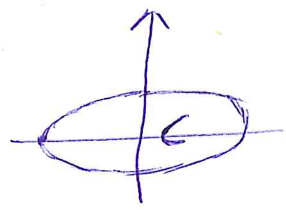
ANALISI MAT. 2
PROF. E. MALUTA
25/06/2018
SVOLGIMENTO

1) $f(x,y) = 2 - 2y^2 - x^2 - x$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$



$(-\frac{1}{2}, 0)$ unico punto stazionario in $C°$ $\quad f(-\frac{1}{2}, 0) = \frac{9}{4}$

Sul bordo $\partial C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ $\quad f/_{\partial C} = 1 - x$

poiché $x \in [-1, 1]$ su ∂C Max per $x = -1$ $\quad f(-1, 0) = 2$

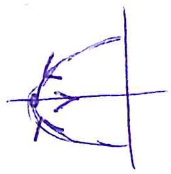
Min per $x = 1$ $\quad f(1, 0) = 0$

$(-\frac{1}{2}, 0)$ punto di max globale $\qquad \max_C f = \frac{9}{4}$

$(1, 0)$ " " min " $\qquad \min_C f = 0$

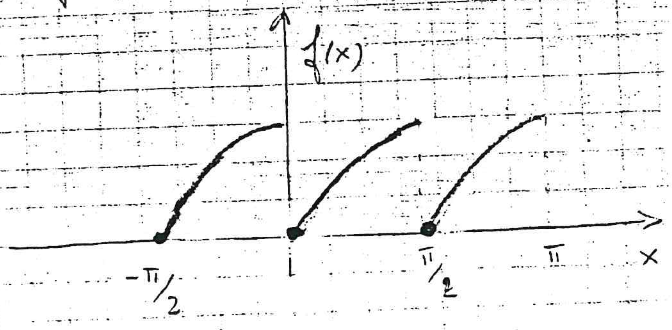
Poiché sulla retta $r: y = 0$ si ha $f/_r(x, 0) = 2 - x^2 - x = \tilde{f}(x)$

$\tilde{f}'(x) = -2x - 1 > 0$ per $x < -\frac{1}{2}$, in $U(-1, 0)$ si ha



quindi $(-1, 0)$ NON è un max locale.

3) $f(x) = \sin x \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, periodica di periodo $T = \pi/2$



$f(x) \in P_{\pi/2}$ perché è periodica di periodo $\frac{\pi}{2}$, generalmente continua, assolutamente integrabile (è limitata) in $[0, \frac{\pi}{2}]$

Si ha perciò

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^{\infty} (a_n \cos 4nx + b_n \sin 4nx) \qquad (*)$$

ove:

$$a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \cos 4nx \, dx = \frac{4}{\pi} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\sin(1+4n)x - \sin(4n-1) \right] dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos(1+4n)x}{1+4n} + \frac{\cos(4n-1)x}{4n-1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1+4n} - \frac{1}{4n-1} \right)$$

$n = 0, 1, \ldots$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin x \, \sin 4nx \, dx = \qquad n = 1, 2, \dots$$

$$= \frac{4}{\pi} \, \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\cos(4n-1)x - \cos(4n+1)x \right] dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(4n-1)x}{4n-1} - \frac{\sin(4n+1)x}{4n+1} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(- \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right).$$

Posto $x=0$ nella $(*)$, si ottiene:

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \, \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n+1} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left\{ 1 + \left(- \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) + \left(- \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) + \dots \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{2}{\pi} \, \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

Tale risultato era prevedibile. Infatti, in $x=0$, $f(x)$ ha una discontinuità di I specie ed esistono le pseudo-derivate; per il teorema fondamentale, la serie $(*)$ converge in $x=0$ ed ha per somma

$$\frac{1}{2} \left\{ f(0^-) + f(0^+) \right\} = \frac{1}{2}$$

3) $y' = (y+1)\sin x \quad (*)$

eq a variab. sep.

$f(x) = \sin x \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R})$

$g(y) = y+1 \qquad g \in C^\infty(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \exists!$ soluz locale di $\begin{cases} (*) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) $y(x) = -1$ soluz sing.

$\forall \varphi$ soluz. $\varphi(x) < -1 \quad \vee \quad \varphi(x) > -1$

$\operatorname{sign} \varphi' = \pm \operatorname{sign} \sin x$ per $\varphi(x) < -1 \quad x = \pi$ punto di min locale

$\varphi(x) > -1 \quad x = \pi$ punto di max locale

$\varphi(x) = -1$ " punti di max e min locale deb.

b) $y \neq -1$

$\dfrac{dy}{y+1} = \sin x \, dx \qquad \varphi(x) = -1 + k e^{-\cos x}$

$\varphi(0) = y_0 \qquad -1 + k e^{-1} = y_0 \qquad k = (y_0 + 1)\, e$

c) $\forall y_0 < -1$ φ, soluz del relativo probl di Cauchy, è < -1

definita su $\mathbb{R}$ —