SOLUZIONE DELLA PROVA DEL 29/1/2019

Esercizio 1

Introduciamo delle lettere enunciative per indicare le proposizioni atomiche:

A: “La verdura è trasportata”

B: “La verdura è venduta”

C: “La verdura è immagazzinata”

Allora le premesse si traducono nel seguente modo:

(a) $A \Rightarrow B$
(b) $\sim A \Rightarrow B \vee C$
(c) $C \Rightarrow B$

mentre la negazione di (d) corrisponde a $\sim B$. Scriviamo le formule in forma a clausole:

(a) $A \Rightarrow B \equiv \sim A \vee B$
(b) $\sim A \Rightarrow B \vee C \equiv A \vee B \vee C$
(c) $C \Rightarrow B \equiv \sim C \vee B$

pertanto si ottengono le clausole $C_1 = \{\sim A, B\}$, $C_2 = \{A, B, C\}$, $C_3 = \{\sim C, B\}$, $C_4 = \{\sim B\}$.
Dalla teoria è noto che dalle premesse (a), (b), (c) si deduce la tesi (d) se e solo se l’insieme $\{A \Rightarrow B, \sim A \Rightarrow B \vee C, C \Rightarrow B, \sim B\}$ è insoddisfacibile e quindi se e solo se $\{C_1, C_2, C_3, C_4\} \vdash_R \square$.

Una derivazione per risoluzione della clausola vuota è la seguente:

(I)	$C_1 = \{\sim A, B\}$	(clausola di input)
(II)	$C_4 = \{\sim B\}$	(clausola di input)
(III)	$C_5 = \{\sim A\}$	(risolvente di C_1 e C_4)
(IV)	$C_2 = \{A, B, C\}$	(clausola di input)
(V)	$C_6 = \{B, C\}$	(risolvente di C_5 e C_2)
(VI)	$C_7 = \{C\}$	(risolvente di C_4 e C_6)
(VII)	$C_3 = \{\sim C, B\}$	(clausola di input)
(VIII)	$C_8 = \{B\}$	(risolvente di C_7 e C_3)
(IX)	$\square$	(risolvente di C_4 e C_3)

Avendo ottenuto la clausola vuota si può concludere che (d) si deduce dalle premesse (a), (b), (c).

Esercizio 2

(a) R non è seriale in quanto non esiste alcun elemento $y \in X$ tale che $(3, y) \in R$.

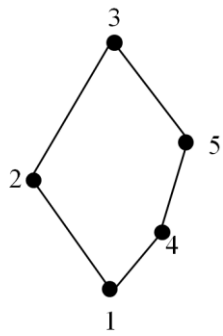
R non è riflessiva in quanto, ad esempio, $(1, 1) \notin R$.

R non è simmetrica in quanto, ad esempio, $(1, 4) \in R$ ma $(4, 1) \notin R$.

R è antisimmetrica in quanto, per ogni $y, z \in X$, se $(y, z) \in R$ allora $(z, y) \notin R$.

R non è transitiva in quanto, ad esempio, (1, 4) ∊ R, (4, 5) ∊ R ma (1, 5) ∉ R.

(b) Poiché R è antisimmetrica, potrebbe esistere la chiusura d'ordine di R. La chiusura riflessiva e transitiva T di R è T = R ∪ {(1,1), (3,3), (1,5), (4,3)} ed essendo T ancora una relazione antisimmetrica si ha che T coincide con la chiusura d'ordine $\leq$ di R. T ha come diagramma di Hasse quello rappresentato a lato.



Esiste un unico elemento massimale, 3, che quindi è anche massimo ed un unico elemento minimale, 1, che quindi è anche minimo.

Risulta che Inf{2, 5} = 1 e Sup{2, 3} = 3.

(c) La formula data è chiusa e quindi può essere solo o vera o falsa nell'interpretazione assegnata. Si traduce nel seguente modo nell'interpretazione assegnata:

"Per ogni x, y ∊ X, se (x, y) ∊ R allora esiste z ∊ X tale che (x, z) ∊ R e (z, y) ∊ R".

La formula è vera in questa interpretazione infatti:

(1, 3) ∊ R, ed esiste 2 ∊ X tale che (1, 2) ∊ R e (2, 3) ∊ R;

(1, 2) ∊ R, ed esiste 2 ∊ X tale che (1, 2) ∊ R e (2, 2) ∊ R;

(1, 4) ∊ R, ed esiste 4 ∊ X tale che (1, 4) ∊ R e (4, 4) ∊ R;

(2, 3) ∊ R, ed esiste 2 ∊ X tale che (2, 2) ∊ R e (2, 3) ∊ R;

(4, 5) ∊ R, ed esiste 4 ∊ X tale che (4, 4) ∊ R e (4, 5) ∊ R;

(5, 3) ∊ R, ed esiste 5 ∊ X tale che (5, 5) ∊ R e (5, 3) ∊ R.

(d) Una formula che sia vera se A_1^2 è interpretata da $\leq$ ma sia falsa se A_1^2 è interpretata da R per esempio è la seguente: $\forall x\, A_1^2(x, x)$. Infatti R non è riflessiva mentre $\leq$ lo è.

<u>Esercizio 3</u>

(a) Per mostrare che (Y, *) è un gruppo occorre provare le seguenti proprietà:

<u>* interna</u>: già specificato nel testo;

<u>* associativa</u>: già specificato nel testo;

<u>Esistenza dell'elemento neutro</u>: l'elemento neutro rispetto a * è la coppia (0, 0) ∊ Z×R, infatti $(x, a) * (0,0) = (0,0) * (x, a) = (x, a)$, per ogni $(x, a) \in$ Z×R.

<u>Esistenza dell'inverso</u>: per ogni $(x, a) \in$ Z×R, l'inverso è $(-x, -a) \in$ Z×R, infatti:

$(x, a) * (-x, -a) = (-x, -a) * (x, a) = (0,0)$.

<u>* commutativa</u>: siano *x*, *y* ∊ Z e *a*, *b* ∊ R. Allora:

$(x,a)*(y,b)=(x+y,a+b)=(y+x,b+a)=(y,b)*(x,a)$

Poiché $(x,a)*(y,b)=(y,b)*(x,a)$, dalla genericità degli elementi $x, y \in Z$ e $a, b \in R$ segue che vale la proprietà commutativa.

(b) Per dimostrare che ρ è una relazione di congruenza occorre provare che ρ è una relazione d'equivalenza e che è compatibile con l'operazione *:

ρ riflessiva: sia $(x,a) \in Z \times R$, allora $n|0$ quindi $n|x-x$ e $n|a-a$ e pertanto $(x,a)\,\rho\,(x,a)$. Dalla genericità di $(x,a) \in Z \times R$ segue che vale la proprietà riflessiva.

ρ simmetrica: siano (x,a), $(y,b) \in Z \times R$ tali che $(x,a)\,\rho\,(y,b)$, allora $n|x-y$ e $n|a-b$ quindi $n|y-x$ e $n|b-a$ e pertanto $(y,b)\,\rho\,(x,a)$. Dalla genericità di (x,a), $(y,b) \in Z \times R$ segue che vale la proprietà simmetrica.

ρ transitiva: siano (x,a), (y,b), $(z,c) \in Z \times R$ tali che $(x,a)\,\rho\,(y,b)$ e $(y,b)\,\rho\,(z,c)$ allora $n|x-y$, $n|a-b$ e $n|y-z$, $n|b-c$. Pertanto esistono $h, k, r, s \in Z$ tali che $n \cdot h = x-y$, $n \cdot k = a-b$ e $n \cdot r = y-z$, $n \cdot s = b-c$ da cui seguono le seguenti relazioni:

$$x-z = x-y+y-z = n \cdot h + n \cdot r = n \cdot (h+r) \Rightarrow n|x-z$$

$$a-c = a-b+b-c = n \cdot k + n \cdot s = n \cdot (k+s) \Rightarrow n|a-c$$

Poiché $n|x-z$ e $n|a-c$ si ha che $(x,a)\,\rho\,(z,c)$. Dalla genericità di (x,a), $(z,c) \in Z \times R$ segue che vale la proprietà transitiva.

ρ compatibile con *: siano (x,a), (y,b), (z,c), $(t,d) \in Z \times R$ tali che $(x,a)\,\rho\,(y,b)$ e $(z,c)\,\rho\,(t,d)$ allora $n|x-y$, $n|a-b$ e $n|z-t$, $n|c-d$. Pertanto esistono $h, k, r, s \in Z$ tali che $n \cdot h = x-y$, $n \cdot k = a-b$ e $n \cdot r = z-t$, $n \cdot s = c-d$ da cui seguono le seguenti relazioni:

$$(x+z)-(y+t) = (x-y)+(z-t) = n \cdot h + n \cdot r = n \cdot (h+r) \Rightarrow n|(x+z)-(y+t)$$

$$(a+c)-(b+d) = (a-b)+(c-d) = n \cdot k + n \cdot s = n \cdot (k+s) \Rightarrow n|(a+c)-(b+d)$$

Poiché $n|(x+z)-(y+t)$ e $n|(a+c)-(b+d)$ si ha che $(x+z, a+c)\,\rho\,(y+t, b+d)$ e quindi $((x,a)*(z,c))\,\rho\,((y,b)*(t,d))$. Dalla genericità di (x,a), (y,b), (z,c), $(t,d) \in Z \times R$ segue che ρ è compatibile con *.

(c) La f.b.f. data si traduce nel seguente modo nell'interpretazione assegnata:

"Per ogni (x,a), (y,b), (z,c), $(t,d) \in Z \times R$, se $(x,a)\,\rho\,(y,b)$ e $(z,c)\,\rho\,(t,d)$ allora $((x,a)*(z,c))\,\rho\,((y,b)*(t,d))$ ".

Pertanto essa risulta essere vera in questa interpretazione in quanto traduce la proprietà di ρ di essere compatibile con l'operazione *.

Non è una formula logicamente valida perché, ad esempio, non è vera nell'interpretazione in cui il dominio è Z e in cui R interpreta la relazione di minore ed f l'operazione di moltiplicazione. In tal caso infatti, per esempio, $-2 < 3$, $-5 < 1$ ma $(-2)\cdot(-5)=10 > 3 \cdot 1$.