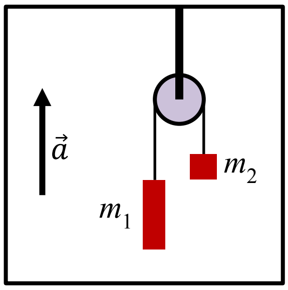
POLITECNICO
MILANO 1863

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria Industriale e dell'Informazione

FISICA
II Appello del 6 settembre 2019

Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti, Puppin

1.
Si consideri un ascensore che si muove con accelerazione $a = g/3$ verso l'alto. All'interno dell'ascensore è posizionata una macchina di Atwood costituita da una massa m_1 ed una massa $m_2 = m_1/3$, collegate fra loro tramite fune ideale ed appese all'ascensore tramite una carrucola di massa trascurabile. Si determini l'accelerazione di m_1 e m_2 rispetto:
a) un osservatore solidale con l'ascensore;
b) un osservatore inerziale al suolo.

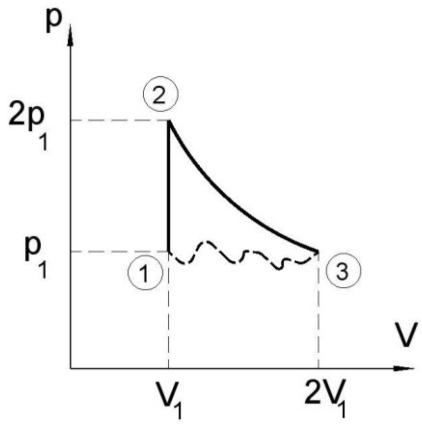


2.
Un corpo viene lanciato da una quota h (misurata dalla superficie terrestre) con una velocità tale da fargli compiere un'orbita circolare intorno alla Terra, di cui si suppone nota la massa M_T e il raggio R_T. Trascurando ogni forma di attrito, si determinino:
a) la velocità iniziale v_0 del corpo;
b) il periodo T_0 della sua orbita.

3.
a) Si enunci e si dimostri, a partire dai principi di Newton, il teorema dell'energia cinetica per un singolo punto materiale.
b) Si estenda il suddetto teorema al caso di un sistema di punti materiali.

4.
Una mole di gas ideale monoatomico compie, partendo dalla temperatura T_1, un ciclo termodinamico composto dalle seguenti trasformazioni:

- una trasformazione <u>isocora reversibile</u> 1→2 che raddoppia la pressione iniziale;
- una espansione <u>isoterma reversibile</u> 2→3 che riporta il gas alla pressione iniziale p_1;
- una <u>trasformazione irreversibile</u> 3→1 che riporta il gas nello stato iniziale mettendolo a contatto con un serbatoio di calore alla temperatura T_1.



Il rendimento complessivo del ciclo è pari a $\eta = 0.1$.
Esprimendo i risultati in funzione della sola temperatura T_1, calcolare:
a) la quantità di calore scambiata col serbatoio T_1 durante la trasformazione irreversibile 3→1, specificandone il segno;
b) la variazione di entropia dell'universo.

Si ricorda di:
- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA. FIRMARE ogni foglio utilizzato.
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente ogni risultato.*

Fisica - Appello del 06/09/19 - Traccia di soluzione

Problema 1

a)

- Descriviamo il sistema nel sistema di riferimento non inerziale solidale con l'ascensore. Fissiamo un asse z' verticale, diretto verso l'alto. Su ogni corpo di massa m agisce una forza apparente pari a:
$$\vec{F}_t = -ma_t\vec{u}'_z = -m\frac{g}{3}\vec{u}'_z$$
- Su ciascuna delle due masse costituenti la macchina di Atwood agisce, oltre alla forza apparente già detta, la forza peso (diretta verso il basso) e la forza di tensione della fune (diretta verso l'alto).
- Scriviamo la legge di Newton (includendo la forza apparente, proiettata sull'asse z', per la massa m_1:
$$m_1a'_1 = -m_1g - m_1\frac{g}{3} + T = -\frac{4}{3}m_1g + T$$
e analogamente per la massa m_2:
$$m_2a'_2 = -m_2g - m_2\frac{g}{3} + T = -\frac{4}{3}m_2g + T$$
- Sottraendo membro le due equazioni otteniamo:
$$m_1a'_1 - m_2a'_2 = -\frac{4}{3}\left(m_1 - m_2\right)g$$
- Ora, le due masse sono collegate da una fune inestensibile, perciò:
$$a'_1 = -a'_2$$
L'equazione del passaggio precedente si riscrive come:
$$\left(m_1 + m_2\right)a'_2 = \frac{4}{3}\left(m_1 - m_2\right)g$$
- Considerando che $m_2 = m_1/3$ otteniamo:
$$\frac{4}{3}m_1a'_2 = \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}m_1g$$
$$a'_2 = \frac{2}{3}g$$
- Concludiamo dunque:
$$\boxed{\begin{cases} \vec{a}'_1 = -\dfrac{2}{3}g\vec{u}'_z \\ \vec{a}'_2 = +\dfrac{2}{3}g\vec{u}'_z \end{cases}}$$

b) L'equazione di trasformazione delle accelerazioni, per due sistemi che traslano senza ruotare, è semplicemente:
$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_t$$
dove nel nostro caso $\vec{a}_t = \frac{g}{3}\vec{u}_z$. Nel sistema di riferimento inerziale possiamo definire un asse z parallelo a z' per cui $\vec{u}'_z \equiv \vec{u}_z$. Si conclude allora semplicemente:
$$\boxed{\begin{cases} \vec{a}_1 = \left(-\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right)g\vec{u}_z = -\dfrac{1}{3}g\vec{u}_z \\ \vec{a}_2 = \left(+\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\right)g\vec{u}_z = g\vec{u}_z \end{cases}}$$

Problema 2

a) In un'orbita circolare il satellite compie un moto circolare uniforme (dovendo conservarsi il momento angolare, se non varia il raggio si mantiene costante la velocità scalare). La forza di attrazione gravitazionale deve allora assumere la forma di una *forza centripeta.*

$$F_G = \gamma \frac{mM_T}{(R_T + h)^2} = m \frac{v_0^2}{R_T + h} = F_C$$

da cui è immediato ricavare:

$$v_0^2 = \frac{\gamma M_T}{R_T + h}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{\gamma M_T}{R_T + h}}}$$

b) In questo moto circolare uniforme:

$$v_0 = \omega r = \frac{2\pi}{T_0}(R_T + h)$$

$$T_0 = 2\pi \frac{R_T + h}{v_0}$$

$$\boxed{T_0 = 2\pi \frac{(R_T + h)^{3/2}}{(\gamma M_T)^{1/2}}}$$

Problema 4

a)
- Nella trasformazione isocora $\frac{p}{T} = cost.$:

  $$\frac{p_1}{T_1} = \frac{2p_1}{T_2} \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 2T_1$$

  Il calore scambiato dal gas è:

  $$Q_{12} = nc_V\, \Delta T = nc_V(T_2 - T_1) = nc_V T_1 = \frac{3}{2} nRT_1$$

  dove abbiamo anche sostituito $c_V = \frac{3}{2}R$ (gas ideale monoatomico).
- Poichè la trasformazione isoterma è reversibile, vale evidentemente la relazione $p_2V_2 = p_3V_3$ da cui ricaviamo $V_3 = (p_2/p_3)V_2 = 2V_2 = 2V_1$. In tale trasformazione, a temperatura T_2, il calore scambiato dal gas risulta quindi:

  $$Q_{23} = \mathcal{L}_{23} = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = nR\,(2T_1)\, \ln \frac{2V_1}{V_1} = nRT_1 \cdot 2 \ln 2$$

- Dalle espressioni ricavate sopra è evidente che $Q_{12} > 0$ e $Q_{23} > 0$, cioè sono calori assorbiti.
- Valutiamo ora il segno del calore scambiato durante la trasformazione $3 \to 1$. Se per assurdo fosse positivo, ovvero assorbito, allora sarebbe un ciclo in cui il gas non cede calore $|Q_{ced}| = 0$. Ma allora $\eta = 1 - |Q_{ced}|/|Q_{ass}| = 1$ che oltre a essere impossibile (nessun ciclo può avere rendimento unitario, per il Secondo Principio della Termodinamica) è in contrasto con il dato $\eta = 0.1 = 1/10$. Si può dunque affermare con certezza:

  $$Q_{31} < 0$$

  e scrivere il rendimento come:

  $$\eta = \frac{\mathcal{L}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{tot}}{Q_{ass}} = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{31}}{Q_{12} + Q_{23}}$$

- Dall'espressione del rendimento:

$$(\eta - 1)(Q_{12} + Q_{23}) = Q_{31}$$

$$Q_{31} = -(1-\eta) \cdot \left(\frac{3}{2}nRT_1 + 2nRT_1 \ln 2\right) = -\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2} + 2\ln 2\right) nRT_1$$

Poiché $n = 1$ mol e $R = 8.31$ J mol^{-1} K^{-1}:

$$\boxed{Q_{31} = -nRT_1 \cdot \left(\frac{27}{20} + \frac{9}{5}\ln 2\right) = -8.31\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot T_1 \cdot \left(\frac{27}{20} + \frac{9}{5}\ln 2\right)}$$

b)

- Per ciascuna delle due trasformazioni reversibili $\Delta S_U = 0$. Ne consegue che la variazione di entropia dell'universo su tutto il ciclo coincide con la variazione di entropia dell'universo sulla trasformazione $3 \to 1$.

$$\Delta S_U = \Delta S_U|_{3\to 1} = \Delta S_{gas,\,31} + \Delta S_{ambiente,\,31}$$

- Per calcolare la variazione di entropia del gas nella trasformazione irreversibile valutiamo l'integrale di Clausius su una trasformazione reversibile che congiunga gli stessi stati iniziale e finale. Possiamo considerare una isobara alla pressione p_1.

$$\Delta S_{gas,\,31} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_2}^{T_1} nc_P \frac{dT}{T} = \frac{5}{2}nR\ln\frac{T_1}{T_2} = -\frac{5}{2}nR\ln 2$$

dove abbiamo ricordato $c_P = \frac{5}{2}R$ (per un gas monoatomico ideale) e $T_2 = 2T_1$ come dal punto a).

- L'ambiente coincide con il termostato a temperatura T_1. Poiché la sua temperatura rimane costante possiamo calcolare la sua variazione di entropia dall'integrale di Clausius su una isoterma che scambi la stessa quantità di calore. Nella trasformazione $3 \to 1$ il termostato assorbe l'esatta quantità di calore che il gas gli cede, cioè $-Q_{31}$. Ne consegue:

$$\Delta S_{ambiente} = \Delta S_{termostato} = -\frac{Q_{31}}{T_1} = nR \cdot \left(\frac{27}{20} + \frac{9}{5}\ln 2\right)$$

- Concludendo:

$$\Delta S_U = -\frac{5}{2}nR\ln 2 + nR \cdot \left(\frac{27}{20} + \frac{9}{5}\ln 2\right)$$

$$\boxed{\Delta S_U = nR\left(\frac{27}{20} - \frac{7}{10}\ln 2\right) = 8.31\ \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \left(\frac{27}{20} - \frac{7}{10}\ln 2\right)}$$