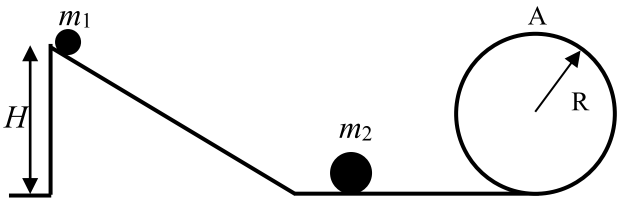
ESERCIZIO FORM 3

Un corpo di massa m_1=100 g, inizialmente fermo a un'altezza H = 5R, scivola su un piano inclinato liscio. Il corpo urta in modo completamente anelastico un secondo corpo di massa $m_2 = 2m_1$, fermo su un piano orizzontale liscio. I due corpi proseguono lungo una guida liscia formante una circonferenza di raggio R= 1 m nel piano verticale come indicato in figura. Si calcoli:

a) la velocità delle due masse un istante dopo l'urto; (3)
b) si dica, giustificando la risposta, se le due masse raggiungono la massima altezza A;(3)
c) si calcoli l'altezza H minima affinchè i due corpi raggiungano la massima altezza A. (2)



Soluzione

a) Nell'urto completamente anelastico la conservazione della quantità di moto impone:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V_{12} \qquad (1)$$

Dove la velocità v_1 della massa m_1 appena prima dell'urto può essere calcolata mediante la conservazione dell'energia meccanica del corpo 1 (soggetto solo a forze conservative):

$$m_1 g H = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Ovvero:

$$v_1 = \sqrt{2gH} = 9.9 \text{ m/s}.$$

Invertendo la relazione (1) si ottiene:

$$V_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{2gH} = 3.3 \text{ m/s}.$$

b) Le due masse rimangono appoggiate sula guida liscia circolare fintanto che la reazione vincolare di appoggio è maggiore o uguale a zero. Applicando il secondo principio della dinamica alle due masse lungo la direzione verticale nella posizione A, si ottiene:

$$(m_1 + m_2)a = N + (m_1 + m_2)g \qquad (2)$$

Dove $a = \frac{v_{12}^2(A)}{R}$ è l'accelerazione centripeta delle due masse deve essere $a \geq g$. Ne deriva che la velocità delle masse nel punto A deve essere $v_{12} \geq \sqrt{gR}$=3.1 m/s. Applicando il teorema della conservazione dell'energia meccanica delle due masse (soggette a sole forze conservative):

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{12}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{12}^2 + (m_1 + m_2)gh$$

$$\frac{1}{2}(V_{12}^2 - v_{12}^2) = gh \qquad (3)$$

Dove si è indicato con h la quota raggiunta dalle due masse. Con V_{12}=3.3 m/s la quota raggiunta con velocità $v_{12} \geq$ a 3.1 m/s è

$$h = \frac{1}{2g}(V_{12}^2 - v_{12}^2) = 0.07 \text{ m},$$

quindi non sufficiente a raggiungere il punto A definito da una quota pari a 2R=2 m.

c) Per raggiungere la quota h=2R=2 m con velocità $v_{12} \geq$ a 3.1 m/s, invertendo la relazione (3) si ottiene:

$$V_{12}^2 \geq (v_{12}^2) + 2g2R = gR + g4R = 5gR \qquad (4)$$

Dal punto a) abbiamo ottenuto:

$$V_{12}^2 = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 2gH = 5gR$$

Nella quale sostituendo la relazione (4) si ottiene il valore della quota H di partenza:

$$H = \frac{5}{2}R\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 = \frac{45}{2}R = 22.5\ \text{m}$$

ESERCIZIO FORM 4

Si consideri la miscela composta da $m_A = 50\ g$ di acqua e $m_G = 20\ g$ di ghiaccio in equilibrio termico. Alla miscela viene aggiunta una massa di acqua M=100 g ad una temperatura di 80°C. Si calcolino:

a) la temperatura di equilibrio del sistema; (3)
b) la quantità di calore fornita dalla massa M di acqua alla miscela precisando se assorbito o ceduto; (1)
c) la variazione di entropia della massa M; (2)
d) la variazione di entropia dell'universo. (2)

(Calore latente di fusione del ghiaccio $\lambda_f = 80\ cal/g$).

Soluzione

a) La temperatura di equilibrio (T_{eq}) si ottiene applicando il primo principio della termodinamica al sistema:

$$Q_M + Q_G + Q_A = 0$$

dove si sono indicati con Q_M, Q_G e Q_A il calore scambiato dalla massa di acqua *M* (alla temperatura iniziale $T_M = 80$ °C), dai 20 g di ghiaccio e i 50 g di acqua (entrambi in equilibrio a temperatura iniziale di $T_{A+G} = 0$ °C).
Esplicitando i vari termini si ottiene:

$$Mc_A(T_{eq} - T_M) + m_G\lambda_F + (m_G + m_A)c_A(T_{eq} - T_{A+G}) = 0$$

Invertendo l'equazione di ottiene:

$$T_{eq} = \frac{Mc_AT_M - m_G\lambda_F + (m_G+m_A)c_AT_{A+G}}{c_A(m_G+m_A+M)} = \frac{100\times 80 - 20\times 80 + (20+70)\times 0}{1(20+50+100)} = 37.6\ \text{°C}.$$

b) La quantità di calore scambiata dalla massa *M* di acqua è $Q_M = Mc_A(T_{eq} - T_M) = -4240$ cal, ceduta dalla massa *M*.

c) Il calore elementare scambiato dalla massa *M* alla temperatura generica *T* è $\delta Q_M = Mc_A dT$. Pertanto la variazione di entropia è:

$$\Delta S_M = \int_{T_M}^{T_{eq}} Mc_A\frac{dT}{T} = Mc_A \ln\frac{T_{eq}}{T_M} = 0.1\times 4186 \ln\frac{310.75}{353.15} = -54.3\ \text{J/K}.$$

d) La variazione di entropia dell'universo, costituito da tutta la miscela è pari alla somma delle variazioni di entropia della massa di acqua *M*, dei 20 g di ghiaccio e dei 50 g di acqua.

$$\Delta S_U = \Delta S_M + \Delta S_{m_A} + \Delta S_{m_G}$$

Dove

$$\Delta S_{m_A} = \int_{T_{A+G}}^{T_{eq}} m_A c_A \frac{dT}{T} = m_A c_A \ln\frac{T_{eq}}{T_{A+G}} = 0.05 \times 4186 \ln\frac{310.75}{273.15} = 27.0\ \mathrm{J/K}$$

e

$$\Delta S_{m_G} = \frac{m_G \lambda_F}{T_{A+G}} + \int_{T_{A+G}}^{T_{eq}} m_G c_A \frac{dT}{T}$$
$$= \frac{m_G \lambda_F}{T_{A+G}} + m_G c_A \ln\frac{T_{eq}}{T_{A+G}} = \frac{0.02 \times 3.3 \cdot 10^5}{273.15} + 0.02 \times 4186 \ln\frac{310.75}{273.15} = 35.0\ \mathrm{J/K}$$

$$\Delta S_U = -54.3 + 27.0 + 35.0 = 7.7\ \mathrm{J/K}$$