Analisi Matematica 2 - Ing. Informatica Telecomunicazioni		Esame del 7 febbraio 2022
Cognome:	Nome:	Matricola:

È richiesto di giustificare tutti i passaggi.
La prova è sufficiente se le seguenti tre soglie sono tutte raggiunte: esercizi 12 punti, teoria 4 punti, punteggio totale 18.

ESERCIZI: 24 punti.

Esercizio 1 *(6 punti)*

1) (3 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^t$.

2) (1,5 punti) Stabilire se esistono soluzioni di tale equazione che verificano $\lim_{t\to-\infty} y(t) = 0$ e, in caso affermativo, determinarle tutte.

3) (1,5 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$.

Esercizio 2 *(6 punti)*

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione 2π-periodica definita in $[-\pi, \pi)$ da $\begin{cases} -x & \text{per } x \in [-\pi, 0) \\ \frac{x}{2} & \text{per } x \in [0, \pi). \end{cases}$

1) (3 punti) Studiare la convergenza della serie di Fourier di f, in particolare:

   a- discutere la convergenza in media quadratica;

   b- determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di Fourier e la funzione somma della serie in tale insieme;

   c- stabilire se la convergenza della serie di Fourier sia totale in tutto $\mathbb{R}$.

2) (3 punti) Determinare i coefficienti a_n della serie di Fourier di f. *Non è richiesto di calcolare i coefficienti b_n.*

Esercizio 3 *(6 punti)*

1) (3 punti) Sia g la funzione di due variabili definita da $g(x,y) = \dfrac{\ln(1+x^2y)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$.

   a- Determinare il dominio di g e dire se si tratta di un insieme aperto/chiuso - limitato/illimitato.

   b- Stabilire se esiste il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ e, in caso affermativo, determinarlo.

2) (3 punti) Sia ora $f(x,y) = e^{x^2-y}$. Determinare il massimo assoluto e il minimo assoluto di f sul vincolo $\mathcal{Z} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$.

Esercizio 4 *(6 punti)*

Data la lamina piana

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 \leq 1, \; x \geq 0, \; -x \leq y \leq x\},$$

avente densità di massa $\rho(x,y) = x$,

1) (2,5 punti) calcolare la massa $m(L)$ della lamina L;

2) (3,5 punti) ricordando che il baricentro di L ha coordinate

$$\frac{1}{m(L)} \left(\iint_L x\rho(x,y)\,dx\,dy, \iint_L y\rho(x,y)\,dx\,dy \right),$$

determinarle.

TEORIA: 8 punti.

Tutte le domande a crocette ammettono una e una sola risposta corretta.

1) *(1 punto)* Si consideri il sistema differenziale omogeneo $\underline{y}'(t) = A\underline{y}(t)$, dove A è una matrice quadrata di ordine 2 avente autovalori complessi coniugati immaginari puri.

A Le soluzioni sono tutte limitate in $\mathbb{R}$

B Potrebbero esistere soluzioni non definite in tutto $\mathbb{R}$

C Le soluzioni sono tutte del tipo $\underline{v}\, e^{\lambda t}$, con λ reale e $\underline{v} \in \mathbb{R}^2$

D L'integrale generale è uno spazio vettoriale di dimensione 1

2) *(1 punto)* Siano $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato e $\underline{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ la parametrizzazione di una curva regolare γ. Siano poi $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto tale che $\gamma \subset A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ continua. L'integrale curvilineo di f lungo γ è

A $\int_a^b \|\underline{r}'(t)\|\, dt$

B $\int_{\underline{r}(a)}^{\underline{r}(b)} f(\underline{r}(t))\, dt$

C $\int_a^b f(\underline{r}(t))\, dt$

D $\int_a^b f(\underline{r}(t))\, \|\underline{r}'(t)\|\, dt$

3) *(1 punto)* Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora

A f è di classe C^1 in un intorno di $\underline{x}_0$

B può esistere una successione di punti $\underline{x}_n$ per cui si abbia $\lim_{n\to+\infty} \underline{x}_n = \underline{x}_0$ e $\lim_{n\to+\infty} f(\underline{x}_n) \neq f(\underline{x}_0)$

C se inoltre $\underline{x}_0$ è punto critico per f, allora $f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$ quando $\underline{x} \to \underline{x}_0$

D $\nabla f(\underline{x}_0)$ è tangente all'insieme di livello di f passante per $\underline{x}_0$

4) *(1,5 punti)* Enunciare il teorema di Fermat, specificandone le ipotesi di validità.

5) *(3,5 punti)* Enunciare e dimostrare la formula risolutiva per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari.