Logica e Algebra

27 Luglio 2017

Parte di Algebra

Esercizio 1 *Data la relazione R su $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, definita dalla seguente matrice d'incidenza:*

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Enunciare le proprietà soddisfatte dalla relazione R;*
2. *Costruire la sua chiusura di equivalenza.*
3. *Esiste la chiusura d'ordine $\leq$ di R? In caso affermativo, disegnare il suo diagramma di Hasse. $(A, \leq)$ è un reticolo.*
4. *Può esiste una funzione g contenuta in R? In caso, quante ce ne sono? Quante sono iniettive e quante suriettive?*

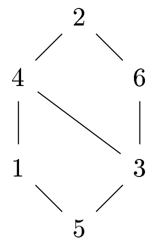
Traccia di soluzione.

1. R è seriale perché in ogni riga della matrice di incidenza c'è un 1, non è riflessiva in quanto la diagonale principale della matrice di incidenza contiene degli 0, non è simmetrica in quanto la matrice di incidenza non è simmetrica, è antisimmetrica perche se nella posizione (i, j) della matrice c'è un 1 nella posizione (j, i) c'è uno 0, non è transitiva in quanto ad esempio $(1, 4)$ appartiene ad R, $(4, 2)$ appartiene ad R e $(1, 2)$ non sta in R.
2. La chiusura di equivalenza di R è la chiusura transitiva della chiusura simmetrica e riflessiva di R. La chiusura simmetrica e riflessiva di R ha come matrice di incidenza
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
e si verifica facilmente che A^3 è la matrice i cui elementi sono tutti 1, per cui la chiusura universale di R è la relazione universale. (Facendo il grafo di incidenza si poteva ottenere facilmente lo stesso risultato.)

3. La chiusura d'ordine $\leq$ di R può esistere in quanto R è antisimmetrica. Si deve costruire la chiusura riflessiva e transitiva di R e verificare che conservi l'antisimmetria. La chiusura riflessiva e transitiva di R ha come matrice di incidenza

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e rimane antisimmetrica per cui è la matrice di incidenza della chiusura d'ordine di R. Il diagramma di Hasse di $(A, \leq)$ è



e $(A, \leq)$ è un reticolo.

4. Poiché in ogni riga di R ci sono degli 1 esistono funzioni contenute in R. Poiché ci sono due righe con due 1 ci sono 4 possibili funzioni contenute in R. Nessuna di esse è suriettiva in quanto in nessuna di esse 5 ha controimmagini. Nessuna è iniettiva in quanto ogni funzione da X ad X con X finito è iniettiva se e solo se è suriettiva.

Esercizio 2 *Dato l'insieme*

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{r + s\sqrt{2}, s, r \in \mathbb{Q}\}$$

1. *Mostrare che* $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ *con l'usuale somma e prodotto di numeri reali è un anello*

2. *Sia* $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ *la funzione definita da* $\varphi(r + s\sqrt{2}) = r + s$ *Provare che* φ *è un omomorfismo tra i gruppi* $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, +)$ *e* $(\mathbb{R}, +)$. *È anche un omomorfismo tra gli anelli* $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*?*

Traccia di soluzione.

1. Per mostrare che $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ con l'usuale somma e prodotto di numeri reali è un anello, basta verificare che è un sottoanello del campo dei reali. Si ha subito che presi comunque $r+s\sqrt{2}, t+v\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ si ha $(r+s\sqrt{2})-(t+v\sqrt{2}) = (r-t)+(s-v)\sqrt{2}$ e $(r+s\sqrt{2})\cdot(t+v\sqrt{2}) = (rt+2sv)+(rv+st)\sqrt{2}$ che stanno entrambi in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ in quanto somma e prodotti di numeri razionali sono razionali. Dunque $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$ è un sottoanello del campo dei reali.

2. La $\varphi : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\varphi(r + s\sqrt{2}) = r + s$ è un omomorfismo tra i gruppi $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +)$ e $(\mathbb{R}, +)$ in quanto $\varphi(r + s\sqrt{2}) + \varphi(t + v\sqrt{2}) = (r + s) + (t + v) = (r + t) + (s + v) = \varphi((r + t) + (s + v)\sqrt{2})$, per cui il risultato segue dalla commutatività della somma in $\mathbb{Q}$. Non è un omomorfismo tra gli anelli in quanto ad esempio $\varphi(\sqrt{2}\sqrt{2}) = 2$ mentre $\varphi(\sqrt{2})\varphi(\sqrt{2}) = 1$.