Teoria dei fenomeni aleatori e della stima – 04/07/2017 – Compito B

- Ogni esercizio viene valutato da 0 a 6 punti
- Verranno valutate solo le parti scritte in penna – non usare correttori
- Non riportare solo il risultato, ma cerca di argomentare sinteticamente la risposta.
- Riportare il proprio nome, cognome, numero di matricola, e tipo di compito svolto su ogni foglio consegnato

1) In una partita di poker avete in mano 47JJA. Qual é la probabilitá di ottenere un *full* dopo aver cambiato le carte 4 e 7?
A parte le carte in mano, si suppone che siano rimaste le carte di un mazzo da 52. Un full si ottiene con un tris e una coppia.

2) Si consideri una v.a. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Determinare la distribuzione di probabilitá di $Y = \sqrt{X}$. Determinare il momento secondo di Y.

3) In un sistema di comunicazione si trasmette il valore $X = -1$ oppure $X = 1$ con la stessa probabilitá. Al ricevitore si osserva la v.a. $Y = X + Z$, dove $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$, e si pone la soglia di decisione in $y = 0$.

   (a) Calcolare le probabilitá di errore $\Pr(Y > 0|X = -1)$, $\Pr(Y < 0|X = 1)$, e la probabilitá d'errore media.

   (b) Si supponga di poter alzare la potenza trasmessa, usando delle ampiezze $X = \pm a$. Quanto deve valere a in modo tale che la probabilitá media di errore sia al massimo $2 \cdot 10^{-2}$?

~~4) Si hanno delle lampadine e la vita di ognuna é distribuita esponenzialmente con parametro λ, indipendentemente da tutte le altre lampadine. Si accendono 10 lampadine contemporaneamente. Qual é la probabilitá che la prima lampadina si sia spenta prima dell'istante di tempo μ? Qual é la probabilitá che l'intervallo di tempo tra la prima rottura e la seconda rottura sia superiore a μ?~~

~~*Suggerimento: si interpretino gli istanti di rottura delle lampadine come istanti di arrivo di opportuni processi di Poisson. Fare attenzione al numero di lampadine accese.*~~

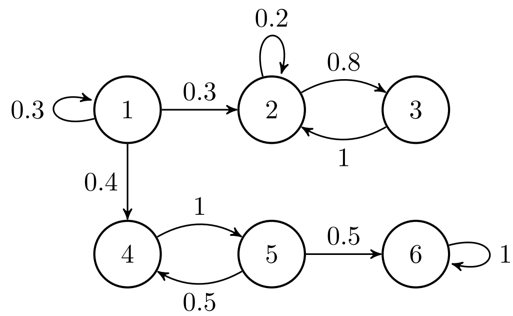
~~5) Si consideri la catena di Markov tempo-discreta in figura. La catena si trova nello stato 1 al tempo 0.~~

   ~~(a) Classificare gli stati in transienti e ricorrenti.~~

   ~~(b) Mediamente dopo quante prove si esce dallo stato 1?~~

   ~~(c) Qual é la probabilitá di essere nello stato 3 dopo 4 prove?~~

   ~~(d) Dopo un lunghissimo tempo, qual é la probabilitá di essere nello stato 6?~~



~~6) Usare il metodo acceptance-rejection generando campioni uniformemente distribuiti in $[0, 1]$ per campionare da una v.a. X con ddp~~

$$\cancel{f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \le x \le 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}}$$

~~Scrivere l'algoritmo acceptance-rejection con la miglior efficienza possibile. Mediamente quanti campioni bisogna generare per vederne uno accettato?~~

Soluzioni

Problema 1

Dopo aver cambiato le carte 4 e 7 si rimane con le carte JJA. Nel mazzo rimangono $52 - 5 = 47$ carte, di cui 2 carte J e 3 carte A. Si ottiene un full nei seguenti casi

1. Si pescano 2 assi. Questo avviene con probabilitá $\frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46}$
2. Si pescano, in ordine, un J e un asso, oppure un asso e un J. Questo avviene con probabilitá $\frac{2}{47} \cdot \frac{3}{46} + \frac{3}{47} \cdot \frac{2}{46}$.

La probabilitá di ottenere un full si ottiene sommando le probabilitá dei due casi sopra elencati.

Lo stesso esercizio si poteva risolvere ricorrendo alle probabilitá ipergeometriche, partizionando le carte rimaste nel mazzo nel gruppo di assi, gruppo di J, e carte rimanenti.

Problema 2

Per determinare la ddp di Y si puó usare il metodo della cumulata:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr(Y \leq y) \\ &= \Pr(\sqrt{X} \leq y) \\ &= \Pr(X \leq y^2) \\ &= F_X(y^2) \\ &= 1 - e^{-\lambda y^2}, \qquad y \geq 0. \end{aligned}$$

Dunque si ha

$$f_Y(y) = \frac{dF_y}{dy}(y) = 2\lambda y e^{-\lambda y^2}, \qquad y \geq 0.$$

Il momento secondo é

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[Y^2] &= \mathsf{E}[X] \\ &= \int_0^\infty x \cdot f_x(x) dx \\ &= 1/\lambda. \end{aligned}$$

Problema 3

Le probabilitá di errore sono

$$\begin{aligned} \Pr(Y > 0 | X = -1) &= \Pr(X + Z > 0 | X = -1) \\ &= \Pr(Z > 1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pr(Y < 0 | X = 1) &= \Pr(X + Z < 0 | X = 1) \\ &= \Pr(Z < -1) = 1 - \Phi(1) = 0.1587 \end{aligned}$$

Probabilitá di errore media:

$$P_e = \Pr(X = -1) \Pr(Y > 0 | X = -1) + \Pr(X = 1) \Pr(Y < 0 | X = 1) = 0.1587. \tag{1}$$

Visto che probabilitá media e probabilitá condizionata coincidono, da qui in poi basta considerare solo una prob. condizionata. Alzando la potenza si deve richiedere che

$$\Pr(Y > 0 | X = -a) \overset{!}{\leq} 2 \cdot 10^{-2}$$

ovvero

$$\Pr(Z > a) = 1 - \Phi(a) \leq 2 \cdot 10^{-2}$$

$$a \geq \Phi^{-1}(1 - 2 \cdot 10^{-2}) \approx 2.05$$

Problema 4

L'istante di rottura di ogni lampadina puó essere interpretato come l'arrivo di un processo di Poisson, quindi si hanno 10 processi indipendenti di Poisson, ognuno a tasso λ.

Per la rottura della prima lampadina si puó considerare il processo unione di tutti i 10 processi di Poisson, avendo cosí un unico processo di Poisson a tasso 10λ. Sia T_1 il tempo del primo interarrivo del processo di Poisson unione, quindi $T_1 \sim \text{Exp}(10\lambda)$. La probabilitá che la prima lampadina si spenga prima del tempo μ é:

$$\Pr(T_1 \leq \mu) = F_{T_1}(\mu) = 1 - e^{-10\lambda\mu}.$$

Sia T_2 il tempo di interarrivo tra la prima rottura e la seconda rottura. Siccome dopo la prima rottura rimangono 9 lampadine accese, $T_2 \sim \text{Exp}(9\lambda)$, e T_1 é indipendente da T_2. La probabilitá che la seconda lampadina si spenga non prima di un tempo μ dalla prima rottura é:

$$\Pr(T_2 \geq \mu) = 1 - \Pr(T_2 \leq \mu) = 1 - F_{T_2}(\mu) = e^{-9\lambda\mu}. \tag{2}$$

Problema 5

1. Gli stati transienti sono $1, 4, 5$. Gli stati ricorrenti sono $2, 3, 6$.
2. La probabilitá di uscire dallo stato 1 é 0.7 in ogni prova. Tutte le prove sono indipendenti, quindi la prob. di uscire dopo la prova k-esima é geometrica di parametro 0.7:

   $$\Pr(K = k) = 0.7 \cdot 0.3^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

   La media vale $\mathsf{E}[K] = 1/0.7$.
3. Dopo 4 prove si puó finire nello stato 3 seguendo i percorsi:
   - $1 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.8 = 0.0216$
   - $1 \to 1 \to 2 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.0144$
   - $1 \to 2 \to 2 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.2 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = 0.0096$
   - $1 \to 2 \to 3 \to 2 \to 3$ che avviene con prob. $0.3 \cdot 0.8 \cdot 1 \cdot 0.8 = 0.192$

   La somma delle prob. precedenti é il risultato cercato.
4. La prob. di trovarsi nello stato 6 dopo un lunghissimo tempo é pari alla prob. di uscire dalla stato 1 verso lo stato 4, quindi:

   $$\frac{0.4}{0.4 + 0.3} = \frac{4}{7}.$$

Problema 6

Il massimo della funzione f_X nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$ si ha per $x = 1/2$. In tal punto la funzione vale $f_X(1/2) = 6/4 = 3/2$. Pertanto si deve scegliere $m = 3/2$ per ottenere la miglior efficienza possibile dell'algoritmo.

L'algoritmo é il seguente:

1. Genero $U \sim \text{U}[0, 1]$ e $U' \sim \text{U}[0, m]$ in maniera indipendente.
2. Accetto e pongo $X = U$ se $U' \leq f_X(U)$, altrimenti torno al punto 1.

Il numero di prove medie per avere un campione accettato é pari a $m = 3/2$.