ESERCIZIO 1

Il movimento verticale di un sistema di levitazione magnetica, avente come ingresso la corrente applicata al magnete ($u(t)$) e come uscita la posizione del elemento levitante ($x(t)$), è descritto dalle seguenti equazioni:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = g - \frac{K}{m}\frac{u^2(t)}{x^2(t)}$$

$$y(t) = x(t)$$

dove g è la accelerazione della gravità, K è la costante magnetica del sistema, m è la massa e $v(t)$ è la velocità del elemento.

1. (1.0) Scrivere il sistema in forma di stato e classificarlo

gli stati sono $x(t)$ e $v(t)$, il sistema si trova già in forma di stato $\dot{x} = f(x, u)$.
È un sistema SISO, non lineare, del secondo ordine, strettamente proprio, tempo invariante.

2. (2.0) Tenendo conto che $x(t)$ può assumere solo valori positivi, determinare i punti di equilibrio del sistema per un ingresso costante $u(t) = \bar{u} \geq 0$.

Nel equilibrio $\dot{x}(t) = \emptyset, \Rightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = \emptyset$

$\dot{x} = \emptyset \Rightarrow \bar{v} = \emptyset$

$\dot{v} = \emptyset \Rightarrow g = \frac{K}{m}\frac{\bar{u}^2}{\bar{x}^2} \Rightarrow \bar{x} = + \sqrt{\frac{K}{mg}\bar{u}^2}$

$\bar{x} = \sqrt{\frac{K}{mg}} \cdot \bar{u}$, per $\bar{u} \geq 0$.

3. (2.0) Scrivere le equazioni del sistema linearizzato attorno agli stati di equilibrio corrispondenti a $\bar{u} = 3$, per $K = 10$, $g = 10$, $m = 1$.

il sistema linerizzato risulta:

$$\delta\dot{x} = \delta v$$

$$\delta\dot{v} = \left(-\frac{2K}{m}\cdot\frac{\bar{u}}{\bar{x}^3}\right)\delta x - \left(\frac{2K}{m}\frac{\bar{u}}{\bar{x}^2}\right)\delta u$$

$$\delta y = \delta x$$

Per $\bar{u} = 3$ risulta

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{10}{10}}\cdot\bar{u} = 3$$

In forma matriciale, per l'equilibrio trovato

$$\begin{bmatrix}\delta\dot{x}\\ \delta\dot{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2,\hat{2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta v\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ -6,\hat{6}\end{bmatrix}\delta u \qquad \delta y = [1 \;\; 0]\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta v\end{bmatrix}$$

4. (2.0) Studiare la stabilità del sistema linearizzato trovato al punto precedente e, se possibile, la stabilità del movimento di equilibrio del sistema non lineare di partenza.

Per studiare la stabilità, troviamo gli autovalori:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ 2,\hat{2} & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + 2,\hat{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-2,\hat{2}}$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j\cdot\sqrt{2,\hat{2}} \cong \pm 1,49j$$

$Re(\lambda_{1,2}) = 0$, allora il sistema linearizzato è semplicemente stabile. Mentre non possiamo dire nulla sulla stabilità del equilibrio del sistema non lineare.

ESERCIZIO 2

Si consideri il sistema dinamico descritto dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -x_1(k) - x_2(k) + u(k) \\ x_2(k+1) = 1.25x_1(k) + x_2(k) \\ y(k) = x_1(k) + x_2(k) + u(k) \end{cases}$$

1. (1.0) Scrivere il sistema in forma matriciale e classificare il sistema.

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1,25 & 1 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} X(k) + [1] u(k)$$

Il sistema é lineare, a tempo discreto, del secondo ordine, tempo invariante, proprio, SISO.

2. (2.0) Determinare gli stati di equilibrio per un ingresso costante $u(k) = \bar{u}$. è possibile trovare un valore del ingresso $\bar{u}$ per avere come stato di equilibrio il punto $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$? Giustificare la risposta.

In equilibrio $X(k+1) = X(k) = \bar{X}$, allora:

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{u} \\ \bar{x}_2 = 1,25\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases}$$

dalla seconda equazione: $\bar{x}_1 = \emptyset$, allora dalla prima:

$\bar{x}_2 = \bar{u}$.

gli equilibri sono: $\bar{x}_1 = \emptyset$, $\bar{x}_2 = \bar{u}$. $\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} \emptyset \\ \bar{u} \end{bmatrix}$

Non é possibile trovare un valore del ingresso $\bar{u}$, per avere come equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, perché $\bar{x}_1$ non dipende dal valore del ingresso $\bar{u}$.

3. (2.0) Studiare la stabilità del sistema.

trovIamo gli autovalori

$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det\begin{bmatrix} \lambda+1 & 1 \\ -1,25 & \lambda-1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 + 1,25 = \lambda^2 + 0,25$

$\lambda = \pm 0,5 j \Rightarrow |\lambda| = 0,5 < 1.$

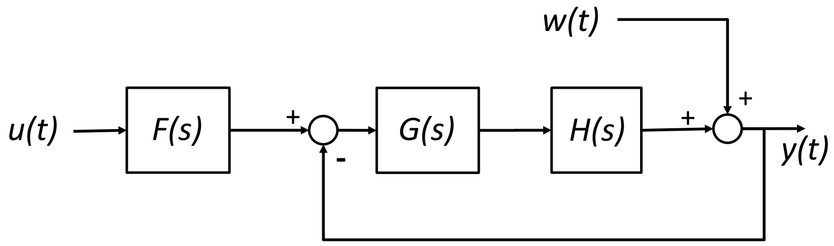
Il sistema è asintoticamente stabile perché gli autovalori hanno modulo minore di uno.

4. (1.0) Calcolare i primi 5 campioni del movimento dello stato e dell'uscita per $u(k) = 0$ e $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

k	$u(k)$	$x_1(k)$	$x_2(k)$	$y(k)$
0	0	1	0	1
1	0	-1	1,25	0,25
2	0	-0,25	0	-0,25
3	0	0,25	-0,3125	-0,0625
4	0	0,0625	0	0,0625
5	0	-0,0625	0,0781	0,0156

ESERCIZIO 3

Si consideri il seguente schema



1. (2.0) Determinare la funzione di trasferimento da $U(s)$ a $Y(s)$.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot F(s)}_{G_E(s)} \cdot U(s)$$

2. (3.0) Poste $F(s) = a/(1+a)$, $G(s) = k/s$, $H(s) = 1/(s+b)$, funzioni di trasferimento di sistemi lineari tempo invarianti senza poli nascosti, studiare la stabilità del sistema equivalente al variare dei parametri $a \in \mathcal{R}$, $b \in \mathcal{R}$, $k \in \mathcal{R}$. Per quali valori dei parametri il sistema equivalente è asintoticamente stabile?

$$G_E(s) = \frac{a}{1+a} \cdot \frac{\frac{k}{s(s+b)}}{1+\frac{k}{s(s+b)}} = \frac{ak}{(1+a)(s^2+bs+k)}$$

I poli della F.d.T. solo le radici del polinomio s^2+bs+k. Per il criterio di Routh, il sistema è asintoticamente stabile per: $b>0$ e $k>0$. La funzione F(s) ha guadagno finito per $a \neq -1$.

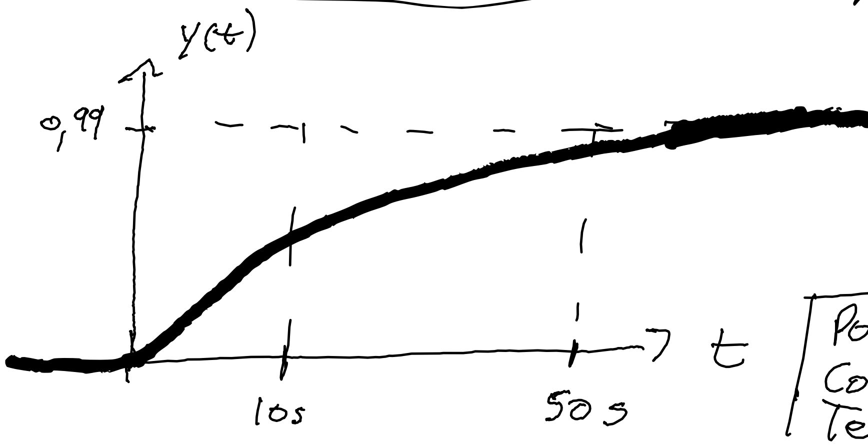
3. (2.0) Per $a = 100$, $b = 10$, $k = 1$, trovare analiticamente la *trasformata di Laplace* $Y(s)$ della risposta a uno scalino applicato come ingresso $u(t)$, determinando i valori di $y(0)$, $y'(0)$ e $y(\infty)$. Tracciare *qualitativamente* la risposta. È possibile usare una approssimazione a polo dominante? giustificare la risposta.

$$G_E(s) = \frac{100}{101}\,\frac{1}{s^2+10s+1}, \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

$$\boxed{Y(s) = \frac{0,99}{s^3+10s^2+s}}$$

$$y(0) = \lim_{s\to\infty} sY(s) = 0$$

$$y'(0) = \lim_{s\to\infty} s^2Y(s) = 0$$



$$y(\infty) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 0,99$$

Poli di $Y(s) = \{0; -9,9; -0,1\}$

Polo dominante en $-0,1$.
Costante di tempo $10s$
Tempo di assestamento $50s$.

4. (2.0) Determinare la funzione di trasferimento da $W(s)$ a $Y(s)$. E' possibile trarre conclusioni sulla stabilità del sistema complessivo guardando solo la funzione di trasferimento appena ricavata? giustificare la risposta.

$$Y(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\,W(s).$$

Non è possibile studiare la stabilità del sistema dalla F. di T. da $W(s)$ a $Y(s)$ perche la $F(s)$ non compare nella funzione. I poli della $F(s)$ sono nascosti.

5. (2.0) È possibile affermare che una condizione sufficiente per ottenere un sistema equivalente asintoticamente stabile è avere $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$ asintoticamente stabili? giustificare la risposta.

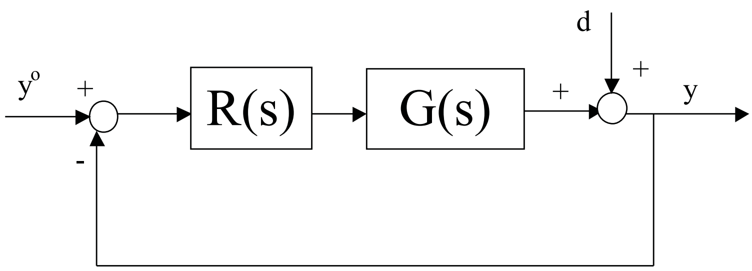
No, perche il collegamento in retroazione tra $G(s)$ e $H(s)$ può produrre un sistema equivalente instabile, la retroazione modifica i poli.

ESERCIZIO 4

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{(10 - s)}{(s+1)(s+10)}$$

di un sistema lineare tempo invariante senza poli nascosti e il sistema di controllo in figura:



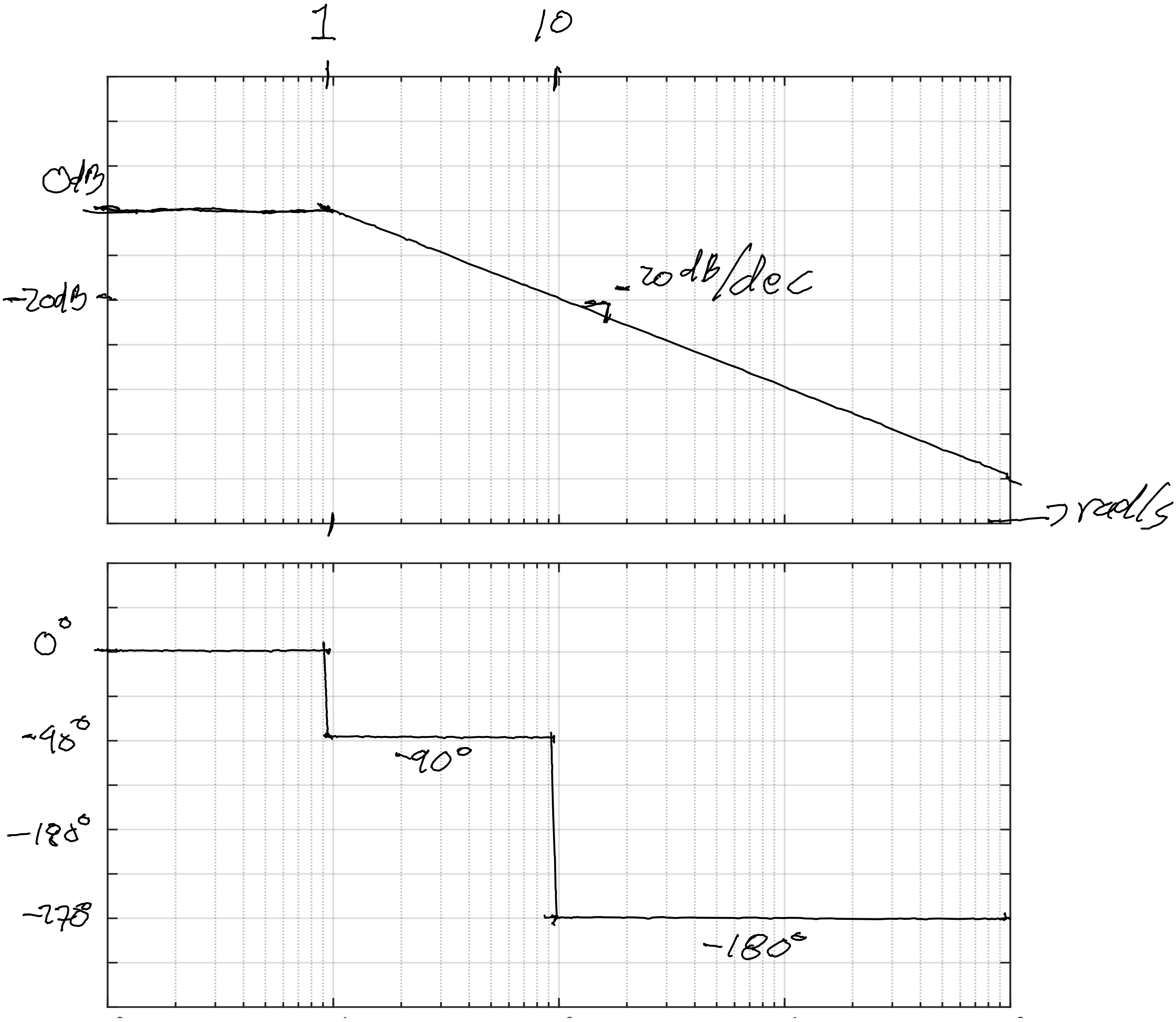
1. (1.0) Calcolare guadagno, tipo, poli e zeri di $G(s)$ e studiare la stabilità del sistema con funzione di trasferimento $G(s)$.

$\mu = \lim_{s \to 0} G(s) = 1$, tipo $\emptyset$ (non cisono poli in zero)

poli: $\{-1, -10\}$, sistema asintoticamente stabile

zeri: $\{10\}$, sistema a fase non minima

2. (2.0) Tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della risposta in frequenza associata alla funzione di trasferimento $G(s)$. Usare la carta semilogaritmica fornita.



3. (3.0) Per il regolatore

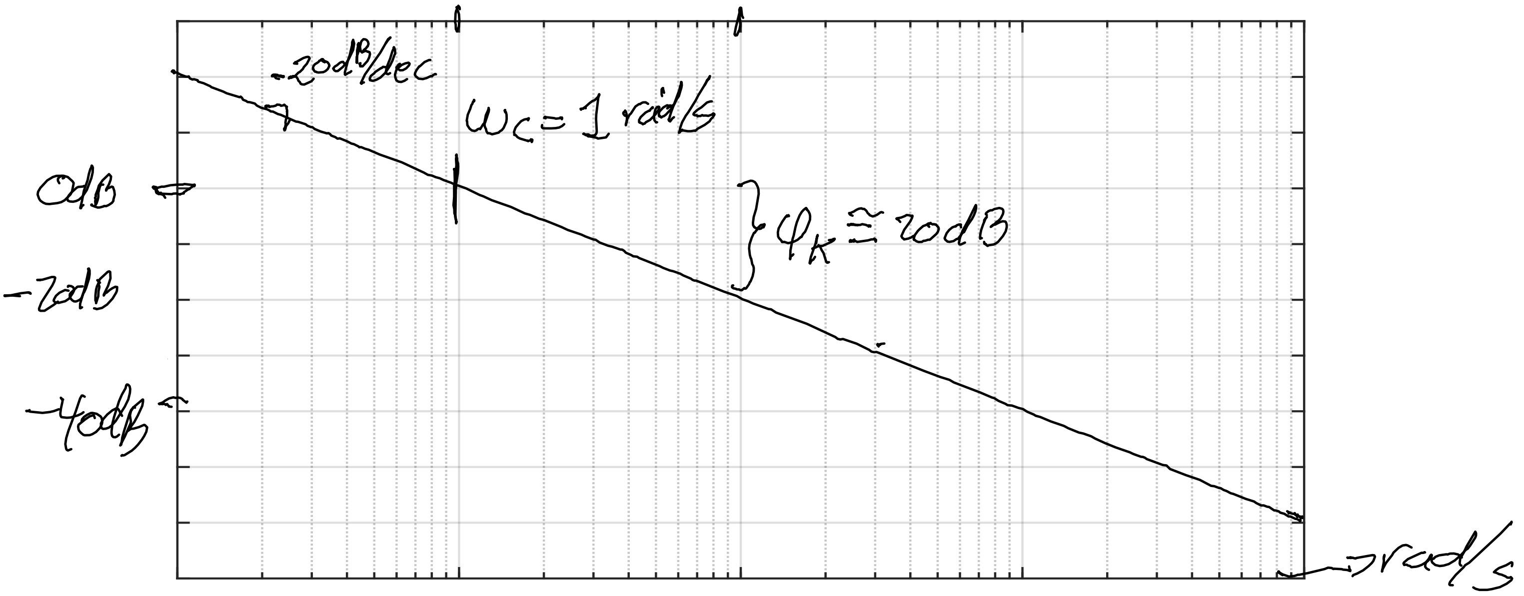
$$R(s) = \frac{(s+1)}{s}$$

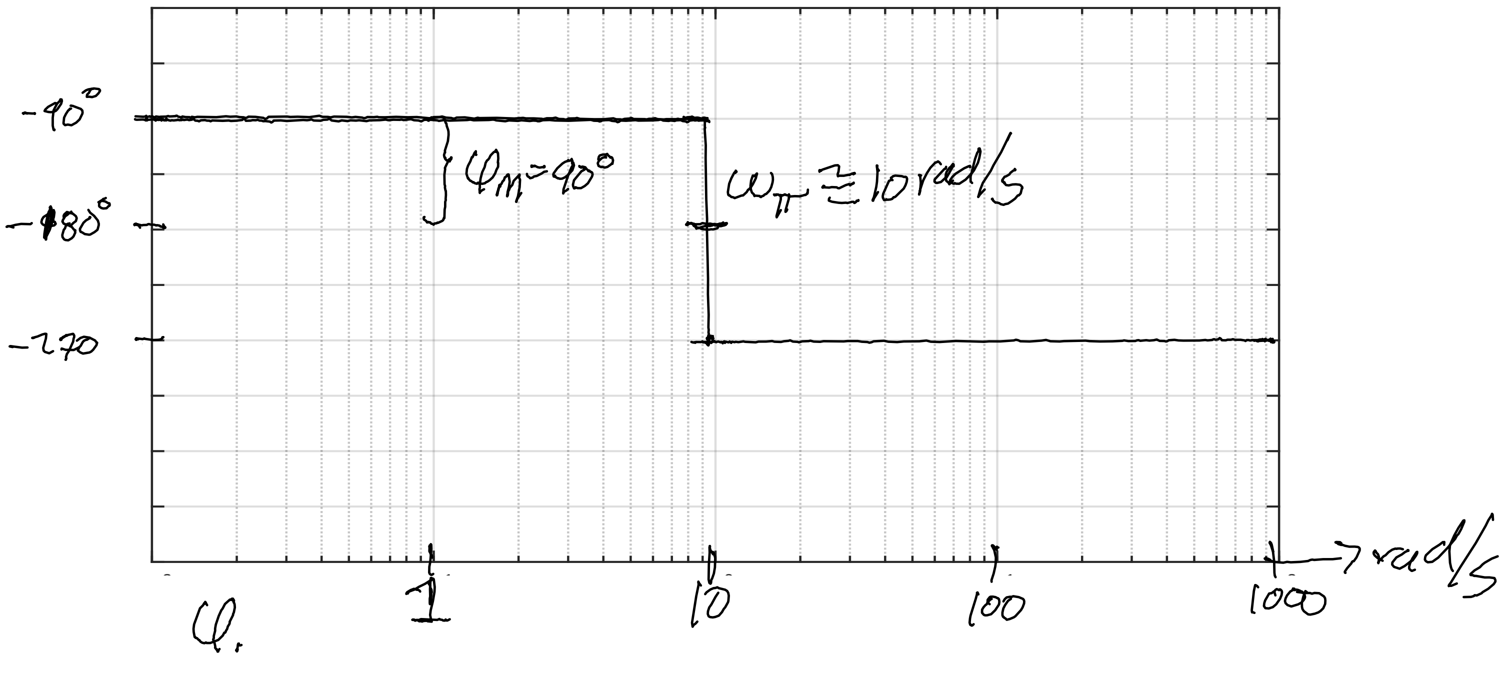
Verificare che il sistema in anello chiuso sia asintoticamente stabile e determinare il margine di fase e di guadagno.

$$L(s) = R(s) \cdot G(s) = \frac{10-s}{s(s+10)} \Bigg\} \text{polo nascosto asint. stabile}$$

$L(s)$ tipo 1, $\mu_g = 1$, $L(s)$ semplicemente stabile.

Per il criterio di Bode, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile perché $\varphi_m > 0$, $\mu > 0$, $P = 0$, e il modulo di $L(j\omega)$ attraversa una volta sola l'asse a 0dB.





Considerando il sistema retroazionato descritto al punto precedente rispondere:

4. (1.0) Determinare il valore di regime dell'errore $|e_\infty|$ a fronte di un ingresso a scalino del disturbo $d(t) = sca(t)$.

La F.d.T. dal disturbo al errore è.

$$-S(s) = -\frac{1}{1+R(s)G(s)}$$

Notando che la $L(s)$ è tipo 1, si conclude che

$$|e_\infty| = \lim_{s\to 0} s\left(-S(s)\right)\cdot\frac{1}{s} = 0$$

5. (2.0) Determinare quanto vale l'ampiezza di regime dell'uscita $y(t)$ quando $y^0(t) = 1 - 2\sin(0.1t) + 5\sin(100t)$.

La F.d.T. da $Y_0(s)$ a $Y(s)$ è $F(s)$

$$F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$$

- $y_1^o(t) = 1 \Rightarrow L(s)$ è tip 1 $\Rightarrow y_1(\infty) = 1$

- $y_2^o(t) = -2\sin(0{,}1 t)$, $\omega = 0{,}1\ rad/s \ll \omega_c = 1\ rad/s$

allora $|F(j\omega)| \simeq 1$, $|y_2(\infty)| \simeq 2$

- $y_3^o(t) = 5\sin(100t)$, $\omega = 100\ rad/s \gg \omega_c = 1\ rad/s$

allora $|F(j\omega)| \simeq |L(j\omega)| = -40dB = 0{,}01$

$$|y_3(\infty)| \simeq 0{,}05$$

$$|y(\infty)| \leq 1 + 2 + 0{,}05 \simeq 3{,}05$$