Geometria e algebra lineare (082747), 17 Gennaio 2018

Seconda prova in itinere

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Si consideri il sottospazio $U = \{(x,y,z)^{\mathsf{t}} \in \mathbf{R}^3 : x + y - z = 0\}$ di $\mathbf{R}^3$.

1. Determinare una base ortonormale B di U e una base ortonormale C di $\mathbf{R}^3$ che contiene B.
2. Determinare la proiezione ortogonale u del vettore $v = (2,1,1)^{\mathsf{t}}$ su U.
3. Determinare (il coseno del)l'angolo tra v e u.

1. U è il nucleo della matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ quindi per determinare una base di U basta risolvere il sistema lineare omogeneo $Ax = 0$. La matrice è già ridotta a scala e $a_{11} = 1$ è l'unico pivot, quindi le soluzioni sono della forma

$$x = \begin{pmatrix} -y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I due vettori $u_1 = (-1, -, 0)^{\mathsf{t}}$ e $u_2 = (1,0,1)^{\mathsf{t}}$ sono una base di $\ker(A)$ per il teorema di Rouché-Capelli ma non sono ortogonali perché $u_1 \cdot u_2 = -1 \neq 0$. Usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per sostituirli con una base ortogonale:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo sostituito il secondo vettore con un suo multiplo scalare per avere coefficienti interi. I vettori $\{v_1, v_2\}$ formano una base ortogonale di U che possiamo completare a una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$ ricordando che $\mathrm{Row}(A) = \ker(A)^{\perp}$ e dunque aggiungendo $v_3 = (1,1,-1)^{\mathsf{t}}$, l'unica riga di A. Restano da normalizzare i vettori: se

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

possiamo prendere $B = \{w_1, w_2\}$ e $C = \{w_1, w_2, w_3\}$. 2. La proiezione di v su U può essere calcolata utilizzando la base ortonormale B di U mediante la formula

$$u = (v \cdot w_1) w_1 + (v \cdot w_2) w_2 = \frac{1}{2}(v \cdot v_1) v_1 + \frac{1}{6}(v \cdot v_2) v_2 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{5}{6} v_2 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

3. Il coseno dell'angolo ϑ fra u e v è

$$\cos\vartheta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \, \|v\|} = \frac{14/3}{\sqrt{42/9}\,\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

2

Nel piano euclideo si consideri la conica Γ di equazione

$$2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0.$$

1. Scrivere la forma canonica dell'equazione di Γ e classificare la conica.
2. Determinare le coordinate dell'eventuale centro di simmetria e le equazioni degli assi.
3. Determinare le intersezioni di Γ con gli assi cartesiani; se (x_0, y_0) è un punto di Γ, quale segno può avere y_0?

1. La matrice della conica e la sua riduzione a scala (ottenuta senza scambiare righe) sono

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^t & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 10 & 20 \\ 6 & 20 & 18 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 0 & 11/2 & 11 \\ 0 & 0 & -22 \end{pmatrix} = U$$

In particolare, $r = 2 < 3 = \bar{r}$ e la forma canonica del polinomio è del tipo $p(x, y) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3$. Gli autovalori di A sono $c_1 = 1$ e $c_2 = 12$, mentre $c_3 = I_3/I_2 = u_{33} = -22$. Quindi la forma canonica del polinomio è

$$p(x, y) = x^2 + 11y^2 - 22,$$

e la conica è un'ellisse a punti reali con equazione canonica

$$\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

2. Il sistema $Ax + b = 0$ ammette come soluzione il vettore $(0, -2)^t$, denque il centro è il punto $C = (0, -2)$. Gli autospazi di A sono

$$E_1 = \ker(A - I) = \langle(-3, 1)\rangle \qquad E_{11} = E_1^{\perp} = \langle(1, 3)\rangle\,.$$

e quindi gli assi sono le rette di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -3t \\ y = -2 + t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -2 + 3t. \end{cases}$$

Se eliminiamo il parametro t troviamo equazioni cartesiane

$$x + 3y + 6 = 0 \qquad 3x - y - 2 = 0.$$

3. Le intersezioni di Γ con gli assi coordinati sono le soluzioni dei sistemi quadratici

$$\begin{cases} 2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x^2 + 6xy + 10y^2 + 12x + 40y + 18 = 0 \\ x = 0. \end{cases}$$

Le risolventi quadratiche dei sue sistemi sono, rispettivamente,

$$x^2 + 6x + 9 = 0 \qquad 5y^2 + 20y + 9 = 0$$

che forniscono le soluzioni

$$P = (-3, 0) \qquad Q_{1,2} = \left(0, -2 \pm \frac{1}{5}\sqrt{55}\right)$$

delle quali la prima è doppia e le rimanenti semplici. Il fatto che Γ abbia un'intersezione doppia con l'asse delle ascisse significa che è tangente all'asse e quindi che si trova in uno solo dei due semipiani determinati dall'asse. Le intersezioni con l'asse y sono negative, quindi Γ si trova nel semipiano inferiore e $y \leq 0$ per tutti i punti di Γ.

3

Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$ si consideri la sfera S con centro $C = (1, 0, 0)$ passante per $A = (1, 0, 1)$.

1. Scrivere l'equazione cartesiana di S.
2. Scrivere l'equazione cartesiana del piano H appartenente al fascio

$$a(x - y) + b(x - 2z) = 0$$

   e passante per A. Determinare poi centro e raggio della circonferenza $\Gamma = S \cap H$.
3. Scrivere l'equazione cartesiana del cono di vertice C ed avente Γ come conica direttrice

1. Il raggio di S è

$$R = d(C, A) \equiv \sqrt{(1-1)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2} = 1$$

Dunque l'equazione di S è $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$ che, espansa, diventa

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0.$$

2. Il piano H passa per A se le coordinate di A sono soluzione dell'equazione del piano e cioè se $a - b = 0$; possiamo prendere $a = b = 1$ come soluzione e ottenere

$$H : 2x - y - 2z = 0.$$

Il centro Z di Γ è la proiezione ortogonale di C su H. Poiché H passa per l'origine O, posto $v = C - O = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$ e $n = (2, -1, -2)^{\mathrm{t}}$, la direzione normale al piano, la proiezione di v su H è

$$h = v - \frac{v \cdot n}{n \cdot n} n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$

dunque $Z = (5/9, 2/9, 4/9)$. Il raggio di Γ è

$$r = d(Z, A) = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{2}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. L'equazione del cono si ottiene consideranto le rette passanti per C e per un generico punto $P = (a, b, c) \in \Gamma = S \cap H$. I suoi punti sono dunque le terne (x, y, z) soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x = 1 + t(a-1) \\ y = 0 + t(b-0) \\ z = 0 + t(c-0) \\ 2a - b - 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x = 1 + t(a-1) \\ y = tb \\ z = tc \\ 2a - b - 2c = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 - 2a = 0 \end{cases}$$

Per trovare l'equazione del cono occorre eliminare i parametri a, b, c, t del sistema. Un modo per farlo è il seguente:

$$\begin{cases} a - 1 = \dfrac{x-1}{t} \\ b = \dfrac{y}{t} \\ c = \dfrac{z}{t} \\ 2(a-1) - b - 2c = -2 \\ (a-1)^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} 2\dfrac{x-1}{t} - \dfrac{y}{t} - 2\dfrac{z}{t} = -2 \\ \left(\dfrac{x-1}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{z}{t}\right)^2 = 1 \end{cases} \mapsto \begin{cases} 2(x-1) - y - 2z = -2t \\ (x-1)^2 + y^2 + z^2 = t^2 \end{cases}$$

Se ora si risolve la prima equazione rispetto a t e sis sotituisce nella seconda si ottiene l'equazione del cono

$$3y^2 + 4xy + 8xz - 4yz - 4y - 8z = 0.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 8 Febbraio 2018

Primo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Si considerino i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \langle (2,2,0,1)^{\mathsf{t}},\, (1,2,-1,1)^{\mathsf{t}} \rangle\,,$$
$$W = \{(x,y,z,w)^{\mathsf{t}} \in \mathbf{R}^4 \ : x - z - w = x + y - z = y + w = 0\}$$

1. Determinare dimensioni e basi di U e W.
2. Determinare le dimensioni di $U+W$ e $U \cap W$.
3. Determinare una base ortonormale per $U+W$.
4. Determinare la proiezione ortogonale di $(1,0,1,0)^{\mathsf{t}}$ su $W^{\perp}$.

1. I due generatori di U sono linearmente indipendenti perché non proporzionali, quindi formano una base di U; in particolare $\dim U = 2$. W è lo spazio delle soluzioni di un sistema omogeneo; possiamo determinare una base con il teorema di Rouché risolvendo il sistema,

$$W = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle (1,0,1,0)^{\mathsf{t}}, (1,-1,0,1)^{\mathsf{t}} \rangle$$

quindi $\dim W = 2$. L'unione delle basi di U e W è un insieme di generatori per $U+W$, la cui dimensione è allora il rango di questo insieme, che possiamo calcolare riducendo a scala la matrice che li contiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La riduzione a scala ha 3 pivot, dunque $\dim(U+W) = 3$. Dalla formula di Grassmann abbiamo poi che

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim W - \dim(U+w) = 2+2-3 = 1.$$

3. Per determinare una base ortogonale di $U+W$ basta osservare che il secondo generatore $u_2 = (1,2,-1,1)^{\mathsf{t}}$ di U è ortogonale ai vettori $\{w_1, w_2\}$ della base di W che abbiamo scelto; basta quindi ortogonalizzare la base di W con Gram-Schmidt: prendiamo $q_1 = w_1$,

$$q_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e $q_3 = u_2$. Normalizzando, otteniamo la base ortonormale

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)^{\mathsf{t}}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,-1,2)^{\mathsf{t}}, \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{7}}(1,2,-1,1)^{\mathsf{t}}.$$

4. IL vettore $(1,0,1,0)^{\mathsf{t}}$ appartiene a W; dunque la sua proiezione su $W^{\perp}$ è il vettore nullo.

2

Si considerino, nello spazio euclideo $\mathbf{R}^3$, le rette

$$r : \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x - y = 0. \end{cases}$$

1. Stabilire se r e s sono sghembe, incidenti o parallelele e se le loro direzioni sono ortogonali; calcolare la distanza tra r e s.
2. Determinare l'equazione cartesiana della superficie $\mathcal{Q}$, ottenuta ruotando s attorno a r.
3. Se $\mathcal{Q}$ è una quadrica, classificarla (cioè determinarne il tipo).

1. Scriviamo un'equazione parametrica per ciascuna delle due rette, usando x come variabile indipendente per r e z per s.

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = 2t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

I vettori direzione $u = (1, -1, -1)^{\mathsf{t}}$ e $v = (2, 2, 1)^{\mathsf{t}}$ non sono proporzionali, dunque r e s non sono parallele. La loro distanza è allora data dalla formula

$$d(r, s) = \frac{|(P - Q) \cdot (u \wedge v)|}{\|u \wedge v\|}$$

dove $P \in r$ e $Q \in S$ sono punti arbitrari. Per $t = 0$ in entrambe le rette troviamo, ad esempio, $P = (0, 0, 1)$ e $Q = (0, 0, 0)$, dunque $P - Q = (0, 0, 1)^{\mathsf{t}}$, mentre

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sostituendo nella formula per la distanza troviamo $d = 4/\sqrt{26}$; dunque le rette sono sghembe. Le direzioni non sono ortogonali perché $u \cdot v = -1 \neq 0$. 2. Usiamo l'equazione parametrica di r e quella cartesiana di S per scrivere il primo dei due sistemi che seguono.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = a^2 + b^2 + (c - 1)^2 \\ (x - a) - (y - b) - (z - c) = 0 \\ a - 2c = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 9c^2 - 2c \\ x - y - z + c = 0 \end{cases}$$

Se eliminiamo i parametri a e b dalle ultime due equazioni otteniamo il secondo sistema; infine eliminando c dall'ultima equazione troviamo l'equazione della quadrica

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 9xy - 9xz + 9yz + x - y = 0.$$

3. Dal momento che Q è stata ottenuta ruotando due rette sghembe una intorno all'altra, Q è necessariamente un iperboloide iperbolico. Lo stesso risultato si ritrova osservando che la matrice completa della quadrica (con i coefficienti duplicati per renderli interi) e una sua riduzione a scala senza scambio di righe sono, rispettivamente,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 8 & -9 & -9 & 1 \\ -9 & 8 & 9 & -1 \\ -9 & 9 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dunque $r = 3 < 4 = \bar{r}$. I polinomi caratteristici di $\bar{A}$ e A sono rispettivamente

$$\bar{q} = x^4 - 24x^3 - 53x^2 - 12x + 16 \qquad q = -x^3 + 24x^2 + 51x + 26.$$

Dalla regola dei segni di Descartes abbiamo $\bar{p} = 2$ e $p = 1$, quindi la quadrica è un iperboloide iperbolico.

3

1. Verificare che i vettori $v_1 = (1,1,1)^t$, $v_2 = (0,1,1)^t$ e $v_3 = (1,1,0)^t$ formano una base di $\mathbf{R}^3$ e scrivere i vettori della base canonica come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.
2. Dato $k \in \mathbf{R}$, sia $f_k : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita dalle formule

$$f_k(v_1) = (1,1,1)^t, \qquad f_k(v_2) = (-1,3,0)^t \qquad f_k(v_3) = (0, 1-k, 3-k)^t.$$

   Scrivere la matrice A_k che rappresenta f_k rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$ e verificare che v_1 è un autovettore di A_k.
3. Calcolare traccia, determinante e rango di A_k in funzione di $k \in \mathbf{R}$.
4. Determinare se A_k è simmetrica per qualche valore di $k \in \mathbf{R}$; per tali eventuali valori, trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di A_k.
5. Determinare se, per $k = 4$, l'endomorfismo f_4 è diagonalizzabile.

1. Se i v_i formano una base B, allora la matrice $A = (v_1, v_2, v_3)$ è invertibile ed è la matrice di passaggio dalla base canonica a B; quindi la matrice A^{-1} è la matrice di passaggio da B alla base canonica e le sue colonne contengono i coefficienti delle combinazioni lineari cercate. Un'applicazione dell'algoritmo di Gauss-Jordan mostra che

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Dunque A è invertibile, B è una base e

$$e_1 = v_1 - v_2, \qquad e_2 = -v_1 + v_2 + v_3, \qquad e_3 = v_1 - v_3.$$

2. La matrice rappresentativa di f_k rispetto alle basi B nel dominio e la base canonica E nel codominio è la matrice $M_k = (f(v_1), f(v_2), f(v_3))$; la matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche è dunque

$$A_k = M_k A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1-k \\ 1 & 0 & 3-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3-k & k \\ 1 & 2-k & k-2 \end{pmatrix}.$$

Per definizione, $f_k(v_1) = v_1$, dunque v_1 è un autovettore relativo all'autovalore 1. 3. Un calcolo diretto mostra che $\mathrm{tr}(A_k) = 3$ e $\det(A_k) = 3k - 11$. Quindi se $k \neq {}^{11}/_3$ allora $\det(A_k) \neq 0$ e $\mathrm{rk}(A_k) = 3$. Se $k = {}^{11}/_3$ allora il minore principale di NO di ordine 2 vale $-{}^{16}/_3$, quindi $\mathrm{rk}(A_k) = 2$. 4, A_k è simmetrica quando $k = 2 - k$ e cioè quando $k = 1$. Dai conti fatti al punto 3 sappiamo che la somma degli autovalori vale $x_1 + x_2 + x_3 = \mathrm{tr}(A_k) = 3$ e che il loro prodotto vale $x_1 x_2 x_3 = \det(A_k) = -8$. Dal momento che $x_1 = 1$ è un autovalore, come osservato al punto 2, gli altri autovalori devono soddisfare le formule $x_2 + x_3 = 3$ e $x_2 x_3 = -8$; dunque $x_2 = 4$ e $x_3 = -2$. Tutti gli autospazi devono avere dimensione 1, perché gli autovalori sono semplici; in particolare $E_1 = \langle (1,1,1)^t \rangle$. Per gli altri autovalori abbiamo

$$E_4 = \ker(A_1 - 4I) = \ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_{-2} = \ker(A_1 + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} . \right\rangle$$

Se normalizziamo, troviamo la base ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^t, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)^t, \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)^t, \quad \right\}.$$

5. Se $k = 4$ allora $x_1 + x_2 + x_3 = \mathrm{tr}\, A_4 = 3$ e $x_1 x_2 x_3 = \det(A_4) = 1$ insieme a $x_1 = 1$ implicano che $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ è l'unico autovalore triplo. Se A_4 fosse diagonalizzabile sarebbe allora simile alla matrice identità; ma allora dovrebbe essere

$$A_4 = SIS^{-1} = I$$

Poiché $A_4 \neq I$, A_4 non è diagonalizzabile.

Geometria e algebra lineare (082747), 20 Giugno 2018

Secondo appello

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ che rispetto alla base canonica ha come matrice rappresentativa

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & -1 \\ -1/3 & 1/3 & -1 \\ -1/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che M è diagonalizzabile, trovare le equazioni dei suoi autospazi, verificando che uno di essi ha dimensione 2. Sia U tale autospazio.
2. Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori e si scriva la matrice rappresentativa di f rispetto a $\mathcal{B}$.
3. Si osservi che $v = (1,1,1)^{\mathsf{t}}$ non appartiene a U; detto $P = (x,y,z)$ un generico punto dello spazio, sia Q il punto tale che $Q - P$ appartenga al sottospazio generato da v e il punto medio di PQ appartenga a U. Si dimostri che $f(P) = Q$.

Il polinomio caratteristico di f (ottenuto sottraendo la terza riga alle altre due) è $p = -1+x+x^2-x^3 = (1-x)^2(-1-x)$ e ammette $x = -1$ come autovalore semplice e quindi regolare e $x = 1$ come autovalore doppio. Poiché

$$M - I \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M + I \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $g_1 = 2$, quindi anche il secondo autovalore è regolare, M è diagonalizzabile e gli autospazi sono

$$U = E_1 = \ker(M - I) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\rangle \qquad V = E_{-1} = \ker(M + I) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

In particolare, $\dim U = g_1 = 2$. Se u_1 e u_2 sono i vettori della base di U, allora poiché autospazi relativi ad autovalori distinti sono indipendenti, $v \notin U$. Una base di autovettori è $B = \{u_1, u_2, v\}$ e la matrice che rappresenta f rispetto a questa base è la matrice degli autovalori

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le equazioni degli autospazi si ottengono dalle riduzioni a scala di $M - I$ e $M + I$:

$$U : \left\{ x + 2y + 3z = 0 \right. \qquad V : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Infine, la condizione $Q - P \in \langle v \rangle$ mostra che deve essere $Q = P + 2tv$ (il fattore 2 serve per semplificare i calcoli) e la condizione che il punto medio $M = P + tv$ di PQ appartenga a U si traduce nell'equazione $(x+t)+2(y+t)+3(z+t) = 0$ da cui $t = -\frac{1}{6}(x + 2y + 3z)$ e

$$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, -\frac{1}{3}(x + 2y + 3z) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - z \\ -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - z \\ -\frac{1}{3}x - \frac{3}{3}y \end{pmatrix} = Mx = f(P)$$

2

In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori

$$v = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}}, \qquad u = (1,1,-2,0)^{\mathrm{t}}$$

e il sottospazio $V = \langle v \rangle^{\perp}$.

1. Completare $\{u, v\}$ a una base ortogonale $\{u, v, w_1, w_2\}$ di $\mathbf{R}^4$
2. Sia $U = \langle v, w_1, w_2 \rangle$. Determinare dimensioni e basi di $U \cap V$ e $U + V$
3. Scrivere la matrice P della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^4$.
4. Determinare (una base di) nucleo e immagine della matrice $I - P$.

1. I vettori u e v sono già ortogonali; per completare $\{u, v\}$ a una base ortogonale basta osservare che, se $M = (u, v)^{\mathrm{t}}$, allora w_1 e w_2 devono essere una base ortogonale di $\ker M$. Da una riduzione a scala abbiamo che

$$\ker M = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

I due vettori ottenuti non sono ortogonali, quindi applichiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt e troviamo

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

. 2. Da 1 consegue immediatamente che $V = \langle u, w_1, w_2 \rangle$, quindi $U + V = \langle u, v, w_1, w_2 \rangle = \mathbf{R}^4$. In particolare $\dim(U + V) = 4$ e $\{u, v, w_1, w_2\}$ è una base di $U + V$. Ma $\dim U = \dim V = 3$ e dalla formula di Grassmann abbiamo $\dim(U \cap V) = 2$; poiché entrambi i sottospazi contengono i vettori indipendenti w_1 e w_2, $\{w_1, w_2\}$ è una base di $U \cap V$. 3. Qui conviene osservare che $U^{\perp} = \langle u \rangle$ ha dimensione uno; conviene quindi calcolare prima la proiezione Q su $U^{\perp}$ e ottenere per differenza la proiezione su U:

$$Q = \frac{1}{u^{\mathrm{t}} u} u u^{\mathrm{t}} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = I - Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

4. Da 3 sappiamo che $I - P = Q$ è la proiezione su $U^{\perp}$. Quindi

$$\operatorname{im} Q = U^{\perp} = \langle u \rangle, \qquad \ker Q = (U^{\perp})^{\perp} = U = \langle v, w_1, w_2 \rangle .$$

3

1. Scrivere l'equazione del cono K che ha vertice nel punto $P = (1,1,2)$ e come curva direttrice la circonferenza nel piano yz

$$C_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 - 2z = 0 \end{cases}$$

2. Mostrare che l'intersezione C_2 di K con il piano $z = 0$ è una parabola.
3. Determinare vertice e asse di C_2.

1. L'equazione del cono si ottiene dal sistema

$$\begin{cases} x - 1 = (a-1)t \\ y - 1 = (b-1)t \\ z - 2 = (c-2)t \\ a = 0 \\ b^2 + c^2 - 2c = 0 \end{cases}$$

che descrive la retta r passante per P e per il generico punto $Q = (a, b, c) \in C_1$. Eliminando i parametri a, b, c e t si ottiene l'equazione del cono

$$(x-y)^2-(z-2)(2x-z)=0$$

o, in forma espansa,

$$x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+4x-2z=0. \tag{1}$$

2. Se si sostituisce $z=0$ nell'equazione (1) di K si ottiene l'equazione di C_2:

$$x^2+y^2-2xy+4x=0.$$

La matrice completa di C_2 è

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e ha $r=1<3=r'$, dunque C_2 è una parabola. 3. La somma degli autovalori è $c_1+c_2=\operatorname{tr}(M')=2$; quindi l'unico autovalore non nullo è $c_2=2$. L'autospazio corrispondente E_2 è generato dal vettore $v_2=(1,-1)^{\mathrm{t}}$. La tangente a C_2 nel vertice appartiene al fascio improprio $x+y+k=0$. Intersecando la generica retta del fascio con C_2 troviamo il sistema

$$\begin{cases} x+y+k=0 \\ x^2+y^2-2xy+4x=0 \end{cases}$$

la cui equazione risolvente è

$$4x^2+4(k+1)x+k^2=0.$$

La retta è tangente quando il discriminante $D/4=8k+4$ si annulla e cioè quando $k=-{}^1/_2$. La tangente nel vertice di C_2 è dunque $2x+2y-1=0$ e intersecando questa retta con C_2 si trova il vertice $V=(-{}^1/_4,{}^3/_4)$. L'asse di C_2 è la retta passante per V con direzione $v_1=(1,1)^{\mathrm{t}}$ ortogonale a v_2:

$$x-y+1=0.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 12 Luglio 2018

Terzo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Sia $k \in \mathbf{R}$ un parametro e si consideri il sistema

$$\begin{cases} x + ky = 1 - k \\ -x + (k+2)y + kz = 1 \\ (k+1)y + kz = 1 \end{cases}$$

1. Determinare, al variare di k, quante soluzioni ha tale sistema.
2. Verificare che per $k = 0$ l'insieme delle soluzioni rappresenta in $\mathbf{R}^3$ una retta r e trovarne una parametrizzazione.
3. Detta s la retta $x = z = 0$, trovare l'equazione del luogo

$$L = \{P \in \mathbf{R}^3 : d(P,r)^2 = d(P,s)^2\}$$

4. Verificato che L è una quadrica, determinarne il tipo.

1. La matrice completa del sistema è

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & k & 0 & 1-k \\ -1 & k+2 & k & 1 \\ 0 & k+1 & k & 1 \end{array}\right)$$

e $|A| = k(k+1)$. Quindi, se $k \neq 0, -1$ il sistema è crameriano e ammette una sola soluzione. Se $k = 0$ o $k = -1$, invece, abbiamo rispettivamente le riduzioni a scala seguenti:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Se $k = 0$ abbiamo $r = 2 = r'$ e $n - r = 3 - 2 = 1$; il sistema ha dunque ∞^1 soluzioni. Se invece $k = -1$, allora $r = 2 < 3 = r'$ e il sistema non ha soluzioni. 2. Per $k = 0$ risolvendo il sistema dalla riduzione a scala si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = t \end{cases}$$

che rappresentano la retta passante per $Q = (1,1,0)^{\mathrm{t}}$ con direzione $u = (0,0,1)^{\mathrm{t}}$. 3. s è la retta passante per l'origine O con direzione $v = (0,1,0)^{\mathrm{t}}$. Se $P = (x,y,z)^{\mathrm{t}} \in \mathbf{R}^3$ è un punto generico, dalle formule per la distanza punto-retta abbiamo

$$d(P,r) = \frac{\|(P-Q)\wedge u\|}{\|u\|} = \frac{\|(x-1,y-1,z)^{\mathrm{t}} \wedge (0,0,1)^{\mathrm{t}}\|}{\|(0,0,1)^{\mathrm{t}}\|} = \|(y-1, 1-x, 0)^{\mathrm{t}}\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$$

$$d(P,s) = \frac{\|(P-O)\wedge v\|}{\|v\|} = \frac{\|(x,y,z)^{\mathrm{t}} \wedge (0,1,0)^{\mathrm{t}}\|}{\|(0,1,0)^{\mathrm{t}}\|} = \|(-z,0,x)^{\mathrm{t}}\| = \sqrt{x^2+z^2}$$

dunque

$$P \in L \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + z^2 \Leftrightarrow y^2 - z^2 - 2x - 2y + 2 = 0.$$

4. L'ultima equazione è un polinomio quadratico in tre indeterminate e rappresenta una quadrica di matrice

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che la sottomatrice A della parte quadratica è diagonale con autovalori $0, \pm 1$; in particolare, $r = 2$ e $p = 1$. Poiché $|\bar{A}| = 1 \neq 0$ abbiamo $\bar{r} = 4$ e L è un paraboloide iperbolico.

2

Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-k \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

e l'applicazione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ data da $f(x) = Ax$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori del parametro reale k i vettori u, v, w formano una base di $\mathbf{R}^3$.
2. Determinare se la matrice A è diagonalizzabile.
3. Trovare l'unico valore di k per cui u è autovettore di f e verificare che per tale valore $B = \{u, v, w\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$.
4. Scrivere la matrice associata ad f rispetto alla base B.

1. La matrice

$$B_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 1-k & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ha determinante $|B_k| = 4k - 2$. I vettori sono indipendenti, e dunque una base, visto che il loro numero coincide con la dimensione dello spazio, se e soltanto se $|B_k| \neq 0$ e dunque quando $k \neq 1/2$. 2. Il polinomio caratteristico di A è $p = (1-x)^3$; quindi A annette $x = 1$ come unico autovalore triplo. Se A fosse diagonalizzabile dovrebbe essere simile alla matrice identità; ma l'unica matrice simile a I è I stessa; quindi A non è diagonalizzabile. 3 Dal momento che $x = 1$ è l'unico autovalore, deve essere $Au = u$; questa equazione equivale al sistema

$$\begin{cases} k + 1 = 1 \\ k = k \\ k + 1 = 1 \end{cases}$$

che ammette $k = 0$ come unica soluzione. Poiché $o \neq 1/2$, le colonne di B_0 formano una base di $\mathbf{R}^3$. 4. La matrice che rappresenta f rispetto a B_0 si ottiene dalla formula del cambiamento di base:

$$M = B_0^{-1} A B_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

Consideriamo i vettori di $\mathbf{R}^4$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sia $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$; inoltre sia H l'iperpiano di $\mathbf{R}^4$ definito da $x + y = 0$ e sia $V = H^\perp$ il complemento ortogonale di H.

1. Trovare basi ortonormali per U e V.
2. Determinare $\dim(U + V)$ e $\dim(U \cap V)$.
3. Dato un generico vettore $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t \in \mathbf{R}^4$, determinare le sue proiezioni ortogonali $p(v) \in U$ e su $q(v) \in V$.
4. Dimostrare che la funzione $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ data da $f(v) = p(v) + q(v)$ è ortogonalmente diagonalizzabile . Determinare se 0 è un autovalore di f ed in tal caso trovare una base dell'autospazio associato.

1. Cominciamo a trovare una base ortogonale per U applicando l'algoritmo di Gram-Schmidt ai vettori v_i. Troviamo

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Il fatto che $u_3 = 0$ significa che v_3 è linearmente dipendente rispetto a v_1 e v_2; quindi $\{u_1, u_2\}$ è una base ortogonale di U; dividendo per la norma otteniamo la base ortonormale

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} u_1, \frac{1}{\sqrt{6}} u_2 \right\}.$$

Per trovare una base ortogonale di V basta osservare che se $A = (1, 1, 0, 0)$, allora $H = \ker A$, dunque

$$V = (\ker A)^\perp = \operatorname{Row} A = \langle (1, 1, 0, 0)^\perp \rangle .$$

Il vettore $w = (1, 1, 0, 0)^t$ è una base ortogonale di V; se normalizziamo otteniamo la base ortonormale di V

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} w \right\}.$$

2. $U + V = \langle u_1, u_2, w \rangle$. La riduzione a scala

$$(u_1, u_2, w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra che $\dim(U + V) = r = 3$. Da quanto dimostrato al punto 1 abbiamo che $\dim U = 2$ e $\dim V = 1$; dalla formula di Grassmann $\dim(U \cap V) = \dim(U + V) - \dim U - \dim V = 3 - 2 - 1 = 0$. 3. Le proiezioni su U e V hanno matrici

$$P = \frac{u_1 u_1^t}{u_1^t u_1} + \frac{u_2 u_2^t}{u_2^t u_2} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{w w^t}{w^t w} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$p(v) = Pv = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 + x_4 \\ 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 \\ x_1 - x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}, \qquad q(v) = Qv = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Per il teorema spettrale, una funzione è ortogonalmente diagonalizzabile se e soltanto se la sua matrice rappresentativa rispetto lla base canonica è simmetrica. La matrice di f è $M = P + Q$ e sia P che Q sono simmetriche essendo matrici di proiezione; dunque

$$M^{\mathsf{t}} = (P+Q)^{\mathsf{t}} = P^{\mathsf{t}} + Q^{\mathsf{t}} = P + Q = M$$

e M è simmetrica. Infine, $E_0 = \ker(f)$ e

$$f(v) = 0 \Leftrightarrow p(v) + q(v) = 0 \Leftrightarrow p(v) = -q(v) \in U \cap V = 0 \Leftrightarrow v \in \ker p \cap \ker q = U^{\perp} \cap V^{\perp}$$

quindi $E_0 = \ker((u_1, u_2, w)^{\mathsf{t}})$. Dalla riduzione a scala

$$(u_1, u_2, w)^{\mathsf{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $E_0 = \langle (-1, 1, 1, 1)^{\mathsf{t}} \rangle$

Geometria e algebra lineare (082747), 12 Settembre 2018

Quarto appello

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Sia $L : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'applicazione lineare definita dalla formula

$$L\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a-b \\ a+b \\ c-a \end{pmatrix}.$$

1. Si scriva la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
2. Si determinino autovalori e autovettori di L. Esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di L?
3. Sia v_1 un vettore non nullo nel nucleo di L. Si mostri che v_1 appartiene all'immagine di L e si determini un vettore v_2 tale che $v_1 = L(v_2)$.
4. Sia v_3 un autovettore di L che non appartiene al nucleo di L. Si mostri che $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, e si scriva la matrice che rappresenta L rispetto a tale base.

1. La matrice rappresentativa è

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. A è singolare perché le prime due righe sono proporzionali, quindi $x_1 = 0$ è un autovalore; dall'ultima colonna di A si vede poi che $Ae_3 = e_3$, quindi anche $x_2 = 1$ è un autovalore; ma $\operatorname{tr}(A) = 1$, quindi il terzo autovalore deve essere 0; in conclusione, $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$. Siccome $\operatorname{rk}(A) = 2$, abbiamo $g_0 = 1$, l'autovalore 0 non è regolare e non esiste una base di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori. Poiché $Ae_3 = e_3$ abbiamo che $E_1 = \langle e_3 \rangle$ e risolvendo il sistema $Ax = 0$ si ottiene $E_0 = \langle v_1 \rangle$ dove $v_1 = [-1, 1, -1]^{\mathrm{t}}$.
3. Il vettore v_1 è la prima colonna di A; quindi $v_1 \in \operatorname{Col}(A) = \operatorname{im}(L)$; e poiché $v_1 = A_3 = Ae_3$, possiamo prendere $v_2 = e_1$. Tutti gli altri vettori del nucleo sono multipli di v_1, quindi immagini di e_1 secondo lo stesso multiplo.
4. Deve essere $v_3 \in E_1$. Ma allora, presa una combinazione lineare $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$, applicando L due volte e tenendo conto del fatto che deve essere

$$L(v_1) = 0, \qquad L(v_2) = v_1, \qquad L(v_3) = v_3 \tag{1}$$

troviamo, in successione,

$$c_2v_1 + c_3v_3 = 0, \qquad c_3v_3 = 0.$$

Poiché $v_3 \neq 0$, l'ultima equazione mostra che deve essere $c_3 = 0$; in modo simile dalla seconda equazione si ottiene $c_2 = 0$ e da quella di partenza $c_1 = 0$; tutti i coefficienti sono nulli, i tre vettori sono indipendenti e formano una base di $\mathbf{R}^3$. Dalle (1) si ottiene che la matrice rappresentativa di L rispetto a questa base è

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2

Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Si verifichi che $v = [1, -1, -1, 1]^{\mathrm{t}}$ è un autovettore di A e si determini il relativo autovalore.
2. Si determini una base ortonormale del nucleo di A.
3. Si determini un vettore w ortogonale al nucleo di A e al vettore v. Si verifichi che anche w è un autovettore di A e si determini il relativo autovalore.
4. Si scriva una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A, e si scrivano gli autovalori di A con le loro molteplicità algebriche. Si calcolino il determinante e la traccia di A, e si controlli che il risultato sia coerente con il calcolo degli autovalori.

1. Un calcolo diretto mostra che $Av = -8v$, dunque v_1 è un autovettore relativo all'autovalore -8. 2. Una riduzione a scala mostra che

$$A \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\mathrm{rk}(A) = 2$, $\dim\ker(A) = 2$ e

$$\ker(A) = \langle u_1 = [1, 0, 0, -1]^{\mathrm{t}}, \quad u_2 = [2, 3, -1, 0]^{\mathrm{t}} \rangle .$$

Possiamo ortogonalizzare la base con Gram-Schmidt; troviamo $b_1 = u_1$ e

$$b_2 = v_2 - \frac{b_2 v_1}{v_1 v_1} v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base ortonormale è $\left\{ q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} b_1, q_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}} b_2 \right\}$.
3. L'ortogonale del nucleo è $\mathrm{Row}(A)$ e ha dimensione $\mathrm{rk}(A) = 2$; le prime due righe v_1 e v_2 non sono proporzionali dunque sono una base di $\mathrm{Row}(A)$ e $v = 2v_2$; basta quindi ortogonalizzare v_1 rispetto a v_2 per ottenere

$$w = v_1 - \frac{v_1 v_2}{v_2 v_2} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-16}{16} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Un calcolo diretto mostra che $Aw = 6w$, dunque w è un autovettore relativo all'autovalore 6.
4. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di A è

$$\left\{ q_1, q_2, q_3 = \frac{1}{2} v, q_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} w \right\}.$$

Gli autovalori corrispondenti sono $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = -8$ e $x_4 = 6$ e

$$\sum_i x_i = -2 = \mathrm{tr}(A), \qquad \prod_i x_i = 0 = \det(A).$$

3

1. Fissato $s \in \mathbf{R}$, si scrivano le equazioni parametriche della retta $\ell(s)$ passante per i punti $P(s) = (s, 1, 0)$ e $Q(s) = (s, s, -1)$ di $\mathbf{R}^3$.
2. Si determini la posizione reciproca delle rette $\ell(s_1)$ e $\ell(s_2)$ se $s_1 \neq s_2$.
3. Le rette $\ell(s)$ al variare di $s \in \mathbf{R}$ formano una superficie Q in $\mathbf{R}^3$: se ne determini un'equazione cartesiana (suggerimento: controllare che i punti $P(s)$ e $Q(s)$ soddisfino l'equazione di Q) e si verifichi che Q è una quadrica. Si classifichi Q e se ne scriva l'equazione canonica.

1. Un'equazione parametrica di $\ell(s)$ è $X = P(s) + (Q(s) - P(s))t$; in coordinate abbiamo

$$\begin{cases} x = s \\ y = 1 + (s-1)t \\ z = -t \end{cases} \tag{2}$$

2. La retta $\ell(s)$ passa per il punto $P(s)$ e ha direxione $v(s) = [0, s-1, -1]^{\mathsf{t}}$. Se $s_1 \neq s_2$ allora

$$(P(s_2) - P(s_1)) \cdot (v(s_1) \wedge v(s_2)) = \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 - 1 & -1 \\ 0 & s_2 - 1 & -1 \end{vmatrix} = (s_2 - s_1)^2 \neq 0$$

dunque $\ell(s_1)$ e $\ell(s_2)$ sono sghembe.

3. Per determinare un'equazione di Q basta eliminare i parametri s e t dalle (2). Sostituendo $s = x$ e $t = -z$ dalla prima e terza equazione nella seconda si trova $Q : xz + y - z - 1 = 0$. La matrice corrispondente (dell'equazione moltiplicata per 2) è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $r = 2 < 4 = r'$ e il polinomio caratteristico di A è $q(x) = x - x^3$, quindi $p = 1$; Q è dunque un paraboloide iperbolico. La forma canonica del polinomio è $ax^2 + by^2 + 2cz = 0$ dove $a = 1$ e $b = -1$ sono gli autovalori non nulli di A, mentre c può essere determinato dalla condizione $1 = \det(\bar{A}) = -abc^2$; quindi $c = 1$ e la forma canonica è $x^2 - y^2 + 2z = 0$.

Geometria e algebra lineare (082747), 5 Novembre 2018

Prima prova in itinere

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

In $\mathbf{R}^3$ si considerino i piani

$$H_1 : x + y - z + 1 = 0, \qquad H_2 : x + hy - hz + 3h = 0, \qquad H_3 : hy + z + (h-1) = 0$$

con h parametro reale.

1. Stabilire, al variare di h, la posizione reciproca dei tre piani.
2. Per $h = 2$ trovare il punto P intersezione dei tre piani.
3. Verificare che per $h = -1$ i tre piani appartengono al medesimo fascio proprio, trovare la retta sostegno del fascio e la sua parallela passante per il punto P.

1. La matrice completa del sistema formato dalle equazioni dei piani e una sua riduzione a scala sono rispettivamente

$$\left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & h & -h & -3h \\ 0 & h & 1 & 1-h \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -h & -2h \\ 0 & 0 & 1-h^2 & -2h^2-h+1 \end{array}\right).$$

Se $h \neq \pm 1$ abbiamo $r = 3 = r'$ e il sistema ha un'unica soluzione; i tre piani si intersecano in un punto. Se $h = 1$ allora $r = 2 < 3 = r'$ e il sistema non ha soluzioni; itre piani non hanno punti comuni, perché i primi due piani sono propriamente paralleli mentre il terzo è trasversale ad entrambi. Se $h = -1$ allora $r = 2 = r'$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni; dunque i piani si intersecano in una retta che è supporto del fascio cui appartengono i tre piani. **2.** Completiamo la soluzione del sistema per $h = 2$ per sostituzione retrograda:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -y - 2z = -4 \\ -3z = -9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 - y + z = 4 \\ y = 4 - 2z = -2 \\ z = 3 \end{cases}$$

Dunque $P = (4, -2, 3)$. **3.** Abbiamo già osservato in 1 che per $h = -1$ i piani appartengono a un fascio proprio. L'equazione della retta si ottiene terminando la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 - y + z = 1 \\ y = -2 + z = -2 + t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = t \end{cases}$$

La parallela passante per P ha allora equazione

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

2

In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori

$$u_1 = (1,1,1,1)^t, \qquad u_2 = (0,1,1,0)^t, \qquad u_3 = (2,-1,-1,2)^t.$$

1. Determinare una base e la dimensione del sottospazio $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle \subseteq \mathbf{R}^4$.
2. Determinare dimensione, una base ed equazioni di un complemento V di U in $\mathbf{R}^4$.
3. Determinare dimensione, una base ed equazioni di un sottospazio $W \subseteq \mathbf{R}^4$ tale che $U + W = \mathbf{R}^4$ ed $U \cap W = \langle u_3 \rangle$.

Riduciamo a scala la matrice ottenuta accostando i generatori di U nell'ordine (u_3, u_2, u_1) ai vettori della base canonica di $\mathbf{R}^4$—il riordinamento dei generatori è stato fatto in vista del punto 3.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. La riduzione a scala delle prime tre colonne di M mostra che solo due dei tre generatori sono indipendenti. Dunque $\dim U = 2$ e $\{u_3, u_2\}$ è una base di U. **2.** Dalla formula di Grassmann abbiamo che $\dim V = 4 - \dim U = 2$ e dalla riduzione a scala di M abbiamo che $\{u_3, u_2, e_1, e_2\}$ è una base di $\mathbf{R}^4$ che estende quella di U; dunque $\{e_1, e_2\}$ è una base di V. Per trovare equazioni di V basta vedere quando il sistema di matrice completa $(e_1, e_2 | x)$ ha soluzione; abbiamo

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Dalla formula di Grassmann abbiamo che

$$\dim W = \dim(U+W) + \dim(U \cap W) - \dim U = 4 + 1 - 2 = 3.$$

Il fatto, dimostrato in 2, che $\{u_3, u_2, e_1, e_2\}$ sia una base di $\mathbf{R}^4$ mostra che se prendiamo $W = \langle u_3, e_1, e_2 \rangle$ allora $\dim W = 3$ e $\dim(U + V) = 4$; dalla formula di Grassmann consegue allora che $\dim(U \cap W) = 1$ e dal momento che entrambi i sottospazi contengono u_3 abbiamo che $U \cap W = \langle u_3 \rangle$. Possiamo ottenere equazioni di W come nel caso precedente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 2 & x_4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 0 & 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + 2x_3 \end{array}\right) \qquad \{\, 2x_3 + x_4 = 0.$$

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ h+1 \\ h \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2h \\ h+1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ h+1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ h \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ h-1 \\ h \end{pmatrix}.$$

che dipendono dal parametro h.

1. Determinare per quali valori di h esiste un'unica funzione lineare $f_h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che
$$f_h(v_1) = w_1, \qquad f_h(v_2) = w_2, \qquad f_h(v_3) = w_3.$$
Stabilire poi per quali valori di h f_h è suriettiva.
2. Scrivere la matrice rappresentativa di f_{-1} rispetto alla base canonica e stabilire se f_{-1} è invertibile.
3. Determinare dimensione e una base dei sottospazi $\ker(f_0)$ e $\mathrm{im}(f_0)$.

1. Esiste un'unica funzione f_h quando $B := \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base. Poichè

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ h+1 & 2h & h \\ h & h+1 & h+1 \end{vmatrix} = 2h+1$$

questo accade quando $h \neq -1/2$. In modo simile, f_h è suriettiva quando $C := \{w_1, w_2, w_3\}$ è un insieme di generatori di $\mathbf{R}^3$ e quindi quando è una base, dal momento che $\dim \mathbf{R}^3 = 3$. Anche in questo caso, il fatto che

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ h & 1 & h-1 \\ 0 & h & h \end{vmatrix} = 2h - 2h^2$$

mostra che f_h è suriettiva quando $h \neq 0, 1$. **2.** Dal calcolo appena fatto consegue che f_{-1} è suriettiva; dal momento che dominio e codominio hanno la stessa dimensione finita f_{-1} è anche invertibile. La sua matrice rappresentativa rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica E nel codominio è

$$C_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice di passaggio dalla base canonica alla base B nel dominio è B_{-1} e quindi la matrice che rappresenta f_{-1} rispetto alle basi canoniche è

$$M = C_{-1}B_{-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Un insieme di generatori per $\operatorname{im}(f_0)$ è C_0; se riduciamo a scala troviamo che

$$C_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim \operatorname{im}(f_0) = 2$ e le prime due colonne, che sono i vettori w_1 e w_2, sono una base dell'immagine. Dal teorema di rango più nullità abbiamo che $\dim \ker(f_0) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \operatorname{im}(f_0) = 3 - 2 = 1$. I vettori del nucleo sono le soluzioni del sistema omogeneo $C_0 x = 0$; dalla riduzione a scala precedente si trova che si tratta dei vettori cha hanno coordinate rispetto a B multiple di $(1, -1, -1)^{\mathsf{t}}$; quindi una base di $\ker(f_0)$ è il vettore

$$v = v_1 - v_2 - v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 14 Gennaio 2019

Seconda prova in itinere

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla formula

$$f((x, y, z)^{\mathrm{t}}) = (x + hy + hz, 2y, x + hy + 2z)^{\mathrm{t}}.$$

1. Stabilire per quali valori del parametro $h \in \mathbf{R}$ l'endomorfismo è diagonalizzabile su $\mathbf{R}$.
2. Per $h = 6$, calcolare una base B di autovettori per f e scrivere la matrice rappresentativa f rispetto a B.
3. Per $h = 0$, detta M la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica, stabilire se M è simile alla matrice

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Poiché la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & h & h \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & h & 2 \end{pmatrix},$$

il polinomio caratteristico di f è

$$p(x) = \det(M - xI) = (2 - x)((2 - h) - 3x + x^2)$$

e ammette sempre $x_1 = 2$ come zero. Il fattore quadratico ha discriminante $D = 1 + 4h$; quindi si spezza su **R** solo quando e $h \geq -{}^1/_4$ e in questo caso i suoi zeri sono

$$x_{2,3} = \tfrac{1}{2}\left(3 \pm \sqrt{1 + 4h}\right).$$

Abbiamo i casi seguenti:

1. Se $h < -{}^1/_4$, p non si spezza su **R** e f non è diagonalizzabile.
2. Se $h = -{}^1/_4$ abbiamo l'autovalore semplice $x_1 = 2$ e l'autovalore doppio $x_2 = x_3 = {}^3/_2$. Dalla riduzione a scala

$$M - \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^1/_4 & -{}^1/_4 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 \\ 1 & -{}^1/_4 & {}^1/_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -{}^1/_2 & -{}^1/_4 & -{}^1/_4 \\ 0 & {}^1/_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $g_{3/2} = 3 - \mathrm{rk}(M - {}^3/_2 I) = 3 - 2 = 1$; l'autovalore ${}^3/_2$ non è regolare e f non è diagonalizzabile.
3. Se $-{}^1/_4 < h < 0$ abbiamo tre autovalori semplici $x_2 < x_3 < 2 = x_1$, quindi f è diagonalizzabile.
4. Se $h = 0$ abbiamo l'autovalore semplice $x_2 = 1$ e l'autovalore doppio $x_3 = x_1 = 2$. Dalla riduzione a scala

$$M - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $g_2 = 3 - \mathrm{rk}(M - 2I) = 3 - 1 = 2$, l'autovalore 2 è regolare e f è diagonalizzabile.

5. Se $h > 0$ abbiamo tre autovalori semplici $x_2 < 2 < x_3$ e f è diagonalizzabile.

2. Per $h = 6$ abbiamo tre autovalori semplici, $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$. Gli autospazi corrispondenti sono

$$E_{-1} = \ker(M + I) = \ker\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$E_2 = \ker(M - 2I) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -1 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$E_4 = \ker(M - 4I) = \ker\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} -3 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle.$$

I tre generatori degli autospazi sono una base B di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f e la matrice rappresentativa di f rispetto a B è la matrice diagonale degli autovalori, che ha -1, 2 e 4 sulla diagonale.

3. Il polinomio caratteristico di N è $q = (1 - x)(2 - x)^2$. Determiniamo la molteplicità geometrica dell'autovalore doppio $x = 2$. Abbiamo

$$N - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi $g_2 = 1$ e N non è diagonalizzabile. Abbiamo invece visto che M è diagonalizzabile per $h = 0$, quindi M e N non sono simili.

2

In $\mathbf{R}^2$ si consideri il fascio di coniche di equazione

$$\Gamma : x^2 + 2hxy + hy^2 + 4x + 2hy = 0.$$

1. Classificare Γ al variare di $h \in \mathbf{R}$.
2. Verificare che per $h = 1$ la Γ ammette un solo asse di simmetria e calcolare l'angolo tra l'asse di Γ e l'asse delle ascisse.
3. Verificare che per $h = -1$ Γ ha due vertici (reali) e calcolare l'eventuale centro di simmetria di Γ.

1. La matrice completa della conica del fascio è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ h & h & h \\ 2 & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Una riduzione a scala simmetrica di A e $\bar{A}$ mostra che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h \\ h & h \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h - h^2 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & h & 2 \\ h & h & h \\ 2 & h & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h - h^2 & -h \\ 0 & -h & -4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -h \\ 0 & -h & h - h^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4h - 3h^2}{4} \end{pmatrix}$$

I valori critici per i ranghi delle due forme quadratiche si hanno per $h = 0, 1, {}^4/_3$; si osservi anche che due valori sulla diagonale della riduzione di $\bar{A}$ hanno segno opposto, quindi $\bar{A}$ è sempre indefinita. Abbiamo allora i casi seguenti:

2. Per $h = 1$ Γ è una parabola e la direzione dell'asse è quella dell'autospazio relativo all'autovalore nullo:

$$E_0 = \ker(A) = \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Dunque l'asse ha la direzione del vettore $v = (1, -1)^{\mathrm{t}}$; dal momento che l'asse x ha la direzione di $e_1 = (1, 0)$, abbiamo che

	r	$\bar{r}$	A	Γ
$h < 0$	2	3	indefinita	iperbole
$h = 0$	1	2	semidefinita	rette parallele reali
$0 < h < 1$	2	3	definita	ellisse a punti reali
$h = 1$	1	3	semidefinita	parabola
$1 \le h \le {}^4\!/_3$	2	3	indefinita	iperbole
$h = {}^4\!/_3$	2	2	indefinita	rette incidenti reali
$h > {}^4\!/_3$	2	3	indefinita	iperbole

$$\cos\vartheta = \frac{v \cdot e_1}{\|v\|\,\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

e quindi $\vartheta = {}^\pi\!/_4$.

3. Per $h = -1$ Γ è un'iperbole quindi ha solo due vertici, ottenuti intersecondo Γ con l'asse trasverso. Il centro si trova risolvendo il sistema lineare $Ax + b = 0$; abbiamo

$$(A|-b) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{array}\right)$$

e quindi il centro è il punto $Z = (-{}^3\!/_2, {}^1\!/_2)$. (Gli autovalori di A sono $\pm\sqrt{2}$ e la direzione dell'asse trasverso è quella di $E_{\sqrt{2}} = \left\langle (1, 1-\sqrt{2})^{\mathsf{t}} \right\rangle$.)

3

In $\mathbf{R}^3$ si consideri la retta $s : x = y + z = 0$.

1. Sia H il piano ortogonale ad s e passante per l'origine. Scrivere una base ortonormale di H.
2. Sia r la retta parallela ad s e passante per $Q = (1, 0, 0)$. Determinare il luogo Q dei punti di $\mathbf{R}^3$ a distanza 1 da r e verificare che Q è una quadrica di rotazione.
3. Posto $\Gamma = Q \cap H$, calcolare l'equazione del cilindro Z con curva direttrice Γ e generatrici parallele all'asse y.

1. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

si osservi che $s = \ker A$; dunque $H = s^\perp = \ker(A)^\perp = \mathrm{Row}(A)$. Le righe di A sono già ortogonali, quindi una base ortonormale $\{b_1, b_2\}$ di H si ottiene normalizzando le righe di A:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. La direzione di s è il vettore $v = (0, 1, -1)^{\mathsf{t}}$, soluzione del sistema $Ax = 0$; quindi se $P = (x, y, z)$ e $w = P - Q = (x-1, y, z)^{\mathsf{t}}$, le componenti di w nella direzione di v e nella direzione ortogonale sono

$$w_1 = \frac{v \cdot w}{\|v\|^2} v = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ y - z \\ z - y \end{pmatrix} \qquad w_2 = w - w_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ y + z \\ y + z \end{pmatrix}$$

I punti di Q sono quelli per cui $\|w_2\| = 1$ o, in forma equivalente, per cui $\|w_2\|^2 = 1$; si ottiene l'equazione

$$Q : 2x^2 + y^2 + z^2 + 2yz - 4x = 0$$

che ha matrice completa e riduzione a scala simmetrica (senza scambio di righe)

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Quindi $r = 2 < 3 = \bar{r}$ e Q è un cilindro; A è semidefinita e $\bar{A}$ indefinita quindi si tratta di un cilindro ellittico a punti reali; infine A ammette $x = 2$ come unico autovalore non nullo doppio; quindi Q è un cilindro circolare ed è di rotazione.

3. Se $A = (a, b, c)$ è un generico punto di Γ, il cilindro Z è formato dai punti delle rette passanti per A con direzione $e_2 = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$. Poiché H è il piano per l'origine con direzione normale v, la sua equazione è $y - z = 0$; A deve appartenere sia ad H che a Q, quindi i punti di Z soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} x = a \\ y = b + t \\ z = c \\ b - c = 0 \\ 2a^2 + b^2 + c^2 + 2bc - 4a = 0. \end{cases}$$

Eliminando i parametri a, b, c e t dalle prime quattro equazioni si ottiene

$$Z : x^2 + 2z^2 - 2x = 0.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 4 Febbraio 2019

Primo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Si consideri la seguente matrice a coefficienti reali, in cui k è un parametro.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & 2 & k \\ -1 & k & 3 \end{pmatrix}$$

1. Determinare il rango di A al variare di k.
2. Determinare, al variare di k, il numero di soluzioni del sistema $Ax = b$, dove $b = (0, 1, 1)^{\mathsf{t}}$.
3. Trovare i valori di k per cui A è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori calcolare una base ortonormale di autovettori.

1 e 2. $\det(A) = 16 - 4k^2$, quindi per $k \neq \pm 2$ abbiamo $r = 3$; il sistema $Ax = b$ è crameriano e ammette una sola soluzione. Per $k = \pm 2$ riduciamo a scala le matrici complete del sistema:

$$(A|b)[2/k] \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad (A|b)[-2/k] \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Per $k = 2$ abbiamo $r = 2 = r'$ e il sistema ha ∞^1 soluzioni; per $k = -2$ abbiamo $r = 2 < 3 = r'$ e il sistema non ha soluzioni. **3.** A è ortogonalmente diagonalizzabile se e solo se è simmetrica; la condizione $a_{12} = a_{21}$ mostra che questo accade solo quando $k = 0$. Per questo valore di k il polinomio caratteristico di A è

$$p = 16 - 20x + 8x^2 - x^3 = (2 - x)^2(4 - x).$$

Determiniamo gli autospazi:

$$E_2 = \ker(A - 2I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E_4 = \ker(A - 4I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

I vettori trovati sono già ortogonali, quindi è sufficiente normalizzare i vettori:

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)^{\mathsf{t}}, \quad q_2 = (0, 1, 0)^{\mathsf{t}}, \quad q_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^{\mathsf{t}}.$$

2

Si considerino le rette di $\mathbf{R}^3$

$$r: \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = v \\ y = v \\ z = 0. \end{cases}$$

1. Verificare che r e s sono incidenti, trovarne il punto P di intersezione e l'equazione del piano H che le contiene.
2. Scrivere l'equazione del luogo $Q = \{X \in \mathbf{R}^3 : d(X,r)^2 = 4d(X,s)^2\}$.
3. Verificato che Q è una quadrica, riconoscerla e stabilire se $P \in Q$.

1. Uguagliando le coordinate corrispondenti

$$\begin{cases} u = v \\ 1 = v \\ 0 = 0 \end{cases}$$

troviamo $u = v = 1$; sostituendo questo valore del parametro in una delle due rette si trova il punto di intersezione $P = (1,1,0)$. I vettori direzione delle rette sono $v_r = (1,0,0)^{\mathsf{t}}$ e $v_s = (1,1,0)^{\mathsf{t}}$; quindi un vettore normale ad H è $n = v_r \wedge v_s = e_3$. L'equazione di H è allora $n \cdot (X - P) = 0$ e cioè $z = 0$. **2.** Osservato che $X - P = (x-1, y-1, z)^{\mathsf{t}}$ e

$$v_r \wedge (X - P) = (0, -z, y-1)^{\mathsf{t}}, \qquad v_s \wedge (X - P) = (z, -z, y-x)^{\mathsf{t}},$$

dalla formula della distanza punto-retta abbiamo

$$\begin{aligned} X \in Q &\Leftrightarrow \frac{(v_r \wedge (X-P))^2}{v_r^2} = 4\frac{(v_s \wedge (X-P))^2}{v_s^2} \\ &\Leftrightarrow (y-1)^2 + z^2 = 2(2z^2 + (y-x)^2) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 4xy + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

3. Il fatto che l'ultima equazione sia un polinomio quadratico è sufficiente a provare che Q è una quadrica. La matrice completa di Q e una sua riduzione a scala simmetrica sono

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

poiché $r = 3 = r'$ e $p = \bar{p} = 1$, Q è un cono a punti reali. $P \in Q$ perché ha distanza zero da entrambe le rette, dal momento che ne è l'intersezione.

3

In $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottospazi $U = \{x \in \mathbf{R}^4 : 2x_1 - x_2 + x_4 = 0\}$ e

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Trovare dimensioni e basi di U e V, ed equazioni cartesiane di V.
2. Calcolare le dimensioni di $U \cap V$ e $U + V$.
3. Scrivere la matrice di proiezione ortogonale su $U \cap V$.

1. Risolvendo il sistema lineare costituito dall'unica equazione che definisce U troviamo come soluzioni i vettori della forma $x = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$, dove

$$u_1 = (1,2,0,0)^{\mathsf{t}}, \quad u_2 = (0,0,1,0)^{\mathsf{t}}, \quad u_3 = (-1,0,0,2)^{\mathsf{t}}.$$

Quindi $\dim(U) = 3$ e gli u_i sono una base di U. Se riduciamo a scala la matrice dei generatori di V insieme a un vettore incognito x troviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & -1 & x_4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & x_1 \\ 0 & -3 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 + x_2 - 2x_1 \end{array}\right)$$

dunque $\dim(V) = 2$, una base di V è data dai vettori

$$v_1 = (1, 2, 0, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (2, 1, 0, 3)^{\mathsf{t}}$$

e una serie di equazioni cartesiane per V sono

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

2. Riducendo a scala la matrice le cui colonne sono l'unione delle basi di U e V si ottiene

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dunque $\dim(U + V) 0 \operatorname{rk}(C) = 4$ e dalla formula di Grassmann si ottiene che

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U + V) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

3. Il vettore $w := u_1 = v_1$ è comune ai due sottospazi, dunque appartiene all'intersezione; poicé questa ha dimensione uno e il vettore non è nullo, è una base dell'intersezione; è anche una base ortogonale, quindi la proiezione cercata è

$$P = \frac{ww^{\mathsf{t}}}{w^{\mathsf{t}}w} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 14 Giugno 2019

Secondo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

sia f l'endomorfismo di $\mathbf{R}^3$ definito dalle formule

$$f(v_1) = 3v_1 - 3v_2 + 6v_3, \qquad f(v_2) = v_1 - v_2 + 6v_3, \qquad f(v_3) = -v_2 + 5v_3.$$

1. Dopo aver verificato che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbf{R}^3$, determinare la matrice rappresentativa di f rispetto a B.
2. Determinare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
3. Calcolare autovalori e autospazi di f. Stabilire se f è diagonalizzabile.

1. La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono i vettori v_i ha $\det B = 1$; quindi $\mathrm{rk}(B) = 3 = \dim \mathbf{R}^3$ e $\mathcal{B}$ è una base di $\mathbf{R}^3$. La matrice rappresentativa di f rispetto a $\mathcal{B}$ ha nelle colonne le coordinate dei vettori $f(v_i)$ rispetto ai vettori di $\mathcal{B}$, quindi è

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. La matrice rappresentativa fi f rispetto alla base canonica si ottiene dalla formula del cambiamento di base:

$$N = BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Il polinomio caratteristico di f è

$$p(x) = \det(N - xI) = 12 - 16x + 7x^2 - x^3 = (3 - x)(2 - x)^2$$

e si spezza su **R**. L'autovalore $x = 3$ è regolare perché $a_3 = 1$. Per l'altro autovalore $x = 2$ abbiamo

$$N - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

quindi $g_2 = r - \mathrm{rk}(N - 2I) = 3 - 2 = 1 < 2 = a_2$, l'autovalore non è regolare e la matrice non è diagonalizzabile. Gli autospazi sono

$$V_3 = \ker(N-3I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle, \qquad V_2 = \ker(N-2I) \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

2

Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla formula $f(x) = Ax$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

e siano $W = \operatorname{im} f = \operatorname{Col}(A)$ e $U = \ker f = \ker A$.

1. Determinare le dimensioni di W e di U.
2. Determinare le dimensioni di $W + U$ e di $W \cap U$.
3. Determinare una base ortogonale di W e la proiezione ortogonale di $v = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}}$ su W; scrivere una base ortogonale di $W + U$.

1. Dalla riduzione a scala

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $\dim W = \operatorname{rk} A = 2$ e $\dim U = 4 - \operatorname{rk} A = 2$. **2.** I pivot della riduzione a scala sono nelle prime due colonne; quindi le prime due colonne di A sono una base di W; le scriviamo nelle prime due colonne della matrice B seguente. Possiamo usare la riduzione a scala anche per risolvere il sistema lineare $Ax = 0$; si trova che una base di U è data dalle ultime due colonne di B. Le colonne di B sono dei generatori di $W + U$.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla riduzione a scala abbiamo che $\dim(W+U) = \operatorname{rk}(B) = 3$ e dalla formula di Grassmann $\dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W+U) = 2 + 2 - 3 = 1$. **3.** Abbiamo già osservato che le prime due colonne $\{a_1, a_2\}$ di A sono una base di W; poiché $a_1 \cdot a_2 = 0$, sono già una base ortogonale. Possiamo usare questa base per calcolare la proiezione di v su W:

$$p(v) = \sum_{i=1}^{2} \frac{a_i \cdot v}{a_i \cdot a_i} a_i = \frac{2}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Una base di $W+U$ è data dalle prime tre colonne di B, quelle corrispondenti ai pivot. Le prime due sono già ortogonali, quindi basta usare l'algoritmo di Gram-Schmidt per ortogonalizzare la terza; si trova

$$q_1 = b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_3 = b_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{b_3 \cdot q_i}{q_i \cdot q_i} q_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino le rette r e s di equazioni parametriche

$$r:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}k\\k\\k-1\end{pmatrix}\qquad s:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}k\\1\\k-1\end{pmatrix}$$

dove k è un parametro reale. Si consideri poi la quadrica

$$Q: 5x^2+3y^2-4yz+4y=0.$$

1. Determinare la posizione reciproca delle due rette r e s al variare del parametro reale k.
2. Riconoscere la quadrica Q e determinarne l'eventuale centro.
3. Verificato che per $k=0$ le due rette r e s sono complanari, trovare l'equazione del piano H a cui appartengono. Classificare la conica ottenuta intersecando la quadrica Q con il piano H.

1. Se $r: X=A+tv$ e $s: X=B+tw$, posto $u=B-A$, abbiamo che

$$u\cdot(v\wedge w)=\begin{vmatrix}0&k&k\\0&k&1\\-1&k-1&k-1\end{vmatrix}=k^2-k.$$

Per $k\neq 0,1$ il prodotto misto è diverso da zero e le rette sono sghembe, per $k=0,1$ è nullo e le rette sono complanari. In particolare, per $k=0$ i vettori $v=(0,0,-1)^{\mathsf t}$ e $w=(0,1,-1)^{\mathsf t}$ non sono proporzionali, quindi r e s sono incidenti. Se $k=1$ allora $v=(1,1,0)^{\mathsf t}=w$ e le rette sono parallele; poiché $B-A=(0,0,-1)^{\mathsf t}$ non è proporzionale a $v=w$, r e s sono parallele in senso proprio. **2.** Se facciamo una riduzione a scala simmetrica della matrice della quadrica troviamo

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&3&-2&2\\0&-2&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}5&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&-4/3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

quindi $r=3=\bar{r}$ e Q è un cono; poiché A è indefinita, il cono è a punti reali. Risolvendo il sistema $Ax+b=0$ si trova il vertice del cono $V=(0,0,1)$. **3.** Per $k=0$ la direzione normale ad H è quella del vettore $n=v\wedge w=(1,0,0)^{\mathsf t}$ e poiché H passa per B una sua equazione cartesiana è $n\cdot(X-B)=0$ e cioè $x-1=0$. Intersecando Q con H troviamo la conica

$$\begin{cases}x=1\\3y^2-4yz+4y+5=0\end{cases}$$

cha ha la stessa natura della conica $C: 3y^2-4yz+4y+5=0$ sul piano coordinato $x=0$. Una riduzione a scala simmetrica della matrice completa di C

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\-2&0&0\\2&0&5\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3&0&0\\0&-4/3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

mostra che $r=2<3=\bar{r}$ e che A è indefinita, quindi C è un'iperbole.

Geometria e algebra lineare (082747), 3 Luglio 2019

Terzo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & k \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in cui k è un parametro.

1. Calcolare $\operatorname{rk}(A)$ al variare di k.
2. Determinare una base B del sottospazio $U \subseteq \mathbf{R}^4$ generato dai vettori

$$u_1 = (1,1,0,0)^{\mathsf{t}}, \qquad u_2 = (0,0,1,1)^{\mathsf{t}}, \qquad u_3 = (1,1,1,1))^{\mathsf{t}}.$$

   Per $k = 1$ calcolare una base C dell'immagine $A(U) \subseteq \mathbf{R}^3$ di U nella funzione lineare indotta da A.
3. Per $k = 0$, scrivere la matrice $B := A^{\mathsf{t}} A$, stabilire se B è diagonalizzabile e verificare che 0 è un suo autovalore.

1. Il minore del terz'ordine ottenuto da A eliminando la seconda colonna vale

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & k \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

indipendente da k, quindi A ha sempre rango almeno tre. Ma ha soltanto tre righe, quindi $\operatorname{rk}(A) = 3$ per tutti i k. **2.** Se riduciamo a scala la matrice M che ha nelle colonne i generatori di U troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

dunque $\dim U = \operatorname{rk} M = 2$. $A(U)$ è generata dai vettori Au_i; piuttosto che calcolare individualmente questi vettori, possiamo ottenerli simultaneamente moltiplicando A per la matrice M e calcolare il rango della matrice ottenuta; piuttosto che M possiamo utilizzare la matrice N formata solo dalle prime due colonne, perché abbiamo già visto che la terza colonna è linearmente dipendente rispetto alle prime due, quindi anche la sua immagine sarà dipendente dalle immagini delle altre colonne:

$$AN = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice ottenuta ha rango due, quindi $\dim A(U) = 2$. **3.** Si osservi che B è simmetrica perché

$$B^{\mathsf{t}} = (A^{\mathsf{t}} A)^{\mathsf{t}} = A^{\mathsf{t}} A^{\mathsf{tt}} = A^{\mathsf{t}} A = B$$

quindi è diagonalizzabile per il teorema spettrale. Sappiamo poi che A ha sempre rango 3, quindi esiste un vettore non nullo v tale che $Av = 0$. Ma allora

$$Bv = A^{\mathrm{t}} A v = A^{\mathrm{t}} 0 = 0$$

quindi $v \in \ker(A)$ è un autovettore relativo all'autovalore 0.

2

Dati i vettori

$$u = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}, \qquad v = (1, 0, 0)^{\mathrm{t}}$$

di $\mathbf{R}^3$, sia U il sottospazio generato da u e V quello generato da v.

1. Scrivere la matrice P della proiezione ortogonale su U e la matrice Q della proiezione su V.
2. Posto $R = P + Q$, mostrare che $\mathrm{Col}(R) = U + V$ e che $\ker(R) = U^{\perp} \cap V^{\perp}$ (che coincide con $(U + V)^{\perp}$).
3. R è la proiezione ortogonale su $U + V$?

1. I vettori u e v sono basi ortogonali di U e V rispettivamente, quindi le proiezioni sono

$$P = \frac{uu^{\mathrm{t}}}{u^{\mathrm{t}}u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q = \frac{vv^{\mathrm{t}}}{v^{\mathrm{t}}v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Abbiamo

$$R = P + Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

I generatori dello spazio colonna di R sono, a meno di multipli, le colonne di P; quelli di $U + V$ sono l'unione dei generatori di U e V. La riduzione a scala della matrice ottenuta accostando i generatori di $\mathrm{Col}(R)$ e quelli di $U + V$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra anzitutto che le prime colonne sono una base di $\mathrm{Col}(R)$ e dunque che $\dim \mathrm{Col}(R) = 2$; il fatto che le ultime due colonne siano dipendenti mostra che $U + V \subseteq \mathrm{Col}(R)$; ma anche $\dim U + V = 2$ perché i suoi generatori non sono multipli, quindi sono linearmente indipendenti; quindi $U + V = \mathrm{Col}(R)$. Ora si osservi che R è simmetrica; dunque $\mathrm{Col}(R) = \mathrm{Row}(R)$ e

$$U^{\perp} \cap V^{\perp} = (U + V)^{\perp} = \mathrm{Col}(R)^{\perp} = \mathrm{Row}(R)^{\perp} = \ker(R).$$

3. No. Se lo fosse, dovrebbe lasciare invariati tutti i vettori di $U + V$; ma

$$Ru = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq u.$$

3

In $\mathbf{R}^2$, si consideri il fascio di coniche

$$C_k : (k-1)x^2 + 4kxy + (k-1)y^2 - 6k + 2 = 0$$

dipendente dal parametro k.

1. Classificare C_k al variare di k.
2. Verificare che esistono esattamente due valori di k per cui C_k è degenere. Fattorizzare le equazioni delle due coniche degeneri, così da individuare le rette che le costituiscono.
3. Verificare che C_1 è un'iperbole e calcolarne gli asintoti. Scrivere quindi l'equazione della superficie S ottenuta dalla rotazione in $\mathbf{R}^3$ di C_1 rispetto ad un asintoto.

1. La matrice completa di C_k è

$$\begin{pmatrix} k-1 & 2k & 0 \\ 2k & k-1 & 0 \\ 0 & 0 & -6k+2 \end{pmatrix}$$

e gli invarianti ortogonali, calcolati da questa matrice, sono:

$$I_1 = 2(k-1), \qquad I_2 = (1+k)(1-3k), \qquad I_3 = 2(1+k)(1-3k)^2.$$

Abbiamo allora i casi seguenti:

1. Se $k < -1$, allora $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$ e C_k è un'iperbole.
2. Se $k = -1$, allora $I_2 = I_3 = 0$, $r = 1 < 2 = \bar{r}$, $\bar{A}$ è indefinita e C_k è spezzata in due rette parallele reali.
3. Se $-1 < k < 1/3$ allora $I_2 > 0$ e $I_1 I_3 < 0$, quindi C_k è un'ellisse reale.
4. Se $k = 1/3$ allora $I_2 = I_3 = 0$ e $r = 1 = \bar{r}$, quindi C è spezzata in una retta doppia.
5. Se $k > 1/3$ allora $I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$ e C_k è un'iperbole.

2. Abbiamo appena osservato che C_k si spezza quando $k = -1, 1/3$. Per questi valori abbiamo

$$\begin{aligned} p{-1} &= -2x^2 - 4xy - 2y^2 + 8 = 2(x+y-2)(x+y+2), \\ p_{1/3} &= -\tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}xy - \tfrac{2}{3}y^2 = \tfrac{2}{3}(x-y)^2. \end{aligned}$$

3. Per $k1$ abbiamo

$$C : 4xy - 4 = 0$$

e abbiamo già osservato in 1 che si tratta di un'iperbole. Il fatto che $I_1 = 0$ implica che questa iperbole sia equilatera. Gli asintoti si ottengono annullando la parte quadratica: si ottiene $xy = 0$ che rappresenta gli assi cartesiani. Per ruotare C intorno all'asse x consideriamo il sistema

$$\begin{cases} ab - 1 = 0 \\ c = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \\ x - a = 0 \end{cases}$$

in cui le prime due equazioni rappresesentano l'iperbole come curva nello spazio e le ultime due la circonferenza intono all'asse x passante per un punto dell'iperbole. Eliminando dalle quattro equazioni i parametri a, b e c si ottiene l'equazione della superficie:

$$S : x^2(y^2 + z^2) - 1 = 0$$

Geometria e algebra lineare (082747), 2 Settembre 2019

Quarto appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui forgni a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati.

1

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla formula

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + (k+2)z \\ kx - ky \\ x + ky + 2z \end{pmatrix}$$

in cui k è un parametro.

1. Determinare $\dim \operatorname{im}(f)$ e $\dim \ker(f)$ al variare di k.
2. Stabilire se esiste una base di autovettori di f quando $k = 0$.
3. Posto $k = -3$, stabilire per quali valori di h il vettore $v = (1, 0, h)^{\mathrm{t}}$ appartiene a $\operatorname{im}(f)$.

1. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica e una sua riduzione a scala in $\mathbf{R}(k)$ sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ k & -k & 0 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+2 \\ 0 & -k & -k(k+2) \\ 0 & 0 & -k(k+3) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Dal teorema di rango più nullità abbiamo

$$\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 2 & \text{se } k = -3 \\ 3 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad \dim \ker(f) = 3 - \operatorname{rk}(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } k = 0 \\ 1 & \text{se } k = -3 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2}$$

2. Per $k = 0$ abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Sappiamo da 1 che $g_0 = \dim \ker(A) = 2$, quindi $a_0 \geq 2$; ma la somma degli autovalori è $\operatorname{tr}(A) = 3$, quindi $a_0 = 2$, $x = 0$ è autovalore regolare e il terzo autovalore è $x = 3$ semplice, quindi pure regolare. Di conseguenza A e quindi f è diagonalizzabile quando $k = 0$. **3.** Basta osservare che $v \in \operatorname{im}(f)$ se e soltanto se $v \in \operatorname{Col}(A)$ e cioè se $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A|v)$. Dalla riduzione a scala

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & h \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h+2 \end{array}\right) \tag{4}$$

si vede che quest accade solo quando $h = -2$.

2

Si considerino i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle .$$

1. Determinare la dimensione e una base di U.
2. Scrivere equazioni cartesiane di V e determinare una sua base ortonormale.
3. Determinare dimensione e una base di $U \cap V$.

1. Dalla riduzione a scala della matrice dei coefficienti, seguita dalla riduzione di Gauss-Jordan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

abbiamo che le soluzioni del sistema sono i vettori $x = t(1,1,1,1)^{\mathrm{t}}$. Quindi una base di U è il vettore $v_1 = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}}$ e $\dim U = 1$. **2.** Posto $v_2 = (0,0,1,0)^{\mathrm{t}}$ abbiamo che $x \in V$ quando $x \in \mathrm{Col}(v_1, v_2)$ e cioè quando $\mathrm{rk}(v_1, v_2) = \mathrm{rk}(v_1, v_2, v_3)$. Dalla riduzione a scala

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \tag{6}$$

si ottiene che questo accade quando sono soddisfatte le condizioni

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \end{cases} \tag{7}$$

e questo è un insieme di equazioni cartesiane per V. Per determinare una base ortogonale, piuttosto che utilizzare Gram-Schmidt, conviene cercare un vettore di V ortogonale a v_2 aggiungendo alle equazioni (7) la condizione $x_3 = 0$; si trovano i vettori $t(1,1,0,1)^{\mathrm{t}}$. Se prendiamo $t = 1$ e normalizziamo abbiamo la base ortonormale

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

3. Abbiamo visto che $U = \langle v_1 \rangle \subseteq \langle v_1, v_2 \rangle = V$. Quindi $U \cap V = U$ e una base è data dal vettore v_1.

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino il punto $P = (2,0,1)$ e il piano $H : x + y + z = 0$.

1. Scrivere equazioni cartesiane della retta r passante per P e ortogonale ad H.
2. Determinare le coordinate del punto Q in cui r interseca H e calcolare la distanza d di Q dal piano $x = 0$.
3. Scrivere un'equazione cartesiana del luogo L dei punti dello spazio che hanno distanza d da r e dimostrare che si tratta di una quadrica di rotazione.

1. La direzione di r, che è quella della normale ad H, è quella del vettore $n = (1,1,1)$ dei coefficienti delle incognite di H. Quindi un'equazione parametrica di r è

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 1 + t. \end{cases} \tag{9}$$

Se eliminiamo il parametro t da queste equazioni, ad esempio sostituendo dalla seconda nelle altre equazioni, troviamo equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x-y-2=0 \\ y-z+1=0. \end{cases} \tag{10}$$

2. Poiché $Q = r \cap H$ basta risolvere il sistema ottenuto aggiungendo alle equazioni di r quella di H. Qui conviene utilizzare l'equazione parametrica (9) di r, sostituire nell'equazione di H e ottenere la risolvente nel parametro $(2+t)+t+(1+t)=0$ che ammette come unica solzione $t=-1$; sostituendo questo valore nella (9) troviamo $Q=(1,-1,0)$. La distanza di un punto dal piano coordiato $x=0$ è il valore assoluto della sua ascissa; nel nostro caso $d=1$. **3.** La distanza di un punto X da r è misurata sul piano K passante per X e normale a r; se questa distanza deve essere $d=1$, allora $L \cap K$ deve essere una circonferenza di raggio 1 e L è un cilindro, che è una quadrica di rotazione. Dalla formula per la distanza punto-retta abbiamo che, per un generico punto X

$$d(X.r)=1 \Leftrightarrow \frac{\|n \wedge (X-P)\|}{\|n\|}=1 \Leftrightarrow \|n \wedge (X-P)\| = \|n\| \Leftrightarrow \|n \wedge (X-P)\|^2 = \|n\|^2 . \tag{11}$$

Poiché

$$n \wedge (X-P) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x-2 & y & z-1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -y+z-1 \\ x-z-1 \\ -x+y+2 \end{pmatrix} \tag{12}$$

sostituendo nella (11) troviamo l'equazione di L

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz-6x+6y+3=0. \tag{13}$$

Il fatto che l'equazione sia quadratica prova che L è una quadrica. Possiamo verificare che L è un cilindro, oltre che con l'osservazione fatta sopra, calcolando la sua matrice completa:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Si trova $r=2<3=\bar{r}$ e dalla riduzione simmetrica sopra abbiamo che A è semidefinita positiva e $\bar{A}$ indefinita, quindi L è un cilindro ellittico reale. Gli autovalori positivi di A coincidono e sono entrambi uguali a 3 quindi L è di rotazione e le sezioni trasversali sono circonferenze.

Geometria e algebra lineare (082747), 6 Novembre 2019

Prima prova in itinere

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

In $\mathbf{R}^3$ si considerino le rette

$$r_1 : \begin{cases} x = s \\ y = s \\ z = 1 + s \end{cases} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

1. Stabilire se le rette sono incidenti, parallele o sghembe.
2. Trovare un'equazione cartesiana del piano H che contiene r_1 ed è parallelo a r_2.

1. La retta r_1 passa per il punto $P = (0, 0, 1)^{\mathrm{t}}$ e ha la direzione del vettore $v = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$; r_2 passa per $Q = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ e ha la direzione di $w = (1, 0, -1)^{\mathrm{t}}$. Posto $u := Q - P = (1, 1, 0)^{\mathrm{t}}$, abbiamo che

$$u \cdot (v \wedge w) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \tag{1}$$

dunque r_1 e r_2 sono sghembe. **2.** H è parallelo sia a r_1 che a r_2, quindi la sua direzione normale è ortogonale a quella delle due rette ed è quindi quella del vettore $n = v \wedge w = (-1, 2, -1)^{\mathrm{t}}$. Ma H contiene r_1, quindi passa per P. Una sua equazione cartesiana è allora $n \cdot (X - P) = 0$ che espansa e moltiplicata per -1 diventa

$$x - 2y + z - 1 = 0.$$

2

In $\mathbf{R}^4$ si considerino i sottospazi

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Determinare la dimensione e una base di U.
2. Determinare la dimensione di V ed estendere una sua base ad una base dell'intero spazio $\mathbf{R}^4$.
3. Determinare la dimensione e una base di $U + V$.

1. U è il nucleo della matrice A dei coefficienti del sistema; dalla riduzione a scala

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

consegue che $\dim U = \dim \ker A = 4 - \mathrm{rk}(A) = 4 - 2 = 2$. Per sostituzione retrograda si trova che le soluzioni sono i vettori

$$x = s\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\1\end{pmatrix}$$

quindi una base di U è data dai vettori

$$u_1 = (1,-1,1,0)^{\mathrm{t}}, \qquad u_2 = (-4,1,0,1)^{\mathrm{t}}.$$

2 e **3.** Se si riduce a scala la matrice ottenuta accostando ai generatori di V—che sono stati permutati per semplificare il calcolo—i genertori di U si trova

$$\begin{pmatrix}1&0&-3&1&-4\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&1&0&1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1&0&-3&1&-4\\0&1&0&-1&1\\0&0&1&1&0\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

I pivot nelle prime tre colonne indicano che i generatori di V, i vettori $v_1 = (-3,0,1,1)^{\mathrm{t}}$, $v_2 = e_1$ e $v_3 = e_2$, sono indipendenti, quindi sono una base B di V e $\dim V = 3$. Il pivot nella quarta colonna indica che u_1 è indipendente rispetto a B e che $\dim(U+V) = 4$ con base $C = B \cup \{u_1\}$. Ma allora $U+V = \mathbf{R}^4$ e C è una base di $\mathbf{R}^4$ che estende B.

3

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix}1&0&3\\0&k&-2\\1&1&k\end{pmatrix}$$

che dipende dal parametro k.

1. Calcolare la dimensione di $\ker A$ al variare di k.
2. Stabilire per quali valori di k il vettore

$$b = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

   appartiene allo spazio delle colonne di A.
3. Sia $V = \mathbf{R}[x]_2$ lo spazio dei polinomi reali in una indeterminata di grado minore o uguale a due e sia f l'endomorfismo di V rappresentato rispetto alla base $B = \{1, x, x^2\}$ dalla matrice A con $k = 1$. Dato un generico polinomio $p = a + bx + cx^2 \in V$, calcolare l'immagine $f(p)$ e stabilire se $q = 1 + x + 2x^2$ appartiene all'immagine di f.

1 e **2.** Il vettore b appartiene a $\mathrm{Col}(A)$ quando è combinazione lineare delle colone e cioè quando il sistema lineare $Ax = b$ ha soluzione. Dalla riduzione a scala

$$[A|b] \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&k-3&1\\0&0&-(k-1)(k-2)&1-k\end{array}\right)$$

si vede che

$$\mathrm{rk}(A) = \begin{cases}2 & \text{se } k = 1,2\\ 3 & \text{altrimenti}\end{cases} \qquad \mathrm{rk}(A|b) = \begin{cases}2 & \text{se } k = 1\\ 3 & \text{altrimenti}\end{cases}$$

quindi $b \in \mathrm{Col}(A)$ per $k \neq 2$. **3.** Il polinomio p ha coordinate $v = (a,b,c)^{\mathrm{t}}$ rispetto a B, quindi le coordinate di $f(p)$ rispetto a B sono

$$Av = \begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+3c\\b-2c\\a+b+c\end{pmatrix}$$

e dunque

$$f(p) = (a + 3c) + (b - 2c)x + (a + b + bc)x^2.$$

Si è visto in 2 che $b \in \mathrm{Col}(A)$ per $k = 1$; b è il vettore delle coordinate di q rispetto a B, quindi $q \in \mathrm{im}(f)$.

Geometria e algebra lineare (082747), 15 Gennaio 2020

Seconda prova in itinere

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3t+2 & -6t \\ -1 & t & -2t+2 \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che $v = (0,2,1)^{\mathrm{t}}$ è un autovettore di A per ogni valore del parametro t e calcolare l'autovalore associato.
2. Discutere la diagonalizzabilità di A al variare di t.
3. Calcolare gli autovalori di A^2 quando $t = 1$.

1. Un calcolo diretto mostra che

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3t+2 & -6t \\ -1 & t & -2t+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v,$$

quindi v è un autovettore relativo all'autovalore 2 per ogni valore di t. **2.** Il prodotto degli autovalori è $\det(A) = 2t+4$ e la loro somma è $\operatorname{tr}(A) = t+5$; dal punto 1 sappiamo che $x_1 = 2$ è sempre un autovalore, quindi $x_2 x_3 = t+2$ e $x_2 + x_3 = t+3$ e dunque $x_2 = 1$ e $x_3 = 2+t$. Tutti gli autovalori sono reali, quindi il polinomio caratteristico si spezza su **R**. In alternativa, gli autovalori possono essere calcolati dal polinomio caratteristico. Abbiamo ora i casi seguenti.

1. Se $t \neq -1, 0$ i tre autovalori sono distinti, quindi A è diagonalizzabile.
2. Se $t = -1$ abbiamo l'autovalore $x_1 = 2$ che è semplice e quindi regolare e l'autovalore doppio $x_2 = x_3 = 1$. La prima delle due riduzioni a scala seguenti mostra che $g_1 = 3 - \operatorname{rk}(A - I) = 3 - 2 = 1 < 2 = a_1$, quindi l'autovalore 1 non è regolare e A non è diagonalizzabile.
3. Quando $t = 0$ troviamo l'autovalore $x_2 = 1$ che è semplice e quindi regolare e l'autovalore doppio $x_1 = x_3 = 2$. Dalla seconda riduzione a scala abbiamo che $g_2 = 3 - \operatorname{rk}(A - 2I) = 3 - 1 = 2 = a_1$, quindi l'autovalore 2 è regolare e A è diagonalizzabile.

$$A[-1/t] - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A[0/t] - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Se $v \in \mathbf{R}^3$ è un autovettore di A relativo all'autovalore x allora $Av = xv$, quindi

$$A^2 v = A(Av) = Axv = x(Av) = x(xv) = x^2 v$$

e v è un autovettore di A^2 relativo all'autovalore x^2. Questo prova che se x è un autovalore di A, x^2 è un autovalore di A^2. Quando $t = 1$, A ammette i tre autovalori distinti $1, 2, 3$, quindi A^2 ammette almeno $1, 4, 9$ come autovalori; ma A^2 non può avere più di tre autovalori contati con molteplicità perché ha ordine 3, quindi questi sono i suoi autovalori.

2

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ con la struttura euclidea canonica e il suo sottospazio

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Determinare la matrice P della proiezione ortogonale su U rispetto alla base canonica.
2. Determinare dimensione e una base ortogonale di $U^\perp$.
3. Provare che $B := 2P - I$ è ortogonalmente diagonalizzabile e determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di B.

1, 2. I generatori u_1 e u_2 di U indicati nel testo sono indipendenti perchè non proporzionali, ma non ortogonali perché $u_1 \cdot u_2 = 2 \neq 0$. Costruiamo una base ortogonale con l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$v_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = u_2 - \frac{u_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le proiezioni ortogonali su U e $U^\perp$ hanno allora matrici

$$P = \sum_{i=1}^{2} \frac{v_i v_i^{\mathrm{t}}}{v_i^{\mathrm{t}} v_i} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q = I - P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per determinare una base ortogonale di $U^\perp$, si osservi che

$$U^\perp = \mathrm{Col}(Q) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \tag{1}$$

e questi vettori sono ortogonali e quindi indipendenti, dunque formano una base ortogonale; in particolare, $\dim U^\perp = 2$.

3. Piuttosto che calcolare direttamente B, si può osservare che

$$B = 2P - I = 2P - (P + Q) = P - Q$$

è combinazione lineare delle matrici di proiezioni ortogonali che sono simmetriche, quindi è simmetrica e dunque ortogonalmente diagonalizzabile. La formula precedente è anche la decomposizione spettrale di B, che ha dunque autovalori 1 e -1 con autospazi $E_1 = U$ e $E_{-1} = U^\perp$. Una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di B si ottiene allora prendendo l'unione delle basi ortogonali di U e $U^\perp$ e normalizzando i vettori:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3

In $\mathbf{R}^3$ si consideri la retta

$$r : \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$$

1. Dato un punto generico $P=(x,y,z)\in\mathbf{R}^3$, dare una formula per la distanza di P da r.
2. Se $O=(0,0,0)$, verificare analiticamente che il luogo geometrico

$$Q=\left\{P\in\mathbf{R}^3 : d(P,r)=\frac{2}{3}\,d(P,O)\right\}$$

   è una quadrica e classificarla.
3. Stabilire se Q è di rotazione.

1. Risolvendo il sistema che definisce r si trova un'equazione parametrica della retta,

$$r : \begin{cases} x=-t \\ y=1 \\ z=t \end{cases}$$

che passa per il punto $Q=(0,1,0)$ e ha la direzione del vettore $v=(1,0,-1)^{\mathrm{t}}$. Posto $u := P-Q$, abbiamo

$$u\wedge v=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x & y-1 & z \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} 1-y \\ x+z \\ 1-y \end{pmatrix}, \qquad d(P,r)=\frac{\|u\wedge v\|}{\|v\|}=\sqrt{(1-y)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2}.$$

2. Possiamo riscrivere l'equazione di Q nella forma $d(P,r)^2={}^4\!/_9\,d(P,O)^2$ e cioè, tenendo conto di quanto dimostrato in 1,

$$(1-y)^2+\frac{1}{2}(x+z)^2=\frac{4}{9}(x^2+y^2+z^2).$$

Se espandiamo e moltiplichiamo per 18 troviamo l'equazione

$$x^2+10y^2+z^2+18xz-36y+18=0$$

che è l'equazione di una quadrica. Dalla riduzione simmetrica simultanea della matrice completa e di quella della parte quadratica

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & -18 \\ 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -18 & 0 & 18 \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si trova che $r=3<4=\bar{r}$ e che $p=1<2=\bar{p}$, quindi Q è un iperboloide iperbolico. **3.** Il polinomio caratteristico di A è $q(x)=(10-x)^2(-8-x)$; i due autovalori concordi coincidono, quindi le ellissi ottenute sezionando Q con piani normali all'asse di simmetria principale hanno semiassi della stessa lunghezza e cioè sono circonferenze. Quindi Q è una quadrica di rotazione.

Geometria e algebra lineare (082747), 4 Febbraio 2020

Primo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} k^2+1 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire per quali valori di k la matrice è invertibile.
2. Per i valori di k per cui A non è invertibile, determinare le dimensioni di $\ker(A)$ e $\operatorname{Col}(A)$.
3. Per $k = 1$, siano $U = \ker A$ e $W = \operatorname{Col} A$. Determinare dimensione e una base di $U + W$ e stabilire se $\mathbf{R}^4 = U \oplus W$.
4. Sempre per $k = 1$, determinare dimensione e una base di $U \cap W$.

1. $\det(A) = k(k-1)$, quindi A è invertibile per $k \neq 0, 1$. **2.** Per $k = 0$ e $k = 1$, A e una sua riduzione a scala sono rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In entrambi i casi abbiamo che $\dim \operatorname{Col}(A) = \operatorname{rk}(A) = 3$; dal teorema di nullità più rango $\dim \ker(A) = 4 - \operatorname{rk}(A) = 1$. **3**. Dalla seconda riduzione a scala consegue che $\operatorname{Col}(A)$ è generato dalle colonne di A che corrispondono ai pivot e cioè dai vettori

$$v_1 = (2, -1, 0, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (1, 0, 0, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_3 = (0, 0, 1, -1)^{\mathsf{t}}.$$

Risolvendo il sistema associato alla riduzione, si trova poi che $\ker(A) = \langle v_3 \rangle$; dunque i generatori di $\operatorname{Col}(A) + \ker(A)$ sono esattamente le colonne di A nella seconda riduzione e $\dim(\operatorname{Col}(A) + \ker(A)) = \operatorname{rk}(A) = 3$. In particolare, $\mathbf{R}^4$ che ha dimensione 4 non è la somma dei due sottospazi, tantomeno la somma diretta. **4**. Dalla formula di Grassmann consegue che

$$\dim(\ker(A) \cap \operatorname{Col}(A)) = \dim \ker(A) + \dim \operatorname{Col}(A) - \dim(\operatorname{Col}(A) + \ker(A)) = 1 + 3 - 3 = 1.$$

Abbiamo già osservato che v_3 appartiene all'intersezione; poiché questa ha dimensione 1, v_3 è una base.

2

Sia $E = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita dalle formule

$$f(e_1) = -3e_1 + ke_2, \qquad f(e_2) = 4e_1 + 3e_2, \qquad f(e_3) = (k-4)e_1 + 5e_3,$$

dove k è un parametro reale.

1. Scrivere la matrice A che rappresenta f rispetto a E.
2. Stabilire per quali k la matrice A è diagonalizzabile su **R**.
3. Stabilire per quali k la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile.
4. Per ogni valore di $k \in \mathbf{R}$ determinare, se esiste, una matrice ortogonale Q che diagonalizza A.

1. La matrice rappresentativa di f rispetto a E si ottiene scrivendo i coefficienti delle immagini per colonne:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & k-4 \\ k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Il polinomio caratteristico di A

$$p = (5-x)(-9-4k+x^2)$$

si spezza su **R** solo quando $9+4k \geq 0$, quindi per $k \leq -9/4$ A non è diagonalizzabile. Se $k = -9/4$ l'autovalore $x = 0$ è doppio e la riduzione a scala

$$A - 0I = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -25/4 \\ -9/4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -3 & 4 & -25/4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra che $g_0 = 3 - \operatorname{rk}(A) = 1 < 2 = a_0$, quindi A non è diagonalizzabile. Quando $k = 4$ l'autovalore $x = 5$ è doppio; ma in questo caso A è simmetrica quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale. Per tutti gli altri valori di k, A ha tre autovalori distinti, quindi è diagonalizzabile. **3**. Una matrice è diagonalizzabile ortogonalmente se e soltanto se è simmetrica; questo accade solo quando $k = 4$. **5**. Se $Q \in \mathrm{O}(3)$ diagonalizza A allora A deve essere simmetrica, quindi $k = 4$. In questo caso Q è una qualunque matrice le cui colonne siano una base ortonormale di autovettori per A. Gli autovalori sono -5 semplice e 5 doppio e dalle riduzioni a scala

$$A + 5I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A - 5I = \begin{pmatrix} -8 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

risolvendo i sistemi corrispondenti si trova che gli autospazi sono $E_{-5} = \langle v_1 \rangle$ e $E_5 = \langle v_2, v_3 \rangle$, dove

$$v_1 = (2, -1, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (1, 2, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_3 = (0, 0, 1)^{\mathsf{t}}.$$

La base di E_5 è già ortogonale, quindi i v_i sono una base ortogonale di autovettori che normalizzata fornisce la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

Nello spazio $\mathbf{R}^3$, si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x+y+z-1 = 0 \\ x+y = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2-t, \end{cases} \qquad t \in \mathbf{R}.$$

1. Stabilire qual è la posizione reciproca di r e s e scrivere, se esiste, l'equazione cartesiana di un piano che contiene entrambe.
2. Scrivere un'equazione della quadrica Q ottenuta ruotando s intorno a r.
3. Classificare Q, individuando l'eventuale centro.
4. Sia C la conica ottenuta intersecando Q con il piano $x+y=0$. Classificare C, individuando l'eventuale centro.

1. Si vede immediatamente che l'equazione di s soddisfa quella del secondo piano che definisce r; quindi le due rette sono complanari e sono contenute in $H : x+y=0$. Risolvendo il sistema fra le equazioni di r e s si trova $t=1$ e quindi il punto $P = (1,-1,1) = r \cap s$; in particolare r e s sono incidenti. **2**. I punti di Q sono quelli delle circonferenze C_X passanti per i punti $X = (t, -t, 2-t) \in s$ contenute nei piani H_X normali a r passanti per X e con centro in r. La circonferenza C_X si ottiene intersecando H_X con la sfera S_X passante per X e centro in un punto qualunque $R \in r$. Risolvendo il sistema che definisce r possiamo scegliere $R = (0,0,1)$; la direzione di r è quella del vettore $v = (1,-1,0)^{\mathsf{t}}$ e questa è anche la direzione normale di H_X; S_X e H_X hanno quindi rispettivamente equazioni

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2 = t^2+(-t)^2+(2-t-1)^2 \\ (x-t)-(y+t) = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni del sistema per un valore fissato di t sono i punti della circonferenza C_X; se eliminiamo il parametro t dalle due equazioni otteniamo un'equazione di Q:

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 6xy + 4x - 4y - 8z = 0.$$

Per costruzione Q è un cono a punti reali di vertice P. Si ritrova analiticamente lo stesso risultato osservando che la matrice completa di Q e una sua riduzione simmetrica che è anche riduzione della parte quadratica

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostrano che $r = 3 = \bar{r}$ e $p = 1 = \bar{p}$. Il centro P si ritrova analiticamente come unica soluzione del sistema lineare $Ax + b = 0$. **4.** Il piano H contiene r che è asse di Q; quindi $C = Q \cap H$ è spezzata in due rette incidenti che si intersecano in P, centro di C.

Geometria e algebra lineare (082747), 17 giugno 2020

Secondo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'endomorfismo definito dalla formula $f(x) = Ax$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calcolare dimensione e una base di $\ker(f)$.
2. Mostrare che lo spettro di f è l'insieme $\{-1, 0, 1\}$ e stabilire se f è diagonalizzabile.
3. Determinare dimensione e una base dell'immagine inversa $f^{-1}(E_1)$ dell'autospazio E_1 relativo all'autovalore 1.

1. La riduzione a scala

$$A \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

mostra che $\dim \ker(A) = 4 - r(A) = 2$. Risolvendo il sistema omogeneo $Ux = 0$ si trova la base del nucleo formata dai vettori

$$w_1 = (0, 3, 2, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad w_2 = (2, 1, 0, -2)^{\mathsf{t}}.$$

2. Da 1 abbiamo che $a_0 \geq g_0 = \dim \ker(A) = 2$, quindi $x = 0$ è un autovalore almeno doppio; la riduzione a scala

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -5 & 1 & -3 & -4 \\ -3 & 2 & -4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra che $a_1 \geq g_1 = 4 - r(A - I) = 1$, quindi $x = 1$ è un autovalore. Infine, poiché la somma degli autovalori $\sum_{i=1}^{4} x_i = \mathrm{tr}(A) = 0$, anche $x = -1$ deve essere un autovalore e poiché la sommma delle molteplicità algebriche deve essere 4, deve essere $a_0 = 2 = g_0$, $a_1 = 1 = g_1$ e $a_{-1} = 1 = g_{-1}$; gli autovalori sono regolari e f è diagonalizzabile. **3.** Dalla riduzione a scala di $A - I$ abbiamo che E_1 è generato dal vettore $v = (2, -6, -4, -1)^{\mathsf{t}}$. Dal teorema di Rouché tutte le immagini inverse di un vettore si ottengono da una immagine inversa qualunque sommando il nucleo; poiché $v \in E_1$, $f(v) = v$ e quindi $f^{-1}(E_1) = E_1 \oplus \ker(f) = \langle v, w_1, w_2 \rangle$. In particolare, $\dim f^{-1}(E_1) = 3$.

2

In $\mathbf{R}^3$ si considerino il vettore $v = (1, 0, -1)^{\mathsf{t}}$ ed il piano $H : x + y - z = 0$.

1. Calcolare la proiezione ortogonale w di v su H.
2. Determinare una base ortogonale B di H contenente w. Estendere poi B ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$.
3. Se $V = \langle v, w \rangle$, scrivere equazioni cartesiane di $V^\perp$.

1. Si osservi anzitutto che $H^\perp = \langle n \rangle$ dove $n = (1, 1, -1)^t$ è il vettore normale al piano. Le proiezioni di v su $H^\perp$ e su H sono rispettivamente

$$u = \frac{v \cdot n}{n \cdot n} n = \frac{2}{3} n = (2/3, 2/3, -2/3)^t, \qquad w = v - u = (1/3, -2/3, -1/3)^t.$$

2. Possiamo prendere $b_1 = 3w = (1, -2, -1)^t$ e poiché $n \perp H$, un vettore di H ortogonale a v è

$$n \wedge 3w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-3, 0, -3)^t$$

quindi possiamo prendere $b_2 = (1, 0, 1)^t$. Il completamento della base si ottiene prendendo $b_3 = n = (1, 1, -1)^t$. **3.** Basta scrivere le condizioni che impongono che un generico vettore sia sia ortogonale a v e a w, richiedendo che si annullino i prodotti interni:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

3

Si consideri il piano $H : x + y + z + 3 = 0$ e la retta

$$r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

1. Scrivere l'equazione del luogo Q dei punti equidistanti da H e da r.
2. Riconoscere Q.
3. Mostrare che l'intersezione di Q con il piano $z = 0$ è una parabola Γ; determinarne il vertice e l'asse di simmetria.

1. Se $u = (-1, -1, 2)^t$ è la direzione di r e $v = X - P = (x - 1, y - 1, z - 1)^t$, abbiamo

$$d(X, H)^2 = \frac{(x + y + z + 3)^2}{3}, \qquad d(x, r)^2 = \frac{(u \wedge v)^2}{u^2} = \frac{(y - x)^2 + (-z - 2x + 3)^2 + (z + 2y - 3)^2}{6}$$

e riducendo l'equazione $d(X, H)^2 = d(X, r)^2$ si ottiene un'equazione di Q:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y - 8z = 0.$$

2. Per costruzione, Q è un cilindro parabolico. In alternativa, si verifica facilmente che i ranghi della matrice della parte quadratica di Q e della matrice completa sono rispettivamente $r = 1 < 3 = \bar{r}$, che identificano appunto il cilindro parabolico. **3**. L'equazione di Γ nel piano xy si ottiene sostituendo $z = 0$ nell'equazione di Q; si ottiene $x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y = 0$. La matrice di Γ, ottenuta cancellando la terza riga e colonna da quella di Q, è

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Anche in questo caso, $r = 1 < 3 = \bar{r}$, quindi Γ è una parabola. L'equazione dell'asse di simmetria si trova risolvendo ai minimi quadrati il sistema $Ax + b = 0$: il sistema e le equazioni normali sono

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

quindi l'asse ha equazione $x - y = 0$. Se intersechiamo la la parabola troviamo il vertice $V = (0, 0)$.

Geometria e algebra lineare (082747), 22 luglio 2020

Terzo appello

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Si considerino le condizioni seguenti per un endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}, \qquad f\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \ker(f) = \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Dimostrare che esiste un unico endomorfismo f che soddisfa queste condizioni.
2. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica.
3. Mostrare che f è ortogonalmente diagonalizzabile e trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ costituita da autovettori di f.

1. Posto

$$v_1 = (2,1,0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (1,-2,0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_3 = e_3 = (0,0,1)^{\mathsf{t}},$$

la condizione $\ker(f) = \langle v_3 \rangle$ implica che $f(v_3) = 0$; ma i vettori v_i sono un sistema ortogonale, perché $v_i \cdot v_j = 0$ quando $i \neq j$, quindi sono indipendenti e poiché $\dim \mathbf{R}^3 = 3$ formano una base B. Le condizioni date assegnano i valori di f su una base, quindi f è univocamente determinato. **2.** Le condizioni assegnate determinano la matrice rappresentativa N dalla base B verso la base canonica E; se scriviamo $B = (v_1, v_2, v_3)$ per indicare anche la matrice le cui colonne sono i vettori della base B e cioè le loro coordinate rispetto alla base canonica E, dalla formula del cambiamento di base abbiamo che la matrice rappresentativa di f rispetto a E è

$$M = NB^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\1&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}1&2&0\\-2&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/5&1/5&0\\1/5&-2/5&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/5&-3/5&0\\-3/5&-4/5&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2. La matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è simmetrica, quindi f è ortogonalmente diagonalizzabile per il teorema spettrale. Piuttosto che calcolare direttamente autovalori e autovettori da M, possiamo procedere a uesto modo. Poiché $f(v_3) = 0$, $x = 0$ è un autovalore; la somma degli autovalori è $\operatorname{tr} M = 0$, quindi gli altri due autovalori sono opposti, ma non possono essere nulli, perché in questo caso sarebbe $M = 0$; le condizioni assegnate mostrano che $f(v_1) = v_2$ e $f(v_2) = v_1$, quindi $f(v_1 + v_2) = v_1 + v_2$ e $x = 1$ è il secondo autovalore, dunque il terzo deve essere $x = -1$. A questo punto sappiamo anche che gli autovalori sono semplici e poiché devono essere regolari, abbiamo che l'autospazio E_0 è generato da v_3 e che E_1 è generato da $v_1 + v_2 = (3 \ \ -1 \ \ 0)^{\mathsf{t}}$. Abbiamo poi che $f(v_1 - v_2) = v_2 - v_1 = -(v_1 - v_2)$, quindi una base di E_{-1} è data dal vettore $v_1 - v_2 = (1 \ \ 3 \ \ 0)^{\mathsf{t}}$. I vettori $v_1 + v_2$, $v_1 - v_2$ e v_3 sono automaticamente ortogonali perché appartengono ad autospazi diversi di una matrice simmetrica, quindi per scrivere una base ortonormale di autovettori basta normalizzarli:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}, \qquad w_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}, \qquad w_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2

Si considerino i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\rangle$$

1. Calcolare le dimensioni di U e V al variare di $k \in \mathbf{R}$.
2. Calcolare la dimensione e una base di $U \cap V$ al variare di $k \in \mathbf{R}$.
3. Calcolare la dimensione e una base di $U + V$ al variare di $k \in \mathbf{R}$.

1. U è lo spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo, quindi è il nucleo della matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Le due righe di A non sono proporzionali, quindi $\operatorname{rk} A = 2$ e dal teorema di rango più nullità abbiamo che $\dim U = \dim \ker A = 4 - \operatorname{rk} A = 2$. Per deteerminare la dimensione di V basta calcolare il rango della matrice formata accostando i generatori; la riduzione

$$B = (v_1 \;\; v_2 \;\; v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra allora che $\dim V = 3$ se $k \neq 1$ e $\dim V = 2$ quando $k = 1$. **2.** I vettori v_2 e v_3 soddisfano le equazioni di U e sono indipendenti perché non proporzionali; poiché $\dim U = 2$, $B_U = (v_2, v_3)$ è una base di U. Quindi $U \subseteq V$, dunque $U \cap V = U$ ha sempre dimensione 2 e B_U è una base dell'intersezione. **3.** Poiché $U \subseteq V$, abbiamo che $U + V = V$, la cui dimensione è stata determinata in 1. Abbiamo già osservato che v_2 e v_3 sono indipendenti, quindi formano una base quando $k = 1$, perché in questo caso $\dim V = 2$; per $k \neq 1$ abbiamo $\dim V = 3$, quindi i tre generatori sono una base.

3

In $\mathbf{R}^3$, si considerino la sfera S con centro nell'origine O e raggio 1 e il punto $P = (0, 0, 2)$.

1. Scrivere l'equazione cartesiana del piano H passante per O con distanza 2 da P.
2. Se $C = S \cap H$, scrivere l'equazione del cono K con vertice P e direttrice C.
3. Descrivere geometricamente l'insieme $K \cap S$ e calcolare le distanze dei suoi punti da P.

1. Poiché $d(P, O) = 2 = d(P, H)$ e $O \in H$, O deve essere la proiezione di P su H; quindi il vettore normale ad H è $n = P - O = (0 \;\; 0 \;\; 2)^{\mathsf{t}}$ e l'equazione di H è $0x + 0y + 2z = 0$ e cioè $z = 0$. **2.** Poiché $C = S \cap H$, equazioni cartesiane di C si ottengono mettendo a sistema le equazioni di S e H e riducendo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

Un'equazione di K si ottiene considerando le rette uscenti da P che passano per un punto $Q = (a, b, c) \in C$ (si vedano gli appunti del corso):

$$\begin{cases} x = 0 + t(a - 0) \\ y = 0 + t(b - 0) \\ z = 2 + t(c - 2) \\ a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = 2 - 2t \\ a^2 + b^2 - 1 = 0 \\ c = 0 \end{cases} \mapsto \quad x^2 + y^2 - \tfrac{1}{4}(z - 2)^2 = 0.$$

L'equazione può anche essere espanza nella forma $4x^2 + 4y^2 - z^2 + 4z - 4 = 0$. **3.** Geometricamente la situazione è chiara: la generatrice C è stata ottenuta intersecando S con un piano diametrale H e l'asse di K è normale ad H e passa per il centro di S; quindi $K \cap S$ ha due componenti: la circonferenza C e una seconda circonferenza $D = S \cap L$ dove $L \parallel H$. Analiticamente, l'intersezione è data dalle soluzioni del sistema formato dalle equazioni di S e K:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ x^2+y^2-\frac{1}{4}(z-2)^2=0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ 1-z^2-\frac{1}{4}(z-2)^2=0 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x^2+y^2+z^2-1=0 \\ 5z^2-4z=0. \end{cases}$$

Fattorizzando l'ultima equazione si vede che le soluzioni sono due circonferenze su S: C a quota $z=0$ e D a quota $z={}^4\!/_5$.

Geometria e algebra lineare (082747), 4 settembre 2020

Quarto appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Sia $E = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ la base canonica di $\mathbf{R}^3$ e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita dalle formule

$$f(e_1) = e_1 + ke_3, \qquad f(e_2) = 2e_2, \qquad f(e_3) = -e_1 + he_2 + e_3$$

dove $h,\ k$ sono parametri reali.

1. Scrivere la matrice A associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
2. Determinare per quali valori di h e k l'applicazione f non è invertibile.
3. Determinare per quali valori di h e k la matrice A è ortogonalmente diagonalizzabile e per tali valori trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ composta da autovettori di A.

1. Le colonne di A sono formate con i coefficienti delle immagini $f(e_i)$ rispetto a E:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & h \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. f non è invertibile quando A non è invertibile e poiché A è quadrata, questo accade quando il suo determinante è nullo. Sviluppando lungo la seconda colonna si trova

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & h \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ k & 1 \end{vmatrix} = 2(1+k).$$

Quindi f non è invertibile quando $k = -1$. **3.** Per il teorema spettrale A è ortogonalmente diagonalizzabile quando è simmetrica e questo accade solo se $h = 0$ e $k = -1$. Per determinare gli autovalori non è necessario, in questo caso, calcolare il polinomio caratteristico. Dal punto 2 sappiamo infatti che per $k = -1$ A non è invertibile, quindi il suo nucleo è non banale e $x = 0$ è un autovalore. La seconda condizione che definisce f, $f(e_2) = 2e_2$ mostra che $x = 2$ è un secondo autovalore. E poichè la somma degli autovavoli deve essere $\operatorname{tr}(A) = 4$, anche il terzo autovalore deve essere $x = 2$. Quindi $x = 0$ è autovalore semplice e $x = 2$ è doppio. Anche gli autovettori si determinano direttamente. Dalla prima e terza condizione che definiscono f abbiamo $f(e_1) = -f(e_3)$; dunque $f(e_1 + e_3) = 0$ e E_0 è generato da $v_1 = e_1 + e_3 = (1\ 0\ 1)^{\mathsf{t}}$. La seconda condizione mostra che $v_2 = e_2 = (0\ 1\ 0)^{\mathsf{t}}$ è un autovettore di E_2. Per completare la base ortogonale di E_2 basta prendere un vettore ortogonale sia a v_1 che a v_2; ad esempio, $v_3 = v_1 \wedge v_2 = (-1\ 0\ 1)^{\mathsf{t}}$. La base ortonormale si ottiene normalizzando i vettori:

$$w_1 = {}^1\!/\!_{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1)^{\mathsf{t}}, \qquad w_2 = (0\ 1\ 0)^{\mathsf{t}}, \qquad w_3 = {}^1\!/\!_{\sqrt{2}}(-1\ 0\ 1)^{\mathsf{t}}.$$

2

Si considerino in $\mathbf{R}^4$ i sottospazi

$$V : x_1 - x_2 + x_3 = 0, \qquad U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

1. Calcolare la dimensione e una base di V.
2. Trovare una base ortogonale di $U^\perp$.
3. Calcolare la dimensione di $V \cap U^\perp$ e stabilire se $V + U^\perp = \mathbf{R}^4$.

1. Se risolviamo il sistema lineare formato dall'unica equazione di V troviamo

$$\begin{cases} x = t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} \qquad x = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim V = 3$ e una sua base è formata dai vettori

$$v_1 = (1\ 1\ 0\ 0)^{\mathsf{t}}, \quad v_2 = (-1\ 0\ 1\ 0)^{\mathsf{t}}, \quad v_1 = (0\ 0\ 0\ 1)^{\mathsf{t}}.$$

2. $U^\perp$ è il nucleo della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui righe sono i generatori di U. Le soluzioni del sistema $Ax = 0$ sono della forma $x = t_1 w_1 + t_2 w_2$ dove

$$w_1 = (-1\ 1\ 0\ 0)^{\mathsf{t}}, \qquad w_2 = (-1\ 0\ 0\ 1)^{\mathsf{t}},$$

quindi (w_1, w_2) è una base di $U^\perp$. Ma $w_1 \cdot w_2 = 1 \neq 0$, quindi i due vettori non sono ortogonali; usiamo l'algoritmo di Gram-Schmidt per ottenere una base ortogonale: $q_1 = w_1$ e

$$q_2 = w_2 - \frac{w_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_1} q_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

3. Abbiamo un'equazione cartesiana di V e le equazioni cartesiane di $U^\perp$ sono le righe della matrice A. $V \cap U^\perp$ ha come equazioni cartesiane l'unione di queste equazioni e quindi è il nucleo della matrice B seguente, di cui indichiamo anche una riduzione a scala.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalla riduzione abbiamo che $\dim(V \cap U^\perp) = 4 - \mathrm{rk}(B) = 1$. Abbiamo visto in 1 che $\dim V = 3$; i due generatori di U non sono paralleli, quindi sono indipendenti e $\dim U = 2$. Dalla formula di Grassmann consegue che

$$\dim(V + U^\perp) = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U^\perp) = 3 + 2 - 1 = 4$$

e quindi $V + U^\perp = \mathbf{R}^4$.

3

Si consideri in $\mathbf{R}^3$, la quadrica Q di equazione

$$3x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 2xy + 8x + 3 = 0.$$

1. Determinare la forma canonica di Q per rototraslazione.
2. Trovare, se esiste, il centro di Q e dire se è una quadrica di rotazione.
3. Classificare per affinità la conica ottenuta intersecando Q con il piano $z = 0$.

1. La matrice $\bar{A}$ di Q e una riduzione simmetrica simultanea di $\bar{A}$ e A sono

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo $r = 3 < 4 = \bar{r}$ e $p = 0 < 1 = \bar{p}$, quindi Q è un ellissoide a punti reali. Gli autovalori di A si determinano facilmente osservano che $x = 2$ è un autovalore con autovettore e_3, mentre gli altri autovalori devono avere prodotto 8 e somma 6, dal minore direttore principale di ordine due. Qundi $x = 4$ è autovalore semplice e $x = 2$ è autovalore doppio. Infine abbiamo che $\det(\bar{A})/\det(A) = -3$, quindi la forma canonica del polinomio di Q è $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 3 = 0$, da cui dividendo per 3 si ottiene

$$\frac{x^2}{3/2} + \frac{y^2}{3/2} + \frac{z^2}{3/4} = 1.$$

2. Risolvendo il sistema $Ax = -b$ troviamo

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

che ha soluzione $Z = (-3/2 \ \ -1/2 \ \ 0)^t$, il centro dell'ellissoide. Abbiamo visto al punto due che $x = 2$ è autovalore doppio, quindi Q è di rotazione. **3.** È noto a priori che l'intersezione di un ellissoide con un piano è un'ellisse. Il fatto si ritrova analiticamente osservando che sostituendo $z = 0$ nell'equazione di Q si ottiene l'equazione della conica $C : 3x^2 + 3y^2 - 2xy + 8x + 3 = 0$. La matrice completa di C e una sua riduzione simmetrica coincidono con quelle di Q, una volta eliminate la terza riga e colonna. Quindi, per C, $r = 2 < 3 = \bar{r}$ e $p = 0 < 1 = \bar{p}$ mostrano che C è un'ellisse a punti reali.

Geometria e algebra lineare (082747), 6 novembre 2020

Prima prova in itinere

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Si consideri il sistema lineare a coefficienti reali $Ax = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} k \\ 3 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire quante soluzioni ammette il sistema al variare di k.
2. Se esistono valori di k per i quali il sistema ha una sola soluzione, la si scriva esplicitamente.
3. Stabilire, al variare di k, quante soluzioni ammette il sistema omogeneo $Ax = 0$.
4. Stabilire la posizione reciproca delle rette r e s di equazioni

$$r : \begin{cases} 2x + y = 2 \\ x + z = 3 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

1. Se r e r' sono i ranghi di A e della matrice completa C del sistema, la riduzione a scala

$$C = \left(\begin{array}{ccc:c} k & 1 & 0 & k \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & k \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1-k & 3-2k \\ 0 & 0 & 0 & k-3 \end{array}\right)$$

mostra che se $k \neq 1, 3$ allora $r = 3 < 4 = r'$ e il sistema non ha soluzioni; per $k = 1$ abbiamo $r = 2 < 3 = r'$ e anche in questo caso non ci sono soluzioni; per $k = 3$, invece, $r = 3 = r'$ e il sistema ha una sola soluzione. **2.** Per $k = 3$ scriviamo il sistema associato alla riduzione a scala e troviamo la soluzione per sostituzione retrograda:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_3 = -3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2 = {}^3\!/_2 \\ x_2 = x_3 - 3 = -{}^3\!/_2 \\ x_3 = {}^3\!/_2 \end{cases}$$

L'unica soluzione è quindi il vettore $x = ({}^3\!/_2, -{}^3\!/_2, {}^3\!/_2)^{\mathrm{t}}$. **3.** Da 1 abbiamo che se $k \neq 1$ allora $r = 3$ e il sistema omogeneo ha una soluzione, necessariamente nulla; se $k = 1$, invece, $r = 2$ e il sistema omogeneo ha ∞^1 soluzionei. **4.** Le equazioni delle due rette sono quelle del sistema per $k = 2$. In questo caso $r = 3 < 4 = r'$ e le due rette non hanno punti comuni, ma il sistema omogeneo associato ha un'unica soluzione, quindi le parallele a r e s passanti per l'origine si intersecano in un punto; questo significa che r e s sono sghembe.

2

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ la funzione lineare indotta dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare le dimensioni del nucleo e dell'immagine di f.
2. Trovare una base di $\ker(f)$ e una di $\mathrm{im}(f)$.
3. Dato il piano $H : x + y + z = 0$ di $\mathbf{R}^3$, determinare la dimensione e una base dell'immagine diretta $K := f_*(H)$ di H lungo f.
4. Determinare $K \cap \mathrm{im}(f)$ e stabilire se esiste una base di $\mathrm{im}(f)$ che contiene una base di K.

1. La riduzione a scala

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e il teorema di nullità più rango mostrano che

$$\dim \mathrm{im}(f) = \mathrm{rk}(A) = 2, \qquad \dim \ker(f) = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \mathrm{im}(f) = 3 - 2 = 1.$$

2. I pivot della riduzione a scala si trovano nelle prime due colonne; quindi una base dell'immagine è costituita dalle prime due colonne di A:

$$v_1 = (1 \quad 2 \quad 1 \quad 1)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (0 \quad 1 \quad 2 - 2)^{\mathsf{t}}.$$

I vettori di $\ker(f)$ soddisfano la condizione $f(x) = 0$ e cioè sono le soluzioni del sistema $Ax = 0$. Scriviamo il sistema associato alla riduzione a scala e usiamo sostituzione retrograda per risolverlo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -2x_3 = -2t \\ x_2 = x_3 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Quindi una base del nucleo è il vettore $v_3 = (-2\ 1\ 1)^{\mathsf{t}}$. **3.** Le soluzioni del sistema formato dall'unica equazione di H sono della forma $x = t_1 u_1 + t_2 u_2$, dove $u_1 = (1 - 1\ 0)^{\mathsf{t}}$ e $u_2 = (1\ 0 - 1)^{\mathsf{t}}$. Quindi (u_1, u_2) è una base di H e i vettori

$$w_1 = f(u_1) = (1 \quad 1 - 1 \quad 3)^{\mathsf{t}} \qquad w_2 = f(u_2) = (-1 - 1 \quad 1 - 3)^{\mathsf{t}}$$

sono generatori di K. Sono proporzionali e quindi dipendenti, dunque (w_1) è una base di K e $\dim K = 1$. **4.** Poiché $H \subseteq \mathbf{R}^3$, deve essere $K = f_*(H) \subseteq f_*(\mathbf{R}^3) = \mathrm{im}(f)$, quindi $K \cap \mathrm{im}(f) = K$ e la base (w_1) di K si estende a una base di $\mathrm{im}(f)$ con due vettori. Poiché v_1 non è multiplo di w_1, (w_1, v_1) è una base di $\mathrm{im}(f)$ che estende la base di K.

Geometria e algebra lineare (082747), 21 gennaio 2021

Seconda prova in itinere

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Si consideri la matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} 2k+1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2k-3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Stabilire per quali valori di k la matrice A è diagonalizzabile su **R**.
2. Mostrare che per $k = 2$ l'autospazio E_4 relativo all'autovalore 4 è una retta r passante per l'origine e determinarne un'equazione parametrica.
3. Dato il punto $P = (0, 1, 0)$, determinare il tipo della quadrica
$$Q = \Big\{X \in \mathbf{R}^3 : d(X, r) = \sqrt{2} \cdot d(X, P)\Big\}.$$
4. Stabilire se Q è una quadrica di rotazione.

1. Il polinomio caratteristico di A, calcolato per espansione di Laplace lungo la seconda riga, è

$$p(t) = \begin{vmatrix} 2k+1-t & 0 & -1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 2k-3 & 0 & 3-t \end{vmatrix} = (2-t)(4-t)(2k-t)$$

e si spezza sempre su $\mathbf{R}$. Se $t \neq 1, 2$, p ha tre autovalori semplici, quindi regolari e A è diagonalizzabile. Se $k = 1$ la matrice è simmetrica, quindi diagonalizzabile per il teorema spettrale. Se $k = 2$ l'autovalore $t = 2$ è semplice e quindi regolare, mentre per l'autovalore $t = 4$ abbiamo $a_4 = 2$ e, poiché la matrice

$$A - 4I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ha rango 2, $g_4 = 3 - \operatorname{rk}(A - 4I) = 1$; quindi $t = 4$ non è regolare e A non è diagonalizzabile. **2.** $E_4 = \ker(A - 4I)$ e le soluzioni del sistema omogeneo $(A - 4I)x = 0$ sono i vettori tv con $t \in \mathbf{R}$ e $v = (1\ \ 0\ \ 1)^{\mathsf{t}}$ e cioè i punti della retta r passante per l'origine con direzione v. Una sua equazione parametrica è $x = tv$. **3.** La distanza di un punto $x \in \mathbf{R}^3$ da r e da P sono rispettivamente

$$d(x, r) = \frac{\|x \wedge v\|}{\|v\|} = \frac{\|(x_2, x_3 - x_1, -x_2)^{\mathsf{t}}\|}{\|(1, 0, 1)^{\mathsf{t}}\|} = \sqrt{\frac{1}{2}(x_3 - x_1)^2 + x_2^2}, \qquad d(x, P) = \|P - x\| = \sqrt{x_1^2 + (x_2 - 1)^2 + x_3^2}.$$

Sostituendo nella formula che definisce Q e quadrando si trova

$$Q : 3x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 8x_2 + 4 = 0.$$

Dalla riduzione simmetrica

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^8\!/_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

abbiamo $r = 3 < 4 = \bar{r}$, $p = 0$, $\bar{p} = 1$, quindi Q è un ellissoide. **4.** La sottomatrice della parte quadratica ammette $t = 4$ come autovalore semplice e $t = 2$ come autovalore doppio, quindi Q è un ellissoide di rotazione.

2

Si consideri a matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Trovare una base ortonormale di $\mathbf{R}^4$ formata da autovettori di B.
2. Trovare le matrici delle proiezioni ortogonali sugli autospazi di B.
3. Determinare la segnatura della forma quadratica $q(x) = x^t Bx$.

1. Il polinomio caratteristico di B è $p(t) = -(1+t)(1-t)^3$. L'autospazio $E_{-1} = \ker(B+I)$ è generato da $v_1 = (1 \ 0 \ 0 \, -1)^\mathsf{t}$, mentre $E_1 = \ker(B - I)$ dai vettori

$$v_2 = (0 \ 1 \ 0 \ 0)^\mathsf{t}, \quad v_3 = (0 \ 0 \ 1 \ 0)^\mathsf{t}, \quad v_4 = (1 \ 0 \ 0 \ 1)^\mathsf{t}$$

I vettori sono già ortogonali; normalizzando si trova la base ortonormale

$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1, \quad q_2 = v_2, \quad q_3 = v_3, \quad q_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} v_4.$$

2. Le proiezioni su E_{-1} ed E_1 sono rispettivamente

$$P_{-1} = \frac{v_1 v_1^\mathsf{t}}{v_1^\mathsf{t} v_1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad P_1 = I - P_{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. Dal momento che B ha un autovalore positivo triplo e un autovalore semplice negativo, la sua segnatura è $(3, 1, 0)$.

Geometria e algebra lineare (082747), 8 febbraio 2021

Primo appello

Cognome, Nome	**Matricola**	**Voto**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

In $\mathbf{R}^3$ si consideri il versore

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

1. Completare u ad una base ortonormale $B = (u, v, w)$ di $\mathbf{R}^3$.
2. Determinare la matrice rappresentativa A rispetto alla base canonica dell'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito dalle formule

$$f(u) = u, \qquad f(v) = -v, \qquad f(w) = -w.$$

3. Trovare una base ortonormale formata da autovettori di f.
4. Determinare la segnatura della forma quadratica $q(x) = x^t Ax$.

1. Un vettore x è ortogonale a u se $u \cdot x = 0$ e cioè se $u^{\mathrm{t}}x = 0$. Questo è un sistema lineare di una equazione in tre incognite le cui soluzioni sono della forma

$$x = s\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

I vettori che generano lo spazio delle soluzioni del sistema sono già ortogonali fra loro; basta quindi normalizzare e prendere $v = {}^1\!/\!\sqrt{2}\,(1\ \ 0\,{-1})^{\mathrm{t}}$ e $w = (0\ \ 1\ \ 0)^{\mathrm{t}}$. **2.** Poiché B è una base, il teorema di esistenza per funzioni lineari prova che esiste un'unica funzione lineare f che soddisfa le condizioni assegnate. Per calcolare A scriviamo prima la matrice rappresentativa C di f rispetto alla base B utilizzando le equazioni assegnate e poi effettuiamo un cambiamento di base, che è ortogonale perché B è ortonormale:

$$C = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad A = BCB^{-1} = BCB^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3. Le formule che definiscono f mostrano che B è una base di autovettori, con $u \in E_1$ e $v, w \in E_{-1}$ e questa base è ortonormale per costruzione. **4.** Poiché A si ottiene da C con un cambiamento di base ortogonale, le forme quadratiche indotte da A e da C sono congruenti, quindi hanno la stessa segnatura. Ma C è diagonale con un autovalore positivo e due negativi; quindi la segnatura di A è $(1, 2, 0)$.

2

In $\mathbf{R}^3$ si considerino le due famiglie di rette dipendenti dal parametro reale k

$$L : \begin{cases} 2x - ky - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \qquad L' : \begin{cases} x = 0 \\ ky - 2z + 2k = 0. \end{cases}$$

1. Determinare la posizione reciproca di L e L' al variare di k e verificare che per $k = 0$ entrambe le rette sono contenute nel piano $H : x - z = 0$.
2. Dato il punto $P = (1, 1, 0)$, riconoscere la quadrica Q definita dalla formula

$$Q = \{X \in \mathbf{R}^3 : d(X, H) = d(X, P)\}.$$

1. La matrice completa del sistema di equazioni delle due rette e una sua riduzione a scala in $\mathbf{R}(k)$ sono rispettivamente

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -k & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & -2 & -2k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}.$$

Indicati con r e r' i ranghi della matrice dei coefficienti e della matrice completa e posto $d = n - r$, abbiamo che se $k \neq 0, 2$ allora $r = 3 < 4 = r'$ e $d = 0$, quindi le rette sono sghembe. Se $k = 0$ invece $r = 2 < 3 = r'$ e $d = 1$, quindi le rette sono propriamente parallele. Infine, per $k = 2$ abbiamo $r = 3 = r'$ e $d = 0$, quindi le rette sono trasversali. Per $k = 0$ abbiamo poi che $L : x = z = 1$ soddisfa l'equazione di H, quindi $L \subseteq H$; allo stesso modo $L' : x = z = 0$ soddisfa l'equazione di H. **2.** Si osservi anzitutto che $P \notin H$. Se L'' è la retta passante per P e normale ad H e se K è un qualunque piano supportato da L'', allora $Q \cap K$ è il luogo dei punti di K equidistanti da P e dalla retta $K \cap H$, quindi è una parabola Γ. Se K' è un piano normale a L'' che interseca Γ in P' e se Γ' è la circonferenza di K' passante per P' con centro in $L'' \cap K'$, allora tutti i punti di Γ' sono equidistanti da P e H. I punti di Q si ottengono quindi ruotando Γ intorno a L'', quindi Q è un paraboloide ellittico di rotazione. In alternativa, basta osservare che

$$d(X, H) = \frac{|x - z|}{\sqrt{2}}, \qquad d(X, P) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}.$$

Quadrando e riducendo i termini si ottiene l'equazione della quadrica

$$x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz - 4x - 4y + 4 = 0.$$

Una riduzione simmetrica della matrice completa di Q mostra che $r = 2 < 4 = r'$ e che $p = 0$, quindi Q è un paraboloide ellittico.

3

Si consideri la matrice reale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Trovare basi e dimensioni di $\ker A$ e $\mathrm{Col}(A)$.
2. Determinare le dimensioni di $\ker(A) + \mathrm{Col}(A)$ e $\ker(A) \cap \mathrm{Col}(A)$.

1. Si osservi che la prima e la seconda riga di A non sono proporzionali, mentre la terza e la quarta riga coincidono con la prima e la seconda; questo prova che $\mathrm{rk}(A^{\mathrm{t}}) = 2$ e quindi $\dim \mathrm{Col}(A) = \mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(A^{\mathrm{t}}) = 2$. Poiché le prime due colonne di A non sono proporzionali, sono anche indipendenti, quindi una base di $\mathrm{Col}(A)$ è data dai vettori $v_1 = (1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{t}}$ e $v_2 = (0\ 1\ 0\ 1)^{\mathrm{t}}$ ottenuto moltiplicando la seconda colonna per -1. Dal teorema di nullità più rango abbiamo allora che $\dim \ker(A) = 4 - \dim \mathrm{Col}(A) = 2$. Ora si osservi che la somma delle colonne di A è il vettore nullo; quindi $v_3 = (1\ 1\ 1\ 1)^{\mathrm{t}}$ appartiene al nucleo. Il fatto che la seconda e la quarta colonna coincidono e quindi che la loro differenza è il vettore nullo, implica poi che anche $v_4 = (0\ 1\ 0 -1)^{\mathrm{t}} \in \ker(A)$. Ma v_3 e v_4 non sono proporzionli, quindi sono indipendenti; e poiché $\dim \ker(A) = 2$, (v_3, v_4) è una base del nucleo. **2.** Se $B = (v_1, ..., v_4)$, una riduzione a scala mostra che $\mathrm{rk}(B) = 3$; quindi $\dim(\ker(A) + \mathrm{Col}(A)) = \mathrm{rk}(B) = 3$ e dalla formula di Grassmann

$$\dim(\ker(A) \cap \mathrm{Col}(A)) = \dim \ker(A) + \dim \mathrm{Col}(A) - \dim(\ker(A) + \mathrm{Col}(A)) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 18 Giugno 2021

Secondo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Sia $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ la funzione linare la cui matrice rappresentativa rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & k-2 \\ 1 & 1 & 2 & k-1 \end{pmatrix}.$$

1. Calcolare $\dim \operatorname{im}(f)$ e $\dim \ker(f)$ al variare di k.
2. Determinare una base di $\ker(f)$ quando $k = -1$.

Solution. **1** Il minore di ordine 3 di A formato dalle prime 3 righe e colonne è

$$m = \begin{vmatrix} 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(1+k).$$

Se $k \neq -1$ allora $m \neq 0$, $\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rk}(A) = 3$ per il teorema di Kronecker e $\dim \ker(f) = 4 - \dim \operatorname{im}(f) = 1$ per il teorema di rango più nullità. Se $k = -1$ la riduzione a scala

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mostra che $\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rk}(A) = 2$ e $\dim \ker(f) = 4 - \dim \operatorname{im}(f) = 2$. **2** Poiché $\ker(f) = \ker(A)$, dalla riduzione a scala nel caso $k = -1$, risovendo il sistema $Ax = 0$ per sostituzione retrograda, si trovano le soluzioni

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_4 = -t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = {}^3\!/_2 x_4 = {}^3\!/_2 t_2 \\ x_4 = t_2 \end{cases} \qquad x = t_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ {}^3\!/_2 \\ 1 \end{pmatrix} = t_1 w_1 + t_2 w_2$$

quindi (w_1, w_2) è una base di $\ker(f)$.

2

In $\mathbf{R}^4$ con il prodotto interno canonico, si considerino il sottospazio V generato dai vettori

$$v_1 = (0\ \ 0\ \ 1\ \ 2)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (0\ \ 3\ \ 2\ \ 1)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (0\ \ 1\ \ 0\ {-1})^{\mathsf{t}},$$

e il sottospazio U di equazione cartesiana $x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$.

1. Scrivere equazioni cartesiane per V e determinare una base di $V^\perp$.
2. Trovare una base di $V \cap U$.

(*Per 2 può essere utile utilizzare quanto trovato in 1*).

Solution. **1** Dalla riduzione a scala

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 2 & 1 & -1 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 3 & 1 & x_2 \\ 0 & -3 & -1 & x_4 - 2x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 - 2x_3 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 \end{pmatrix}$$

si trovano le equazioni cartesiane $Bx = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poiché $V = \ker(B)$, $V^\perp = \ker(B)^\perp = \mathrm{Row}(B)$; le righe di B non sono proporzionali, quindi sono indipendenti e formano una base $V^\perp$,

$$b_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^{\mathrm{t}}, \qquad b_2 = (0\ 1 - 2\ 1)^{\mathrm{t}}.$$

2 Un insieme di equazioni cartesiane di $V \cap U$ è dato dall'unione delle equazioni di V e U.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trovano le soluzioni $x = t(0,0,1,2)^{\mathrm{t}}$ con $t \in \mathbf{R}$, quindi $\dim(V \cap U) = 1$ e una sua base è il vettore $w = (0,0,1,2)^{\mathrm{t}}$.

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino il punto $P = (1,0,1)$ e il piano $H : x - y = 0$.

1. Verificare che il luogo dei punti $Q = \{X \in \mathbf{R}^3 : d(X,H) = d(X,P)\}$ è la quadrica di matrice completa

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ \hline -2 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

2. Determinare tipo e segnatura della forma quadratica indotta dalla sottomatrice $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbf{R})$ di $\bar{A}$ formata dalle prime tre righe e colonne.
3. Stabilire se Q è una quadrica di rotazione e determinarne la forma canonica per rototraslazione.
4. Calcolare le matrici delle proiezioni ortogonali sugli autospazi di A.

Solution. **1** Abbiamo

$$\begin{aligned} d(X,H) = d(X,P) &\Leftrightarrow \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 4x - 4z + 4 = 0 \end{aligned}$$

L'ultima equazione è quella di una quadrica la cui matrice completa è $\bar{A}$. **2** Dal momento che avremo bisogno degli autovalori per il punto 3, conviene calcolare il polinomio caratteristico di A, che è $p(x) = -x(2-x)^2$. Abbiamo un autovalore semplice $x = 0$ e un autovalore doppio $x = 2$, quindi A è semidefinita positiva e la sua segnatura è $(2,0,1)$. **3** Se L è la retta passante per P e ortogonale ad H e K è uno qualunque dei piani supportati da L, $Q \cap K$ è il luogo dei punti equidistanti da P e dalla retta $H \cap K$, quindi è una parabola C. Q è il luogo dei punti ottenuti ruotando C intorno a r, quindi è un paraboloide ellittico di rotazione. La forma canonica del polinomio è $c_1x^2 + c_2y^2 + 2c_3 = 0$, dove $c_1 = c_2 = 2$ sono gli autovalori non nulli e $c_1c_2c_3^2 = -\det(\bar{A}) = 8$; poichè c_3 deve essere discorde rispetto a c_1 e c_2 troviamo $2x^2 + 2y^2 - \sqrt{2}z = 0$ e quindi la forma normalizzata

$$\frac{x^2}{1/\sqrt{2}} + \frac{y^2}{1/\sqrt{2}} = z.$$

4 Una base dell'autospazio E_0, ottenuta risolvendo il sistema $Ax = 0$ è il vettore $v = (1 - 1\ 0)^{\mathrm{t}}$. Poichè abbiamo solo due autospazi, che sono ortogonali perché A è simmetrica, abbiamo

$$P_0 = \frac{vv^{\mathrm{t}}}{v^{\mathrm{t}}v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = I - P_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Geometria e algebra lineare (082747), 7 Luglio 2021

Terzo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

In $\mathbf{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = (0\ \ 1\ \ 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (1\ \ 1\ \ 1)^{\mathsf{t}}, \qquad v_3 = (0\ \ 0\ \ 1)^{\mathsf{t}}.$$

1. Mostrare che esiste una sola funzione lineare $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tale che
$$f(v_1) = 0, \qquad f(v_2) = v_2, \qquad f(v_3) = v_3.$$
2. Scrivere la matrice rappresentativa M di f rispetto alla base canonica di $\mathbf{R}^3$.
3. Determinare dimensione e una base di $\operatorname{im}(f)$ e $\ker(f)$.
4. Scrivere equazioni cartesiane del sottospazio $U = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbf{R}^3$ generato da v_1 e v_2 e della sua immagine diretta $f_*(U)$ lungo f.
5. Determinare la segnatura della forma quadratica rappresentata dalla matrice $A := M + M^{\mathsf{t}}$, classificare la quadrica Q di matrice completa
$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ b^{\mathsf{t}} & -1 \end{pmatrix}$$
dove $b = (1\ \ 0 - 2)^{\mathsf{t}}$ e stabilire se ha centro.

Solution. **1** La matrice (v_1, v_2, v_3) ottenuta accostando i vettori v_i ha determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

che è diverso da zero. Quindi $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e la f si estende ad un'unica funzione lineare su $\mathbf{R}^3$. **2** Piuttosto che calcolare la matrice rappresentativa rispetto a B, che si ottiene direttamente dalla definizione, e poi utillizzare la formula del cambiamento di base, qui è più conveniente osservare che

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(v_2 - v_1 - v_3) = f(v_2) - f(v_1) - f(v_3) = v_2 - v_3 = (1\ \ 1\ \ 0)^{\mathsf{t}} \\ f(e_2) &= f(v_1) = 0 = (0\ \ 0\ \ 0)^{\mathsf{t}} \\ f(e_3) &= f(v_3) = v_3 = (0\ \ 0\ \ 1)^{\mathsf{t}} \end{aligned}$$

e dunque la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3 Poiché B è una base di $\mathbf{R}^3$, $f_*(B) = \{0, v_2, v_3\}$ è un insieme di generatori per $\operatorname{im}(f)$; possiamo omettere il vettore nullo, che non da contributo e osservare che v_2 e v_3 sono indipendenti perché non proporzionali; quindi (v_2, v_3) è una base di $\operatorname{im}(f)$ che ha dunque dimensione 2. Dal teorema di nullità più rango abbiamo allora che $\dim \ker f = \dim \mathbf{R}^3 - \dim \operatorname{im} f = 3 - 2 = 1$; e poiché $v_1 \in \ker f$ dalla definizione di f e $v_1 \neq 0$, (v_1) è una base del nucleo. **4** Poiché $U = \langle v_1, v_2 \rangle$, $f_*(U) = \langle f(v_1), f(v_2) \rangle = \langle 0, v_2 \rangle = \langle v_2 \rangle$. La riduzione a scala

$$(v_2, v_1|x) = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

mostra che due insiemi di equazioni cartesiane per U e la sua immagine sono rispettivamente

$$U : \left\{ x_3 - x_1 = 0 \right. \qquad\qquad f_*(U) : \begin{cases} x_2 - x_1 = 0 \\ x_3 - x_1 = 0 \end{cases}$$

5 La matrice completa di Q e una sua riduzione simmetrica che non sposta la quarta riga e colonna sono rispettivamente

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^1\!/_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Quindi A ha segnatura $(2, 1, 0)$. E poiché $r = 3 < 4 = \bar{r}$ e $p = 1 < 2 = \bar{p}$, Q è un paraboloide iperbolico, quindi ha centro di simmetria.

2

In $\mathbf{R}^4$ si consideri il sottospazio U di equazione $3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$.

1. Determinare la dimensione e una base di U.
2. Determinare la dimensione e una base di $U^\perp$.
3. Calcolare le proiezioni del vettore $w = (1\ 1\ 1\ 1)^t$ su U e $U^\perp$.

Solution. **1** U è il nucleo della matrice $A = (3 - 2\ 1\ 0)$ che ha rango 1, quindi $\dim U = \dim\ker A = 3 - \operatorname{rk} A = 4 - 1 = 3$. Risolvendo il sistema $Ax = 0$ si trova che le soluzioni sono della forma

$$x = \begin{pmatrix} {}^2\!/_3 t_1 - {}^1\!/_3 t_2 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = s_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{3} s_i u_i$$

dove abbiamo posto $s_i = {}^1\!/_3 t_i$ per $i = 1, 2$ e $s_3 = t_3$. Quindi (u_1, u_2, u_3) è una base di U. **2** Basta osservare che $U^\perp = \ker(A)^\perp = \operatorname{Row}(A)$. Quindi $\dim U^\perp = \operatorname{rk} A = 1$ e una sua base è il vettore $v = (3 - 2\ 1\ 0)^t$. **3** Le proiezioni di w su $U^\perp$ e U rispettivamente sono

$$w_2 = \frac{w \cdot v}{v \cdot v} v = \frac{2}{14} v = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = w - w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Geometria e algebra lineare (082747), 8 Settembre 2021

Quarto appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

In $\mathbf{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = (1 -1 \ 0 -1)^{\mathsf{t}}, \quad v_2 = (0 \ 1 \ 1 \ 1)^{\mathsf{t}},$$

e i sottospazi

$$U = \langle v_1, v_2 \rangle, \quad W = \{x \in \mathbf{R}^4 : 2x_1 + x_2 + x_4 = 0, \ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \ x_2 + x_4 = 0\}.$$

1. Determinare dimensione e una base di U e W.
2. Calcolare le dimensioni di $U + W$ e $U \cap W$.
3. Determinare una base di $W^\perp$.

Solution. $\boxed{1}$ Oltre che generatori di U, v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti perché non sono proporzionali. Quindi $B = (v_1, v_2)$ è una base di U e $\dim U = 2$. Se risolviamo il sistema lineare $Mx = 0$ che definisce W troviamo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3 = t - t = 0 \\ x_2 = -x_4 = -t \\ x_3 = x_4 = t \\ x_4 = t \end{cases} \qquad x = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi $w = (0 -1 \ 1 \ 1)^{\mathsf{t}}$ è una base di W e $\dim W = 1$. $\boxed{2}$ Se riduciamo a scala la matrice $N = (v_1, v_2, w)$ dei generatori di $U + W$ troviamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U + W) = \operatorname{rk} N = 3$ e dalla formula di Grassmann abbiamo che

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 1 - 3 = 0.$$

$\boxed{3}$ Poiché $W = \ker M$, $W^\perp = \operatorname{Row}(M)$. In 1 abbiamo visto che $\operatorname{rk} M = 3$, quindi le tre righe di M sono una base di $W^\perp$.

2

Si consideri l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito dalle formule

$$f(e_1) = e_1 + e_2, \qquad f(e_2) = 4e_1 + e_2, \qquad f(e_3) = 3e_3,$$

dove gli e_i sono i vettori della base canonica E.

1. Scrivere la matrice rappresentativa M di f rispetto a E.
2. Provare che esiste una base B di $\mathbf{R}^3$ formata da autovettori di f e scrivere la matrice N che rappresenta f rispetto a B.

Solution. $\boxed{1}$ Dalla definizione di f si trova immediatamente che

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 Si vede pure che $Me_3 = 3e_3$, quindi e_3 è un autovettore relativo all'autovalore $x_3 = 3$. Per trovare gli altri autovalori x_1 e x_2 basta osservare che

$$x_1 + x_2 = \operatorname{tr}(M) - x_3 = 5 - 3 = 2, \qquad x_1 x_2 = \det(M)/x_3 = -3.$$

Quindi $x_1 = 3$ e $x_2 = -1$, $a_{-1} = 1$ e $a_3 = 2$ e il polinomio caratteristico di M si spezza su **R**. Dalle riduzioni a scala

$$M + I = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si trova che $g_{-1} = 1$ e $g_3 = 2$, quindi gli autovalori sono regolari, M è diagonalizzabile e$\mathbf{R}^3$ ha una base B di autovettori. Se ordiniamo i vettori di B in modo da mettere prima un autovettore di E_{-1} e poi due autovettori indipendenti di E_3, allora la matrice rappresentativa di f rispetto a B è la matrice diagonale degli autovalori

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3

In $\mathbf{R}^3$ sono dati il piano H e la retta L di equazioni

$$H : x - y = 0, \qquad L : \begin{cases} x = 1 \\ y = th^2 \\ z = t(1-h) \end{cases}$$

dove $h \in \mathbf{R}$ è fissato.

1. Stabilire la posizione reciproca di H e L in dipendenza da h.
2. Posto $h = 1$, verificare che l'equazione della quadrica

$$Q = \{X \in \mathbf{R}^3 : d(X, L) = 2 \cdot d(X, H)\},$$

luogo dei punti X la cui distanza da L è doppia della distanza da H, è

$$Q : x^2 + 2y^2 - z^2 - 4xy + 2x - 1 = 0.$$

3. Classificare Q.

Solution. 1 La direzione normale ad H è quella del vettore $n = (1 -1\ 0)^t$ mentre quella di L è $v = (0, h^2, 1-h)^t$. Abbiamo che

$$L \parallel H \Leftrightarrow v \perp n \Leftrightarrow v \cdot n = 0 \Leftrightarrow -h^2 = 0 \Leftrightarrow h = 0.$$

Quindi per $h \neq 0$ L e H sono trasversali. Per $h = 0$, se sostituiamo le coordinate di L in H troviamo l'equazione $1 - 0 = 0$ che non ha soluzioni; quindi $L \cap H = \varnothing$ e L e H sono propriamente paralleli. 2 Se si prende $t = 0$ si vede che L passa per $P = (1, 0, 0)^t$. Osservato che in questo caso $v = (0, 1, 0)^t$, abbiamo

$$(X - P) \wedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ x-1 \end{pmatrix},$$

e quindi

$$d(X, L) = \frac{\|(X - P) \wedge v\|}{\|v\|} = \sqrt{(x-1)^2 + z^2}, \qquad d(X, H) = \frac{|x - y|}{\sqrt{2}}.$$

Per l'equazione di Q, quadrando la condizione che la definisce, abbiamo successivamente

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2+z^2=4\frac{(x-y)^2}{2}\\
&2(x-y)^2-(x-1)^2-z^2=0\\
&x^2+2y^2-z^2-4xy+2x-1=0.
\end{aligned}
$$

3 La matrice completa di Q e una sua riduzione simmetrica, che è anche una riduzione della parte quadratica, sono

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Quindi $r=3=r'$, $p=1=p'$ e Q è un cono a punti reali.

Geometria e algebra lineare (082747), 18 Gennaio 2022

Seconda prova in itinere / primo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Nello spazio euclideo $\mathbf{R}^4$ dotato del prodotto interno canonico, si considerino i sottospazi $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ e $W = \langle w_1, w_2 \rangle$, dove

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare equazioni cartesiane per U.
2. Trovare una base di $U^\perp$ e completarla a una base di $\mathbf{R}^4$.
3. Mostrare che esiste un endomorfismo $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ con nucleo U e tale che

$$f(e_1) = w_1, \qquad f(e_1 + e_2) = w_2.$$

Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche.

Solution. **1** Equazioni cartesiani di U si ottengono imponento che il sistema $Ut = x$ abbia soluzione per un generico $x \in \mathbf{R}^4$, dove $U = (u_1, u_2)$. La risolubilità del sistema corrisponde alla condizione $r = r'$ di uguaglianza fra i ranghi. Si trova, con una riduzione a scala

$$(u_1, u_2|x) = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ -1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{cc:l} 1 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_3 + x_4 \end{array}\right) \qquad U : \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2 Se A è la matrice del sistema delle equazioni di U, allora $U = \ker A$ e $U^\perp = (\ker A)^\perp = \operatorname{Row} A$. Le righe della matrice sono indipendenti, qundi una base di $U^\perp$ è (u_3, u_4) dove

$$u_3 = (1, -1, 0, 0)^{\mathrm{t}}, \qquad u_4 = (1, 0, -1, -1)^{\mathrm{t}}$$

sono le righe di A. Poiché la somma di sottospazi mutuamente ortogonali è sempre diretta e $U \oplus U^\perp = \mathbf{R}^4$, una base di $\mathbf{R}^4$ che estende la base di $U^\perp$ è l'unione (u_1, u_2, u_3, u_4) delle basi di U e $U^\perp$. **3** In presenza delle altre due condizioni, la richiesta che $\ker f = U$ equivale a richiedere che $f(u_1) = f(u_2) = 0$. La successione di vettori $B = (e_1, e_1 + e_2, u_2, u_1)$ è una base di $\mathbf{R}^4$, perché la matrice corrispondente

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è a scala e ha rango 4. Quindi esiste un'unica funzione lineare f che soddisfa le condizioni richieste. La matrice rappresentativa di f rispetto alla base B nel dominio e alla base canonica E nel codominio e la matrice rappresentativa N rispetto alle basi canoniche sono rispettivamente

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad N = MB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

N può anche essere calcolata osservando che, per linearità di f,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= w_1 \\ f(e_2) &= f((e_1+e_2)-e_1) = f(e_1+e_2) - f(e_1) = w_2 - w_1 \\ f(e_3) &= f(u_2 - (e_1+e_2)) = f(u_2) - f(e_1+e_2) = 0 - w_2 = -w_2 \\ f(e_4) &= f(-u_1 + e_3) = -f(u_1) + f(e_3) = 0 - w_2 = -w_2. \end{aligned}$$

2

Supponiamo che $B = (b_1, b_2, b_3)$ sia una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ rispetto al prodotto interno canonico e che $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ sia l'endomorfismo definito dalle formule

$$f(b_1) = (k+2)b_1 + (k-2)b_3, \qquad f(b_2) = 3b_2, \qquad f(b_3) = kb_1 + kb_3,$$

dove $k \in \mathbf{R}$ è un parametro.

1. Scrivere la matrice rappresentativa M di f rispetto a B.
2. Stabilire per quali $k \in \mathbf{R}$ f è diagonalizzabile su **R**.
3. Stabilire se esistono $k \in \mathbf{R}$ per cui f è simmetrico.

Solution. **1** Dalla definizione di f si trova immediatamente che

$$M = \begin{pmatrix} k+2 & 0 & k \\ 0 & 3 & 0 \\ k-2 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

2 La condizione $f(b_2) = 3b_2$ mostra che $x_1 = 3$ è un autovalore di f. Dalla matrice M abbiamo che

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = M = 2k+5, \qquad \prod_{i=1}^{3} x_i = \det(A) = 12k$$

quindi $x_2 + x_3 = 2k+2$ e $x_2x_3 = 4k$ da da cui si trova $x_2 = 2$, $x_3 = 2k$. Quindi il polinomio caratteristico di f si spezza su **R** e se $k \neq 1, {}^3/_2$ gli autovalori sono distinti, quindi regolari e f è diagonalizzabile. Poiché

$$M[1/k] - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M[{}^3/_2/k] - 3I = \begin{pmatrix} {}^1/_2 & 0 & {}^3/_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -{}^1/_2 & 0 & -{}^3/_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} {}^1/_2 & 0 & {}^3/_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo, per $k = 1$, che $g_2 = 1 < 2 = a_2$ e f non è diagonalizzabile mentre per $k = {}^3/_2$ abbiamo $a_3 = 2 = g_3$ e $a_2 = 1 = g_2$ quindi f è diagonalizzabile su **R**. **3** f è simmetrico quando la sua matrice rappresentativa rispetto a una qualunque base ortonormale è simmetrica. Poiché B è ortonormale, f è simmetrico quando M è simmetrica e cioè quando $k = k-2$. Ma questa equazione non ha soluzioni.

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino il piano $H : x+y+z = 2$ e il punto $P = (1,2,1)^{\mathsf{t}}$.

1. Dimostrare che il luogo
$$Q = \left\{ X \in \mathbf{R}^3 : d(X,H) = \tfrac{1}{\sqrt{3}} d(X,P) \right\}$$
è la quadrica di equazione $2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2z - 2 = 0$.
2. Scrivere l'equazione canonica di Q.
3. Dimostrare che Q è una quadrica di rotazione e determinare una parametrizzazione del suo asse di rotazione.

Solution. **1** Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
d(X,H)^2 = \frac{1}{3}d(X,P)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+y+z-2)^2 &= \frac{1}{3}[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2] \\
&\Leftrightarrow (x+y+z-2)^2-(x-1)^2-(y-2)^2-(z-1)^2=0 \\
&\Leftrightarrow 2xy+2xz+2yz-2x-2z-2=0
\end{aligned}
$$

2 , **3** Se r è la retta passante per P e normale ad H

$$
\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+t \end{cases}
$$

e K è uno qualunque dei piani del fascio proprio supportato da r, allora $C := Q \cap K$ è il luogo dei punti di K per cui la distanza da P è $\sqrt{3}$ volte la distanza dalla retta $s := H \cap K$. C è una conica di eccentricità $e = \sqrt{3} > 1$ e cioè un'iperbole e la conica non cambia al variare di K. Quindi Q è ottenuta ruotando C intorno a retta r, che è l'asse di rotazione e Q è un iperboloide ellittico. Il polinomio caratteristico della parte quadratica di Q è

$$
p(t) = \det(A-tI) = \begin{vmatrix} -t & 1 & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 1 & -t \end{vmatrix} = 2+3t-t^3 = (2-t)(1+t)^2
$$

quindi gli autovalori sono $c_1 = 2$ e $c_2 = c_3 = -1$. Infine $c_4 = \det \bar{A}/\det A = -2$, quindi la forma canonica del polinomio per rototraslazione e la forma canonica per congruenza di Q sono rispettivamente

$$
2x^2-y^2-z^2-2=0, \qquad x^2-\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{2}=1.
$$

Geometria e algebra lineare (082747), 7 Febbraio 2022

Secondo appello

Cognome, Nome	Matricola	Voto

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Sia $U \subseteq \mathbf{R}^4$ il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

1. Determinare dimensione e una base di U.
2. Scrivere la matrice della proiezione ortogonale su U rispetto alla struttura euclidea canonica di $\mathbf{R}^4$.
3. Calcolare la proiezione di $v = (1, 0, 0, 0)^{\mathsf{t}}$ su $U^\perp$.

Solution. È più conveniente calcolare prima la matrice della proiezione ortogonale su $U^\perp$: questo perché se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

è la matrice del sistema lineare che definisce U, allora $U = \ker A$ e quindi $U^\perp = \ker(A)^\perp = \operatorname{Row}(A)$. Le righe di A sono indipendenti perché non proporzionali, quindi $\dim U^\perp = \operatorname{rk}(A) = 2$ e le righe sono una base di $U^\perp$. Per calcolare la matrice Q della proiezione ortogonale su $U^\perp$ serve una base ortogonale, che possiamo ottenere con l'algoritmo di Gram-Schmidt:

$$q_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad q_2 = a_2 - \frac{a_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_1} q_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Le proiezioni ortogonali su $U^\perp$ e U sono quindi rispettivamente

$$Q = \sum_{i=1}^{2} \frac{q_i q_i^{\mathsf{t}}}{q_1^{\mathsf{t}} q_i} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P = I - Q = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dalla formula di Grassmann per le somme dirette abbiamo che $\dim U = \dim \mathbf{R}^4 - \dim U^\perp = 4 - 2 = 2$ e le prime due colonne di P, che non sono proporzionali, sono indipendenti e quindi una base di U. Infine, la proiezione ortogonale di v su $U^\perp$ è Qv e cioè la prima colonna di Q, $(3/5, 1/5, 2/5, -1/5)^{\mathsf{t}}$.

2

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalla formula

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 3x_1 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare dimensione, una base ed equazioni cartesiane di $\ker(f)$ e $\operatorname{im}(f)$.
2. Determinare lo spettro di f.
3. Stabilire se esiste una base $B \subseteq \mathbf{R}^3$ rispetto alla quale la matrice rappresentativa di f è

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Solution. **1** La riduzione a scala

$$(A|x) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 2 & -1 & -2 & x_2 \\ 3 & 0 & -3 & x_3 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - 3x_1 \end{array}\right) = (U|y)$$

della matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica cui abbiamo accostato un vettore incognito mostra che $\dim \operatorname{im}(f) = 2$, che le prime due colonne di A sono una base dell'immagine e che $3x_1 - x_3 = 0$ è una sua equazione cartesiana. Dal teorema di rango più nullità abbiamo che $\dim \ker(f) = 3 - 2 = 1$ e terminando di risolvere il sistema $Ux = 0$ si trova che una base del nucleo è data dal vettore $(1, 0, 1)^{\mathrm{t}}$; equazioni cartesiane del nucleo si ottengono direttamente dalla definizione di f:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

dove l'ultima equazione è stata omessa perché $\operatorname{rk}(A) = 2$. **2** Poiché il nucleo di f ha dimensione 1, $x_1 = 0$ è un autovalore semplice di f. Dalla seconda colonna di A si vede immediatamente che $Ae_2 = -e_2$, quindi anche $x_2 = -1$ è un autovalore. Ma allora $\sum_{i=1}^{3} x_i = \operatorname{tr}(A) = -3$, quindi $x_3 = -2$. **3** La matrice M è triangolare alta, quindi i suoi autovalori sono gli elementi sulla diagonale, $0, 1, -2$. Poiché sono tutti semplici M è diagonalizzabile, così come la matrice A, ed entrambe sono simili alla matrice diagonale con gli stessi autovalori e sono dunque simili fra loro. Poiché la classe di similitudine di una matrice è costituita da tutte le matrici di un endomorfismo rispetto alle possibili basi, possiamo concludere che esiste una base rispetto alla quale la matrice rappresentativa di f è M.

3

In $\mathbf{R}^3$ si considerino le rette

$$L : \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad L' : \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

e sia Q la superficie formata dai punti equidistanti da L e L'.

1. Mostrare che Q è la quadrica di equazione $x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 4y - 2 = 0$.
2. Scrivere la forma canonica per congruenza di Q.

Solution. **1** Ricordiamo che la distanza di un punto $X \in \mathbf{R}^3$ dalla retta passante per il punto P con direzione v è

$$d = \frac{\|v \wedge (X - P)\|}{\|v\|}.$$

Dalle equazioni parametriche, che si costruiscono immediatamente, si vede che L passa per $P = 0$ e ha direzione $v = (0, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ mentre L' passa per $P' = (0, 1, 0)^{\mathrm{t}}$ e ha direzione $v' = (1, 0, 1)^{\mathrm{t}}$. Poiché

$$v \wedge (X - P) = (z - y, x, -x)^{\mathrm{t}}, \qquad v' \wedge (X - P') = (1 - y, x - z, y - 1)^{\mathrm{t}}$$

abbiamo che

$$
\begin{aligned}
d(X,L)^2 = d(X,L')^2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(y-z)^2+2x^2] = \frac{1}{2}[2(y-1)^2+(x-z)^2] \\
&\Leftrightarrow (y-z)^2+2x^2-2(y-1)^2-(x-z)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2-y^2+2xz-2yz+4y-2 = 0
\end{aligned}
$$

La riduzione simmetrica della matrice completa di Q

$$
\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
$$

mostra che $r = 2 < 4 = r'$ e che $p = 1$, quindi Q è un paraboloide iperbolico e la forma canonica del suo polinomio è $c_1x^2 + c_2y^2 - 2c_3z = 0$, dove c_1 e c_2 sono gli autovalori non nulli di A e valgono $\pm\sqrt{3}$; c_3 può essere determinato dall'invarianza dei determinanti, $-c_1c_2c_3^2 = \det(\bar{A}) = 4$, e dal fatto che deve essere concorde rispetto all'autovalore positivo c_1; quindi $c_3 = 2/\sqrt{3}$. La forma canonica del polinomio e la forma canonica per congruenza sono quindi

$$
\sqrt{3}x^2 - \sqrt{3}y^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}z = 0, \qquad \frac{x^2}{4/3} - \frac{y^2}{4/3} = z.
$$

Geometria e algebra lineare (082747), 24 Giugno 2022

Terzo appello / B

Cognome, Nome	**Codice persona**	**Voto**

Istruzioni. Le risposte devono essere scritte su questi fogli negli spazi indicati; i fogli di brutta non possono essere consegnati e non saranno comunque valutati. Tutte le soluzioni devono essere giustificate dal punto di vista teorico, in modo conciso ma chiaro. Tutti i risultati devono essere giustificati. Soluzioni non chiaramente leggibili non saranno valutate.

1

Sia $V = \{p \in \mathbf{R}[x] : \deg(p) < 3\}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore di 3 a coefficienti reali e sia $f : V \to V$ l'endomorfismo definito dalle formule

$$f(x^2) = x + x^2, \qquad f(x) = 1 + x^2, \qquad f(1) = x + x^2.$$

1. Scrivere la matrice rappresentativa di f rispetto alla base $B = (x^2, x, 1)$ nel dominio e $C = (1, x, x^2)$ nel codominio.
2. Determinare dimensione e una base dle nucleo e dell'immagine di f.
3. Dimostrare che $U = \{p \in V : p(1) = 0\}$ è un sottospazio di V.
4. Calcolare le dimensioni di U e della sua immagine diretta $f_*(U)$ lungo f.

Dalle equazioni che definiscono f si ottiene immediatamente che la matrice rappresentativa rispetto a B e C e una sua riduzione a scala sono rispettivamente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dunque

$$\dim \operatorname{im}(f) = \operatorname{rk}(M) = 2, \quad \dim \ker(f) = 3 - \dim \operatorname{im}(f) = 3 - 2 = 1.$$

Le prime due colonne di M, che corrispondono ai pivot nella riduzione a scala, sono una base di $\operatorname{Col}(M)$. Le soluzioni del sistema lineare $Mx = 0$ sono i vettori della forma $x = t(1, 0, -1)^{\mathsf{t}}$, dunque il vettore $v = (1, 0, -1)^{\mathsf{t}}$ è una base di $\ker(M)$. Quindi

$$\operatorname{im}(f) = \langle x + 1, x^2 + 1 \rangle, \qquad \ker(f) = \langle 1 - x^2 \rangle.$$

La valutazione in 1, $e : V \to \mathbf{R}$ definita da $e(p) = p(1)$ è un epimorfismo di spazi vettoriali (vedere gli appunti); quindi $U = \ker(e)$ è un sottospazio. Poiché $\ker(f) \subseteq U$, dal teorema di rango più nullità si trova

$$\dim(U) = \dim \ker(e) = 3 - \dim \operatorname{im}(e) = 3 - 1 = 2, \qquad \dim f_*(U) = \dim(U) - \dim \ker(f) = 2 - 1 = 1.$$

2

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito dalla formula

$$f(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ \ x_2,\ \ x_2 + 3x_3)^{\mathsf{t}}.$$

1. Determinare lo spettro di f.
2. Stabilire se f è diagonalizzabile.
3. Trovare una base per la somma U degli autospazi.
4. Scrivere la matrice della proiezione ortogonale su U.

La matrice rappresentativa di f rispetto ala base canonica e il suo polinomio caratteristico sono

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = (1-x)^2(3-x),$$

quindi $\sigma(f) = \{1, 3\}$. Dalle riduzioni a scala

$$M - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M - 3I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

abbiamo che $E_1 = \langle v_1 \rangle$ and $E_3 = \langle v_2 \rangle$ dove $v_1 = (1,0,0)^{\mathrm{t}}$ e $v_2 = (1,0,2)^{\mathrm{t}}$. In particolare, $g_1 = 1 < 2 = a_1$, quindi f non è diagonalizzabile. $U = E_1 + E_3 = \langle v_1, v_2 \rangle$; ma v_1 e v_2 non sono proporzionali, quindi (v_1, v_2) è una base per U. Posto $N = (v_1, v_2) \in \mathrm{Mat}_{3\times 2}(\mathbf{R})$, abbiamo che $U = \mathrm{Col}(N)$, quindi $U^{\perp} = \ker(N^{\mathrm{t}}) = \langle e_2 \rangle$. Le proiezioni su $U^{\perp}$ e U sono quindi

$$Q = \frac{e_2 \cdot e_2^{\mathrm{t}}}{e_2^{\mathrm{t}} \cdot e_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = I - Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3

In $\mathbf{R}^3$ si consideri la quadrica

$$Q : x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 1 = 0.$$

1. Classificare Q.
2. Detta C la conica ottenuta intersecan do Q con il piano $z = 0$, classificare C e scriverne la forma canonica per congruenza.

La matrice completa di Q e una sua riduzione simmetrica simultanea sono

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quindi $r = 2 < 3 = \bar{r}$ e $p = 0 < 1 = \bar{p}$ e Q è un cilindro ellittico a punti reali. Sostituendo $z = 0$ nell'equazione di Q si trova

$$C : x^2 + y^2 - xy - 1 = 0$$

e dalla precedente riduzione simmetrica, omettendo la terza riga e colonna, si trova che per C, $r = 2 < 3 = \bar{r}$, A è definita positiva e $\bar{A}$ indefinita, quindi C è un'ellisse. Il polinomio caratteristico di A è

$$p = \begin{vmatrix} 1-x & -1/2 \\ -1/2 & 1-x \end{vmatrix} = \frac{3}{4} - 2x + x^2$$

e gli autovalori sono $x = 1/2, 3/2$. Quindi la forma canonica per congurneza dell'ellisse è

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2/3} = 1.$$

Geometria e algebra lineare (082747), 14 Luglio 2022

Quarto appello / B

Cognome, Nome	**Codice persona**	**Voto**

Istruzioni. Le risposte devono essere scritte su questi fogli negli spazi indicati; i fogli di brutta non possono essere consegnati e non saranno comunque valutati. Tutte le soluzioni devono essere giustificate dal punto di vista teorico, in modo conciso ma chiaro. Tutti i risultati devono essere giustificati. Soluzioni non chiaramente leggibili non saranno valutate.

1

Si considerino i sottospazi di $\mathbf{R}^4$

$$U = \langle (1,1,0,0)^{\mathsf{t}},\ (2,1,0,1)^{\mathsf{t}} \rangle, \qquad V = \{x \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - 5x_4 = 0,\ x_2 - 2x_4 = 0\}.$$

1. Determinare equazioni di U e una base di V.
2. Determinare dimensioni e basi di $U+V$ e $U \cap V$.
3. Determinare la proiezione ortogonale di $v = (3,-1,1,-2)^{\mathsf{t}}$ su V.

1. Equazioni cartesiane di U si ottengono dalla riduzione a scala

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & -x_1 + x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

mentre risolvendo il sistema delle equazioni di V si trova che le soluzioni sono della forma $x = t_1 v_1 + t_2 v_2$ dove

$$v_1 = (0,0,1,0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_2 = (3,2,0,1)^{\mathsf{t}}$$

e quindi (v_1, v_2) è una base di V. 2. Riducendo a scala la matrice dei generatori di U e V si trova

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi $\dim(U+V) = 3$ e una base della somma è formata dalle prime tre colonne della matrice a sinistra. Risolvendo il sistema lineare dato dall'unione delle equazioni di U e V si trova che le soluzioni sono della forma $x = tw$ dove $w = (3,2,0,1)^{\mathsf{t}}$; quindi $\dim(U \cap V) = 1$ e w è una base dell'intersezione. 3. La base (v_1, v_2) di V trovata in 1 è già ortogonale; la proiezione di w su V è

$$w' = \frac{v_1 \cdot w}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{v_2 \cdot w}{v_2 \cdot v_2} v_2 = \frac{1}{1} v_1 + \frac{5}{14} v_2 = \frac{1}{14}(15, 10, 14, 5)^{\mathsf{t}}.$$

2

Si considerino i vettori di $\mathbf{R}^3$

$$v_1 = (1,0,2)^{\mathrm{t}}, \qquad v_2 = (1,1,0)^{\mathrm{t}}, \qquad v_3 = (1,0,1)^{\mathrm{t}}$$

e sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo definito dalle formule

$$f(v_1) = v_1, \qquad f(v_2) = v_2, \qquad f(v_3) = 0.$$

1. Dimostrare che $B = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ è una base di $\mathbf{R}^3$ e determinare la matrice rappresentativa di f rispetto a B. Stabilire se f è diagonalizzabile e se è ortogonalmente diagonalizzabile.
2. Dimostrare che la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Posto $w = (1-t, -2+2t, 3-3t)^{\mathrm{t}}$, determinare l'immagine inversa $f^*(w)$ di w lungo f al variare di $t \in \mathbf{R}$.

1. Il determinante della matrice formata dai tre vettori è diverso da zero, dunque i tre vettori formano una base di $\mathbf{R}^3$, come mostrato sotto a sinistra. La matrice rappresentativa rispetto a B è la matrice M sotto a destra.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad\qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il fatto che B sia una base mostra anche che le formule utilizzate per descrivere f definiscono un unico endomorfismo. La matrice M è diagonale, quindi B costituisce una base di autovettori per f e f è diagonalizzabile. Tuttavia l'autospazio E_0 non è ortogonale a E_1, quindi f non è ortogonalmente diagonalizzabile. 2. B è la matrice di passaggio dalla base canonica a B; la matrice rappresentativa di f rispetto alla base canonica è quindi

$$N = BMB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Le immagini inverse sono le soluzioni del sistema lineare $Nx = w$. Dalla riduzione

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 & -2+2t \\ -2 & 2 & 2 & 3-3t \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1-t \\ 0 & 1 & 0 & -2+2t \\ 0 & 0 & 0 & -3+3t \end{array}\right)$$

si vede che esistono immagini inverse solo quando $t = 1$ e in questo caso le immagini inverse sono i vettori $v = t(1,0,1)^{\mathrm{t}}$.

3

In $\mathbf{R}^3$ si consideri la quadrica

$$Q : 5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 2xy + 2x - 2 = 0.$$

1. Stabilire se Q è a centro ed eventualmente calcolarne le coordinate.
2. Classificare Q.
3. Determinare una parametrizzazione degli assi di simmetria di Q.

La matrice completa di Q e una sua riduzione simmetrica simultanea sono

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 24/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -53/24 \end{array}\right).$$

Poiché $r = 3 < 4 = \bar{r}$ e $p = 0 < 1 = \bar{p}$ e Q è un ellissoide a punti reali e in particolare ha un centro di simmetria. Risolvendo il sistema $Ax = -b$ si trova che il centro è il punto $C = (-5/24, 1/24, 0)$. 3. Le direzioni degli assi sono quelle degli autospazi della matrice A. Gli autovalori di A sono $x = 2, 4, 6$ e gli autospazi corrispondenti sono generati dai vettori

$$v_2 = (0, 0, 1)^{\mathsf{t}}, \qquad v_4 = (1, -1, 0)^{\mathsf{t}}, \qquad v_6 = (1, 1, 0)^{\mathsf{t}} \tag{1}$$

e l'equazione parametrica dell'asse relativo all'autospazio E_i è $x = C + tv_i$.

Geometria e algebra lineare (082747), Settembre 2022

Quinto appello / parte B

Cognome, Nome	**Codice persona**

Istruzioni. Gli esercizi devono essere svolti sui fogli a stampa, nello spazio sotto il testo e sul retro; i fogli di brutta copia non devono essere consegnati e non saranno valutati. Tutte le risposte devono essere giustificate dal punto di vista teorico in modo sintetico ma completo. I risultati devono essere completamente semplificati. Nome e cognome del candidato sul frontespizio devono essere scritti in carattere stampatello maiuscolo. Esercizi scritti con grafia poco o per nulla leggibile non saranno valutati. La notazione matematica deve conformarsi a quella utilizzata nel corso.

1

Sia $U \subseteq \mathbf{R}^4$ il sottopsazio generato dai vettori

$$u_1 = (1,1,2,0)^{\mathrm{t}}, \qquad u_2 = (1,1,1,1)^{\mathrm{t}}.$$

1. Determinare dimensione ed equazioni di U.
2. Determinare dimensione e una base di $U^\perp$.
3. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbf{R}$ il vettore $v = (1,1,t,2t)^{\mathrm{t}}$ appartiene ad U.
4. Determinare la proiezione ortogonale u di v su U e stabilire per quali valori di t risulta $u = v$.

1. I due vettori non sono proporzionali, quindi sono linearmente indipendenti e formano una base di U; in particolare $\dim U = 2$. La riduzione a scala in basso a sinistra mostra che $x \in U$ se e solo se sono soddisfatte le condizioni a destra, che sono dunque equazioni cartesiane per U.

$$(A|x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & x_4 \\ 0 & 0 & 2x_1 - x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

2. Dalla formula di Grassmann, tenendo conto del fatto che $U \cap U^\perp = 0$ e $U + U^\perp = \mathbf{R}^4$, abbiamo che $\dim U^\perp = \dim \mathbf{R}^4 - \dim U = 2$. Poiché $U = \mathrm{Col}(A)$, abbiamo che $U^\perp = \ker(A^{\mathrm{t}})$ e una base $B = (v_1, v_2)$ di $U^\perp$ si trova risolvendo il sistema omogeneo $A^{\mathrm{t}}x = 0$.

$$A^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = sv_1 + tv_2$$

3. $v \in U$ se le sue coordinate soddisfano le equazioni cartesiane di U:

$$\begin{cases} 2 - t - 2t = 0 \\ 1 - 1 = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow 2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}.$$

4. Per calcolare la proiezione troviamo prima una base ortogonale di U applicando a (u_1, u_2) l'algoritmo di Gram-Schmidt,

$$w_1 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_2 = u_2 - \frac{u_2 w_1}{w_1^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e poi determiniamo la proiezione calcolando i coefficienti di Fourier di v rispetto alla base ortogonale.

$$u = \sum_{i=1}^{2} \frac{v w_i}{w_i^2} w_i = \frac{2+2t}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 + 5t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3t \\ 2+3t \\ 2+t \\ 2+57 \end{pmatrix}$$

La proiezione coincide con v quando $v \in U$ che accade, come si è visto in 3, quando $t = 2/3$.

2

Sia $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ l'endomorfismo indotto dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Determinare gli autovalori e gli autovettori di f e stabilire se f è diagonalizzabile.
2. Siano v_1 un autovettore di f relativo all'autovalore 1, v_2 un autovettore relativo all'autovalore 0 e $v_3 = (1,0,0)^{\mathsf{t}}$. Mostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di R^3.
3. Calcolare la matrice rappresentativa di f rispetto a B.

3

Si consideri la quadrica

$$Q : x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy - 6x - 6y - 6z + 11 = 0.$$

1. Classificare Q.
2. Mostrare che Q è di rotazione e scrivere equazioni parametriche del suo asse di rotazione.