Analisi Matematica 2 – 8 giugno 2023 – Ing. Informatica
Proff. Garrione - Gazzola - Noris - Piovano

Cognome:	**Nome:**	**Matricola:**

Parte A	**Es.1**	**Es.2**	**Es.3**	**Totale**

Per superare l'esame devono essere raggiunte le seguenti soglie: parte A$\geq$4, parte B$\geq$12, totale$\geq$18.
Tempo di svolgimento complessivo delle parti A+B = 100 minuti.

PARTE A. Domanda aperta (4 punti). Sia $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con A aperto, e sia $(x_0, y_0) \in A$. Scrivere la definizione di differenziabilità per f in (x_0, y_0) e dimostrare che se f è differenziabile in (x_0, y_0) allora è continua in tale punto.

Domande a risposta multipla ($4\times 1 = 4$ punti): una sola è corretta.

(1) Sia $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ la serie di Fourier della funzione $f(x) = \cos x \sin x$. Allora:
(a) $a_2 = b_2 = 1/2$ (b) $a_2 = b_2 = 0$ (c) $a_2 = 0$ e $b_2 = 1$ (d) $a_2 = 0$ e $b_2 = 1/2$

(2) Siano $E \subset \mathbb{R}^2$ e $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Allora:
(a) se $x_0 \in E$, allora x_0 è un punto interno ad E (b) se $x_0 \in \partial E$, allora $x_0 \notin E$
(c) se x_0 è un punto esterno ad E, allora $x_0 \notin E$ (d) nessuna delle altre

(3) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 e sia $x_0 \in \mathbb{R}^2$ un suo punto critico. Si denoti con $H_f(x_0)$ la matrice Hessiana di f calcolata in x_0. Allora:
(a) se 2 è un autovalore di $H_f(x_0)$, allora x_0 non può essere un punto di massimo relativo per f
(b) se $\det H_f(x_0) < 0$, il punto x_0 può essere un punto di minimo relativo per f
(c) se i termini sulla diagonale principale di $H_f(x_0)$ sono gli unici nulli, x_0 può essere estremo relativo per f
(d) nessuna delle altre

(4) Sia $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$. Quale tra le seguenti curve percorre il sostegno di φ due volte in senso orario, mantenendo il punto iniziale e il punto finale di φ?
(a) $\psi(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [0, \pi]$ (b) $\psi(s) = (\cos(2s), -\sin(2s))$, $s \in [0, 2\pi]$ (c) $\psi(s) = (\cos(2s), -\sin(2s))$, $s \in [0, \pi]$ (d) $\psi(s) = (\cos s, -\sin s)$, $s \in [0, 2\pi]$

PARTE B. Esercizi ($3\times 8 = 24$ punti)

Esercizio 1 (a) (4 punti) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t)+2y'(t)+y(t) = e^{-2t}$.
(b) (2 punti) Stabilire se tale equazione possieda soluzioni y tali che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0$; in caso affermativo, determinarle tutte.

(c) (2 punti) Risolvere il problema di Cauchy $\begin{cases} y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-2t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

Esercizio 2 Sia $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definita da

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\pi^2 & x \in [0, \pi/2) \\ -x^2 + \pi^2 & x \in [\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Sia $g_p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ l'estensione pari di g, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'estensione 2π-periodica di g_p.

(a) (1 punto) Disegnare il grafico di f sull'intervallo $[0, 4\pi]$.

(b) (4 punti) Scrivere la serie di Fourier di f.

(c) (3 punti) Discutere convergenza puntuale, convergenza in media quadratica e convergenza totale della serie trovata.

Esercizio 3 Calcolare

$$I = \iiint_D z\, e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy\, dz \quad \text{con} \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1,\ z^2 \le x^2 + y^2 \le 4z^2\}.$$