Esercitazioni di Analisi 2

SERIE DI POTENZE

1. Calcola la somma delle seguenti serie:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 2^n e^{-n}$ $\qquad\left[\dfrac{e}{e+2}\right]$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+i)^n}{2^n}$ $\qquad[i]$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}2^{2n}e^{-n}$ $\qquad[+\infty]$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}$ $\qquad\left[\dfrac{4}{9}\right]$

2. Risolvi le seguenti equazioni:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(2x)^{2n}=1$ $\qquad\left[x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right]$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n=3$ $\qquad\left[x=\dfrac{3+\sqrt{21}}{2}\right]$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\frac{32}{81}$ $\qquad[k=5]$

3. Calcola il raggio R di convergenza delle seguenti serie di potenze e determinane l'insieme di convergenza semplice (puntuale). (supponi $x\in\mathbb{R}$; cosa cambia nel caso più generale $x\in\mathbb{C}$?)

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}$ $\qquad[R=2;\ \ (-2,2)]$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{\log(n+1)}$ $\qquad[R=1;\ \ [-1,1)]$

   (c) $*\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+\log n}{2^n}z^n$ $\qquad[R=2;\ \ (-2,2)]$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{n^2}$ $\qquad\left[R=\dfrac{1}{2};\ \ \left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]\right]$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$ $\qquad[R=e;\ \ (-e,e)]$

   (f) $*\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}n!\sin^n x$ $\qquad[R=0;\ \ \{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}]$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!x^n}{(2n)!}$ $\qquad [R = +\infty; \quad \mathbb{R}]$

(h) $*\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (3x-3)^n$ $\qquad \left[R = \frac{1}{3}; \quad \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)\right]$

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+3)^n}{(n+1)\,2^n}$ $\qquad [R = 2; \quad [-5, -1)]$

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} [1-(-2)^n]\,x^n$ $\qquad \left[R = \frac{1}{2}; \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right]$

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{n^2+1}$ $\qquad [R = 1; \quad [-2, 0]]$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(\log n)^n}$ $\qquad [R = +\infty; \quad \mathbb{R}]$

(m) $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{x^n}{4^n+5^n}$ $\qquad [R = 5; \quad (-5, 5)]$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2\,x^n}{(2n)!}$ $\qquad [R = 4; \quad (-4, 4)]$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{\sqrt{n}}x^n}{n}$ $\qquad [R = 1; \quad (-1, 1)]$

4. $*$Determina l'insieme A di convergenza totale della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n$. [La serie assegnata è una serie geometrica: converge puntualmente in $I = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x}{x+1}\right| < 1\right\} = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$; qualunque insieme chiuso $A \subset I$ è un insieme di convergenza totale]

5. $*$Calcola $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx$. (Ricorda che $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$). $\quad [\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) - 1$; $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right) dx = \int_0^1 (e^x - 1)\,dx = e - 2]$

6. $*$Scrivi la serie associata alla funzione $\dfrac{x^2}{1-x}$ e determinane intervallo di convergenza puntuale. [Sapendo che $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ $(R = 1)$, moltiplicando per x^2 otteniamo: $\dfrac{x^2}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$, $R = 1$]

7. Calcola $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$ $\qquad \left[\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^n}{n!} - (x^0 + x^1 + \frac{x^2}{2})\right)\Bigg|_{x=-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}} - \frac{5}{8}\right]$

8. Considera la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

(a) determina l'intervallo di convergenza della serie che definisce f. $[|x| < 1]$

(b) scrivi esplicitamente $f(x)$ e $f\left(\frac{x^4}{16}\right)$. $\left[\frac{1}{1-x};\ \frac{16}{16-x^4}\right]$

(c) calcola per serie $\int_0^1 f\left(\frac{x^4}{16}\right) dx$. $\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)\,16^n}\right]$

9. *Considera la funzione definita da $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$

(a) determina dove f è definita. $[\mathbb{R}]$

(b) calcola $f'(x)$ per ogni x per cui esiste. $\left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n-1}{(n-1)!} x^{2n-2}\right]$

(c) calcola per serie $\int_0^1 f(x)\, dx$. $\left[\frac{e}{2} - 1 \quad \text{(vedi il punto } \mathbf{d}\text{)}\right]$

(d) trova una forma chiusa per f (cioè la somma della serie).

$$\left[\ f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!} = x \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} = x\left(e^{x^2} - 1\right)\right]$$

nota: gli esercizi contrassegnati da * sono temi d'esame.