Analisi Matematica 2 - prof. E.Maluta - 15 giugno 2020

Ogni risposta va scritta nello spazio individuato dal numero del corrispondente quesito sul foglio delle risposte e va motivata con calcoli o/e spiegazioni sintetiche.

1. Calcolare $\int_Q \frac{1}{x^2+y^2}\,dx\,dy$ dove $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2 \wedge 0 \leq x \leq \sqrt{3}y\}$

2. Calcolare $\int_0^1 \sin x^2\,dx$ a meno di 10^{-3};

3. Un'equazione lineare omogenea del II ordine ha tra le proprie soluzioni $\phi_1(t) = e^{-2t}$ e $\phi_2(t) = te^{-2t}$. Quante soluzioni dell'equazione passano per il punto $(0,3)$? Determinarle.

4. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione $y' = 10y - y^2$;

5. Dato il sistema
$$y'(t) = Ay(t)$$
con
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
stabilire se esistono soluzioni non nulle limitate in un intorno di $+\infty$ e in caso affermativo determinarle.

6. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x,y) = y^2 - 8x^2 + x^4$. Dopo aver giustificato la differenziabilitá di f su tutto $\mathbb{R}^2$ scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1,f(2,1))$.

7. Per la f del punto precedente, determinare gli eventuali punti di massimo o di minimo locale su $\mathbb{R}^2$.

8. Per la f del punto precedente, determinare $\mathrm{Sup}(f)$ e $\mathrm{Inf}(f)$ su $\mathbb{R}^2$, precisando se sono Massimo e Minimo assoluto.

9. Per la f del punto precedente, disegnare la curva di livello 0 di f.

10. Scrivere un'equazione parametrica della curva γ arco della parabola di equazione $y = 1 - x^2$ percorso dal punto $(0,1)$ al punto $(2,-3)$ e determinare il relativo vettore tangente.

11. Sia $\mathbf{F}$ il campo vettoriale piano definito da $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + (1+x^2)\,\mathbf{j}$. Scrivere, come integrale di una sola variabile t, il lavoro
$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot (dx, dy)$$
dove γ è la curva parametrizzata nel precedente esercizio e calcolarlo.

12. Con riferimento alla domanda precedente, stabilire se $\mathbf{F}$ ammette potenziale su $\mathbb{R}^2$.

13. Scrivere il generico problema di Cauchy per un'equazione lineare del II ordine $y'' + a(t)y' + b(t)y = f(t)$ ed enunciare per tale problema il teorema di esistenza e unicitá della soluzione.