivate. Gli esercizi vanno svolti su questi fogli, nello spazio sotto il testo e sul retro. I fogli di brutta non devono essere consegnati. I compiti privi di indicazione leggibile di nome e cognome non verranno corretti.

1. Si vuole vedere se la diagnostica di un server sia avviata o meno sapendo che sussistono le seguenti regole:

   (a) La diagnostica è avviata se accade che non riceva un segnale e sia occupato, oppure nel caso in cui non sia occupato.

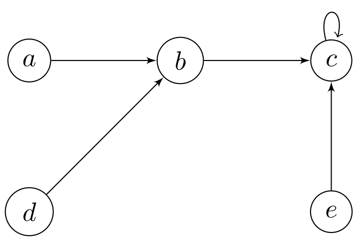
   (b) Se la diagnostica non è avviata allora vuol dire che il segnale non è arrivato e che il server non è occupato.

   Dopo aver formalizzato il problema nella logica proposizionale, mostrare sia per via **semantica** che con la **risoluzione** che la diagnostica è sempre avviata.

   Soluzioni:

   (a) Indichiamo con S la lettera enunciativa che indica che il segnale è stato ricevuto, O che il server è occupato, e D che la diagnostica è stata avviata. Allora la prima frase si traduce in $((\neg S \wedge O) \vee \neg O) \Rightarrow D$ che è equivalente a $(\neg S \vee \neg O) \Rightarrow D$. Mentre la seconda formula è $\neg D \Rightarrow (\neg S \wedge \neg O)$. Dobbiamo mostrare sia per via semantica che con la risoluzione che $\{(\neg S \vee \neg O) \Rightarrow D, \neg D \Rightarrow (\neg S \wedge \neg O)\} \models D$. Mediante la tabella di verità è semplice calcolare i modelli di $\{(\neg S \vee \neg O) \Rightarrow D, \neg D \Rightarrow (\neg S \wedge \neg O)\}$ e si verifica che tutti questi modelli v_i soddisfano $v_i(D) = 1$, e quindi l'implicazione semantica vale. Mediante la risoluzione dobbiamo mostrare che l'insieme $\{(\neg S \vee \neg O) \Rightarrow D, \neg D \Rightarrow (\neg S \wedge \neg O), \neg D\}$ è insoddisfacibile. Per il teorema di correttezza e completezza per refutazione questo equivale a mostrare $\{(\neg S \vee \neg O) \Rightarrow D, \neg D \Rightarrow (\neg S \wedge \neg O), \neg D\}^c \vdash \square$. Le clausole sono quindi $\{\neg D\}, \{D, O\}, \{S, D\}, \{D, \neg S\}, \{D, \neg O\}$. La risolvente tra $\{S, D\}, \{D, \neg S\}$ è $\{D\}$ che con $\{\neg D\}$ otteniamo la clausola vuota $\square$.

2. Sia $R \subseteq X \times X$, con $X = \{a, b, c, d, e\}$ la relazione descritta dal seguente grafo d'incidenza:



(a) R è una funzione? In caso costruire la relazione $Ker\, R$ e l'insieme quoziente $X/_{Ker\, R}$;

(b) Dire se può esistere la chiusura d'ordine di R, ed eventualmente disegnare il suo diagramma di Hasse. Calcolare (se esistono) $Sup\{a, e\}$ e $Inf\{a, e\}$.

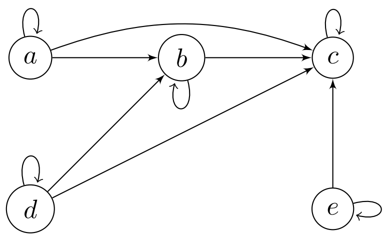
(c) Verificare se la seguente formula
$$\mathcal{H} = \exists x \forall y (B(y, x) \Rightarrow \exists z B(z, y))$$
è vera, falsa, o soddisfacibile ma non vera quando $B(x, y)$ è interpretata dalla relazione R;

(d) Si consideri la seguente formula della logica del primo ordine:
$$\mathcal{F} = \forall x \forall y \left(A(x, y) \Leftrightarrow \exists z (B(y, z) \wedge B(z, x))\right)$$
dove $B(y, z)$ è interpretata dalla relazione precedente R, mentre $A(x, y)$ da una nuova relazione binaria T su X. Disegnare il grafo d'incidenza di T in modo che la precedente formula risulti vera. $\mathcal{F}$ è logicamente valida?

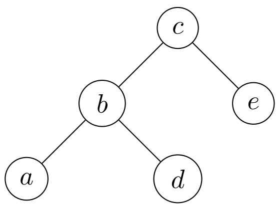
Soluzione:

(a) Sì, infatti R è una funzione perchè per ogni $a \in X$ vi è un unico $x \in X$ t.c. $(a, x) \in R$. La relazione $KerR = I \cup \{(a, d), (d, a), (b, e), (e, b), (e, c), (c, e), (b, c), (c, b)\}$ (dove I è la relazione identica). Quindi il quoziente è $X/KerR = \{[a], [c]\}$, dove $[a] = \{a, d\}$, $[c] = \{b, e, c\}$.

(b) La relazione R è antisimmetrica, quindi potrebbe esistere la sua chiusura d'ordine. Chiudiamo transitivamente e riflessivamente:



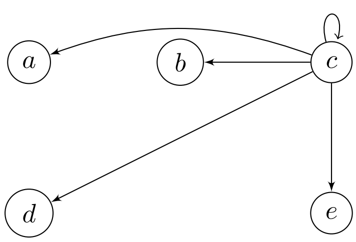
che rimane antisimmetrica, quindi è la più piccola relazione d'ordine che contiene R. Il suo diagramma di Hasse è



da cui $Sup\{a, e\} = c$, mentre $Inf\{a, e\}$ non esiste dato che l'insieme dei minoranti di $\{a, e\}$ è vuoto.

(c) La formula dice che esiste un x tale che, per ogni y, se yRx, allora deve esistere anche uno z tale che zRy. La formula è chiusa, quindi è vera o falsa. In questo caso è vera dato che per esempio prendendo $x = a$ non esiste nessun y tale che yRa quindi essendo l'antecedente $B(y, x)$ sempre falso, la formula risulta vera.

(d) La formula $\mathcal{F}$ descrive la relazione T nel seguente modo xTy se e solo se esiste uno $z \in X$ tale che yRz e zRx. Per esempio $(a, b), (b, c) \in R$ quindi $(c, a) \in T$, similmente $(b, c), (c, c) \in R$ da cui $(c, b) \in T$, quindi T è descritta dal seguente grafo d'incidenza:



La formula non è logicamente valida, basta prendere la stessa intepretazione con A interpretata da R, B interpretata dalla relazione $T \setminus \{(c, a)\}$ (dove T è descritta dal grafo d'incidenza illustrato qua sopra).

3. Si consideri il sottoinsieme $A = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, a \neq 0\}$ dotato dell'operazione:

$$(a, b) \star (c, d) = (ac, ad + bc)$$

(a) Mostrare che $(A, \star)$ è un gruppo. È un gruppo commutativo?

(b) Il sottoinsieme $H = \{(a, b) \in A, a + b = 0, a \neq 0\}$ è un sottogruppo di $(A, \star)$?

(c) Si consideri il gruppo

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} : a \neq 0 \right\}$$

rispetto all'usuale prodotto righe per colonne. Dimostrare che la funzione $h : A \to B$ definita da:

$$h(a, b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Soluzioni:

(a) L'operazione è interna infatti $(a, b)\star(c, d) = (ac, ad+bc)$ con $a, c \neq 0$ implica $ac \neq 0$. È associativa: $((a, b)\star(c, d))\star(e, f) = (ac, ad+bc)\star(e, f) = (ace, acf+(ad+bc)e) = (ace, acf+ade+bce) = (ace, a(cf+de)+bce) = (a, b)\star(ce, cf+de) = (a, b) \star ((c, d) \star (e, f))$. L'elemento neutro è $(1, 0)$ infatti $(a, b) \star (1, 0) = (1, 0) \star (a, b) = (a, b)$. Per l'inverso cerchiamo (x, y) t.c. $(a, b) \star (x, y) = (1, 0)$ cioè $ax = 1$, $ay + bx = 0$ da cui $x = 1/a$, $y = -b/a^2$ (ricordarsi $a \neq 0$). Si verifica anche che $(1/a, -b/a^2) \star (a, b) = (1, 0)$ da cui otteniamo che l'inverso di (a, b) è $(1/a, -b/a^2)$. Quindi $(G, \star)$ è un gruppo. Notate che è commutativo dato che $(a, b)\star(c, d) = (ac, ad+bc) = (ca, cb+da) = (c, d)\star(a, b)$.

(b) L'insieme H è fatto dalle coppie $(a, -a)$ con $a \neq 0$ ora è evidente che questo insieme non è chiuso per $\star$, infatti $(a, -a) \star (b, -b) = (ab, -2ab)$ che non appartiene ad H.

(c) Poichè:

$$h((a, b) \star (c, d)) = h(ac, ad + bc) = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ ad + bc & ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix} = h(a, b)h(c, d)$$

quindi h è un omomorfismo di gruppi. Per dimostrare che è un isomorfismo mostriamo che è suriettiva, infatti per ogni matrice $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ è chiaro che $h(a, b) = C$. L'inieittività è anche evidente, infatti: $h(a, b) = h(c, d)$ implica che:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & c \end{pmatrix}$$

da cui si deduce $a = c, b = d$.