Esercitazioni di Analisi 2

EDO DEL SECONDO ORDINE LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

Equazioni non omogenee

1. Determina tutte le soluzioni delle seguenti equazioni differenziali complete:

   (a) $y'' + y = 1$ $\quad [y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1]$

   (b) $*y'' + 4y = 4$ $\quad [y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + 1]$

   (c) $y'' - y' = x^2$ $\quad \left[y = C_1 + C_2 e^x - \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2x\right]$

   (d) $y'' + 2y' = x^2 - 3x$ $\quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-2x} + \frac{1}{6}x^3 - x^2 + x\right]$

   (e) $y'' - 3y' = x^2 + 1$ $\quad \left[y = C_1 + C_2 e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{11}{27}x\right]$

   (f) $y'' - 2y' + 2y = x^2 + 3x$ $\quad \left[y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 2\right]$

   (g) $y'' - 3y' + 2y = x^2$ $\quad \left[y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\right]$

   (h) $y'' + 4y = 4\cos 2x$ $\quad [y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + x \sin 2x]$

   (i) $y'' + 2y' + 3y = 2e^{3x}$ $\quad \left[y = e^{-x}\left(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x\right) + \frac{1}{9}e^{3x}\right]$

   (j) $y'' - 3y' + 2y = e^x$ $\quad [y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - xe^x]$

   (k) $y'' + y' = x$ $\quad \left[y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x\right]$

   (l) $*y'' + 5y' + 6y = 1$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}\right]$

   (m) $3y'' + 8y' + 4y = e^{-x} + \sin x$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x} - e^{-x} - \frac{8}{65}\cos x + \frac{1}{65}\sin x\right]$

   (n) $y'' + 2y' + y = x^3 - 6x^2$ $\quad [y = e^{-x}(C_1 + C_2 x) + x^3 - 12x^2 + 42x - 60]$

   (o) $y''+3y'+5y = e^x \sin x$ $\quad \left[y = e^{-\frac{3}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x\right) + \frac{1}{89}e^x (8\sin x - 5\cos x)\right]$

   (p) $y'' + y' - 2y = x + e^x$ $\quad \left[y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}xe^x\right]$

   (q) $y'' + 4y = \sin 2x$ $\quad \left[y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x\right]$

(r) $y'' + 3y = x + 2\cos\sqrt{3}x$ $\left[y = C_1\cos\sqrt{3}x + C_2\sin\sqrt{3}x + \frac{1}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}x\sin\sqrt{3}x\right]$

(s) $y'' + y = 2e^x\cos x + 3\sin x$ $\left[y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{5}e^x\left(2\cos x + 4\sin x\right) - \frac{3}{2}x\cos x\right]$

(t) $y''+9y = x^2e^{3x}+\cos 3x$ $\left[y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{9}e^{3x}\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{18}\right) + \frac{1}{6}x\sin 3x\right]$

(u) $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$ $\left[y = e^x\left(C_1 + C_2x\right) + e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^x\right]$

(v) $y'' = 3x^3 - x + 1$ $\left[y = C_1 + C_2x + \frac{3}{20}x^5 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]$

(w) $y'' + 4y' + 4y = (2x-3)\,e^{-2x}$ $\left[y = e^{-2x}\left(C_1 + C_2x\right) + \frac{1}{6}\left(2x^3 - 9x^2\right)e^{-2x}\right]$

(x) $y'' + 6y' + 10y = e^{-3x}\cos x$ $\left[y = e^{-3x}\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) + \frac{1}{2}xe^{-3x}\sin x\right]$

2. ∗Determina tutte le soluzioni limitate su $\mathbb{R}$ dell'equazione $y'' - 4y = 1$. $\left[y = -\frac{1}{4}\right]$

3. ∗Scrivi un'equazione differenziale lineare del secondo ordine che abbia come soluzione $y(x) = x + x^2 + x^3$. $[y'' = 2 + 6x]$

4. Risolvi i seguenti problemi di Cauchy:

(a) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{6}e^{-2x} - \frac{1}{2}\right]$

(b) $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $\left[y = -8e^{-\frac{1}{4}x} + x + 8\right]$

(c) $\begin{cases} y'' + 4y = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{16} \end{cases}$ $\left[y = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{32}\sin 2x + \frac{1}{4}\right]$

(d) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 18x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ $\left[y = -\frac{3}{2}e^{2x} + 3x + \frac{5}{2}\right]$

(e) $\begin{cases} y'' - 4y = 4e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = xe^{2x}\right]$

(f) $\begin{cases} y'' + y = \cos 2x \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\left[y = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos 2x\right]$

(g) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = x + e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ $\left[y = \frac{5}{9}e^x - \frac{11}{36}e^{-2x} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right]$

(h) $\begin{cases} y'' + 9y = 6\sin 3x \\ y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} \\ y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $\left[y = \frac{1}{3}\sin 3x - x\cos 3x\right]$

(i) $\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x} \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$ $\left[y = \left(2x^2 + 6x - 1\right)e^{3x}\right]$

5. Considera l'equazione differenziale: $y'' - 2y' + \left(1 + k^2\right) y = f(x)$.

(a) Scrivi l'integrale generale per $f(x) = 0$ e $k > 0$ $[y = e^x (C_1 \cos kx + C_2 \sin kx)]$

(b) Posto $k = 1$, scrivi l'integrale generale per $f(x) = 2e^x$ $[y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 2e^x]$

(c) Determina la soluzione di (b) che soddisfa $y(0) = 1$ e $y'(0) = 2$ $[y = e^x (-\cos x + \sin x) + 2e^x]$

6. Risolvi il problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x - 1 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 1 \end{cases}$ e scrivi lo sviluppo di Taylor arrestato al terzo ordine della soluzione in un intorno di $x = 1$

$\left[y = -2e^{2(x-1)} + \frac{2}{3}e^{3(x-1)} + x^2 + x + \frac{1}{3};\ y = 1 + (x-1) + \frac{1}{3}(x-1)^3\right]$

nota: gli esercizi contrassegnati da $*$ sono tratti da temi d'esame.