Form 2 - Problemi con svolgimento cartaceo

1. Un punto materiale di massa m può scivolare senza attrito su un piano orizzontale ed è connesso a un estremo di una molla di costante elastica k (disposta orizzontalmente). La molla è vincolata all'altro estremo.

   (a) Ricavare l'equazione differenziale che governa il moto della massa m.

   - Imponiamo un sistema di coordinate cartesiane, con un asse x parallelo al piano orizzontale e un asse y disposto verticalmente. L'origine degli assi sia posta nella posizione della massa m quando la molla è a riposto.
   - Alla massa m sono applicate le seguenti forze:
     - la forza peso $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;
     - la reazione normale del piano d'appoggio $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$;
     - la forza elastica $\vec{F}_{el} = -kx\vec{u}_x$.
   - Se la massa rimane appoggiata al piano, la reazione normale bilancia la forza peso:

     $$\vec{P} + \vec{R}_n = 0$$

     Perciò, la forza risultante agente su m è:

     $$\vec{F}_{ris} = \vec{P} + \vec{R}_n + \vec{F}_{el} = \vec{F}_{el}$$

   - Dal Secondo Principio della Dinamica:

     $$\vec{F}_{ris} = m\vec{a}$$

     $$-kx\vec{u}_x = m\vec{a}$$

     Ne consegue che l'accelerazione del sistema sarà necessariamente parallela all'asse x:

     $$\vec{a} = a\vec{u}_x = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x$$

     Possiamo scrivere il Secondo Principio della Dinamica in forma scalare, proiettata sull'asse x:

     $$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

     $$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

     Questa è l'equazione differenziale che governa il moto della massa m, e coincide con l'equazione di un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Un punto materiale di massa $m = 0.01$ kg è appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 25$ N/m ai piedi di un trampolino di altezza $h = 10$ m, inclinato rispetto all'orizzontale di un angolo $\alpha = 45°$. Il sistema è inizialmente in quiete, con la molla compressa. La molla viene lasciata libera di muoversi e il punto si stacca dal trampolino impattando al suolo nel punto P.

(b) Calcolare la compressione della molla nel caso in cui la distanza del punto d'impatto dal bordo del trampolino sia $D = 10$ m.

- Imponiamo qui un sistema di coordinate cartesiane con asse x parallelo al piano orizzontale, con verso positivo verso destra in figura, e asse y verticale, con verso positivo verso l'alto. L'origine del sistema di coordinate sia collocata al bordo del trampolino, a livello del piano orizzontale.
- Il punto materiale, lasciato il trampolino, compie un moto parabolico con legge oraria (nelle due coordinate cartesiane):

$$x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$$
$$y(t) = h + v_0 \sin\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove la velocità v_0 è quella con cui lascia il trampolino.

- L'impatto avviene al tempo t^* tale per cui $x(t^*) = D$ cioè:

$$t^* = \frac{D}{v_0 \cos\alpha}$$

Sostituendo nell'equazione $y(t^*) = 0$:

$$h + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} D - \frac{1}{2} \frac{g D^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = 0$$

Poiché $\alpha = 45°$ possiamo sostituire $\cos\alpha = \sin\alpha = 1/\sqrt{2}$:

$$h + D - \frac{g D^2}{v_0^2} = 0$$

$$\frac{g D^2}{v_0^2} = h + D$$

$$v_0^2 = \frac{g D^2}{D + h}$$

- Imponiamo ora la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante in cui il punto materiale è fermo all'inizio del trampolino e la molla è compressa, e l'istante in cui il punto materiale lascia il trampolino con velocità v_0:

$$E_M = E'_M$$
$$U_{el} + U_P + E_K = U'_{el} + U'_P + E'_K$$
$$\frac{1}{2} k\, \Delta x^2 + 0 + 0 = mgh + \frac{1}{2} m v_0^2$$

da cui:

$$\Delta x^2 = \frac{1}{k}\left(2mgh + m v_0^2\right) = \frac{mg}{k}\left(2h + \frac{D^2}{D + h}\right)$$

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{mg}{k}} \cdot \sqrt{2h + \frac{D^2}{D + h}} \simeq 0.3 \text{ m}}$$

(c) Nelle stesse condizioni del punto precedente, trovare l'angolo d'impatto β, come indicato in figura.

- Le componenti del vettore velocità, durante il moto parabolico, sono:

$$v_x(t) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\alpha - gt$$

- All'istante $t^* = \frac{D}{v_0 \cos\alpha}$ in cui avviene l'impatto:

$$v_x(t^*) = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y(t^*) = v_0 \sin\alpha - \frac{gD}{v_0 \cos\alpha} = \frac{v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha - gD}{v_0 \cos\alpha}$$

- Per l'angolo β vale la relazione:

$$\tan\beta = \left| \frac{v_y(t^*)}{v_x(t^*)} \right| = \frac{|v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha - gD|}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Si ricava perciò:

$$\boxed{\beta = \arctan\left(\frac{D + 2h}{D}\right) = 71.6^\circ}$$

2. Un disco di raggio $R = 50$ cm e massa $m = 10$ kg ruota senza slittare su un piano orizzontale sotto l'azione di una forza costante di modulo $F = 10$ N applicata sull'asse di rotazione del disco, in direzione orizzontale come mostrato in figura.

(a) Si calcoli l'accelerazione angolare del disco.

- Scriviamo la II Equazione Cardinale della Meccanica rispetto a un polo posto nel punto O di contatto tra il disco e il piano (ovvero rispetto al centro di istantanea rotazione):

$$\vec{\tau}_O = I_O \vec{\alpha}$$

- I_O è il momento di inerzia calcolato rispetto a un asse passante per O, che dal Teorema di Huygens-Steiner vale:

$$I_O = I_{\text{CM}} + mR^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

- Notiamo che al disco sono applicate la forza peso $\vec{P}$, la reazione normale del piano $\vec{R}_n$, un'eventuale forza di attrito statico $\vec{F}_{att}$ e la forza esterna $\vec{F}$. L'unica forza che può dare momento non nullo rispetto a O è quest'ultima, per cui:

$$\vec{\tau}_O = \vec{R} \times \vec{F}$$

dove $\vec{R}$ è un vettore di modulo pari a R (raggio del disco) che congiunge O con il punto di applicazione di $\vec{F}$.

- Possiamo in realtà riscrivere la II Equazione Cardinale in forma scalare, proiettata su un asse ortogonale al piano del foglio e con verso positivo entrante. Un'accelerazione angolare del disco in figura in verso orario è perciò considerata positiva. Otteniamo:

$$\tau_O = RF = I_O \alpha$$

da cui:

$$\alpha = \frac{FR}{I_O} = \frac{FR}{\frac{3}{2}mR^2}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{2F}{3mR} \simeq 1.33 \text{ rad/s}^2}$$

(b) Si determini la forza di attrito statico (in modulo, direzione e verso) agente sulla ruota, facendo un disegno chiaro che descriva la situazione.

- Scriviamo ora la I Equazione Cardinale della Meccanica:

$$\vec{F} + \vec{F}_{att} + \vec{R}_n + \vec{P} = \vec{F}_{ris} = m\vec{a}$$

Notiamo che $\vec{R}_n + \vec{P} = 0$ e possiamo riscrivere la stessa equazione proiettata su un asse parallelo al piano orizzontale, con verso positivo verso destra in figura.

$$F + F_{att} = ma$$

In questa scrittura, F_{att} è positiva se orientata verso destra e negativa se orientata verso sinistra. Ricordiamo che la forza d'attrito statico è per natura sempre parallela al piano di appoggio.

- Poiché si ha rotolamento senza strisciamento:

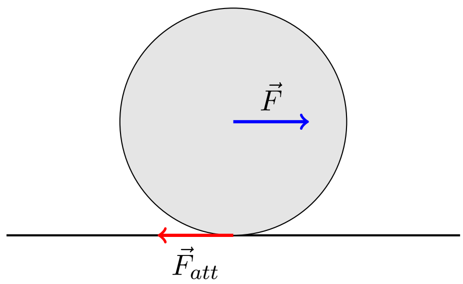
$$a = R\alpha$$

perciò:

$$F_{att} = ma - F = mR\alpha - F$$
$$F_{att} = mR\frac{2F}{3mR} - F = -\frac{F}{3}$$

La forza d'attrito è dunque **diretta orizzontalmente**, orientata **verso sinistra** in figura, e in modulo pari a

$$\boxed{|F_{att}| = 3.33 \text{ N}}$$



(c) Fornire la definizione generale di momento di inerzia specificando i termini.

- Si definisce momento di inerzia assiale di un sistema rigido, rispetto a un asse di rotazione z, la quantità scalare:

$$I_z = \sum_i \rho_i^2 m_i \qquad \text{per sistemi discreti}$$
$$I_z = \int \rho^2 dm \qquad \text{per sistemi continui}$$

dove ρ_i (ρ) è la distanza della massa i-esima (della massa dm) dall'asse z. Nel Sistema Internazionale l'unità di misura del momento di inerzia è il $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

3. Un cilindro adiabatico è orientato verticalmente ed è chiuso, in alto, da un pistone scorrevole senza attrito. Esso contiene $n = 1$ mol di gas perfetto biatomico. Il pistone è anch'esso adiabatico e ha area $S = 100$ cm^2. Inizialmente, il gas è in equilibrio con l'ambiente esterno e si trova a pressione atmosferica $p_1 = 1$ bar e temperatura $T_1 = 293$ K.

   (a) Il gas viene compresso appoggiando sul pistone una massa $M = 10$ kg. Calcolare la pressione del gas nel nuovo stato di equilibrio raggiunto.

   - La pressione del nuovo stato di equilibrio equivarrà alla pressione esterna agente sul pistone, che è la somma della pressione atmosferica p_1 e della pressione data dalla forza peso della massa M.

$$\boxed{p_2 = p_1 + \frac{Mg}{S} = 109.8 \text{ kPa}}$$

   (b) Calcolare la temperatura del gas nel nuovo stato di equilibrio.

   - La compressione avviene in modo adiabatico (irreversibile). Si tratta di una trasformazione a pressione esterna costante con $p_{est} = p_2$. Dal Primo Principio della Termodinamica, essendo $Q = 0$:

$$\mathcal{L} = -\Delta U$$
$$p_2(V_2 - V_1) = -nc_V(T_2 - T_1)$$
$$p_2V_2 - p_2V_1 = \frac{5}{2}nRT_1 - \frac{5}{2}nRT_2$$

   - Dall'equazione dei gas perfetti ricaviamo immediatamente:

$$p_2V_2 = nRT_2$$

Inoltre,

$$p_1V_1 = nRT_1 \quad \rightarrow \quad V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad \rightarrow \quad p_2V_1 = nR\frac{p_2}{p_1}T_1$$

Perciò possiamo scrivere:

$$nRT_2 - nR\frac{p_2}{p_1}T_1 = \frac{5}{2}nRT_1 - \frac{5}{2}nRT_2$$
$$T_2 + \frac{5}{2}T_2 = \frac{5}{2}T_1 + \frac{p_2}{p_1}T_1$$
$$\frac{7}{2}T_2 = \frac{5p_1 + 2p_2}{2p_1}T_1$$
$$\boxed{T_2 = \frac{5p_1 + 2p_2}{7p_1}T_1 \simeq 301.2 \text{ K}}$$

   (c) Nel cilindro viene infine immessa, tramite un ugello e senza far uscire il gas dal cilindro, una massa $m = 100$ g di acqua alla temperatura T_1. Calcolare la temperatura finale di equilibrio del sistema.

   - Tenendo presente che il calore specifico dell'acqua è $c_A = 1 \ \frac{\text{cal}}{\text{g}\,°\text{C}} = 4816 \ \frac{J}{\text{kg}\,\text{K}}$, la capacità termica della massa m di acqua inserita si calcola come:

$$C_A = mc_A \simeq 418.6 \text{ J/K}$$

   - La capacità termica delle n moli di gas, in uno scambio termico a pressione costante, è:

$$C_G = nc_P = n \cdot \frac{7}{2}R = 29.1 \text{ J/K}$$

- Considerando che acqua e gas scambiano calore solo tra di loro:

$$Q_A + Q_G = 0$$

$$C_A(T_{eq} - T_1) + C_G(T_{eq} - T_2) = 0$$

$$(C_A + C_G)T_{eq} = T_1 C_A + T_2 C_G$$

$$\boxed{T_{eq} = \frac{T_1 C_A + T_2 C_G}{C_A + C_G} = 293.5 \text{ K}}$$