Esercitazioni di Analisi 2

SISTEMI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

1. Risolvi i seguenti sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti:

(a) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 4y_1 + 3y_2 \end{cases}$

[Il sistema omogeneo assegnato può essere posto nella forma matriciale $\overrightarrow{Y'} = A\overrightarrow{Y}$, con $\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$. La matrice A ammette gli autovalori reali e distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 5$, pertanto è diagonalizzabile; i corrispondenti autovettori sono $\overrightarrow{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Le soluzioni del sistema sono in forma matriciale: $\overrightarrow{Y} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t}$, oppure nella forma per componenti: $\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{5t} \\ y_2(t) = -C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{5t} \end{cases}$]

(b) $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 5y_2 \end{cases}$

[A differenza dell'esercizio precedente, in questo caso la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ non è diagonalizzabile. Riduciamo allora il sistema ad un unica equazione: deriviamo la prima equazione del sistema ottenendo: $y_1'' = y_1' - 2y_2'$, sostituiamo y_2' con il valore ricavato dalla seconda equazione del sistema ottenendo: $y_1'' = y_1' - 2(2y_1 + 5y_2)$, sostituiamo infine y_2 con il valore ricavato dalla prima equazione. Abbiamo ora un'equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti nella funzione incognita y_1 : $y_1'' - 6y_1' + 9y_1 = 0$. Il suo integrale generale é: $y_1(t) = C_1 e^{3t} + C_2 t e^{3t}$. La funzione incognita y_2 si ottiene facilmente dalla prima equazione: $y_2(t) = -C_1 e^{3t} - C_2 \left(\frac{1}{2} + t\right) e^{3t}$. Questo metodo può essere applicato qualunque sia la natura della matrice A e anche in caso di sistemi non omogenei.]

(c) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - 2y_2 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} y_1(t) = C_1 e^{-t} + 2C_2 e^{2t} \\ y_2(t) = 2C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} \end{cases}\right]$

(d) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 4y_2 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} y_1(t) = 2C_1 - C_2 e^{-3t} \\ y_2(t) = -C_1 + 2C_2 e^{-3t} \end{cases}\right]$

(e) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} y_1(t) = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) \\ y_2(t) = e^{2t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t) \end{cases}\right]$

(f) $\begin{cases} \cancel{y_1' = y_1 + 2y_2} \\ \cancel{y_2' = -2y_1 - 4y_2} \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} \cancel{y_1(t) = -2C_1 + C_2 e^{-3t}} \\ y_2(t) = C_1 - 2C_2 e^{-3t} \end{cases}\right]$

(g) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 - y_2 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} y_1(t) = C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t \\ y_2(t) = \left(-C_1 + \sqrt{3}C_2\right) \cos \sqrt{3}t - \left(\sqrt{3}C_1 + C_2\right) \sin \sqrt{3}t \end{cases}\right]$

(h) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + e^t \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$ $\quad \left[\begin{cases} y_1(t) = \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{3t} - \frac{2}{3} \\ y_2(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{5}{12}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{3} \end{cases}\right]$

(i) $\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + e^{-t} \\ y_2' = 2y_1 + y_2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad \left[\begin{cases} y_1(t) = \dfrac{1}{8}e^{3t} - \dfrac{1}{8}e^{-t} + \dfrac{1}{2}te^{-t} \\ y_2(t) = \dfrac{1}{8}e^{3t} - \dfrac{1}{8}e^{-t} - \dfrac{1}{2}te^{-t} \end{cases}\right]$

(j) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 + y_2 - 36t \\ y_2' = -2y_1 + y_2 - 2e^{t} \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad \left[\begin{cases} y_1(t) = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^{t} + 6t - 1 \\ y_2(t) = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^{t} + 12t + 10 \end{cases}\right].$

2. $*$Sia A una matrice $n \times n$ $(n \geq 2))$ una matrice costante; quali informazioni su A si possono dedurre dal fatto che il sistema di equazioni lineari $\overrightarrow{Y'} = A\overrightarrow{Y}$ ammette una soluzione $\xi \in \mathbb{R}^n$ costante non nulla? [Dal fatto che $\lambda = 0$ è un autovalore della matrice, segue che $\det A = 0$]

3. $*$Trova una soluziane non nulla del sistema $\overrightarrow{Y'} = A\overrightarrow{Y}$, dove $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\overrightarrow{Y} = \begin{pmatrix} C_1 e^{4t} \\ e^{t}\left(-\dfrac{2}{3}C_1 e^{3t} + C_2\right) \end{pmatrix}\right]$$

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono tratti da temi d'esame.