Esercitazioni di Analisi 2

INTEGRALI TRIPLI

1. Calcola i seguenti integrali tripli:

   (a) $\iiint_\Omega (x+z)\,dx\,dy\,dz$, con $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x>0, y>0, z>0, x+y+z<1\}$. $\left[\frac{1}{12}\right]$

   (b) $\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, con Ω limitata dal paraboloide $y = 4x^2 + 4z^2$ e dal piano $y = 4$. $\left[\frac{16}{3}\pi\right]$

   (c) $\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$, con Ω nel primo ottante, limitata dal piano $y = 3x$ e dal cilindro $y^2+z^2 = 9$. $\left[\frac{27}{8}\right]$

2. Sia $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2+y^2 \le 2\}$. Dopo aver disegnato Ω calcola $\int_\Omega x^2 z dxdydz$.
   [π. Per strati: $\int_\Omega x^2 z dxdydz = \int\limits_0^2 \left(\int_{\Omega_z} x^2 z dxdy \right) dz$, con $0 \le z \le 2$ e $\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : z \le x^2+y^2 \le 2\}$; per il calcolo dell'integrale doppio su Ω_z è conveniente utilizzare le coordinate polari. Per fili: $\int_\Omega x^2 z dxdydz = \int_C \left(\int\limits_0^{x^2+y^2} x^2 z dz \right) dxdy$, con $0 \le z \le x^2+y^2$ e $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x^2+y^2 \le 2\}$]

3. Dato $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1,\ 1-x^2-y^2 \le z \le 3\}$, calcola $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$ per fili e per strati. $\left[\frac{4}{3}\pi\right]$

4. Determina il baricentro di una lamina piana di densità costante (=1) descritta da $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1, x^2+y^2 \ge 4\}$. $\left[x_B = \frac{8}{3\pi}, y_B = 0\right]$

5. Data la lamina rappresentata in figura, determina le coordinate del baricentro, sapendo che la densità è uguale all'inverso della distanza dall'origine. $\left[x_B = 0, y_B = \frac{4}{\pi}\right]$

6. Calcola $\iiint_\Omega x\,dx\,dy\,dz$, con Ω nel primo ottante, limitata dalle sfere di equazione $x^2+y^2+z^2 = 1$ e $x^2+y^2+z^2 = 4$. [Utilizza le coordinate sferiche; $\frac{15}{16}\pi$]

7. $*$Calcola l'integrale triplo $\int_\Omega x \log \sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz$, dove $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq y^2+z^2 \leq e^2,$ $z < y,\ 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\}$.

   [$\dfrac{\pi}{4}$. Per fili: $\int_\Omega x \log \sqrt{y^2+z^2}\,dxdydz = \int_D \left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}} x \log \sqrt{y^2+z^2}\,dx \right) dydz$, con $0 < x < \dfrac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}$ e $C = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \sqrt{y^2+z^2} \leq e^2,\ z < y\}$]

8. Dato $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2}\}$, calcola $\iiint_D \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz$.

   $\left[\dfrac{5}{3}\pi\right]$

9. Calcola $\int_C dxdydz$, dove $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$. [$6\pi$ (Volume del cilindro)]

10. Calcola $\int_C x\,dxdydz$, dove $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

    [0. Funzione integranda dispari rispetto alla variabile x, insieme di integrazione simmetrico rispetto al piano yz]

11. Dato $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2 \leq 2y, 0 \leq z \leq 3\}$, calcola $\iiint_\Omega xy3^z\,dx\,dy\,dz$.

    $\left[\dfrac{65}{24 \log 3}\right]$

12. Dato $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 2\}$, disegna Ω e calcola $\iiint_\Omega ze^z\,dx\,dy\,dz$. [$4\pi$]

13. Calcola l'area della regione di piano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1+2x,\ 4x^2+y^2 \leq 1\}$; calcola poi $\int_T 48z\,dx\,dy\,dz$, dove $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0,\ 0 < y < 1+2x,\ 4x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

    [Area$= \dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$; $\int_T 48z\,dx\,dy\,dz = \dfrac{3\pi}{2}+4$. Per fili: $\int_T 48z\,dx\,dy\,dz = \int_D \left(\int_0^{\sqrt{1-(4x^2+y^2)}} 48z\,dz \right) dxdy$, con $0 < z < \sqrt{1-(4x^2+y^2)}$]

14. Determina il volume del solido D definito da $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2-z \leq 0, z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$. $\left[\dfrac{\pi}{8}\right]$

15. Sia $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq \dfrac{1}{2}\right\}$;

    calcola l'integrale $\iiint_D \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$. $\left[\dfrac{\pi}{4}(1-\log 2)\right]$

16. Ricordando che $\int_0^a \sqrt{a^2-t^2}\,dt = \dfrac{\pi}{4}a^2$, calcola $\iiint_\Omega e^y \sqrt{x^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$ su $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :$ $0 \leq z;\ z \leq x \leq 1;\ 0 \leq y \leq x^3\}$. $\left[\dfrac{\pi}{12}(e-2)\right]$

17. Calcola i seguenti integrali tripli:

(a) $\iiint_\Omega xyz\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = [0,1] \times [-1,2] \times [0,2]$. $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

(b) $\iiint_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, con Ω nel primo ottante, limitata dai piani $x+y=1$ e $y+z=1$. $\left[\dfrac{1}{12}\right]$

(c) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, dove Ω è la regione contenuta all'interno del cilindro $x^2+y^2=1$, al di sotto del piano $z=3$ e al di sopra del paraboloide di equazione $x^2+y^2+z=1$. $\left[\dfrac{4}{3}\pi\right]$