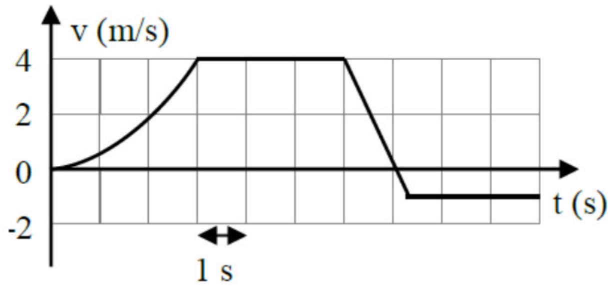
- La (d) è falsa, perché se $\vec{v}' = 0$ la forza di Coriolis è nulla pur in presenza di una $\vec{\omega} \neq 0$.
- La (c) è dunque l'unica risposta corretta; infatti, riporta in sintesi la condizione necessaria perché si abbia $\vec{F}_{co} \neq 0$.

Form 2 - Problemi con svolgimento cartaceo

1. Il grafico riporta l'andamento nel tempo della velocità di un'automobile di massa $m = 1200$ kg che si muove di moto rettilineo nell'intervallo 0-10 s.



Sapendo che nel primo tratto (tra 0 e 3 s) l'andamento è parabolico con tangente orizzontale nell'origine, calcolare:

(a) lo spostamento e la velocità media dell'auto in detto intervallo; `[3 punti]`

- Poiché l'andamento di $v(t)$, nel primo tratto 0-3 s, è parabolico con tangente orizzontale nell'origine, la funzione $v(t)$ in quel tratto ha la forma:

$$v = bt^2$$

dove b è una costante appropriata. Possiamo valutare la costante b osservando che in $t_1 = 3$ s la velocità è $v(t_1) = v_1 = 4$ m/s:

$$v_1 = b \cdot t_1^2 \qquad \rightarrow \qquad b = \frac{v_1}{t_1^2}$$

Calcoliamo lo spostamento integrando la velocità nel tempo:

$$\Delta s_1 = \int_0^{t_1} v(t)\, dt = \int_0^{t_1} bt^2\, dt = \frac{1}{3} b t_1^3$$

$$\Delta s_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{v_1}{t_1^2} \cdot t_1^3 = \frac{1}{3} v_1 t_1$$

$$\Delta s_1 = \frac{4 \cdot 3}{3}\ \text{m} = 4\ \text{m}$$

- Nel secondo tratto l'auto si muove a velocità costante $v_2 = v_1$ per un tempo $\Delta t = t_2 - t_1 = 3$ s. Dalla legge del moto uniforme:

$$\Delta s_2 = v_1 \cdot \Delta t = 4\ \text{m/s} \cdot 3\ \text{s} = 12\,\text{m}$$

- Nel terzo tratto la velocità decresce linearmente passando da $v_2 = 4$ m/s a $v_3 = -1$ m/s. Si tratta di un moto uniformemente decelerato. L'accelerazione istantanea coincide con l'accelerazione media:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Per valutare a possiamo riferirci all'intervallo di tempo tra $t = 6$ s e $t = 7$ s, in cui la velocità passa da 4 m/s a 0 m/s in un intervallo di tempo di 1 s:

$$a = \frac{0-4}{1}\ \text{m/s}^2 = -4\ \text{m/s}^2$$

Impiegando le formule del moto uniformemente accelerato, possiamo scrivere allora:

$$2a\Delta s_3 = v_3^2 - v_2^2$$

$$\Delta s_3 = \frac{v_3^2 - v_2^2}{2a} = \frac{1-16}{-2\cdot 4}\ \text{m} = 1.88\ \text{m}$$

- Nel quarto tratto l'auto si muove a velocità costante $v_3 = -1$ m/s, fino all'istante $t_4 = 10$ s. L'istante di tempo t_3 in cui comincia il quarto tratto, non identificabile in modo diretto dal grafico, può essere calcolato applicando ancora le relazioni valide per il moto uniformemente accelerato al terzo tratto:

$$a \cdot (t_3 - t_2) = (v_3 - v_2)$$

$$t_3 = t_2 + \frac{v_3 - v_2}{a} = 6\ \text{s} + \frac{-1-4}{-4}\ \text{s} = 7.25\ \text{s}$$

Lo spostamento nel quarto tratto è perciò:

$$\Delta s_4 = v_3 \cdot (t_4 - t_3) = -1\ \text{m/s} \cdot 2.75\ \text{s} = -2.75\ \text{m}$$

- Lo spostamento complessivo è:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \Delta s_4 = (4 + 12 + 1.88 - 2.75)\ \text{m} = 15.13\ \text{m}$$

- Calcoliamo la velocità media dalla definizione:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{15.13\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 1.51\ \text{m/s}$$

(b) la risultante delle forze applicate all'auto nei diversi tratti di tempo. `[3 punti]`

- Nel **primo tratto** 0-3 s, l'accelerazione può essere calcolata come:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2bt$$

Dal Secondo Principio della Dinamica, la risultante delle forze applicate è:

$$F = ma = 2mbt = 2\frac{mv_1}{t_1^2} \cdot t = \frac{2 \cdot 1200 \cdot 4}{9}\ \text{N/s} \cdot t \simeq 1067\ \text{N/s} \cdot t$$

Ovvero, la risultante delle forze cresce linearmente con il tempo t.

- Nel **secondo tratto** e nel **tratto finale** la velocità è costante.

$$v = cost. \qquad \rightarrow \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

per cui la risultante delle forze è:

$$F = ma = 0$$

- Nel **terzo tratto** la velocità decresce linearmente nel tempo. Abbiamo già calcolato l'accelerazione al punto precedente. La forza risultante è dunque in modulo pari a:

$$|F| = m \cdot |a| = 1200 \cdot 4 \text{ N} = 4.8 \text{ kN}$$

ed è orientata nel verso negativo dell'ascissa curvilinea.

(c) Si ricavino le equazioni parametriche ($x = x(t)$, $y = y(t)$) del moto di un proiettile conoscendo l'accelerazione vettoriale $\vec{g}$ a cui è sottoposto. `[2 punti]`

- Come richiesto, consideriamo il moto di un punto materiale che si muove con accelerazione vettoriale costante $\vec{g}$ e con velocità vettoriale iniziale $\vec{v}_0$.
- Integrando l'accelerazione nel tempo otteniamo l'equazione della velocità:

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{g}\, dt + \vec{v}_0 = \vec{g}\, t + \vec{v}_0$$

e integrando ulteriormente otteniamo l'equazione vettoriale del moto:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t (\vec{g} \cdot t + \vec{v}_0)\ dt + \vec{r}_0 = \frac{1}{2}\vec{g}\, t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

- Per scrivere le equazioni scalari di $x(t)$ e $y(t)$ dobbiamo fissare un sistema di coordinate cartesiane su cui proiettare l'equazione vettoriale. Consideriamo un asse y diretto verso l'alto, tale per cui:

$$\vec{g} = -g\vec{u}_y$$

Consideriamo inoltre un asse x ad esso ortogonale, disposto in modo che $\vec{v}_0$ giaccia sul piano xy e sia perciò:

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{u}_x + v_{0y}\vec{u}_y$$

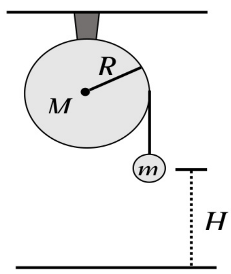
Per semplicità, infine, fissiamo l'origine degli assi nel punto in cui si trova inizialmente il proiettile, per cui:

$$\vec{r}_0 = 0$$

- Si ricava allora:

$$\begin{cases} x(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{u}_x = v_{0x} t \\ y(t) = \vec{r}(t) \cdot \vec{u}_y = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \end{cases}$$

2. Una pallina di massa m è sospesa a un'altezza H dal suolo tramite una fune ideale (inestensibile e priva di massa). La fune è avvolta su di un cilindro omogeneo di massa M e raggio R (vedi figura).



Inizialmente il sistema è mantenuto in quiete per mezzo di un freno che all'istante $t = 0$ s viene rimosso. Si calcolino:

(a) la velocità v con cui la pallina impatta al suolo; `[4 punti]`

- Non agendo forze non conservative, durante la caduta della pallina si conserva l'energia meccanica del sistema. Tale energia meccanica si può scrivere:

$$E_M = U_P + E_{K,\text{pallina}} + E_{K,\text{cilindro}}$$

dove U_P è l'energia potenziale della forza peso della pallina, mentre $E_{K,\text{pallina}}$ e $E_{K,\text{cilindro}}$ sono l'energia cinetica rispettivamente della pallina e del cilindro.

- Uguagliando l'energia meccanica nell'istante iniziale (pallina ferma alla quota H) e finale (pallina che impatta al suolo con velocità v), abbiamo:

$$mgH + 0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

dove I è il momento di inerzia del cilindro e ω la sua velocità angolare nell'istante finale.

- Il momento di inerzia del cilindro, calcolato rispetto a un asse passante per il centro di massa, è:

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Poiché la fune è inestensibile e avvolta sul cilindro, mentre essa si svolge la velocità della pallina e la velocità angolare del cilindro sono legate dalla relazione:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

- Sostituendo nella conservazione dell'energia:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}MR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2}$$

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2$$

$$4mgH = (2m + M)v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{4mgH}{2m + M}}$$

(b) l'accelerazione angolare α del cilindro durante lo svolgimento della fune. `[4 punti]`

- Scriviamo la Seconda Equazione Cardinale della Meccanica per il cilindro in rotazione:

$$\tau^{(e)} = \frac{dL}{dt} = I\alpha$$

dove $\tau^{(e)}$ è il momento risultante delle forze esterne. L'equazione è stata scritta in forma scalare, proiettata sull'asse di rotazione e con verso positivo entrante nel piano del foglio. Ne consegue che l'accelerazione angolare α è positiva se è in verso orario nel disegno.

- L'unica forza esterna applicata al cilindro che dà momento non nullo è la tensione della fune T. Vale in particolare:

$$\tau^{(e)} = R \cdot T$$

da cui:

$$RT = I\alpha$$

$$RT = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}MR\alpha$$

- Scriviamo il Secondo Principio della Dinamica per la pallina, proiettando l'equazione vettoriale $\vec{F}_{ris} = m\vec{a}$ su un asse verticale orientato verso il basso:

$$P - T = ma$$

dove $P = mg$ è la forza peso applicata alla pallina e a è la sua accelerazione (positiva verso il basso).
- Mentre la fune si svolge, l'accelerazione a e l'accelerazione angolare α sono legate dalla relazione:

$$a = \alpha R$$

.
- Sostituendo in $P - T = ma$ le espressioni per P, T e a, otteniamo:

$$mg - \frac{1}{2}MR\alpha = mR\alpha$$

$$2mg = (2m + M)\,R\alpha$$

$$\alpha = \frac{2m}{2m+M} \cdot \frac{g}{R}$$

3. (a) Si dia la definizione di rendimento di una macchina termica ciclica, precisando il significato di tutte le grandezze coinvolte; `[2 punti]`

Si definisce rendimento di una macchina termica ciclica il rapporto tra il lavoro compiuto $\mathcal{L}$ e il calore assorbito Q_{ass} dal sistema in un ciclo:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} \tag{1}$$

Ricordiamo che, per definizione, una macchina *termica* è una macchina termodinamica che compie lavoro netto positivo su un ciclo, per cui $\mathcal{L} > 0$. Inoltre, date le convenzioni sui segni delle quantità di calore, anche $Q_{ass} > 0$.

(b) Due moli di gas biatomico occupano inizialmente un volume V_1 ad una temperatura $T_1 = 300$ K. Il gas subisce quindi una trasformazione ciclica costituita dalle seguenti trasformazioni reversibili:

- espansione adiabatica fino ad un volume $V_2 = 2V_1$;
- compressione isoterma fino ad un volume $V_3 = V_1$;
- riscaldamento isocoro fino a ritornare nelle condizioni iniziali.

Si determini la temperatura T_3 del gas al termine della compressione isoterma; `[3 punti]`

- Assumiamo che il gas in questione si comporti come un gas ideale.
- Poiché la trasformazione dallo stato 2 allo stato 3 è isoterma, la temperatura dei due stati è la stessa: $T_3 = T_2$
- La temperatura T_2 può essere calcolata sfruttando la relazione di Poisson:

$$TV^{\gamma-1} = cost.$$

valida per le adiabatiche reversibili. In particolare:

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1}$$

$$T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

- Trattandosi di una trasformazione di un gas biatomico:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}$$

Inoltre, dal testo del problema sappiamo che:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{2}$$

Possiamo quindi concludere:

$$T_3 = T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}-1} = T_1 \cdot 2^{-\frac{2}{5}}$$

$$T_3 \simeq 300\ \mathrm{K} \cdot 0.7579 = 227.4\ \mathrm{K}$$

(c) Si determini il rendimento del ciclo descritto al punto precedente. `[3 punti]`

- Il rendimento del ciclo è per definizione:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}}$$

Il lavoro netto svolto dal ciclo, per il Primo Principio della Termodinamica, può anche essere scritto come:

$$\mathcal{L} = Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}$$

essendo Q_{12}, Q_{23} e Q_{31} i calori scambiati dalle tre trasformazioni successive.

- Per le tre trasformazioni possiamo valutare i calori scambiati come segue.
  - Per definizione di trasformazione adiabatica, per la trasformazione $1 \to 2$ abbiamo:

  $$Q_{12} = 0$$

  - Il calore scambiato lungo la trasformazione isoterma reversibile $2 \to 3$ è:

  $$Q_{23} = \mathcal{L}_{23} = \int_2^3 p\, dV = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2}$$

  poiché $\frac{V_3}{V_2} = \frac{V_1}{2V_1} = \frac{1}{2}$, si ha:

  $$Q_{23} = -nRT_2 \ln 2 < 0$$

  cioè durante la trasformazione isoterma il sistema cede calore.

  - Durante la trasformazione isocora $3 \to 1$, il calore scambiato è:

  $$Q_{31} = nc_V \Delta T = n \cdot \frac{5}{2} R \cdot (T_1 - T_3)$$

  Poiché $T_1 > T_3$, si ha $Q_{31} > 0$ cioè il sistema assorbe calore.

- Dall'analisi condotta, il calore assorbito lungo il ciclo coincide con il calore scambiato lungo la trasformazione $3 \to 1$. Possiamo allora concludere (ricordando che $T_3 = T_2$):

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} &= \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}}{Q_{31}} = \\ &= \frac{0 - nRT_2 \ln 2 + \frac{5}{2} nR(T_1 - T_2)}{\frac{5}{2} nR(T_1 - T_2)} = 1 - \frac{2T_2 \ln 2}{5(T_1 - T_2)} \end{aligned}$$

Ora, dal punto precedente $T_1 = T_2 \cdot 2^{\frac{2}{5}}$, perciò:

$$\eta = 1 - \frac{2T_2 \ln 2}{5\left(T_2 \cdot 2^{2/5} - T_2\right)} = 1 - \frac{2 \ln 2}{5\left(2^{2/5} - 1\right)} = 13.2\%$$