SISTEMA INTERCONNESSO

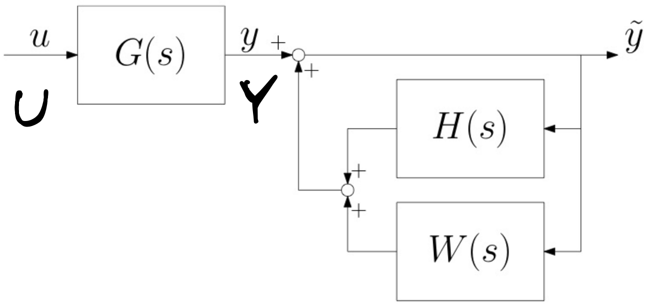
Esercizio 1

Si consideri il seguente sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -2x_1(t) + x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = -3x_2(t) + 3u(t) \\ y(t) = x_2(t) \end{cases}$$

1.1. Determinare (ed analizzare) la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema

1.2. Dato il seguente schema, con $H(s) = -1/(s+2)$ e $W(s) = -1/(s+4)$, determinare la fdt da u a $\tilde{y}$ e valutare (se possibile) la stabilità del sistema interconnesso



1)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 0 & s+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3\cancel{(s+2)}}{\cancel{(s+2)}(s+3)} = \boxed{\frac{3}{s+3}}$$

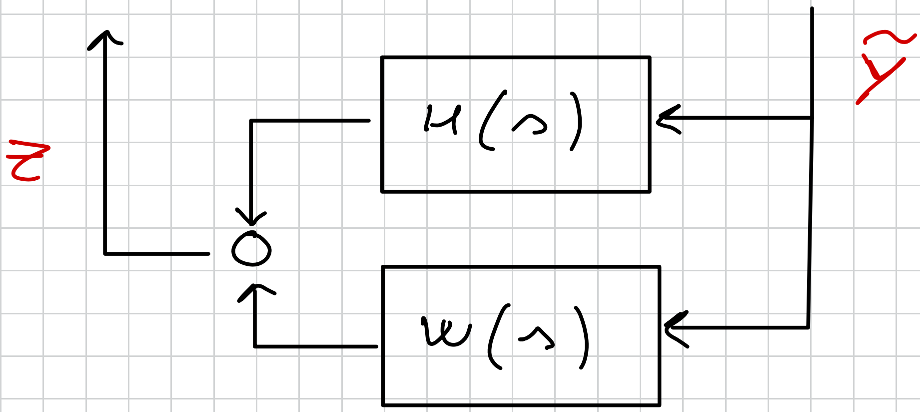
$\downarrow$

CANCELLA Z. <u>NON</u> CRITICA $\quad s=-2<0$

$\Downarrow$

$\Rightarrow$ A.S. STABILE

2) • $H(s) \; // \; W(s)$

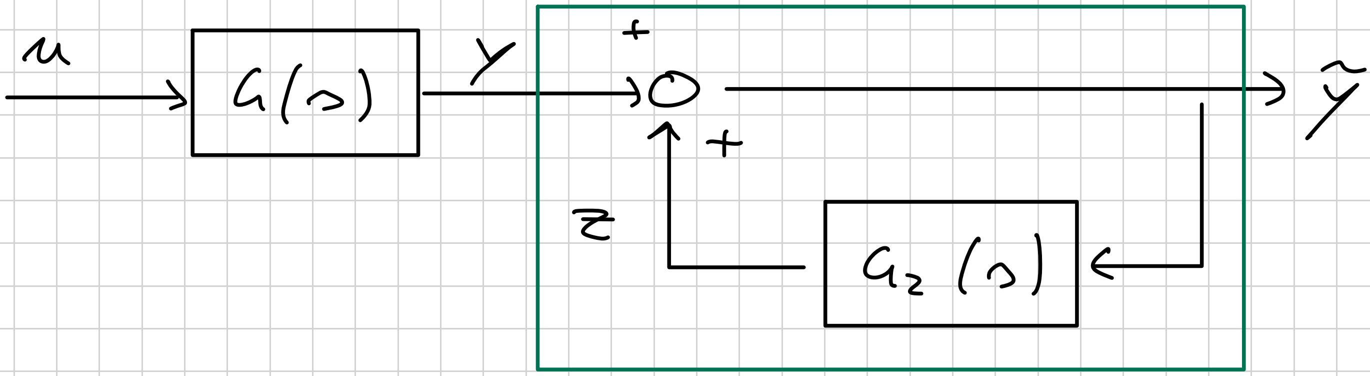


$$Z(s) = H(s)\,\tilde{Y}(s) + W(s)\,\tilde{Y}(s) =$$

$$= \left[H(s) + W(s)\right]\tilde{Y}(s)$$

$$= \left[-\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+4}\right]\tilde{Y}(s)$$

$$\frac{Z(s)}{\tilde{Y}(s)} = \frac{-2(s+3)}{(s+2)(s+4)} = G_2(s)$$



$$\tilde{Y}(s) = \boxed{\frac{1}{1 - G_2(s)}}\, Y(s)$$

FdT
$u \to \tilde{y}$

- $$\tilde{Y}(s) = \boxed{\frac{1}{1 - G_2(s)} \cdot G(s)} \cdot U(s)$$

$$\frac{\tilde{Y}(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_2(s)} = \frac{3/(s+3)}{1 + \frac{2(s+3)}{(s+2)(s+4)}} =$$

$$= \frac{3(s+2)(s+4)}{(s+3)\left[(s+2)(s+4) + 2(s+3)\right]}$$

$$= \dots = \frac{3(s+2)(s+4)}{(s+3)(s^2+8s+14)}$$

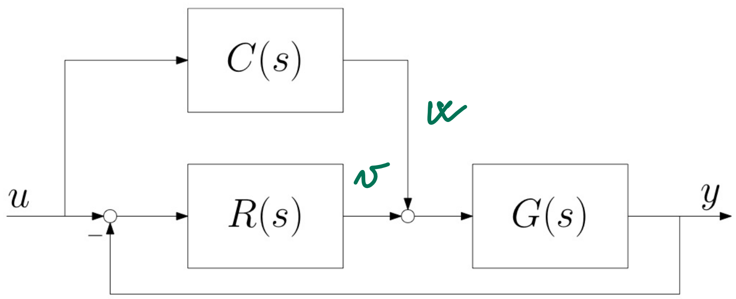
$$\Downarrow$$

SISTEMA ASINTOTICAMENTE STABILE

SISTEMI INTERCONNESSI : BLOCCHI IN "ANELLO APERTO"

Esercizio 2

Si consideri il seguente schema



2.1. Determinare (ed analizzare) la funzione di trasferimento da u a y

2.2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false

- Il sistema è asintoticamente stabile solo se R, C, G sono A.S.
- Se C è instabile allora il sistema è instabile

1)

$$Y(s) = G(s)\left[W(s) + V(s)\right] =$$

$$= G(s)\left[C(s)\,U(s) + R(s)\left[U(s) - Y(s)\right]\right]$$

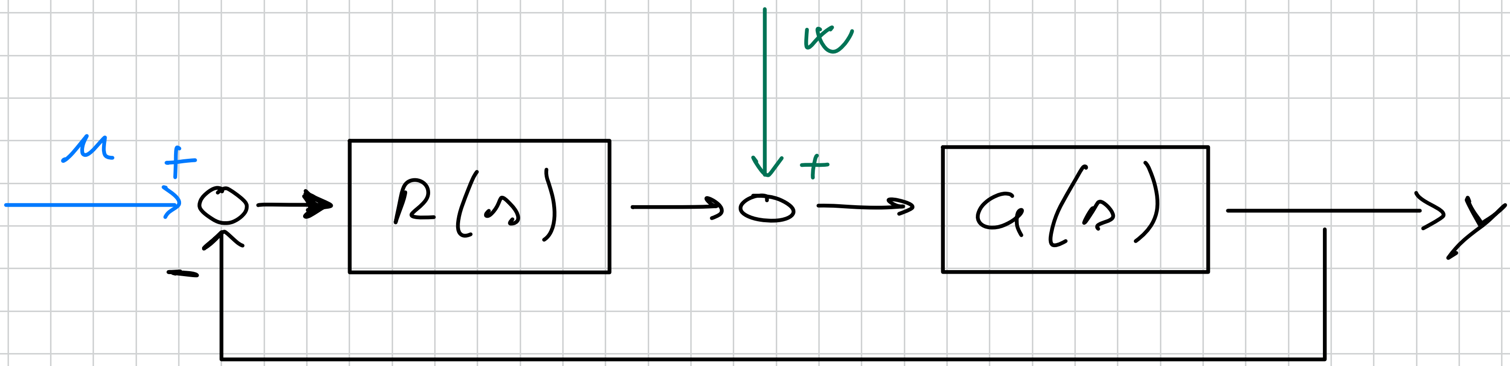
$$= G(s)\,C(s)\,U(s) + G(s)\,R(s)\,U(s) - G(s)\,R(s)\,Y(s)$$

$$Y(s)\left[1 + G(s)\,R(s)\right] = \left[G(s)\,C(s) + G(s)\,R(s)\right]U(s)$$

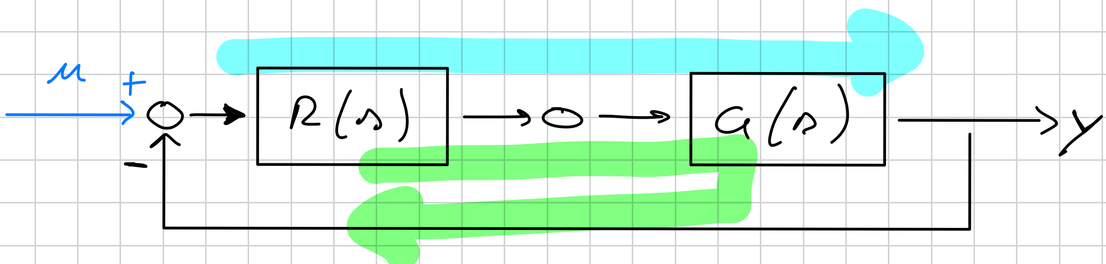
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)\left[C(s) + R(s)\right]}{1 + G(s)\,R(s)}$$

METODO ALTERNATIVO :

SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI e GENERICHE FUNZIONI AD ANELLO

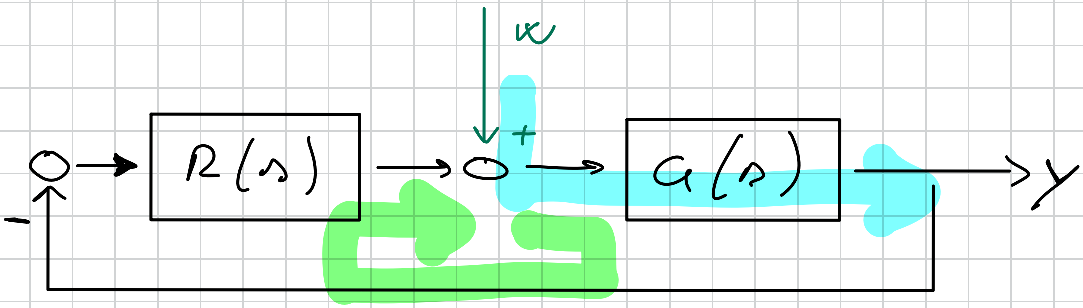


- CONSIDERIAMO L'EFFETTO DI u su y

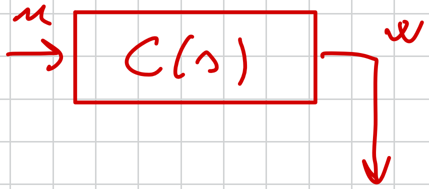


$$Y_1(s) = \frac{R(s)\,G(s)}{1 + R(s)\,G(s)}\,U(s)$$

- CONSIDERIAMO L'EFFETTO DI w su Y



$$Y_2(s) = \frac{G(s)}{1 + R(s)\,G(s)}\,W(s)$$



$$W(s) = C(s)\,U(s)$$

$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) =$$

$$= \left[\frac{RG}{1+RG} + \frac{GC}{1+RG}\right] U(s)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)\left[R(s)+C(s)\right]}{1+R(s)\,G(s)}$$

2)

- <u>FALSO</u>, DIPENDE DALLA TOPOLOGIA DEL SISTEMA!! LA RETROAZIONE (al contrario della serie e del parallelo) SPOSTA GLI AUTOVALORI (POLI) DEL SISTEMA
- VERO: C è connesso in <u>SERIE</u> al sistema

  ↳ i poli di C non sono spostati dalla retroazione e li troviamo nella funzione di trasferimento complessiva ($u \to y$)

RISPOSTA IN FREQUENZA

Esercizio 3

Si consideri la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \overset{9}{\cancel{10}} \frac{s+1}{(s+0.1)(s^2+20s+100)}$$

3.1. Scrivere la funzione di trasferimento nella forma guadagno/costanti di tempo

3.2. Calcolare la risposta a regime all'ingresso $u(t) = \sin(0.01t)$

1) GUADAGNO :

$$\mu = \lim_{s\to 0} G(s) = \frac{10}{0{,}1 \cdot 100} = 1$$

- zeri : $z_1 = -1 \rightarrow \tau_1 = \frac{1}{|-1|}$
- poli : $p_1 = -0{,}1$ $\quad p_2 = p_3 = -10$

$$(s^2+20s+100) = (s+10)^2$$

$$G(s) = 1 \cdot \frac{s+1}{\left(\frac{s}{0{,}1}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)^2} =$$

$$= \frac{s+1}{(10s+1)(0{,}1s+1)^2}$$

2) $u(t) = \underbrace{\boxed{}}_{|U(j\omega)|} \sin(\underbrace{0{,}01}_{\omega}\, t \overbrace{}^{\varphi=0})$

TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQ

$$y_\infty = |G(j\omega)|\,\underbrace{|U(j\omega)|}_{1}\,\sin(\underline{\omega}t + \cancel{\varphi}^{\,0} + \angle G(j\omega))$$

$$\boxed{0{,}01}$$

$$|G(j\cdot 0{,}01)| = \left|\frac{(0{,}01j+1)}{(10\cdot 0{,}01j+1)(0{,}1\cdot 0{,}01j+1)^2}\right|$$

$$|\,| = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1^2 + (10^{-2})^2}}{\sqrt{1^2+(10^{-1})^2}\cdot\quad (10^{-3})^2+1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1+10^{-4}}}{\sqrt{1+10^{-2}}\,(1+10^{-6})} \approx 1$$

$$\angle G(j0{,}01) = \angle(j0{,}01+1) - \angle(j0{,}1+1) - \angle(j0{,}001+1)^2$$

$$\operatorname{atan}\left(\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$= \cancel{\operatorname{atan}(0{,}01)} - \underline{\operatorname{atan}(0{,}1)} - 2\operatorname{atan}\cancel{(0{,}001)}$$

$$= -0{,}0997\ \mathrm{rad} \approx -5{,}7^\circ$$

RISPOSTA A REGIME:

$$\Rightarrow \quad y_\infty = \sin(0{,}01t - 0{,}0997)$$

RISPOSTA IN FREQUENZA

Esercizio 4

Si consideri la funzione di trasferimento di un sistema LTI di ordine 2

$$G(s) = \frac{s+1}{(1+10s)(1+0.01s)}$$

4.1. Determinare tipo, guadagno, poli e zeri della fdt

4.2. Determinare la costante di tempo dominante del sistema e scrivere l'approssimazione a poli dominanti

4.3. Calcolare l'uscita di regime del sistema con fdt pari a $G(s)$ quando $u(t) = (e^{-2t} + 5 + \sin(0.01t) + \sin(t))sca(t)$

1) GUADAGNO: $\mu = \lim_{s \to 0} G(s) = 1$

Zeri: $z_1 = -1$

poli: $p_1 = -0,1$ $\quad p_2 = -100$

2) $\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = 10\,s$ $\quad \tau_2 = \frac{1}{|-100|} = 0,01\,s$

$T_D = T_1$ COSTANTE DI TEMPO MAGGIORE!

APPROSSIMAZIONE AI POLI DOMINANTI: $G(s) \simeq G_A(s) = \frac{1}{1+10s}$

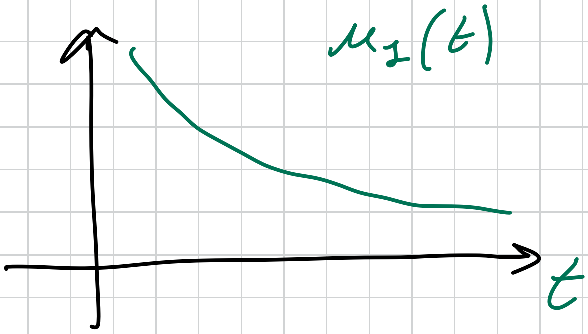
3) $u(t) = e^{-2t} + 5 + \sin(0,01t) + \sin(t$

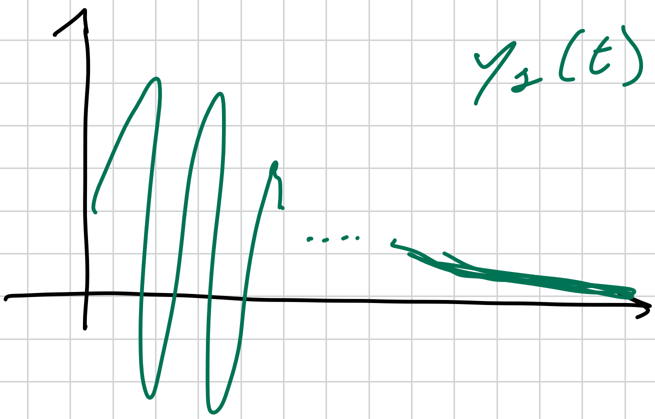
SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

- $u_1 = e^{-2t} \cdot \mathrm{sca}(t) \longrightarrow U(s) = \dfrac{1}{s+2}$

$$Y_{1\infty} = \lim_{s \to 0} s\, Y_1(s) = \qquad Y(s) = G(s) \cdot U(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{s+1}{(1+10s)(1+0{,}01s)} \cdot \frac{1}{s+2} = 0$$





N.B.: a regime l'effetto dell'esponenziale svanisce

- $u_2(t) = 5\, \mathrm{sca}(t) \longrightarrow U(s) = \dfrac{5}{s}$

$$Y_{2\infty} = \lim_{s \to 0} s\, Y_2(s) =$$

$$= \lim_{s \to 0} s \boxed{\frac{(s+1)}{(1+10s)(1+0{,}01s)}} \cdot \frac{5}{s} = 5$$

- $u_3(t) = \sin(\underbrace{0{,}01}_{\omega}\, t)$

$$\left| G(0{,}01j) \right| = \frac{\left| 0{,}01j + 1 \right|}{\left| (1+0{,}1j)(1+0{,}0001j) \right|}$$

$$= \frac{\sqrt{10^{-4}+1}}{\sqrt{1+10^{-2}}\ \sqrt{1+10^{-8}}} \simeq 1$$

$$\angle G(0{,}01j) = \cancel{\operatorname{atan}(0{,}01)} - \operatorname{atan}(0{,}1) - \cancel{\operatorname{atan}(0{,}0001)}$$

$$= -0{,}0997 \simeq -5{,}7^\circ$$

$$y_{300} = \sin(0{,}01t - 0{,}0997)$$

- $u_4 = \sin(t)$

$$\left| G(j) \right| = \left| \frac{j+1}{(1+10j)(1+0{,}01j)} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{1+10^2}\ \cancel{\sqrt{1+10^{-4}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{101}} \simeq 0{,}14$$

$$\angle G(j) = \operatorname{atan}(1) - \operatorname{atan}(10) - \operatorname{atan}(0{,}01)$$

$$= 45^\circ - 90^\circ = -45^\circ \simeq -0{,}78 \text{ rad}$$

$$y_{4\infty} = 0,14 \sin(t - 0,78)$$

$$\Longrightarrow y_{\infty} = y_{1\infty} + y_{2\infty} + y_{3\infty} + y_{4\infty} =$$

$$= 0 + 5 + \sin(0,01t - 0,087) +$$

$$+ 0,14 \sin(t - 0,78)$$

RICAVARE SCHEMA A BLOCCHI

Esercizio 5

Si consideri il sistema dinamico con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$ descritto dalle seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = w(t) + 2x(t) \\ \dot{z}(t) = 4y(t) \\ \dot{y}(t) = -4y(t) + 5(w(t) - z(t)) \\ x(t) = u(t) + 10y(t) \end{cases}$$

5.1. Si disegni lo schema a blocchi corrispondente.

5.2. Si calcoli la funzione di trasferimento complessiva tra l'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$.

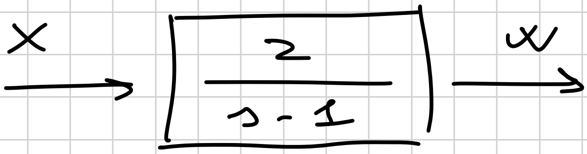
5.3. Come si sarebbe potuta calcolare tale funzione di trasferimento in modo alternativo?

5.4. Il sistema complessivo è asintoticamente stabile?

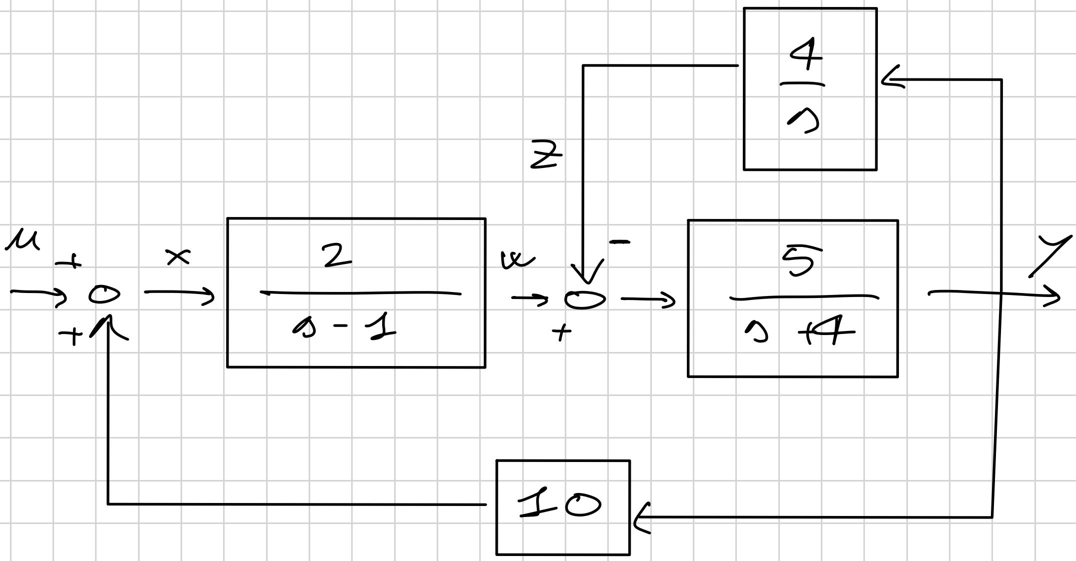
1) RICAVO I SOTTOSISTEMI A PARTIRE DALLE EQUAZIONI DEL SISTEMA:

- $\dot{w}(t) = w(t) + 2x(t)$

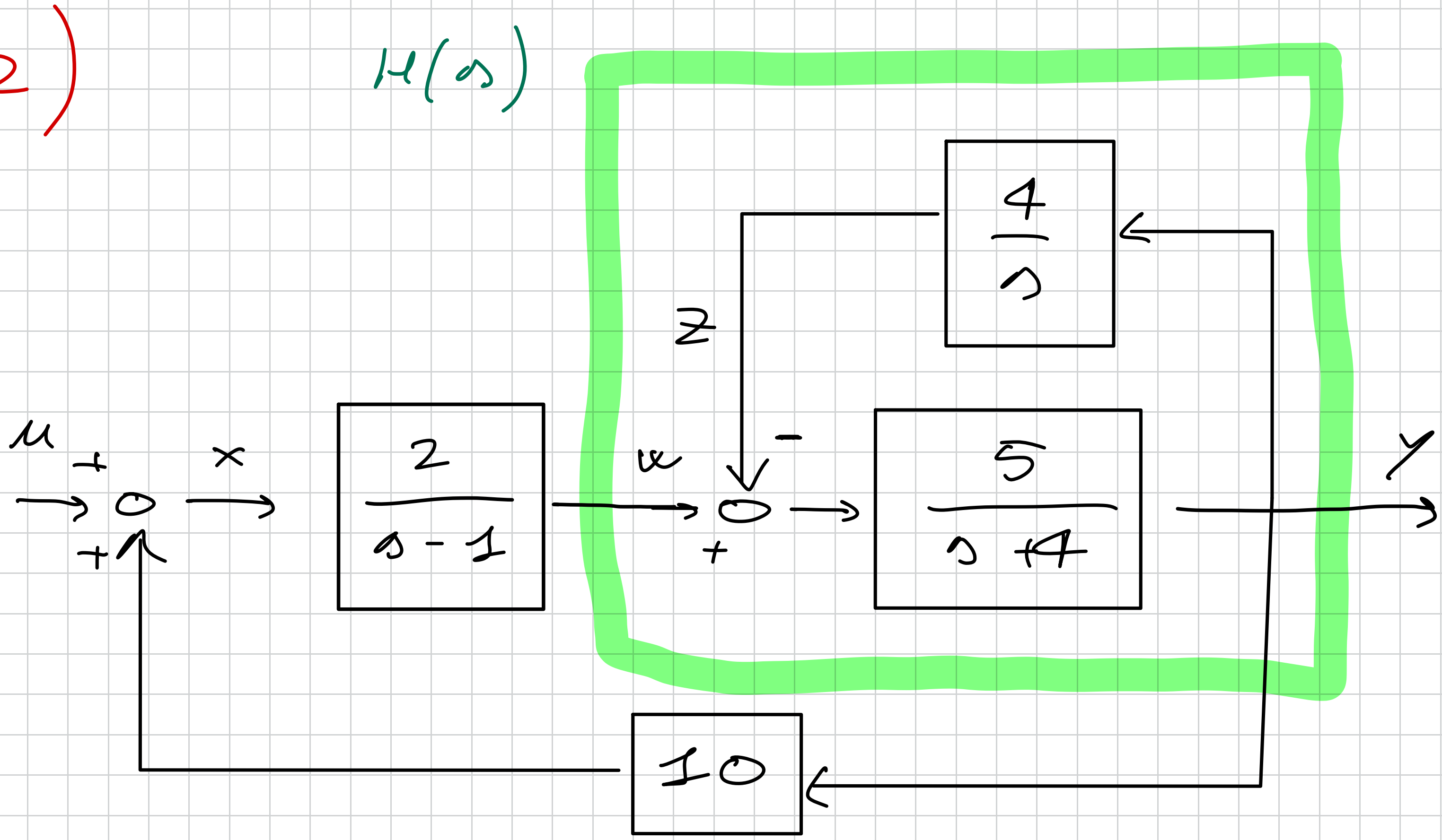
$$sW(s) = W(s) + 2X(s)$$

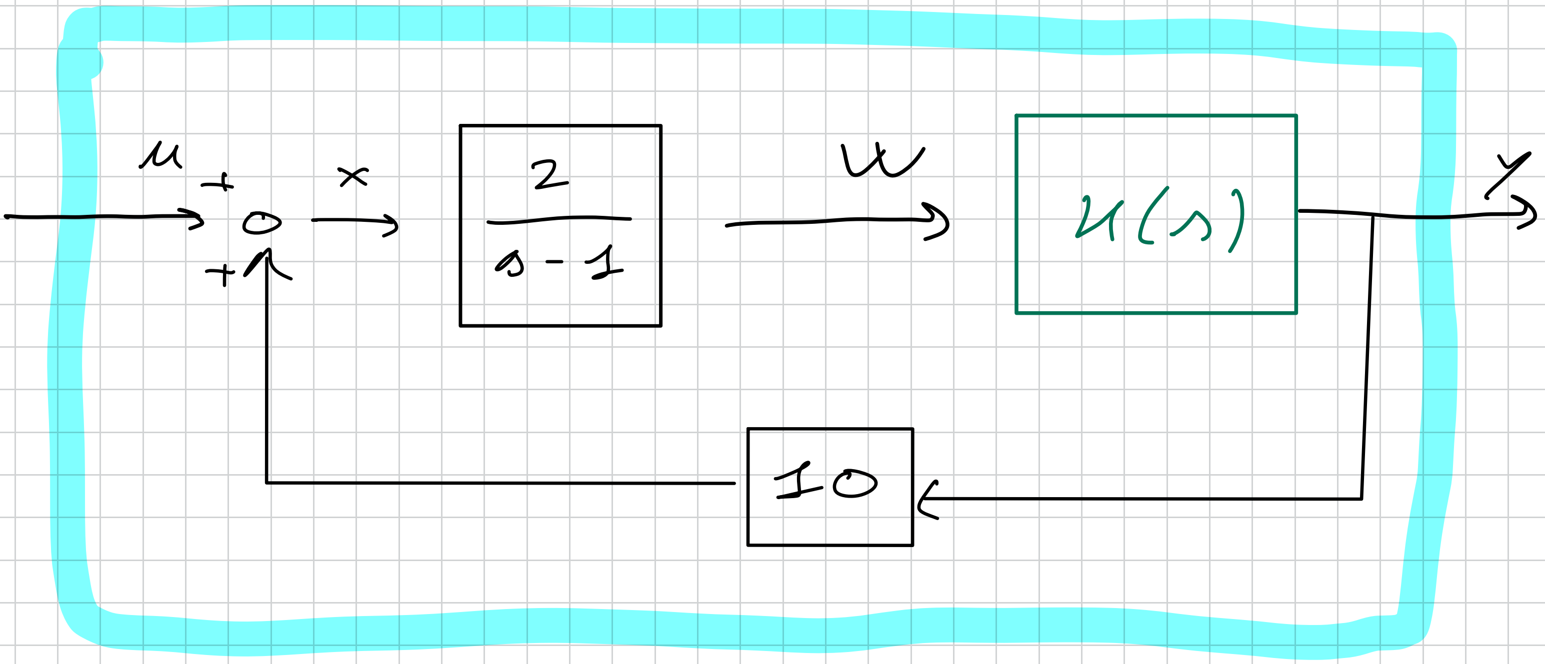


$\Rightarrow$



2)





$$G(s) = \frac{10s}{s^3+3s^2-84s-20}$$

3) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$

4) INSTABILE! Condizione necessaria per il sistema per essere A. STAB. è avere i coefficienti concordi