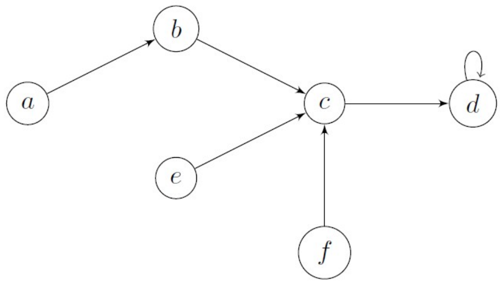
LOGICA E ALGEBRA

26 GIUGNO 2023

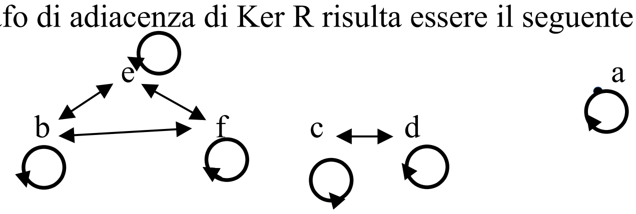
Traccia di soluzione

<u>Esercizio 1</u>

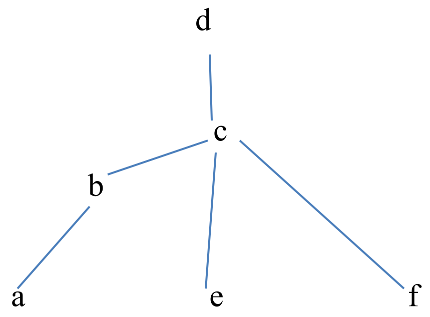
Sia $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ e sia R la relazione su X rappresentata dal seguente grafo di adiacenza:



a) La relazione R è una funzione in quanto risulta quanto segue:
   $\forall x \in X \quad \exists !\, y \in X \quad (x,y) \in R$
   Tale funzione non ammette inversa sinistra in quanto R non è suriettiva, non esiste ad esempio la controimmagine dell'elemento a.
   R non ammette neppure inversa destra in quanto non è iniettiva, ad esempio gli elementi b ed e hanno la stessa immagine tramite R.
b) Il grafo di adiacenza di Ker R risulta essere il seguente:



   pertanto l'insieme quoziente X/ker R risulta essere $X/\ker R=\{(\ker R)_b,(\ker R)_c, (\ker R)_a\}$, dove $(\ker R)_b =\{b, e, f\}$, $(\ker R)_c =\{c, d\}$ e $(\ker R)_a =\{a\}$.
c) Può esistere la chiusura d'ordine di R in quanto R è antisimmetrica.
   Chiudendo riflessivamente e transitivamente la relazione R si ottiene un relazione ancora antisimmetrica che risulta essere la chiusura d'ordine cercata ed il cui diagramma di Hasse è il seguente:



Dal diagramnma si evince che sup $\{a, e\} = c$.

d) Si consideri ora la formula della logica del primo ordine

$$\forall x\, (\exists y A(x, y) \Rightarrow \exists z \forall x A(x, z))$$

nell'interpretazione in cui il dominio è X e la relazione A risulta essere R^2.

Osservando che R^2 risulta avere la seguente matrice di incidenza

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si ha che il conseguente dell'implicazione $\exists z \forall x A(x, z)$ è una sottoformula falsa nell'interpretazione considerata mentre l'antecedente $\exists y A(x, y)$ risulta essere vero, essendo R^2 una relazione seriale. Segue che la formula $\exists y A(x, y) \Rightarrow \exists z \forall x A(x, z)$ è falsa nell'interpretazione considerata e quindi l'intera formula assegnata risulta essere falsa nell'interpretazione considerata poiché è chiusura universale di una formula falsa.

La forma di Skolem della formula data, come è noto, si ottiene portando la f.b.f. in forma normale prenessa.

Utilizzando le note equivalenze si ha:

$\forall x\, (\exists y A(x, y) \Rightarrow \exists z \forall x A(x, z)) \equiv \forall x\, \forall t\, (A(x, t) \Rightarrow \exists z \forall x\, A(x, z)) \equiv \forall x\, \forall t\, \exists z\, \forall y\, (A(x, t) \Rightarrow A(y, z))$

che è la forma normale prenessa della f.b.f. assegnata da cui segue la forma di Skolem cercata:

$\forall x\, \forall t\, \forall y\, (A(x, t) \Rightarrow A(y, f_1^2(x,t)))$.

Ricordando che la forma di Skolem ottenuta risulta essere soddisfacibile se e solo se lo è la formula iniziale deduciamo che non può essere logicamente valida in quanto abbiamo visto che esiste una interpretazione in cui la formula assegnata non è mai soddisfatta. La forma di Skolem non può essere neppure logicamente contraddittoria in quanto considerando l'interpretazione avente come dominio X e come relazione A la chiusura d'ordine di R si ha che la formula iniziale è vera e pertanto la sua forma di Skolem risulta soddisfacibile in qualche interpretazione.

Esercizio 2

Consideriamo le seguenti lettere proposizionali

A: la pressione rimane costante

B: il volume rimane costante

C: la temperatura cambia

e riscriviamo le affermazioni a), b) e c) nella logica proposizionale.

a) $F_1 \equiv A \wedge \neg B \Rightarrow C$

b) $F_2 \equiv \neg A \wedge B \Rightarrow C$

c) $F_3 \equiv \neg C \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee (A \wedge B)$

Da a) e b) otteniamo rispettivamente le clausole

$C_1 = \{\neg A, B, C\}$

$C_2 = \{A, \neg B, C\}$

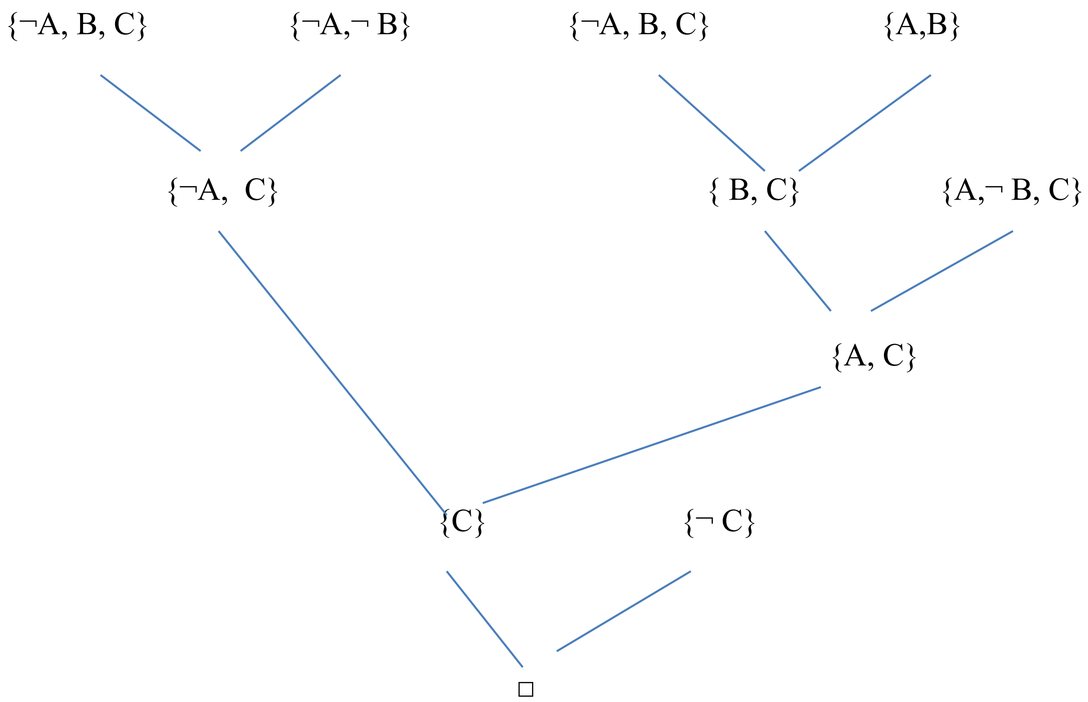
Negando c) si ottiene $\neg C \wedge ((A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ da cui si ricavano le clausole

$C_3 = \{\neg C\}$

$C_4 = \{A, B\}$

$C_5 = \{\neg A, \neg B\}$

Si ottiene pertanto il seguente albero di derivazione della clausola vuota:



Per il teorema di correttezza e completezza per refutazione si ha che $\{F_1, F_2\} \models F_3$ se e solo se $\{F_1, F_2, \sim F_3\} \vdash_R \square$, pertanto è dimostrata la tesi.

Esercizio 3

a) Si consideri A = R x R dotato delle seguenti operazioni:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x_1, y_1) \star (x_2, y_2) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

Osserviamo che (A, +) è gruppo abeliano in quanto:

- l'operazione + è associativa essendo associativa l'operazione di addizione in R;
- la coppia (0, 0) è l'elemento neutro;
- l'opposto di ogni elemento (x, y) è la coppia (-x,-y);
- l'abelianità segue dalla commutatività dell'operazione di addizione in R.

L'insieme (A, $\star$) è un semigruppo in quanto vale la proprietà associativa:

$((x_1, y_1) \star (x_2, y_2)) \star (x_3, y_3) = (x_1x_2, x_1y_2 + x_2y_1) \star (x_3, y_3) = ((x_1x_2x_3, x_1x_2y_3 + x_3(x_1y_2 + x_2y_1))$

$(x_1, y_1) \star ((x_2, y_2) \star (x_3 y_3)) = (x_1, y_1) \star (x_2x_3, x_2y_3 + x_3y_2) = (x_1(x_2x_3), x_1(x_2y_3 + x_3y_2) + (x_2x_3) y_1)$

da cui, per l'associatività della moltiplicazione in R e la distributività della moltiplicazione rispetto all'addizione in R, si ha la tesi. La coppia (1,0) risulta essere l'unità dell'anello ed infine A con semplice verifica risulta essere commutativo. Valgono inoltre le proprietà distributive di $\star$ rispetto a +:

$((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) \star (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \star (x_3, y_3) = ((x_1 + x_2)x_3, (x_1 + x_2)y_3 + (y_1 + y_2)x_3) =$

$= (x_1x_3 + x_2x_3, x_1 y_3 + x_2y_3 + y_1 x_3 + y_2x_3) = (x_1, y_1) \star (x_3, y_3) + (x_2, y_2) \star (x_3, y_3)$.

Segue che (A, +, $\star$) è un anello commutativo unitario.

b) Il sottoinsieme di A così definito $I = \{ (0,y) \mid y \in R\}$ è un ideale in quanto:

$\forall y_1, \forall y_2 \in R \qquad (0, y_1) - (0, y_2) = (0, y_1 - y_2) \in I$

$\forall (x,y) \in A, \forall (0, y_1) \in I \qquad (x, y) \star (0, y_1) = (0, xy_1) \in I$

c) Consideriamo ora la formula

$$\forall x (\neg E(x, a) \Rightarrow \exists y E(p(x, y),b))$$

nell'interpretazione ove A è il dominio, E l'uguaglianza, p il prodotto in A, a lo zero dell'anello e b la sua unità. Osserviamo che la formula è chiusa pertanto può essere solo vera o falsa e che solo le coppie (z,w), con prima componente non nulla, ammettono inverso rispetto al prodotto in A e in quanto tale inverso è la coppia ($\frac{1}{z}$,- $\frac{w}{z^2}$). Pertanto la formula nell'interpretazione considerata risulta essere falsa poiché, ad esempio, la coppia (0, 1) è diversa dallo zero dell'anello ma non risulta invertibile avendo prima componente nulla. La formula pertanto non è logicamente valida.