SISTEMI RETROAZIONATI: STABILITÀ E PRESTAZIONI

Esercizio 1

Dato un sistema dinamico a tempo continuo senza autovalori nascosti con funzione di trasferimento

$$G(s) = 10\frac{1+s}{(1+2s)(1+0.1s)} \qquad R(s) = 1$$

1) • TIPO: $g = 0$

• GUADAGNO: $\mu = G(0) = 10 = 20dB$

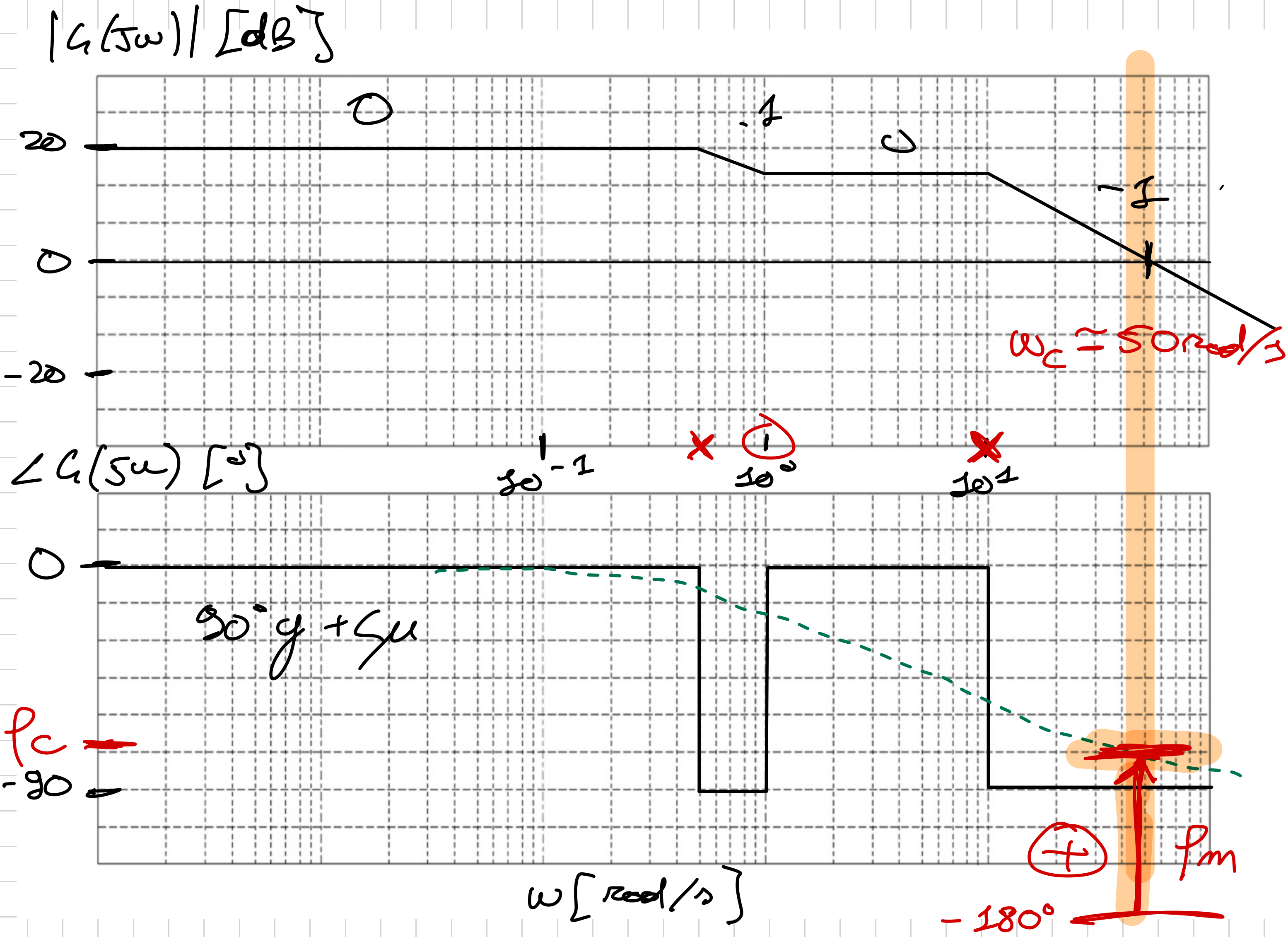
• zero: $z_1 = -1$

• poli: $p_1 = -0,5 \quad p_2 = -10$

SISTEMA A. STAB

SISTEMA A FASE MINIMA

2)



2)

$$R(s) = 1$$

$$L(s) = G(s) \cdot R(s) = G(s)$$

APPLICHIAMO IL CRITERIO DI BODE

[è possibile:
- $L(s)$ non ha poli "instabili"
- ω_c è ben definita]

- $\mu_L = 10 > 0$ ✓
- $\varphi_m > 90^\circ > 0^\circ$ ✓

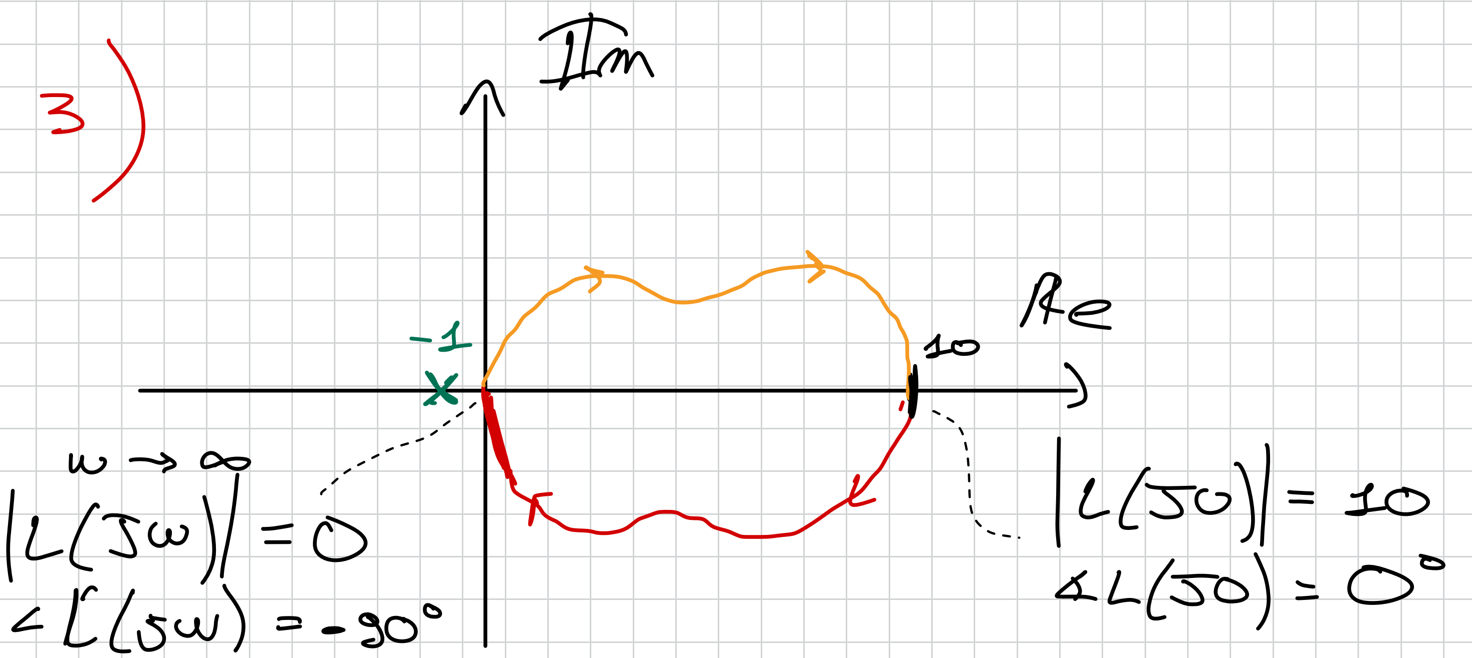
↳ la fase è al massimo -90° (*)

$\Rightarrow$ IL SISTEMA RETROAZIONATO È A.S.

OSS (*): È possibile concludere della stabilità del sistema avvalendosi del "COROLLARIO DELLA PICCOLA FASE".

"Per sistemi con $P=0$, se $\angle L(j\omega) < -180^\circ$, il sistema è A.STABILE"

3)



4) $K_M = \dfrac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$ → ω_π non è ben definita $\Rightarrow K_m = \infty$

$\varphi_c = \measuredangle G(j\omega_c) = \underbrace{\cancel{\measuredangle \mu}}_{0^\circ} + \measuredangle(1+j50) - \measuredangle(1+2j50) - \measuredangle(1+0{,}5j50)$

$\omega_c \sim 50 \text{ rad/s}$

$= \operatorname{atan}(50) - \operatorname{atan}(100) - \operatorname{atan}(5)$

$= \cancel{+90^\circ} \quad \cancel{-90^\circ} \quad -78{,}7^\circ$

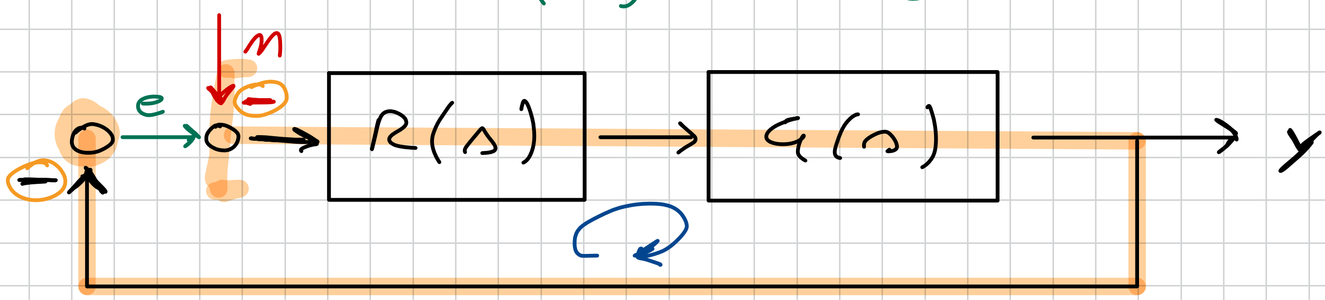
$\simeq -78{,}7^\circ$

$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 101^\circ$ → visibile anche graficamente

5) Errore statico $n(t) = \text{sca}(t)$

$(y^\circ(t) = 0,\ v(t) = 0,\ d(t) = 0)$

FdT $E(s) \longrightarrow N(s)$



$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-R(s)\cdot G(s)\cdot(-1)}{1 + R(s)G(s)}$$

retroazione negativa

$$\frac{E(s)}{N(s)} = \boxed{\frac{R(s)\cdot G(s)}{1+R(s)G(s)}}$$

F(s): SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

$[R(s)=1]$

$$= \frac{G(s)}{1+G(s)} N(s)$$

$$G(s) = \frac{num}{den}$$

$$E(s) = \frac{num/den}{1+num/den} = \frac{num}{den+num}$$

$$= \frac{10(1+s)}{10(1+s)+(1+2s)(1+0{,}1s)}$$

UTILIZZO TVF (il sistema è a. stab.)

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s E(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{10(1+s)}{10(1+s)+(1+2s)(1+0{,}1s)} \frac{1}{\cancel{s}}$$

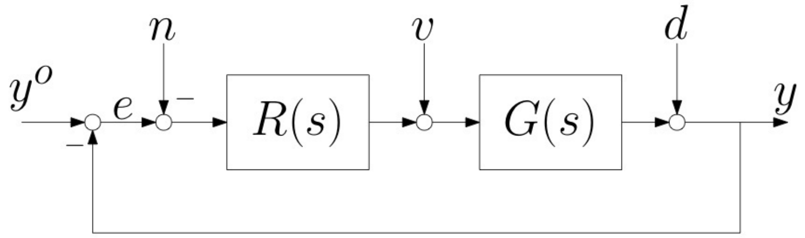
$$= \frac{10}{11} = \frac{\mu_L}{\mu_L+1} A$$

OSS: Ricavabile da tabella F(s)

$[g_L = 0, \quad A = 1]$ ← ampiezza scalino

Esercizio 2

Si consideri lo schema di controllo in figura,



in cui

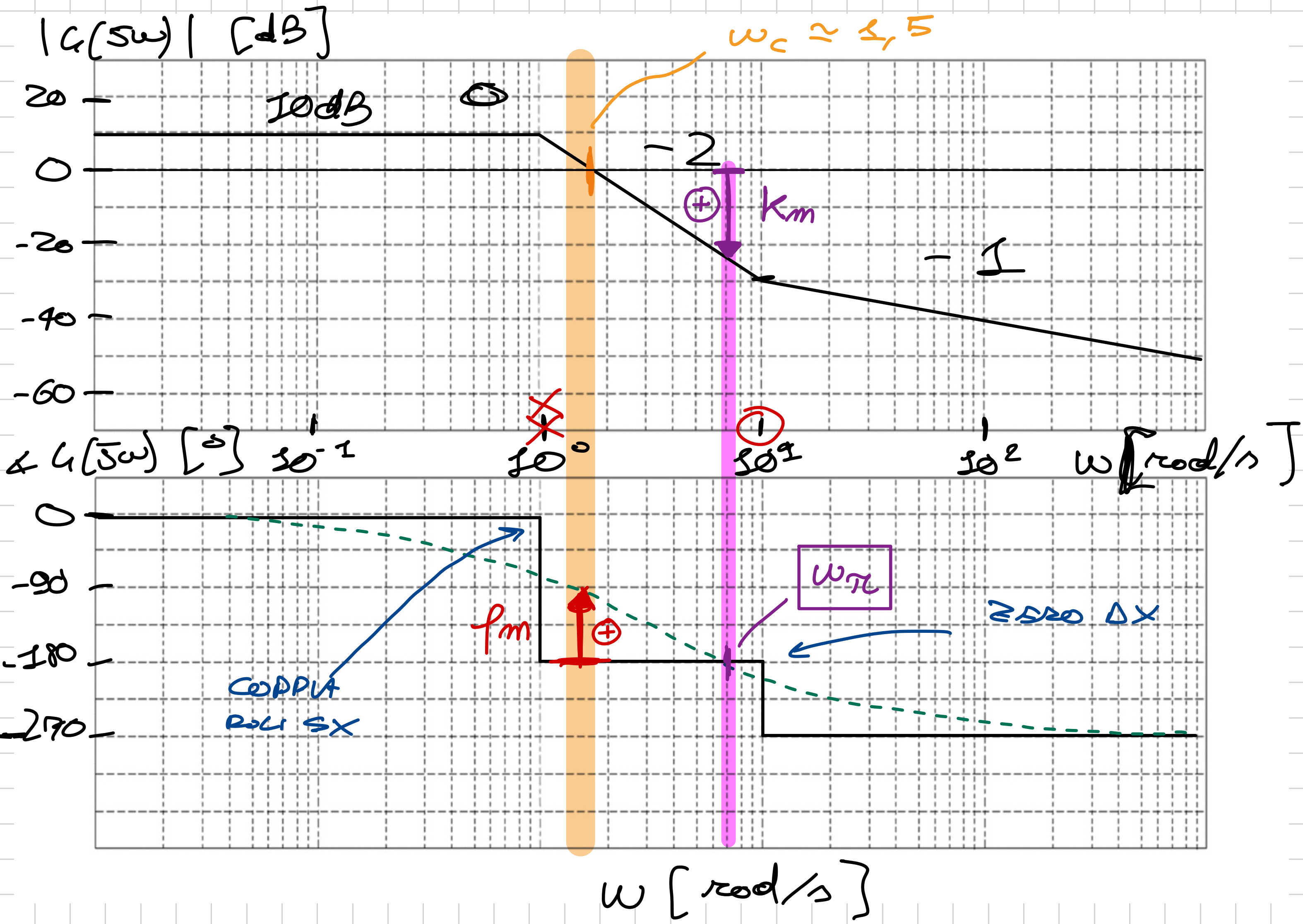
$$G(s) = 3\frac{1-0.1s}{(1+s)^2}.$$

2.1. Studiare la stabilità del sistema retroazionato quando

- $R(s) = 1$
- $R(s) = \frac{s+1}{3s}$
- $R(s) = \frac{s+1}{3s(1-0.1s)}$

1) $R(s) = 1$ $\qquad L(s) = R(s) \cdot G(s) = G(s)$

- TIPO $\qquad g = 0$
- GUADAGNO $\qquad \mu = G(0) = 3 \simeq 10\,dB$
- Zero $\qquad z_1 = 10$
- poli $\qquad p_1 = p_2 = -1$



BODE APPLICABILE

- $L(s)$ no poli instab.
- $\omega_c \simeq 1{,}5$ rad/s

- $\mu_L > 0$ ✓
- $\varphi_m > 0°$ ✓ $\Rightarrow$ A. STAB. IN ANELLO CHIUSO

$$\varphi_c = \measuredangle G(j1{,}5) = \measuredangle\mu + \measuredangle(1 - 0{,}1j \cdot 1{,}5) - \measuredangle(1 - j1{,}5)^2$$

$$= 0° + \mathrm{atan}(-0{,}15) - 2\,\mathrm{atan}(1{,}5)$$

$$= -8{,}5° - 112{,}6° = -121{,}1°$$

$$\varphi_m = 180° - |-121{,}1°| = 58{,}9° > 0$$

2) $R(s) = \dfrac{s+1}{3s}$

$$L(s) = R(s)\cdot G(s) = \frac{\cancel{s+1}}{\cancel{3}s}\cdot\frac{\cancel{3}(1-0{,}1s)}{(s+1)^{\cancel{2}}}$$

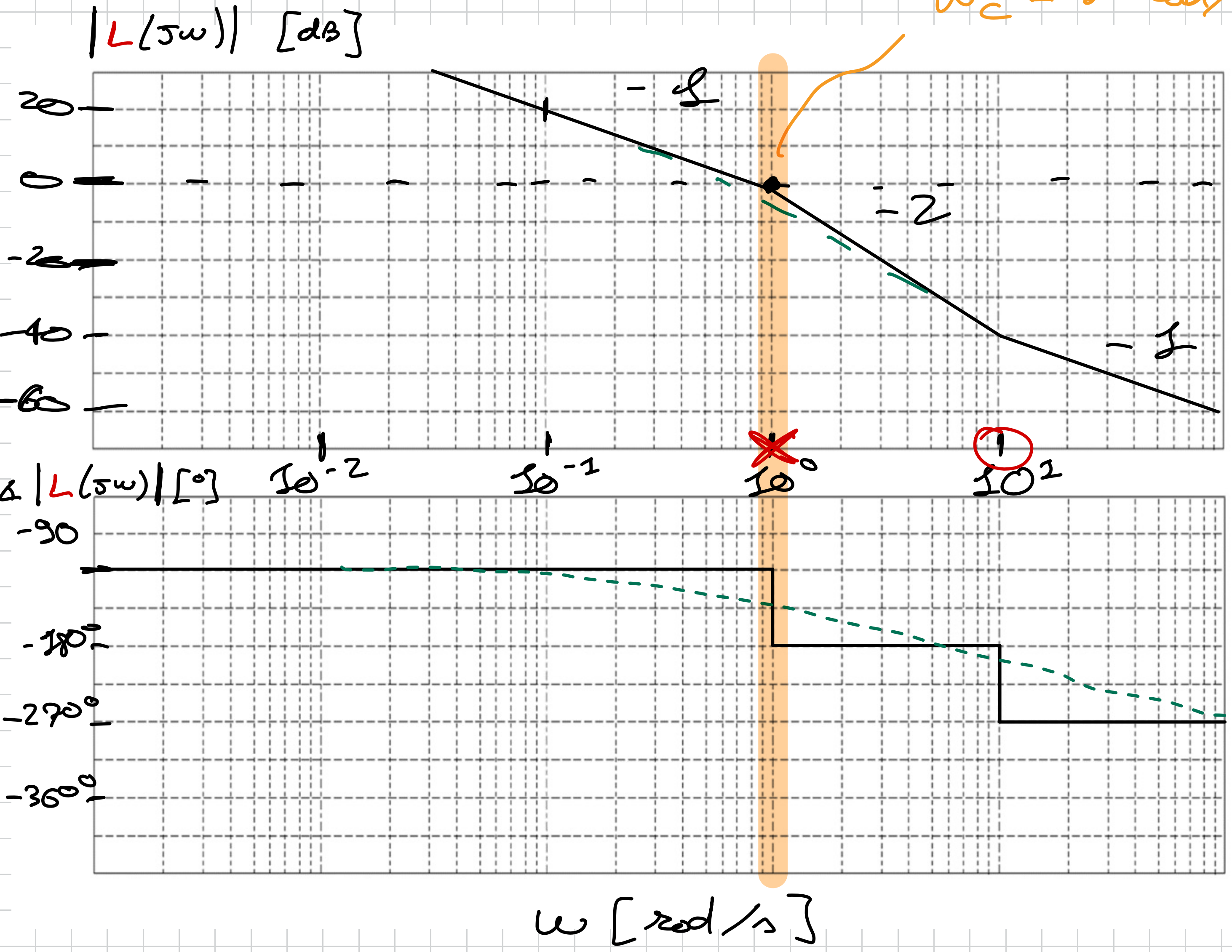
$$= \frac{(1-0{,}1s)}{s(s+1)}$$

- TIPO : $g = 1$
- GUADAGNO GENERALIZZATO $\mu = \lim_{s\to 0} s^{\overset{1}{g}} L(s) = 1$

- polo $p_1 = -1$
- zero $z_1 = 10$

circa per il taglio del grafico REALE del modulo

$\omega_c \simeq 1$ rad/s



BODE APPLICABILE ✓ $(\omega_c \sim 1 \text{ rad/s})$

$$\varphi_c = \angle G(j1) = \angle \mu + \angle(1 - j0{,}1) - \angle(j) - \angle(1+j)$$

$$= 0^\circ + \operatorname{atan}(-0{,}1) - 90^\circ - \operatorname{arctg}(1)$$

$$= -5{,}7^\circ - 90^\circ - 45^\circ = -140^\circ$$

$$\varphi_m = 180^\circ - |\varphi_c| = 40^\circ$$

$\mu_c > 0$
$\varphi_m > 0^\circ$ $\Longrightarrow$ SIST. RETROAZIONATO A. STAB × BODE

COME CALCOLARE ω_c ANALITICAMENTE?

per ottenere omega "reale": $|L(j\omega_c)| = 1$

$$|L(j\omega)| = \frac{|1 - 0{,}1 j\omega_c|}{|j\omega_c + 1|\,|j\omega_c|} = \frac{\sqrt{1^2 + (10^{-1}\omega_c)^2}}{\sqrt{\omega_c^2 + 1}\,\sqrt{\omega_c^2}} = 1^2$$

$$\frac{1 + 10^{-2}\omega_c^2}{(\omega_c^2 + 1)\,\omega_c^2} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_c^4 + \omega_c^2 = 1 + 10^{-2}\omega_c^2$$

$$\omega_c^4 + 0{,}99\,\omega_c^2 - 1 = 0 \qquad \omega_c^2 = z$$

z è positivo

$$z^2 + 0{,}99\,z - 1 = 0$$

$$z_{1,2} = -\frac{0{,}99}{2} \pm \frac{\sqrt{0{,}99^2+4}}{2} = \begin{cases} \boxed{+0{,}6208} \\ \cancel{-1{,}6108} \end{cases}$$

$$\omega_c^2 = 0{,}6208\ (\text{rad/s})^2$$

$$\omega_c = 0{,}7879\ \text{rad/s} \rightarrow \quad \varphi_c = \angle L(j0{,}7879) = $$

NOTA: Utilizzando il valore preso dal diagramma abbiamo sovrastimato ω_c e sottostimato φ_m. Ma l'approssimazione è efficace per l'analisi di stabilità!

3) $$R(s) = \frac{s+1}{3s(1-0{,}1s)}$$

REGOLATORE INSTABILE

$$L(s) = R(s)\,G(s) = \frac{\cancel{s+1}}{3s\cancel{(1-0{,}1s)}} \cdot \frac{\cancel{3(1-0{,}1s)}}{(1+s)^{\cancel{2}}} =$$

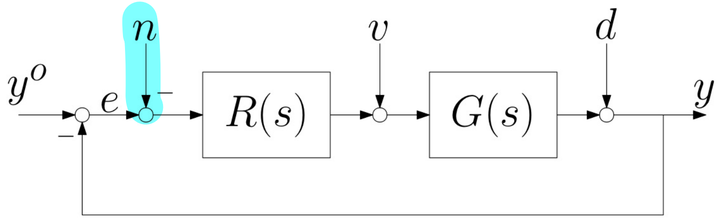
$$= \frac{1}{s(s+1)}$$

$\Rightarrow$ CANCELLAZIONE CRITICA

$\Rightarrow$ SISTEMA RETROAZIONATO È INSTABILE !!

Esercizio 3

Si consideri lo schema di controllo in figura,



in cui

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

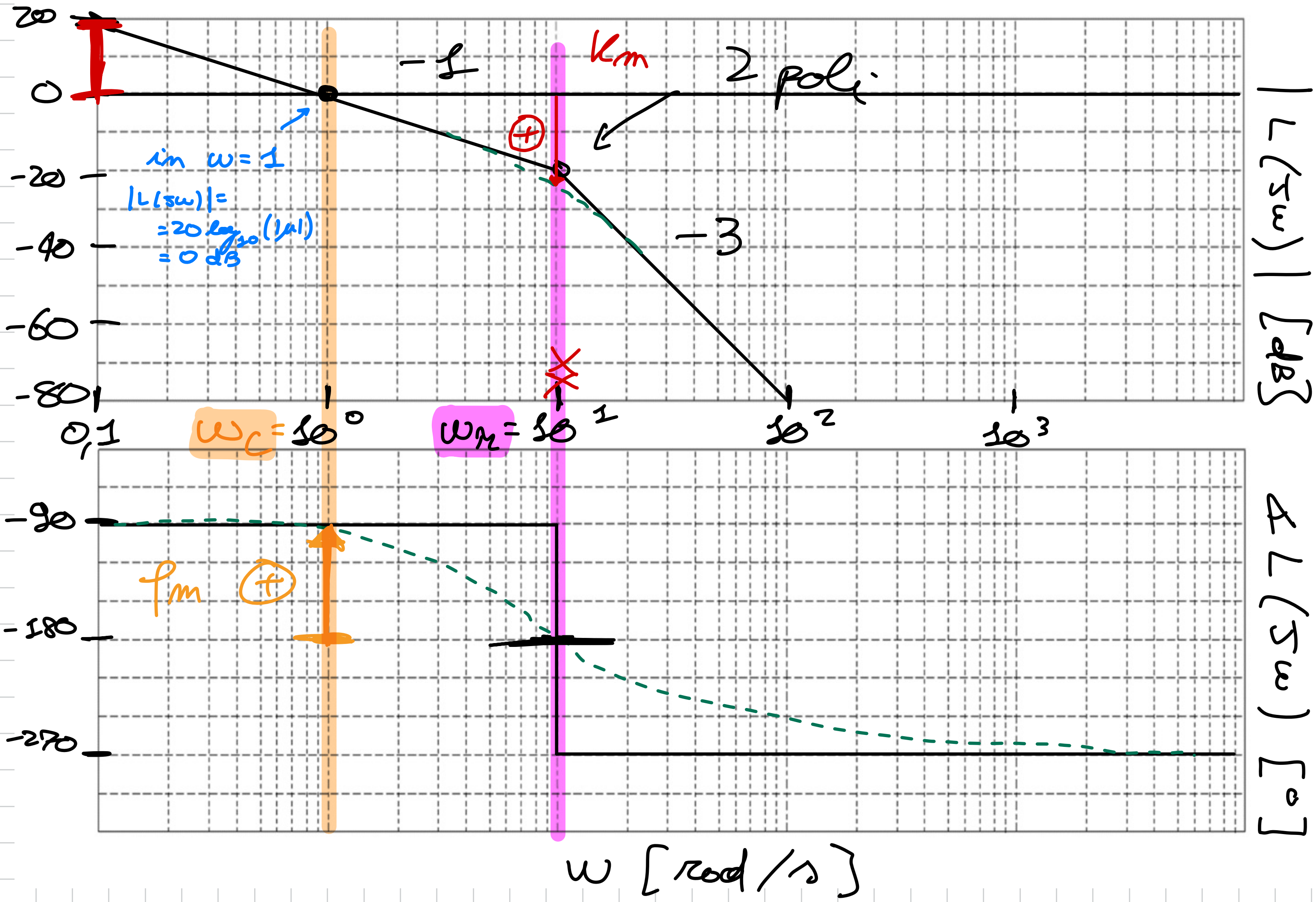
e

$$G(s) = \frac{1}{(1 + 0.1s)^2}.$$

1) $L(s) = R(s) \cdot G(s) = \dfrac{1}{s(1+0{,}1s)^2}$

- TIPO : $g = 1$
- GUADAGNO : $\mu = 1$
- poli : $p_1 = p_2 = -10$

SISTEMA A FASE MINIMA



IL SISTEMA RETROAZIONATO È STABILE?

- $\mu_L = 1 > 0$ ✓
- $\varphi_m = 180° - |\varphi_c| \simeq 90° > 0°$ ✓

$\Rightarrow$ SISTEMA RETROAZ. A. STAB x BODE

(BODE APPLICABILE : · $L(s)$ no poli instab. · ω_c ben definita ~ 1 rad/s)

COME CALCOLARE ω_π ANALITICAMENTE?

$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} \quad \text{(margine di guadagno)}$$

$$\measuredangle L(j\omega_\pi) = -180°$$

$$\underbrace{\cancel{-j\omega_\pi}}_{-90°} - 2\,\text{atan}\left(\frac{0{,}1\,\omega_\pi}{1}\right) = -180°$$

$$-2\,\text{atan}\left(0{,}1\,\omega_\pi\right) = -90°$$

$$\text{atan}\left(\underbrace{0{,}1\,\omega_\pi}_{1}\right) = 45°$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}1\,\omega_\pi = 1$$

$$\Rightarrow \quad \omega_\pi = 10 \text{ rad/s}$$

$$\left| L(j\omega_\pi) \right| = \frac{1}{|10j|\,|1+\cancel{0{,}1}\,j\cdot\cancel{10}|^2} = \frac{1}{20}$$

$\omega_\pi = 10$

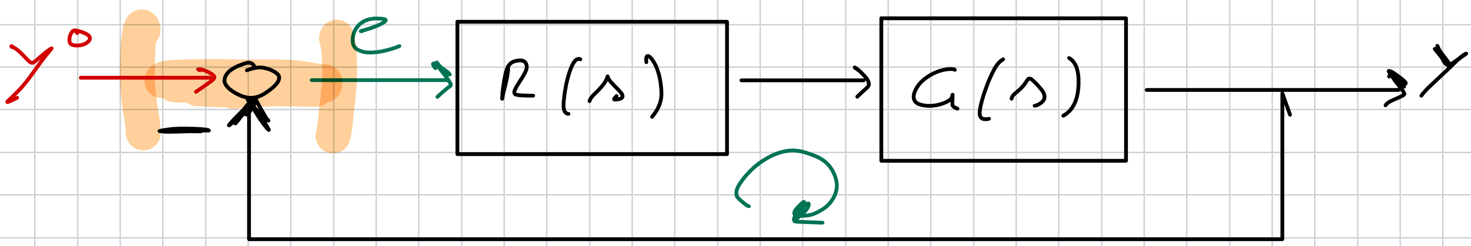
$$K_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|} = 20 \qquad K_m|_{dB} \simeq 26\,dB$$

CHECK DAL GRAFICO!

2) $|e_\infty|$ con
- $y^\circ(t) = 4\,\text{ramp}(t)$
- $n(t) = 0{,}1\,\text{sca}(t)$
- $d(t) = 2\sin(0{,}1\,t)$

Andiamo a calcolare la FdT tra $Y^\circ(s)$, $N(s)$, $D(s)$ e $E(s)$

- $Y^\circ(s) \longrightarrow E(s)$



$$\frac{E(s)}{Y^\circ(s)} = \frac{1}{1 + R(s)\,G(s)}$$

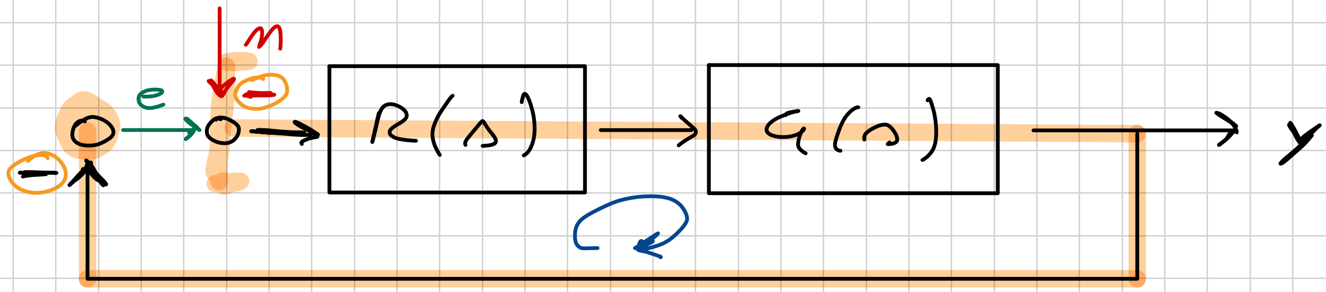
$1 \longrightarrow$ FUNZIONE DI ANDATA

$R(s)G(s) \rightarrow$ FUNZIONE D'ANELLO

$+ \rightarrow$ RETROAZ. NEG

$$= \boxed{S(s)} \qquad \text{SENSITIVITÀ}$$

- $N(s) \longrightarrow E(s)$

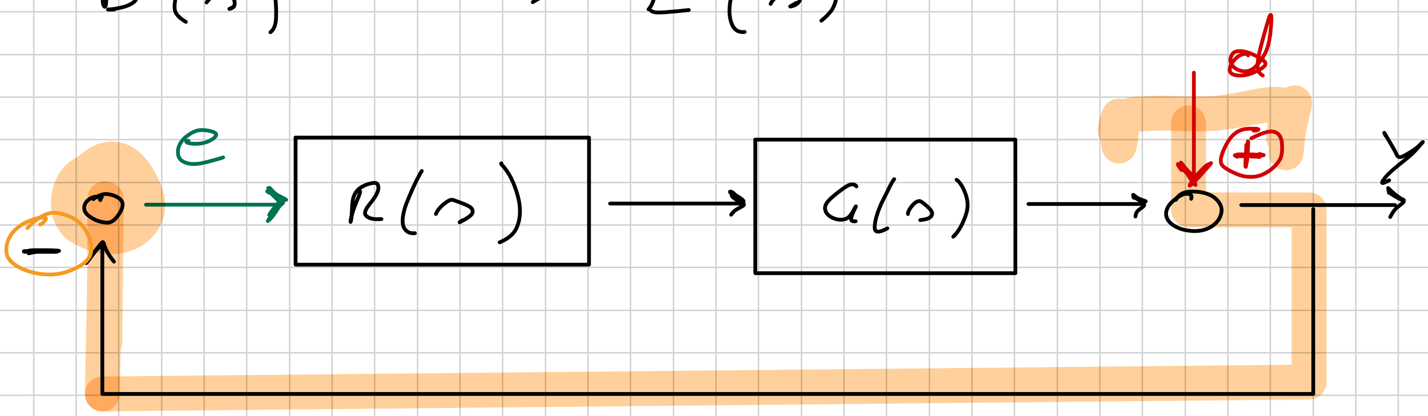


$$\frac{E(s)}{N(s)} = \frac{-R(s)\cdot G(s)\cdot(-1)}{1+\underbrace{R(s)\,G(s)}} = \boxed{F(s)}$$

retroazione negativa

SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE

- $D(s) \longrightarrow E(s)$



$$\frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{1+R(s)\,G(s)} = \boxed{-S(s)}$$

SOVRAPPONENDO GLI EFFETTI ABBIAMO COSÌ OTTENUTO LA DIPENDENZA DINAMICA DI $E(s)$ DAGLI ALTRI SEGNALI

$$\boxed{E(s) = S(s)\,Y^{o}(s) - S(s)\,D(s) + F(s)\,N(s)}$$

1 $\quad y^{o}(s) = \dfrac{4}{s^2}$

$$e_{\infty,y_o} \overset{\boxed{TVF}}{=} \lim_{s\to 0} s\cdot S(s)\,\frac{4}{s^2} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{4\left[s(1+0{,}1s)^2\right]}{s\left(1+s(1+0{,}1s)^2\right)} = 4$$

OSS: da tabella di $S(s)$: $e_\infty = \dfrac{A}{\mu_L}$

2 $\quad N(s) = \dfrac{0{,}1}{s}$

$$e_{\infty,n} \overset{\boxed{TVF}}{=} \lim_{s\to 0} s\,F(s)\,\frac{0{,}1}{s} = \lim_{s\to 0} 0{,}1\,F(s)$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{0{,}1}{1+s(1+0{,}1s)^2} = 0{,}1$$

3 $\quad d(t) = 2\,\sin(0{,}1t)$

T. RISPOSTA IN FREQ (solo MODULO): $\quad |e_{\infty,d}| = 2\,|\cancel{\times}S(j0{,}1)|$

$$\bar{\omega} = 0,1 \ll \omega_c = 1 \text{ rad/s}$$

APPROSSIMAZ. BASSA FREQ

$$|S(j\bar{\omega})| = \frac{1}{1+|L(j\bar{\omega})|} \simeq \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|} \simeq \frac{1}{10}$$

$$|L(j\bar{\omega})|_{dB} = 20\,dB$$
$$= 10$$

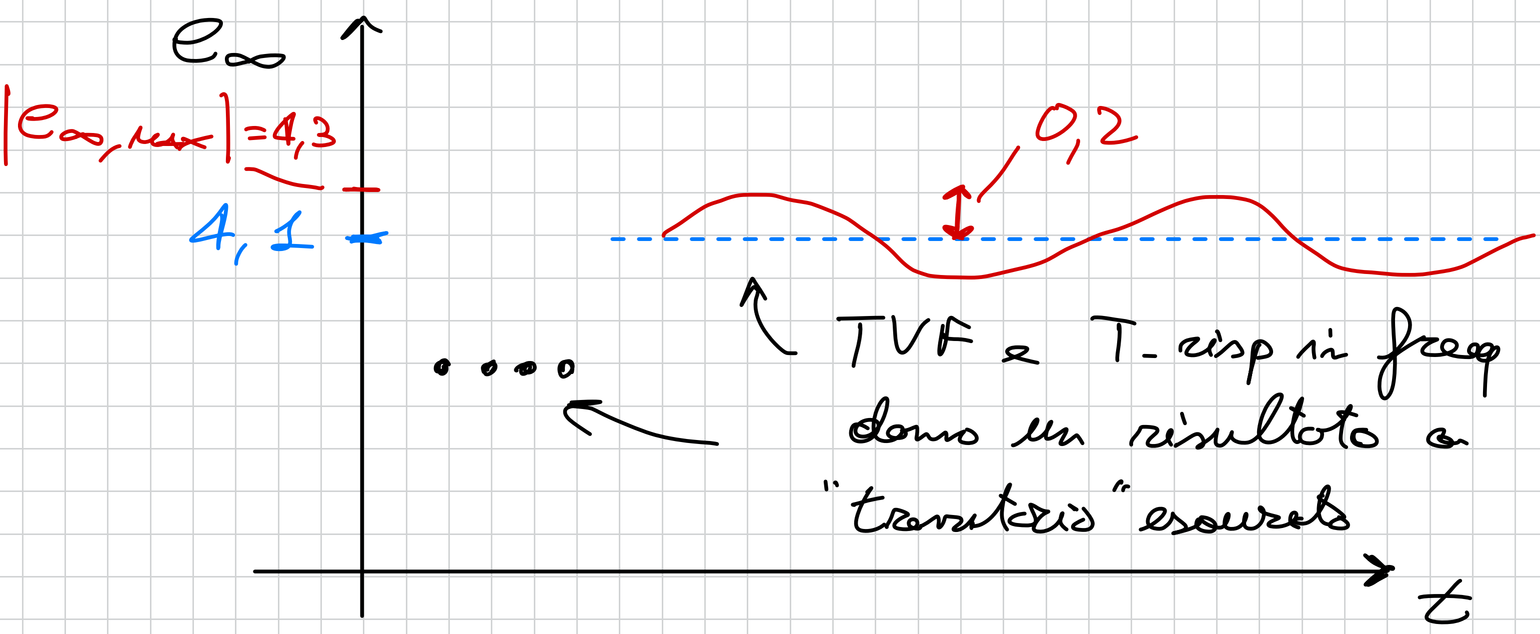
dal diag di Bode

$$\Rightarrow |e_{\infty,d}| = 0,2$$

SOVRAPPONENDO GLI EFFETTI 1, 2, 3 :

$$|e_\infty| = e_{\infty,y^\circ} + e_{\infty,n} + e_{\infty,d}$$

$$|e_{\infty,max}| = 4 + 0,1 + \underbrace{0,2}_{|e_{\infty,d}|_{max}} = 4,3$$



SIMULAZIONE CON MATLAB: