Fondamenti di Automatica – A.A. 2023/2024

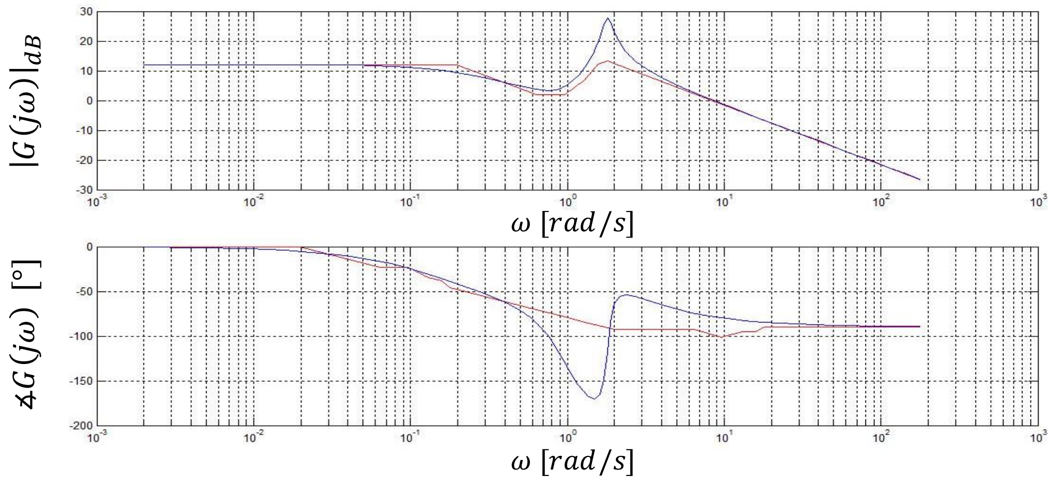
Esercitazione 08: Criteri di stabilità di Nyquist e Bode, margini di stabilità

Ingegneria Informatica
Prof. Fredy Ruiz

Milano, 7 Maggio 2024

Caratterizzazione risposta in frequenza

- **Diagramma di Bode**



- **Diagramma di Nyquist**

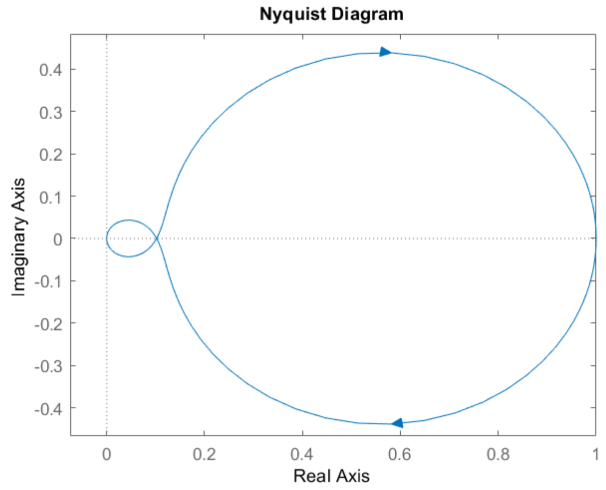
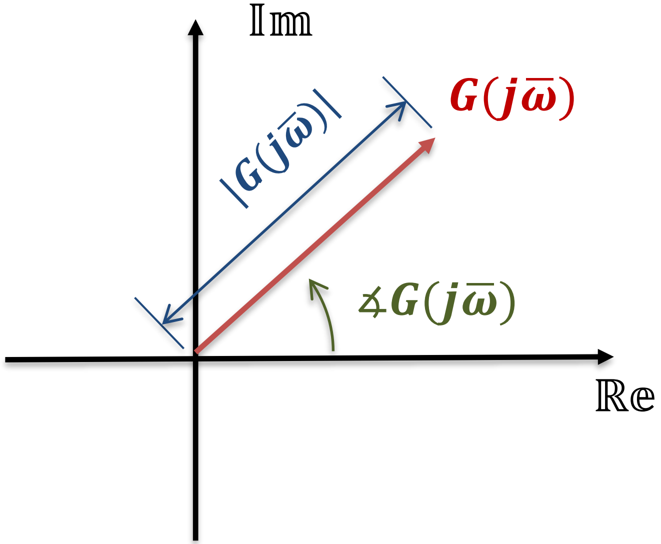


Diagramma di Nyquist

➢ **Idea di base:** vogliamo rappresentare nel piano complesso la funzione $G(j\omega)$ al variare di ω.

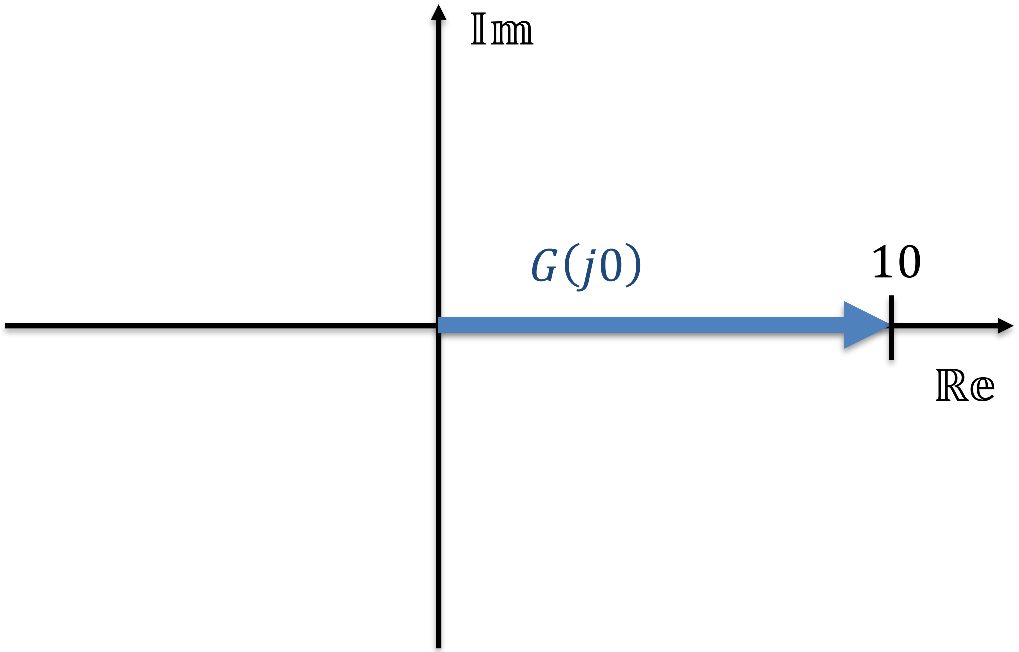
- $G(j\omega)$ può essere visto come un vettore nel piano complesso di modulo $|G(j\omega)|$ e fase $\measuredangle G(j\omega)$

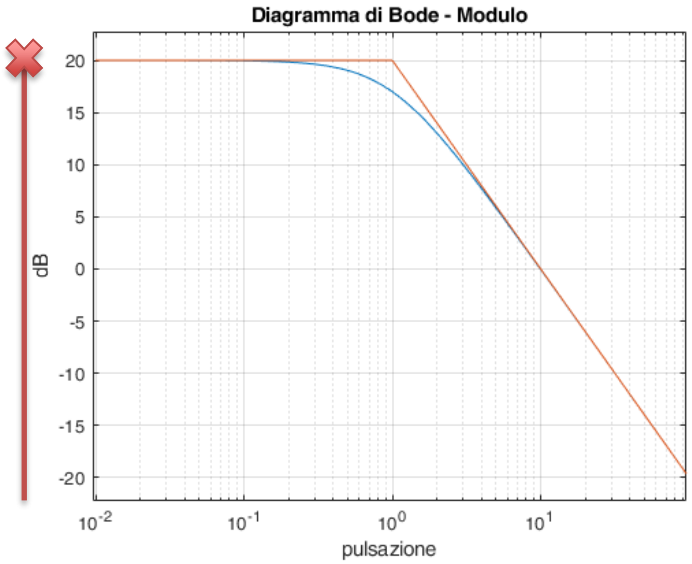


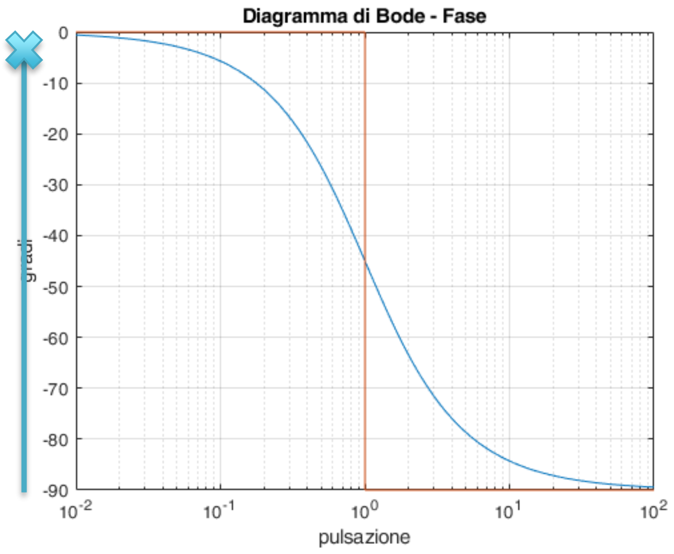
➢ Per creare il diagramma di Nyquist **partiamo dal diagramma di Bode** che ci descrive l'andamento di modulo $|G(j\omega)|$ e fase $\measuredangle G(j\omega)$

Diagramma di Nyquist

Esempio: $$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$







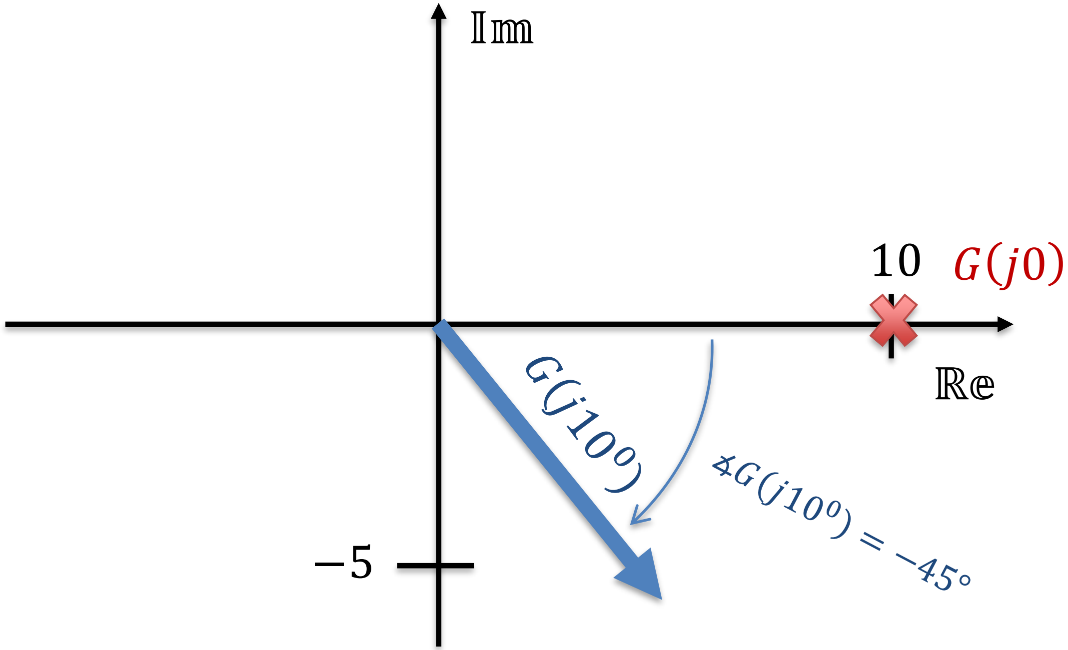
$$\omega \rightarrow 0$$

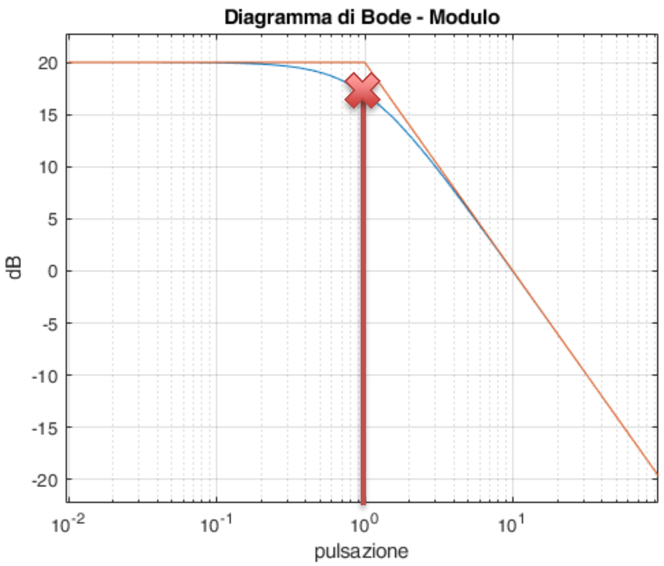
$|G(j0)|_{dB} \rightarrow 20\ dB$ $\quad$ $|G(j0)| \rightarrow 10$

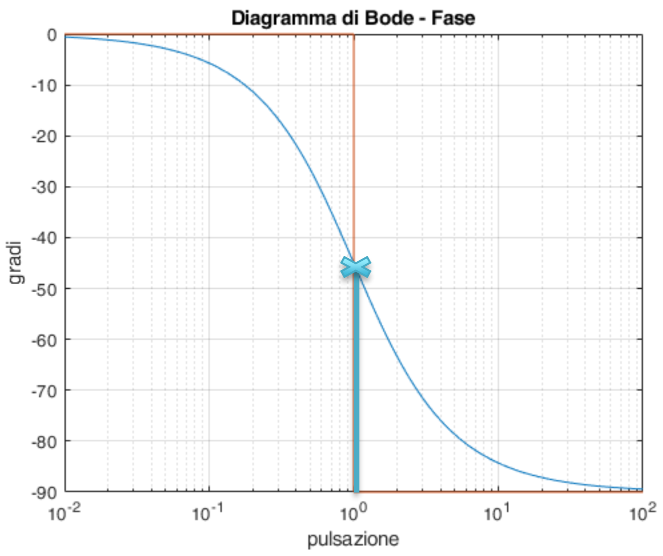
$\measuredangle G(j0) \rightarrow 0°$

Diagramma di Nyquist

Esempio: $$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$







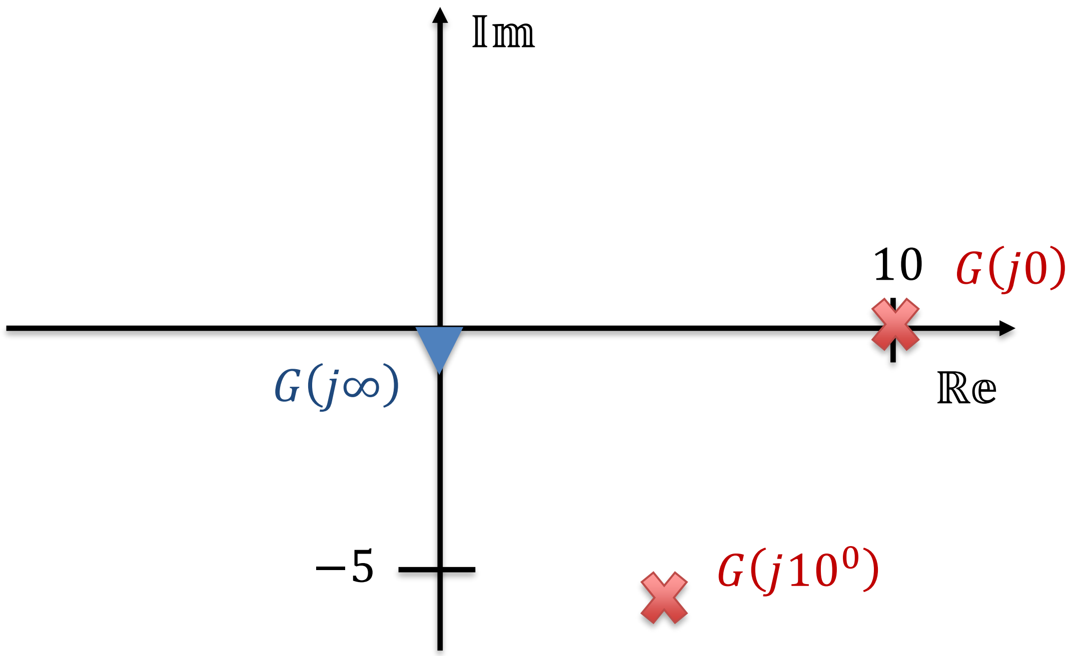
$$\omega \rightarrow 10^0$$

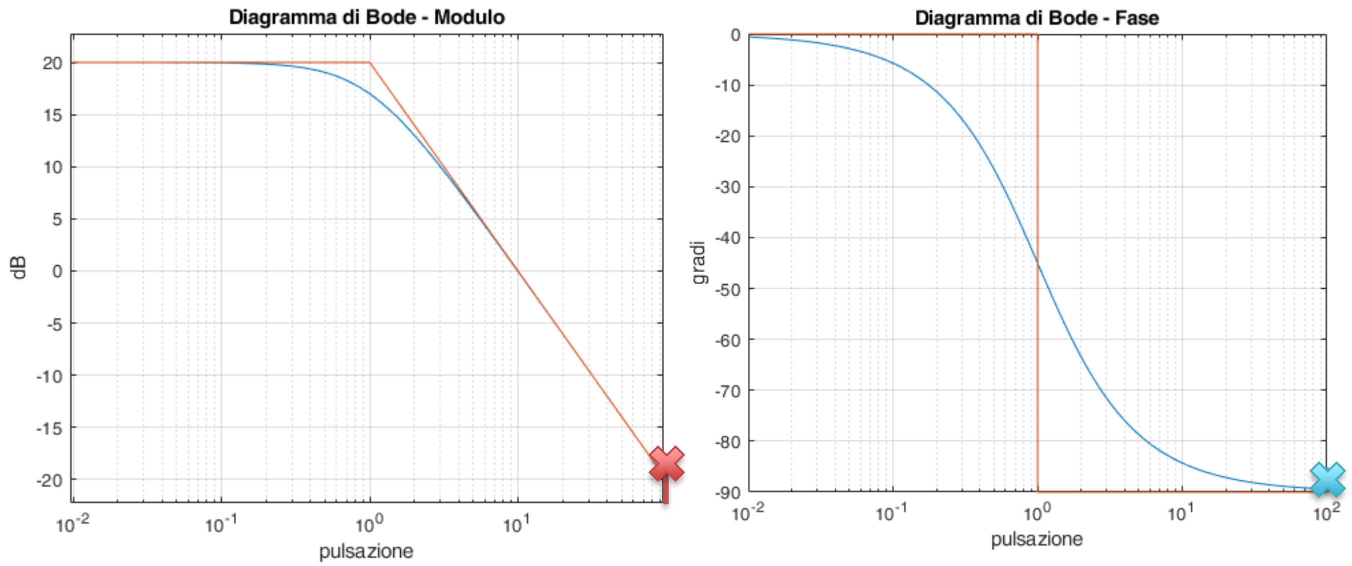
$$|G(j10^0)|_{dB} \cong 17dB \qquad |G(j10^0)| \cong 7.07$$

$$\measuredangle G(j10^0) = -45°$$

Diagramma di Nyquist

Esempio: $$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$





$$\omega \to \infty$$

$$|G(j\infty)|_{dB} \cong 16dB \qquad |G(j\infty)| \cong 6.3$$

$$\measuredangle G(j\infty) = -45°$$

Diagramma di Nyquist

Esempio: $$\boldsymbol{L(s) = \frac{10}{(s+1)}}$$

Diagramma polare ($\omega > 0$)

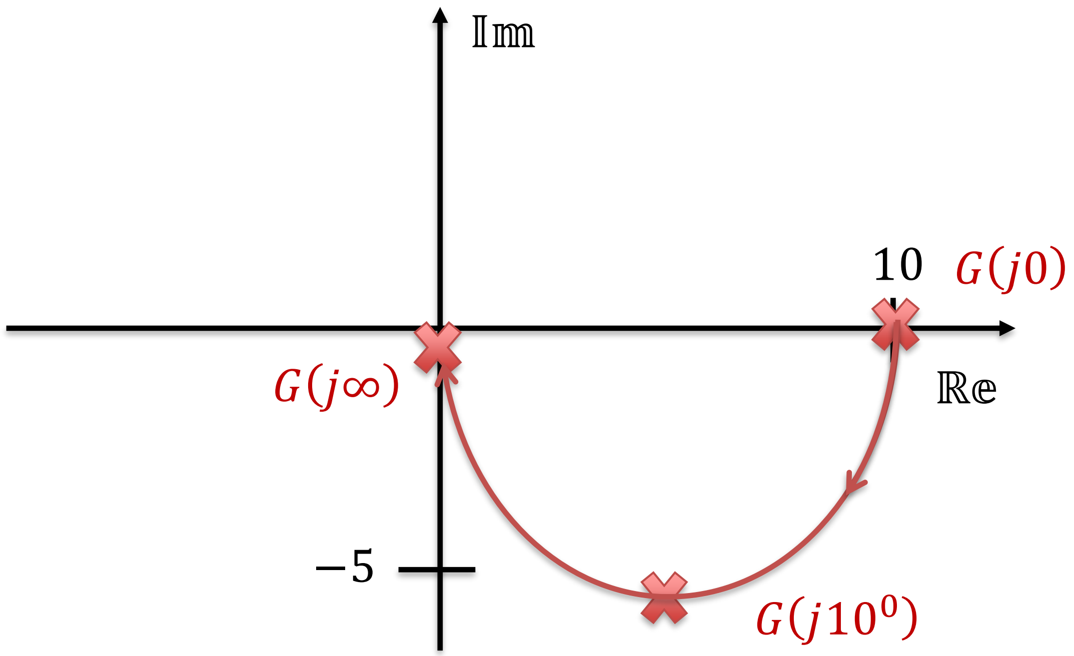


Diagramma di Nyquist

Esempio: $$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$

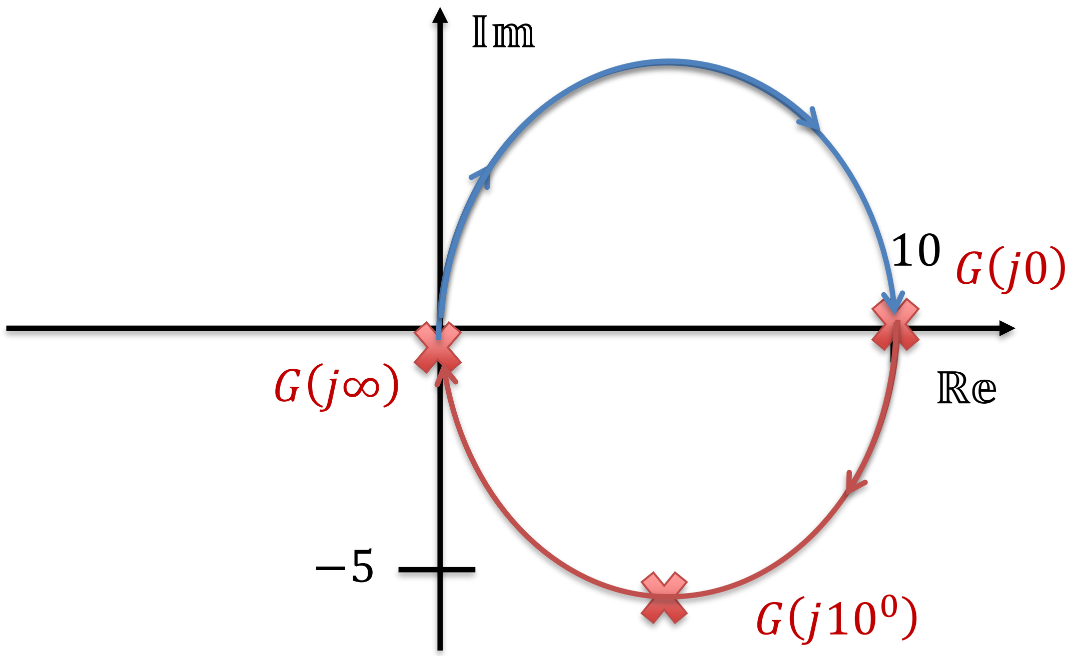


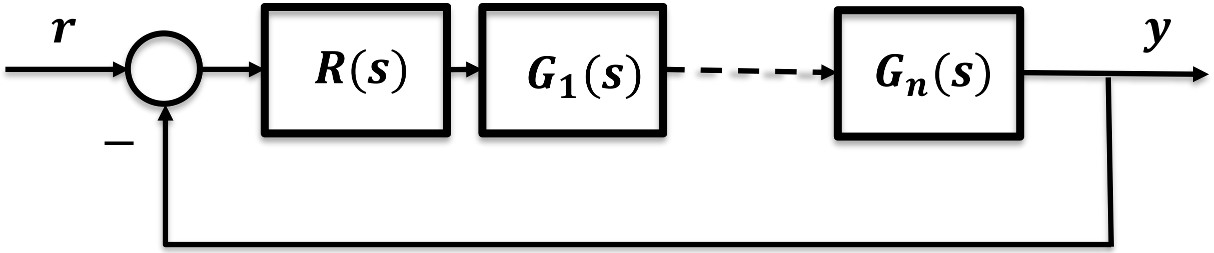
Diagramma polare $(\omega > 0)$

$(\omega < 0)$

Diagramma di Nyquist

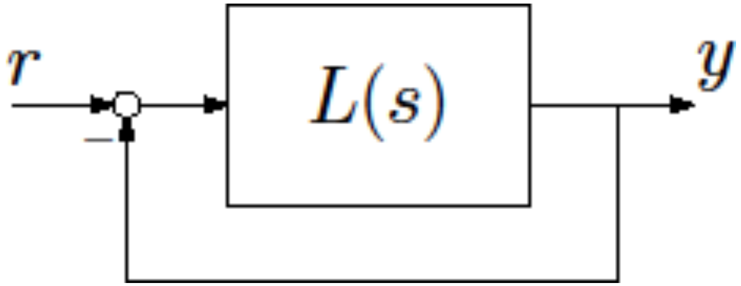
Criteri per stabilità in anello chiuso

Come possiamo analizzare la stabilità di sistemi complessi interconnessi in retroazione?



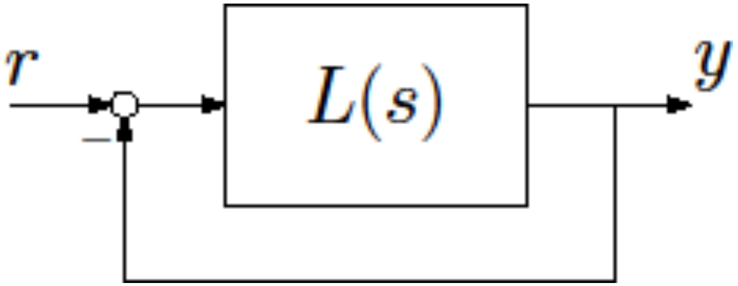
- **Criterio di Nyquist**

- **Criterio di Bode**



NOTA: Ovviamente è sempre possibile valutare i poli di $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$

Criterio di Nyquist



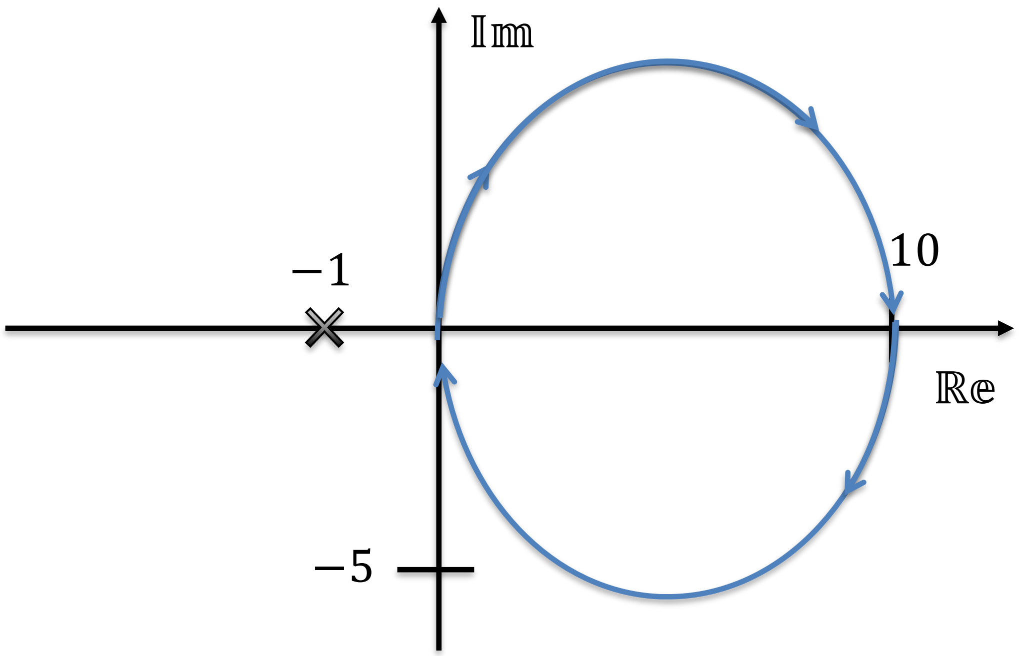
- Dato il sistema retroazionato in Figura
- Definiamo le seguenti quantità:
  - **P**: numero di **poli a parte reale** strettamente **positiva** di $L(s)$
  - **N**: numero di **giri** compiuti dal diagramma di Nyquist **intorno al punto -1** dell'asse reale, contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se in senso orario. N non è ben definito se il diagramma passa per il punto -1.

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se N è ben definito e risulta:

P = N

Criterio di Nyquist

Esempio: $$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$



- **P**: numero di **poli a parte reale** strettamente **positiva** di $L(s)$.

P = 0

- **N**: numero di **giri** compiuti dal diagramma di Nyquist **intorno al punto -1** dell'asse reale.

N = 0

⇩

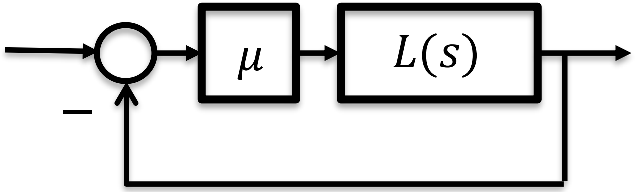
N = P

Il sistema retroazionato è ASINTOTICAMENTE STABILE

Robustezza a incertezza del guadagno - Nyquist

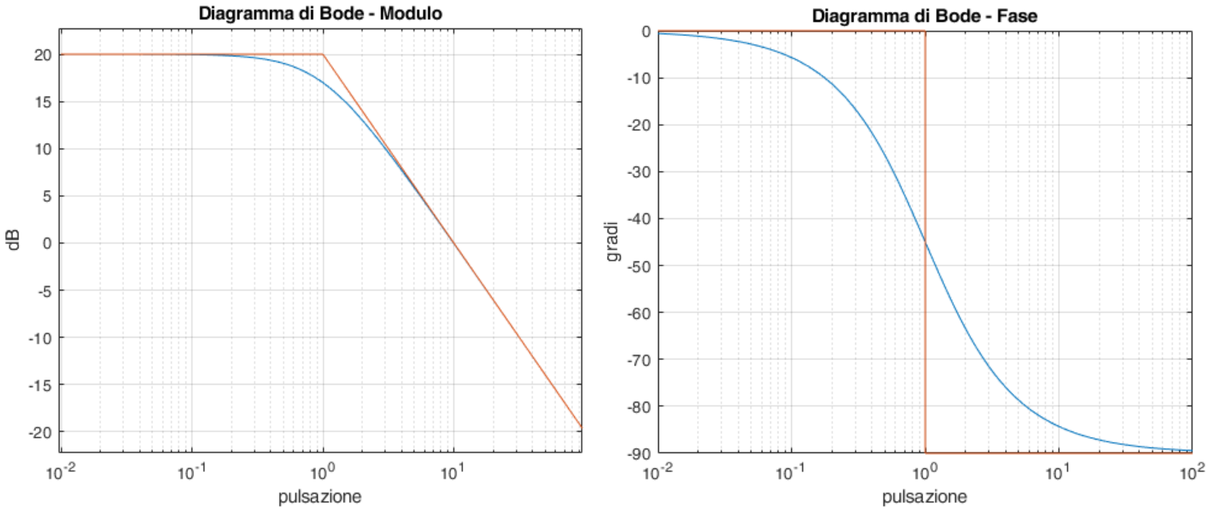
➢ Cosa succede alla stabilità del sistema se aggiungiamo nell’anello un guadagno μ?

Assumiamo $\mu > 0$

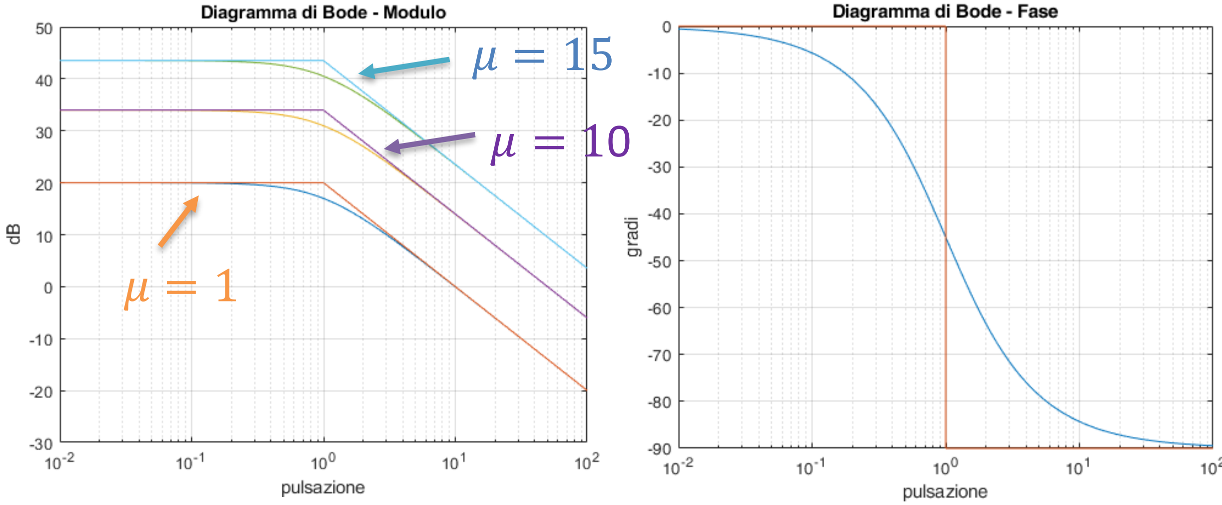


Proviamo a confrontare il diagramma di Bode di $L(s)$ e $\mu L(s)$

$L(s)$

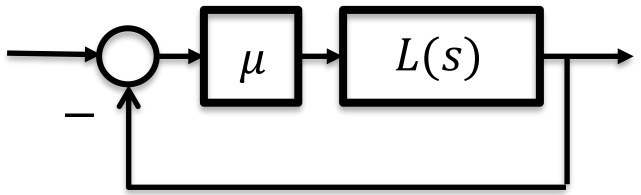


$\mu L(s)$



Robustezza a incertezza del guadagno - Nyquist

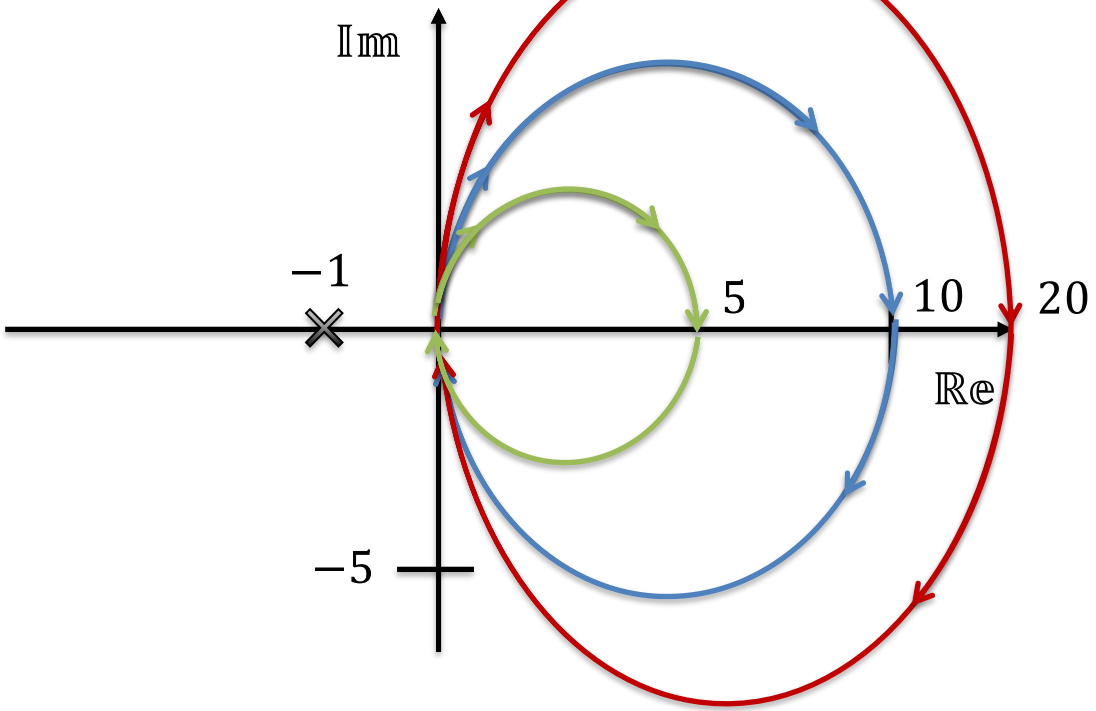
- Il diagramma del modulo trasla: sale se $\mu > 1$
  scende se $\mu < 1$

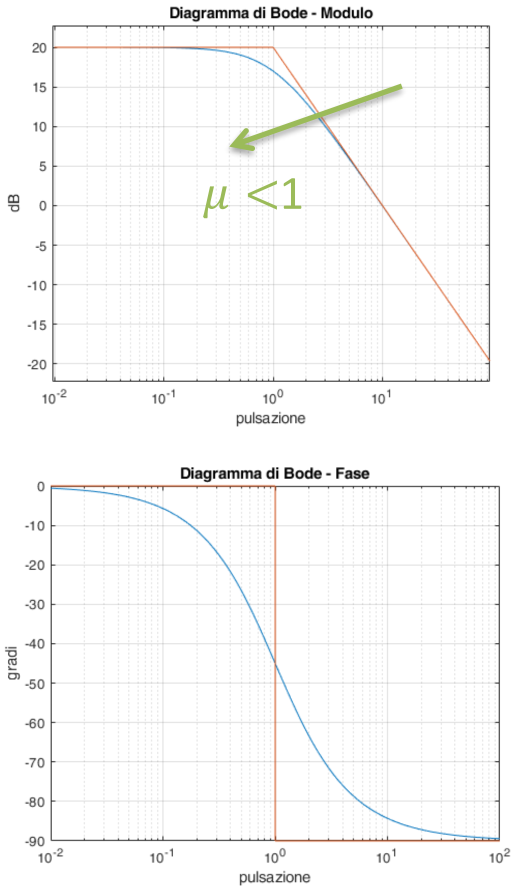


- Il diagramma della fase resta uguale (dato che $\mu > 0$)

⇨ Traduciamo questo comportamento nel diagramma di Nyquist

Robustezza a incertezza del guadagno - Nyquist





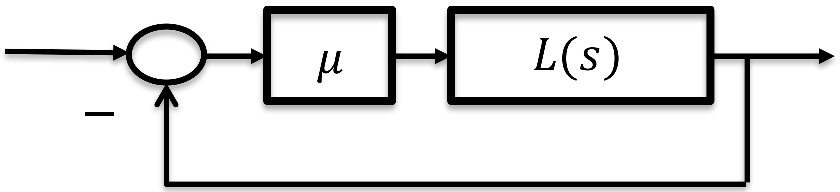
$$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$

$$L(s) = 2\frac{10}{(s+1)}$$

$$L(s) = 0.5\frac{10}{(s+1)}$$

Corollario di Nyquist per guadagno incerto

- Dato il sistema retroazionato in Figura



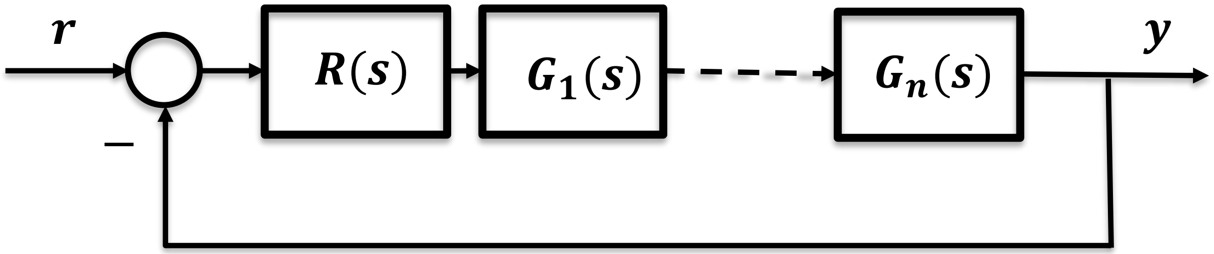
- Definiamo le seguenti quantità:
  - **P**: numero di **poli a parte reale** strettamente **positiva** di $L(s)$
  - **N**: numero di **giri** compiuti dal diagramma di Nyquist **intorno al punto** $-\frac{1}{\mu}$ dell'asse reale, contati positivamente se compiuti in senso antiorario e negativamente se in senso orario. N non è ben definito se il diagramma passa per il punto $-\frac{1}{\mu}$.

Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se N è ben definito e risulta:

P = N

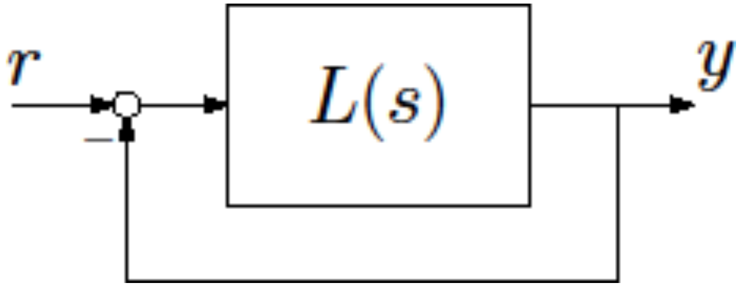
Criteri per stabilità in anello chiuso

Come possiamo analizzare la stabilità di sistemi complessi interconnessi in retroazione?



- **Criterio di Nyquist**

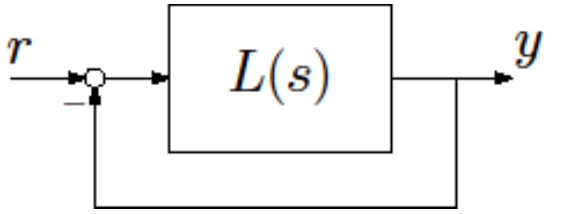
- **Criterio di Bode**



NOTA: Ovviamente è sempre possibile valutare i poli di $F(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$

Criterio di Bode

Si consideri il sistema retroazionato in figura.

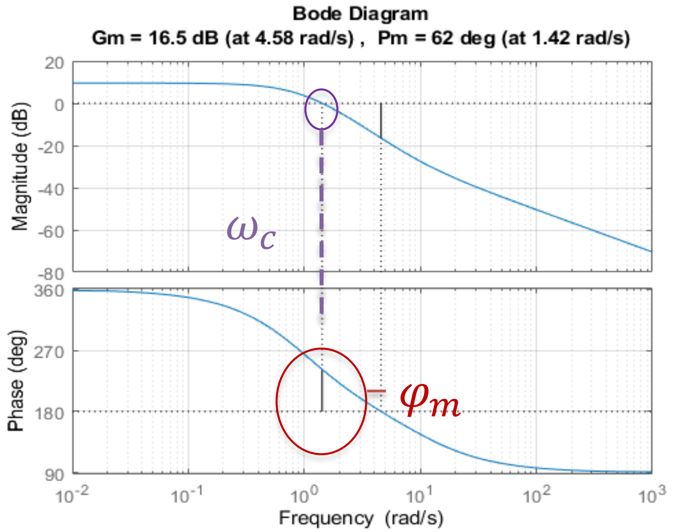


Condizioni di applicabilità del criterio di Bode:

- $L(s)$ non ha poli a parte reale strettamente positiva
- Il diagramma di Bode del modulo di $L(s)$ attraversa una sola volta l'asse a $0\ dB$, nel punto ω_c (pulsazione critica), dove pertanto risulta che $|L(j\omega_c)| = 1$

Definiamo le seguenti quantità:

- μ_L: Guadagno di $L(s)$
- φ_m: margine di fase ottenuto come
  $$\boldsymbol{\varphi_m = 180° - |\varphi_c|}, \quad \text{dove } \varphi_c = \measuredangle L(j\omega_c) \text{ è detta fase critica}$$

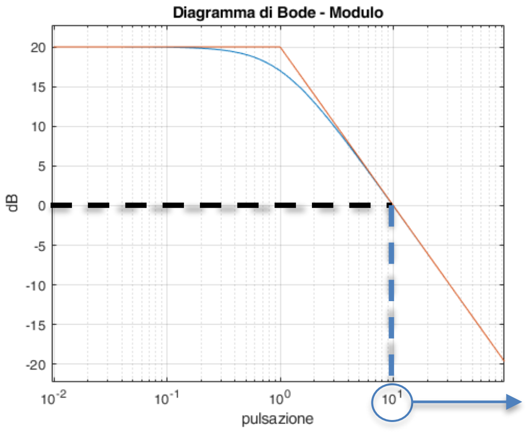


Se le condizioni di applicabilità sono verificate, il sistema retroazionato è asintoticamente stabile se e solo se $\boldsymbol{\mu_L > 0}$ e $\boldsymbol{\varphi_m > 0°}$

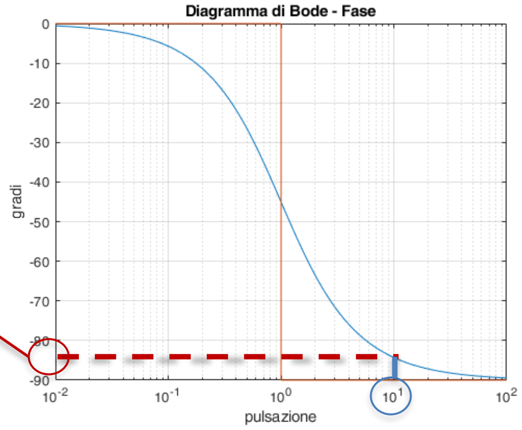
Criterio di Bode graficamente

Esempio:

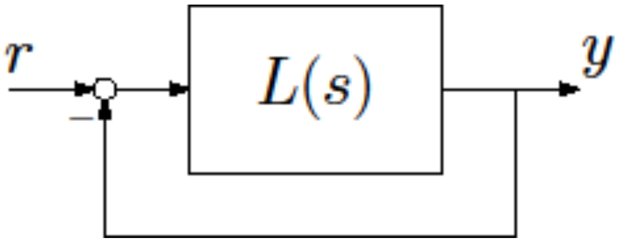
$$L(s) = \frac{10}{(s+1)}$$



$\omega_c = 10\ rad/s$



$\varphi_c \cong -85°$



Le condizioni di applicabilità sono verificate

$$\mu_L = 10 > 0$$

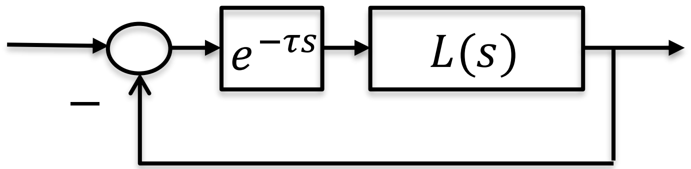
$$\varphi_m = 180° - |\varphi_c| = 95° > 0$$

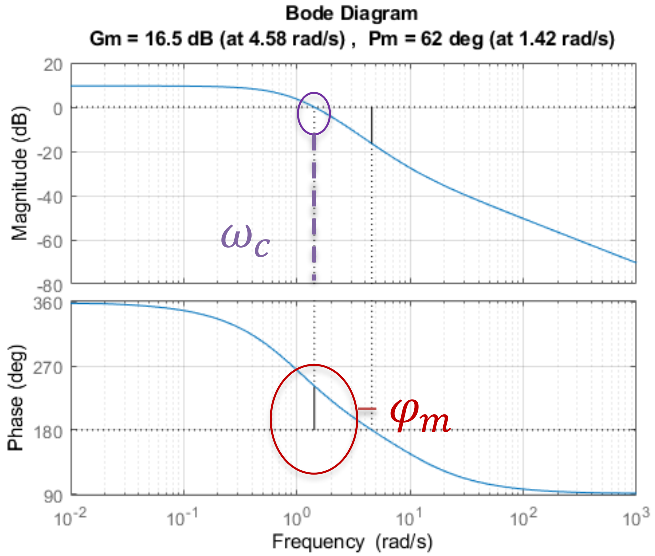
Il sistema retroazionato è asintoticamente stabile

Robustezza tramite diagramma di Bode

- ***Il margine di fase*** $\boldsymbol{\varphi_m}$ *può essere interpretato come una misura del grado di robustezza della stabilità a fronte di possibili incertezze sulla fase della funzione d'anello in corrispondenza della pulsazione critica, o, equivalentemente, a fronte di eventuali* ***<u>ritardi di tempo.</u>***
  - Sfasamento introdotto da un ritardo:

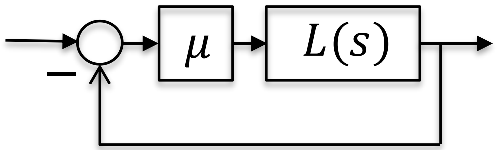
$$\Delta\varphi_\tau = -\tau\omega_c \frac{180°}{\pi}$$

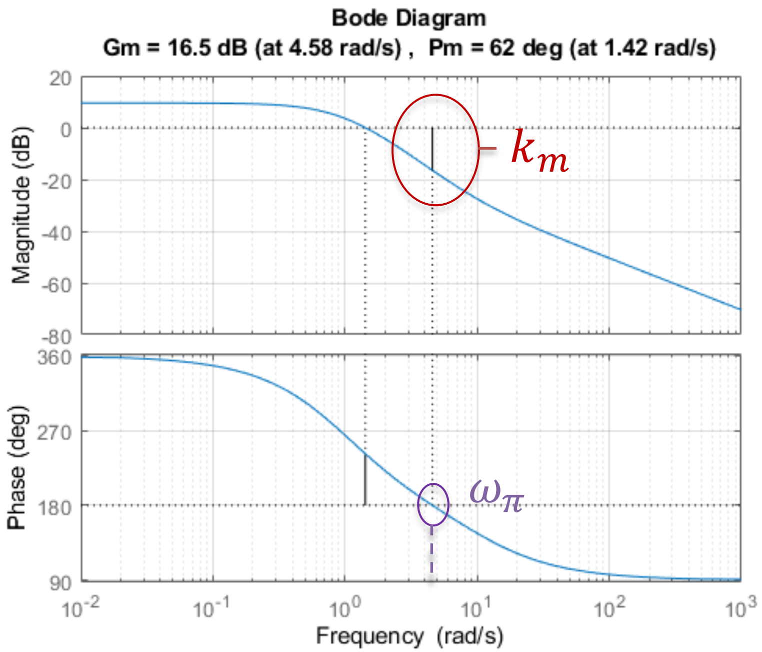




Robustezza tramite diagramma di Bode

- ***Il margine di guadagno k_m*** *fornisce una misura del grado di robustezza della stabilità a fronte di possibili incertezze sul guadagno d'anello.*





$$k_m = \frac{1}{|L(j\omega_\pi)|}$$

Se $\boldsymbol{k_m > \mu}$ il sistema retroazionato resterà asintoticamente stabile.