

# CONTARE LE COSE

In queste slide trovate una trattazione sistematica per rispondere a interrogazioni del tipo

Trovare gli studenti che hanno sostenuto

- almeno 2 esami, almeno 3 esami, ...
- esattamente 2 esami, 3 esami, ...
- al massimo 2 esami, 3 esami, ...

nei diversi linguaggi formali

# Prestiti in biblioteca

**UTENTE**(Codice, Nome, Cognome, Indirizzo, Telefono)

**PRESTITO**(Collocazione, CodiceUtente, DataPrestito, DataResa)

**COPIA**(Collocazione, ISBN, DataAcquisizione)

**DATILIBRO**(ISBN, Titolo, AnnoPub, CasaEd, PrimoAut, Genere)

Le chiavi sono sottolineate.

L'ISBN è un identificatore internazionale univoco per le pubblicazioni  
(International **S**tandard **B**ook **N**umber)

COPIA descrive la copia cartacea, fisica, del libro – che è invece descritto, in quanto “pubblicazione”, dalla relazione DATILIBRO. Così si rappresenta la disponibilità di *più copie di uno stesso libro*.

La chiave di PRESTITO è triplice per permettere di rappresentare nella base dati il prestito dello *stesso* libro allo *stesso* utente in date diverse (o di più libri allo *stesso* utente *nella stessa* data, o dello *stesso* libro a utenti diversi nello *stesso* giorno).

# Una divagazione sulle cardinalità

*Come estraiamo i libri prestati...*

A) *Almeno **tot** volte ?*

E) *Esattamente **tot** volte ?*

P) *al **Più tot** volte ?*

*Come calcoliamo **quante volte** è stato prestato un certo libro?*

# Almeno n

*A) I libri prestati **Almeno tot** volte*

Chiariamo il testo:

**Libri:**

**Collocazione (a)**

(le copie)

o **ISBN (b) ?**

(le «entità editoriali»)

# Algebra relazionale: almeno 1, almeno 2

*A\_1a) Le copie prestate **Almeno una** volta*

$\Pi_{\text{Coll}}(\text{PRE})$

*A\_2a) Le copie prestate **Almeno due** volte*

$\Pi_{\text{Coll}}(\text{PRE} \triangleright \text{Coll}=\text{Coll} \wedge \text{PRE})$   
(CodU!=CodU $\vee$ DataP!=DataP)

# Algebra relazionale: almeno 3

*A\_3a) Le copie prestate **Almeno tre** volte*

Definiamo tre alias:  $PR_i(CO_i, CU_i, DP_i, DR_i) := PRE$  per  $i=1,2,3$

$$\Pi_{CO1} \left( \left( PR1 \bowtie_{CO1=CO2 \wedge (CU1 \neq CU2 \vee DP1 \neq DP2)} PR2 \right) \right. \\ \left. \bowtie_{CO1=CO3 \wedge (CU1 \neq CU3 \vee DP1 \neq DP3) \wedge (CU2 \neq CU3 \vee DP2 \neq DP3)} PR3 \right)$$

# Algebra relazionale: almeno 4

*A\_4a) Le copie prestate **Almeno quattro** volte*

Definiamo 4 alias:  $PR_i(CO_i, CU_i, DP_i, DR_i) := PRE$  per  $i=1..4$

$$\Pi_{CO1} \left( \left( \left( PR1 \bowtie_{CO1=CO2 \wedge (CU1!=CU2 \vee DP1!=DP2)} PR2 \right) \bowtie_{CO1=CO3 \wedge (CU1!=CU3 \vee DP1!=DP3) \wedge (CU2!=CU3 \vee DP2!=DP3)} PR3 \right) \bowtie_{CO1=CO4 \wedge (CU1!=CU4 \vee DP1!=DP4) \wedge (CU2!=CU4 \vee DP2!=DP4) \wedge (CU3!=CU4 \vee DP3!=DP4)} PR4 \right)$$

# Algebra relazionale: almeno 5

*A\_5a) Le copie prestate **Almeno cinque** volte*

$$\begin{aligned}
 & \Pi_{CO1} ( ( ( ( ( PR1 \triangleright \triangleleft_{CO1=CO2 \wedge (CU1!=CU2 \vee DP1!=DP2)} PR2 ) \\
 & \quad \triangleright \triangleleft_{CO1=CO3 \wedge (CU1!=CU3 \vee DP1!=DP3) \wedge (CU2!=CU3 \vee DP2!=DP3)} PR3 ) \\
 & \quad \quad \triangleright \triangleleft_{CO1=CO4 \wedge (CU1!=CU4 \vee DP1!=DP4) \wedge (CU2!=CU4 \vee DP2!=DP4) \wedge (CU3!=CU4 \vee DP3!=DP4)} PR4 ) \\
 & \quad \quad \quad \triangleright \triangleleft_{CO1=CO4 \wedge (CU1!=CU5 \vee DP1!=DP5) \wedge (CU2!=CU5 \vee DP2!=DP5) \wedge (CU3!=CU5 \vee DP3!=DP5) \wedge (CU4!=CU5 \vee DP4!=DP5)} PR5 )
 \end{aligned}$$

Definiamo 5 alias:  $PR_i(CO_i, CU_i, DP_i, DR_i) := PRE$   
per  $i=1...5$



# Calcolo TRC: almeno 1, almeno 2

*A\_1a) Le copie prestate **Almeno una** volta*

$$\{ t \mid \exists t_p \in \text{PRESTITO} \\ ( t[\text{Coll}] = t_p[\text{Coll}] ) \}$$

*A\_2a) Le copie prestate **Almeno due** volte*

$$\{ t \mid \exists t_{p1} \in \text{PRESTITO}, \exists t_{p2} \in \text{PRESTITO} \\ ( t[\text{Coll}] = t_{p1}[\text{Coll}] \wedge t_{p1}[\text{Coll}] = t_{p2}[\text{Coll}] \wedge \\ ( t_{p1}[\text{DataP}] \neq t_{p2}[\text{DataP}] \vee t_{p1}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p2}[\text{CodiceUt}] ) \\ ) \\ \}$$

# Calcolo TRC: almeno 3

*A\_3a) Le copie prestate **Almeno tre** volte*

$$\begin{aligned} & \{ t \mid \exists t_{p1} \in \text{PRESTITO}, \exists t_{p2} \in \text{PRESTITO}, \exists t_{p3} \in \text{PRESTITO} \\ & \quad ( t[\text{Coll}] = t_{p1}[\text{Coll}] \wedge t_{p1}[\text{Coll}] = t_{p2}[\text{Coll}] \wedge t_{p2}[\text{Coll}] = t_{p3}[\text{Coll}] \wedge \\ & \quad \quad ( t_{p1}[\text{DataP}] \neq t_{p2}[\text{DataP}] \vee t_{p1}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p2}[\text{CodiceUt}] ) \wedge \\ & \quad \quad ( t_{p1}[\text{DataP}] \neq t_{p3}[\text{DataP}] \vee t_{p1}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p3}[\text{CodiceUt}] ) \wedge \\ & \quad \quad ( t_{p2}[\text{DataP}] \neq t_{p3}[\text{DataP}] \vee t_{p2}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p3}[\text{CodiceUt}] ) ) \\ & \quad \} \end{aligned}$$

*A\_4a) Le copie prestate **Almeno quattro** volte ...*

# Datalog: almeno 1, almeno 2

*A\_1a) Le copie prestate **Almeno una** volta*

$\text{AlmUnPre(coll)} :- \text{PRE}(\text{coll}, \_, \_, \_)$

*A\_2a) Le copie prestate **Almeno due** volte*

$\text{AlmDuePre(col)} :- \text{PRE}(\text{col}, \_, \text{dp1}, \_),$   
 $\text{PRE}(\text{col}, \_, \text{dp2}, \_), \text{dp1} \neq \text{dp2}$

$\text{AlmDuePre(col)} :- \text{PRE}(\text{col}, \text{cu1}, \_, \_),$   
 $\text{PRE}(\text{col}, \text{cu2}, \_, \_), \text{cu1} \neq \text{cu2}$

# Datalog: almeno 3

*A\_3a) Le copie prestate **Almeno tre** volte*

```
AlmTrePre(col) :- PRE (col, _, dp1, _),  
                  PRE (col, _, dp2, _), dp1 != dp2,  
                  PRE (col, _, dp3, _), dp1 != dp3, dp2 != dp3
```

```
AlmTrePre(col) :- PRE (col, cu1, _ _),  
                  PRE (col, cu2, _ _), cu1 != cu2,  
                  PRE (col, cu3, _ _), cu1 != cu3, cu2 != cu3
```

```
AlmTrePre(col) :- PRE (col, cu, dp1, _),  
                  PRE (col, cu, dp2, _), dp1 != dp2,  
                  PRE (col, cu2, _ _), cu2 != cu
```

```
AlmTrePre(col) :- PRE (col, cu1, dp, _),  
                  PRE (col, cu2, dp, _), cu1 != cu2,  
                  PRE (col, _ dp2, _), dp2 != dp
```

*A\_4a) Le copie prestate **Almeno quattro** volte ...*

# Almeno tot – altra interpretazione del testo

*A) I libri prestati Almeno tot volte*

Nell'altra interpretazione:

Libri:

Collocazione (a) o ISBN (b) ?  
(le copie) (le «entità editoriali»)

# Algebra relazionale: almeno 1, almeno 2

*A\_1b) I libri (ISBN) prestati **Almeno una** volta*

$$\Pi_{\text{isbn}}(\text{COP} \triangleright < \text{PRE})$$

*A\_2b) I libri (ISBN) prestati **Almeno due** volte*

In quanti modi possiamo avere "due prestiti di uno stesso isbn" ?

- una stessa copia prestata due volte (o in due date diverse oppure a due utenti diversi), cioè una copia di quelle estratte da *A\_2a*
- due copie diverse dello stesso libro (cioè di pari ISBN), prestate ciascuna almeno una volta (cioè due diverse copie estratte da *A\_1a*)

# Algebra relazionale: almeno 2

*A\_2b) I libri (ISBN) prestati **Almeno due** volte*

*N.B. Definiamo due alias:  $CO_i(col_i, is_i, dac_i) := COPIA$  per  $i=1,2$*

$$\Pi_{Isbn} ( COP \bowtie ( PRE \bowtie_{Coll=Coll \wedge (CodU \neq CodU \vee DataP \neq DataP)} PRE) ) \\ \cup$$

$$\Pi_{Isbn} ( ( CO1 \bowtie PRE ) \bowtie_{col1 \neq col2 \wedge is1 = is2} ( CO2 \bowtie PRE ) )$$

Cioè anche :

$$\Pi_{Isbn} ( COP \bowtie A_{2a} ) \cup \\ \Pi_{Isbn} ( ( CO1 \bowtie A_{1a} ) \bowtie_{col1 \neq col2 \wedge is1 = is2} ( CO2 \bowtie A_{1a} ) )$$

# Algebra relazionale: almeno 3

*A\_3b) I libri (ISBN) prestati **Almeno tre** volte*

La proliferazione è già ragguardevole.

Possono darsi:

- una stessa copia prestata tre volte (o in date diverse o a utenti diversi), cioè una copia di quelle estratte da *A\_3a*
- una copia prestata due volte, cioè una copia di quelle estratte da *A\_2a* e un'altra copia dello stesso libro prestata almeno una volta (cioè in *A\_1a*)
- tre copie diverse dello stesso libro (cioè di pari ISBN), prestate ciascuna almeno una volta (cioè tre diverse copie estratte da *A\_1a*)



# Algebra relazionale: almeno 3

*A\_3b) I libri (ISBN) prestati **Almeno tre** volte*

3 alias:  
CO<sub>i</sub>(col<sub>i</sub>, is<sub>i</sub>, dac<sub>i</sub>)  
i=1..3

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( \text{COP} \triangleright \triangleleft A_{3a} ) \cup$$

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( ( \text{CO1} \triangleright \triangleleft A_{2a} ) \triangleright \triangleleft_{\text{col1} \neq \text{col2} \wedge \text{is1} = \text{is2}} ( \text{CO2} \triangleright \triangleleft A_{1a} ) ) \cup$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{Isbn}} ( ( ( \text{CO1} \triangleright \triangleleft A_{1a} ) \\ \triangleright \triangleleft_{\text{col1} \neq \text{col2} \wedge \text{is1} = \text{is2}} ( \text{CO2} \triangleright \triangleleft A_{1a} ) ) \\ \triangleright \triangleleft_{\text{col1} \neq \text{col3} \wedge \text{col2} \neq \text{col3} \wedge \text{is2} = \text{is3}} ( \text{CO3} \triangleright \triangleleft A_{1a} ) ) \end{aligned}$$

# Datalog: almeno N?

*A\_Nb) I libri (ISBN) prestati **Almeno N** volte*

*Si lascia al(l'eventuale) lettore il divertimento di formulare in Datalog e in TRC le interrogazioni A\_Nb*

*A\_2b*

*A\_1a*

*A\_2a*

*A\_1a*

```
AlDuePre(isb) :- COP(col,isb,_), PRE (col, _ dp1, _ ),
PRE (col, _ dp2, _ ), dp1 != dp2

AlDuePre(isb) :- COP(col,isb,_), PRE (col, cu1, _ _ ),
PRE (col, cu2, _ _ ), cu1 != cu2

AlDuePre(isb) :- COP(col1,isb,_), COP(col2,isb,_), col1!=col2
PRE (col1,_ _ _), PRE (col2,_ _ _)
```

# Esattamente tot

*E) I libri prestati Esattamente tot volte*

Ancora, consideriamo le due interpretazioni:

Libri:

Collocazione (a)

(le copie)

o ISBN (b) ?

(le «entità editoriali»)

# Algebra relazionale: esattamente 1

*E\_1a) Le copie prestate **Esattamente una** volta*

$\Pi_{\text{Coll}} ( \text{PRE} )$

—

$\Pi_{\text{Coll}} ( \text{PRE} \triangleright \text{Coll} = \text{Coll} \wedge (\text{CodU} \neq \text{CodU} \vee \text{DataP} \neq \text{DataP}) \text{PRE} ) )$

*N.B. : Si tratta in pratica della **differenza tra le query A\_1a e A\_2a !!**  
Ed è corretto: a tutti i libri che hanno almeno un prestito  
togliamo quelli che ne hanno almeno due. Restano quelli che ne  
hanno esattamente uno. Ma allora...*

# Algebra relazionale: esattamente 2, 3, .. N

*E<sub>2a</sub>) Le copie prestate esattamente due volte*

Togliamo le copie con almeno 3 prestiti da quelle che ne hanno almeno 2:

$$\dots \quad A_{2a} - A_{3a}$$

*E<sub>3a</sub>) Le copie prestate esattamente tre volte*

Togliamo le copie con almeno 4 prestiti da quelle che ne hanno almeno 3:

$$A_{3a} - A_{4a}$$

*E<sub>Na</sub>) Le copie prestate esattamente N volte*

Togliamo le copie con almeno N+1 prestiti da quelle che ne hanno almeno N:

$$A_{Na} - A_{N+1a}$$

# Datalog: esattamente 1

*E\_1a) Le copie prestate **una e una sola** volta*

*Anche in datalog si vede bene che  $E_1a := A_1a - A_2a$*

```
AlmDuePre(col) :- PRE (col, _, dp1, _), PRE (col, _, dp2, _), dp1 != dp2
AlmDuePre(col) :- PRE (col, cu1, _, _), PRE (col, cu2, _, _), cu1 != cu2
UnaSolaVolta(c) :- PRE(c,_,_,_), ¬ AlmDuePre( c )
? – UnaSolaVolta( x )
```

```
UnaSolaVolta( c ) :- AlmUnPre( c ),
                    ¬ AlmDuePre( c )
? – UnaSolaVolta( x )
```

# Datalog: esattamente 2, 3, .. N

*E\_2a) Le copie prestate esattamente due volte*

$\text{EsattamenteDueVolte}(c) :- \text{AlmDuePre}(c), \neg \text{AlmtrePre}(c)$

*E\_3a) Le copie prestate esattamente tre volte*

$\text{EsattamenteTreVolte}(c) :- \text{AlmTrePre}(c), \neg \text{AlmQuattroPre}(c)$

*E\_Na) Le copie prestate esattamente N volte*

$\text{EsattamenteNVolte}(c) :- \text{AlmNPre}(c), \neg \text{AlmN+1Pre}(c)$

# Calcolo: esattamente 1

*E\_1a) Le copie prestate **una e una sola** volta*

*In calcolo il «riuso» è meno evidente, ma c'è:*

$$\{ t \mid \exists t_p \in \text{PRESTITO} \quad A_{1a}$$
$$( t[\text{Coll}] = t_p[\text{Coll}] \wedge$$
$$\neg ( \exists t_{p2} \in \text{PRESTITO} \quad A_{2a}$$
$$( t_p[\text{Coll}] = t_{p2}[\text{Coll}] \wedge$$
$$( t_p[\text{DataP}] \neq t_{p2}[\text{DataP}] \vee$$
$$t_p[\text{CodiceUt}] \neq t_{p2}[\text{CodiceUt}] ) )$$
$$) )$$
$$\}$$



# Calcolo: esattamente 2

*E\_2a) Le copie prestate **esattamente due** volte*

*In calcolo il «riuso» è meno evidente, ma c'è:*

$$\begin{aligned} & \{ t \mid \exists t_{p1} \in \text{PRESTITO}, \exists t_{p2} \in \text{PRESTITO} \quad A_{2a} \\ & \quad ( t[\text{Coll}] = t_{p1}[\text{Coll}] \wedge t_{p1}[\text{Coll}] = t_{p2}[\text{Coll}] \wedge \\ & \quad ( t_{p1}[\text{DataP}] \neq t_{p2}[\text{DataP}] \vee t_{p1}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p2}[\text{CodiceUt}] ) \wedge \\ & \quad \neg ( \exists t_{p3} \in \text{PRESTITO} \quad A_{3a} \\ & \quad \quad ( t_{p3}[\text{Coll}] = t_{p1}[\text{Coll}] \wedge \\ & \quad \quad ( t_{p1}[\text{DataP}] \neq t_{p3}[\text{DataP}] \vee t_{p1}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p3}[\text{CodiceUt}] ) \wedge \\ & \quad \quad ( t_{p2}[\text{DataP}] \neq t_{p3}[\text{DataP}] \vee t_{p2}[\text{CodiceUt}] \neq t_{p3}[\text{CodiceUt}] ) ) \\ & \quad ) \quad ) \\ & \} \end{aligned}$$

# Esattamente n – altra interpretazione

*E) I libri prestati Esattamente tot volte*

Nell'altra interpretazione:

Libri:

Collocazione (a) o ISBN (b) ?  
(le copie) (le «entità editoriali»)

# Algebra relazionale: esattamente 1

*E\_1b) I libri (ISBN) prestati una e una sola volta*

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} )$$

–

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie ( \text{PRE} \bowtie_{\text{Coll}=\text{Coll} \wedge (\text{CodU} \neq \text{CodU} \vee \text{DataP} \neq \text{DataP})} \text{PRE} ) )$$

–

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} ) \bowtie_{\text{Coll} \neq \text{Coll} \wedge \text{Isbn} = \text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} ) )$$

*Si vede bene che è equivalente a*

*A\_1b*

$$\Pi_{\text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} ) -$$

*A\_2b*

$$\left( \Pi_{\text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie ( \text{PRE} \bowtie_{\text{Coll}=\text{Coll} \wedge (\text{CodU} \neq \text{CodU} \vee \text{DataP} \neq \text{DataP})} \text{PRE} ) ) \cup \right. \\ \left. \Pi_{\text{Isbn}} ( ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} ) \bowtie_{\text{Coll} \neq \text{Coll} \wedge \text{Isbn} = \text{Isbn}} ( \text{COP} \bowtie \text{PRE} ) ) \right)$$

# Calcolo: esattamente 1

*E\_1b) I libri (ISBN) prestati una e una sola volta*

$$\begin{aligned} & \{ t \mid \exists t_p \in \text{PRESTITO}, \exists t_c \in \text{COPIA} \\ & \quad ( t[\text{Isbn}] = t_c[\text{Isbn}] \wedge \\ & \quad \quad t_p[\text{Coll}] = t_c[\text{Coll}] \wedge \\ & \quad \quad \neg ( \exists t_{p2} \in \text{PRESTITO}, \exists t_{c2} \in \text{COPIA} \\ & \quad \quad \quad (\wedge t_c[\text{Isbn}] = t_{c2}[\text{Isbn}] \wedge \\ & \quad \quad \quad \quad t_c[\text{Coll}] \neq t_{c2}[\text{Coll}] \\ & \quad \quad \quad \quad t_p[\text{DataP}] \neq t_{p2}[\text{DataP}] \\ & \quad \quad \quad \quad t_p[\text{CodiceUt}] \neq t_{p2}[\text{CodiceUt}] \\ & \quad \quad ) \quad ) \quad ) \\ & \} \end{aligned}$$

# Datalog: esattamente 1

*E\_1b) I libri (ISBN) prestati una e una sola volta*

```
AlDuePre(isb) :- COP(col,isb,_), PRE (col, _, dp1, _),  
                  PRE (col, _, dp2, _), dp1 != dp2
```

```
AlDuePre(isb) :- COP(col,isb,_), PRE (col, cu1, _, _),  
                  PRE (col, cu2, _, _), cu1 != cu2
```

```
AlDuePre(isb) :- COP(col1,isb,_), COP(col2,isb,_),  
                  PRE (col1,_,_,_), PRE (col2,_,_,_), col1!=col2
```

```
UnaSolaVolta(isbn) :- DAT(isbn,_,_,_,_), ¬ AlDuePre( isbn )
```

? – UnaSolaVolta( x )

# Algebra relazionale: al più 1, 2, .. N

*P\_1a) Le copie prestate **al più una** volta*

Da tutte le copie togliamo quelle che hanno almeno 2 prestiti:

$$\Pi_{\text{Coll}} \text{COPIA} - A_{2a}$$

*P\_2a) Le copie prestate **al più due** volte*

Da tutte le copie togliamo quelle che hanno almeno 3 prestiti:

$$\Pi_{\text{Coll}} \text{COPIA} - A_{3a}$$

*P\_Na) Le copie prestate **al più N** volte*

Da tutte le copie togliamo quelle che hanno almeno **N+1** prestiti:

$$\Pi_{\text{Coll}} \text{COPIA} - A_{N+1a}$$

# Algebra relazionale: al più 1, 2,.. N volte

*P\_1b) I libri (ISBN) prestati **al più una** volta*

Da tutti i libri togliamo quelli con almeno 2 prestiti:

$\Pi_{\text{ISBN}} \text{DATILIBRO} - A_{2b}$

*P\_2b) I libri (ISBN) prestati **al più due** volte*

Da tutti i libri togliamo quelli con almeno 3 prestiti:

$\Pi_{\text{ISBN}} \text{DATILIBRO} - A_{3b}$

*P\_Nb) I libri (ISBN) prestati **al più N** volte*

Da tutti i libri togliamo quelli con almeno **N+1** prestiti:

$\Pi_{\text{ISBN}} \text{DATILIBRO} - A_{N+1b}$

# Quante volte?

Una divagazione sulle cardinalità

*Come estraiamo i libri prestati...*

*A) Almeno tot volte ?*

*E) Esattamente tot volte ?*

*P) al Più tot volte ?*

*Come calcoliamo **quante volte** è stato prestato un certo libro?*

**NON POSSIAMO ESPRIMERE QUESTA QUERY !**