Politecnico di Milano **Anno Accademico 2020-21**

Cognome:	Nome:	Matricola:	Punti:

Analisi Matematica 2, Ing. Informatica e Telecomunicazioni

Esame del 26 agosto 2021

Durata: 90 minuti

Pagina 1: Domande di teoria - 3 punti - Tempo consigliato: 10 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono <u>una e una sola</u> *risposta corretta.*

Domanda 1 (1 punto)

Per definizione, la derivata parziale rispetto a x di una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ è data da

A $\boxed{\text{V}}$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}$, se tale limite esiste finito

B $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + t)}{t}$, se tale limite esiste finito

C $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{\|(h, k)\|}$, se tale limite esiste finito

D $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + t, y_0)}{t}$, se tale limite esiste finito

Domanda 2 (1 punto)

Una soluzione particolare $y_p(t)$ dell'equazione differenziale $y''(t) + 2y'(t) = t^2$ va ricercata nella forma

A $\boxed{\text{V}}$ $y_p(t) = t(At^2 + Bt + C)$, $A, B, C \in \mathbb{R}$

B $y_p(t) = At^2 + Bt + C$, $A, B, C \in \mathbb{R}$

C $y_p(t) = A + B\mathrm{e}^{-2t}$, $A, B \in \mathbb{R}$

D $y_p(t) = t^2(A\cos(\sqrt{2}t) + B\sin(\sqrt{2}t))$, $A, B \in \mathbb{R}$

Domanda 3 (1 punto)

La lunghezza di una curva regolare a tratti $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$

A è invariante soltanto per cambi di parametro che conservano il verso di percorrenza della curva

B è data da $\int_a^b \underline{r}'(t)\, dt$

C può essere strettamente negativa

D $\boxed{\text{V}}$ è data da $\int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\, dt$

Pagina 2: Domande di teoria - 7 punti - Tempo consigliato: 15 minuti

La domanda 4 ammette una e una sola risposta corretta.

Domanda 4 (1 punto)

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione 2π-periodica e regolare a tratti. Allora la serie di Fourier associata ad f

A per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, converge puntualmente ad $f(x_0)$

B $\boxed{\text{V}}$ per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$, converge puntualmente alla media dei limiti destro e sinistro di f in x_0

C non converge necessariamente in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$

D converge totalmente su tutti gli intervalli limitati

Le domande 5 e 6 ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Domanda 5 (3 punti)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Allora:

A le derivate parziali di f sono entrambe definite in un intorno di (x_0, y_0) e continue in (x_0, y_0)

B $\boxed{\text{V}}$ $\nabla f(x_0, y_0)$ è ortogonale alla curva di livello di f passante per (x_0, y_0)

C $\nabla f(x_0, y_0)$ è tangente alla curva di livello di f passante per (x_0, y_0)

D $\boxed{\text{V}}$ f ammette derivata direzionale in (x_0, y_0) lungo qualsiasi direzione $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$ di norma unitaria e vale $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0) = \langle \nabla f(x_0, y_0), \underline{v} \rangle$

E $\boxed{\text{V}}$ la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0, y_0)$ è massima in direzione $\underline{v} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$

Domanda 6 (3 punti)

Sia $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x - x_0)^n$ una serie di potenze reale, con $a_n > 0$ per ogni n e $x_0 \in \mathbb{R}$ fissato. Allora:

A $\boxed{\text{V}}$ il raggio di convergenza della serie è dato da $R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ (se esiste il limite)

B se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ non esiste, il raggio di convergenza può non essere unico

C $\boxed{\text{V}}$ se il raggio di convergenza di tale serie è uguale a $+\infty$, la serie converge puntualmente in ogni $x \in \mathbb{R}$

D $\boxed{\text{V}}$ se il raggio di convergenza di tale serie è uguale a 0, la serie converge puntualmente soltanto in x_0

E detto R il raggio di convergenza di tale serie, la serie converge totalmente in $[-R, R]$

Pagina 3: Esercizio 1 - 7 punti - Tempo consigliato: 25 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Sia f la funzione definita in $[0,\pi]$ da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x & \text{se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

estesa in modo pari in $[-\pi, 0]$ e poi prolungata per 2π-periodicità in tutto $\mathbb{R}$. Sia poi $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ la sua serie di Fourier.

(1) **(2 punti)** Si ha

A $a_0 = \frac{\pi}{2}$

B $\boxed{\text{V}}$ $b_n = 0$ per ogni $n \geq 1$

C $a_0 = \pi$

D $a_{2k+1} = 0$ per ogni $k \geq 0$

E $\boxed{\text{V}}$ $a_0 = \frac{\pi}{8}$

(2) **(3 punti)** La serie di Fourier di f

A non converge ad f nei punti $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

B $\boxed{\text{V}}$ converge puntualmente a $f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

C $\boxed{\text{V}}$ converge totalmente a f in tutto $\mathbb{R}$

D $\boxed{\text{V}}$ converge in media quadratica ad f nell'intervallo $[-\pi,\pi]$

E è derivabile termine a termine in $\mathbb{R}$

(3) **(2 punti)** Scritta la serie di Fourier per f, possiamo dedurre che

A calcolando tale serie in $x = 0$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

B $\boxed{\text{V}}$ calcolando tale serie in $x = 0$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi^2}{16}$

C calcolando tale serie in $x = 0$ si ottiene $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}\left(\sin\left(n\frac{\pi}{8}\right)\right) = \frac{3\pi^2}{16}$

D calcolando tale serie in $x = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)^3} = \frac{\pi}{8}$

E calcolando tale serie in $x = \frac{\pi}{4}$ si ottiene $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Pagina 4: Esercizio 2 - 7 punti - Tempo consigliato: 20 minuti

Le domande 1 e 2 ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

(1) **(2 punti)** Sia

$$f(x,y) = x^2y - y^3.$$

È vero che

A $\boxed{\text{V}}$ f è dispari rispetto alla variabile y

B $\boxed{\text{V}}$ f è pari rispetto alla variabile x

C il piano tangente al grafico di f in $(1,1,f(1,1))$ è $z = \frac{2}{3} + 2x$

D $\boxed{\text{V}}$ f è di classe C^1 su $\mathbb{R}^2$

E $(0,0)$ è punto di minimo locale per f

(2) **(3 punti)** Si consideri il vincolo

$$Z = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\right\}.$$

È vero che

A il massimo di f sul vincolo Z è assunto nel punto $(0,1)$

B il massimo di f sul vincolo Z è assunto esattamente in quattro punti

C $\boxed{\text{V}}$ $\displaystyle\max_{(x,y)\in Z} f(x,y) = 1$

D $\boxed{\text{V}}$ il minimo di f sul vincolo Z è assunto nel punto $(0,1)$

E f non assume minimo sul vincolo Z

La domanda 3 ammette una e una sola risposta corretta.

(3) **(2 punti)** Si consideri la regione piana

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 - 2y \le x \le 1\}.$$

Si ha che

A $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left(\int_{x^2-2x}^{1} (x^2y - y^3)\,dy\right)\,dx$

B $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{\sqrt{x}}^{1} (x^2y - y^3)\,dy\right)\,dx$

C $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} \left(\int_{y^2-2y}^{1} (x^2y - y^3)\,dx\right)\,dy$

D $\boxed{\text{V}}$ $\iint_\Omega f(x,y)\,dxdy = \int_{1-\sqrt{2}}^{1+\sqrt{2}} \left(\int_{y^2-2y}^{1} (x^2y - y^3)\,dx\right)\,dy$

E nessuna delle altre

Pagina 5: Esercizio 3 - 8 punti.

Le domande ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y'(t) = (t^2 + t + 1)(3 - y(t)).$$

(1) **(2 punti)** È vero che
- A l'equazione è autonoma
- B $\boxed{\text{V}}$ l'equazione è lineare
- C non esistono soluzioni il cui grafico passa per il punto $(0, 3)$
- D $\boxed{\text{V}}$ per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste una e una sola soluzione il cui grafico passa per il punto (t_0, y_0)

(2) **(3 punti)** Si consideri ancora l'equazione differenziale della domanda precedente. Detta $y(t)$ una generica soluzione di tale equazione, si può affermare che
- A $\lambda y(t)$ è soluzione della stessa equazione, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
- B $\boxed{\text{V}}$ se $y(t)$ non è costante, è strettamente monotona
- C $z(t) = y(t + c)$ è soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$
- D $\boxed{\text{V}}$ esiste almeno una soluzione $y(t)$ che cambia segno
- E $\boxed{\text{V}}$ è possibile scrivere esplicitamente $y(t)$ utilizzando i metodi studiati in questo corso

(3) **(3 punti)** Si consideri ora il seguente problema di Cauchy, al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(t) = (t^2 + t + 1)(3 - y(t)) \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Detta y_a una sua soluzione e sapendo che essa è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, si può affermare che
- A $\boxed{\text{V}}$ se $a = 3$, l'unica soluzione è la funzione costante $y_3(t) = 3$ per ogni t
- B se $a = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$
- C se $a < 3$, $\lim_{t\to+\infty} y_a(t) = -\infty$
- D se $a < 3 < b$, $\lim_{t\to+\infty} y_a(t) \neq \lim_{t\to+\infty} y_b(t)$