Esercitazioni di Analisi 2

CURVE - INTEGRALI DI LINEA

Curve chiuse, regolari, lunghezza di una curva, integrali curvilinei.

1. Stabilisci se la curva di equazione $\mathbf{r}(t) = \left(t^2, t^2+1, \cos t\right)$, con $t \in [-\pi, \pi]$ è chiusa e se è regolare. [$\mathbf{r}(t)$ è chiusa ma non è regolare, infatti $\mathbf{r}'(0) = (0,0,0)$]

2. Calcola la lunghezza della curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, con $t \in [0, 2\pi]$. [6]

3. Data la curva $2x + y^2 = 3$, scrivi una rappresentazione parametrica dell'arco che congiunge i punti $(1,1)$ e $\left(0, -\sqrt{3}\right)$ in senso orario. $\left[\mathbf{r}(t) = \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{3}{2}, t\right), \; t = 1 - \left(1+\sqrt{3}\right)\vartheta, \; \vartheta \in [0,1]\right]$

4. Stabilisci se la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos^2 t, \sin t \cos t)$, con $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ è regolare e calcolane la lunghezza. $\left[\text{si}, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Dopo aver verificato che i seguenti archi di curva assegnati in forma parametrica sono regolari, calcolane la lunghezza:

   (a) $\mathbf{r}(t) = (a(1-\cos t), a(t - \sin t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0$ $\qquad [8a]$
   (b) $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad t \in [0,2]$ $\qquad \left[\sqrt{2}\left(e^2 - 1\right)\right]$
   (c) $\mathbf{r}(t) = (a(\cos t + t \sin t), a(\sin t - t \cos t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad a > 0$ $\qquad \left[2a\pi^2\right]$
   (d) $\mathbf{r}(t) = \left(t, 3t^2, 6t^3\right), \quad t \in [0,2]$ $\qquad [50]$

6. Scrivi l'integrale che rappresenta la lunghezza della curva grafico della funzione $f(x) = \sqrt{x}$, $1 \le x \le 2$. $\left[\mathbf{r}(t) = (t, \sqrt{t}), \; t \in [1,2]; \; \mathbf{r}'(t) = (1, \frac{1}{2\sqrt{t}}); \; |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{\frac{4t+1}{4t}}; \; l = \int_1^2 \sqrt{\frac{4t+1}{4t}} dt\right]$

7. Calcola l'integrale curvilineo della funzione $f(x,y,z) = \dfrac{x^2(1+8y)}{\sqrt{1+y+4x^2y}}$ sulla curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2, \log t)$, con $t \in [1,2]$. $\left[\frac{63}{2}\right]$

8. Dopo aver verificato che il sostegno della curva è contenuto nel dominio della funzione integranda, calcola $\int_\gamma \frac{x}{1+y^2} ds$, con $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$ e $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $\left[\frac{\pi}{4}\right]$

9. Valuta $\int_r \left(2 + x^2 y\right) ds$, dove r è la semicirconferenza di equazioni: $x^2 + y^2 = 1$; $y \ge 0$, percorsa in senso antiorario. $\left[2\pi + \frac{2}{3}\right]$

10. Calcola $\int_r xy ds$, dove r ha equazione: $\mathbf{r}(t) = R(1 - \sin t)\,\mathbf{i} + R(1 - \cos t)\,\mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$. $\left[2\pi R^3\right]$

11. Calcola $\int_r (x+y)\, ds$, dove r è il triangolo di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(0,1)$, percorso in senso antiorario. $\left[-\sqrt{2}\right]$

12. Calcola $\int_r \left(x^2 + xy^2\right) ds$, dove r è il quadrato di vertici $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$, $C(0,1)$,percorso in senso antiorario. $\left[\frac{5}{6}\right]$