Politecnico di Milano **Anno Accademico 2020-21**

Analisi Matematica 2, Ing. Informatica e Telecomunicazioni
Esame del 29 gennaio 2021

Durata: 90 minuti

Pagina 1: Domande di teoria - 3 punti - Tempo consigliato: 10 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una e una sola *risposta corretta.*

Domanda 1 (1 punto)

Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrizzazione di una curva regolare γ. Siano poi $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $\gamma \subset A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ continua. L'integrale curvilineo di f lungo γ è

A $\int_a^b \|\underline{r}'(t)\| \, dt$
B $\int_{\underline{r}(a)}^{\underline{r}(b)} f(\underline{r}(t)) \, dt$
C $\int_a^b f(\underline{r}(t)) \, dt$
D $\int_a^b f(\underline{r}(t)) \, \|\underline{r}'(t)\| \, dt$

Domanda 2 (1 punto)

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = t\sqrt{y^2(t) + 1} \\ y(0) = a \, . \end{cases}$$

A L'equazione ammette soluzioni costanti.
B Il teorema di esistenza e unicità locale vale se e solo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
C Il teorema di esistenza e unicità locale vale per ogni $a \in \mathbb{R}$.
D L'equazione ammette soluzioni ovunque crescenti.

Domanda 3 (1 punto)

Sia $J \subset \mathbb{R}$ un intervallo reale e siano $f_n : J \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, delle funzioni. Diciamo che la serie di funzioni di termine generale $f_n(x)$ converge puntualmente nel punto $\bar{x} \in J$ se e solo se

A $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} f_n(\bar{x})$ esiste finito
B $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sum_{n=0}^{k} |f_n(x)|$ esiste finito per ogni $x \in J$
C $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f_n(\bar{x})$ esiste finito
D $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} |f_n(x)|$ esiste finito per ogni $x \in J$

Pagina 2: Domande di teoria - 7 punti - Tempo consigliato: 15 minuti

La domanda 4 ammette una e una sola risposta corretta.

Domanda 4 (1 punto)

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, una funzione di due variabili. Allora:

A se f è derivabile in tutto A e differenziabile in un punto $x_0 \in A$, allora le derivate parziali di f sono continue in x_0

B se f è di classe C^1 su tutto A, allora f è differenziabile in tutto A

C se f è continua e derivabile in un punto $x_0 \in A$, f è differenziabile in x_0

D se f è derivabile in tutto A, allora f è continua in tutto A

Le domande 5 e 6 ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Domanda 5 (3 punti)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e siano a_n, b_n i suoi coefficienti di Fourier. Quali affermazioni sono corrette?

A se f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ (e quindi ovunque, essendo 2π-periodica), allora la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente in ogni $x \in \mathbb{R}$

B se f è regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$ (e quindi ovunque, essendo 2π-periodica), allora la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente ad f in ogni $x \in \mathbb{R}$

C se $\sum_n (|a_n| + |b_n|) < +\infty$, allora f è derivabile ovunque

D se $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, allora la serie di Fourier associata ad f è derivabile termine a termine un numero arbitrario di volte

E la sola continuità di f implica che la serie di Fourier associata ad f converge puntualmente in ogni $x \in \mathbb{R}$

Domanda 6 (3 punti)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile in A.

A Per ogni $\underline{x}_0 \in A$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\nabla(\alpha f)(\underline{x}_0) = \alpha^2 \nabla f(\underline{x}_0)$

B È ben definito il piano tangente al grafico di f in ogni punto $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0)) \in \mathbb{R}^3$ con $\underline{x}_0 \in A$

C Per ogni $\underline{x}_0 \in A$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = 1$ si ha $\left|\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)\right| \leq \|\nabla f(x_0)\|$

D $\langle \nabla f(\underline{r}(t)), \underline{r}'(t) \rangle = 0$ per ogni curva regolare $\underline{r} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ e per ogni $t \in I$

E Per ogni $\underline{x}_0 \in A$ e $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ con $\|\underline{v}\| = 1$ si ha $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle$

Pagina 3: Esercizio 1 - 8 punti - Tempo consigliato: 25 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Sia f la funzione 2π-periodica, dispari, definita su $[-\pi, 0]$ da

$$f(x) = x^2 + \pi x$$

e sia

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

la sua serie di Fourier.

(1) **(3 punti)** E' vero che

A $f(x) = -x^2 + \pi x$ su $[0, \pi]$

B $f(x) = -x^2 - \pi x$ su $[0, \pi]$

C $f(x) = x^2 - \pi x$ su $[0, \pi]$

D $\lim_{m\to+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_m(x)|^2 \, dx = 0$, dove $F_m(x)$ è il polinomio di Fourier di ordine m associato a f

E $a_n = 0$ per ogni $n \geq 0$

(2) **(3 punti)** Calcolando i coefficienti di Fourier si ottiene

A $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$

B $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$

C $b_n = 0$ per ogni n pari e $b_n = \frac{8}{\pi n^3}$ per ogni n dispari

D $b_n = \frac{8}{\pi n^3}$ per ogni $n \geq 1$

E $b_n = \frac{4}{\pi n^3}$ per ogni $n \geq 1$

(3) **(2 punti)** La serie di Fourier di f

A converge totalmente su $\mathbb{R}$

B converge puntualmente a $f(x)$ in $(-\pi, \pi)$ ma non per $x = \pm\pi$

C converge ad f in media quadratica su $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ $\forall k \in \mathbb{Z}$, ma non su un generico intervallo $[a, b]$ limitato

D converge ad f in media quadratica su ogni intervallo $[a, b]$ limitato

Pagina 4: Esercizio 2 - 7 punti - Tempo consigliato: 20 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Siano $f(x,y) = x + 2y + 1$ e
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 - 2 \leq x \leq 2\}.$$

(1) **(2 punti)** La regione D è
- A limitata
- B chiusa
- C aperta
- D illimitata
- E né aperta né chiusa

(2) **(3 punti)** Si ha
- A $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 8, \ \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -1$
- B $f(x,y) = f(x,-y)$ per ogni $(x,y) \in D$
- C il minimo assoluto di f in D è assunto in due punti
- D il massimo assoluto di f in D non è assunto
- E $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = 7, \ \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) = -2$

(3) **(2 punti)** Supponiamo che la regione D rappresenti una lamina piana di densità costante pari a 1. La massa di D
- A si calcola tramite l'integrale doppio $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-2}^{2} 1\,dy\right)dx$
- B vale $\frac{32}{3}$
- C si calcola tramite l'integrale doppio $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\int_{y^2-2}^{2} 1\,dx\right)dy$
- D vale $\frac{10}{3}$
- E vale $\frac{54}{3}$

Pagina 5: Esercizio 3 - 7 punti - Tempo consigliato: 20 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette.

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y'(x) = \sqrt{y(x)} + y(x)\,.$$

(1) **(1 punti)** Scrivendola nella forma $y'(x) = f(x, y(x))$ e denotando A il dominio di definizione di f, si ha
- A $A = \mathbb{R}$
- B $A = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$
- C il teorema di esistenza e unicità locale si applica in ogni punto di A
- D $A = \mathbb{R}^2$

(2) **(2 punti)** Riguardo le soluzioni di questa EDO
- A esiste una soluzione $y(x)$ tale che che $y'(x)$ cambia segno
- B se y_1 e y_2 sono soluzioni allora $z(x) = y_1(x) + y_2(x)$ è soluzione
- C se $y(x)$ è soluzione allora $z(x) = y(x + c)$ è soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$
- D esiste una e una sola soluzione costante

(3) **(4 punti)** Si consideri ora il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \sqrt{y(x)} + y(x) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Detta $\tilde{y}$ una soluzione di questo problema di Cauchy (si consiglia di determinarla esplicitamente), si ha
- A $\tilde{y}$ cambia segno
- B $\tilde{y}(x) > 0$ se e solo se $x \in (-2\log 2, +\infty)$
- C $\tilde{y}(x) > 0$ se e solo se $[-3\log 2, +\infty)$
- D $\tilde{y}$ è convessa
- E $\lim_{x\to+\infty} \tilde{y}(x)$ è finito