Logica e Algebra

17 Febbraio 2017

Parte di Algebra

Esercizio 1 *Dato un numero naturale, indichiamo con* $\gamma(n)$ *l'esponente massimo di 2 tale che* $2^{\gamma(n)}$ *divida* n *(per esempio* $\gamma(24) = 3$ *dato che* $24 = 2^3 3$*, mentre* $\gamma(5) = 0$*). Considerare la funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *definita da:*

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2^{\gamma(n)}} & \textit{se } n \textit{ è pari} \\ 2n & \textit{se } n \textit{ è dispari} \end{cases}$$

1. *Dire se* f *ammette inversa sinistra e/o inversa destra, in caso determinarla.*
2. *Descrivere le* $Ker(f)$*-classi di equivalenza.*
3. *Sia* $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e sia* R *la relazione binaria su* X *definita da* xRy *se* $\gamma(x) \leq \gamma(y)$ *e* $x \leq y$*. La relazione* R *è d'ordine? Eventualmente trovare, se esistono* $sup\{2, 3\}$*,* $inf\{2, 3\}$*, gli elementi massimali, minimali, massimi e minimi di* X *rispetto a* R*.*

Esercizio 2 *Sia l'insieme*

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{Q}, a \neq 0 \right\}$$

dotata dell'usuale operazione di prodotto tra matrici.

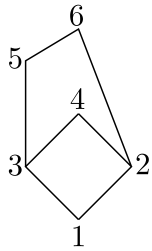
1. *Mostrare che* G *è un gruppo.*
2. *Mostrare che*
$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{Q} \right\}$$
è un sottogruppo normale di G*.*
3. *Provare che la funzione* $g : G \to \mathbb{Q}$ *definita da*
$$g\left(\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ b & a \end{bmatrix} \right) = a$$
è un omomorfismo di gruppi e che H *è la* $Ker(g)$*-classe della matrice identica.*

Esercizio 1

1. La funzione f manda gli interi pari in interi dispari e gli interi dispari in interi pari, dunque non è suriettiva, infatti nessun intero della forma 2^n con $n > 1$ ammette controimmagini in quanto essendo un intero pari dovrebbe avere una controimmagine dispari, ma non esistono interi dispari m tali che $2m = 2^n$ con $n > 1$. La funzione non è neppure iniettiva in quanto tutti gli interi di forma 2^n hanno come immagine 1. Dunque f non ammette inversa sinistra e/o destra.

2. Per ogni intero dispari n, si ha $f(n) = 2n$ e non esiste un intero $m \neq n$ per cui $f(n) = f(m)$, infatti se m fosse pari la sua immagine sarebbe dispari e se m fosse dispari sia vrebbe $2m \neq 2n$, di conseguenza la $ker(f)$ classe di un intero dispari n è costituita dal solo elemnto n. Per ogni intero pari n esiste $h = \gamma(n)$ tale che $n = 2^h d$ con d dispari e si ha $f(n) = d$ di conseguenza la $ker(f)$ classe di ogni intero pari n è costituita da tutti e soli gli interi pari della forma $m = 2^k d$ con $k \in \mathbb{N}$.

3. La relazione R gode della proprietà riflessiva in quanto per ogni $x \in X$ si ha $\gamma(x) \leq \gamma(x)$ e $x \leq x$, dunque xRx, gode anche della proprietà antisimmetrica in quanto per ogni $x, y \in X$, xRy ed yRx implicano rispettivamente $x \leq y$ e $y \leq x$ dunque $x = y$, infine R gode della proprietà transitiva in quanto per ogni $x, y, z \in X$, xRy ed yRz implicano rispettivamente $\gamma(x) \leq \gamma(y)$, $x \leq y$ e $\gamma(y) \leq \gamma(z)$, $y \leq z$ dunque $\gamma(x) \leq \gamma(z)$, $x \leq z$ ovvero xRz. R è pertanto una relazione d'ordine. Essendo $\gamma(1) = \gamma(3) = \gamma(5) = 0$, $\gamma(2) = \gamma(6) = 1$ e $\gamma(4) = 2$, il diagramma di Hasse di X rispetto ad R diventa



da cui si evince subito che 1 è minimale ed anche minimo, 4,6 sono massimali e non esiste massimo, $inf\{2,3\} = 1$ e $sup\{2,3\}$ non esiste.

Esercizio 2

1. G è un sottoinsieme dell'insieme delle matrici quadrate di ordine 2 non singolari su $\mathbb{Q}$ che sappiamo costituire il gruppo $GL_2(\mathbb{Q})$ rispetto all'usuale prodotto di matrici. Basta perciò dimostrare che G è sottogruppo di $GL_2(\mathbb{Q})$. Siano $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ d & b \end{bmatrix}$ due generici elementi di G, si ha $AB = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ cb^2 + ad & ab \end{bmatrix}$, e $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ \frac{-c}{a^3} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$. Pertanto $AB \in G$, essendo AB triangolare bassa con elemanti razionali, $ab \neq 0$ e $a^2b^2 = (ab)^2$, analogamente $A^{-1} \in G$ in quanto A^{-1} è triangolare bassa con elemanti razionali, $\frac{1}{a} \neq 0$ e $\frac{1}{a^2} = (\frac{1}{a})^2$, pertanto G è un sottogruppo di $GL_2(\mathbb{Q})$ e dunque è un gruppo.

2. H è un sottogruppo di G in quanto presi $K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \in H$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \in H$, si ha $KJ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{bmatrix}$ e $K^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{bmatrix}$ entrambi elementi di H. Rimane quindi da dimostrare che H è normale in G, ovvero che per ogni $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix} \in G$, $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix} \in H$, $A^{-1}JA$ appartiene ad H. Si ha $A^{-1}JA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{c}{a^2} & 1 \end{bmatrix}$, che appartiene ad H in quanto matrice triangolare bassa ad elementi razionali con elementi diagonali uguali ad 1,

3. L'applicazione f è un omomorfismo fra gruppi in quanti per ogni $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ d & b \end{bmatrix}$ appartenenti ad G si ha

$$f(AB) = f\left(\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ d & b \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ cb^2+ad & ab \end{bmatrix}\right) = ab$$

e $f(A)f(B) = f\left(\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix}\right) f\left(\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ d & b \end{bmatrix}\right) = ab$, cioè $f(AB) = f(A)f(B)$.

Per ogni $K \in H$ si ha $f(K) = 1 = f(I_2)$ quindi K appartiene alla $ker(f)$-classe della matrice identica I_2, quindi H è contenuto nella $ker(f)$-classe della matrice identica. Viceversa se $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ c & a \end{bmatrix}$ appartiene alla $ker(f)$-classe della matrice identica si ha $f(A) = a = f(I_2) = 1$ cioè $a = 1$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, ovvero $A \in H$, quindi la $ker(f)$-classe della matrice identica è contenuta in H. Pertanto H coincide con la $ker(f)$-classe della matrice identica. Notate che una volta dimostrato questo ultimo fatto si poteva dire che si era provato che H è un sottogruppo normale di G, in quanto è noto che dato un omomorfimo di G in G' la $ker(f)$-classe dell'elemento neutro di G è un sottogruppo normale di G.