Esercizi di riepilogo

Es1: Teorema fondamentale del limite

- Si vuole stimare il numero medio di persone m impiegato in grandi aziende. Si usi X_i per indicare il numero di persone assunte dall'azienda i-esima, e si assuma che le $\{X_i\}$ siano i.i.d.
- Per stimare m si raccolgono i dati da n aziende e si usa lo stimatore

$$M_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

a) Si trovi il limite di $\Pr(M_n \leq x)$ per $n \to \infty$ e $x < m$. Si trovi il limite di $\Pr(M_n \leq x)$ per $x > m$

b) Si trovi il minimo valore di n tale che la diseguaglianza di Chebyshev garantisca $\Pr(|M_n - m| \geq 0.5) \leq 0.05$. Si assuma che $\mathrm{Var}[X_i] = v$.

c) Si assuma ora che $n = 5000$. Si trovi un valore approssimato per $\Pr(|M_{5000} - m| \geq 0.5)$ utilizzando il teorema fondamentale del limite

Es2: Scommesse al casinò

- Tizio e Caio si alternano al tavolo di un casinò. Tizio gioca negli istanti di tempo dispari $i = 1, 3, 5, \ldots$, mentre Caio in quelli pari $i = 2, 4, 6, \ldots$
- Ad ogni istante di tempo, il guadagno netto in una giocata è una v.a. G_i con ddp

$$p_{G_i}(g) = \begin{cases} 1/3 & g = -2 \\ 1/2 & g = 1 \\ 1/6 & g = 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- Si assuma che tutte le G_i siano indipendenti. L'evento $G_i = -2$ è considerato una perdita.

Es2: Scommesse al casinò

a) Tizio e Caio giocano finché una sconfitta di Caio segue ad una sconfitta di Tizio. Trovare la ddp del numero di turni giocati. (Un turno è composto da una giocata di Tizio seguita da una di Caio)
b) Trovare la ddp di Z, istante di tempo in cui Caio ha la terza sconfitta
c) Sia N il numero dei turni finché Tizio e Caio vincono almeno una volta ciascuno. Trovare E[N].

Es3: Somma di un numero Geometrico di v.a. Geometriche

- Sia $Y = X_1 + \ldots + X_N$ dove le v.a. X_i sono Geom(p), e $N \sim \mathrm{Geom}(q)$
- Tutte le v.a. X_i e N sono indipendenti
- Mostrare che Y è Geometrica con parametro $p \cdot q$
- Suggerimento: interpretare le X_i in termini di uno split di un processo di Bernoulli

Es4: Ponte ferroviario

- Un ponte ferroviario è costruito sul Po
- I treni passano sul ponte secondo un processo di Poisson con tasso di $\lambda = 3$ treni al giorno

a) Se un treno arriva al giorno 0, trovare la prob. che non ci saranno treni nei giorni 1, 2 e 3

b) Trovare la prob. che il treno successivo al treno nel giorno 0 impieghi più di 3 giorni per arrivare

c) Trovare la prob. che nessun treno arrivi nei primi 2 giorni, e che arrivino 4 treni nel quarto giorno

d) Trovare la prob. che il quinto treno impieghi più di 2 giorni per arrivare al ponte

Es5: Buffer

- Messaggi di tipo A, B e C arrivano in un buffer comune. Ogni tipo di messaggio viene generato secondo un processo di Poisson con rate a, b, c messaggi per minuto, rispettivamente.
- Si assuma che il buffer venga immediatamente svuotato quando contiene un totale di 10 messaggi

a) Qual è la prob. che, dei primi 10 messaggi arrivati nel buffer, solo il primo e un qualsiasi altro messaggio siano di tipo A.

b) Qual è la prob. che, durante uno scaricamento, il buffer contenga 5 volte tanti messaggi di tipo A quanti quelli di tipo B

c) Determinare la prob. che esattamente 2 messaggi di ogni tipo arrivino al buffer durante un intervallo di 5 minuti

Es6: clienti di un negozio

- Un negozio apre al tempo t=0 e i potenziali clienti arrivano come in un processo di Poisson ad un ritmo di λ all'ora.
- Indipendentemente da tutto il resto, un potenziale cliente diventa un acquirente con prob. p
- Il negozio chiude appena vede 10 clienti acquirenti

a) Qual è la prob. che esattamente 3 dei primi 5 potenziali clienti diventino acquirenti?

b) Qual è la prob. che il quinto potenziale cliente arrivato diventi il terzo acquirente della giornata?

c) Qual è la ddp e il valore atteso di L, la durata dell'intervallo di tempo in cui il negozio sta aperto?

Es6: clienti di un negozio

d) Dato che esattamente 3 dei primi 5 potenziali clienti diventino acquirenti, qual è il valore atteso condizionato del tempo totale in cui il negozio è aperto?

e) Considerando solo clienti che arrivano dal tempo t=0 alla chiusura del negozio, qual è la prob. che nessun acquirente arrivi entro τ unità di tempo dal precedente acquirente?

Es7: Arrivi di Poisson in un tempo Esponenziale

- Si consideri un processo di Poisson con tasso λ e una v.a. indipendente $T \sim \mathrm{Exp}(\nu)$
- Trovare la ddp del numero di arrivi di Poisson durante l'intervallo di tempo $[0, T]$

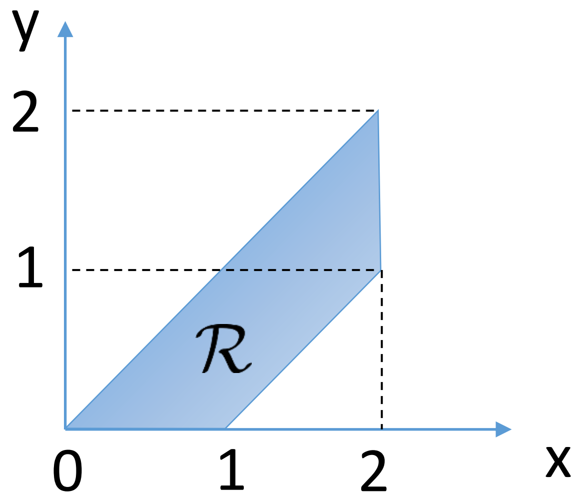
Es8: Pizzeria

- Una pizzeria serve n tipi diversi di pizza, ed è visitata da un numero aleatorio K di clienti in un dato periodo di tempo, dove K è distribuito come Poisson con media λ
- Ogni cliente ordina una pizza, scegliendo uno degli n tipi di pizza in maniera equiprobabile, indipendentemente dagli altri utenti.
- Trovare il valore atteso del numero di pizze diverse ordinate

Es9: Stima LMS

- Due v.a. continue X e Y hanno una ddp congiunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2/3 & (x,y) \in \mathcal{R} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



- Si vuole stimare Y basandosi sull'osservaz. di X

a) Trovare la stima LMS di Y: $\widehat{Y} = g(X)$

b) Calcolare l'errore quadratico medio condizionato $\mathrm{E}[(Y - g(X))^2 | X = x]$

c) Calcolare l'errore quadratico medio $\mathrm{E}[(Y - g(X))^2]$. Coincide con $\mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y|X]]$?

d) Trovare $L(X)$, lo stimatore lineare LMS di Y basato su X.

e) Cosa ci si aspetta dal MSE di L(X) rispetto al MSE di g(X)?

Es10: Arrivi di un autobus

- Il numero di minuti tra gli arrivi di autobus ad una fermata è una v.a. Esponenziale di parametro Θ.
- Mario ritiene che la ddp a priori di Θ sia

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} 10 \cdot \theta & \theta \in [0, 1/\sqrt{5}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

a) Lunedì Mario arriva alla fermata e osserva un ritardo di 30 minuti. Qual è la ddp a posteriori, la stima MAP, e la stima a valor atteso condizionato di Θ ?

b) Mario decide di ottenere una stima migliore: osserva i ritardi per 5 giorni, e ottiene i valori 30, 25, 15, 40 e 20 minuti. Si assuma che queste osservazioni siano indip. Rispondere alle stesse domande di a)

Es11: Lanci di moneta

- La probabilità di ottenere testa, Θ, è distribuita in [0, 1] secondo la ddp

$$f_\Theta(\theta) = 2 - 4\left|\frac{1}{2} - \theta\right|, \quad \theta \in [0, 1]$$

- Trovare la stima MAP di Θ assumendo che n lanci di moneta indipendenti abbiano dato k teste.

Es12: Campionamento da v.a. continua [Ros, Es. 10.2]

- Si descriva una tecnica per simulare una v.a. con ddp

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{2x} & -\infty < x < 0 \\ e^{-2x} & 0 < x < \infty \end{cases}$$

Es13: Metodo acceptance – rejection [Ros, Es. 10.11]

- Si usi il metodo acceptance – rejection generando le ascisse in modo uniforme in [0, 1], per costruire un algoritmo che campioni una v.a. con ddp

$$f_X(x) = \begin{cases} 60x^3(1-x)^2 & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Es14: Sistema di comunicazione binario

- Si vogliono trasmettere dei bit di informazione, codificati come +1 e -1. I bit X vengono generati in maniera equiprobabile e indipendente. La potenza media del segnale trasmesso è P: $\mathrm{E}[(\sqrt{P}X)^2] = P$
- Il canale di comunicazione aggiunge al segnale trasmesso un rumore Gaussiano standard

$$Y = \sqrt{P}X + Z$$

- Il ricevitore stima i bit trasmessi con la regola MAP
- Quanto deve valere P affinché la probabilità d'errore sul bit sia minore di 10^{-5} ?

Es14: Sistema di comunicazione binario

a) Determinare lo stimatore MAP di X
b) Determinare la probabilità d'errore di stima
c) Calcolare la potenza minima P che soddisfa il requisito sulla probabilità d'errore
d) Voglio stimare una probabilità d'errore di 10^{-5} tramite una simulazione Monte Carlo. Quante prove devo fare affinché l'errore relativo sulla stima sia minore di 1/10 ?

Es15: Simulazione di v.a. [Ross, Es. 10.7]

- Sia F la cumulata

$$F(x) = x^n, \qquad 0 < x < 1$$

a) Trovare un metodo per simulare una v.a. con cumulata F, generando solamente un singolo numero casuale
b) Siano $U_1, \ldots, U_n$ delle v.a. U[0,1] generate indipendentemente. Mostrare che $\Pr(\max\{U_1, \ldots, U_n\} \leq x) = x^n$
c) Si usi il punto b) per costruire un secondo metodo per simulare una v.a. con cumulata F.

Es16: Informazione dai dadi

- Si consideri il lancio di n dadi con 6 facce
- Quant’è l’informazione media associata al risultato dell’esperimento?
- Qual è il minimo numero medio di bit che ci vogliono per descrivere il risultato dell’esperimento?

Es17: Codice di sorgente

- Per descrivere i risultati di un esperimento aleatorio si usa un codice binario formato da parole con lunghezze $L_i = \{3, 2, 4, 1, 4\}$ bit.
- Esiste un codice prefix-free con queste lunghezze di parola?
- Se sì, fornirne un esempio.