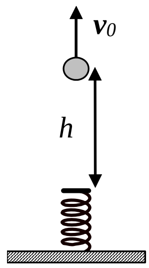
19 / 6 / 2018
ore 13:30

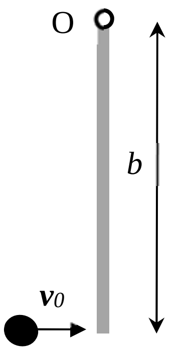
FISICA (preappello)

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1.
Una biglia di massa m viene lanciata in verticale verso l'alto con velocità $\boldsymbol{v}_0$ da un'altezza h rispetto all'estremità di una molla di massa trascurabile, fissata al pavimento. Dopo la caduta in verticale, la biglia rimane attaccata all'estremo della molla. Si osserva che la massima deformazione della molla è ΔL. Si calcoli la costante elastica della molla.



2.
Un'asta omogenea di massa M e lunghezza b può ruotare in un piano verticale attorno a un estremo O ed è inizialmente in equilibrio. L'asta viene colpita all'altra estremità da una pallina, di massa $m = M/2$ in moto con velocità $\boldsymbol{v}_0$ orizzontale, che dopo l'urto rimane unita all'asta.
Si calcoli la minima velocità v_0 per cui l'asta compie una rotazione completa dopo l'impatto.
[Si consideri la pallina un punto materiale. Il momento d'inerzia di un'asta omogenea rispetto al CM è $I_{CM} = Mb^2/12$]



3
Un asteroide si trova a distanza R dal centro della Terra e si sta avvicinando. La sua energia meccanica è zero (assumendo l'energia potenziale nulla a distanza infinita). La sua velocità forma un angolo $\alpha = 45°$ rispetto alla congiungente con la Terra. Si determini la minima distanza dal centro della Terra che l'asteroide raggiungerà.
[Esprimere il risultato in funzione di R]

4.
a) Si enunci il principio d'accrescimento dell'entropia spiegando esplicitamente il significato dei simboli utilizzati e le condizioni di validità.
b) Da tale enunciato di deduca il secondo principio della termodinamica nella formulazione di Kelvin-Planck.

Si ricorda di:
- *Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA*
- *FIRMARE l'elaborato;*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate.*

Fisica - preappello del 19/6/18 - Traccia sintetica di soluzione

Quesito 1

Imponiamo la conservazione dell'energia meccanica tra l'istante iniziale (biglia lanciata verso l'alto) e l'istante finale (biglia attaccata alla molla nel punto di massima deformazione). Assumiamo il livello zero dell'energia potenziale della forza peso alla quota iniziale della biglia. Ricordiamo che nell'istante finale la biglia ha velocità nulla.

$$E_{mecc,i} = E_K = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$E_{mecc,f} = U_p + U_{el} = -mg(\Delta L + h) + \frac{1}{2} k \, \Delta L^2$$

$$E_{mecc,f} = E_{mecc,i} \quad \Rightarrow \quad -mg(\Delta L + h) + \frac{1}{2} k \, \Delta L^2 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$\boxed{k = m \left(\frac{v_0^2}{\Delta L^2} + 2g \frac{\Delta L + h}{\Delta L^2} \right)}$$

Quesito 2

- Durante l'urto si conserva il momento angolare rispetto al polo O:

$$L_{i,O} = L_{f,O}$$

$$m v_0 b = I_{tot} \omega$$

  dove inizialmente vi è solo il momento angolare della pallina in moto, mentre dopo l'urto occorre considerare il momento di inerzia assiale I_{tot} che comprende sia il contributo dell'asta sia il contributo della pallina rimasta unita ad essa.

- $I_{tot} = I_{asta,O} + I_{pallina,O} = \underbrace{I_{asta,CM} + M\frac{b^2}{2^2}}_{\text{teo. H.-S.}} + mb^2 = \frac{1}{12}Mb^2 + \frac{1}{4}Mb^2 + mb^2 = \frac{5}{3}mb^2$

- Il caso con velocità minima per compiere una rotazione completa corrisponde alla condizione per cui l'asta, dopo l'urto, arriva con velocità angolare nulla dopo essere ruotata di 180°.

- Applichiamo la conservazione dell'energia meccanica al moto del corpo rigido dopo l'urto. Dovendo considerare i contributi di energia potenziale della forza peso sia per l'asta sia per la pallina, assumiamo come zero dell'energia potenziale la quota iniziale della pallina. Ricordiamo inoltre che l'energia cinetica di un corpo rigido rotante attorno a un asse fisso si può scrivere come $E_K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$.

$$E_{mecc,i} = E_K + U_{p,asta} + U_{p,pallina} = \frac{1}{2} \frac{L_{f,0}^2}{I_{tot}} + Mg\frac{b}{2} + 0$$

$$E_{mecc,f} = E_K + U_{p,asta} + U_{p,pallina} = 0 + Mg\frac{3b}{2} + 2mgb$$

- Uguagliando:

$$\frac{1}{2} \frac{L_{f,O}^2}{I_{tot}} + Mg\frac{b}{2} = Mg\frac{3b}{2} + 2mgb$$

$$\frac{1}{2} \frac{L_{i,O}^2}{I_{tot}} = 4mgb$$

$$L_{i,O}^2 = 8mgb \, I_{tot}$$

$$m^2 v_0^2 b^2 = \frac{40}{3} m^2 g b^3$$

$$\boxed{v_0 = 2\sqrt{\frac{10}{3} g b}}$$

Quesito 3

- Nel punto a distanza R l'asteroide ha una energia meccanica E_1 e un momento angolare $\vec{L}_1$ pari rispettivamente a:

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{m M_T}{R}$$
$$\vec{L}_1 = \vec{R} \times m\vec{v}_0 = R m v_0 \,\sin 135^\circ\, \vec{u}_z = \frac{\sqrt{2}}{2} R m v_0 \vec{u}_z$$

dove m è la massa dell'asteroide, M_T la massa della Terra, γ la costante di gravitazione universale, v_0 la velocità in quel punto, $\vec{u}_z$ un versore ortogonale al piano dell'orbita.

- Nel perigeo (minima distanza dal centro della Terra r_P) l'asteroide ha una energia meccanica E_2 e un momento angolare $\vec{L}_2$ pari a:

$$E_2 = \frac{1}{2} m v_P^2 - \gamma \frac{m M_T}{r_P}$$
$$\vec{L}_2 = \vec{r}_P \times m\vec{v}_P = r_P \, m v_P \vec{u}_z$$

dove v_P è la velocità al perigeo e abbiamo considerato che, in tale punto, la velocità è ortogonale al vettore posizione dell'asteroide (rispetto al centro della Terra).

- Imponendo che l'energia meccanica nel punto iniziale sia nulla otteniamo:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{m M_T}{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad R v_0^2 = 2\gamma M_T \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R}}$$

- Imponendo la conservazione del momento angolare (in forma scalare):

$$L_1 = L_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2} R m v_0 = r_P \, m v_P \quad \Rightarrow \quad \frac{v_P}{v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{R}{r_P}$$

- Imponiamo infine la conservazione dell'energia meccanica:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{m M_T}{R} = \frac{1}{2} m v_P^2 - \gamma \frac{m M_T}{r_P}$$
$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{2} \frac{v_P^2 - v_0^2}{\gamma M_T} + \frac{1}{R}$$

Sostituiamo la relazione trovata sopra $R v_0^2 = 2\gamma M_T$:

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{R} \frac{v_P^2 - v_0^2}{v_0^2} + \frac{1}{R}$$
$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{R} \left(\frac{v_P^2 - v_0^2}{v_0^2} + 1 \right)$$
$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{R} \frac{v_P^2}{v_0^2}$$

Sostituiamo infine la relazione ricavata dalla conservazione del momento angolare $\frac{v_P}{v_0} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{R}{r_P}$:

$$\frac{1}{r_P} = \frac{1}{R}\frac{1}{2}\frac{R^2}{r_P^2}$$

da cui:

$$\boxed{r_P = \frac{R}{2}}$$

Quesito 4

Si veda la teoria.