Analisi Matematica 2, Ing. Informatica e Telecomunicazioni
Esame del 25 giugno 2021

Durata: 90 minuti

Pagina 1: Domande di teoria - 3 punti - Tempo consigliato: 10 minuti

Tutte le domande in questa pagina ammettono una e una sola *risposta corretta.*

Domanda 1 (1 punto)

L'insieme $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| - e^x > 0\}$ in $\mathbb{R}^2$ è

A chiuso e limitato
B aperto e limitato
C chiuso e illimitato
D $\boxed{\text{V}}$ aperto e illimitato

Domanda 2 (1 punto)

Un generico sistema differenziale lineare $\underline{y}'(t) = A\,\underline{y}(t)$, con A matrice costante 2×2 reale,

A non può avere soluzioni costanti non nulle
B ha sempre soluzioni costanti non nulle
C se $\det A \neq 0$, ha solamente soluzioni del tipo $\underline{y}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{v}_2$, con $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ opportuni vettori di $\mathbb{R}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ opportuni e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
D $\boxed{\text{V}}$ se ha soluzioni periodiche, la sua matrice A non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$

Domanda 3 (1 punto)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette tutte le derivate direzionali in $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. È vero che

A $\boxed{\text{V}}$ f può non essere differenziabile in $\underline{x}_0$
B $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$
C vale la formula del gradiente per f in $\underline{x}_0$
D f è continua in $\underline{x}_0$

Pagina 2: Domande di teoria - 7 punti - Tempo consigliato: 15 minuti

La domanda 4 ammette una e una sola risposta corretta.

Domanda 4 (1 punto)

Sia $\varphi : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva regolare a tratti e sia $\psi : [c,d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una sua riparametrizzazione. Allora

A $\boxed{\text{V}}$ φ e ψ hanno necessariamente la stessa lunghezza
B è possibile che $\varphi(a) = \varphi(b)$ e $\psi(c) \neq \psi(d)$ contemporaneamente
C φ e ψ hanno, punto per punto, vettori tangenti aventi uguale norma
D il sostegno di φ non coincide necessariamente con il sostegno di ψ

Le domande 5 e 6 ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Domanda 5 (3 punti)

Data la serie di Fourier $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$, supponiamo che la serie numerica di termine generale $|a_n| + |b_n|$ sia convergente. Allora è sicuramente vero che

A la serie di Fourier converge puntualmente, ma non totalmente, su $\mathbb{R}$
B la serie di Fourier converge ad una funzione somma, che è derivabile
C $\boxed{\text{V}}$ la serie di Fourier converge ad una funzione somma, che è continua
D $\boxed{\text{V}}$ la serie di Fourier converge totalmente su $\mathbb{R}$
E la serie di Fourier converge ad una funzione somma, che è derivabile due volte

Domanda 6 (3 punti)

Si consideri l'equazione differenziale $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = f(t)$ con $a, b, f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue su I. Siano $y_1(t)$ e $y_2(t)$ due soluzioni dell'equazione su I. È sempre vero che

A per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ si ha che $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ è soluzione della medesima equazione differenziale
B $\boxed{\text{V}}$ $y_1(t) - y_2(t)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata
C l'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale è uno spazio vettoriale
D $\boxed{\text{V}}$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ si ha che $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale $y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = (c_1 + c_2)f(t)$
E $\boxed{\text{V}}$ l'insieme delle soluzioni dell'equazione è uno spazio vettoriale se e solo se $f(t) = 0$ per ogni $t \in I$

Pagina 3: Esercizio 1 - 6 punti - Tempo consigliato: 20 minuti

Le domande ammettono <u>una o più risposte corrette</u>; indicare tutte le risposte corrette.

(1) **(3 punti)** Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3 - \log n}{3^n} x^n$$

si indichi con R il suo raggio di convergenza. Allora

A $\boxed{\text{V}}$ $R = 3$

B $R = e$

C La serie converge in $x = 3$

D $\boxed{\text{V}}$ La serie converge in $x = e = 2,718...$

E $\boxed{\text{V}}$ La serie è derivabile termine a termine nell'intervallo aperto $(-R, R)$

(2) **(3 punti)** Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 - \frac{1}{2}}$$

si ha che

A $\boxed{\text{V}}$ il raggio di convergenza è 1

B il raggio di convergenza è 2

C la serie converge in $x = -1$

D $\boxed{\text{V}}$ la serie converge in $x = 2$

E $\boxed{\text{V}}$ la serie converge in $x = 0$

Pagina 4: Esercizio 2 - 8 punti - Tempo consigliato: 25 minuti

Le domande ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \left(\alpha x^2 + \beta y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}$$

con $\alpha, \beta > 0$ parametri.

(1) **(3 punti)** È vero che

A passando in coordinate polari (r, θ), f non dipende da θ, per ogni $\alpha, \beta > 0$

B $\boxed{\text{V}}$ passando in coordinate polari (r, θ), f non dipende da θ, se e solo se $\alpha = \beta$

C l'insieme di definizione di f è $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

D $\boxed{\text{V}}$ $(0,0)$ è punto di minimo locale per f

E $\boxed{\text{V}}$ per ogni $\alpha, \beta > 0$, f ha massimo su $\mathbb{R}^2$

(2) **(3 punti)** Consideriamo ora il caso $\alpha = \beta = 1$, cioè

$$f(x,y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

È vero che

A $\boxed{\text{V}}$ f ha infiniti punti di massimo in $\mathbb{R}^2$

B f cambia segno in $\mathbb{R}^2$

C $\boxed{\text{V}}$ $\displaystyle\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = \frac{1}{e}$

D f è convessa su tutto $\mathbb{R}^2$

(3) **(2 punti)** Consideriamo ora il caso $\alpha = 3$ e $\beta = 4$, cioè

$$f(x,y) = \left(3x^2 + 4y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2\right)}.$$

È vero che

A Il piano tangente al grafico di f in $(1, 0, f(1,0))$ è $z = x - y + \frac{3}{e}$

B $\boxed{\text{V}}$ Il piano tangente al grafico di f in $(1, 0, f(1,0))$ è $z = \frac{3}{e}$

C $\boxed{\text{V}}$ nel punto $(1,1)$ la derivata di f nella direzione del versore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vale $-\frac{7\sqrt{2}}{e^2}$

D nel punto $(1,1)$ la derivata di f nella direzione del versore $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ vale $\frac{6\sqrt{2}}{e^2}$

Pagina 5: Esercizio 3 - 8 punti.

Le domande ammettono una o più risposte corrette; indicare tutte le risposte corrette.

Si consideri l'equazione differenziale ordinaria

$$y'(t) = \log(1 + t^2)(y(t) - 2)$$

dove *log* è il logaritmo naturale.

(1) **(2 punti)** È vero che
- A l'equazione è autonoma
- B $\boxed{\text{V}}$ l'equazione è lineare
- C non esistono soluzioni il cui grafico passa per il punto $(0, 2)$
- D $\boxed{\text{V}}$ per ogni $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ esiste una e una sola soluzione il cui grafico passa per il punto (t_0, y_0)

(2) **(3 punti)** Si consideri ancora l'equazione differenziale della domanda precedente. Detta $y(t)$ una generica soluzione di tale equazione, si può affermare che
- A $\lambda y(t)$ è ancora soluzione della stessa equazione, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$
- B $\boxed{\text{V}}$ se $y(t)$ non è costante, è strettamente monotona
- C $z(t) = y(t + c)$ è soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$
- D $\boxed{\text{V}}$ esiste almeno una soluzione che cambia segno
- E $\boxed{\text{V}}$ è possibile scrivere esplicitamente $y(t)$ utilizzando i metodi studiati in questo corso

(3) **(3 punti)** Si consideri ora il seguente problema di Cauchy, al variare di $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(t) = \log(1 + t^2)(y(t) - 2) \\ y(0) = a. \end{cases}$$

Detta y_a una sua soluzione e sapendo che essa è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, si può affermare che
- A $\boxed{\text{V}}$ se $a = 2$, l'unica soluzione è la soluzione costante $y_2(t) = 2$ per ogni t
- B se $a = 0$, $\lim_{t\to+\infty} y_0(t) = 0$
- C $\boxed{\text{V}}$ se $a < 2$, $\lim_{t\to+\infty} y_a(t) < 2$
- D $\boxed{\text{V}}$ se $a < 2 < b$, $\lim_{t\to+\infty} y_a(t) \neq \lim_{t\to+\infty} y_b(t)$