Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

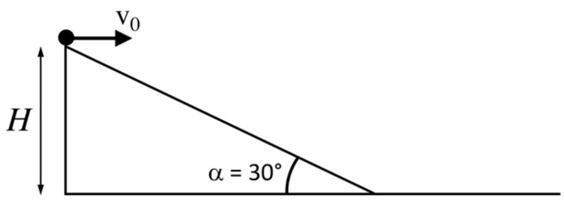
FISICA
Prima prova in itinere del 13 Aprile 2022

Proff. Bussetti, Contini, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Marangoni, Paternò, Petti, Polli, Ramponi, Spinelli, Stagira, Yivlialin

1.

Una pallina viene lanciata orizzontalmente dalla sommità di un piano inclinato. Il piano è alto H = 1 m e forma un angolo $\alpha = 30°$ rispetto al suolo (vedi figura). Sapendo che la velocità di lancio della pallina è pari, in modulo, a $v_0 = 2$ m/s, e trascurando l'attrito con l'aria, si determini:

(a) l'equazione della traiettoria della pallina durante il suo volo; (4 punti)
(b) le coordinate del punto di impatto della pallina, specificando se questo si trova sul piano inclinato o su quello orizzontale; (4 punti)

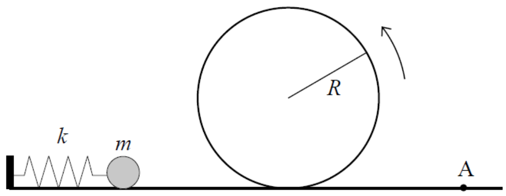


(c) la velocità di impatto della pallina, in modulo, direzione e verso. (3 punti)

2.

Una massa m (inizialmente ferma) viene lanciata da una molla di costante elastica k lungo una guida liscia formante una circonferenza di raggio R nel piano verticale (vedi figura). Si determini:

(a) la compressione iniziale minima Δx della molla, affinché la massa compia il giro completo (senza staccarsi dalla guida); (4 punti)



(b) calcolare la reazione vincolare quando la quota è R; (4 punti)
(c) la velocità v della massa nel punto A. (3 punti)

3.

Un oggetto di massa m è sottoposto ad una forza centrale rappresentata dalla relazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^n}\mathbf{u}_r$$

dove r è la distanza tra l'oggetto ed un punto fisso O, $\mathbf{u}_r$ è il versore che da O punta nella posizione dell'oggetto, $\mathbf{r} = r\,\mathbf{u}_r$ è il vettore posizione dell'oggetto rispetto ad O, $n \geq 2$ è un numero intero e k è una costante.

(a) Si dimostri che tale forza è conservativa. (4 punti)
(b) Si calcoli l'energia potenziale. (3 punti)
(c) Si verifichi con un semplice ragionamento che se $k < 0$ (forza diretta verso O) e l'energia meccanica dell'oggetto è negativa, allora è impossibile per l'oggetto allontanarsi indefinitamente da O. (4 punti)

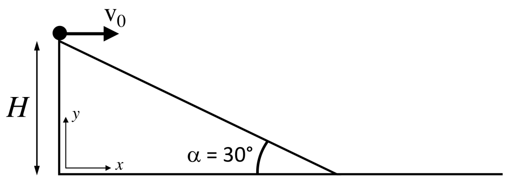
Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Fisica - Prima prova in itinere del 13/04/22

Soluzione commentata

Primo esercizio

Una pallina viene lanciata orizzontalmente dalla sommità di un piano inclinato. Il piano è alto $H = 1$ m e forma un angolo $\alpha = 30°$ rispetto al suolo (vedi figura). Sapendo che la velocità di lancio della pallina è pari, in modulo, a $v_0 = 2$ m/s, e trascurando l'attrito con l'aria, si determini:



1. l'equazione della traiettoria della pallina durante il suo volo; `[4 pt]`

   Durante il volo, sulla pallina agisce solo la forza peso, diretta verso il basso. Perciò l'accelerazione del moto è costante, pari a g (accelerazione di gravità terrestre), verticale e rivolta verso il basso. La legge oraria del moto è dunque la seguente:

   $$x = x_0 + v_0 t, \tag{1}$$
   $$y = y_0 - \frac{1}{2} g t^2, \tag{2}$$

   ove (x_0, y_0) sono le coordinate iniziali della pallina, date da $x_0 = 0$ e $y_0 = H$. Dall'Eq. (1) ricaviamo $t = x/v_0$, che sostituita nella seconda permette di ricavare l'equazione cartesiana della traiettoria:

   $$y = H - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \tag{3}$$

   La traiettoria è dunque una parabola rivolta verso il basso e con vertice posto alla sommità del piano inclinato.

2. le coordinate del punto di impatto della pallina, specificando se questo si trova sul piano inclinato o su quello orizzontale; `[4 pt]`

   Supponiamo che la pallina riesca a superare il piano inclinato e impatti sul piano orizzontale. Le coordinate dell'impatto saranno allora (x_f, y_f) con $y_f = 0$ e $x_f \geq L$, essendo $L = H/\tan(\alpha = 30°) = \sqrt{3}H \simeq 1.73$ m, l'estensione orizzontale del piano inclinato. Possiamo determinare x_f sostituendo nell'equazione della traiettoria ricavata al punto precedente [Eq. (3)] il valore $y = y_f = 0$. Abbiamo

   $$H - \frac{g}{2v_0^2} x^2 = 0,$$

   la cui soluzione è $x = x_f = \sqrt{\frac{2Hv_0^2}{g}}$. Sostituendo i valori numerici ricaviamo $x_f \simeq 0.90$ m. Poichè risulta $x_f < L$, l'impatto non avviene sul piano orizzontale, ma sul piano inclinato.

   Per determinare le coordinate dell'impatto basta imporre che la traiettoria intersechi tale piano, la cui equazione cartesiana è $y = H - \tan(\alpha)x = H - x/\sqrt{3}$. Risolviamo dunque il sistema:

   $$y = H - \frac{g}{2v_0^2} x^2, y = H - x/\sqrt{3}.$$

Otteniamo $H - \frac{g}{2v_0^2}x^2 = H - x/\sqrt{3}$, da cui

$$x = x_f = \frac{2v_0^2}{\sqrt{3}g} \simeq 0.471 \text{ m}.$$

Sostituendo infine tale valore della coordinata x nell'equazione del piano inclinato otteniamo la coordinata verticale del punto di impatto:

$$y = y_f = H - x_f/\sqrt{3} = H - \frac{2v_0^2}{3g} \simeq 0.728 \text{ m}.$$

3. la velocità di impatto della pallina, in modulo, direzione e verso. `[3 pt]`

   In base a quanto discusso al punto (1), la legge della velocità del moto è data da:

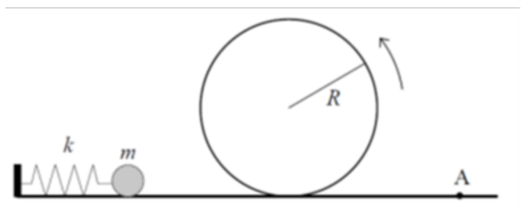
$$\begin{aligned} v_x &= v_0, & (4)\\ v_y &= -gt, & (5) \end{aligned}$$

   Una volta determinato l'istante $t = t_f$ di impatto, la suddetta legge consente di determinare modulo, direzione e verso della velocità d'impatto. Per determinare t_f, ricordiamo la legge oraria del moto ricavata in precedenza, e in particolare la legge della coordinata orizzontale, $x = v_0 t$. Imponendo $x = x_f = v_0 t$, ricaviamo $t = t_f = x_f/v_0 = \frac{2v_0}{\sqrt{3}g}$, che sostituito nelle Eq. (4)-(5) fornisce le seguenti componenti per la velocità d'impatto:

$$v_{x,f} = v_0, \quad v_{y,f} = -\frac{2}{\sqrt{3}}v_0.$$

   Il modulo della velocità d'impatto risulta $v_f = (v_{x,f}^2 + v_{y,f}^2)^{1/2} = (1+4/3)^{1/2}v_0 \simeq 3.06$ m/s. Direzione e verso di tale velocità sono univocamente definite dall'angolo che il vettore velocità forma rispetto all'asse x, misurato in senso antiorario. Esso è dato da $\beta = \tan^{-1}(v_{y,f}/v_{x,f}) = \tan^{-1}(-2\sqrt{3}/3) \simeq -49.1°$.

Secondo esercizio
Una massa m (inizialmente ferma) viene lanciata da una molla di costante elastica k lungo una guida liscia la cui forma è una circonferenza di raggio R nel piano verticale (vedi figura). Si determini:



1. la compressione iniziale minima Δx della molla, affinché la massa compia il giro completo (senza staccarsi dalla guida); `[4 pt]`

   Nella parte circolare la massa m è soggetta unicamente alla forza peso (mg) e alla reazione vincolare (N). La condizione limite è data dal raggiungimento del punto più alto della guida, cioè la sommità della parte circolare, con reazione vincolare nulla. Nel punto più alto la reazione vincolare e la forza peso hanno la direzione della forza centripeta.

$$N + mg = m\frac{v^2}{R} \longrightarrow N = m\frac{v^2}{R} - mg = 0$$

Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale (la molla è compressa di un tratto Δx e la massa m è ferma) e l'istante in cui la massa m si trova alla sommità della guida.

$$\frac{1}{2}k\,\Delta x^2 = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 \longrightarrow v^2 = \frac{k}{m}\Delta x^2 - 4gR$$

Sostituendo l'espressione di v^2 nella espressione di N, ricavata precedentemente, si ottiene l'allungamento Δx della molla affinchè la massa m compia il giro completo senza staccarsi dalla guida.

$$m\frac{(\frac{k}{m}\Delta x^2 - 4gR)}{R} - mg = 0 \longrightarrow \boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{5mgR}{k}}}$$

Assumendo che la molla sia compressa del valore Δx trovato al punto (a) calcolare:

2. la reazione vincolare quando la quota è R; `[4 pt]`

   Quando la massa m si trova ad una altezza R solo la reazione vincolare ha la direzione della forza centripeta, pertanto:

   $$N = m\frac{v_R^2}{R}$$

   dove v_R rappresenta la velocità della massa m alla quota R. Analogamente al caso precedente, imponiamo la conservazione dell'energia meccanica, ma, in questo caso, tra l'istante iniziale e l'istante in cui la massa m si trova alla quota R.

   $$\frac{1}{2}k\,\Delta x^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_R^2$$

   Sostituendo l'espressione di v_R^2 nella espressione di N ricavata precedentemente ed utilizzando l'allungamento Δx della molla trovato nel punto precedente si ottiene:

   $$\boxed{N = 3mg}$$

3. la velocità v della massa nel punto A. `[3 pt]`

   Essendo il sistema conservativo si ha la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale (la molla è compressa di un tratto Δx e la massa m è ferma) e l'istante in cui la massa m si trova nel punto A (energia cinetica).

   $$\frac{1}{2}k\,\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv_A^2$$

   Sostituendo l'allungamento Δx della molla trovato nel punto (a) si ottiene:

   $$\boxed{v_A = \sqrt{5gR}}$$

Terzo esercizio

Un oggetto di massa m è sottoposto ad una forza centrale rappresentata dalla relazione:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{k}{r^n}\mathbf{u}_r$$

dove r è la distanza tra l'oggetto ed un punto fisso O, $\mathbf{u}_r$ è il versore che da O punta nella posizione dell'oggetto, $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ è il vettore posizione dell'oggetto rispetto ad O, $n \geq 2$ è un numero intero e k è una costante.

1. Si dimostri che tale forza è conservativa. `[4 pt]`

   Consideriamo l'oggetto inizialmente in un punto P a distanza r da O e poniamo che si sposti di una quantità infinitesima $\mathbf{dr}$; possiamo scomporre tale spostamento in un componente $dr\mathbf{u}_r$ diretto radialmente lungo la congiungente OP ed un componente $\mathbf{dn}$ ortogonale alla direzione radiale:

   $$\mathbf{dr} = dr\mathbf{u}_r + \mathbf{dn}$$

   Si noti che dr è la variazione di distanza radiale tra O e P.
   Il lavoro infinitesimo $d\mathcal{L}$ compiuto dalla forza lungo lo spostamento $\mathbf{dr}$ sarà dunque:

   $$d\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \frac{k}{r^n}dr\mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r + \frac{k}{r^n}\mathbf{dn} \cdot \mathbf{u}_r = \frac{k}{r^n}dr$$

   Considerato ora uno spostamento macroscopico dell'oggetto lungo una traiettoria γ da un punto A a distanza r_A da O ad un punto B a distanza r_B da O, potremo scrivere il lavoro complessivo compiuto dalla forza come:

   $$\mathcal{L}_{A\to B_\gamma} = \int_{A\to B_\gamma} d\mathcal{L} = \int_{r_A}^{r_B} \frac{k}{r^n}dr = \left[-\frac{k}{(n-1)r^{n-1}}\right]_{r_A}^{r_B} = \frac{k}{(n-1)r_A^{n-1}} - \frac{k}{(n-1)r_B^{n-1}}$$

   Poiché il lavoro non dipende dal percorso seguito ma solo dai punti estremi della traiettoria, deduciamo che il campo di forza è conservativo.

2. Si calcoli l'energia potenziale. `[3 pt]`

   In un campo di forza conservativo il lavoro compiuto dalla forza sull'oggetto nello spostamento da un punto A ad un punto B può essere espresso nella forma:

   $$\mathcal{L}_{A\to B} = V(A) - V(B) = -\Delta V$$

   dove V, detta energia potenziale associata al campo di forza, è una funzione della posizione, in genere definita a meno di una costante arbitraria. Comparando la precedente espressione con l'espressione del lavoro calcolato al punto precedente, deduciamo che l'energia potenziale cercata è pari a:

   $$V(r) = \frac{k}{(n-1)r^{n-1}} + C$$

   con C costante arbitraria.

3. Si verifichi con un semplice ragionamento che se $k < 0$ (forza diretta verso O) e l'energia meccanica dell'oggetto è negativa, allora è impossibile per l'oggetto allontanarsi indefinitamente da O. `[4 pt]`

   Ricordiamo che l'energia meccanica E_M dell'oggetto è definita come:

$$E_M = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{|k|}{(n-1)r^{n-1}}$$

   dove abbiamo posto $C = 0$ per comodità ed abbiamo esplicitato il segno negativo della costante k. In assenza di altre forze, possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica tra due punti A e B della traiettoria dell'oggetto:

$$E_M(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{|k|}{(n-1)r_A^{n-1}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{|k|}{(n-1)r_B^{n-1}} = E_M(B)$$

   Se l'oggetto potesse allontanarsi indefinitamente da O, potremmo porre $r_B = \infty$, da cui otterremmo:

$$v_B^2 = \frac{2E_M(A)}{m} < 0$$

   essendo l'energia meccanica iniziale negativa. Ciò porterebbe al risultato assurdo di una velocità in B immaginaria; deduciamo pertanto che l'oggetto non potrà mai allontanarsi indefinitamente da O. Possiamo valutare la massima distanza r_B raggiungibile assumendo che in B l'oggetto giunga con velocità nulla. In tal caso è immediato ottenere:

$$r_B = \sqrt[n-1]{\frac{|k|}{(n-1)|E_M(A)|}}$$