Esercitazioni di Analisi 2

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Integrale generale di equazioni lineari e a variabili separabili

1. Determina tutte le soluzioni (Integrale Generale) delle seguenti equazioni differenziali (k è una costante reale arbitraria):

   (a) $y' = \dfrac{x-1}{x} y$ $\quad\left[y = k\dfrac{e^x}{|x|}\right]$

   (b) $y' + (\cos x)\, y = 0$ $\quad\left[y = ke^{-\sin x}\right]$

   (c) $y' = (1 + \log x)\, y$ $\quad\left[y = kx^x\right]$

   (d) $*y' = -2xy^2$ $\quad\left[y = 0,\ y = \dfrac{1}{x^2+k}\right]$

   (e) $y' = (1-x)(1-y)$ $\quad\left[y = ke^{\frac{1}{2}x^2 - x} + 1\right]$

   (f) $y' + 2xy = xe^{-x^2}$ $\quad\left[y = e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + k\right)\right]$

   (g) $y' - (\tan x)\, y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\quad\left[y = \dfrac{1}{\cos x}(k + x)\right]$

   (h) $y' = \dfrac{y + \log x}{x}$ $\quad\left[y = kx - \ln x - 1\right]$

   (i) $y' = \dfrac{2y}{x} + x^2$ $\quad\left[y = x^3 + kx^2\right]$

   (j) $y' = \dfrac{x}{y^2}$ $\quad\left[y = \sqrt[3]{\dfrac{3}{2}x^2 + c}\right]$

   (k) $y' = \dfrac{y}{x \log x} + \log x$ $\quad\left[y = (k + x)\ln x\right]$

   (l) $y' = (\cos x)\, e^{x-y}$ $\quad\left[y = \ln\left(\dfrac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + k\right)\right]$

   (m) $xy' = y \log y$ $\quad\left[y = e^{kx}\right]$

   (n) $y' = e^x\sqrt{1-y^2}$ $\quad\left[y = \sin(e^x + k);\ y = \pm 1\right]$

   (o) $y' = \dfrac{\sqrt{2-y}}{x+1}$ $\quad\left[y = 2 - \left(k - \dfrac{\ln|x+1|}{2}\right)^2;\ y = 2\right]$

   (p) $y' = 2x\left(1 - e^{-y}\right)$ $\quad\left[y = \log\left(ke^{x^2} + 1\right)\right]$

   (q) $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$ $\quad\left[y = \pm 1, y = \sin\left(x^2 + k\right)\right]$

2. $*$Stabilisci per quali valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ l'equazione differenziale $\left(2\alpha + x^2\right) y' - 3y + (\beta - 1)\, y^2 = 0$ è lineare a coefficienti non costanti. $\quad[\alpha \in \mathbb{R},\ \beta = 1]$

3. $*$Trova una soluzione dell'equazione $y'(t) = t^2(1 - y(t))$.
[L'equazione è a variabili separabili; ammette ad esempio la soluzione costante $y_1(t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$. (Altre soluzioni sono: $y_2(t) = 1 - e^{-\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)}$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$; $y_3(t) = 1 + e^{-\left(\frac{1}{3}t^3 + c\right)}$, $t \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$. Le tre famiglie di soluzioni possono essere compendiate nella forma $y(t) = 1 + Ke^{-\frac{1}{3}t^3}$, $t \in \mathbb{R}$, $K \in \mathbb{R}$; in particolare $y = y_1$ per $K = 0$, $y = y_2$ per $K < 0$, $y = y_3$ per $K > 0$). Mediante opportuna riscrittura si può osservare che l'equazione è lineare...]

4. $*$Data l'equazione differenziale $y'(x) = (y(x) + 1)\sin x$, stabilisci se tutte le soluzioni hanno un massimo in $x = \pi$.
[Dall'equazione ricaviamo $y'(\pi) = 0$, $y''(\pi) = -(y(\pi) + 1)$, perciò hanno un massimo in π solo le soluzioni per le quali $y(\pi) > -1$]

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono tratti da temi d'esame.