Analisi Matematica 2 - prof. E.Maluta - 31 agosto 2020

Ogni risposta va scritta nello spazio individuato dal numero del corrispondente quesito sul foglio delle risposte e va motivata con calcoli o/e spiegazioni sintetiche.

1. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{(x^2+y^2)^\alpha}$ e, quando esiste, calcolarlo.

2. Data la funzione $f(x,y) = y - |x|\, y^2$, calcolare le derivate parziali prime nel punto $(0,0)$.

3. Verificare che la funzione f dell'esercizio precedente non ammette su $\Re^2$ né punti di massimo né punti di minimo locale.

4. Determinare e disegnare l'insieme di livello zero della funzione f dell'esercizio 2.

5. Stabilire per quali valori dei parametri reali a e b è conservativo il campo vettoriale $F(x,y) = (x^4 + 3ax^2y + bxy^2, x^2y - x^3 + ay^4)$.

6. Per i valori di a e b per cui il campo F dell'esercizio precedente è conservativo, calcolare il lavoro del campo lungo l'arco della parabola di equazione $x = 2y^2$ percorso dal punto $(0,0)$ al punto $(2,1)$.

7. Determinare l'insieme di convergenza puntuale della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n - 1}{3^n + 1}(x-1)^n$, precisando se è chiuso, aperto, né aperto né chiuso.

8. Sia T il triangolo delimitato dalle rette di equazione $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$; calcolare $\int_T (x + 2y)dxdy$.

9. Dato il problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = 2\sqrt[3]{ty} \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$
dire per quali coppie (t_0, y_0) è garantita, almeno localmente, esistenza e unicità della soluzione.

10. Dato il problema di Cauchy precedente, determinare, se esiste, una soluzione non nulla del problema con condizione iniziale $y(0) = 0$.

11. Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale $y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = t$.

12. Se $|\cos x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, quanto valgono a_0, a_1, b_1?

13. Sia f una funzione 2π-periodica. Sotto quali ipotesi su f si può garantire che la sua serie di Fourier converga puntualmente? Quale è la funzione limite puntuale?