LOGICA E ALGEBRA

5 luglio 2018

<u>Esercizio 1</u> Sia R la relazione binaria sull'insieme {a; b; c; d; e; f} definita nel seguente modo:

R = {(b, a); (b, d); (c, d); (c, e); (c, f); (d, a); (d, e); (f, a)}

a) Stabilire se R è antisimmetrica e se è una relazione d'ordine.
b) Verificare se esiste una relazione d'ordine che contiene R.
c) Sia S la più piccola relazione d'ordine contenente R. Costruire il diagramma di Hasse di S e determinare se S ammette massimo e/o minimo, elementi massimali e/o elementi minimali.
d) Determinare il diagramma di Hasse di una relazione d'ordine totale contenente S.
e) Dimostrare che non esistono funzioni contenute in R né funzioni contenenti R.

<u>Esercizio 2</u> Sia f(A,B,C) una f.b.f che assume i seguenti valori di verità:

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	0	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

a) Si completi la tavola di verità di f(A,B,C) in modo tale che dall'insieme di f.b.f. $\{\neg A \vee B, B \wedge C\}$ non si deduca f(A,B,C) ma da f(A,B,C) si deduca $A \Rightarrow C$.
b) Si scriva la formula ottenuta f(A,B,C) utilizzando solo i connettivi $\neg$ e $\Rightarrow$.
c) Si verifichi usando la risoluzione che da $\{\neg A \vee B, B \wedge C\}$ non si deduce f(A,B,C).

<u>Esercizio 3</u> Sia $f : N \rightarrow N$ la funzione così definita:

$$\forall x \in N \qquad f(x) = 2^x$$

dove N è l'insieme dei numeri naturali.

a) Dimostrare che f è un monomorfismo di (N, +) in (N, ·). E' anche un isomorfismo?
b) Tradurre in un opportuno linguaggio del primo ordine la seguente frase:
"Se g è un omomorfismo da (N, +) ad (N, +), allora la funzione composta $g \cdot f$ è un omomorfismo da (N, +) ad (N, ·)"
Il dominio da considerare dev'essere l'insieme dei numeri naturali N e le due funzioni f e g devono essere interpretate da due lettere funzionali di arità 1.
c) Si porti la formula trovata in forma normale prenessa e poi in forma di Skolem.
d) Si stabilisca se la formula trovata è logicamente valida.

GIUSTIFICARE OGNI RISPOSTA

TRACCIA DI SOLUZIONE

Esercizio 1

a) La relazione R è antisimmetrica in quanto, presi due generici elementi *x*, *y* dell'insieme {a; b; c; d; e; f}, se $(x, y) \in R$ allora non accade mai che anche $(y, x) \in R$.

R non è una relazione d'ordine in quanto non è né riflessiva (ad esempio $(a, a) \notin R$) né transitiva (ad esempio $(b, d) \in R,\ (d, e) \in R$ ma $(b, e) \notin R$).

b) Essendo R antisimmetrica potrebbe esistere una relazione d'ordine contenente R. Costruiamo la chiusura riflessiva R' di R:

R' = R ∪ {(a, a); (b, b); (c, c); (d, d); (e, e); (f, f)}

e la chiusura transitiva T di R':

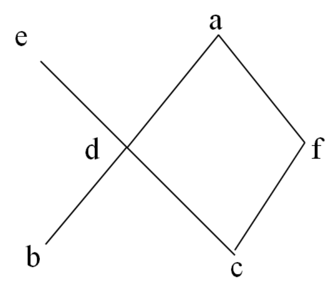
S = R' ∪ {(b, e); (c, a)}.

S risulta essere ancora antisimmetrica e quindi è una relazione d'ordine (la minima) contenente R.

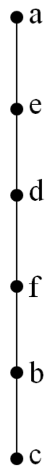
c) La relazione S costruita al passo precedente è la minima relazione d'ordine contenente R ed è definita nel seguente modo:

S = {(b, a);(b, d);(c, d);(c, e);(c, f);(d, a);(d, e); (f, a);(a, a);(b, b); (c, c);(d, d);(e, e);(f, f);(b, e);(c, a)}.

Il diagramma di Hasse di S è quello rappresentato a lato dal quale si evince che l'insieme degli elementi minimali è {b; c}, quello degli elementi massimali è {a; e} mentre non esistono massimo né minimo.



d) Un esempio di relazione d'ordine totale contenente R è quella avente come diagramma di Hasse quello rappresentato a lato con tutti gli elementi allineati.



e) Non esistono funzioni contenute in R perché, ad esempio, non c'è nessuna coppia del tipo (a, x) che appartiene ad R, al variare di x in {a; b; c; d; e; f}.

Non esistono funzioni contenenti R perché, ad esempio, $(b, a) \in R,\ (b, d) \in R$ e quindi ogni altra relazione contenente R conterrebbe queste due coppie, non rispettando così la definizione di funzione.

Esercizio 2

a) Affinché dall'insieme di f.b.f. {¬ A∨B, B∧C} non si deduca f(A,B,C) è necessario che almeno un modello dell'insieme di f.b.f. non sia modello per f(A,B,C). I modelli di {¬ A∨B, B∧C} sono le interpretazioni *v* e *v'* tali che *v*(A) = *v*(B) = *v*(C) = 1 e *v'*(A) = 0, *v'*(B) = *v'*(C) = 1. Osserviamo che *v'*(f(A,B,C)) = 1, quindi bisogna imporre la condizione che *v*(f(A,B,C)) = 0.

Affinché da f(A,B,C) si possa dedurre A ⇒ C è necessario che tutti i modelli di f(A,B,C) siano modelli per A ⇒ C. Le uniche interpretazioni che non sono modelli per A ⇒ C sono *w* e *w'* tali che *w*(A) =

= *w*(B) = 1, *w*(C) = 0 e *w'*(A) = 1, *w'*(B) = *w'*(C) = 0. Poiché vale già che *w*(f(A,B,C)) = 0, è sufficiente imporre la condizione che *w'*(f(A,B,C)) = 0. Pertanto la tavola di verità di f(A,B,C) è la seguente:

A	B	C	f (A, B, C)
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

b) $f(A,B,C) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee C) \equiv$

$\equiv \neg A \vee ((\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg B \vee C) \wedge (B \vee C)) \equiv \neg A \vee ((\neg B \vee (\neg C \wedge C)) \wedge (B \vee C)) \equiv$

$\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge (B \vee C)) \equiv \neg A \vee ((\neg B \wedge B)) \vee (\neg B \wedge C)) \equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C) \equiv$

$\equiv A \Rightarrow \neg(B \vee \neg C) \equiv A \Rightarrow \neg(C \Rightarrow B)$

c) Trasformiamo in forma a clausole le formule dell'insieme {$\neg$A$\vee$B, B$\wedge$C} e la negazione di f(A,B,C):

- da $\neg$A$\vee$B si ottiene la clausola {$\neg$A,B};
- da B$\wedge$C si ottengono le clausole {B}, {C};
- $\neg f(A,B,C) \equiv \neg(\neg A \vee (\neg B \wedge C)) \equiv A \wedge \neg(\neg B \wedge C) \equiv A \wedge (B \vee \neg C)$
  Da $\neg f(A,B,C)$ si ottengono le clausole $\{A\}, \{B, \neg C\}$.

L'insieme delle clausole di input è S ={{$\neg$A,B};{B};{C};$\{A\}$;$\{B,\neg C\}$ } e si verifica subito che Ris(S) = S. Poiché la clausola vuota non appartiene a Ris(S) segue che da {$\neg$A$\vee$B, B$\wedge$C} non si può dedurre f(A,B,C).

Esercizio 2

a) Dimostriamo innanzitutto che *f* è un omomorfismo di (N, +) in (N, ·) cioè che, per ogni $x, y \in N$, vale $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$. Risulta che:

$$f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x) \cdot f(y)$$

e pertanto *f* è un omomorfismo.

f risulta essere un monomorfismo se è anche iniettiva. Siano $x, y \in N$ tali che $f(x) = f(y)$. Allora $2^x = 2^y$ e quindi *x* = *y*. Segue che *f* è iniettiva e pertanto è un monomorfismo.

f risulta essere un isomorfismo se è un omomorfismo iniettivo e suriettivo. Ma *f* non è un'applicazione suriettiva in quanto, ad esempio, non esiste alcun $x \in N$ tale che $f(x) = 3$. Pertanto *f* non è un isomorfismo.

b) Sia A_1^2 la lettera predicativa che interpreta la relazione di uguaglianza e siano f_1^1 la lettera funzionale che interpreta la funzione *f*, f_2^1 la lettera funzionale che interpreta la funzione g, f_1^2 la lettera funzionale che interpreta l'operazione di addizione e f_2^2 la lettera funzionale che interpreta l'operazione di moltiplicazione. La f.b.f. $\mathscr{F}$ della logica del primo ordine che traduce la frase assegnata è la seguente:

$$\forall x \forall y\, A_1^2(f_2^1(f_1^2(x,y)), f_1^2(f_2^1(x), f_2^1(y))) \Rightarrow \forall x \forall y\, A_1^2(f_1^1(f_2^1(f_1^2(x,y))), f_2^2(f_1^1(f_2^1(x)), f_1^1(f_2^1(y)))).$$

c) La forma normale prenessa della f.b.f. $\mathscr{F}$ trovata al punto b) è la seguente:

$$\exists x \exists y \forall z \forall t(\, A_1^2(f_2^1(f_1^2(x,y)), f_1^2(f_2^1(x), f_2^1(y))) \Rightarrow A_1^2(f_1^1(f_2^1(f_1^2(z,t))), f_2^2(f_1^1(f_2^1(z)), f_1^1(f_2^1(t))))).$$

La forma di Skolem di $\mathscr{F}$ è la seguente:

$$\forall z \forall t(\, A_1^2(f_2^1(f_1^2(a,b)), f_1^2(f_2^1(a), f_2^1(b))) \Rightarrow A_1^2(f_1^1(f_2^1(f_1^2(z,t))), f_2^2(f_1^1(f_2^1(z)), f_1^1(f_2^1(t))))),$$

dove *a, b* sono costanti.

d) La formula $\mathscr{F}$ trovata al punto b) non è logicamente valida. Infatti l'affermazione "se *g* è un omomorfismo da (N, +) ad (N, +), allora la funzione composta *g* · *f* è un omomorfismo da (N, +) ad (N, ·)" risulta vera quindi la $\mathscr{F}$ risulta vera nell'interpretazione assegnata all'inizio. La f.b.f. $\mathscr{F}$ risulta falsa invece nell'interpretazione in cui la lettera predicativa A_1^2 interpreta sempre la relazione di uguaglianza, la lettera funzionale f_1^1 interpreta ancora la funzione *f* assegnata all'inizio ma la lettera funzionale f_2^1 interpreta una funzione *h* che risulta essere un omomorfismo di (N, ·) in (N, ·), la lettera funzionale f_1^2 interpreta l'operazione di moltiplicazione e la lettera funzionale f_2^2 interpreta l'operazione di addizione. Infatti l'antecedente di $\mathscr{F}$ risulta vero in questa nuova interpretazione in quanto si traduce in "per ogni $x, y \in N,\ h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$", affermazione vera essendo *h* un omomorfismo di (N, ·) in (N, ·). Il conseguente di $\mathscr{F}$ invece risulta falso in questa nuova interpretazione in quanto si traduce in "per ogni $x, y \in N,\ f(h(x \cdot y)) = f(h(x)) + f(h(y))$", cioè "per ogni $x, y \in N,$ vale $2^{h(x \cdot y)} = 2^{h(x)} + 2^{h(y)}$". Quest'ultima affermazione è falsa poiché in generale $2^{h(x \cdot y)} = 2^{h(x) \cdot h(y)} = \left(2^{h(x)}\right)^{h(y)} \neq 2^{h(x)} + 2^{h(y)}$. Pertanto la f.b.f. $\mathscr{F}$ risulta falsa nella nuova interpretazione e quindi non può essere logicamente valida.