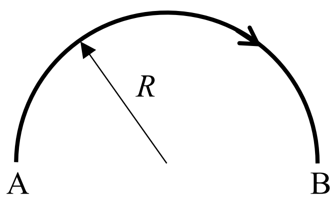
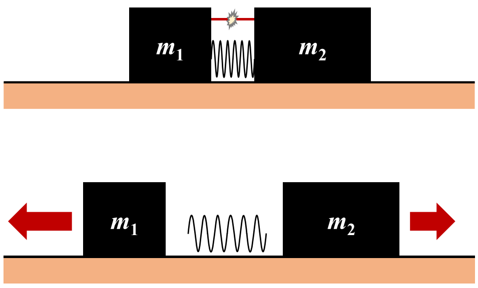
FISICA
III Appello del 17 gennaio 2020 ore 9.00
Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti, Puppin

1.
Un punto materiale di massa m percorre con accelerazione tangenziale costante una semicirconferenza AB di raggio R, partendo da fermo dal punto A e arrivando nel punto B dopo un tempo T. Si calcoli:



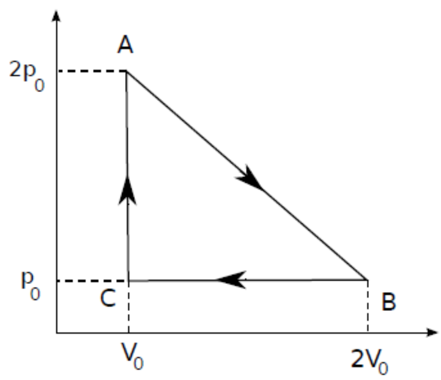
a) il modulo dell'accelerazione tangenziale del moto;
b) il modulo della velocità raggiunta alla fine della semicirconferenza;
c) il modulo dell'accelerazione alla fine della semicirconferenza;
d) il lavoro della forza risultante agente tra l'inizio e la fine della semicirconferenza.

2.
Tra due blocchi di massa m_1 e m_2, inizialmente fermi su un piano orizzontale liscio (senza attrito), è posta una molla, di massa trascurabile, mantenuta compressa da un filo di collegamento tra i blocchi. Ad un certo istante il filo viene tagliato e i due blocchi vengono messi in movimento dalla molla. Sapendo che la velocità con cui il blocco di massa m_1 si stacca dalla molla è V_1, si calcoli l'energia elastica della molla nella configurazione iniziale.



3.
Si consideri il ciclo termodinamico reversibile in figura, compiuto da un sistema costituito da n moli di gas ideale monoatomico. Si calcolino, in funzione solamente di p_0 e V_0:

a) il lavoro compiuto dal sistema in un ciclo;
b) i calori scambiati dal sistema con l'ambiente per ognuna delle trasformazioni che compongono il ciclo;
c) il rendimento del ciclo.



4.
a) Si definisca il calore molare a volume costante e il calore molare a pressione costante (considerando una sostanza pura, lontano da cambiamenti di fase) e spiegando il significato di tutti simboli utilizzati.
b) Si enunci e si dimostri la relazione di Mayer per i gas ideali.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Fisica - Appello del 17/01/20 - Traccia di soluzione

Problema 1

a)

- La legge oraria del moto, scritta rispetto all'ascissa curvilinea s, è:

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2$$

  avendo posto l'origine nel punto A e dal momento che la velocità iniziale è nulla.
- Arrivato nel punto B il punto materiale ha percorso una semicirconferenza. Perciò:

$$s(T) = \pi R$$

- Consegue che:

$$\pi R = \frac{1}{2}aT^2$$
$$a = \frac{2\pi R}{T^2}$$

- Il modulo dell'accelerazione tangenziale coincide con l'accelerazione scalare qui calcolata:

$$\boxed{|\vec{a}_t| = a = \frac{2\pi R}{T^2}}$$

b) Nel moto uniformemente accelerato la velocità scalare in funzione del tempo è data dalla legge:

$$v(t) = a \cdot t$$

perciò:

$$\boxed{v_B = a \cdot T = \frac{2\pi R}{T}}$$

che coincide con il modulo della velocità in B.

c)

- L'accelerazione in un generico moto curvilineo ha una componente tangenziale e una componente centripeta:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

  perciò

$$|\vec{a}| = \sqrt{|\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2}$$

- Consideriamo il punto finale B della semicirconferenza. Il modulo dell'accelerazione tangenziale $|\vec{a}_t|$ è già stato calcolato al punto a) (poiché è costante nel moto), mentre l'accelerazione centripeta vale:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v_B^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

- Concludiamo:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^2}{T^4} + \frac{16\pi^4 R^2}{T^4}} = \frac{2\pi R}{T^2}\sqrt{1 + 4\pi^2}}$$

d) La forza risultante è in ogni punto:

$$\vec{F}_{ris} = m\vec{a}$$

per cui il lavoro compiuto è:

$$\mathcal{L} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi R} m|\vec{a}_t|ds = ma\pi R$$

$$\boxed{\mathcal{L} = m\frac{2\pi^2 R^2}{T^2}}$$

Problema 2

- La risultante delle forze esterne agenti sul sistema delle due masse è nulla, quindi esso conserva la propria quantità di moto. Inoltre, le forze interne sono conservative, quindi il sistema conserva anche la propria energia meccanica.
- Per quanto riguarda la quantità di moto, possiamo considerare unicamente la parte scalare della componente x, essendo x un asse orizzontale orientato da sinistra a destra sulla figura. Infatti nelle altre direzioni ortogonal rimane sempre nulla la quantità di moto del sistema e delle singole parti.
- Inizialmente:
$$\begin{cases} E_M = U_{el} \\ Q = 0 \end{cases}$$
Dopo che le masse si sono staccate dalla molla:
$$\begin{cases} E'_M = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 \\ Q' = -m_1V_1 + m_2V_2 \end{cases}$$
- Dalla conservazione di Q:
$$Q = Q' \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -m_1V_1 + m_2V_2$$
da cui:
$$V_2 = \frac{m_1}{m_2}V_1$$
- Perciò, dalla conservazione di E_M:
$$E_M = E'_M$$
$$U_{el} = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2}{m_2^2}V_1^2$$
$$\boxed{U_{el} = \frac{1}{2}m_1V_1^2\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)}$$

Problema 3

a) Il lavoro coincide con l'area racchiusa dal ciclo, sul piano pV:
$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}(2V_0 - V_0)\cdot(2p_0 - p_0) = \frac{1}{2}p_0V_0}$$

b)
- Tramite l'equazione di stato dei gas ideali le temperature dei tre stati A, B e C possono essere scritte in funzione di p_0 e V_0.
$$nRT_A = p_AV_A = 2V_0p_0 \quad \rightarrow \quad T_A = 2\frac{p_0V_0}{nR}$$
$$nRT_B = p_BV_B = 2V_0p_0 \quad \rightarrow \quad T_B = 2\frac{p_0V_0}{nR} = T_A$$
$$nRT_C = p_CV_C = V_0p_0 \quad \rightarrow \quad T_C = \frac{p_0V_0}{nR}$$

- Per la trasformazione isobara $B \to C$ (tenendo presente che per i gas ideali monoatomici $c_p = \frac{5}{2}R$):

$$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = n \cdot \frac{5}{2}R \cdot \left(\frac{p_0V_0}{nR} - 2\frac{p_0V_0}{nR}\right)$$

$$\boxed{Q_{BC} = -\frac{5}{2}p_0V_0}$$

- Per la trasformazione isocora $C \to A$ (considerando che per i gas ideali monoatomici $c_v = \frac{3}{2}R$):

$$Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) = n \cdot \frac{3}{2}R \cdot \left(2\frac{p_0V_0}{nR} - \frac{p_0V_0}{nR}\right)$$

$$\boxed{Q_{CA} = \frac{3}{2}p_0V_0}$$

- Per la trasformazione $A \to B$ sfruttiamo il Primo Principio della Termodinamica, applicato all'intero ciclo:

$$Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = \mathcal{L}$$

$$Q_{AB} = \mathcal{L} - Q_{BC} - Q_{CA} = \frac{1}{2}p_0V_0 + \frac{5}{2}p_0V_0 - \frac{3}{2}p_0V_0$$

$$\boxed{Q_{AB} = \frac{3}{2}p_0V_0}$$

c) Il rendimento è:

$$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} = \frac{\mathcal{L}}{Q_{AB} + Q_{CA}} = \frac{\frac{1}{2}p_0V_0}{\frac{3}{2}p_0V_0 + \frac{3}{2}p_0V_0}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{6}}$$