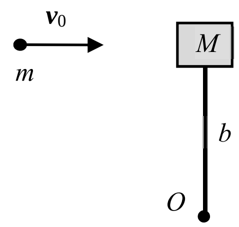
8 / 2 / 2019
ore 11:30

FISICA (terzo appello)

Proff. Proff. Bussetti, Crespi, D'Andrea, Della Valle, Lucchini, Magni, Nisoli, Petti, Pinotti

1) Un blocchetto di legno di massa M è appoggiato su un tavolo orizzontale scabro con coefficiente d'attrito dinamico μ_d ed è vincolato ad un punto fisso, O, del tavolo tramite un'asta di lunghezza b, priva di massa. Il blocchetto, inizialmente fermo, viene colpito da un proiettile di massa m, in moto con velocità $\mathbf{v}_0$ parallela al piano e ortogonale alla direzione iniziale dell'asta. Dopo l'impatto il proiettile rimane conficcato nel blocchetto. Considerando gli oggetti come dei punti materiali, si calcoli:

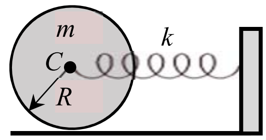
a) la velocità del blocchetto immediatamente dopo l'urto;
b) quanti giri compie il blocchetto di legno prima di fermarsi.



2) Un satellite artificiale si muove attorno alla Terra lungo un'orbita ellittica con distanza del perigeo r_P (minima distanza dal centro della Terra) e dell'apogeo r_A (massima distanza). Si ricavino le espressioni della velocità al perigeo, v_P, e all'apogeo, v_A.
Si esprimano i risultati in funzione di r_A, r_P, della massa della Terra M e della costante di gravitazione universale G.

3) Una ruota omogenea di raggio R e di massa m è appoggiata su un piano orizzontale scabro con coefficiente d'attrito statico μ_s. Il centro C della ruota e collegato tramite una molla di costante elastica k (lunghezza a riposo non nulla) ad un punto fisso. La molla rimane sempre in direzione orizzontale.
Si calcoli:

a) la frequenza d'oscillazione, assumendo che la ruota non strisci;
b) la massima ampiezza delle oscillazioni (massima distanza del centro della ruota dalla posizione d'equilibrio) che possono avvenire senza strisciamento.



[Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse passante per il centro è $I_C = \frac{1}{2} mR^2$ *]*

4)
Si ricavi l'equazione delle trasformazioni adiabatiche reversibili di un gas ideale nella forma $p = p(V)$. Nei vari passaggi si spieghino chiaramente le formule applicate e il significato di tutti simboli utilizzati.

- Scrivere in stampatello NOME, COGNOME e numero di MATRICOLA
- ***FIRMARE** l'elaborato*
- *MOTIVARE e COMMENTARE adeguatamente le formule utilizzate*

Fisica - Appello dell'08/02/19 - Traccia di soluzione

Quesito 1

a)
- Durante l'urto non ci sono momenti di forze esterne impulsive. Si conserva il momento angolare totale rispetto al polo O.
- L'urto è completamente anelastico (i due corpi dopo l'urto hanno la stessa velocità V). Imponendo la conservazione del momento angolare (proiettato su un asse z entrante nel foglio) scriviamo:
$$bmv_0 = b(M+m)V$$
- La velocità del blocchetto dopo l'urto è perciò:
$$\boxed{V = \frac{m}{M+m} v_0}$$

b)
- Il blocchetto appoggia su un tavolo. Perciò, durante il suo moto successivo all'urto, in cui striscia sul tavolo, agisce una forza d'attrito radente:
$$F_a = \mu_d |\vec{R}_n|$$
essendo $\vec{R}_n$ la reazione normale del piano d'appoggio.
- Poiché non c'è moto nella direzione ortogonale al piano d'appoggio la reazione normale bilancia la forza peso. Poiché dopo l'urto il proiettile è conficcato nel blocchetto di legno, va considerata la forza peso complessiva:
$$R_n = P_{tot} = (M+m)\, g$$
da cui:
$$F_a = \mu_d\, (M+m)\, g$$
- Se il blocchetto compie N giri (di raggio b) prima di fermarsi, in questo moto la forza d'attrito compie un lavoro:
$$\mathcal{L}_a = \int_{N\ giri} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -F_a \cdot (2\pi b)\, N = 2\pi b \mu_d\, g N (M+m)$$
ricordando che $\vec{F}_a$ si oppone sempre al moto ed è quindi antiparallela a $d\vec{r}$ in ogni punto.
- La forza d'attrito è l'unica forza presente che compie lavoro, si può quindi applicare il teorema delle forze vive:
$$\Delta E_K = \mathcal{L}_{tot} = \mathcal{L}_a$$
$$0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 = -F_a (2\pi b) N$$
$$\frac{1}{2}(M+m)\frac{m^2}{(M+m)^2} v_0^2 = 2\pi b \mu_d\, g N (M+m)$$
$$\boxed{N = \frac{m^2 v_0^2}{4\pi (M+m)^2 b \mu_d\, g}}$$

Quesito 2

- Nel moto di rivoluzione del satellite (considerato di massa m) si conserva l'energia meccanica totale:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$$

Uguagliamo l'energia meccanica al perigeo all'energia meccanica all'apogeo:

$$\frac{1}{2}mv_P^2 - G\frac{mM}{r_P} = \frac{1}{2}mv_A^2 - G\frac{mM}{r_A}$$

da cui, semplificando m, moltiplicando per 2 ambo i membri e riordinando i termini:

$$v_P^2 - v_A^2 = 2GM\frac{r_A - r_P}{r_A r_P}$$

- Nel moto di rivoluzione si conserva anche il momento angolare $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. All'apogeo e al perigeo $\vec{r} \perp \vec{v}$ quindi possiamo scrivere semplicemente:

$$r_P\, mv_P = r_A\, mv_A \qquad \Rightarrow \qquad v_P = v_A\frac{r_A}{r_P}$$

- Sostituendo la relazione così trovata tra v_P e v_A nell'espressione ricavata dalla conservazione dell'energia, otteniamo:

$$v_A^2\left(\frac{r_A^2}{r_P^2} - 1\right) = 2GM\frac{r_A - r_P}{r_A r_P}$$

da cui si ricava:

$$v_A^2 = 2GM\frac{r_P^2}{r_A^2 - r_P^2}\frac{r_A - r_P}{r_A r_P} = 2GM\frac{r_P}{(r_A - r_P)(r_A + r_P)}\frac{r_A - r_P}{r_A} = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_P}{r_A}$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{\frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_P}{r_A}}}$$

- Riutilizzando la relazione $v_P = v_A\frac{r_A}{r_P}$ è allora immediato ottenere:

$$\boxed{v_P = \sqrt{\frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_A}{r_P}}}$$

Quesito 3

a)
- Fissiamo un sistema di assi cartesiani, avente l'asse x orizzontale, con origine nella posizione di equilibrio della molla e orientato verso destra, e l'asse y verticale, orientato verso l'alto. L'asse z è quindi uscente dal piano del foglio. In particolare, il sistema di riferimento è fissato in modo che le coordinate del centro C della ruota siano (durante il moto) $(x, 0)$.
- Studiamo le forze applicate alla ruota durante il moto, considerando che rotoli senza strisciare (nel punto di contatto vi può essere attrito statico e non dinamico).
  - **forza peso** $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ applicata al baricentro C.
  - **forza di reazione del piano** $\vec{R}_n = R_n\vec{u}_y$ applicata al punto di appoggio della ruota sul piano

- **forza di attrito statico** $\vec{F}_a = \pm|F_a|\vec{u}_x$, applicata al punto di appoggio della ruota sul piano. Il suo verso è sempre opposto al moto istantaneo della ruota.
- **forza elastica della molla** $\vec{F}_{el} = -kx\vec{u_x}$ applicata a C

- Denominiamo P il punto istantaneo di appoggio della ruota sul piano. Scriviamo la seconda equazione cardinale della meccanica per la ruota, usando come polo il centro di istantanea rotazione, ovvero P. L'unica forza che ha momento non nullo rispetto a quel polo è la forza elastica:
$$\frac{d}{dt}\vec{L}_P = \vec{\tau}_P^{(est)}$$
$$I_P\,\alpha\vec{u}_z = \overrightarrow{PC} \times \vec{F}_{el} = -F_{el}R\,\vec{u}_z = kxR\vec{u}_z$$
essendo α l'accelerazione angolare della ruota e I_P il suo momento di inerzia rispetto a P. L'equazione qui sopra può essere scritta anche scalarmente come:
$$I_P\,\alpha = kxR$$
- Ora, per il teorema di Huygens-Steiner:
$$I_P = I_C + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$
- Inoltre, poichè la ruota rotola senza strisciare, l'accelerazione angolare della ruota è legata (in modulo) all'accelerazione del suo centro dalla relazione:
$$|a_C| = R|\alpha|$$
Ora $|a_C| = \left|\frac{d^2x}{dt^2}\right|$. Possiamo valutare il segno ricordando che nel sistema di riferimento scelto un'accelerazione angolare α positiva (dal momento che $\vec{\alpha} = \alpha\vec{u}_z$) corrisponde a una accelerazione antioraria della ruota. In tale condizione il centro della ruota ha una accelerazione lineare diretta verso sinistra, ovvero negativa rispetto all'asse x fissato. Quindi:
$$\alpha = -\frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2}$$
- Sostituendo nell'equazione cardinale:
$$-\frac{3}{2}MR^2 \cdot \frac{1}{R}\frac{d^2x}{dt^2} = kxR$$
$$\frac{3}{2}M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$
Questa è l'equazione del moto per il centro C (ricordiamo che C$(x, 0)$) ed è l'equazione di un moto armonico con pulsazione:
$$\Omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$
La frequenza di oscillazione è:
$$\boxed{\nu = \frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{3M}}}$$

b)

- Da quanto ricavato al punto a) la legge oraria del moto di C può essere scritta come:
$$x(t) = A\cos(\Omega t + \phi)$$
dove A è la massima ampiezza di oscillazione.

- L'accelerazione del centro C è perciò:

$$a(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$$

a cui corrisponde una accelerazione angolare della ruota:

$$\alpha(t) = +\frac{A}{R}\Omega^2 \cos(\Omega t + \phi)$$

- L'accelerazione angolare massima (in modulo) si raggiunge quando $\Omega t + \phi = m\pi$ (con m intero) e vale:

$$|\alpha|_{max} = \frac{A}{R}\Omega^2$$

- Scriviamo ora la seconda equazione cardinale della meccanica per la ruota, ma rispetto al centro C. L'unica forza che dà momento non nullo, in questo caso, è la forza di attrito statico.

$$I_C\alpha = F_a R$$

- La forza di attrito statico ammissibile è limitata dalla relazione:

$$|F_a| \leq \mu_S |R_n|$$

Non essendoci moto in verticale la reazione normale bilancia esattamente la forza peso, per cui:

$$|R_n| = Mg$$

$$|F_a| \leq \mu_S Mg$$

- Nel punto del moto con accelerazione maggiore deve quindi essere:

$$I_C|\alpha|_{max} = F_a R \leq \mu_S MgR$$

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{A}{R}\Omega^2 \leq \mu_S MgR$$

quindi:

$$A \leq 2\frac{\mu_S g}{\Omega^2}$$

da cui sostituendo l'espressione di Ω ricavata al punto a):

$$\boxed{A_{max} = 3\frac{\mu_S Mg}{k}}$$

Quesito 4

Si veda il testo di teoria. Qui di seguito si ripercorrono i punti principali della dimostrazione:

- Si scrive il Primo Principio della Termodinamica in forma differenziale, ricordando che per un'adiabatica $\delta Q = 0$.

$$dU = \delta Q - \delta\mathcal{L}$$

$$nc_V\, dT = -pdV$$

- Dall'equazione di stato dei gas perfetti $p = \frac{nRT}{V}$. Perciò la precedente diventa:

$$c_V\frac{dT}{T} = -R\frac{dV}{V}$$

- Integrando tra uno stato iniziale e uno stato finale, rispettivamente a temperature T_0, T_1 e volumi V_0, V_1.

$$c_V \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} = -R \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V}$$
$$c_V \ln \frac{T_1}{T_0} = -R \ln \frac{V_1}{V_0}$$
$$\ln \frac{T_1}{T_0} = -\frac{R}{c_V} \ln \frac{V_1}{V_0}$$
$$\frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{-\frac{R}{c_V}}$$

- Di nuovo impieghiamo l'equazione di stato dei gas perfetti $T = \frac{pV}{nR}$ per scrivere:

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{p_1 V_1}{p_0 V_0}$$

da cui:

$$\frac{p_1 V_1}{p_0 V_0} = \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^{-\frac{R}{c_V}}$$

- Portando a sinistra tutti i termini con pedice 1 e a destra i termini con pedice 0:

$$p_1 V_1^{1+\frac{R}{c_V}} = p_0 V_0^{1+\frac{R}{c_V}}$$

- Ora:

$$1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_V + R}{c_V} = \frac{c_P}{c_V} = \gamma$$

dove abbiamo utilizzato la relazione di Mayer ($c_P = c_V + R$) e definito $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$. Si giunge quindi all'equazione di Poisson nella forma usuale:

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma = cost.$$

- Assumendo uno stato di riferimento a pressione p_0 e volume V_0, possiamo scrivere la pressione p di uno stato generico a volume V, durante la trasformazione adiabatica, come:

$$\boxed{p = p(V) = p_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma}$$