Logica e Algebra

20 Luglio 2017
Parte di Algebra

ESERCIZIO 1

Data la funzione f : N $\rightarrow$ N così definita

$$f(n) = \begin{cases} n^2+3 & \text{se n è pari} \\ 2n+4 & \text{se n è dispari} \end{cases}$$

1) Si discuta l'esistenza di possibili inverse sinistre e/o destre. Nel caso un'inversa esista, esibirne un esempio.

Dato l'insieme $X = \{0,1,2,3,4\}$ e considerato l'insieme A= f(X) si definisca su A la relazione R seguente

$$\forall\, a,b \in A \qquad a\,R\,b \quad \Leftrightarrow \quad b-a \in P$$

dove P è l'insieme dei numeri primi.

2) Si verifichi se R è una relazione d'ordine.
3) Se lo è, se ne determini il diagramma di Hasse e se ne individuino elementi massimali, minimali, massimi e minimi.
4) Se non lo è, si costruisca, se esiste, la minima relazione d'ordine S che contiene R, se ne determini il diagramma di Hasse e se ne individuino elementi massimali, minimali, massimi e minimi.

Soluzione

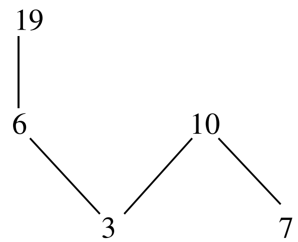
1) La funzione f è iniettiva, infatti ogni intero pari viene mandato in un intero dispari, ogni intero dispari in un intero pari quindi interi di parità diversa non hanno mai la stessa immagine, se n ed m sono due interi entrambi pari f(n)=f(m) ovvero $n^2+3=m^2+3$ implica n=m, se n ed m sono due interi entrambi dispari f(n)=f(m) ovvero 2n+4=2m+4 implica n=m. La funzione f non è suriettiva perché (ad esempio) nessun intero naturale minore di 3 ha controimmagini in N. La funzione f ammette quindi inversa destra. Un esempio di tale inversa è la funzione h : N $\rightarrow$ N così definita

$$h(m) = \begin{cases} \lceil \sqrt{m-3} \rceil & \text{se } m \text{ è dispari} \\ \lceil m-4/2 \rceil & \text{se } m \text{ è pari} \end{cases}$$

dove $\lceil a \rceil$ indica la parte intera superiore di a.

2) Si ha A={3,6,7,10,19}.ed R={(3,6),(3,10),(6,19),(7,10)}. La relazione non è ovviamente d'ordine perché non è riflessiva (e transitiva).

3) Non essendo R relazione d'ordine non si ha niente da fare
4) La chiusura riflessiva e transitiva di R è la relazione T={(3,3),(3,6),(3,19),(6,6),(6,19), (7,7),(7,10)(10,10),(19,19), come si trova facilmente usando grafo o matrice. T è una relazione antisimmetrica per cui T=S. Il diagramma di Hasse di S è



da cui si evince subito che gli elementi massimali (non massimi) di A rispetto ad S sono 19 e 10 e e i minimali (non minimi) sono 3 e 7.

ESERCIZIO 2

Sia A = Q×Q e si consideri l'anello (A, +, ·) rispetto alle seguenti operazioni

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$

$$(a,b) \cdot (c,d) = (ac-8bd , ad + bc +2bd)$$

1) Si dimostri che (A, +, ·) è commutative e unitario.
2) Si provi che l'applicazione $\varphi : Q \to A$ così definita

$$\varphi (a) = (a,0)$$

è un monomorfismo di anelli.
3) Si verifichi se B = φ (Q) è un ideale di A.

Soluzione

1) Il testo dice che (A, +, ·) è un anello. Dobbiamo dimostrare che è commutativo.
   Si ha (a,b) · (c,d) = (ac-8bd , ad + bc +2bd) e (c,d) · (a,b) = (ca-8db , cb + da +2db), dalla commutatività di somma e prodotto in Q si ricava subito (a,b) · (c,d) =(c,d) · (a,b). Cerchiamo ora un elemento neutro di A rispetto al prodotto., ovvero un elemento (x,y) tale che (a,b) · (x,y) = (a,b). Si ottiene che deve essere ax-8by=a e ay+bx+2by=b per ogni a,b in Q. Una soluzione è data da x=1 e y=0, ed è immediato verificare che (a,b) · (1,0) = (a,b).
2) Verifichiamo che φ è un omomorfismo di anelli. Per ogni a,b in Q si ha φ(a)=(a,0), φ(b)=(b,0), da cui φ(a)+ φ(b)=(a,0)+(b,0)=(a+b,0) ed inoltre φ(a+b)=(a+b,0) per cui φ(a)+ φ(b)= φ(a+b). Inoltre φ(a)·φ(b)=(a,0) · (b,0)=(ab-0,a0+b0+0)=(ab,0), inoltre φ(ab)=(ab,0) per cui φ(a)·φ(b)= φ(ab). Infine φ è iniettiva in quanto φ (a)=φ(b) implica (a,0)=(b,0) cioè a=b.

3) Si ha $B=\{(a,0)|a\in Q\}$. Ora presi comunque due elementi $(a,0)$, $(b,0)$ di B si ha $(a,0)-(b,0)=(a-b,0)$ e $(a,0)\cdot(b,0)=(ab,0)$ per cui B è un sottoanello di A. Sia ora (x,y) generico elemento di A consideriamo $(a,0)\cdot(x,y)$. Si ha $(a,0)\cdot(x,y)=(ax,ay)$ che non è un elemento di B, Dunque B non è ideale. Si poteva anche osservare subito che B non è un ideale in quanto contiene l'unità di A ed è un sottoinsieme proprio di A, mentre nessun ideale proprio di un anello contiene l'unità.

Logica e Algebra

20 Luglio 2017

Parte di Logica

ESERCIZIO 1

In un'oasi del deserto ci sono tre pozzi, uno contiene acqua potabile gli altri no. I pozzi hanno le seguenti scritte

Pozzo1: La mia acqua è non potabile

Pozzo 2: L'acqua potabile è nel pozzo 3

Pozzo 3: La mia acqua è non potabile.

Un altro cartello (che dice la verità) avverte: solo uno dei messaggi dei pozzi è vero e gli altri sono falsi.

1. Formalizzare il problema in logica proposizionale.
2. Trovare per via semantica quale pozzo contiene acqua potabile.
3. Verificare col metodo di risoluzione il risultato trovato.

Soluzione

1) Usiamo la lettera enunciativa A per dire che l'acqua del pozzo 1 è potabile, la lettera B per dire che l'acqua del pozzo 2 è potabile, la lettera C per dire che l'acqua del pozzo 3 è potabile. Il fatto che solo un pozzo contenga acqua potabile si traduce allora nella formula $(A\wedge\sim B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge C)$. Il cartello del pozzo 1 dice $\sim A$, quello del pozzo 2 dice C, quello del pozzo 3 dice $\sim C$. La formula che traduce l'affermazione vera dell'ultimo cartello è quindi $(\sim A\wedge\sim C\wedge C)\vee(A\wedge C\wedge C)\vee(A\wedge\sim C\wedge\sim C)\equiv (A\wedge C)\vee(A\wedge\sim C)$.
2) I modelli della prima formula sono gli assegnamenti che pongono una variabile uguale ad 1 e le altre due uguali a 0, l'ultima formula è vera solo se A vale 1 e B e C assumono valori qualsiasi, dunque l'unico modello comune alle due formule pone A vero e B,C false , pertanto il pozzo 1 contiene l'acqua potabile.
3) Dobbiamo sostanzialmente provare per risoluzione che $\{(A\wedge\sim B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge C), (A\wedge C)\vee(A\wedge\sim C)\}\models A$, o in altre parole che $\{(A\wedge\sim B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge\sim B\wedge C), (A\wedge C)\vee(A\wedge\sim C), \sim A\}$ è insoddisfacibile La seconda formula ridotta a clausole è $\{A\}$, la terza è già in forma a clausole ed è $\{\sim A\}$ e da queste si ricava subito la clausola vuota.

ESERCIZIO 2

Si consideri la formula

$$\forall x\exists y\mathcal{A}_1^2(x,y)\wedge\forall x\forall y(\mathcal{A}_1^2(x,y)\Rightarrow\sim\mathcal{A}_1^2(y,x))\wedge\forall x\forall y\forall z(\mathcal{A}_1^2(x,y)\wedge\mathcal{A}_1^2(y,z)\Rightarrow\mathcal{A}_1^2(x,z))$$

1. Si provi che è una formula vera nell'interpretazione avente come dominio l'insieme dei numeri naturali in cui $\mathcal{A}_1^2(x,y)$ viene interpretato come $x<y$.
2. Dire se la formula è logicamente valida.

3. Portarla in forma normale prenessa.
4. Provare che non esistono interpretazioni con dominio finito in cui la formula è vera.

Soluzione

1. Nell'interpretazione data la formula si legge così "Per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che x è minore di y e per ogni coppia di numeri naturali x,y se x è minore di y, y non è minore di x e per ogni terna di numeri naturali x,y,z se x è minore di y e y e minore di z allora x è minore di z" che è ovviamente una affermazione vera,
2. La formula non è logicamente valida in quanto basta prendere come dominio l'insieme dei numeri negativi con la stessa relazione di $<$ stretto e non è vera la sottoformula $\forall x \exists y \mathcal{A}_1^2(x,y)$ in quanto non esiste alcun numero negativo y tale che $-1<y$ ed essendo questa sottoformula un congiunto dell'intera formula la formua è falsa.
3. Ricordiamo che $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \equiv \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, quindi abbiamo
$\forall x \exists y \mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \forall x \forall y(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(y,z) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(x,z))$
$\equiv \forall x(\exists y \mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \forall y \forall z (\mathcal{A}_1^2(x,y) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(y,x) \wedge (\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(y,z)) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(x,z)))$
$\equiv \forall x \exists y(\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \forall y \forall z (\mathcal{A}_1^2(x,y) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(y,x) \wedge (\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(y,z)) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(x,z)))$
$\equiv \forall x \exists y \forall v \forall z (\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge (\mathcal{A}_1^2(x,v) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(v,x) \wedge (\mathcal{A}_1^2(x,v) \wedge \mathcal{A}_1^2(v,z)) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(x,z)))$. Senza ricordare la prima formula avremmo potuto ottenere la formula equivalente
$\forall x \exists y \mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \forall x \forall y(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(y,x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge \mathcal{A}_1^2(y,z) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(x,z))$
$\equiv \forall x \exists y \forall v \forall u \forall w \forall s \forall z(\mathcal{A}_1^2(x,y) \wedge (\mathcal{A}_1^2(v,u) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(u,v) \wedge (\mathcal{A}_1^2(w,s) \wedge \mathcal{A}_1^2(s,z)) \Longrightarrow \mathcal{A}_1^2(w,z)))$
4. Sia per assurdo I una interpretazione con dominio finito D in cui la formula sia vera. Sia R la relazione che rappresenta $\mathcal{A}_1^2$ in questa interpretazione. Il primo congiunto dice che R seriale, il terzo dice che R è transitiva. Sia $d_1 \in D$ affinché la formula sia vera deve esistere un $d_2 \in D$ tale che $(d_1, d_2) \in R$. Per serialità allora deve esistere un $d_3 \in D$ tale che tale che $(d_2, d_3) \in R$, da cui per transitività $(d_1, d_3) \in R$. Si ha quindi una catena $d_1, d_2, \ldots d_n, \ldots$ di elementi di D tali che $(d_i, d_j) \in R$ per ogni $i<j$, Poiché D è finito la catena deve essere finita e quindi nella catena ci saranno elementi ripetuti, ovvero ci saranno h,k con $h<k$ tali che $d_h=d_k$. Si avrà quindi $(d_h, d_h) \in R$ che rende falso il congiunto $\forall x \forall y(\mathcal{A}_1^2(x,y) \Longrightarrow \sim \mathcal{A}_1^2(y,x))$.