Esercitazioni di Analisi 2

Funzioni da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$: **DOMINIO - CURVE DI LIVELLO**

1. Stabilisci se ciascuno dei seguenti insiemi è aperto, chiuso, limitato, connesso:

   (a) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0,\ y > 0,\ x + y \leq 1\}$
   [D è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.]

   (b) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| \leq 1\}$
   [D è illimitato, connesso, chiuso.]

   (c) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \neq 0\}$
   [D è limitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.]

2. Determina e disegna nel piano cartesiano il dominio delle seguenti funzioni e stabilisci se è limitato, aperto o chiuso, connesso:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{3x - x^2}\,\dfrac{\sqrt{(x^2 - y^2)}}{\sqrt{x + y}}$

   (b) $f(x,y) = \log\left(x^2 - xy\right)$
   $\left[D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y < x) \vee (x < 0 \wedge y > x)\}\,;\ D \text{ è illimitato, aperto, non connesso.}\right]$

   (c) $f(x,y) = \log\left(x^3 - x^2y^2\right)$
   $\left[D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > y^2\}\,;\ D \text{ è illimitato, aperto, connesso.}\right]$

   (d) $f(x,y) = \log\left(x + |x| + y + |y|\right)$

3. Determina e disegna nel piano cartesiano il dominio delle seguenti funzioni e stabilisci se è limitato, aperto o chiuso, connesso:

   (a) $f(x,y) = \sqrt{1 - \dfrac{\ln y}{x}}$
   $\left[\begin{array}{l} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0,\ y > 0,\ y \leq e^x \text{ per } x > 0 \text{ oppure } y \geq e^x \text{ per } x < 0\}\,; \\ D \text{ è illimitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.} \end{array}\right]$

   (b) $f(x,y) = \dfrac{\ln\left(x\sqrt{y - x}\right)}{xy - 1}$
   $\left[D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x,\ x > 0,\ y \neq \dfrac{1}{x}\right\};\ D \text{ è illimitato, non connesso, aperto.}\right]$

   (c) $f(x,y) = \sqrt{|y - 1|\,(x + x^2)} + \ln\left(1 - \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{4y}}\right)$
   $\left[\begin{array}{l} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x \leq -1 \vee x \geq 0) \vee y = 1,\ y > 0,\ x^2 + y^2 - 4y < 0\}\,; \\ D \text{ è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.} \end{array}\right]$

   (d) $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 + y - 1}{x^2 - 1}}$
   $\left[\begin{array}{l} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x^2, \text{ per } -1 < x < 1 \text{ oppure } y \geq 1 - x^2 \text{ per } x < -1 \vee x > 1\}\,; \\ D \text{ è illimitato, non connesso, nè aperto nè chiuso.} \end{array}\right]$

(e) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{(x^2-2x-y)\,(x^2-2x+y)}}{(2x-3)^2+(2y-1)^2}+\ln\dfrac{x+1}{2-x}$

$\left[\begin{array}{l} D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: -1<x<2,\ (x,y)\neq\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right),\ -\left|x^2-2x\right|<y<\left|x^2-2x\right|\right\}; \\ D \text{ è limitato, connesso, nè aperto nè chiuso.}\end{array}\right]$

4. Rappresenta sul piano cartesiano le curve di livello delle seguenti funzioni:

(a) $f(x,y)=1-x^2-y^2$
$\left[x^2+y^2=1-c,\ c\leq 1: \text{circonferenze di centro } C=(0,0) \text{ e raggio } r=\sqrt{1-c}\right]$

(b) $f(x,y)=y-x^2$

(c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$
$\left[y=-x+\dfrac{1}{c},\ c\neq 0: \text{rette parallele alla bisettrice } y=-x \text{ esclusa la bisettrice}\right]$

(d) $f(x,y)=\dfrac{1+xy}{x^2}$

$\left[\begin{array}{l} y=cx-\dfrac{1}{x}: \text{funzioni dispari con dominio } x\neq 0 \text{ e asintoto verticale l'asse } y, \\ \text{se } c>0 \text{ sempre crescenti, se } c=0 \text{ iperbole equilatera } y=-\dfrac{1}{x}, \\ \text{se } c<0\ x=\sqrt{-\dfrac{1}{c}} \text{ è punto di massimo, } x=-\sqrt{-\dfrac{1}{c}} \text{ è punto di minimo.}\end{array}\right]$

(e) $f(x,y)=x\,(y-\ln x)$

$\left[\begin{array}{l} y=\ln x+\dfrac{c}{x}: \text{funzioni con dominio } x>0 \text{ e asintoto verticale l'asse } y, \\ \text{se } c<0 \text{ sempre crescenti, se } c=0\ y=\ln x, \text{ se } c>0\ x=c \text{ è punto di minimo.}\end{array}\right]$

(f) $f(x,y)=\dfrac{ye^x}{x}$

$\left[\begin{array}{l} y=cxe^{-x}: \text{funzioni con dominio } x\neq 0, \text{ l'asse } x \text{ è asintoto orizzontale a } +\infty, \\ \text{se } c=0\ y=0, \text{se } c<0\ x=1 \text{ è punto di minimo, se } c>0\ x=1 \text{ è punto di massimo.}\end{array}\right]$

(g) $f(x,y)=\sin\sqrt{x^2+y^2}$

(h) $f(x,y)=\dfrac{(y-x)\ln x}{x}$

(i) $f(x,y)=\dfrac{xe^y-1}{x^2}$

5. Disegna la curva di livello 1 della funzione $f(x,y)=e^{x^2+y}$.

6. Disegna la curva di livello 1 della funzione $f(x,y)=\dfrac{xy-y^2}{x+xy}$.

7. Disegna la curva di livello 3 della funzione $f(x,y)=e^{x^2y}$.

8. Data $f(x,y)=1+\sqrt{(x-1)\,y}$; determina il dominio D di f e stabilisci se D è aperto, chiuso, limitato, connesso; determina le curve di livello di f e rappresentale sul piano cartesiano.

$\left[\begin{array}{l} D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)\,y\geq 0\right\};\ D \text{ è chiuso, illimitato, connesso.} \\ \text{Gli insiemi di livello } E_c \text{ di } f \text{ sono definiti da } E_c=\left\{(x,y)\in D\,(f):\sqrt{(x-1)\,y}=c-1; c\in\mathbb{R}\right\} \\ \text{Se } c<1\ E_c=\varnothing; \text{ se } c=1\ E_1 \text{ è costituito dalle rette di equazione } x=1 \text{ e } y=0; \\ \text{se } c>1\ E_c=\left\{(x,y)\in D\,(f): y=\dfrac{(c-1)^2}{x-1}\right\}.\end{array}\right]$